

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

*Ігор Самойленко
Андрій Заворотинський
Богдан Довгай
Роман Якимів*

Алгебра та геометрія

Евклідові простори та оператори. Білінійні та квадратичні форми

Навчальний посібник

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня

ОПП “Програмна інженерія”

спеціальності F2 “Інженерія програмного забезпечення”

УДК 512.64(075.8)

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри математичних проблем управління і кібернетики Навчально-наукового інституту фізико-математичних та комп'ютерних наук Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича Малик Ігор Володимирович;

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» Степаненко Наталія Вікторівна.

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 2 від 24 вересня 2026 р.)

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 2 від 23 вересня 2026 р.)

доктор фізико-математичних наук, професор кафедри дослідження операцій Ігор Валерійович Самойленко;

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри дослідження операцій Андрій Володимирович Заворотинський;

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри дослідження операцій Богдан Валерійович Довгай;

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри дослідження операцій Роман Ярославович Якимів.

Алгебра та геометрія. Евклідові простори та оператори. Білінійні та квадратичні форми: навчальний посібник : електронне видання / І. В. Самойленко, А. В. Заворотинський, Б. В. Довгай, Р. Я. Якимів ; за ред. проф. І. В. Самойленка. — Київ, 2026. — 108 с.

Навчальний посібник присвячено теорії евклідових просторів та операторів у них, а також білінійних і квадратичних форм. Він охоплює відповідний розділ матеріалу, передбаченого програмою обов'язкової навчальної дисципліни «Алгебра та геометрія» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня, які навчаються за освітньо-професійною програмою «Програмна інженерія» спеціальності F2 «Інженерія програмного забезпечення».

Видання призначене для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також для всіх, хто цікавиться евклідовими просторами, теорією операторів, білінійними та квадратичними формами і їхнім застосуванням у сучасних інформаційних технологіях.

Зміст

Зміст	3
Перелік позначень	4
Передмова	8
Вступ	9
Евклідовий простір	10
Тема 1. Евклідовий простір: скалярний добуток, норма, кут, ортогональність . . .	10
1.1 Вступ	10
1.2 Короткі теоретичні відомості	10
1.3 Алгоритми розв’язування типових задач	15
1.4 Типові задачі	18
1.5 Задачі для самостійного розв’язування	30
1.6 Прикладні задачі	35
1.7 Питання для самоконтролю	37
Тема 2. Оператори в евклідових просторах: спряжені, ортогональні та самоспряжені	39
2.1 Вступ	39
2.2 Короткі теоретичні відомості	40
2.3 Алгоритми розв’язування типових задач	45
2.4 Типові задачі	51
2.5 Задачі для самостійного розв’язування	61
2.6 Прикладні задачі	66
2.7 Питання для самоконтролю	69
Білінійні та квадратичні форми	71
Тема 3. Білінійні та квадратичні форми: матриця форми, канонічний вигляд, інерція, додатна визначеність	71
3.1 Вступ	71
3.2 Короткі теоретичні відомості	72
3.3 Алгоритми розв’язування типових задач	78
3.4 Типові задачі	85
3.5 Задачі для самостійного розв’язування	94
3.6 Прикладні задачі	98
3.7 Питання для самоконтролю	102
Бібліографія	104
Предметний покажчик	106

Перелік позначень

У цьому розділі зібрано основні позначення, символи та скорочення, що використовуються в темах про евклідові та унітарні простори, оператори в евклідових просторах, а також білінійні та квадратичні форми. Перелік фіксує прийняту в посібнику нотацію і полегшує читання математичного тексту.

Множини чисел і числові поля:

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

$\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел;

$\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ — поле комплексних чисел;

$\mathbb{R}^n$ — n -вимірний дійсний простір;

$\mathbb{C}^n$ — n -вимірний комплексний простір;

$\Re z, \Im z$ — відповідно дійсна та уявна частини комплексного числа z .

Простори, підпростори, базиси, координати:

F — поле скалярів;

V, W, U, L — лінійні простори або підпростори;

θ — нульовий вектор;

$e_1, \dots, e_n$ — стандартний базис простору $\mathbb{R}^n$;

$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормований базис;

$B = (a_1, \dots, a_n)$ — базис простору;

$[x]_B$ — координатний стовпчик вектора x у базисі B ;

$x = (x_1, \dots, x_n)^T$ — вектор-стовпчик у координатному записі;

$\dim V$ — розмірність простору V ;

$\text{Lin} \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ — лінійна оболонка векторів $a_1, \dots, a_k$;

$U + W$ — сума підпросторів U і W ;

$U \oplus W$ — пряма сума підпросторів U і W ;

$L^\perp$ — ортогональне доповнення підпростору L .

Евклідові та унітарні простори:

(x, y) — скалярний добуток у евклідовому просторі або ермітів добуток в унітарному просторі;

$\|x\|$ — норма вектора x ;

$\rho(x, y)$ — відстань між векторами x і y ;

φ — кут між ненульовими векторами;

$\text{pr}_L x$ — ортогональна проєкція вектора x на підпростір L ;

$G = ((x_i, x_j))_{i,j=1}^m$ — матриця Грама системи векторів;

$\det G$ — визначник Грама.

Лінійні перетворення та оператори:

$T, S, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ — лінійні перетворення або лінійні оператори;

$\ker T$ — ядро оператора T ;

$\Im T$ — образ оператора T ;

$\text{rank } T$ — ранг оператора T ;

$\text{def } T$ — дефект оператора T ;

$[T]_B, [T]_{\mathcal{E}}$ — матриця оператора T у базисі B або $\mathcal{E}$;

T^* — спряжений оператор до T ;

I — тотожний оператор;

T^{-1} — обернений оператор;

$P_{U\|W}$ — оператор проєктування на підпростір U паралельно підпростору W .

Матриці та спектральні позначення:

$M_{m,n}(F)$ — простір матриць розміру $m \times n$ над полем F ;

$M_n(F)$ — простір квадратних матриць порядку n над полем F ;

I_n — одинична матриця порядку n ;

$A^\top$ — транспонована матриця до A ;

A^* — ермітово спряжена матриця до A ;

A^{-1} — обернена матриця до A ;

$\det A$ — визначник матриці A ;

$\text{rank } A$ — ранг матриці A ;

$\text{tr } A$ — слід матриці A ;

$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — діагональна матриця з діагональними елементами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$;

$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — діагональна матриця власних значень;

Δ_k — кутовий мінор порядку k ;

Q — ортогональна матриця;

U — унітарна матриця;

$T_{B_2 \rightarrow B_1}$ — матриця переходу від базису B_2 до базису B_1 .

Білінійні та квадратичні форми:

$B(x, y)$ — білінійна функція;

$Q(x)$ — квадратична функція; у фіксованому базисі її координатний запис задає квадратичну форму;

$A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ — матриця білінійної або квадратичної функції в заданому базисі;

$\alpha_{ij} = B(a_i, a_j)$ — коефіцієнти матриці білінійної функції в заданому базисі;

p, q, r_0 — відповідно додатний, від’ємний і нульовий індекси інерції;

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — коефіцієнти канонічного вигляду квадратичної форми або власні значення матриці форми;

$\text{rank } Q$ — ранг квадратичної функції.

Простори многочленів і функцій:

$F[x]$ — простір многочленів над полем F ;

$P_n(x)$ — простір многочленів степеня не вище n від змінної x ;

$P_n[t]$ — той самий простір при позначенні змінної через t ;

$C[a, b]$ — простір неперервних функцій на відрізку $[a, b]$;

$C^{(m)}([a, b])$ — простір функцій, що мають на $[a, b]$ неперервні похідні до порядку m включно.

Скорочення:

СЛАР — система лінійних алгебраїчних рівнянь;

ФСР — фундаментальна система розв’язків;

IT — інформаційні технології;

CAD — computer-aided design;

DS — Data Science;

ML — Machine Learning;

AI — Artificial Intelligence;

PCA — Principal Component Analysis;

SVD — Singular Value Decomposition;

QR — QR-розклад;

CI/CD — Continuous Integration / Continuous Delivery.

Логічні та службові позначення:

$:=$ — дорівнює за означенням;

$\Rightarrow$ — логічно впливає;

$\Leftrightarrow$ — еквівалентно;

$\sim$ — пов'язано еквівалентними перетвореннями Жордана–Гауса;

$\forall$ — для всіх;

$\exists$ — існує.

Латинський алфавіт

Букви	Назви букв	Букви	Назви букв	Букви	Назви букв
A a	а	J j	йот	S s	ес
B b	бе	K k	ка	T t	те
C c	це	L l	ель	U u	у
D d	де	M m	ем	V v	ве (фау)
E e	е	N n	ен	W w	дубль-ве
F f	еф	O o	о	X x	ікс
G g	ге	P p	пе	Y y	ігрек
H h	аш	Q q	ку	Z z	зет
I i	і	R r	ер		

Грецький алфавіт

Букви	Назви букв	Букви	Назви букв
$A \alpha$	альфа	$N \nu$	ню
$B \beta$	бета	$\Xi \xi$	ксі
$\Gamma \gamma$	гамма	$O o$	омікрон
$\Delta \delta$	дельта	$\Pi \pi$	пі
$E \epsilon$	епсilon	$P \rho$	ро
$Z \zeta$	дзета	$\Sigma \sigma$	сигма
$H \eta$	ета	$T \tau$	тау
$\Theta \theta$	тета	$\Upsilon \upsilon$	іпсilon
$I \iota$	йота	$\Phi \varphi$	фі
$K \kappa$	каппа	$X \chi$	хі
$\Lambda \lambda$	ламбда	$\Psi \psi$	псі
$M \mu$	мю	$\Omega \omega$	омега

Передмова

Навчальний посібник *«Алгебра та геометрія. Евклідові простори та оператори. Білінійні та квадратичні форми»* підготовлено для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня, які навчаються за освітньо-професійною програмою «Програмна інженерія» спеціальності F2 «Інженерія програмного забезпечення» на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Посібник охоплює частину матеріалу другого семестру нормативної дисципліни «Алгебра та геометрія» і розрахований насамперед на практичну роботу та самостійне опрацювання курсу.

У цьому томі зібрано фінальні теми курсу: евклідові простори, оператори в евклідових просторах, білінійні й квадратичні форми. Тут лінійна алгебра набуває виразного геометричного змісту. Скалярний добуток, норма, кут, ортогональність, проєкції, спряжені та самоспряжені оператори складаються в єдиний робочий апарат. Для майбутнього фахівця з інженерії програмного забезпечення цей матеріал є важливою частиною фундаментальної математичної підготовки. Евклідові простори, ортогональні розклади, матриці операторів, білінійні й квадратичні форми лежать в основі багатьох обчислювальних підходів — від комп'ютерної графіки й обробки даних до чисельних методів, оптимізації та аналізу моделей.

Посібник спирається на багаторічний досвід викладання курсу «Алгебра та геометрія» на факультеті. В основу видання покладено лекційні курси з алгебри та геометрії, які в різні роки читали Б. В. Довгай та І. В. Самойленко. Це дозволило зберегти теоретичну основу курсу і подати матеріал у формі, зручній для теперішньої навчальної роботи. Цей том продовжує серію навчально-методичних видань з курсу «Алгебра та геометрія» кафедри дослідження операцій, тому важливо було зберегти спільну логіку викладу, єдність позначень і послідовний перехід від одного розділу до іншого.

Кількість аудиторних годин, відведених на практичну підготовку, останніми роками зменшується, тому дедалі більшої ваги набуває самостійна робота студента. Цим пояснюється структура посібника: кожна тема містить вступ, короткі теоретичні відомості, алгоритми, розв'язані приклади, завдання для самостійного опрацювання, прикладні задачі та питання для самоконтролю. Для зручності використано кольорове виділення різних типів матеріалу: означень, теорем, зауважень, прикладів, алгоритмів, задач і допоміжних блоків. Це полегшує роботу з текстом і допомагає швидше знаходити потрібний фрагмент. У прикладах і задачах послідовно тримається зв'язок теорії з тими ситуаціями, де цей апарат справді працює: зміна координат, ортогональні розклади, наближення, аналіз матриць, дослідження властивостей операторів, задачі оцінювання й оптимізації.

Під час підготовки рукопису інструменти штучного інтелекту використовувалися як допоміжний засіб для редагування окремих фрагментів тексту й технічного впорядкування матеріалу. Добір змісту, математичні формулювання, розв'язання задач і перевірку коректності викладу автори виконували самостійно.

Посібник призначений для роботи на практичних заняттях, підготовки до модульних контрольних робіт і повторення матеріалу. Його головне завдання — дати студенту зручний і послідовно побудований матеріал для опрацювання відповідного розділу курсу «Алгебра та геометрія».

Вступ

Курс алгебри та геометрії посідає важливе місце в підготовці студентів освітньо-професійної програми «Програмна інженерія». У цьому курсі виробляється вміння працювати з абстрактними об'єктами, точно формулювати твердження, бачити внутрішню будову математичної конструкції. Без такої підготовки важко впевнено рухатися далі — і в теоретичних дисциплінах, і в прикладних. Вона потрібна в роботі з моделями, алгоритмами, формальними описами даних, складними обчислювальними процедурами.

Цей посібник охоплює завершальний фрагмент курсу, де лінійна алгебра набуває виразного геометричного змісту. Після введення скалярного добутку з'являються довжина вектора, відстань, кут, ортогональність, ортонормовані базиси, проєкції, найкраще наближення. Вектор тепер описується не тільки координатами. Про нього можна говорити в термінах довжини, взаємного розташування, близькості до підпростору. Багато понять, закладених на початку курсу, тут розкриваються повніше.

На цій основі розглядаються оператори в евклідових просторах. Тут уже важливо, як оператор поводить себе щодо скалярного добутку, чи зберігає він довжини й кути, як пов'язаний із власними векторами, чи допускає зручний базис для дослідження. Спряжені, ортогональні та самоспряжені оператори становлять один із головних сюжетів цього розділу. Через них матриця перестає бути просто таблицею чисел і постає як запис дії на просторі — з алгебраїчного, геометричного й обчислювального погляду.

Поруч розглядаються і унітарні простори, де дійсний скалярний добуток замінюється ермітовим. Для основної лінії посібника визначальним лишається евклідів випадок, але комплексний аналог також важливо бачити. Частина конструкцій зберігається майже без змін, зате коло застосувань ширшає: обробка сигналів, спектральні методи, робота з комплексними даними тощо.

Білінійні та квадратичні форми завершують цей блок і весь курс. Тут сходяться кілька ліній одразу: координатний запис, зміна базису, геометричне тлумачення, техніка перетворень. Зведення до канонічного вигляду, закон інерції, критерій Сильвестра, геометричний зміст рівнянь другого порядку — це вузлові точки, у яких поєднуються ідеї з різних частин курсу. Тут уже доводиться працювати не з окремими прийомами, а з цілісним апаратом, який підсумовує пройдений матеріал.

Ортогональні розклади, проєкції та задачі на найкраще наближення з'являються в чисельних методах і аналізі даних. Матричні подання операторів і спектральні характеристики потрібні під час дослідження моделей та побудови стійких обчислювальних схем. Квадратичні форми виникають у задачах оптимізації, оцінювання похибок, аналізу стійкості. Навіть там, де користувач програмної системи цих назв не бачить, відповідний апарат часто працює всередині алгоритму. Послідовність викладу в посібнику підпорядкована внутрішній логіці цього розділу: від скалярного добутку, норми, кута й ортогональності — до проєкцій, ортогоналізації, операторів в евклідових і унітарних просторах, а далі — до білінійних і квадратичних форм, їхніх матриць, критеріїв і геометричних інтерпретацій.

Цей розділ поєднує кілька ліній курсу: простори, матриці, оператори, форми, базиси, геометричні уявлення та прикладні моделі. Він завершує курс алгебри та геометрії. Поняття, які раніше розглядалися окремо, складаються тут у цілісну систему.

Евклідовий простір

Тема 1. Евклідовий простір: скалярний добуток, норма, кут, ортогональність

1.1 Вступ

Евклідовий простір продовжує тему лінійних просторів уже в геометричному плані. Після введення скалярного добутку з'являються довжина вектора, відстань, кут, ортогональність. Лінійні конструкції при цьому набувають геометричного змісту.

Поряд з евклідовими просторами розглядають і унітарні простори. Це комплексний аналог евклідових просторів. Основні геометричні поняття зберігаються, але замість звичайного скалярного добутку використовується ермітів.

У темі розглянуто аксіоми скалярного добутку, норму, відстань, кут, нерівність Коші–Буняковського та нерівність трикутника. Після цього вводяться ортогональні й ортонормовані системи, процес Грама–Шмідта, ортогональне доповнення та матриця Грама. Далі ці поняття використовуються під час вивчення операторів.

Вектори виникають у задачах подання даних, опису ознак, аналізу сигналів, обробки зображень, побудови моделей. Скалярний добуток і норма використовуються під час оцінювання близькості об'єктів, у рекомендаційних системах, у побудові та порівнянні embedding-подань¹, у методах класифікації та кластеризації. Ортогональність і ортонормовані системи потрібні в комп'ютерній графіці, 3D-модельованні, навігації, а також у чисельних методах, де від них залежать стійкість і точність обчислень. Унітарні простори й унітарні оператори мають важливі застосування в роботі з комплексними даними, гармонічному аналізі, перетвореннях Фур'є та квантових обчисленнях.

Скалярний добуток, норма, кут, ортогональність і ортогоналізація належать до ключових понять усього курсу. Надалі ці поняття будуть потрібні і в операторних задачах, і в обчисленнях.

1.2 Короткі теоретичні відомості

Евклідовий простір є лінійним простором, у якому задано скалярний добуток. Завдяки цьому в просторі можна говорити про довжину вектора, відстань, кут і ортогональність. На цій основі вводяться ортогональні та ортонормовані системи векторів.

Поруч з евклідовими просторами розглядають і унітарні простори. Це комплексний аналог евклідових просторів: геометричні поняття лишаються тими самими, але скалярний добуток записується інакше.

¹Embedding (векторне подання) — це подання об'єкта у вигляді вектора в просторі ознак, де близькі вектори відповідають схожим за змістом або функцією об'єктам.

Означення 1.1: Евклідовий простір і скалярний добуток

Лінійний простір V над полем дійсних чисел називається *евклідовим простором*, якщо кожній парі векторів $x, y \in V$ поставлено у відповідність число $(x, y) \in \mathbb{R}$ так, що для всіх $x, y, z \in V$ і всіх $\alpha \in \mathbb{R}$ виконуються умови:

1. $(x, y) = (y, x)$;
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
4. $(x, x) \geq 0$, причому $(x, x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = \theta$.

Функція (x, y) називається *скалярним добутком*.

Для дійсного випадку цього означення досить. У комплексному випадку одну з аксіом треба змінити, і так виникає поняття унітарного простору.

Означення 1.2: Унітарний простір

Лінійний простір V над полем комплексних чисел називається *унітарним простором*, якщо кожній парі векторів $x, y \in V$ поставлено у відповідність число $(x, y) \in \mathbb{C}$ так, що для всіх $x, y, z \in V$ і всіх $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ виконуються умови:

1. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$;
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
3. $(x, x) \geq 0$;
4. $(x, x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = \theta$.

Функція (x, y) називається *ермітовим скалярним добутком*.

Зауваження про комплексний випадок

У цьому посібнику *ермітів скалярний добуток* вважається лінійним за першим аргументом. Тоді за другим аргументом маємо

$$(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z).$$

Найзручніше побачити різницю між дійсним і комплексним випадком на стандартних прикладах.

Приклад 1.1: Стандартний скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$

У просторі $\mathbb{R}^n$ для векторів $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$, $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$ скалярний добуток задається формулою

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Приклад 1.2: Стандартний ермітів добуток у $\mathbb{C}^n$

У просторі $\mathbb{C}^n$ для векторів $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ ермітів добуток задається формулою

$$(x, y) = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}.$$

Зокрема,

$$(x, x) = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2.$$

Крім $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$, скалярний добуток природно з'являється і в інших просторах.

Приклад 1.3: Скалярний добуток у просторі неперервних функцій $C[a, b]$

У просторі $C[a, b]$ для неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій $f(t)$ та $g(t)$ скалярний добуток задається формулою

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Зокрема, на скінченновимірному просторі многочленів $P_n[t]$ цей вираз визначає евклідовий простір.

Приклад 1.4: Скалярний добуток у просторі матриць $M_{m,n}(\mathbb{R})$

У просторі дійсних матриць $M_{m,n}(\mathbb{R})$ для матриць $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ скалярний добуток задається як сума добутків відповідних елементів:

$$(A, B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}.$$

Використовуючи операцію сліду tr , цю ж формулу можна записати у матричному вигляді:

$$(A, B) = \text{tr}(A^T B).$$

Тепер можна ввести метричні характеристики простору.

Означення 1.3: Норма, відстань і кут

Нормою вектора $x \in V$ називається число

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Відстанню між векторами x і y називається число

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Кутом між ненульовими векторами x і y називається кут $\varphi \in [0, \pi]$, для якого

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}.$$

Норма в унітарному просторі

В унітарному просторі норма задається тією самою формулою

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Оскільки $(x, x) \in \mathbb{R}$ і $(x, x) \geq 0$, ця величина коректно визначена.

Із властивостей скалярного добутку одразу випливають дві основні нерівності.

Теорема 1.1: Нерівність Коші–Буняковського

Для будь-яких векторів $x, y \in V$ виконується нерівність

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли вектори x і y лінійно залежні.

Наслідок 1.1: Нерівність трикутника

Для будь-яких векторів $x, y \in V$ виконується

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Далі розглянемо ортогональність систем векторів.

Означення 1.4: Ортогональність

Вектори $x, y \in V$ називаються *ортогональними*, якщо

$$(x, y) = 0.$$

Система векторів $\{x_1, \dots, x_m\}$ називається *ортогональною*, якщо

$$(x_i, x_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Ортогональна система називається *ортонормованою*, якщо, крім того,

$$\|x_i\| = 1, \quad i = 1, \dots, m.$$

Теорема 1.2: Ортогональна система ненульових векторів

Будь-яка ортогональна система ненульових векторів є лінійно незалежною.

Теорема 1.3: Процес Грама–Шмідта

Кожну лінійно незалежну систему векторів у евклідовому просторі можна замінити на ортогональну систему ненульових векторів з тією ж самою лінійною оболонкою. Після нормування одержується ортонормована система.

Після ортогональних систем зручно ввести ортогональне доповнення і матрицю Грама.

Означення 1.5: Ортогональне доповнення

Нехай $L \subset V$ — підпростір. *Ортогональним доповненням* підпростору L називається множина

$$L^\perp = \{x \in V \mid (x, y) = 0 \text{ для всіх } y \in L\}.$$

Означення 1.6: Матриця Грама

Для системи векторів $\{x_1, \dots, x_m\}$ *матрицею Грама* називається матриця

$$G = ((x_i, x_j))_{i,j=1}^m.$$

Для ортогональної системи матриця Грама є діагональною:

$$G = \text{diag}(|x_1|^2, \dots, |x_m|^2),$$

а для ортонормованої системи

$$G = I_m.$$

Геометричний зміст матриці Грама

Матриця Грама містить усі попарні скалярні добутки системи векторів. Її визначник дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли система є лінійно залежною.

У скінченновимірному евклідовому просторі ортонормований базис дозволяє перейти до стандартного координатного запису.

Теорема 1.4: Ізоморфізм скінченновимірних евклідових просторів

Нехай V — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n . Якщо в V зафіксовано ортонормований базис $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$, то відображення

$$\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_n)$$

є *ізоморфізмом евклідових просторів*, тобто

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$$

для всіх $x, y \in V$.

Координатний зміст ортонормованого базису

Наведена теорема означає, що кожний скінченновимірний евклідовий простір після вибору ортонормованого базису можна розглядати як стандартний евклідовий простір $\mathbb{R}^n$. Саме тому більшість обчислень у евклідовому просторі зводиться до звичних координатних формул.

1.3 Алгоритми розв'язування типових задач

Алгоритм обчислення скалярного добутку, норми, відстані та кута між векторами

Нехай у просторі $\mathbb{R}^n$ задано вектори $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$, $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$.

Крок 1. Обчислити скалярний добуток:

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Крок 2. Знайти норми векторів:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Крок 3. Якщо потрібно знайти відстань між векторами, обчислити

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Крок 4. Якщо $x \neq \theta$ і $y \neq \theta$, знайти кут між векторами за формулою

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}.$$

Результат. Одержуємо скалярний добуток, норми, відстань і кут між векторами.

Алгоритм перевірки ортогональності та ортонормованості системи векторів

Нехай задано систему векторів $\{x_1, \dots, x_m\}$.

Крок 1. Для кожної пари різних векторів x_i, x_j , $i \neq j$, обчислити скалярний добуток

$$(x_i, x_j).$$

Крок 2. Якщо для всіх $i \neq j$ виконується

$$(x_i, x_j) = 0,$$

то система є ортогональною.

Крок 3. Для кожного вектора x_i знайти норму

$$\|x_i\| = \sqrt{(x_i, x_i)}.$$

Крок 4. Якщо система ортогональна і для всіх i

$$\|x_i\| = 1,$$

то система є ортонормованою.

Результат. Встановлюється, чи є система ортогональною або ортонормованою.

Алгоритм побудови ортонормованої системи з ортогональної

Нехай задано ортогональну систему ненульових векторів $\{x_1, \dots, x_m\}$.

Крок 1. Для кожного $i = 1, \dots, m$ обчислити норму

$$\|x_i\| = \sqrt{(x_i, x_i)}.$$

Крок 2. Поділити кожний вектор на його норму:

$$q_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Результат. Система $\{q_1, \dots, q_m\}$ є ортонормованою.

Алгоритм ортогоналізації Грама–Шмідта

Нехай задано лінійно незалежну систему векторів $\{x_1, \dots, x_m\}$.

Крок 1. Покласти

$$u_1 = x_1.$$

Крок 2. Для $k = 2, \dots, m$ послідовно обчислювати

$$u_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(x_k, u_j)}{(u_j, u_j)} u_j.$$

Крок 3. Перевірити, що $u_k \neq \theta$. Якщо вихідна система лінійно незалежна, то всі вектори u_k будуть ненульовими.

Крок 4. Якщо потрібно побудувати ортонормовану систему, виконати нормування:

$$q_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Результат. Одержуємо ортогональну систему $\{u_1, \dots, u_m\}$ або ортонормовану систему $\{q_1, \dots, q_m\}$.

Цей алгоритм називається процесом Грама–Шмідта.

Алгоритм знаходження ортогонального доповнення підпростору

Нехай підпростір $L \subset \mathbb{R}^n$ задано системою векторів $\{a_1, \dots, a_m\}$, $L = \text{Lin} \langle a_1, \dots, a_m \rangle$.

Крок 1. Ввести довільний вектор

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T.$$

Крок 2. Записати умови ортогональності вектора x до всіх векторів, що породжують підпростір L :

$$(x, a_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Крок 3. Одержати систему лінійних однорідних рівнянь відносно координат $x_1, \dots, x_n$.

Крок 4. Розв'язати цю систему. Загальний розв'язок описує всі вектори з $L^\perp$.

Крок 5. Із загального розв'язку виділити базис підпростору $L^\perp$.

Крок 6. Якщо потрібно, застосувати процес Грама–Шмідта до знайденого базису і побудувати ортонормований базис підпростору $L^\perp$.

Результат. Одержуємо базис або ортонормований базис ортогонального доповнення $L^\perp$.

Алгоритм знаходження ортогональної проєкції вектора на підпростір

Нехай підпростір $L \subset V$ має ортонормований базис $\{e_1, \dots, e_m\}$, а також задано вектор $x \in V$.

Крок 1. Обчислити скалярні добутки

$$(x, e_1), \dots, (x, e_m).$$

Крок 2. Побудувати вектор

$$p = (x, e_1)e_1 + \dots + (x, e_m)e_m.$$

Результат. Вектор $p = \text{pr}_L x \in \text{ортогональною проєкцією вектора } x \text{ на підпростір } L$.

Алгоритм знаходження ортогональної складової вектора

Нехай підпростір $L \subset V$ має ортонормований базис $\{e_1, \dots, e_m\}$, а $x \in V$.

Крок 1. Знайти ортогональну проєкцію вектора x на підпростір L :

$$p = \text{pr}_L x.$$

Крок 2. Обчислити різницю $z = x - p$.

Результат. Вектор $z \in \text{ортогональною складовою вектора } x \text{ відносно підпростору } L$, причому $z \in L^\perp$.

Алгоритм побудови матриці Грама системи векторів

Нехай задано систему векторів $\{x_1, \dots, x_m\}$.

Крок 1. Для всіх $i, j = 1, \dots, m$ обчислити скалярні добутки (x_i, x_j) .

Крок 2. Розташувати ці числа у вигляді матриці $G = ((x_i, x_j))_{i,j=1}^m$.

Крок 3. Проаналізувати вигляд матриці Грама:

1. якщо G діагональна, то система ортогональна;
2. якщо $G = I_m$, то система ортонормована;
3. якщо $\det G \neq 0$, то система лінійно незалежна.

Результат. Матриця Грама дає змогу досліджувати ортогональність, ортонормованість і лінійну незалежність системи.

1.4 Типові задачі

Задача 1.1: Перевірка аксіом скалярного добутку

У просторі $\mathbb{R}^2$ для довільних векторів $x = (x_1, x_2)^\top$, $y = (y_1, y_2)^\top$ задано функцію

$$(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

Потрібно:

1. перевірити, чи є задана функція скалярним добутком у $\mathbb{R}^2$;
2. записати відповідну матрицю Грама в стандартному базисі;
3. знайти норму вектора $x = (1, -1)^\top$ відносно цього скалярного добутку;
4. знайти скалярний добуток і кут між векторами $x = (1, -1)^\top$ та $y = (1, 1)^\top$.

Розв'язання.

Задана функція має вигляд

$$(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

1. *Перевіримо, чи є вона скалярним добутком.* Лінійність за кожним аргументом очевидна з формули. Симетричність також виконується, оскільки

$$(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 = 2y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + 3y_2x_2 = (y, x).$$

Перевіримо додатну визначеність. Для вектора $x = (x_1, x_2)^\top$ маємо

$$(x, x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Подамо цей вираз у вигляді

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + 2x_2^2.$$

Отже,

$$(x, x) \geq 0,$$

і рівність можлива лише тоді, коли

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Тобто

$$(x, x) = 0 \iff x = \theta.$$

Отже, задана функція є скалярним добутком у $\mathbb{R}^2$.

2. *Запишемо матрицю Грама стандартного базису.* Нехай

$$e_1 = (1, 0)^\top, \quad e_2 = (0, 1)^\top.$$

Тоді

$$(e_1, e_1) = 2, \quad (e_1, e_2) = 1, \quad (e_2, e_1) = 1, \quad (e_2, e_2) = 3.$$

Отже,

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Знайдемо норму вектора $x = (1, -1)^T$. Оскільки

$$(x, x) = 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)^2 = 2 - 1 - 1 + 3 = 3.$$

Тому

$$\|x\| = \sqrt{3}.$$

4. Знайдемо скалярний добуток і кут між векторами $x = (1, -1)^T$ та $y = (1, 1)^T$.

$$(x, y) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 = 2 + 1 - 1 - 3 = -1.$$

Далі

$$(y, y) = 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 = 7,$$

тому

$$\|y\| = \sqrt{7}.$$

Отже,

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} = \frac{-1}{\sqrt{3} \sqrt{7}} = -\frac{1}{\sqrt{21}}.$$

Тому

$$\varphi = \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{21}} \right).$$

Відповідь. Задана функція є скалярним добутком;

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \|x\| = \sqrt{3}, \quad (x, y) = -1,$$

$$\|y\| = \sqrt{7}, \quad \cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{21}}, \quad \varphi = \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{21}} \right).$$

Задача 1.2: Скалярний добуток, норми, відстань і кут між векторами

У просторі $\mathbb{R}^3$ задано вектори $x = (1, 2, -1)^T$, $y = (2, 0, 1)^T$.

Потрібно:

1. знайти скалярний добуток (x, y) ;
2. обчислити норми $\|x\|$ і $\|y\|$;
3. знайти відстань між векторами x і y ;
4. обчислити кут між векторами x і y ;
5. з'ясувати, чи є вектори x і y ортогональними.

Розв'язання.

У просторі $\mathbb{R}^3$ використовується стандартний скалярний добуток

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

1. Знайдемо скалярний добуток:

$$(x, y) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 1.$$

2. Обчислимо норми:

$$\|x\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}, \quad \|y\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

3. Знайдемо відстань між векторами.

$$x - y = (1, 2, -1)^T - (2, 0, 1)^T = (-1, 2, -2)^T,$$

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

4. Знайдемо кут між векторами:

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} = \frac{1}{\sqrt{6} \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{30}}.$$

Отже,

$$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{30}}.$$

5. Перевіримо ортогональність:

Оскільки

$$(x, y) = 1 \neq 0,$$

то вектори x і y не є ортогональними.

Відповідь.

$$(x, y) = 1, \quad \|x\| = \sqrt{6}, \quad \|y\| = \sqrt{5}, \quad \rho(x, y) = 3, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{30}}, \quad \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{30}}.$$

Вектори x і y не є ортогональними.

Задача 1.3: Ортогональність, ортонормованість і матриця Грама

У просторі $\mathbb{R}^3$ задано систему векторів

$$x_1 = (1, 1, 0)^T, \quad x_2 = (1, -1, 0)^T, \quad x_3 = (0, 0, 1)^T.$$

Потрібно:

1. перевірити, чи є система $\{x_1, x_2, x_3\}$ ортогональною;
2. перевірити, чи є вона ортонормованою;
3. побудувати матрицю Грама цієї системи;

4. знайти визначник Грама;
5. зробити висновок про лінійну незалежність заданої системи.

Розв'язання.

Розглянемо систему

$$x_1 = (1, 1, 0)^T, \quad x_2 = (1, -1, 0)^T, \quad x_3 = (0, 0, 1)^T.$$

1. Перевіримо ортогональність.

$$(x_1, x_2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 0, \quad (x_1, x_3) = 0, \quad (x_2, x_3) = 0.$$

Отже, система $\{x_1, x_2, x_3\}$ є ортогональною.

2. Перевіримо ортонормованість.

$$\|x_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \quad \|x_2\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \quad \|x_3\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1.$$

Оскільки не всі норми дорівнюють 1, система не є ортонормованою.

3. Побудуємо матрицю Грама.

$$G = \begin{pmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & (x_1, x_3) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & (x_2, x_3) \\ (x_3, x_1) & (x_3, x_2) & (x_3, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайдемо визначник Грама.

$$\det G = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4.$$

5. Зробимо висновок про лінійну незалежність. Оскільки

$$\det G = 4 \neq 0,$$

то система векторів $\{x_1, x_2, x_3\}$ є лінійно незалежною.

Відповідь. Система $\{x_1, x_2, x_3\}$ є ортогональною, але не є ортонормованою;

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det G = 4.$$

Отже, система лінійно незалежна.

Задача 1.4: Ортогоналізація системи векторів методом Грама–Шмідта

У просторі $\mathbb{R}^3$ задано вектори

$$v_1 = (1, 1, 0)^T, \quad v_2 = (1, 0, 1)^T, \quad v_3 = (0, 1, 1)^T.$$

Потрібно:

1. застосувати процес Грама–Шмідта до системи v_1, v_2, v_3 ;
2. побудувати ортогональну систему u_1, u_2, u_3 ;
3. побудувати відповідну ортонормовану систему e_1, e_2, e_3 ;
4. перевірити ортогональність і ортонормованість одержаної системи;
5. записати матрицю Грама ортонормованої системи.

Розв’язання.

Застосуємо процес Грама–Шмідта до системи

$$v_1 = (1, 1, 0)^T, \quad v_2 = (1, 0, 1)^T, \quad v_3 = (0, 1, 1)^T.$$

1. Побудуємо ортогональну систему. Покладемо

$$u_1 = v_1 = (1, 1, 0)^T.$$

Далі

$$u_2 = v_2 - \frac{(v_2, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1.$$

Маємо

$$(v_2, u_1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1, \quad (u_1, u_1) = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2.$$

Тому

$$u_2 = (1, 0, 1)^T - \frac{1}{2}(1, 1, 0)^T = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T.$$

Тепер

$$u_3 = v_3 - \frac{(v_3, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1 - \frac{(v_3, u_2)}{(u_2, u_2)} u_2.$$

Обчислимо:

$$(v_3, u_1) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1, \quad \frac{(v_3, u_1)}{(u_1, u_1)} = \frac{1}{2}.$$

Далі

$$(v_3, u_2) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

$$(u_2, u_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{3}{2}, \quad \frac{(v_3, u_2)}{(u_2, u_2)} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}.$$

Отже,

$$u_3 = (0, 1, 1)^T - \frac{1}{2}(1, 1, 0)^T - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)^T - \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)^T = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T.$$

Таким чином, ортогональна система має вигляд

$$u_1 = (1, 1, 0)^T, \quad u_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T, \quad u_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T.$$

2. Побудуємо ортонормовану систему.

$$\|u_1\| = \sqrt{2}, \quad \|u_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \|u_3\| = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Тому

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T, \\ q_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)^T, \\ q_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T. \end{aligned}$$

3. Перевіримо ортонормованість. За побудовою вектори q_1, q_2, q_3 попарно ортогональні і мають норму 1, отже система є ортонормованою.

4. Запишемо матрицю Грама ортонормованої системи. Оскільки система $\{q_1, q_2, q_3\}$ ортонормована, її матриця Грама дорівнює одиничній:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь.

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 1, 0)^T, \quad u_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)^T, \quad u_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)^T; \\ q_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T, \quad q_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)^T, \quad q_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T; \\ G &= I_3. \end{aligned}$$

Задача 1.5: Ортогоналізація системи многочленів

У просторі многочленів степеня не вище другого $P_2(x)$ задано скалярний добуток

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx.$$

Розглянемо систему многочленів

$$v_1(x) = 1, \quad v_2(x) = x, \quad v_3(x) = x^2.$$

Потрібно:

1. застосувати процес Грама–Шмідта до системи v_1, v_2, v_3 ;
2. побудувати ортогональну систему u_1, u_2, u_3 ;
3. побудувати відповідну ортонормовану систему q_1, q_2, q_3 ;

4. перевірити ортогональність одержаної системи;
5. записати матрицю Грама побудованої ортонормованої системи.

Розв'язання.

У просторі $P_2(x)$ задано скалярний добуток

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx.$$

Застосуємо процес Грама–Шмідта до системи

$$v_1(x) = 1, \quad v_2(x) = x, \quad v_3(x) = x^2.$$

1. Побудуємо ортогональну систему. Покладемо

$$u_1 = v_1 = 1.$$

Далі

$$u_2 = v_2 - \frac{(v_2, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1.$$

Оскільки

$$(v_2, u_1) = \int_{-1}^1 x dx = 0, \quad (u_1, u_1) = \int_{-1}^1 1 dx = 2,$$

отримаємо

$$u_2 = x.$$

Тепер

$$u_3 = v_3 - \frac{(v_3, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1 - \frac{(v_3, u_2)}{(u_2, u_2)} u_2.$$

Маємо

$$(v_3, u_1) = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad \frac{(v_3, u_1)}{(u_1, u_1)} = \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3},$$

$$(v_3, u_2) = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0.$$

Отже,

$$u_3 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Таким чином,

$$u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = x, \quad u_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

2. Побудуємо ортонормовану систему.

$$\|u_1\| = \sqrt{(u_1, u_1)} = \sqrt{2}, \quad \|u_2\| = \sqrt{(u_2, u_2)} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Далі

$$(u_3, u_3) = \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int_{-1}^1 \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) dx$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45}.$$

Тому

$$\|u_3\| = \sqrt{\frac{8}{45}}.$$

Після нормування маємо

$$q_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad q_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad q_3(x) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

3. *Перевіримо ортогональність.* За побудовою система u_1, u_2, u_3 є ортогональною, а система q_1, q_2, q_3 — ортонормованою.

4. *Запишемо матрицю Грама ортонормованої системи.* Для ортонормованої системи матриця Грама дорівнює одиничній:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь.

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1, & u_2(x) &= x, & u_3(x) &= x^2 - \frac{1}{3}; \\ q_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & q_2(x) &= \sqrt{\frac{3}{2}}x, & q_3(x) &= \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right); \\ G &= I_3. \end{aligned}$$

Задача 1.6: Ортогональне доповнення, проєкція та ортогональна складова

У просторі $\mathbb{R}^3$ задано підпростір $L = \text{Lin} \langle (1, 1, 1)^\top, (1, 0, 1)^\top \rangle$ та вектор $x = (2, 1, 0)^\top$.

Потрібно:

1. знайти базис підпростору $L^\perp$;
2. знайти ортогональну проєкцію $\text{pr}_L x$ вектора x на підпростір L ;
3. знайти ортогональну складову $z = x - \text{pr}_L x$;
4. перевірити, що $z \in L^\perp$;
5. записати розклад $x = \text{pr}_L x + z$.

Розв'язання.

Позначимо

$$a_1 = (1, 1, 1)^\top, \quad a_2 = (1, 0, 1)^\top.$$

1. *Знайдемо базис підпростору $L^\perp$.*

Нехай

$$y = (y_1, y_2, y_3)^\top \in L^\perp.$$

Тоді

$$(y, a_1) = 0, \quad (y, a_2) = 0.$$

Отже,

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0, \\ y_1 + y_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом Жордана–Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Тому

$$y_2 = 0, \quad y_1 = -y_3.$$

Поклавши $y_3 = t$, маємо

$$y = t(-1, 0, 1)^T.$$

Отже,

$$L^\perp = \text{Lin} \langle (-1, 0, 1)^T \rangle.$$

2. Знайдемо ортогональну проєкцію $\text{pr}_L x$.

Шукатимемо розклад

$$x = p + z, \quad p \in L, \quad z \in L^\perp.$$

Оскільки $p \in L$, то

$$p = \alpha a_1 + \beta a_2.$$

Оскільки $z \in L^\perp$, то

$$z = t(-1, 0, 1)^T.$$

Тоді

$$(2, 1, 0)^T = \alpha(1, 1, 1)^T + \beta(1, 0, 1)^T + t(-1, 0, 1)^T.$$

Одержуємо систему

$$\begin{cases} \alpha + \beta - t = 2, \\ \alpha = 1, \\ \alpha + \beta + t = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Жордана–Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Отже,

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad t = -1.$$

Тому

$$\text{pr}_L x = p = \alpha a_1 + \beta a_2 = (1, 1, 1)^T.$$

3. Знайдемо ортогональну складову.

$$z = x - \text{pr}_L x = (2, 1, 0)^T - (1, 1, 1)^T = (1, 0, -1)^T.$$

4. Перевіримо, що $z \in L^\perp$. Оскільки

$$z = -(-1, 0, 1)^\top,$$

то

$$z \in L^\perp.$$

Безпосередньо:

$$(z, a_1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0, \quad (z, a_2) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 0.$$

5. Запишемо розклад вектора x .

$$x = (1, 1, 1)^\top + (1, 0, -1)^\top.$$

Відповідь.

$$L^\perp = \text{Lin} \langle (-1, 0, 1)^\top \rangle,$$

$$\text{pr}_L x = (1, 1, 1)^\top, \quad z = (1, 0, -1)^\top, \quad x = \text{pr}_L x + z.$$

Задача 1.7: Ермітів скалярний добуток у $\mathbb{C}^2$

У просторі $\mathbb{C}^2$ задано стандартний ермітів скалярний добуток

$$(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2.$$

Розглянемо вектори

$$x = (1, i)^\top, \quad y = (i, 1)^\top.$$

Потрібно:

1. знайти (x, y) і (y, x) ;
2. обчислити норми $\|x\|$ і $\|y\|$;
3. перевірити, чи є вектори x і y ортогональними;
4. побудувати з векторів x і y ортонормовану систему;
5. записати матрицю Грама цієї системи.

Розв'язання.

Маємо

$$x = (1, i)^\top, \quad y = (i, 1)^\top.$$

1. Обчислимо ермітів скалярний добуток.

$$(x, y) = 1 \cdot \bar{i} + i \cdot \bar{1} = -i + i = 0.$$

Так само

$$(y, x) = i \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{i} = i - i = 0.$$

2. Обчислимо норми.

$$(x, x) = 1 \cdot \bar{1} + i \cdot \bar{i} = 1 + 1 = 2, \quad (y, y) = i \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{1} = 1 + 1 = 2.$$

Отже,

$$\|x\| = \sqrt{2}, \quad \|y\| = \sqrt{2}.$$

3. Перевіримо ортогональність. Оскільки

$$(x, y) = 0,$$

то вектори x і y ортогональні.

4. Побудуємо ортонормовану систему.

$$q_1 = \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)^T, \quad q_2 = \frac{y}{\|y\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1)^T.$$

5. Матриця Грама. Оскільки система $\{q_1, q_2\}$ ортонормована, її матриця Грама дорівнює

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь.

$$(x, y) = 0, \quad (y, x) = 0, \quad \|x\| = \|y\| = \sqrt{2},$$

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)^T, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1)^T, \quad G = I_2.$$

Задача 1.8: Аналіз покриття автотестів у системі CI/CD

ІТ-коментар

У системах CI/CD автотести можна описувати векторами покриття функціональних модулів. Це дозволяє порівнювати тести між собою, виявляти дублювання і бачити, які з них покривають незалежні частини системи.

У просторі $\mathbb{R}^4$ задано вектори покриття трьох автотестів:

$$t_1 = (1, 1, 0, 0)^T, \quad t_2 = (1, 0, 1, 0)^T, \quad t_3 = (0, 0, 1, 1)^T.$$

Координати відповідають чотирьом підсистемам програмного продукту.

Потрібно:

1. знайти всі попарні скалярні добутки векторів t_1, t_2, t_3 ;
2. обчислити норми векторів t_1, t_2, t_3 ;
3. знайти косинуси кутів між кожною парою тестів;
4. з'ясувати, які тести є найбільш схожими, а які — найбільш незалежними;
5. визначити, чи є серед заданих тестів ортогональні;
6. пояснити, як одержані результати можна використати для зменшення дублювання в наборі автотестів.

Розв'язання.

Розглянемо вектори покриття автотестів

$$t_1 = (1, 1, 0, 0)^T, \quad t_2 = (1, 0, 1, 0)^T, \quad t_3 = (0, 0, 1, 1)^T.$$

У просторі $\mathbb{R}^4$ використовується стандартний скалярний добуток

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

1. Знайдемо попарні скалярні добутки.

$$(t_1, t_2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$(t_1, t_3) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0,$$

$$(t_2, t_3) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1.$$

2. Обчислимо норми векторів.

$$\|t_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{2},$$

$$\|t_2\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2},$$

$$\|t_3\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

3. Знайдемо косинуси кутів між парами тестів. За формулою $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$ одержуємо:

$$\cos \angle(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

$$\cos \angle(t_1, t_3) = \frac{0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 0,$$

$$\cos \angle(t_2, t_3) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\angle(t_1, t_2) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \angle(t_1, t_3) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \angle(t_2, t_3) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

4. Визначимо, які тести є найбільш схожими, а які — найбільш незалежними.

Найбільш схожими є ті тести, для яких косинус кута найбільший. Маємо

$$\cos \angle(t_1, t_2) = \cos \angle(t_2, t_3) = \frac{1}{2},$$

тому пари (t_1, t_2) і (t_2, t_3) є однаково найбільш схожими.

Найбільш незалежними є тести, для яких косинус кута найменший. Оскільки $\cos \angle(t_1, t_3) = 0$, то найбільш незалежною є пара (t_1, t_3) .

5. Перевіримо, чи є серед тестів ортогональні. Оскільки $(t_1, t_3) = 0$, то вектори t_1 і t_3 є ортогональними.

6. Інтерпретація результатів. Тести t_1 і t_3 покривають незалежні підсистеми і не дублюють один одного. Тест t_2 частково перетинається з обома і виконує проміжну

роль. Аналіз таких векторів дає змогу виявляти дублювання покриття, добирати більш незалежні тести та робити набір автотестів компактнішим і ефективнішим.

Відповідь.

$$\begin{aligned}(t_1, t_2) &= 1, & (t_1, t_3) &= 0, & (t_2, t_3) &= 1; \\ \|t_1\| &= \|t_2\| = \|t_3\| = \sqrt{2}; \\ \cos \angle(t_1, t_2) &= \frac{1}{2}, & \cos \angle(t_1, t_3) &= 0, & \cos \angle(t_2, t_3) &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Найбільш схожі пари: (t_1, t_2) і (t_2, t_3) . Найбільш незалежна пара: (t_1, t_3) . Ортогональними є вектори t_1 і t_3 .

1.5 Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1.1: Перевірка означення скалярного добутку

Нехай L — лінійний простір над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Потрібно з'ясувати, чи задає наведена формула $(\cdot, \cdot)$ скалярний добуток у просторі L . Якщо ні, слід указати, яка з аксіом скалярного добутку порушується.

Варіанти:

1. $L = P_2(x)$ — простір дійсних многочленів степеня не вище 2. Для довільних $f, g \in L$ визначимо

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

2. $L = M_2(\mathbb{R})$ — простір матриць порядку 2 з дійсними елементами. Для довільних матриць

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$$

визначимо

$$(A, B) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

3. $L = \mathbb{R}^3$. Для довільних $x, y \in L$ визначимо

$$(x, y) = \|x\| \|y\|.$$

4. $L = P_3(x)$ — простір дійсних многочленів степеня не вище 3. Для довільних $f, g \in L$ визначимо

$$(f, g) = \int_0^1 f'(x)g'(x) dx.$$

5. $L = M_2(\mathbb{R})$. Для довільних

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$$

визначимо

$$(A, B) = x_1x_2 + u_1u_2.$$

6. $L = \mathbb{R}^3$. Для довільних $x, y \in L$ визначимо

$$(x, y) = \|x\| \|y\| \sin \alpha,$$

де α — кут між векторами x і y .

7. $L = P_2(x)$. Для довільних $f, g \in L$ визначимо

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 f'(x)g'(x) dx.$$

8. $L = M_2(\mathbb{R})$. Для довільних

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$$

визначимо

$$(A, B) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + u_1u_2.$$

9. $L = \mathbb{R}^3$. Для довільних $x, y \in L$ визначимо

$$(x, y) = 2\|x\| \|y\| \cos \alpha,$$

де α — кут між векторами x і y .

10. $L = P_3(x)$. Для довільних $f, g \in L$ визначимо

$$(f, g) = \int_0^1 f'(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g'(x) dx.$$

11. $L = M_2(\mathbb{R})$. Для довільних

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$$

визначимо

$$(A, B) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1.$$

12. $L = \mathbb{R}^3$. Для довільних $x, y \in L$ визначимо

$$(x, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

13. $L = P_2(x)$. Для довільних $f, g \in L$ визначимо

$$(f, g) = f(0)g(0).$$

14. $L = M_2(\mathbb{R})$. Для довільних

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & u_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & u_2 \end{pmatrix}$$

визначимо

$$(A, B) = \det(AB).$$

15. $L = P_2(x)$. Якщо

$$f = a_1x^2 + b_1x + c_1, \quad g = a_2x^2 + b_2x + c_2,$$

то визначимо

$$(f, g) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

Задача 1.2: Скалярний добуток, норми, відстань і кут між векторами

У просторі $\mathbb{R}^3$ задано вектори x та y .

Потрібно:

1. знайти скалярний добуток (x, y) ;
2. обчислити норми $\|x\|$ і $\|y\|$;
3. знайти відстань між векторами x і y ;
4. знайти кут між векторами x і y ;
5. з'ясувати, чи є вектори x і y ортогональними.

Варіанти:

- | | |
|---|--|
| 1. $x = (1, 2, -1)^T$, $y = (2, 0, 1)^T$ | 9. $x = (2, 0, 1)^T$, $y = (1, 1, -1)^T$ |
| 2. $x = (1, 1, 0)^T$, $y = (1, -1, 2)^T$ | 10. $x = (1, 2, 2)^T$, $y = (2, -1, 1)^T$ |
| 3. $x = (2, 1, 1)^T$, $y = (1, 0, -1)^T$ | 11. $x = (2, 1, -1)^T$, $y = (1, 3, 0)^T$ |
| 4. $x = (1, 3, 0)^T$, $y = (2, -1, 1)^T$ | 12. $x = (1, 0, 1)^T$, $y = (2, 2, -1)^T$ |
| 5. $x = (2, 2, 1)^T$, $y = (1, -1, 0)^T$ | 13. $x = (2, -1, 2)^T$, $y = (1, 1, 1)^T$ |
| 6. $x = (1, 0, 2)^T$, $y = (2, 1, -1)^T$ | 14. $x = (1, 1, 2)^T$, $y = (2, 0, -1)^T$ |
| 7. $x = (3, 1, 0)^T$, $y = (1, 2, 2)^T$ | 15. $x = (3, 0, 1)^T$, $y = (1, -1, 2)^T$ |
| 8. $x = (1, -1, 1)^T$, $y = (2, 1, 0)^T$ | |

Задача 1.3: Ортогональність, ортонормованість і матриця Грама

У просторі $\mathbb{R}^3$ задано систему векторів $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Потрібно:

1. перевірити, чи є система $\{x_1, x_2, x_3\}$ ортогональною;
2. перевірити, чи є вона ортонормованою;
3. побудувати матрицю Грама цієї системи;
4. знайти визначник Грама;
5. зробити висновок про лінійну незалежність системи.

Варіанти:

1. $x_1 = (1, 1, 0)^T$, $x_2 = (1, -1, 0)^T$, $x_3 = (0, 0, 1)^T$
2. $x_1 = (1, 0, 1)^T$, $x_2 = (1, 0, -1)^T$, $x_3 = (0, 1, 0)^T$
3. $x_1 = (2, 0, 0)^T$, $x_2 = (0, 1, 0)^T$, $x_3 = (0, 0, 1)^T$
4. $x_1 = (1, 1, 1)^T$, $x_2 = (1, -1, 0)^T$, $x_3 = (1, 1, -2)^T$
5. $x_1 = (1, 2, 0)^T$, $x_2 = (2, -1, 0)^T$, $x_3 = (0, 0, 1)^T$
6. $x_1 = (1, 0, 0)^T$, $x_2 = (0, 1, 1)^T$, $x_3 = (0, 1, -1)^T$
7. $x_1 = (1, 1, 0)^T$, $x_2 = (2, -2, 0)^T$, $x_3 = (0, 0, 3)^T$
8. $x_1 = (1, 0, 1)^T$, $x_2 = (0, 1, 0)^T$, $x_3 = (1, 0, -1)^T$
9. $x_1 = (1, 2, 2)^T$, $x_2 = (2, -1, 0)^T$, $x_3 = (0, 1, -1)^T$

10. $x_1 = (1, 0, 0)^T$, $x_2 = (0, 2, 0)^T$, $x_3 = (0, 0, 3)^T$
11. $x_1 = (1, 1, 0)^T$, $x_2 = (1, -1, 0)^T$, $x_3 = (1, 0, 1)^T$
12. $x_1 = (2, 1, 0)^T$, $x_2 = (1, -2, 0)^T$, $x_3 = (0, 0, 1)^T$
13. $x_1 = (1, 1, 1)^T$, $x_2 = (1, -1, 0)^T$, $x_3 = (0, 1, -1)^T$
14. $x_1 = (1, 0, 1)^T$, $x_2 = (1, 1, 0)^T$, $x_3 = (1, -1, 0)^T$
15. $x_1 = (1, 2, 0)^T$, $x_2 = (2, -1, 0)^T$, $x_3 = (0, 1, 1)^T$

Задача 1.4: Ортогональне доповнення, проєкція та ортогональна складова

У просторі $\mathbb{R}^3$ задано підпростір L і вектор x .

Потрібно:

1. знайти базис підпростору $L^\perp$;
2. знайти ортогональну проєкцію $\text{pr}_L x$ вектора x на підпростір L ;
3. знайти ортогональну складову $z = x - \text{pr}_L x$;
4. перевірити, що $z \in L^\perp$;
5. перевірити розклад $x = \text{pr}_L x + z$.

Варіанти:

1. $L = \text{Lin} \langle (1, 1, 0)^T \rangle$, $x = (2, 1, 1)^T$
2. $L = \text{Lin} \langle (1, 1, 0)^T, (1, -1, 0)^T \rangle$, $x = (1, 2, 3)^T$
3. $L = \text{Lin} \langle (1, 0, 1)^T \rangle$, $x = (1, 2, 0)^T$
4. $L = \text{Lin} \langle (1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T \rangle$, $x = (2, 1, -1)^T$
5. $L = \text{Lin} \langle (2, 1, 0)^T \rangle$, $x = (1, 0, 1)^T$
6. $L = \text{Lin} \langle (1, -1, 1)^T \rangle$, $x = (2, 0, 1)^T$
7. $L = \text{Lin} \langle (1, 2, 2)^T \rangle$, $x = (2, 1, 0)^T$
8. $L = \text{Lin} \langle (1, 0, 1)^T, (1, 0, -1)^T \rangle$, $x = (2, 1, 0)^T$
9. $L = \text{Lin} \langle (1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T \rangle$, $x = (1, 2, 3)^T$
10. $L = \text{Lin} \langle (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T \rangle$, $x = (3, -1, 2)^T$
11. $L = \text{Lin} \langle (1, 1, 1)^T \rangle$, $x = (2, 1, 0)^T$
12. $L = \text{Lin} \langle (2, -1, 1)^T \rangle$, $x = (1, 1, 2)^T$
13. $L = \text{Lin} \langle (1, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T \rangle$, $x = (2, 0, 1)^T$
14. $L = \text{Lin} \langle (1, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T \rangle$, $x = (1, 2, 2)^T$
15. $L = \text{Lin} \langle (1, -1, 0)^T, (0, 0, 1)^T \rangle$, $x = (2, 1, 1)^T$

Задача 1.5: Ортогоналізація системи векторів методом Грама–Шмідта

У просторі $\mathbb{R}^3$ задано лінійно незалежну систему векторів $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Потрібно:

1. застосувати процес Грама–Шмідта до системи $\{v_1, v_2, v_3\}$;
2. побудувати ортогональну систему $\{u_1, u_2, u_3\}$;
3. побудувати відповідну ортонормовану систему $\{q_1, q_2, q_3\}$;

4. перевірити ортогональність і ортонормованість одержаної системи;
5. записати матрицю Грама ортонормованої системи.

Варіанти:

1. $v_1 = (1, 1, 0)^T$, $v_2 = (1, 0, 1)^T$, $v_3 = (0, 1, 1)^T$
2. $v_1 = (1, 0, 1)^T$, $v_2 = (1, 1, 0)^T$, $v_3 = (0, 1, 1)^T$
3. $v_1 = (1, 1, 1)^T$, $v_2 = (1, -1, 0)^T$, $v_3 = (0, 1, -1)^T$
4. $v_1 = (1, 2, 0)^T$, $v_2 = (2, 0, 1)^T$, $v_3 = (0, 1, 1)^T$
5. $v_1 = (2, 1, 0)^T$, $v_2 = (1, 0, 1)^T$, $v_3 = (0, 1, 2)^T$
6. $v_1 = (1, 1, 0)^T$, $v_2 = (2, 1, 1)^T$, $v_3 = (1, 0, 2)^T$
7. $v_1 = (1, 0, 0)^T$, $v_2 = (1, 1, 0)^T$, $v_3 = (1, 1, 1)^T$
8. $v_1 = (1, 2, 1)^T$, $v_2 = (1, 0, 1)^T$, $v_3 = (0, 1, 1)^T$
9. $v_1 = (2, 0, 1)^T$, $v_2 = (1, 1, 0)^T$, $v_3 = (0, 1, 1)^T$
10. $v_1 = (1, 1, 0)^T$, $v_2 = (1, -1, 1)^T$, $v_3 = (0, 1, 2)^T$
11. $v_1 = (1, 0, 1)^T$, $v_2 = (2, 1, 0)^T$, $v_3 = (1, 1, 1)^T$
12. $v_1 = (1, 2, 0)^T$, $v_2 = (1, 1, 1)^T$, $v_3 = (2, 0, 1)^T$
13. $v_1 = (2, 1, 1)^T$, $v_2 = (1, 0, 1)^T$, $v_3 = (0, 1, 1)^T$
14. $v_1 = (1, 1, 1)^T$, $v_2 = (2, 1, 0)^T$, $v_3 = (1, 0, 2)^T$
15. $v_1 = (1, 0, 2)^T$, $v_2 = (1, 1, 0)^T$, $v_3 = (0, 1, 1)^T$

Задача 1.6: Ортогоналізація системи многочленів

У просторі многочленів степеня не вище другого $P_2(x)$ задано скалярний добуток

$$(p, h) = \int_{-1}^1 p(x)h(x) dx.$$

Розглядається система многочленів $\{v_1(x) = 1, v_2(x) = x, v_3(x)\}$.

Потрібно:

1. застосувати процес Грама–Шмідта до системи $\{v_1, v_2, v_3\}$;
2. побудувати ортогональну систему $\{u_1, u_2, u_3\}$;
3. побудувати відповідну ортонормовану систему $\{q_1, q_2, q_3\}$;
4. перевірити ортогональність одержаної системи;
5. записати матрицю Грама ортонормованої системи.

Варіанти:

- | | | |
|------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $v_3(x) = x^2$ | 7. $v_3(x) = x^2 - 1$ | 11. $v_3(x) = x^2 - x + 1$ |
| 2. $v_3(x) = x^2 + x$ | 8. $v_3(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$ | 12. $v_3(x) = x^2 + 2x + 1$ |
| 3. $v_3(x) = x^2 - x$ | 9. $v_3(x) = x^2 - \frac{1}{2}x$ | 13. $v_3(x) = x^2 - 2x + 1$ |
| 4. $v_3(x) = x^2 + 2x$ | 10. $v_3(x) = x^2 + x + 1$ | 14. $v_3(x) = x^2 + \frac{1}{3}$ |
| 5. $v_3(x) = x^2 - 2x$ | | 15. $v_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ |
| 6. $v_3(x) = x^2 + 1$ | | |

1.6 Прикладні задачі

Задача 1.1: Косинусна подібність пошукового запиту та документів

ІТ-коментар

У пошукових системах, рекомендаційних сервісах і задачах обробки природної мови тексти та запити часто подаються embedding-векторами, тобто векторами ознак. У такому поданні близькість між об'єктами зручно оцінювати за кутом між відповідними векторами або за косинусною подібністю.

У спрощеній моделі пошуковий запит користувача та два документи подано embedding-векторами

$$q = (2, 1, 0, 1)^T, \quad d_1 = (1, 1, 0, 0)^T, \quad d_2 = (2, 0, 1, 1)^T.$$

Потрібно:

1. знайти скалярні добутки (q, d_1) і (q, d_2) ;
2. обчислити норми векторів q, d_1, d_2 ;
3. знайти косинуси кутів між вектором q та векторами d_1, d_2 ;
4. визначити, який документ є ближчим до запиту за косинусною подібністю;
5. порівняти ранжування документів за скалярним добутком і за косинусною подібністю та пояснити, як нормування впливає на результат.

Задача 1.2: Порівняння профілів користувачів у просторі ознак

ІТ-коментар

Поведінку користувача в системі часто описують вектором ознак. Відстань між такими векторами використовують для порівняння профілів, а також для виявлення атипової поведінки.

Поведінкові профілі трьох користувачів задано векторами

$$u_1 = (3, 2, 1, 0)^T, \quad u_2 = (2, 1, 1, 1)^T, \quad u_3 = (6, 4, 2, 0)^T.$$

Потрібно:

1. знайти відстані між парами профілів (u_1, u_2) , (u_1, u_3) , (u_2, u_3) ;
2. обчислити норми векторів u_1, u_2, u_3 ;
3. з'ясувати, які два профілі є найближчими за евклідовою відстанню;
4. з'ясувати, чи є вектор u_3 пропорційним до вектора u_1 ;
5. порівняти роль евклідової відстані та кута між векторами в задачах аналізу профілів.

Задача 1.3: Перевірка локальної системи координат у 3D-модулі

ІТ-коментар

У комп'ютерній графіці, САД-системах і модулях візуалізації локальна система координат має бути коректною. Від цього залежать повороти, масштабування, побудова нормалей і робота камери.

Три осі локальної системи координат задано векторами

$$v_1 = (1, 1, 0)^T, \quad v_2 = (1, -1, 0)^T, \quad v_3 = (0, 0, 2)^T.$$

Потрібно:

1. перевірити, чи є система $\{v_1, v_2, v_3\}$ ортогональною;
2. обчислити норми векторів v_1, v_2, v_3 ;
3. з'ясувати, чи є ця система ортонормованою;
4. побудувати відповідну ортонормовану систему нормуванням заданих векторів;
5. вказати, які переваги дає ортонормований базис під час обчислення поворотів і напрямів.

Задача 1.4: Аналіз залежності ознак за матрицею Грама

ІТ-коментар

У задачах добору ознак важливо виявляти напрями, які дублюють один одного або несуть близьку інформацію. Для цього зручно використовувати матрицю Грама.

У просторі $\mathbb{R}^4$ задано вектори ознак

$$f_1 = (1, 1, 0, 0)^T, \quad f_2 = (1, -1, 0, 0)^T, \quad f_3 = (2, 0, 1, 1)^T.$$

Потрібно:

1. побудувати матрицю Грама системи $\{f_1, f_2, f_3\}$;
2. знайти її визначник;
3. з'ясувати, чи є система $\{f_1, f_2, f_3\}$ лінійно незалежною;
4. перевірити, чи є деякі з векторів попарно ортогональними;
5. зробити висновок, які з ознак можна вважати незалежними, а які — частково дубльованими.

Задача 1.5: Ортогоналізація напрямів у модулі навігації агента

ІТ-коментар

У задачах навігації, робототехніки та комп'ютерної графіки часто потрібно побудувати з кількох напрямів коректну систему координат. Один із природних способів — процес Грама–Шмідта.

У модулі навігації автономного агента задано два напрями

$$v_1 = (1, 1, 0)^T, \quad v_2 = (1, 0, 1)^T.$$

Потрібно за методом Грама–Шмідта побудувати з них ортонормовану пару напрямів у площині, натягнутій на v_1 і v_2 .

Потрібно:

1. застосувати процес Грама–Шмідта до системи v_1, v_2 ;
2. побудувати ортогональну систему u_1, u_2 ;
3. побудувати відповідну ортонормовану систему q_1, q_2 ;
4. перевірити ортогональність і ортонормованість одержаної системи;
5. пояснити практичний зміст побудованої ортонормованої системи для задач навігації та обертання об'єкта.

1.7 Питання для самоконтролю

1. Який лінійний простір називається евклідовим?
2. Що називається скалярним добутком у евклідовому просторі?
3. Які аксіоми скалярного добутку?
4. Як у просторі $\mathbb{R}^n$ задається стандартний скалярний добуток?
5. Які ще приклади скалярного добутку, крім простору $\mathbb{R}^n$, розглядаються в цій темі?
6. Який лінійний простір називається унітарним?
7. Що називається ермітовим скалярним добутком?
8. У чому полягає відмінність між скалярним добутком у евклідовому просторі та ермітовим скалярним добутком в унітарному просторі?
9. Що називається нормою вектора?
10. Як визначається відстань між двома векторами?
11. Як визначається кут між двома ненульовими векторами?
12. Чому формула норми коректно визначена і в унітарному просторі?
13. У чому полягає нерівність Коші–Буняковського?

14. Коли в нерівності Коші–Буняковського досягається рівність?
15. У чому полягає нерівність трикутника?
16. Які вектори називаються ортогональними?
17. Яка система векторів називається ортогональною?
18. Яка система векторів називається ортонормованою?
19. Чому ортогональна система ненульових векторів є лінійно незалежною?
20. Як із ортогональної системи векторів побудувати ортонормовану систему?
21. У чому полягає ідея процесу Грама–Шмідта?
22. За якими формулами будуються вектори в процесі Грама–Шмідта?
23. Чому процес Грама–Шмідта, застосований до лінійно незалежної системи векторів, дає ортогональну систему ненульових векторів?
24. Що називається ортогональним доповненням підпростору?
25. Що називається матрицею Грама системи векторів?
26. Який вигляд має матриця Грама ортогональної системи векторів?
27. Який вигляд має матриця Грама ортонормованої системи?
28. Який зв'язок між визначником Грама та лінійною незалежністю системи векторів?
29. Як за допомогою скалярного добутку перевірити ортогональність двох векторів?
30. Як за допомогою норм і скалярного добутку знайти кут між векторами?
31. У чому полягає теорема про ізоморфізм скінченновимірних евклідових просторів?
32. Що означає координатний зміст ортонормованого базису?
33. Чому в ортонормованому базисі обчислення в евклідовому просторі зводяться до стандартних координатних формул?
34. У яких прикладних задачах використовуються скалярний добуток, норма, кут між векторами, ортогональність, матриця Грама та ортогоналізація?

Тема 2. Оператори в евклідових просторах: спряжені, ортогональні та самоспряжені

2.1 Вступ

Після вивчення евклідового простору, скалярного добутку, норми, кута та ортогональності переходять до лінійних операторів, що діють у просторі з такою геометричною структурою. У лінійному просторі оператор розглядається насамперед як відображення, що зберігає лінійні комбінації. В евклідовому просторі з'являється ще один аспект: можна досліджувати, як перетворення, що задано оператором, впливає на довжини векторів, кути між ними, ортогональність, ортогональні підпростори та скалярний добуток. Тому оператори в евклідових просторах мають алгебраїчний і виразний геометричний зміст.

У цій темі розглядаються спеціальні класи лінійних операторів, тісно пов'язані зі скалярним добутком. Центральним поняттям є спряжений оператор, який описує взаємодію заданого оператора зі скалярним добутком і дає змогу вводити важливі класи операторів: самоспряжені та ортогональні. Самоспряжені оператори в ортонормованому базисі задаються симетричними матрицями й мають особливо зручну спектральну будову: їхні власні значення є дійсними, а власні вектори, що відповідають різним власним значенням, ортогональні. Ортогональні оператори зберігають скалярний добуток, норми, відстані й кути, тому описують такі геометричні перетворення, як повороти, відбиття та їхні композиції.

Важливим є зв'язок між оператором і його матрицею в ортонормованому базисі. Для спряженого оператора матриця отримується транспонуванням матриці початкового оператора. Самоспряженим операторам відповідають симетричні матриці, а ортогональним операторам — ортогональні матриці. Це дає змогу перейти від абстрактних означень до конкретних обчислювальних критеріїв: перевіряти симетричність, ортогональність, знаходити власні значення та власні вектори, будувати ортонормовані базиси з власних векторів, досліджувати збереження норми та скалярного добутку під дією оператора.

Лінійні оператори є математичною моделлю перетворень даних, координат, ознак, сигналів, зображень і станів систем. Ортогональні оператори використовуються в комп'ютерній графіці, 3D-моделюванні, обробці зображень, робототехніці та задачах навігації, оскільки вони зберігають геометричну форму об'єктів і не спотворюють довжини та кути. У чисельних алгоритмах ортогональні перетворення відіграють важливу роль завдяки кращій чисельній стійкості, зокрема в QR-розкладі² і методах розв'язування перевизначених систем.

Самоспряжені оператори та симетричні матриці з'являються в задачах аналізу даних, оптимізації, машинного навчання та статистичного моделювання. Зокрема, вони виникають під час дослідження коваріаційних матриць, квадратичних функцій якості, нормальних рівнянь методу найменших квадратів і методів зниження розмірності. Метод головних компонент (PCA)³ ґрунтується на спектральних властивостях симетричних матриць. Матеріал теми безпосередньо пов'язує абстрактну лінійну алгебру з алгоритмами, які використовуються в програмних системах для обробки, аналізу та інтерпретації даних.

Ця тема завершує геометричне осмислення лінійних операторів у евклідовому просторі й підводить до квадратичних форм, спектральних методів та прикладних алгоритмів аналізу даних.

²QR-розклад — це подання матриці у вигляді добутку ортогональної матриці Q та верхньої трикутної матриці R , яке широко використовується в чисельній лінійній алгебрі.

³PCA (*Principal Component Analysis*, метод головних компонент) — це метод зниження розмірності даних, у якому головні напрями визначаються власними векторами коваріаційної матриці.

2.2 Короткі теоретичні відомості

Нехай V — скінченновимірний евклідовий простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$.

Означення 2.1: Спряжений оператор

Нехай $T: V \rightarrow V$ — лінійний оператор. *Спряженим* до T називається такий лінійний оператор $T^*: V \rightarrow V$, що

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \forall x, y \in V.$$

Спряжений оператор переносить дію T з першого аргументу скалярного добутку в другий. Це показує, як оператор узгоджується зі структурою евклідового простору.

Теорема 2.1: Існування і єдиність спряженого оператора

Для кожного лінійного оператора $T: V \rightarrow V$ на скінченновимірному евклідовому просторі існує єдиний спряжений оператор T^* .

Для обчислень важливий матричний запис спряженого оператора. В ортонормованому базисі він має найпростіший вигляд.

Теорема 2.2: Матриця спряженого оператора в ортонормованому базисі

Нехай $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормований базис простору V , а

$$[T]_{\mathcal{E}} = A.$$

Тоді

$$[T^*]_{\mathcal{E}} = A^T.$$

Отже, в ортонормованому базисі побудова матриці спряженого оператора зводиться до транспонування матриці початкового оператора. Тому ортонормовані базиси є найзручнішими для дослідження операторів у евклідових просторах.

Зауваження 2.1: Спряження в довільному базисі

Якщо оператор T задано в довільному базисі $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, то матриця спряженого оператора виражається через матрицю Грама

$$G = ((b_i, b_j))_{i,j=1}^n$$

цього базису. Якщо

$$[T]_{\mathcal{B}} = A,$$

то

$$[T^*]_{\mathcal{B}} = G^{-1} A^T G.$$

У випадку ортонормованого базису $G = I$, тому ця формула переходить у рівність

$$[T^*]_{\mathcal{E}} = A^T.$$

Окремий важливий клас утворюють оператори, що збігаються зі своїми спряженими.

Означення 2.2: Самоспряжений оператор

Лінійний оператор $T: V \rightarrow V$ називається *самоспряженим*, якщо

$$T = T^*.$$

Еквівалентно,

$$(Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x, y \in V.$$

У координатному записі самоспряжені оператори відповідають симетричним матрицям.

Теорема 2.3: Критерій самоспряженості в ортонормованому базисі

Нехай $\mathcal{E}$ — ортонормований базис простору V , а

$$[T]_{\mathcal{E}} = A.$$

Тоді оператор T є самоспряженим тоді і тільки тоді, коли матриця A є симетричною, тобто

$$A^T = A.$$

Самоспряжені оператори мають важливі спектральні властивості.

Теорема 2.4: Спектральні властивості самоспряженого оператора

Нехай $T: V \rightarrow V$ — самоспряжений оператор. Тоді:

1. усі власні значення оператора T є дійсними;
2. власні вектори, що відповідають різним власним значенням, є ортогональними.

Теорема 2.5: Спектральна теорема для самоспряженого оператора

Для кожного самоспряженого оператора $T: V \rightarrow V$ на скінченновимірному евклідовому просторі існує ортонормований базис простору V , що складається з власних векторів оператора T .

У такому базисі матриця оператора має діагональний вигляд

$$[T]_{\mathcal{E}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

де $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — власні значення оператора T .

Наслідок 2.1: Ортогональна діагоналізація симетричної матриці

Для кожної симетричної матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$ існує ортогональна матриця Q така, що

$$Q^T A Q = \Lambda,$$

де Λ — діагональна матриця.

Стовпцями матриці Q є ортонормовані власні вектори матриці A , а на головній діагоналі матриці Λ стоять відповідні власні значення.

Важливий зміст операції спряження полягає також у її зв'язку з ортогональними доповненнями підпросторів.

Означення 2.3: Інваріантний підпростір

Нехай $T: V \rightarrow V$ — лінійний оператор. Підпростір $L \subset V$ називається *інваріантним* відносно оператора T , якщо

$$TL \subset L.$$

Це означає, що для кожного $x \in L$ виконується $Tx \in L$.

Теорема 2.6: Інваріантність ортогонального доповнення

Нехай $T: V \rightarrow V$ — лінійний оператор, а $L \subset V$ — підпростір, інваріантний відносно T . Тоді ортогональне доповнення $L^\perp$ є інваріантним відносно спряженого оператора T^* , тобто

$$T^*(L^\perp) \subset L^\perp.$$

Наслідок 2.2: Інваріантність ортогонального доповнення для самоспряженого оператора

Якщо $T: V \rightarrow V$ — самоспряжений оператор, а $L \subset V$ — підпростір, інваріантний відносно T , то $L^\perp$ також є інваріантним відносно T .

Окремо розглядають оператори, які зберігають скалярний добуток.

Означення 2.4: Ортогональний оператор

Лінійний оператор $T: V \rightarrow V$ називається *ортогональним*, якщо

$$(Tx, Ty) = (x, y) \quad \forall x, y \in V.$$

Для ортогонального оператора зберігаються норми:

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (x, x) = \|x\|^2,$$

тобто

$$\|Tx\| = \|x\|.$$

Отже, ортогональний оператор є ізометрією евклідового простору.

Теорема 2.7: Критерії ортогональності оператора

Для лінійного оператора $T: V \rightarrow V$ такі умови еквівалентні:

1. T є ортогональним;
2. T зберігає норми всіх векторів, тобто

$$\|Tx\| = \|x\| \quad \forall x \in V;$$

3. T переводить деякий ортонормований базис простору V в ортонормований базис;
4. $T^* = T^{-1}$.

У матричній формі ортогональним операторам відповідають ортогональні матриці.

Означення 2.5: Ортогональна матриця

Квадратна матриця $Q \in M_n(\mathbb{R})$ називається *ортогональною*, якщо

$$Q^T Q = Q Q^T = I.$$

Теорема 2.8: Матриця ортогонального оператора

Нехай $\mathcal{E}$ — ортонормований базис евклідового простору V , а

$$[T]_{\mathcal{E}} = Q.$$

Тоді оператор T є ортогональним тоді і тільки тоді, коли матриця Q є ортогональною.

Лема 2.1: Властивості ортогональної матриці

Нехай $Q \in M_n(\mathbb{R})$ — ортогональна матриця. Тоді:

1. $Q^{-1} = Q^T$;
2. $\det Q = \pm 1$;
3. добуток ортогональних матриць є ортогональною матрицею;
4. матриця, обернена до ортогональної, є ортогональною;
5. стовпчики матриці Q утворюють ортонормований базис простору $\mathbb{R}^n$;
6. рядки матриці Q утворюють ортонормований базис простору $\mathbb{R}^n$.

Зауваження 2.2: Геометричний зміст визначника ортогональної матриці

Якщо Q — ортогональна матриця, то $\det Q = 1$ або $\det Q = -1$.

У випадку $\det Q = 1$ ортогональне перетворення зберігає орієнтацію. На площині це відповідає повороту.

У випадку $\det Q = -1$ ортогональне перетворення змінює орієнтацію. На площині це відповідає відбиттю або композиції повороту з відбиттям.

На прямій і площині ортогональні оператори мають просту геометричну інтерпретацію. На прямій вони зводяться до тотожного перетворення або центральної симетрії. На площині вони описують повороти навколо початку координат або відбиття відносно прямої, що проходить через початок координат.

Теорема 2.9: Ортогональні оператори на прямій і площині

1. Кожний ортогональний оператор на одновимірному евклідовому просторі має матрицю (1) або (-1) в ортонормованому базисі.
2. Кожний ортогональний оператор на площині в деякому ортонормованому базисі задається або матрицею повороту

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

або матрицею відбиття

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

У загальному скінченновимірному евклідовому просторі ортогональні оператори також мають канонічний опис через одновимірні та двовимірні інваріантні підпростори.

Теорема 2.10: Будова ортогонального оператора

Нехай $T: V \rightarrow V$ — ортогональний оператор на скінченновимірному евклідовому просторі. Тоді існує ортонормований базис простору V , у якому матриця оператора має блочно-діагональний вигляд із блоками таких типів:

$$(1), \quad (-1), \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

З геометричного погляду ця теорема означає, що ортогональний оператор діє незалежно на взаємно ортогональних компонентах простору: на одновимірних компонентах він або зберігає напрям, або змінює його на протилежний, а на двовимірних компонентах задає поворот.

Унітарний випадок як узагальнення евклідового

У евклідовому просторі розглядаються вектори з дійсними координатами, а скалярний добуток є дійснозначною функцією. У багатьох прикладних задачах, зокрема в обробці сигналів, спектральному аналізі, перетворенні Фур'є та квантових обчисленнях, природно виникають комплексні вектори. Тому евклідовий простір має важливе узагальнення — унітарний простір.

В унітарному просторі скалярний добуток набуває комплексних значень і враховує комплексне спряження. Для простору $\mathbb{C}^n$ стандартний скалярний добуток можна задати формулою

$$(x, y) = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n}.$$

Тому матриця спряженого оператора в ортонормованому базисі вже не просто транспонується, а ермітово спряжується:

$$A^* = \overline{A}^T.$$

Унітарний випадок повторює основні ідеї евклідового випадку, але з урахуванням комплексного спряження. Самоспряженим операторам у дійсному просторі відповідають ермітові оператори в комплексному просторі:

$$A^* = A.$$

Ортогональним операторам відповідають унітарні оператори:

$$U^* U = I.$$

Основні відповідності між евклідовим і унітарним випадками зручно подати в таблиці:

Поняття	Евклідовий простір	Унітарний простір
спряження	A^T	$A^* = \overline{A}^T$
самоспряженість	$A^T = A$	$A^* = A$
збереження норми	$Q^T Q = I$	$U^* U = I$

Унітарні матриці описують перетворення, що зберігають норму комплексного вектора, а ермітові матриці мають дійсні власні значення й відіграють роль комплексного аналога симетричних матриць.

Самоспряжені оператори мають зручну спектральну будову, а ортогональні зберігають геометрію евклідового простору. Унітарний випадок переносить ці ідеї на комплексні простори.

2.3 Алгоритми розв'язування типових задач

У цьому підрозділі зібрано основні алгоритмічні схеми для задач на спряжені, самоспряжені та ортогональні оператори. Якщо не зазначено інше, матриці операторів розглядаються в ортонормованому базисі. У цьому випадку скалярний добуток має стандартний координатний вигляд, а матриця спряженого оператора отримується звичайним транспонуванням.

Алгоритм знаходження матриці спряженого оператора в ортонормованому базисі

Нехай лінійний оператор $T: V \rightarrow V$ задано в ортонормованому базисі матрицею

$$A = [T]_{\mathcal{E}}.$$

Щоб знайти матрицю спряженого оператора T^* , потрібно виконати такі кроки:

1. перевірити, що базис $\mathcal{E}$ є ортонормованим;
2. записати матрицю оператора T :

$$A = (a_{ij});$$

3. транспонувати матрицю A :

$$A^T = (a_{ji});$$

4. зробити висновок:

$$[T^*]_{\mathcal{E}} = A^T.$$

Якщо базис не є ортонормованим, то простого транспонування вже недостатньо. У цьому випадку потрібно враховувати матрицю Грама заданого базису.

Алгоритм знаходження матриці спряженого оператора в довільному базисі

Нехай оператор $T: V \rightarrow V$ задано в базисі

$$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$$

матрицею

$$A = [T]_{\mathcal{B}}.$$

Щоб знайти матрицю спряженого оператора T^* у цьому самому базисі, потрібно виконати такі кроки:

1. побудувати матрицю Грама базису $\mathcal{B}$:

$$G = ((b_i, b_j))_{i,j=1}^n;$$

2. знайти транспоновану матрицю A^T ;

3. обчислити матрицю

$$G^{-1} A^T G;$$

4. записати відповідь:

$$[T^*]_{\mathcal{B}} = G^{-1} A^T G.$$

Алгоритм перевірки самоспряженості оператора

Нехай оператор $T: V \rightarrow V$ задано в ортонормованому базисі матрицею

$$A = [T]_{\mathcal{E}}.$$

Щоб перевірити, чи є оператор T самоспряженим, потрібно виконати такі кроки:

1. знайти транспоновану матрицю A^T ;

2. порівняти матриці A та A^T ;

3. якщо

$$A^T = A,$$

то оператор T є самоспряженим;

4. якщо

$$A^T \neq A,$$

то оператор T не є самоспряженим.

У типових задачах самоспряжені оператори часто досліджують через їхні власні значення та власні вектори. Для симетричних матриць це дає можливість побудувати ортонормований базис із власних векторів.

Алгоритм спектрального дослідження самоспряженого оператора

Нехай самоспряжений оператор $T: V \rightarrow V$ задано в ортонормованому базисі симетричною матрицею

$$A = A^T.$$

Щоб виконати спектральне дослідження оператора T , потрібно виконати такі кроки:

1. скласти характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda I) = 0;$$

2. знайти всі власні значення $\lambda_1, \dots, \lambda_k$;

3. для кожного власного значення λ_i знайти власний підпростір

$$V_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I);$$

4. знайти базис кожного власного підпростору;
5. якщо потрібно, ортонормувати знайдені базиси власних підпросторів;
6. об'єднати ортонормовані базиси всіх власних підпросторів;
7. отримати ортонормований базис простору V , що складається з власних векторів оператора T .

Алгоритм ортогональної діагоналізації симетричної матриці

Нехай задано симетричну матрицю

$$A \in M_n(\mathbb{R}), \quad A^T = A.$$

Щоб знайти ортогональну матрицю Q , для якої

$$Q^T A Q = \Lambda,$$

потрібно виконати такі кроки:

1. знайти власні значення матриці A з рівняння

$$\det(A - \lambda I) = 0;$$

2. для кожного власного значення λ_i знайти власний підпростір

$$\ker(A - \lambda_i I);$$

3. вибрати базис у кожному власному підпросторі;
4. ортонормувати базиси власних підпросторів;
5. утворити матрицю Q , стовпцями якої є знайдені ортонормовані власні вектори;
6. записати діагональну матрицю

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

де власні значення розташовано в тому самому порядку, що й відповідні власні вектори в матриці Q ;

7. перевірити рівність

$$Q^T A Q = \Lambda.$$

Алгоритм перевірки ортогональності оператора

Нехай оператор $T: V \rightarrow V$ задано в ортонормованому базисі матрицею

$$Q = [T]_{\mathcal{E}}.$$

Щоб перевірити, чи є оператор T ортогональним, потрібно виконати такі кроки:

1. знайти транспоновану матрицю Q^T ;

2. обчислити добуток

$$Q^T Q;$$

3. якщо

$$Q^T Q = I,$$

то матриця Q є ортогональною, а оператор T є ортогональним;

4. якщо

$$Q^T Q \neq I,$$

то матриця Q не є ортогональною, а оператор T не є ортогональним.

Ортогональність матриці можна також перевіряти через її стовпчики або рядки. Цей спосіб часто є зручним у задачах невеликої розмірності.

Алгоритм перевірки ортогональності матриці за стовпчиками

Нехай

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

і нехай $q_1, \dots, q_n$ — стовпчики цієї матриці. Щоб перевірити ортогональність матриці Q , потрібно виконати такі кроки:

1. перевірити, що кожний стовпчик має норму 1:

$$\|q_i\| = 1, \quad i = 1, \dots, n;$$

2. перевірити, що різні стовпчики ортогональні:

$$(q_i, q_j) = 0, \quad i \neq j;$$

3. якщо стовпчики матриці Q утворюють ортонормовану систему, то Q є ортогональною матрицею;

4. якщо хоча б одна з наведених умов не виконується, то Q не є ортогональною матрицею.

Алгоритм перевірки збереження норми та скалярного добутку

Нехай оператор $T: V \rightarrow V$ задано матрицею Q в ортонормованому базисі. Щоб перевірити збереження геометричних характеристик, потрібно виконати такі кроки:

1. для заданого вектора x обчислити його образ

$$x' = Qx;$$

2. порівняти норми

$$\|x'\| \quad \text{і} \quad \|x\|;$$

3. для двох заданих векторів x, y обчислити їхні образи

$$x' = Qx, \quad y' = Qy;$$

4. порівняти скалярні добутки

$$(x', y') \quad \text{і} \quad (x, y);$$

5. якщо для всіх векторів зберігаються норми та скалярні добутки, то оператор є ортогональним.

На площині ортогональну матрицю можна не лише перевірити, а й геометрично інтерпретувати як поворот або відбиття.

Алгоритм геометричної інтерпретації ортогональної матриці на площині

Нехай задано ортогональну матрицю

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Щоб визначити геометричний зміст відповідного перетворення площини, потрібно виконати такі кроки:

1. обчислити визначник матриці:

$$\det Q;$$

2. якщо

$$\det Q = 1,$$

то перетворення є поворотом навколо початку координат;

3. у цьому випадку кут повороту φ можна знайти з рівностей

$$\cos \varphi = a = d, \quad \sin \varphi = c = -b;$$

4. якщо

$$\det Q = -1,$$

то перетворення змінює орієнтацію і є відбиттям або композицією повороту з відбиттям;

5. у відповіді потрібно вказати, чи зберігається орієнтація та які геометричні характеристики не змінюються під дією оператора.

Алгоритм перевірки інваріантності підпростору

Нехай оператор $T: V \rightarrow V$ задано матрицею A , а підпростір $L \subset V$ задано базисом

$$u_1, \dots, u_k.$$

Щоб перевірити, чи є L інваріантним відносно T , потрібно виконати такі кроки:

1. знайти образи базисних векторів:

$$Tu_1, \dots, Tu_k;$$

2. для кожного $i = 1, \dots, k$ перевірити, чи належить вектор Tu_i підпростору L ;
3. для цього розв'язати систему

$$Tu_i = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k;$$

відносно невідомих $\alpha_1, \dots, \alpha_k$;

4. якщо для кожного i така система сумісна, то

$$TL \subset L,$$

тобто L є інваріантним підпростором;

5. якщо хоча б для одного i система не сумісна, то L не є інваріантним відносно T .

Алгоритм використання теореми про інваріантність ортогонального доповнення

Нехай $T: V \rightarrow V$ — лінійний оператор, а $L \subset V$ — підпростір, інваріантний відносно T . Щоб використати теорему про інваріантність ортогонального доповнення, потрібно виконати такі кроки:

1. перевірити інваріантність підпростору L відносно T :

$$TL \subset L;$$

2. знайти спряжений оператор T^* ;
3. записати висновок теореми:

$$T^*(L^\perp) \subset L^\perp;$$

4. якщо оператор T самоспряжений, тобто $T = T^*$, то зробити висновок:

$$T(L^\perp) \subset L^\perp.$$

Наприкінці корисно зафіксувати алгоритмічну відповідність між дійсним та комплексним випадками. У межах цього практичного заняття унітарний випадок використовується переважно як коротке узагальнення евклідового.

Алгоритм перевірки ермітовості та унітарності комплексної матриці

Нехай задано комплексну матрицю

$$A \in M_n(\mathbb{C}).$$

Щоб перевірити її ермітовість або унітарність, потрібно виконати такі кроки:

1. знайти комплексно спряжену матрицю $\bar{A}$;

2. транспонувати її та отримати ермітово спряжену матрицю

$$A^* = \overline{A}^T;$$

3. якщо

$$A^* = A,$$

то матриця A є ермітовою;

4. якщо

$$A^*A = I,$$

то матриця A є унітарною;

5. якщо відповідні рівності не виконуються, то матриця не має зазначеної властивості.

У типових задачах цього практичного заняття найчастіше використовуються такі перевірки:

$A^T = A$ — самоспряженість у евклідовому просторі,

$Q^T Q = I$ — ортогональність у евклідовому просторі,

$A^* = A$ — ермітовість у комплексному просторі,

$U^* U = I$ — унітарність у комплексному просторі.

2.4 Типові задачі

Наведені нижче задачі охоплюють основні алгоритми роботи зі спряженими, самоспряженими та ортогональними операторами в евклідовому просторі.

Задача 2.1: Матриця спряженого оператора в ортонормованому базисі

Лінійний оператор $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ задано в стандартному ортонормованому базисі матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю спряженого оператора T^* . Перевірити, чи є оператор T самоспряженим.

Розв'язання.

Оскільки оператор задано в стандартному ортонормованому базисі простору $\mathbb{R}^3$, матриця спряженого оператора дорівнює транспонованій матриці:

$$[T^*] = A^T.$$

Тому

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$[T^*] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для перевірки самоспряженості потрібно порівняти матриці A та A^T . Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$A^T \neq A,$$

то оператор T не є самоспряженим.

Відповідь.

$$[T^*] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

оператор T не є самоспряженим.

Задача 2.2: Матриця спряженого оператора в довільному базисі

У просторі $\mathbb{R}^2$ зі стандартним скалярним добутком задано базис

$$\mathcal{B} = (b_1, b_2), \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Лінійний оператор $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ у базисі $\mathcal{B}$ має матрицю

$$[T]_{\mathcal{B}} = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю спряженого оператора T^* у цьому самому базисі.

Розв'язання.

Базис $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ не є ортонормованим, оскільки

$$(b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Тому матрицю спряженого оператора не можна знайти простим транспонуванням матриці A . Потрібно використати матрицю Грама базису $\mathcal{B}$.

Знайдемо матрицю Грама:

$$G = \begin{pmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, b_2) \\ (b_2, b_1) & (b_2, b_2) \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$(b_1, b_1) = 1, \quad (b_1, b_2) = 1, \quad (b_2, b_1) = 1, \quad (b_2, b_2) = 2,$$

то

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для довільного базису матриця спряженого оператора задається формулою

$$[T^*]_{\mathcal{B}} = G^{-1} A^T G.$$

Знайдемо обернену матрицю до G :

$$\det G = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

Тому

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далі

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо добуток $A^T G$:

$$A^T G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Тепер

$$G^{-1} A^T G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$[T^*]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Це показує, що в неортонормованому базисі транспонування матриці оператора не дає матриці спряженого оператора.

Відповідь. Матриця Грама базису

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

дорівнює

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матриця спряженого оператора в базисі $\mathcal{B}$:

$$[T^*]_{\mathcal{B}} = G^{-1} A^T G = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.3: Самоспряжений оператор і його спектральна будова

Лінійний оператор $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ задано в стандартному ортонормованому базисі матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перевірити, що оператор T є самоспряженим. Знайти його власні значення та побудувати ортонормований базис із власних векторів. Записати ортогональну діагоналізацію матриці A .

Розв'язання.

Матриця A є симетричною, оскільки

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

Отже, оператор T є самоспряженим.

Знайдемо власні значення матриці A . Для цього складемо характеристичне рівняння:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0.$$

Звідси

$$(2 - \lambda)^2 = 1,$$

тому

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1.$$

Для $\lambda_1 = 3$ маємо

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тому власні вектори відповідають рівнянню

$$-x_1 + x_2 = 0,$$

звідки

$$x_1 = x_2.$$

Отже, можна взяти власний вектор

$$v_1 = (1, 1).$$

Після нормування одержуємо

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

Для $\lambda_2 = 1$ маємо

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому власні вектори відповідають рівнянню

$$x_1 + x_2 = 0,$$

звідки

$$x_2 = -x_1.$$

Можна взяти власний вектор

$$v_2 = (1, -1).$$

Після нормування одержуємо

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$$

Вектори e_1 та e_2 ортонормовані:

$$(e_1, e_2) = 0, \quad \|e_1\| = \|e_2\| = 1.$$

Тому вони утворюють ортонормований базис із власних векторів оператора T .

Складемо ортогональну матрицю Q , стовпцями якої є ці вектори:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, ортогональна діагоналізація матриці A має вигляд

$$Q^T A Q = \text{diag}(3, 1).$$

Відповідь. Оператор T є самоспряженим. Його власні значення:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1.$$

Ортонормований базис із власних векторів:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1).$$

Ортогональна діагоналізація:

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.4: Перевірка ортогональності матриці та геометричний зміст оператора

Лінійний оператор $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ задано в стандартному ортонормованому базисі матрицею

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перевірити, що оператор T є ортогональним. Визначити його геометричний зміст. Перевірити збереження норми для вектора

$$x = (2, 1)^T.$$

Розв'язання.

Перевіримо ортогональність матриці Q . Маємо

$$Q^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Отже, матриця Q є ортогональною, а оператор T є ортогональним.

Знайдемо визначник:

$$\det Q = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Оскільки $\det Q = 1$, оператор зберігає орієнтацію. На площині це означає, що оператор є поворотом навколо початку координат.

Матриця повороту має вигляд

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Порівнюючи з матрицею Q , одержуємо

$$\cos \varphi = 0, \quad \sin \varphi = 1.$$

Тому

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, оператор T є поворотом площини на кут $\frac{\pi}{2}$ проти годинникової стрілки.

Перевіримо збереження норми для вектора

$$x = (2, 1)^T.$$

Його образ:

$$Tx = Qx = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо норми:

$$\|x\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad \|Tx\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Отже,

$$\|Tx\| = \|x\|.$$

Це узгоджується з тим, що ортогональний оператор зберігає довжини векторів.

Відповідь. Оператор T є ортогональним. Він задає поворот площини на кут $\frac{\pi}{2}$ проти годинникової стрілки.

Для вектора $x = (2, 1)^T$: $Tx = (-1, 2)$, $\|Tx\| = \|x\| = \sqrt{5}$.

Задача 2.5: Інваріантний підпростір та ортогональне доповнення

Лінійний оператор $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ задано в стандартному ортонормованому базисі матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$L = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Перевірити, що підпростір L є інваріантним відносно оператора T . Знайти $L^\perp$ і перевірити, що $L^\perp$ є інваріантним відносно спряженого оператора T^* .

Розв'язання.

Підпростір L породжений вектором $e_1 = (1, 0, 0)$. Отже, $L = \text{Lin} \langle e_1 \rangle$.

Щоб перевірити інваріантність L відносно T , достатньо знайти образ вектора e_1 :

$$Te_1 = Ae_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1.$$

Отже,

$$Te_1 \in L.$$

Тому

$$TL \subset L,$$

тобто L є інваріантним підпростором відносно T .

Оскільки $L = \text{Lin} \langle e_1 \rangle$, то

$$L^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Отже,

$$L^\perp = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{Lin} \langle e_2, e_3 \rangle.$$

Знайдемо матрицю спряженого оператора. Оскільки базис стандартний ортонормований, маємо

$$[T^*] = A^\top.$$

Тому

$$A^\top = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, що $L^\perp$ інваріантний відносно T^* . Достатньо знайти образи базисних векторів e_2 та e_3 :

$$T^*e_2 = A^\top e_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e_2 + 3e_3.$$

Отже,

$$T^*e_2 \in L^\perp.$$

Далі

$$T^*e_3 = A^T e_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4e_3.$$

Отже,

$$T^*e_3 \in L^\perp.$$

Тому

$$T^*(L^\perp) \subset L^\perp.$$

Цей результат узгоджується з теоремою про інваріантність ортогонального доповнення: якщо L інваріантний відносно T , то $L^\perp$ інваріантний відносно T^* .

Відповідь. Підпростір

$$L = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

є інваріантним відносно T . Його ортогональне доповнення:

$$L^\perp = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Спряжений оператор має матрицю

$$[T^*] = A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

i

$$T^*(L^\perp) \subset L^\perp.$$

Задача 2.6: Прикладна задача. Головні напрями зміни двох ознак

ІТ-коментар

У задачах аналізу даних симетричні матриці часто виникають як коваріаційні матриці ознак. Їхні власні вектори визначають головні напрями зміни даних, а власні значення показують, наскільки суттєво дані змінюються вздовж цих напрямів. Саме ця ідея лежить в основі методу головних компонент^a.

^aPCA (*Principal Component Analysis*, метод головних компонент) — це метод зниження розмірності даних, у якому нові координатні осі вибираються вздовж власних векторів коваріаційної матриці.

У задачі аналізу даних дві числові ознаки мають коваріаційну матрицю

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перевірити, що матриця C є симетричною. Знайти її власні значення та ортонормовані власні вектори. Виконати ортогональну діагоналізацію матриці C та пояснити зміст отриманого результату.

Розв'язання.

Матриця C є симетричною, оскільки

$$C^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = C.$$

Отже, відповідний оператор є самоспряженим, а матрицю C можна ортогонально діагоналізувати.

Знайдемо власні значення:

$$\det(C - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4.$$

Отже,

$$(5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = 10 - 7\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6.$$

Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0.$$

Звідси

$$(\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0,$$

тому

$$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 1.$$

Для $\lambda_1 = 6$ маємо

$$C - 6I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Система для власного вектора:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$x_1 = 2x_2.$$

Можна взяти власний вектор

$$v_1 = (2, 1)^T.$$

Його норма:

$$\|v_1\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Тому нормований власний вектор:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^T.$$

Для $\lambda_2 = 1$ маємо

$$C - I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Система для власного вектора:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$x_2 = -2x_1.$$

Можна взяти власний вектор

$$v_2 = (1, -2)^T.$$

Його норма:

$$\|v_2\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Тому нормований власний вектор:

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)^T.$$

Перевіримо ортогональність:

$$(e_1, e_2) = \frac{1}{5}(2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2)) = 0.$$

Отже, e_1, e_2 утворюють ортонормований базис із власних векторів.

Складемо ортогональну матрицю

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$Q^T C Q = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця C ортогонально зводиться до діагонального вигляду:

$$Q^T C Q = \text{diag}(6, 1).$$

З прикладного погляду це означає, що початкові дві ознаки можна замінити новими ортонормованими напрямками e_1 та e_2 . Уздовж напрямку

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^T$$

розсіювання даних дорівнює 6, а вздовж напрямку

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)^T$$

розсіювання дорівнює 1. Тому перший напрям є головним напрямом зміни даних. Якщо потрібно зменшити розмірність подання, то саме напрям e_1 зберігає більшу частину інформації про варіацію даних.

Відповідь. Матриця C є симетричною. Її власні значення:

$$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 1.$$

Ортонормовані власні вектори можна вибрати так:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^T, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)^T.$$

Ортогональна діагоналізація:

$$Q^T C Q = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Головним напрямом зміни даних є напрям

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^T,$$

оскільки йому відповідає більше власне значення $\lambda_1 = 6$.

2.5 Задачі для самостійного розв'язування

У цьому підрозділі зібрано задачі для самостійного опрацювання основних понять теми: спряженого оператора, самоспряженості, ортогональності, ортогональної діагоналізації та інваріантності ортогонального доповнення. У всіх задачах, якщо не зазначено інше, матриці операторів задано в стандартному ортонормованому базисі.

Задача 2.1: Спряжений оператор і самоспряженість

Для кожної матриці A :

1. знайти матрицю спряженого оператора T^* ;
2. перевірити, чи є оператор T самоспряженим;
3. у випадку самоспряженості знайти власні значення оператора.

Варіанти:

- | | | | | | |
|----|---|-----|--|-----|---|
| 1. | $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$ | 6. | $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$ | 11. | $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$ |
| 2. | $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$ | 7. | $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$ | 12. | $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$ |
| 3. | $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$ | 8. | $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$ | 13. | $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$ |
| 4. | $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$ | 9. | $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$ | 14. | $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$ |
| 5. | $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$ | 10. | $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$ | 15. | $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$ |

Задача 2.2: Спряжений оператор у довільному базисі

Для кожного варіанта:

1. перевірити, що система $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ є базисом простору $\mathbb{R}^3$;
2. побудувати матрицю Грама

$$G = ((b_i, b_j))_{i,j=1}^3;$$

3. знайти матрицю спряженого оператора T^* у базисі $\mathcal{B}$, якщо

$$[T]_{\mathcal{B}} = A;$$

Варіанти:

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

5.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

6.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

7.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

8.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

9.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

10.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

11.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

12.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

13.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

14.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

15.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Задача 2.3: Ортогональні матриці та збереження норми

Для кожної матриці Q :

1. перевірити, чи є матриця Q ортогональною;
2. якщо матриця ортогональна, знайти $\det Q$;
3. для заданого вектора x перевірити збереження норми:

$$\|Qx\| = \|x\|;$$

4. у випадку ортогональності пояснити геометричний зміст перетворення.

Варіанти:

1.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = (1, 2)^T.$$

4.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = (1, 2)^T.$$

2.

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = (1, 1)^T.$$

5.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = (3, -1)^T.$$

3.

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = (2, 0)^T.$$

6.

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad x = (2, 2)^T.$$

$$7. \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = (1, 0)^T.$$

$$8. \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = (2, 3)^T.$$

$$9. \quad Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = (1, -2)^T.$$

$$10. \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = (2, -1)^T.$$

$$11. \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = (1, 1)^T.$$

$$12. \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = (1, 2)^T.$$

$$13. \quad Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = (5, 0)^T.$$

$$14. \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = (-2, 4)^T.$$

$$15. \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = (1, 3)^T.$$

Задача 2.4: Ортогональна діагоналізація симетричної матриці

Для кожної симетричної матриці A :

1. знайти власні значення;
2. знайти власні вектори;
3. побудувати ортонормований базис із власних векторів;
4. скласти ортогональну матрицю Q ;
5. записати діагональний вигляд

$$Q^T A Q = \Lambda.$$

Варіанти:

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6. \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$7. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$9. \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$11. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$12. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$13. \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$14. \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$15. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.5: Інваріантний підпростір та ортогональне доповнення

Для кожного оператора T , заданого матрицею A , і підпростору L :

1. перевірити, чи є L інваріантним відносно T ;
2. знайти ортогональне доповнення $L^\perp$;
3. знайти матрицю спряженого оператора T^* ;
4. перевірити, чи є $L^\perp$ інваріантним відносно T^* .

Варіанти:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $L = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $L = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $L = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $L = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $L = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $L = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
7. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $L = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $L = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.
9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $L = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
10. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $L = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $L = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.
12. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $L = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $L = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
15. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $L = \text{Lin} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

2.6 Прикладні задачі

У цьому підрозділі зібрано прикладні задачі, у яких спеціальні класи операторів в евклідових просторах з'являються в типових для програмної інженерії ситуаціях: аналізі лінійних модулів, оптимізації, комп'ютерній графіці, обробці сигналів та квантових обчисленнях. На відміну від прикладної задачі з попереднього блоку, тут не розглядається РСА та коваріаційна матриця; основний акцент зроблено на спряжених, самоспряжених, ортогональних та унітарних операторах.

Задача 2.1: Спряжений оператор у лінійному модулі обробки ознак

ІТ-коментар

У програмних системах для аналізу даних та машинного навчання лінійний модуль часто має вигляд $z = Ax$, де x — вектор вхідних ознак, а z — вектор перетворених ознак. Спряжений оператор A^T виникає під час перенесення похибок або чутливостей у зворотному напрямі, зокрема в алгоритмах зворотного поширення похибки.

Лінійний модуль перетворення ознак задано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай вектор вхідних ознак дорівнює $x = (1, -1, 2)^T$, а вектор чутливостей на виході модуля має вигляд $r = (2, -1, 1)^T$.

Потрібно:

1. знайти матрицю спряженого оператора $A^* = A^T$;
2. обчислити вихідний вектор $z = Ax$;
3. обчислити вектор перенесених чутливостей $A^T r$;
4. перевірити рівність $(Ax, r) = (x, A^T r)$;
5. пояснити, чому ця рівність є важливою для коректного перенесення інформації між шарами лінійної моделі.

Задача 2.2: Квадратична функція якості та самоспряжений оператор

ІТ-коментар

У задачах оптимізації та машинного навчання функції якості часто локально наближають квадратичними функціями. Матриця такої квадратичної частини є симетричною і описує самоспряжений оператор. Її власні значення показують, наскільки швидко функція змінюється вздовж відповідних ортогональних напрямів.

Нехай локальна квадратична модель функції якості має вигляд

$$F(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Їй відповідає симетрична матриця

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

оскільки

$$F(x) = x^T A x.$$

Потрібно:

1. перевірити, що матриця A є симетричною;
2. знайти власні значення матриці A ;
3. знайти ортонормовані власні вектори;
4. виконати ортогональну діагоналізацію матриці A ;
5. записати функцію F у нових ортонормованих координатах;
6. пояснити, які напрями відповідають швидшій і повільнішій зміні функції якості.

Задача 2.3: Поворот об'єкта в комп'ютерній графіці

ІТ-коментар

У комп'ютерній графіці повороти об'єктів на площині задаються ортогональними матрицями. Такі перетворення не змінюють довжин відрізків і кутів між ними, тому форма об'єкта зберігається. Це важливо під час рендерингу, анімації, обертання моделей та роботи з локальними системами координат.

Фрагмент зображення має вершини

$$p_1 = (1, 0)^T, \quad p_2 = (2, 0)^T, \quad p_3 = (1, 1)^T.$$

До нього застосовують лінійне перетворення з матрицею

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Потрібно:

1. перевірити, що матриця Q є ортогональною;
2. знайти образи вершин Qp_1, Qp_2, Qp_3 ;
3. обчислити довжини відрізків p_1p_2 та Qp_1Qp_2 ;
4. визначити геометричний зміст перетворення;
5. пояснити, чому таке перетворення не спотворює форму фрагмента зображення.

Задача 2.4: Ортогональне перетворення сигналу та збереження енергії

ІТ-коментар

В обробці сигналів ортогональні перетворення використовуються для переходу до нової системи координат, у якій сигнал зручніше аналізувати або стискати. Якщо матриця перетворення ортогональна, то вона зберігає норму сигналу, а отже, і його енергію в евклідовій моделі.

Дискретний сигнал задано вектором $s = (2, 0, 1, 1)^T$. До нього застосовують ортогональне перетворення з матрицею

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Потрібно:

1. перевірити, що матриця H є ортогональною;
2. знайти перетворений сигнал $\hat{s} = Hs$;
3. обчислити норми $\|s\|$ та $\|\hat{s}\|$;
4. перевірити збереження енергії сигналу $\|\hat{s}\|^2 = \|s\|^2$;
5. пояснити, чому така властивість важлива для чисельної обробки сигналів.

Задача 2.5: Квантовий вентиль Паулі Y як унітарний оператор

ІТ-коментар

У квантових обчисленнях стан одного кубіта^a описується комплексним вектором норми 1. Квантові вентиля задаються унітарними матрицями, бо такі матриці зберігають норму стану. Окремі квантові вентиля, зокрема матриці Паулі, є також ермітовими, що пов'язує їх зі спостережуваними величинами.

^aКубіт (*qubit*, quantum bit) — базова одиниця квантової інформації, стан якої описується нормованим вектором у комплексному двовимірному просторі.

Розглянемо матрицю Паулі

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

та стан кубіта

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Потрібно:

1. знайти ермітово спряжену матрицю $Y^* = \bar{Y}^T$;

2. перевірити, що матриця Y є ермітовою $Y^* = Y$;
3. перевірити, що матриця Y є унітарною $Y^*Y = I$;
4. обчислити новий стан $\psi' = Y\psi$;
5. перевірити збереження норми: $\|\psi'\| = \|\psi\| = 1$;
6. пояснити, чому унітарність є необхідною властивістю квантового вентиля.

2.7 Питання для самоконтролю

1. Що називається спряженим оператором в евклідовому просторі? Якою рівністю він означається?
2. Чому спряжений оператор пов'язаний саме зі скалярним добутком? Який геометричний зміст має рівність

$$(Tx, y) = (x, T^*y)?$$
3. Як знайти матрицю спряженого оператора в ортонормованому базисі?
4. Чому в довільному базисі матриця спряженого оператора не завжди дорівнює транспонованій матриці початкового оператора?
5. Яку роль відіграє матриця Грама під час знаходження матриці спряженого оператора в довільному базисі?
6. Що називається інваріантним підпростором лінійного оператора?
7. Сформулюйте теорему про інваріантність ортогонального доповнення для спряженого оператора.
8. Що називається самоспряженим оператором в евклідовому просторі?
9. Який матричний критерій самоспряженості оператора в ортонормованому базисі?
10. Які основні спектральні властивості мають самоспряжені оператори?
11. Сформулюйте спектральну теорему для самоспряженого оператора в скінченновимірному евклідовому просторі.
12. Що означає ортогональна діагоналізація симетричної матриці?
13. Що називається ортогональним оператором? Які геометричні характеристики він зберігає?
14. Який матричний критерій ортогональності оператора в ортонормованому базисі?
15. Які властивості має ортогональна матриця? Чому її обернена матриця дорівнює транспонованій?
16. Як за визначником ортогональної матриці на площині встановити, чи зберігає відповідне перетворення орієнтацію?
17. Який геометричний зміст мають ортогональні оператори на прямій та площині?

18. У чому полягає будова ортогонального оператора в скінченновимірному евклідовому просторі?
19. Які основні відповідності існують між операторами в евклідовому та унітарному просторах?
20. Чим ермітова матриця відрізняється від симетричної, а унітарна матриця — від ортогональної?
21. Чому унітарні оператори є природним комплексним аналогом ортогональних операторів?
22. Наведіть приклади застосування ортогональних операторів у комп'ютерній графіці, обробці сигналів або робототехніці.
23. Чому самоспряжені оператори та симетричні матриці важливі в задачах оптимізації, аналізу даних і машинного навчання?
24. Чому в квантових обчисленнях квантові вентиля задаються унітарними матрицями?
25. Які з вивчених класів операторів використовуються для збереження геометрії простору, а які — для спектрального аналізу?

Білінійні та квадратичні форми

Тема 3. Білінійні та квадратичні форми: матриця форми, канонічний вигляд, інерція, додатна визначеність

3.1 Вступ

Білінійні та квадратичні форми продовжують тему лінійних просторів, операторів та евклідових просторів уже в іншому напрямі. Якщо лінійні форми описують залежність числового значення від одного векторного аргументу, то білінійні форми дають змогу досліджувати взаємодію двох векторів, а квадратичні форми — числові характеристики одного вектора, що мають другий степінь відносно його координат. Апарат форм поєднує алгебраїчний опис векторного простору з геометричними та аналітичними властивостями моделей, у яких важливу роль відіграють добутки координат, симетричність, додатна визначеність і зведення до простішого вигляду.

У цій темі розглядаються лінійні форми, білінійні форми та їхні матриці в заданому базисі. Особливу увагу приділено формулі зміни матриці білінійної форми при заміні базису, оскільки вона відрізняється від формули зміни матриці лінійного оператора і приводить до поняття конгруентності матриць. Далі вводяться симетричні та кососиметричні білінійні форми, квадратичні форми, їхні матриці та полярні білінійні форми. Центральне місце займає задача зведення квадратичної форми до канонічного вигляду, зокрема методом Лагранжа. На цій основі формулюються теорема Якобі, закон інерції квадратичної форми та критерій Сильвестра для додатної визначеності.

Для фахівців з програмної інженерії цей матеріал має фундаментальне й прикладне значення. Квадратичні форми виникають в оптимізації, чисельному аналізі, машинному навчанні, статистичному моделюванні, методі найменших квадратів, аналізі похибок і дослідженні локальної поведінки функцій багатьох змінних. Матриця квадратичної форми часто пов'язана з матрицею Гессе⁴, яка описує характер зміни функції поблизу критичної точки. Додатна визначеність квадратичної форми є важливою умовою локального мінімуму, стійкості обчислювальних процедур і коректності багатьох алгоритмічних моделей.

Білінійні форми узагальнюють скалярний добуток і використовуються для опису взаємодії ознак і аналізу парних залежностей. У прикладних задачах матричний запис білінійних і квадратичних форм дає змогу перейти від абстрактних означень до конкретних алгоритмічних процедур: обчислення матриці форми, перевірки симетричності, зведення до канонічного вигляду, визначення індексів інерції та перевірки додатної визначеності.

Білінійні та квадратичні форми поєднують алгебраїчні методи, геометричну інтерпретацію та прикладні моделі. Їх вивчення дає змогу виконувати перетворення матриць, зводити форми до канонічного вигляду та розуміти зміст таких понять, як інерція, додатна визначеність, локальний мінімум, стійкість і класифікація квадрик. Тому опанування білінійних і квадратичних форм є необхідним етапом для подальшого використання лінійної

⁴Матриця Гессе — це матриця других частинних похідних функції багатьох змінних. Вона використовується для аналізу локального екстремуму, опуклості та стійкості моделей.

алгебри в оптимізації, чисельних методах, аналізі даних, машинному навчанні та математичному моделюванні.

3.2 Короткі теоретичні відомості

У підрозділі розглянуто білінійні та квадратичні функції на лінійному просторі. Основна увага приділяється тому, як ці об'єкти задаються в базисі, як змінюються їхні матриці при переході до іншого базису і як квадратичні функції зводяться до простішого, канонічного вигляду. Доведення теорем тут не подаються, оскільки в практичній частині основну увагу приділено означенням, формулам та їхньому використанню в задачах.

Означення 3.1: Білінійна функція і білінійна форма

Нехай V — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$. Відображення

$$B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

називається *білінійною функцією*, якщо воно є лінійним за кожним аргументом окремо. Це означає, що для всіх $x, y, z \in V$ і всіх $\alpha \in \mathbb{R}$ виконуються рівності

$$\begin{aligned} B(x + y, z) &= B(x, z) + B(y, z), & B(\alpha x, y) &= \alpha B(x, y), \\ B(x, y + z) &= B(x, y) + B(x, z), & B(x, \alpha y) &= \alpha B(x, y). \end{aligned}$$

Якщо в просторі V зафіксовано базис і вектори записано через координати, то відповідний координатний запис білінійної функції називають *білінійною формою*.

Отже, білінійна функція задає залежність від двох векторних аргументів, а білінійна форма — її координатний запис у вибраному базисі. У практичних обчисленнях саме координатний запис і матриця форми дають змогу працювати з білінійними функціями як із матричними виразами.

Зауваження 3.1: Білінійні форми і скалярний добуток

Скалярний добуток у евклідовому просторі є прикладом білінійної функції. Проте довільна білінійна функція не обов'язково є скалярним добутком: вона може бути несиметричною або не бути додатно визначеною. Тому білінійні функції слід розглядати як ширший клас об'єктів.

Наступний крок полягає в тому, щоб навчитися записувати білінійну функцію у фіксованому базисі. Для цього вводиться її матриця.

Означення 3.2: Матриця білінійної функції в базисі

Нехай $B(x, y)$ — білінійна функція на скінченновимірному просторі V , а

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

— фіксований базис простору V . Матрицею білінійної функції B у цьому базисі називається матриця

$$A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n, \quad \alpha_{ij} = B(a_i, a_j).$$

Якщо

$$x = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n, \quad y = y_1 a_1 + \dots + y_n a_n,$$

то

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i y_j.$$

У матричному записі це має вигляд

$$B(x, y) = X^T A Y,$$

де X і Y — стовпці координат векторів x та y у вибраному базисі.

Матриця білінійної функції залежить від базису. Тому важливо розуміти, як вона змінюється при переході до іншої системи координат. Тут з'являється одна з ключових відмінностей між матрицями форм і матрицями лінійних операторів.

Теорема 3.1: Зв'язок матриць білінійної функції в різних базисах

Нехай білінійній функції $B(x, y)$ у базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ відповідає матриця A , а в базисі $b_1, b_2, \dots, b_n$ — матриця A' . Якщо C — матриця переходу до нового базису і координати пов'язані співвідношенням

$$X = CY,$$

то матриці білінійної функції в цих базисах пов'язані формулою

$$A' = C^T A C.$$

Означення 3.3: Конгруентні матриці

Квадратні матриці A і B одного порядку називаються *конгруентними*, якщо існує невідроджена матриця C така, що

$$B = C^T A C.$$

Зауваження 3.2: Конгруентність і подібність матриць

Для білінійних і квадратичних форм при заміні базису виникає *конгруентне перетворення*. Його не слід ототожнювати з перетворенням матриці лінійного оператора, де з'являється формула подібності $A' = C^{-1} A C$. Це принципова різниця: оператор діє на вектори, а форма задає числову характеристику векторів або пар векторів.

Наслідок 3.1: Інваріантність рангу білінійної функції

Ранг матриці білінійної функції не залежить від вибору базису.

Означення 3.4: Ранг білінійної функції

Рангом білінійної функції на скінченновимірному просторі називається ранг її матриці в довільному базисі цього простору.

Після введення матриці розглянемо два спеціальні класи білінійних функцій. Вони відіграють особливу роль, бо саме симетрична частина білінійної функції породжує квадратичну функцію.

Означення 3.5: Симетрична білінійна функція

Білінійна функція $B(x, y)$ на просторі V називається *симетричною білінійною функцією*, якщо для всіх $x, y \in V$

$$B(x, y) = B(y, x).$$

У будь-якому базисі матриця симетричної білінійної функції є симетричною:

$$A^T = A.$$

Означення 3.6: Кососиметрична білінійна функція

Білінійна функція $B(x, y)$ на просторі V називається *кососиметричною білінійною функцією*, якщо для всіх $x, y \in V$

$$B(x, y) = -B(y, x).$$

У будь-якому базисі матриця кососиметричної білінійної функції є кососиметричною:

$$A^T = -A.$$

Звідси, зокрема, випливає, що для кожного $x \in V$

$$B(x, x) = 0.$$

Твердження 3.1: Розклад білінійної функції

Кожну білінійну функцію $B(x, y)$ можна подати у вигляді суми симетричної та кососиметричної білінійних функцій:

$$B(x, y) = B_s(x, y) + B_a(x, y),$$

де

$$B_s(x, y) = \frac{1}{2}(B(x, y) + B(y, x)), \quad B_a(x, y) = \frac{1}{2}(B(x, y) - B(y, x)).$$

Квадратичні функції виникають саме з симетричних білінійних функцій. Ідея дуже проста: у білінійній функції два аргументи ототожнюються, після чого одержується функція одного векторного аргументу.

Означення 3.7: Квадратична функція і квадратична форма

Нехай $B(x, y)$ — симетрична білінійна функція на просторі V . Функція

$$Q : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x) = B(x, x),$$

називається *квадратичною функцією*, породженою білінійною функцією B . Якщо в просторі зафіксовано базис і функцію записано через координати, то відповідний координатний запис називають *квадратичною формою*.

Означення 3.8: Полярна білінійна функція

Симетрична білінійна функція $B(x, y)$, яка породжує квадратичну функцію $Q(x)$, називається *полярною білінійною функцією* квадратичної функції Q . Вона відновлюється за формулою

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)).$$

Теорема 3.2: Єдиність полярної білінійної функції

Для кожної квадратичної функції існує єдина полярна симетрична білінійна функція.

Це твердження пояснює, чому квадратичні функції можна досліджувати через симетричні білінійні функції. На практиці це означає, що за квадратичною формою можна відновити її матрицю і відповідну білінійну структуру.

Означення 3.9: Матриця квадратичної функції

Матрицею квадратичної функції $Q(x)$ у заданому базисі називається матриця її полярної білінійної функції. Якщо ця матриця дорівнює A , то

$$Q(x) = X^T A X.$$

Оскільки полярна білінійна функція є симетричною, матрицю квадратичної функції завжди розглядають як симетричну матрицю.

Зауваження 3.3: Два способи завдання квадратичної функції

Квадратичну функцію на скінченновимірному просторі можна задавати двома рівноцінними способами. Перший спосіб — матричний запис $Q(x) = X^T A X$, де A є симетричною матрицею. Другий спосіб — координатний запис у вигляді квадратичної форми, тобто суми квадратів змінних і попарних добутків змінних з відповідними коефіцієнтами. Перехід між цими способами є стандартною частиною роботи з квадратичними формами.

Далі важливо перейти до базису, в якому зникають усі мішані добутки змінних.

Означення 3.10: Канонічний вигляд квадратичної функції

Квадратична форма називається *канонічним виглядом квадратичної форми*, якщо вона містить лише квадрати змінних:

$$Q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду означає перехід до такого базису, у якому її матриця є діагональною.

Зауваження 3.4: Матричний зміст зведення до канонічного вигляду

Якщо у старому базисі квадратичній функції відповідає матриця A , то зведення до канонічного вигляду означає знаходження невідродженої матриці C , для якої

$$C^T A C = D,$$

де D — діагональна матриця. Отже, зведення квадратичної функції до канонічного вигляду є задачею діагоналізації матриці за конгруентністю.

Зауваження 3.5: Метод Лагранжа

Метод Лагранжа, або метод виділення повних квадратів, є одним з основних способів зведення квадратичної функції до канонічного вигляду. Його зміст полягає в послідовному виділенні повних квадратів і виконанні невідроджених заміни змінних. Кожна така заміна відповідає переходу до нового базису. Метод Лагранжа зручний тим, що дає конструктивне перетворення форми без обов'язкового знаходження власних значень матриці.

Поряд із методом Лагранжа використовують і метод Якобі. Він дає канонічний вигляд через кутові мінори матриці квадратичної функції.

Означення 3.11: Кутові мінори

Нехай A — квадратна матриця порядку n . *Кутовим мінором* порядку k , $1 \leq k \leq n$, називається визначник підматриці, розташованої в перших k рядках і перших k стовпцях матриці A . Його позначають через Δ_k .

Означення 3.12: Умова Якобі

Симетрична матриця A задовольняє *умову Якобі*, якщо всі її кутові мінори відмінні від нуля:

$$\Delta_1 \neq 0, \quad \Delta_2 \neq 0, \quad \dots, \quad \Delta_n \neq 0.$$

Теорема 3.3: Метод Якобі

Нехай квадратична функція має симетричну матрицю A , яка задовольняє умову Якобі. Тоді існує базис, у якому ця функція задається канонічною квадратичною формою

$$Q(y) = \Delta_1 y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} y_3^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2,$$

де $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ — кутові мінори матриці A . Цей результат називають *методом Якобі*.

Канонічний вигляд не є єдиним: різні методи можуть давати різні коефіцієнти. Проте кількість додатних, від'ємних і нульових коефіцієнтів залишається сталою. Це і є зміст закону інерції.

Означення 3.13: Індеси інерції квадратичної функції

Нехай квадратичну функцію зведено до канонічного вигляду

$$Q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Індексами інерції квадратичної функції називають кількість додатних, від'ємних і нульових коефіцієнтів у її канонічному вигляді. Відповідно говорять про додатний, від'ємний і нульовий індекси інерції.

Теорема 3.4: Закон інерції квадратичних форм

Закон інерції квадратичних форм стверджує, що кількість додатних коефіцієнтів, кількість від'ємних коефіцієнтів і кількість нульових коефіцієнтів у канонічному вигляді квадратичної форми не залежать від способу зведення до канонічного вигляду.

Зауваження 3.6: Ранг квадратичної функції

Ранг квадратичної функції дорівнює рангу її матриці, тобто рангу відповідної полярної білінійної функції. У канонічному вигляді цей ранг дорівнює кількості ненульових коефіцієнтів.

Закон інерції дозволяє класифікувати квадратичні функції незалежно від конкретного способу зведення. Окремо виділяють додатні квадратичні функції, бо саме вони пов'язані зі скалярними добутками, локальними мінімумами та стійкістю моделей.

Означення 3.14: Додатна квадратична функція

Квадратична функція $Q(x)$ на просторі V називається *додатною квадратичною функцією*, або *додатно визначеною квадратичною формою*, якщо

$$Q(x) > 0 \quad \text{для всіх } x \neq \theta.$$

Еквівалентно, $Q(x) \geq 0$ для всіх $x \in V$, причому рівність можлива лише для нульового вектора.

Зауваження 3.7: Додатна квадратична функція і скалярний добуток

Якщо квадратична функція є додатною, то її полярна симетрична білінійна функція задає на просторі скалярний добуток. Саме тому додатні квадратичні функції є важливими не лише в алгебрі, а й у геометрії та прикладних задачах.

Означення 3.15: Умова Сильвестра

Симетрична матриця A задовольняє *умову Сильвестра*, якщо всі її кутові мінори додатні:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0.$$

Теорема 3.5: Критерій Сильвестра

Критерій Сильвестра стверджує, що квадратична функція на скінченновимірному векторному просторі є додатною тоді і тільки тоді, коли в деякому базисі її матриця задовольняє умову Сильвестра.

Критерій Сильвестра є зручним практичним інструментом: додатну визначеність можна перевіряти не через усі значення квадратичної функції, а через кутові мінори її матриці.

Зауваження 3.8: Застосування теорії симетричних матриць до теорії квадратичних функцій

Якщо матриця квадратичної функції є дійсною симетричною матрицею, то до неї можна застосувати теорію симетричних матриць. Існує ортонормований базис із власних векторів цієї матриці, у якому квадратична функція має канонічний вигляд

$$Q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — власні значення матриці квадратичної функції. Такий перехід відповідає *ортгональному перетворенню змінних*.

Ортогональне зведення геометрично відповідає повороту прямокутної системи координат. Саме ця ідея лежить в основі класифікації кривих і поверхонь другого порядку.

Означення 3.16: Поверхня другого порядку

Поверхнею другого порядку в $\mathbb{R}^3$ називається множина точок, координати яких задовольняють рівняння

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0,$$

де коефіцієнти при квадратичній частині не дорівнюють нулю одночасно.

Зауваження 3.9: Класифікація поверхонь другого порядку

Класифікація поверхонь другого порядку спирається на зведення її квадратичної частини до канонічного вигляду. Ортогональне перетворення змінних усуває мішані добутки і відповідає повороту системи координат, а подальше виділення повних квадратів у лінійних членах відповідає паралельному перенесенню початку координат. Після цього рівняння порівнюють з канонічними рівняннями квадрик.

Зауваження 3.10: Основні типи поверхонь другого порядку

Після зведення рівняння до канонічного вигляду можуть виникати еліпсоїди, гіперболоїди, конуси, еліптичні, гіперболічні та параболічні циліндри, еліптичні й гіперболічні параболоїди, а також вироджені випадки. Для практичного заняття важливо не запам'ятовувати цей перелік формально, а розуміти, що тип поверхні визначається знаками коефіцієнтів, кількістю ненульових квадратів і наявністю лінійних членів після зведення.

Білінійні функції дають змогу описувати взаємодію двох векторів, а квадратичні функції — числові характеристики одного вектора другого степеня. Матриці цих функцій залежать від базису, але ранг, інерція та додатна визначеність мають інваріантний зміст. Тому білінійні й квадратичні форми пов'язують лінійну алгебру, геометрію, оптимізацію та прикладні моделі.

3.3 Алгоритми розв'язування типових задач

У практичних задачах з цієї теми найчастіше потрібно перейти від координатного запису до матриці, дослідити властивості білінійної або квадратичної функції, виконати заміну

базису чи звести квадратичну форму до канонічного вигляду. Наведені нижче алгоритми зібрано як основні схеми розв'язування типових обчислювальних задач.

Алгоритм побудови матриці білінійної функції застосовується тоді, коли білінійну функцію потрібно подати у матричному вигляді.

Алгоритм побудови матриці білінійної функції

Нехай $B(x, y)$ — білінійна функція на скінченновимірному просторі V , а

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

— заданий базис простору. Для побудови матриці цієї функції в даному базисі потрібно обчислити всі числа

$$\alpha_{ij} = B(a_i, a_j), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Після цього матриця білінійної функції має вигляд

$$A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n.$$

Якщо вектори x та y мають у цьому базисі стовпці координат X і Y , то значення білінійної функції обчислюється за формулою

$$B(x, y) = X^T A Y.$$

Алгоритм зміни матриці білінійної функції використовується тоді, коли відома матриця форми в одному базисі і потрібно знайти її матрицю в іншому базисі.

Алгоритм зміни матриці білінійної функції

Нехай у старому базисі білінійній функції відповідає матриця A , а координати вектора в старому та новому базисах пов'язані співвідношенням

$$X = C Y,$$

де C — матриця переходу до нового базису. Тоді матриця цієї білінійної функції в новому базисі дорівнює

$$A' = C^T A C.$$

Саме цю формулу потрібно використовувати для білінійних і квадратичних форм. Вона відрізняється від формули зміни матриці лінійного оператора, де використовується подібність матриць.

Алгоритм перевірки симетричності білінійної функції зводиться до аналізу її матриці.

Алгоритм перевірки симетричності білінійної функції

Нехай A — матриця білінійної функції в деякому базисі. Якщо

$$A^T = A,$$

то білінійна функція є симетричною. Якщо

$$A^T = -A,$$

то білінійна функція є кососиметричною. У другому випадку всі діагональні елементи матриці дорівнюють нулю, а для кожного вектора x виконується рівність

$$B(x, x) = 0.$$

Якщо не виконується жодна з цих двох умов, то білінійна функція не є ні симетричною, ні кососиметричною.

Алгоритм розкладу білінійної функції дає змогу відокремити частину, яка породжує квадратичну функцію.

Алгоритм розкладу білінійної функції на симетричну та кососиметричну частини

Для довільної білінійної функції $B(x, y)$ її симетрична частина має вигляд

$$B_s(x, y) = \frac{1}{2}(B(x, y) + B(y, x)),$$

а кососиметрична частина має вигляд

$$B_a(x, y) = \frac{1}{2}(B(x, y) - B(y, x)).$$

Тоді

$$B(x, y) = B_s(x, y) + B_a(x, y).$$

У матричному вигляді, якщо A — матриця функції B , то

$$A_s = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad A_a = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Саме симетрична частина B_s використовується при переході до квадратичної функції.

Алгоритм побудови матриці квадратичної функції застосовується тоді, коли квадратична форма задана координатним записом.

Алгоритм побудови матриці квадратичної функції

Спочатку визначається кількість змінних; вона задає порядок матриці. Коефіцієнти при квадратах змінних записуються на головній діагоналі. Якщо у формі є доданок з добутком $x_i x_j$, то відповідний коефіцієнт ділиться навпіл і записується в позиції (i, j) та (j, i) , щоб матриця була симетричною.

У результаті одержується симетрична матриця A , для якої

$$Q(x) = X^T A X.$$

Саме ця матриця є матрицею полярної білінійної функції, що відповідає даній квадратичній функції.

Алгоритм побудови полярної білінійної функції використовується для переходу від квадратичної функції до відповідної симетричної білінійної функції.

Алгоритм побудови полярної білінійної функції

Якщо задано квадратичну функцію $Q(x)$, то її полярна білінійна функція визначається формулою

$$B_Q(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)).$$

Якщо квадратична функція вже записана у матричному вигляді

$$Q(x) = X^T A X,$$

де $A = A^T$, то відповідна полярна білінійна функція має вигляд

$$B_Q(x, y) = X^T A Y.$$

Цей перехід важливий, бо дає змогу досліджувати квадратичну функцію через симетричну білінійну функцію.

Алгоритм методу Лагранжа ґрунтується на послідовному виділенні повних квадратів.

Алгоритм зведення квадратичної функції до канонічного вигляду методом Лагранжа

Якщо в квадратичній формі є ненульовий коефіцієнт при квадраті деякої змінної, то всі доданки, які містять цю змінну, групуються разом. Далі з них виділяється повний квадрат, після чого виконується невироджена заміна змінних. У результаті один квадрат відокремлюється, а решта доданків утворює квадратичну форму від меншої кількості змінних.

Якщо на деякому кроці квадратів змінних немає, але є мішаний добуток $x_i x_j$, то попередньо виконується заміна змінних, яка переводить мішаний добуток у різницю квадратів. Після цього знову застосовується виділення повних квадратів.

Процес завершується тоді, коли форма набуває вигляду

$$Q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Це і є канонічний вигляд квадратичної функції.

Алгоритм методу Якобі застосовується тоді, коли матриця квадратичної функції задовольняє умову Якобі.

Алгоритм зведення квадратичної функції методом Якобі

Нехай A — симетрична матриця квадратичної функції, а

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$$

— її кутові мінори. Якщо

$$\Delta_k \neq 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

то квадратична функція може бути зведена до канонічного вигляду

$$Q(y) = \Delta_1 y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} y_3^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2.$$

Метод Якобі зручний тоді, коли потрібно швидко визначити канонічні коефіцієнти через кутові мінори матриці.

Алгоритм визначення індексів інерції застосовується після зведення квадратичної функції до канонічного вигляду.

Алгоритм визначення рангу та індексів інерції квадратичної функції

Нехай

$$Q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Потрібно порахувати кількість додатних, від'ємних і нульових коефіцієнтів серед чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

Кількість додатних коефіцієнтів дає додатний індекс інерції, кількість від'ємних — від'ємний індекс інерції, а кількість нульових — нульовий індекс інерції. Ранг квадратичної функції дорівнює кількості ненульових коефіцієнтів у її канонічному вигляді.

Алгоритм застосування критерію Сильвестра дає змогу перевірити додатність квадратичної функції за її матрицею.

Алгоритм перевірки додатної визначеності за критерієм Сильвестра

Нехай A — симетрична матриця квадратичної функції. Спочатку обчислюються її кутові мінори

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n.$$

Якщо всі вони додатні, тобто

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0,$$

то квадратична функція є *додатно визначеною*. Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то критерій Сильвестра не дає підстав вважати форму додатно визначеною.

Алгоритм ортогонального зведення спирається на теорію дійсних симетричних матриць.

Алгоритм зведення квадратичної функції ортогональним перетворенням

Нехай квадратична функція має матрицю $A = A^T$. Потрібно знайти власні значення матриці A та побудувати ортонормований базис із її власних векторів. Якщо ці власні вектори записати у стовпці ортогональної матриці Q , то виконується рівність

$$Q^T A Q = D,$$

де D — діагональна матриця з власними значеннями матриці A на головній діагоналі. У нових координатах квадратична функція має вигляд

$$Q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Геометрично таке перетворення відповідає повороту ортонормованої системи координат.

Алгоритм класифікації поверхні другого порядку використовує зведення квадратичної частини рівняння до канонічного вигляду.

Алгоритм класифікації поверхні другого порядку

Нехай поверхню задано загальним рівнянням другого порядку

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0.$$

Спочатку виділяють квадратичну частину рівняння і складають її симетричну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Далі квадратичну частину зводять до канонічного вигляду ортогональним перетворенням змінних. Геометрично це означає поворот прямокутної системи координат, після якого з рівняння зникають мішані добутки змінних.

Після такого перетворення рівняння має вигляд

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 + c = 0.$$

Далі, якщо це можливо, у змінних з ненульовими коефіцієнтами при квадратах виділяють повні квадрати. Це відповідає паралельному перенесенню початку координат. Після повороту і перенесення отримане рівняння порівнюють з канонічними рівняннями поверхонь другого порядку.

Якщо після зведення залишаються три квадрати, тобто

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 \neq 0,$$

то після виділення повних квадратів рівняння набуває вигляду

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = c_1.$$

У цьому випадку можливі такі типи поверхонь:

1. якщо коефіцієнти при трьох квадратах мають один знак і права частина має відповідний знак, то отримується *еліпсоїд*;
2. якщо коефіцієнти при трьох квадратах мають один знак, але права частина має супротивний знак, то рівняння не має дійсних точок, тобто задає *порожню множину*;
3. якщо коефіцієнти при трьох квадратах мають один знак, а права частина дорівнює нулю, то отримується одна точка;
4. якщо два коефіцієнти одного знака, а третій супротивного, то залежно від знака правої частини отримується *однопорожнинний гіперболоїд* або *двупорожнинний гіперболоїд*;
5. якщо два коефіцієнти одного знака, третій супротивного, а права частина дорівнює нулю, то отримується *конус другого порядку*.

Якщо після зведення залишаються два квадрати, наприклад

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0,$$

то рівняння зводиться до вигляду

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + k_3 y_3 + c_1 = 0.$$

Тут потрібно розрізняти два випадки. Якщо лінійного члена за змінною y_3 немає, тобто $k_3 = 0$, то після перенесення початку координат отримується рівняння

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = c_2.$$

Тоді можливі такі типи:

1. якщо коефіцієнти при двох квадратах мають один знак і права частина має відповідний знак, то отримується *еліптичний циліндр*;
2. якщо коефіцієнти при двох квадратах мають один знак, але права частина має супротивний знак, то рівняння не має дійсних точок;
3. якщо коефіцієнти при двох квадратах мають один знак, а права частина дорівнює нулю, то отримується *пряма*;
4. якщо коефіцієнти при двох квадратах мають різні знаки і права частина не дорівнює нулю, то отримується *гіперболічний циліндр*;
5. якщо коефіцієнти при двох квадратах мають різні знаки, а права частина дорівнює нулю, то отримується пара площин, що перетинаються.

Якщо ж $k_3 \neq 0$, то після перенесення початку координат рівняння зводиться до вигляду

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = -k_3 z_3.$$

У цьому випадку:

1. якщо коефіцієнти при двох квадратах мають один знак, то отримується *еліптичний параболоїд*;
2. якщо коефіцієнти при двох квадратах мають різні знаки, то отримується *гіперболічний параболоїд*.

Якщо після зведення залишається один квадрат, наприклад

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0,$$

то рівняння зводиться до вигляду

$$\lambda_1 y_1^2 + k_2 y_2 + k_3 y_3 + c = 0.$$

У цьому випадку можливі такі ситуації:

1. якщо лінійних членів за змінними y_2 і y_3 немає, то після перенесення початку координат отримується рівняння

$$\lambda_1 z_1^2 = c_1.$$

Залежно від знака c_1 воно задає пару паралельних площин, одну площину або порожню множину;

2. якщо хоча б один із лінійних членів за змінними y_2, y_3 присутній, то після відповідного повороту в площині цих змінних рівняння зводиться до вигляду

$$\lambda_1 z_1^2 = k z_2,$$

тобто задає *параболічний циліндр*.

Отже, тип поверхні другого порядку визначається кількістю ненульових квадратів у канонічному вигляді, знаками коефіцієнтів при цих квадратах, наявністю лінійних членів після ортогонального зведення та значенням вільного члена після перенесення початку координат.

3.4 Типові задачі

У цьому блоці зібрано базові типи задач, які потрібні для практичного засвоєння теми. Спочатку розглядаються білінійні функції, їхні матриці та поведінка при заміні базису. Далі увага переходить до квадратичних функцій: побудови матриці, полярної білінійної функції, зведення до канонічного вигляду, визначення індексів інерції та перевірки додатної визначеності. Остання задача показує, як канонічний вигляд квадратичної частини використовується для розпізнавання поверхонь другого порядку.

Задача 3.1: Матриця білінійної функції та її тип

У просторі $\mathbb{R}^2$ задано білінійну функцію

$$B(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2.$$

Потрібно:

1. записати матрицю білінійної функції у стандартному базисі;
2. визначити, чи є ця білінійна функція симетричною або косиметричною;
3. знайти її симетричну та косиметричну частини;
4. записати квадратичну функцію $Q(x) = B(x, x)$.

Розв'язання.

1. Запишемо білінійну функцію у матричному вигляді

$$B(x, y) = X^T A Y,$$

де $X = (x_1, x_2)^T$, $Y = (y_1, y_2)^T$. З координатного запису безпосередньо маємо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Перевіримо симетричність:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $A^T \neq A$, білінійна функція не є симетричною. Також $A^T \neq -A$, тому вона не є косиметричною.

3. Симетрична частина має матрицю

$$A_s = \frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кососиметрична частина має матрицю

$$A_a = \frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A = A_s + A_a.$$

4. Квадратична функція, породжена B , має вигляд

$$Q(x) = B(x, x) = 2x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2x_1 + x_2^2.$$

Тому

$$Q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2.$$

Квадратична функція залежить лише від симетричної частини білінійної функції.

Відповідь.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_s = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_a = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Білінійна функція не є ні симетричною, ні кососиметричною.

Відповідна квадратична функція: $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$.

Задача 3.2: Зміна матриці білінійної функції при заміні базису

У стандартному базисі простору $\mathbb{R}^2$ білінійній функції відповідає матриця

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Новий базис задано векторами: $b_1 = (1, 1)^T$, $b_2 = (1, -1)^T$.

Потрібно:

1. записати матрицю переходу C до нового базису;
2. знайти матрицю білінійної функції в новому базисі;
3. пояснити, чому використовується формула $A' = C^T A C$, а не формула подібності.

Розв'язання.

1. Стовпцями матриці переходу є координати нових базисних векторів у старому базисі. Тому

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Для білінійних функцій матриця при заміні базису змінюється за законом конгруентності:

$$A' = C^T A C.$$

Обчислимо:

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $C^T = C$, маємо

$$A' = C^T A C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Формула $A' = C^T A C$ використовується тому, що білінійна функція має два векторні аргументи. При заміні координат перетворюється і перший, і другий аргумент. Для матриці лінійного оператора ситуація інша, тому там використовується формула подібності.

Відповідь. Матриця переходу до нового базису: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Матриця білінійної функції в новому базисі: $A' = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 3.3: Матриця квадратичної функції та полярна білінійна функція

Задано квадратичну функцію

$$Q(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Потрібно:

1. побудувати матрицю квадратичної функції;
2. записати відповідну полярну білінійну функцію;
3. перевірити додатну визначеність квадратичної функції за критерієм Сильвестра.

Розв'язання.

1. Матриця квадратичної функції є симетричною. Коефіцієнти при квадратах змінних записуємо на головній діагоналі, а коефіцієнт при змішаному добутку ділимо навпіл. Оскільки коефіцієнт при x_1x_2 дорівнює 4, то відповідні позадіагональні елементи дорівнюють 2. Отже,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$Q(x) = X^T A X.$$

2. Полярна білінійна функція має вигляд

$$B_Q(x, y) = X^T A Y.$$

Тобто

$$B_Q(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

3. Перевіримо додатну визначеність за критерієм Сильвестра. Кутові мінори:

$$\Delta_1 = 3 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 > 0.$$

Отже, всі кутові мінори додатні. Тому квадратична функція є додатно визначеною.

Відповідь. Матриця квадратичної функції: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Полярна білінійна функція: $B_Q(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2$.

Квадратична функція є додатно визначеною.

Задача 3.4: Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду методом Лагранжа

Звести до канонічного вигляду квадратичну функцію

$$Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2.$$

Потрібно:

1. побудувати матрицю квадратичної функції;
2. звести функцію до канонічного вигляду методом Лагранжа;
3. записати заміну змінних;
4. визначити ранг та індекси інерції.

Розв'язання.

1. Спочатку побудуємо матрицю квадратичної функції:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Оскільки при x_1^2 коефіцієнт ненульовий, починаємо виділення повного квадрата за змінною x_1 . Зберемо всі доданки, які містять x_1 :

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Маємо

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2.$$

Тоді

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Введемо нові змінні:

$$y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3.$$

Тоді

$$Q = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Це канонічний вигляд квадратичної функції.

3. Із заміни маємо

$$x_1 = y_1 - 2y_2 - y_3, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3.$$

Тому матриця переходу у формулі $X = CY$ має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. У канонічному вигляді є три додатні квадрати й немає від'ємних. Тому

$$\text{rank } Q = 3, \quad p = 3, \quad q = 0, \quad r_0 = 0.$$

Відповідь. Матриця квадратичної функції: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Канонічний вигляд: $Q = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

Матриця переходу: $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ранг дорівнює 3, додатний індекс інерції $p = 3$, від'ємний індекс інерції $q = 0$, нульовий індекс інерції $r_0 = 0$.

Задача 3.5: Метод Лагранжа у випадку відсутності квадратів

Звести до канонічного вигляду квадратичну функцію

$$Q(x) = 6x_1x_2.$$

Потрібно:

1. побудувати матрицю квадратичної функції;
2. виконати заміну змінних, яка перетворює мішаний добуток на різницю квадратів;
3. записати канонічний вигляд;
4. визначити ранг та індекси інерції.

Розв'язання.

1. Матриця квадратичної функції має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

оскільки коефіцієнт при x_1x_2 дорівнює 6, а відповідні позадіагональні елементи симетричної матриці дорівнюють 3.

2. У формі немає квадратів змінних, тому виконаємо допоміжну заміну:

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_1 + y_2.$$

Тоді

$$x_1x_2 = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = y_1^2 - y_2^2.$$

Отже,

$$Q = 6x_1x_2 = 6y_1^2 - 6y_2^2.$$

Матриця переходу у формулі $X = CY$ дорівнює

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det C = 2 \neq 0$, заміна є невиродженою.

4. У канонічному вигляді є один додатний і один від'ємний квадрат. Тому

$$\text{rank } Q = 2, \quad p = 1, \quad q = 1, \quad r_0 = 0.$$

Функція є невизначеною.

Відповідь. Матриця квадратичної функції:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Канонічний вигляд:

$$Q = 6y_1^2 - 6y_2^2.$$

Матриця переходу:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг дорівнює 2, додатний індекс інерції $p = 1$, від'ємний індекс інерції $q = 1$, нульовий індекс інерції $r_0 = 0$. Функція є невизначеною.

Задача 3.6: Метод Якобі та критерій Сильвестра

Задано квадратичну функцію

$$Q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

Потрібно:

1. побудувати матрицю квадратичної функції;
2. обчислити кутові мінори;
3. перевірити застосовність методу Якобі;
4. звести функцію до канонічного вигляду методом Якобі;
5. дослідити додатну визначеність за критерієм Сильвестра;

6. визначити ранг та індекси інерції.

Розв'язання.

Матриця квадратичної функції:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо кутові мінори:

$$\Delta_1 = 2.$$

Далі

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

Нарешті

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи за першим рядком, маємо

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(6 - 1) - (3 - 1) + (1 - 2) \\ &= 10 - 2 - 1 = 7. \end{aligned}$$

Отже,

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 3, \quad \Delta_3 = 7.$$

Усі кутові мінори ненульові, тому метод Якобі застосовний.

Покладемо $\Delta_0 = 1$. За методом Якобі:

$$Q(y) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} y_3^2.$$

Тому

$$Q(y) = 2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 + \frac{7}{3}y_3^2.$$

Оскільки

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0,$$

за критерієм Сильвестера квадратична функція є додатно визначеною.

У канонічному вигляді всі три коефіцієнти додатні. Отже,

$$\text{rank } Q = 3, \quad p = 3, \quad q = 0, \quad r_0 = 0.$$

Відповідь. Матриця квадратичної функції:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Канонічний вигляд за методом Якобі:

$$Q(y) = 2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 + \frac{7}{3}y_3^2.$$

Функція є додатно визначеною. Ранг дорівнює 3, додатний індекс інерції $p = 3$, від'ємний індекс інерції $q = 0$, нульовий індекс інерції $r_0 = 0$.

Задача 3.7: Ортогональне зведення поверхні другого порядку до канонічного вигляду

Звести до канонічного вигляду ортогональним перетворенням рівняння поверхні другого порядку

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - z^2 = 36.$$

Потрібно:

1. виділити квадратичну частину рівняння та записати її матрицю;
2. знайти власні значення матриці квадратичної частини;
3. побудувати ортонормований базис із власних векторів;
4. записати ортогональну матрицю переходу;
5. виконати ортогональну заміну координат і отримати канонічний вигляд рівняння;
6. визначити тип поверхні другого порядку.

Розв'язання.

Квадратична частина рівняння має вигляд

$$Q(x, y, z) = 5x^2 + 4xy + 8y^2 - z^2.$$

Їй відповідає симетрична матриця

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Справді, коефіцієнт при змішаному добутку xy дорівнює 4, тому відповідні позадіагональні елементи матриці дорівнюють 2.

Знайдемо власні значення матриці A . Оскільки змінна z не зміщується зі змінними x та y , одне власне значення одразу дорівнює

$$\lambda_3 = -1.$$

Для змінних x, y розглянемо матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Її характеристичне рівняння:

$$\det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(8 - \lambda) - 4.$$

Отже,

$$(5 - \lambda)(8 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 9)(\lambda - 4).$$

Тому

$$\lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = -1.$$

Знайдемо власні вектори. Для $\lambda_1 = 9$ маємо

$$(A_1 - 9I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Звідси $y = 2x$, тому можна взяти власний вектор

$$v_1 = (1, 2, 0)^T.$$

Після нормування:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)^T.$$

Для $\lambda_2 = 4$ маємо

$$(A_1 - 4I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Звідси $x + 2y = 0$, тому можна взяти власний вектор

$$v_2 = (-2, 1, 0)^T.$$

Після нормування:

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T.$$

Для власного значення $\lambda_3 = -1$ маємо власний вектор

$$e_3 = (0, 0, 1)^T.$$

Отже, отримали ортонормований базис із власних векторів:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)^T, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T, \quad e_3 = (0, 0, 1)^T.$$

Складемо з цих векторів ортогональну матрицю переходу:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$U^T U = I$$

i

$$U^T A U = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо ортогональну заміну координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

У координатному вигляді це означає:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}u - \frac{2}{\sqrt{5}}v, \quad y = \frac{2}{\sqrt{5}}u + \frac{1}{\sqrt{5}}v, \quad z = w.$$

У нових координатах квадратична частина набуває вигляду

$$Q = 9u^2 + 4v^2 - w^2.$$

Отже, рівняння поверхні переходить у вигляд

$$9u^2 + 4v^2 - w^2 = 36.$$

Поділимо обидві частини рівняння на 36:

$$\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{9} - \frac{w^2}{36} = 1.$$

Це канонічне рівняння поверхні другого порядку. У ньому два квадрати мають додатні коефіцієнти, один квадрат має від'ємний коефіцієнт, а права частина дорівнює 1. Тому задана поверхня є однопорожнинним гіперболоїдом.

Відповідь. Ортогональна матриця переходу:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ортогональна заміна координат:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}u - \frac{2}{\sqrt{5}}v, \quad y = \frac{2}{\sqrt{5}}u + \frac{1}{\sqrt{5}}v, \quad z = w.$$

Канонічний вигляд рівняння:

$$\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{9} - \frac{w^2}{36} = 1.$$

Отже, задана поверхня є однопорожнинним гіперболоїдом.

3.5 Задачі для самостійного розв'язування

У наведених нижче задачах потрібно відпрацювати основні обчислювальні прийоми теми: побудову матриці білінійної та квадратичної функції, розклад білінійної функції на

симетричну й кососиметричну частини, зміну матриці при заміні базису, побудову полярної білінійної функції, зведення квадратичної функції до канонічного вигляду, визначення індексів інерції та перевірку додатної визначеності за критерієм Сильвестра.

Задача 3.1: Білінійна функція, її матриця та симетрична частина

Для свого варіанта у просторі $\mathbb{R}^2$ задано білінійну функцію $B(x, y)$, де

$$x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2).$$

Потрібно:

1. записати матрицю білінійної функції у стандартному базисі;
2. визначити, чи є функція симетричною або кососиметричною;
3. знайти симетричну та кососиметричну частини цієї білінійної функції;
4. записати квадратичну функцію $Q(x) = B(x, x)$.

Варіанти:

- | | |
|--|---|
| 1. $B(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2$. | 9. $B(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2$. |
| 2. $B(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2$. | 10. $B(x, y) = -x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$. |
| 3. $B(x, y) = 3x_1y_2 - 3x_2y_1$. | 11. $B(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$. |
| 4. $B(x, y) = 4x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$. | 12. $B(x, y) = 6x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$. |
| 5. $B(x, y) = 2x_1y_1 - 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 3x_2y_2$. | 13. $B(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1 - 2x_2y_2$. |
| 6. $B(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$. | 14. $B(x, y) = 4x_1y_1 - 3x_1y_2 + 3x_2y_1$. |
| 7. $B(x, y) = 5x_1y_2 - 5x_2y_1$. | 15. $B(x, y) = x_1y_1 + 4x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$. |
| 8. $B(x, y) = 3x_1y_1 + 6x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$. | |

Задача 3.2: Зміна матриці білінійної функції при заміні базису

У стандартному базисі простору $\mathbb{R}^2$ білінійній функції відповідає матриця A . Новий базис задано векторами

$$b_1 = (1, 1), \quad b_2 = (1, -1).$$

Потрібно:

1. записати матрицю переходу C до нового базису;
2. знайти матрицю білінійної функції в новому базисі за формулою

$$A' = C^T A C;$$

3. перевірити, чи зберігається симетричність матриці, якщо початкова матриця є симетричною;
4. пояснити, чому тут використовується конгруентне перетворення, а не подібність матриць.

Варіанти:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$

11. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

7. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$

13. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

14. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

5. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

10. $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$

15. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$

Задача 3.3: Матриця квадратичної функції, полярна функція та критерій Сильвестера

Для свого варіанта задано квадратичну функцію $Q(x)$ у просторі $\mathbb{R}^2$, де $x = (x_1, x_2)$.

Потрібно:

1. побудувати симетричну матрицю квадратичної функції;
2. записати матричний вигляд $Q(x) = X^T A X$;
3. побудувати полярну білінійну функцію $B_Q(x, y)$;
4. перевірити додатну визначеність за критерієм Сильвестра;
5. зробити висновок про знакованість квадратичної функції.

Варіанти:

1. $Q(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2.$

9. $Q(x) = 7x_1^2 + 10x_1x_2 + 4x_2^2.$

2. $Q(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2.$

10. $Q(x) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2.$

3. $Q(x) = x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2.$

11. $Q(x) = 4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2.$

4. $Q(x) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2.$

12. $Q(x) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2.$

5. $Q(x) = 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2.$

13. $Q(x) = 2x_1^2 - 8x_1x_2 + 2x_2^2.$

6. $Q(x) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_2^2.$

14. $Q(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2.$

7. $Q(x) = 6x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2.$

15. $Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2.$

8. $Q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2.$

Задача 3.4: Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду методом Лагранжа

Для свого варіанта звести квадратичну функцію до канонічного вигляду методом Лагранжа.

Потрібно:

1. побудувати матрицю квадратичної функції;
2. виконати виділення повних квадратів;
3. записати невироджену заміну змінних;
4. записати канонічний вигляд;

5. визначити ранг, додатний, від'ємний і нульовий індекси інерції;
6. зробити висновок про тип квадратичної функції.

Варіанти:

1. $Q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$.
2. $Q = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$.
3. $Q = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$.
4. $Q = 3x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_3^2$.
5. $Q = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$.
6. $Q = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$.
7. $Q = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$.
8. $Q = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$.
9. $Q = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_3^2$.
10. $Q = 3x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_3^2$.
11. $Q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$.
12. $Q = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$.
13. $Q = 6x_1x_2 + 2x_3^2$.
14. $Q = 4x_1x_2 - 2x_2x_3$.
15. $Q = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Задача 3.5: Метод Якобі та індекси інерції

Для свого варіанта задано симетричну матрицю A квадратичної функції

$$Q(x) = X^T A X, \quad X = (x_1, x_2, x_3)^T.$$

Потрібно:

1. записати квадратичну функцію в координатному вигляді;
2. обчислити кутові мінори $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$;
3. перевірити, чи застосовний метод Якобі;
4. якщо метод Якобі застосовний, записати канонічний вигляд;
5. перевірити додатну визначеність за критерієм Сильвестра;
6. визначити ранг та індекси інерції.

Варіанти:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
7. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
10. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
11. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
12. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13. $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$

15. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Задача 3.6: Ортогональне зведення та класифікація поверхні другого порядку

Для свого варіанта дослідити рівняння поверхні другого порядку.

Потрібно:

1. виділити квадратичну частину рівняння;
2. побудувати симетричну матрицю квадратичної частини;
3. знайти власні значення цієї матриці;
4. побудувати ортонормований базис із власних векторів;
5. записати ортогональну заміну координат, яка усуває мішані добутки;
6. записати рівняння в канонічному вигляді;
7. визначити тип поверхні другого порядку.

Варіанти:

1. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - z^2 = 36.$

2. $4x^2 - 4xy + 4y^2 + z^2 = 9.$

3. $x^2 + 2xy + y^2 - 4z = 0.$

4. $x^2 - 2xy + y^2 + 9z^2 = 1.$

5. $3x^2 + 4xy + 3y^2 + 2z^2 = 1.$

6. $5x^2 + 2xy + 5y^2 - z^2 = 1.$

7. $x^2 + 2xz + z^2 - y = 0.$

8. $4x^2 + 3y^2 + 2yz + 3z^2 = 1.$

9. $6x^2 - 4xy + 6y^2 + 3z^2 = 12.$

10. $4x^2 + 4xy + 4y^2 - 9z^2 = 0.$

11. $2x^2 + 2xy + 2y^2 - z = 0.$

12. $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0.$

13. $9x^2 - 8xy + 9y^2 + 4z^2 = 36.$

14. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + z^2 = 4.$

15. $x^2 + 2xy + y^2 + 4z^2 = 1.$

3.6 Прикладні задачі

Наведені задачі показують, як білінійні та квадратичні форми виникають у моделях, характерних для програмної інженерії. Вони пов'язують теорію із ситуаціями, де матриця форми описує взаємодію параметрів, локальну поведінку функції якості, стійкість моделі або геометрію простору пошуку.

Задача 3.1: Квадратична модель функції втрат програмної моделі**ІТ-коментар**

У задачах налаштування програмної моделі часто потрібно зрозуміти, як змінюється *функція втрат*^a після малих змін параметрів. Поблизу стаціонарної точки квадратична частина функції дає змогу визначити характер цієї точки: локальний мінімум, максимум або сідлову точку.

^a*Loss function* — функція втрат, тобто числова міра помилки або неякісності роботи моделі. Чим менше її значення, тим кращим вважається поточний стан моделі.

Нехай h_1 та h_2 позначають малі зміни двох параметрів програмної моделі. Локальна зміна функції втрат описується квадратичною функцією

$$Q(h_1, h_2) = 4h_1^2 + 4h_1h_2 + 3h_2^2.$$

Потрібно:

1. побудувати матрицю квадратичної функції Q ;
2. перевірити додатну визначеність форми за критерієм Сильвестра;
3. звести форму до канонічного вигляду методом Лагранжа;
4. визначити ранг та індекси інерції;
5. пояснити, що означає додатна визначеність цієї форми для локальної поведінки функції втрат.

Задача 3.2: Білінійна міра взаємодії програмних модулів**ІТ-коментар**

У програмній інженерії модулі, класи або компоненти системи можна описувати векторами ознак: складність коду, кількість викликів, покриття тестами, кількість дефектів тощо. Білінійна форма дає змогу враховувати окремі ознаки та їхню взаємодію (*cross-features*)^a.

^a*Cross-features* — комбіновані ознаки, які описують взаємодію двох або кількох початкових ознак. Наприклад, у програмній інженерії важливою може бути не лише складність модуля або кількість змін у ньому окремо, а їх поєднання.

Для порівняння двох програмних модулів використовується вектор ознак

$$x = (x_1, x_2, x_3),$$

де x_1 — умовний показник складності, x_2 — частота змін, x_3 — рівень покриття тестами. Зважена міра взаємодії двох модулів x та y задана білінійною функцією

$$B(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3.$$

Потрібно:

1. записати матрицю білінійної функції B ;
2. перевірити, чи є ця білінійна функція симетричною;
3. записати квадратичну функцію $Q(x) = B(x, x)$;
4. перевірити додатну визначеність відповідної квадратичної функції;
5. зробити висновок, чи може така функція задавати зважений скалярний добуток у просторі ознак.

Задача 3.3: Метод найменших квадратів у задачі оцінювання параметрів

ІТ-коментар

Метод найменших квадратів часто використовується для калібрування параметрів моделі: оцінювання часу виконання, вартості розробки, навантаження на сервіс або кількості дефектів. Квадратична частина функції похибки визначає, чи має задача єдиний стійкий мінімум.

У задачі наближеного оцінювання часу виконання програмного компонента використовується модель із двома параметрами a та b . Функція сумарної квадратичної похибки має вигляд

$$E(a, b) = (a + b - 3)^2 + (2a - b - 1)^2 + (a + 2b - 4)^2.$$

Потрібно:

1. розкрити дужки і подати $E(a, b)$ у вигляді суми квадратичної, лінійної та сталої частин;
2. записати матрицю квадратичної частини;
3. перевірити додатну визначеність квадратичної частини за критерієм Сильвестра;
4. пояснити, чому додатна визначеність квадратичної частини забезпечує єдиність точки мінімуму;
5. сформулювати зміст цього результату для задачі калібрування параметрів.

Задача 3.4: Регуляризація параметрів моделі

ІТ-коментар

Регуляризація (L_2 -штраф або *Ridge regression*)^a використовується для обмеження надмірного зростання параметрів моделі. Якщо квадратична форма штрафу не є додатно визначеною, це може означати, що деякі напрями в просторі параметрів залишаються неконтрольованими.

^a L_2 -штраф — штрафний доданок, пропорційний сумі квадратів параметрів моделі. *Ridge regression* — гребенева регресія, тобто лінійна регресія з L_2 -регуляризацією, яка зменшує величини коефіцієнтів і допомагає стабілізувати модель.

У моделі машинного навчання для програмної системи використовується штрафна функція

$$R(w_1, w_2, w_3) = w_1^2 + 2w_2^2 + 3w_3^2 + 2w_1w_2.$$

Потрібно:

1. побудувати матрицю квадратичної функції R ;
2. перевірити додатну визначеність за критерієм Сильвестра;
3. звести форму до канонічного вигляду методом Лагранжа;
4. визначити ранг та індекси інерції;
5. пояснити, чи обмежує така регуляризація зростання параметрів у всіх напрямках простору.

Задача 3.5: Квадратична функція стійкості програмно-апаратної системи

ІТ-коментар

Додатно визначена квадратична форма може використовуватися як *функція Ляпунова*^a для дослідження *стійкості системи*. Разом з умовою на зміну цієї функції вздовж траєкторій вона дає змогу оцінювати поведінку системи після малих збурень.

^aФункція Ляпунова — це скалярна функція стану системи, яку використовують для дослідження стійкості без явного розв'язування рівнянь руху або рівнянь еволюції системи. Якщо така функція є додатно визначеною, а її зміна вздовж траєкторій системи має потрібний знак, то це дає підстави робити висновки про стійкість стану рівноваги. Назва пов'язана з працями О. М. Ляпунова.

Нехай стан програмно-апаратної системи після малого збурення описується вектором $x = (x_1, x_2)^T$. Деяка енергетична функція системи описується квадратичною функцією

$$Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Потрібно:

1. побудувати матрицю квадратичної функції Q ;

2. перевірити її додатну визначеність за критерієм Сильвестра;
3. звести форму до канонічного вигляду методом Лагранжа;
4. визначити ранг та індекси інерції;
5. пояснити, як додатна визначеність пов'язана зі стійкістю стану системи щодо малих збурень.

Задача 3.6: Лінії рівня функції якості програмної моделі

ІТ-коментар

Лінії рівня функції якості допомагають зрозуміти геометрію простору пошуку^a. Форма цих ліній вказує, чи однаково чутлива модель до зміни різних параметрів, чи існують напрями, у яких значення функції змінюється швидше.

^aГеометричне подання функції втрат або функції якості в просторі параметрів моделі часто називають *loss landscape*. Таке подання дає змогу аналізувати, як змінюється значення функції при зміні параметрів, де розташовані локальні мінімуми, сідлові точки та напрями найбільшої чутливості.

У задачі аналізу двох параметрів програмної моделі лінії рівня функції якості задаються рівнянням

$$3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 1.$$

Потрібно:

1. побудувати матрицю квадратичної форми, що стоїть у лівій частині рівняння;
2. перевірити додатну визначеність цієї форми;
3. звести форму до канонічного вигляду;
4. визначити тип кривої другого порядку;
5. пояснити, як форма ліній рівня допомагає оцінити чутливість функції якості до зміни параметрів.

3.7 Питання для самоконтролю

1. Що називають білінійною функцією на лінійному просторі? Які умови лінійності за кожним аргументом потрібно перевірити?
2. Чим відрізняються поняття білінійної функції та білінійної форми?
3. Як будується матриця білінійної функції в заданому базисі?
4. Як за матрицею білінійної функції записати її матричний вигляд $B(x, y) = X^T A Y$?
5. Як змінюється матриця білінійної функції при переході до іншого базису?
6. Чим формула $A' = C^T A C$ для білінійних і квадратичних форм відрізняється від формули зміни матриці лінійного оператора?

7. Які матриці називають конгруентними? Як це поняття пов'язане з матрицями білінійної функції в різних базисах?
8. Що називають рангом білінійної функції? Чому він не залежить від вибору базису?
9. Яку білінійну функцію називають симетричною? Як це перевірити за її матрицею?
10. Яку білінійну функцію називають кососиметричною? Яку властивість має значення $B(x, x)$ для такої функції?
11. Як довільну білінійну функцію подати у вигляді суми симетричної та кососиметричної частин?
12. Що називають квадратичною функцією? У якому розумінні квадратична форма є координатним записом квадратичної функції?
13. Що називають полярною білінійною функцією квадратичної функції? За якою формулою її можна відновити?
14. Якими двома способами можна задавати квадратичну функцію на скінченновимірному просторі?
15. Що означає звести квадратичну функцію до канонічного вигляду?
16. У чому полягає метод Лагранжа для зведення квадратичної форми до канонічного вигляду?
17. У чому полягає метод Якобі? Яку роль у ньому відіграють кутові мінори матриці?
18. Що називають додатним, від'ємним і нульовим індексами інерції квадратичної функції?
19. У чому полягає закон інерції квадратичних форм?
20. Яку квадратичну функцію називають додатною або додатно визначеною?
21. Сформулюйте критерій Сильвестра для додатної квадратичної функції.
22. Як теорія симетричних матриць використовується для зведення квадратичної функції до канонічного вигляду?
23. Який геометричний зміст має ортогональне перетворення змінних?
24. Як квадратичні форми використовуються під час класифікації поверхонь другого порядку?
25. Від чого залежить тип поверхні другого порядку після зведення її рівняння до канонічного вигляду?

Бібліографія

- [1] Безущак О. О., Ганюшкін О. Г. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри (векторні простори): для студентів університетів. — К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2010. — 257 с.
- [2] Безущак О. О., Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. А. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри: навч. посіб. — К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2016. — 255 с.
- [3] Безущак О. О., Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. А. Навчальний посібник з лінійної алгебри для студентів механіко-математичного факультету. — К.: ВПЦ “Київський університет”, 2019. — 224 с.
- [4] Булдигін В. В., Жук В. А., Рущицька С. О., Ясінський В. В. Збірник задач з аналітичної геометрії та векторної алгебри: навч. посіб. — К.: Вища шк., 1999. — 192 с.
- [5] Булдигін В. В., Алексеева І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посіб. / за ред. проф. В. В. Булдигіна. — К.: ТВіМС, 2011. — 224 с.
- [6] Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. А., Овсієнко С. А. Алгоритми лінійної алгебри: для студентів механіко-математичного факультету. — К.: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2015. — 44 с.
- [7] Довгай Б. В. Лінійні простори : конспект лекцій. — Київ, 2025. — 108 с. — Режим доступу: https://csc.knu.ua/media/filer_public/b0/b1/b0b19ee7-6081-4e88-9c8a-47a93f41aee6/linearspaces.pdf
- [8] Алгебра та геометрія. Лінійні простори, перетворення та оператори : навч. посіб. / А. В. Заверотинський, Б. В. Довгай, Р. Я. Якимів, Т. І. Шакотько. — Київ, 2026. — 152 с. — Режим доступу: https://csc.knu.ua/media/filer_public/78/67/7867aa73-5d87-4afc-9d96-a787e19f55e8/ag_linearspaces_zdys_2026_final.pdf
- [9] Калужнін Л., Вишенський В., Шуб Ц. Лінійні простори. — К.: Вища школа, 1971. — 344 с.
- [10] Маринич О. В., Проскурін Д. П. Скінченновимірний лінійний аналіз. Теорія визначників. — К.: Центр навчальної літератури, 2014. — 207 с.
- [11] Рудавський Ю. К., Костробій П. П., Луник Х. П., Уханська Д. В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посіб. — Львів: Львівська політехніка, 1999. — 262 с.
- [12] Травкін Ю. І. Лінійна алгебра і аналітична геометрія: навч. посіб. — Х.: Майдан, 2009. — 416 с.
- [13] Чарін В. С. Лінійна алгебра: підручник. — К.: Техніка, 2004. — 416 с.

- [14] Boyd S., Vandenberghe L. Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares. — Cambridge: Cambridge University Press, 2018. — 474 p.
- [15] Deisenroth M. P., Faisal A. A., Ong C. S. Mathematics for Machine Learning. — Cambridge: Cambridge University Press, 2020. — 390 p.
- [16] Fessler J. A., Nadakuditi R. R. Linear Algebra for Data Science, Machine Learning, and Signal Processing. — New York, NY: Cambridge University Press, 2024. — 452 p.
- [17] Lay D. C. Linear Algebra and Its Applications. — 3rd updated ed. — Boston, MA: Addison-Wesley, 2005. — 576 p.
- [18] Meyer C. D. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. — Philadelphia, PA: SIAM, 2000. — 718 p.
- [19] Strang G. Linear Algebra and Its Applications. — 4th ed. — Cengage Learning, 2006.
- [20] Strang G. Linear Algebra and Learning from Data. — Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 2019. — 432 p.

Предметний покажчик

- $C[a, b]$, 12
 $M_{m,n}(\mathbb{R})$, 12
 $P_n[t]$, 12
 алгоритм
 Грама–Шмідта, 16
 індекси інерції квадратичної функції, 82
 класифікація поверхні другого порядку, 83
 критерій Сильвестра, 82
 матриця білінійної функції, 79
 матриця квадратичної функції, 80
 метод Лагранжа, 81
 метод Якобі, 81
 обчислення кута між векторами, 15
 обчислення норми, 15
 обчислення скалярного добутку, 15
 обчислення відстані, 15
 ортогональне зведення квадратичної функції, 82
 перевірка ортогональності та ортонормованості системи векторів, 15
 перевірка симетричності білінійної функції, 79
 побудова матриці Грама, 17
 побудова ортонормованої системи з ортогональної, 16
 полярна білінійна функція, 81
 розклад білінійної функції, 80
 зміна матриці білінійної функції, 79
 знаходження ортогонального доповнення, 16
 знаходження ортогональної проєкції, 17
 знаходження ортогональної складової, 17
 білінійна форма, 72
 білінійна функція, 72
 діагоналізація
 ортогональна, 41, 47
 додатна квадратична функція, 77
 додатно визначена квадратична форма, 77
 двопорожнинний гіперболоїд, 83
 еліпсоїд, 83
 еліптичний циліндр, 84
 еліптичний параболоїд, 84
 ермітів скалярний добуток, 11
 стандартний у $\mathbb{C}^n$, 12
 ермітова матриця
 квантові обчислення, 68
 ермітове спряження, 50
 евклідовий простір, 11
 гіперболічний циліндр, 84
 гіперболічний параболоїд, 84
 індекси інерції квадратичної функції, 77
 інваріантність ортогонального доповнення, 42
 ізометрія, 42
 ізоморфізм евклідових просторів, 14
 канонічний вигляд квадратичної форми, 75
 класифікація поверхонь другого порядку, 78
 конгруентне перетворення матриці, 73
 конгруентні матриці, 73
 конус другого порядку, 83
 косинусна подібність, 35
 кососиметрична білінійна функція, 74
 критерій Сильвестра, 77
 кут між векторами, 12, 15
 кутовий мінор, 76
 квадратична форма, 74
 квадратична функція, 74
 лінійна незалежність
 перевірка за матрицею Грама, 17
 матриця
 Гессе, 71
 Грама, 14, 17, 40, 45
 Паулі, 68

- ермітова, 44, 50
- обернена, 43
- ортогональна, 43
- переходу, 73
- симетрична, 41
- спряженого оператора, 40, 45
- транспонована, 40
- унітарна, 50
- матриця білінійної функції, 72
- матриця квадратичної функції, 75
- метод Лагранжа, 76
- метод Якобі, 76
- многочлен, 12
- нерівність
 - Коші–Буняковського, 13
 - трикутника, 13
- норма вектора, 12, 15
- однопорожнинний гіперболоїд, 83
- ортогональна матриця
 - геометрична інтерпретація, 49
 - обробка сигналів, 68
 - перевірка, 47
 - поворот, 67
 - стовпчики, 48
- ортогональна складова, 17
- ортогональне доповнення, 14, 16, 42
 - інваріантність, 50
- ортогональне перетворення змінних, 78
- ортогональний оператор, 42
 - будова, 44
 - критерії, 42
 - на площині, 43
 - на прямій, 43
 - перевірка, 47
 - збереження норми, 48
 - збереження скалярного добутку, 48
- ортогональність, 13
- ортонормована система
 - стовпчики матриці, 48
- ортонормований базис, 40
 - із власних векторів, 41
- параболічний циліндр, 85
- підпростір
 - інваріантний, 42, 49
- полярна білінійна функція, 75
- поверхня другого порядку, 78
- поворот, 49
 - комп'ютерна графіка, 67
- процес Грама–Шмідта, 16
- проекція
 - ортогональна, 17
- простір матриць, 12
- простір неперервних функцій, 12
- ранг білінійної функції, 73
- ранг квадратичної функції, 77
- самоспряжений оператор, 41
 - квадратична функція, 66
 - перевірка, 46
 - спектральне дослідження, 46
- сигнал
 - енергія, 68
- симетрична білінійна функція, 74
- симетрична матриця
 - ортогональна діагоналізація, 41, 47
 - перевірка, 46
- система векторів
 - ортогональна, 13, 15, 16
 - ортонормована, 13, 15, 16
- скалярний добуток, 11, 15
 - стандартний у $\mathbb{R}^n$, 11
 - у просторі матриць, 12
 - у просторі неперервних функцій, 12
- слід матриці, 12
- спектральна теорема, 41
- спряжений оператор, 40
 - алгоритм знаходження, 45
 - інваріантність ортогонального доповнення, 50
 - у довільному базисі, 40, 45
- умова Сильвестра, 77
- умова Якобі, 76
- унітарна матриця, 44
 - квантовий венти́ль, 68
- унітарний простір, 11, 44
- визначник
 - ортогональної матриці, 43
- визначник Грама, 14
- відбиття, 49
- відстань між векторами, 12, 15
- власні вектори, 46
- власні значення, 46
- закон інерції квадратичних форм, 77
- застосування
 - аналіз даних, 35, 58, 66
 - аналіз поведінки користувачів, 35
 - автономні агенти, 37
 - добір ознак, 36
 - функція Ляпунова, 101
 - функція втрат, 99
 - функція якості, 66

- комп'ютерна графіка, [36](#), [67](#)
- квантові обчислення, [68](#)
- лінійний модуль, [66](#)
- лінії рівня функції якості, [102](#)
- машинне навчання, [39](#), [66](#), [101](#)
- метод найменших квадратів, [100](#)
- модулі візуалізації, [36](#)
- навігація, [37](#)
- неперервна інтеграція, [28](#)
- обробка ознак, [66](#)
- обробка природної мови, [35](#)
- обробка сигналів, [68](#)
- оптимізація, [66](#)
- пошукові системи, [35](#)
- регуляризація, [101](#)
- рекомендаційні системи, [35](#)
- робототехніка, [37](#)
- стійкість системи, [101](#)
- тестування програмного забезпечення, [28](#)
- виявлення аномалій, [35](#)
- взаємодія ознак, [99](#)
- зниження розмірності, [58](#)
- зворотне поширення, [66](#)
- CAD-системи, [36](#)
- CI/CD, [28](#)
- PCA, [39](#), [58](#)
- embedding-подання, [35](#)
- QR-розклад, [39](#)