



В.В. Семенов

ЕЛЕМЕНТИ НЕЛІНІЙНОГО АНАЛІЗУ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В. В. Семенов

ЕЛЕМЕНТИ НЕЛІНІЙНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник

УДК 517.98
С89

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. Д.А. Номіровський
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка);
чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. П.І. Стецюк
(Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України),

Рекомендовано до друку

вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(протокол № 15 від 24 червня 2025 року)

Ухвалено науково-методичною комісією
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(протокол № 11 від 23 червня 2025 року)

Семенов В. В.

С89 Елементи нелінійного аналізу : навч. посіб. / В. В. Семенов.
К. : ВПЦ "Київський університет", 2026. 70 с.

ISBN 978-966-933-431-2

Навчальний посібник написано на основі конспекту лекцій з дисципліни «Додаткові розділи функціонального аналізу», який читається автором на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Посібник містить фундаментальні теореми Брауера, Браудера, Шаудера та Какутані про нерухомі точки, основні методи апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів. У кінці розділів наведено задачі різного рівня складності, що пропонуються для самостійного розв'язання.

Для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які навчаються за освітньо-науковою програмою «Прикладна математика» спеціальності F1 «Прикладна математика».

УДК 517.98

ISBN 978-966-933-431-2

© Семенов В.В., 2026
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет", 2026

ЗМІСТ

Передмова	4
Розділ 1. Топологічні теореми про нерухому точку	5
1.1. Теореми Брауера та Шаудера	5
1.2. Комбінаторне доведення теореми Брауера в $\mathbb{R}^2$	13
1.3. Теорема Какутані	15
1.4. Застосування теореми Какутані	19
1.5. Порядкові теореми про нерухому точку	25
1.6. Задачі	32
Розділ 2. Елементи метричної теорії нерухомих точок	35
2.1. Метрична проєкція на замкнену опуклу множину	35
2.2. Нерозтягуючі оператори	41
2.3. Алгоритм Красносельського–Манна	49
2.4. Ергодична теорема для нерозтягуючих операторів	51
2.5. Алгоритм Гальперна	54
2.6. Задачі	59
Література	68

Передмова

Ця невелика книга є частиною конспекту лекцій з дисципліни «Додаткові розділи функціонального аналізу» для студентів магістерської програми «Прикладна математика» факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Майже весь матеріал розповідався в 2022–2025 роках.

Розділ 1 містить фундаментальні топологічні теореми Брауера, Шаудера та Какутані про нерухомі точки. На мою думку, знайомство з цими теоремами має велике значення у формуванні сучасного фахівця з прикладної математики. Також розглянуто порядкові теореми Бурбакі–Кнезера та Тарського про нерухомі точки.

Розділ 2 містить нарис метричної теорії нерухомих точок та основні методи апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів.

У кінці розділів наведено задачі, що пропонувались студентам для самостійного розв'язання.

Попередні знання, які вимагаються для розуміння матеріалу, відповідають тому середньому рівню, що досягається після двох років навчання на факультетах комп'ютерних наук, кібернетики та прикладної математики класичних університетів України (вільне володіння основними поняттями та фактами математичного аналізу, лінійної алгебри та лінійного функціонального аналізу). Для довідок рекомендуємо книги [1–3].

Попередні варіанти окремих сюжетів були опубліковані раніше в посібниках [4,5]. Для глибшого вивчення розглянутих питань пропонуємо книги [6–8].

Робота над книгою була підтримана Відділенням цільової підготовки Київського національного університету імені Тараса Шевченка при Національній академії наук України (проєкт «Нові субградієнтні та екстраградієнтні методи для негладких задач регресії», 0124U002162, 2024–2025).

Автор глибоко вдячний колегам і студентам за плідні дискусії та зауваження щодо змісту, передусім Сергію Ляшку, Сергію Денисову, Юрію Гончаренку та Владиславі Чернорай.

Зауваження та побажання можна надсилати електронною поштою:

`semenov.volodya@knu.ua`, `semenov.volodya@gmail.com`.

Розділ 1

Топологічні теореми про нерухому точку

Задачі про нерухомі точки відображень є зручною загальною формою запису й дослідження різних проблем прикладного нелінійного аналізу. Зокрема, у вигляді задачі пошуку нерухомої точки можуть бути сформульовані задачі розв’язання рівнянь, знаходження екстремуму функціоналів, точок рівноваги Неша в грі тощо.

У цьому розділі розглянуто кілька фундаментальних топологічних теорем про нерухомі точки (теореми Брауера, Шаудера та Какутані). Знайомство з цими теоремами має велике значення у формуванні сучасного фахівця з прикладної математики. Також розглянуто порядкові теореми Бурбакі–Кнезера та Тарського про нерухомі точки.

1.1. Теореми Брауера та Шаудера

Будемо використовувати позначення:

- $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ — одинична куля;
- $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ — одинична сфера.

У даному підрозділі норма в просторі $\mathbb{R}^n$ — евклідова.

Нехай $T : X \rightarrow X$ — деяке відображення. Точку $x \in X$ називають нерухомою точкою відображення T , якщо $Tx = x$.

Множину нерухомих точок (fixed points) відображення T позначимо $F(T)$.

Має місце

Теорема 1.1 (Brouwer¹, 1912). *Довільне неперервне відображення $T : B^n \rightarrow B^n$ має нерухому точку.*

¹Лейтзен Егберт Ян Брауер (Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 27.02.1881 — 2.12.1966) — видатний голландський математик. Займався топологією, теорією множин, математичною логікою, теорією міри та комплексним аналізом. Поклав початок новому напрямку в математиці — інтуїціонізму.

З теореми 1.1 легко отримати такий результат про існування нерухомої точки.

Теорема 1.2. *Нехай $K \subseteq \mathbb{R}^n$ — компактна опукла множина та $T : K \rightarrow K$ — неперервне відображення. Тоді T має нерухому точку.*

Доведення. Достатньо застосувати теорему 1.1 до відображення

$$T \circ P_K : B \rightarrow K,$$

де P_K — метрична проєкція на K , B — замкнена куля, що містить K . $\square$

Теорема 1.3. *Нехай K — гомеоморфний образ кулі B^n , $T : K \rightarrow K$ — неперервне відображення. Тоді T має нерухому точку.*

Наслідок 1.1 (лема про гострий кут). *Нехай неперервне відображення $T : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ має властивість*

$$(Tx, x) \geq 0 \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

Тоді існує точка $x_0 \in B^n$ така, що $Tx_0 = 0$.

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що $Tx \neq 0$ для всіх $x \in B^n$. Тоді визначене неперервне відображення

$$x \mapsto -\frac{Tx}{\|Tx\|}$$

кулі B^n у себе. За теоремою Брауера існує точка $x_1 \in B^n$ така, що

$$-\frac{Tx_1}{\|Tx_1\|} = x_1.$$

Звідси маємо

$$(Tx_1, x_1) = -\|Tx_1\| < 0,$$

що, разом із включенням $x_1 \in S^{n-1}$, веде до протиріччя. $\square$

Теорему Брауера виведемо з теореми про відсутність ретракції кулі B^n на сферу S^{n-1} .

Означення 1.1. Нехай $A \subseteq X$. Неперервне відображення $r : X \rightarrow A$ називають ретракцією X на A , якщо $r(x) = x$ для всіх $x \in A$. Множину A називають ретрактом X .

Теорема 1.4. *Не існує ретракції кулі B^n на сферу S^{n-1} .*

Доведення теореми Брауера. Від супротивного. Припустимо, що існує неперервне відображення $T : B^n \rightarrow B^n$ без нерухомих точок. Побудуємо за допомогою T ретракцію r кулі B^n на сферу S^{n-1} .

Для кожної точки $x \in B^n$ розглянемо промінь із початком $Tx \neq x$, що проходить через x . Нехай $r(x)$ — точка, у якій цей промінь перетинає сферу S^{n-1} . Ясно, що побудоване відображення r — ретракція B^n на S^{n-1} . $\square$

Теорема 1.1 та теорема 1.4 еквівалентні. Дійсно, нехай існує ретракція $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$. Тоді відображення

$$-r : B^n \rightarrow S^{n-1}$$

не має нерухомих точок, що суперечить теоремі 1.1.

Доведемо теорему 1.4 для випадку гладкого відображення. Перейти до неперервних відображень можна за допомогою апроксимації неперервних відображень гладкими.

Доведення теореми 1.4. Від супротивного. Припустимо, що існує ретракція $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$ з класу C^1 . Для $x \in B^n$ і $0 \leq t \leq 1$ покладемо

$$\begin{aligned} g(x) &= r(x) - x, \\ r_t(x) &= x + tg(x) = (1 - t)x + tr(x). \end{aligned}$$

З неперервної диференційовності відображення g випливає існування такої сталої $L > 0$, що

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in B^n.$$

Відображення $r_t : B^n \rightarrow B^n$ ін'єктивне при $0 \leq t < \frac{1}{L}$. Дійсно, якщо $x \neq y$, то

$$\|r_t(x) - r_t(y)\| \geq \|x - y\| - t\|g(x) - g(y)\| \geq (1 - tL)\|x - y\| > 0.$$

Частинні похідні відображення g рівномірно обмежені, тому матриця Якобі

$$r'_t(x) = I_n + t \cdot g'(x)$$

за малих t оборотна.

За теоремою про обернене відображення r_t при $t \in [0, t_0]$ відображає $\text{int} B^n$ на деяку відкриту множину $G_t \subseteq \text{int} B^n$.

Нехай $e \in B^n \setminus G_t$. З'єднаємо відрізком точку e з довільною точкою множини G_t і розглянемо точку b , у якій цей відрізок перетинає межу множини G_t .

Множина B^n компактна, тому $b = r_t(x)$ для деякої точки $x \in B^n$.

Оскільки

$$\mathbf{b} \notin G_t = r_t(\text{int} B^n),$$

то $\mathbf{x} \notin \text{int} B^n$, тобто $\mathbf{x} \in S^{n-1}$.

Тому

$$\mathbf{b} = \mathbf{x} \quad \text{і} \quad \mathbf{e} = \mathbf{b} = \mathbf{x} \in S^{n-1}.$$

Таким чином, r_t сюр'єктивно відображає $\text{int} B^n$ на $\text{int} B^n$.

Крім того, r_t бієктивно відображає S^{n-1} на S^{n-1} (на сфері S^{n-1} маємо $r_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$) і, як було показано раніше, r_t ін'єктивно відображає B^n у B^n .

Тому для $t \in [0, t_0]$ відображення r_t — бієкція B^n на B^n .

Розглянемо інтеграл

$$V(t) = \int_{B^n} \det(r'_t(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \int_{B^n} \det(I_n + t \cdot g'(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}.$$

Для $t \in [0, t_0]$ цей інтеграл дорівнює об'єму кулі B^n .

Інтеграл $V(t)$ — поліном від t . Тому $V(t)$ — додатня стала при $0 \leq t \leq 1$, зокрема

$$V(1) = \int_{B^n} \det(r'(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} > 0.$$

З іншого боку, $r(\mathbf{x}) \in S^{n-1}$ для всіх $\mathbf{x} \in B^n$. Оскільки

$$(r(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})) = \|r(\mathbf{x})\|^2 = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in B^n,$$

то

$$0 = \frac{d}{dt} (r(\mathbf{x} + t\mathbf{h}), r(\mathbf{x} + t\mathbf{h}))|_{t=0} = 2(r(\mathbf{x}), r'(\mathbf{x})\mathbf{h}) \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Отже,

$$R(r'(\mathbf{x})) = \{r'(\mathbf{x})\mathbf{h} : \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \{r(\mathbf{x})\}^\perp = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{y}, r(\mathbf{x})) = 0\}$$

і тому

$$\det(r'(\mathbf{x})) = 0.$$

В цьому випадку

$$V(1) = \int_{B^n} \det(r'(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Отримали суперечність. □

Доведемо один важливий результат, який за традицією називають лемою Кнастера²–Куратовського³–Мазуркевича⁴.

Лема 1.1. *Нехай X — довільна множина в $\mathbb{R}^n$. Кожній точці $x \in X$ поставлено у відповідність компактну множину $F(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ так, що для довільної скінченної множини $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subseteq X$*

$$\text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subseteq \bigcup_{i=1}^p F(x_i).$$

Тоді

$$\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset.$$

Доведення. Достатньо довести, що сім'я множин $\{F(x)\}_{x \in X}$ центрована.

Міркуємо від супротивного. Припустимо, що існує така множина $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subseteq X$, що

$$\bigcap_{i=1}^p F(x_i) = \emptyset.$$

Тоді

$$\bigcup_{i=1}^p O_i = \mathbb{R}^n,$$

де $O_i = \mathbb{R}^n \setminus F(x_i)$.

Нехай $\{\phi_i\}$ — неперервне розбиття одиниці в $\mathbb{R}^n$, узгоджене з відкритим покриттям $\{O_i\}$, тобто

$$\phi_i \in C(\mathbb{R}^n), \quad 0 \leq \phi_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^p \phi_i = 1, \quad \text{supp} \phi_i \subseteq O_i.$$

²Броніслав Кнастер (Bronislaw Knaster, 22.05.1893, Варшава — 3.11.1980, Вроцлав) — видатний польський математик, відомий своїми роботами по загальній топології. З 1939 року професор Львівського університету. З 1945 року жив та працював у Вроцлаві. Один з відомих результатів — теорема Кнастера–Тарського, яка стверджує, що множина всіх нерухомих точок монотонного відображення повної ґратки в себе також є повною ґраткою.

³Казимир Куратовський (Kazimierz Kuratowski, 2.02.1896, Варшава — 18.06.1980, Варшава) — видатний польський математик–тополог. У 1927–1933 роках викладав у Львівській політехніці. З 1948 до 1967 очолював Інститут математики Польської академії наук.

⁴Стефан Мазуркевич (Stefan Mazurkiewicz, 25.09.1888, Варшава — 19.06.1945, Гродзиськ-Мазовецький) — видатний польський математик, професор Варшавського університету. Основні результати в топології, математичному аналізі та теорії ймовірностей. У 1933–1935 роках був президентом Польського математичного товариства. Був одним з засновників та головним редактором журналу «Fundamenta mathematicae».

Розглянемо відображення

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^p \phi_i(x)x_i.$$

Ясно, що $\phi(K) \subseteq K$, де $K = \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$. За теоремою Брауера про нерухому точку існує така точка $y \in K$, що

$$y = \sum_{i=1}^p \phi_i(y)x_i.$$

Можна вважати, що для деякого $k \leq p$ маємо

$$\phi_i(y) \begin{cases} > 0, & \text{якщо } i \leq k, \\ = 0, & \text{якщо } i > k, \end{cases}$$

тобто $y \in \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Тоді $y \in \bigcup_{i=1}^k F(x_i)$, а отже, для деякого $i \leq k$ маємо $y \in F(x_i)$. Звідси випливає, що $y \notin O_i$, тобто $\phi_i(y) = 0$. Дійшли суперечності. $\square$

Зауваження 1.1. У лемі 1.1 умову компактності всіх множин $F(x)$ можна послабити до їх замкненості та існування принаймні однієї компактної множини $F(x_0)$, $x_0 \in X$.

А що у нескінченновимірній ситуації?

Розглянемо в просторі c_0 нескінченно малих послідовностей з нормою $\|x\| = \max_n |x_n|$ оператор

$$Tx = (1, x_1, x_2, \dots), \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in c_0.$$

Оператор T неперервний та відображає одиничну замкнену кулю $B \subseteq c_0$ у себе. Нехай $x = (x_1, x_2, \dots)$ — нерухома точка T у B . Тоді

$$(x_1, x_2, \dots) = (1, x_1, x_2, \dots).$$

Звідси випливає, що $x = (1, 1, \dots) \notin c_0$. Отже, $F(T) = \emptyset$.

Розглянемо в просторі ℓ_2 оператор

$$Tx = \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots \right), \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2.$$

Оператор T неперервний та відображає одиничну замкнену кулю $B \subseteq \ell_2$ у себе. Нехай $x = (x_1, x_2, \dots)$ — нерухома точка T у B . Тоді $\|x\| = 1$. З іншого

боку, з

$$(x_1, x_2, \dots) = \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots \right)$$

впливає $x = (0, 0, \dots)$, що суперечить $\|x\| = 1$. Отже, $F(T) = \emptyset$.

Доведемо один з найважливіших результатів нескінченновимірної нелінійного аналізу — теорему Ю. Шаудера⁵ про нерухому точку. Ця теорема є потужним засобом доведення існування розв’язків інтегральних та диференціальних рівнянь.

Теорема 1.5 (Schauder, 1930). *Нехай K — опуклий компакт у лінійному нормованому просторі E та $T : K \rightarrow K$ — неперервне відображення. Тоді T має нерухому точку.*

Доведення. Покажемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує така точка $x_\varepsilon \in K$, що

$$\|Tx_\varepsilon - x_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

Це дасть нам існування нерухомої точки. Дійсно, з (x_{1/n_k}) виділимо підпоследовність (x_{1/n_k}) , збіжну до деякої точки $x \in K$. Тоді

$$Tx_{1/n_k} \rightarrow Tx,$$

звідки випливає $Tx = x$, оскільки маємо

$$\|Tx_{1/n_k} - x_{1/n_k}\| \rightarrow 0.$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та оберемо в K деяку ε -сітку $x_1, \dots, x_N \in K$.

Нехай $S = \text{conv}\{x_1, \dots, x_N\}$ — опукла оболонка множини цих точок. За рахунок опуклості K маємо $S \subseteq K$. Для $i = 1, 2, \dots, N$ розглянемо функції

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_i\|, & \text{якщо } \|x - x_i\| \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{якщо } \|x - x_i\| > \varepsilon. \end{cases}$$

Легко перевірити, що функції β_i неперервні. Також маємо

$$\sum_{i=1}^N \beta_i(x) > 0 \quad \text{при } x \in K,$$

⁵Юліуш Павло Шаудер (Juliusz Pawel Schauder, 21.09.1899 Львів — вересень 1943 року, Львів) — польський математик єврейського походження, відомий своїми роботами з функціонального аналізу. Юліуш вступив до Львівського університету в 1919 році і отримав докторський ступінь в 1923 році. З 1935 року Шаудер працює у Львівському університеті. Належав до Львівської математичної школи. Страчений гестапо, імовірно, у вересні 1943 року.

оскільки для кожного $x \in K$ існує такий номер i , що $\|x - x_i\| < \varepsilon$. Тому функції

$$\alpha_k(x) = \frac{\beta_k(x)}{\sum_{i=1}^N \beta_i(x)}$$

неперервні на K . Зазначимо також, що

$$0 \leq \alpha_k(x) \leq 1 \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^N \alpha_k(x) = 1 \quad \text{при } x \in K.$$

Тепер задамо неперервне відображення g на K формулою

$$g(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(x) x_k.$$

Відображення

$$h = g \circ T : K \rightarrow K$$

також неперервне, причому $h(S) \subseteq S$ (опуклість S і умова $T(K) \subseteq K$). З теореми Брауера про нерухому точку випливає існування $z \in S$ із $h(z) = z$. Оцінимо величину $\|Tz - z\|$. Справедливі співвідношення

$$\begin{aligned} \|Tz - z\| &= \|Tz - g(Tz)\| = \left\| \sum_{k=1}^N \alpha_k(Tz) Tz - \sum_{k=1}^N \alpha_k(Tz) x_k \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^N \alpha_k(Tz) \|Tz - x_k\| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

оскільки при $\|Tz - x_k\| > \varepsilon$ маємо $\alpha_k(Tz) = 0$. □

Існує багато модифікацій цього результату. Однією з них є така теорема.

Теорема 1.6. *Нехай K — замкнена опукла множина в банаховому просторі E і $T : K \rightarrow K$ — неперервне відображення, причому $f(K)$ лежить у компактi. Тоді T має нерухому точку.*

Доведення. Нехай V — замикання опуклої оболонки $T(K)$. Множина V — опуклий компакт та $T(V) \subseteq V$. □

Відомий такий результат В. Клі⁶.

⁶Віктор Л. Клі-молодший (Victor L. Klee, Jr., 18.09.1925, Сан-Франциско — 17.08.2007) — відомий американський математик, який спеціалізувався в опуклому аналізі, функціональному аналізі, комбінаториці та оптимізації.

Теорема 1.7 (Klee, 1955). *Для довільної некомпактної, обмеженої, замкненої та опуклої множини K банахового простору існує неперервне відображення $T : K \rightarrow K$ без нерухомих точок.*

1.2. Комбінаторне доведення теореми Брауера в $\mathbb{R}^2$

За допомогою комбінаторних міркувань доведемо існування нерухомих точок для неперервних відображень $T : \Delta \rightarrow \Delta$, де $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ — замкнений трикутник.

Означення 1.2. Трикутники Δ_0 і Δ_1 розташовані правильно, якщо вірна альтернатива:

$$\Delta_0 \cap \Delta_1 = \emptyset \quad \text{або} \quad \Delta_0 \cap \Delta_1 \text{ — вершина чи сторона } \Delta_0 \text{ і } \Delta_1.$$

Введемо поняття триангуляції.

Означення 1.3. Скінченна множина $T = \{S\}$ трикутників називається триангуляцією трикутника Δ якщо:

- 1) $S \subseteq \Delta$ для всіх $S \in T$;
- 2) $\Delta = \bigcup_{S \in T} S$;
- 3) довільні два трикутника з T розташовані правильно.

Вершини трикутників, що утворюють триангуляцію T , будемо називати вершинами триангуляції T .

Нехай задана деяка триангуляція T трикутника Δ з вершинами v_1, v_2 та v_3 . Помітимо кожен вершину триангуляції номером з множини $\{1, 2, 3\}$. Результат цієї процедури будемо називати фарбуванням вершин триангуляції.

Означення 1.4. Фарбування вершин триангуляції T називатимемо правильним, якщо вершину v_i трикутника Δ пофарбовано в i -й колір та всі вершини триангуляції, що належать стороні $v_i v_j$ пофарбовані лише в кольори i та j , а внутрішні вершини пофарбовані в кольори $1, 2, 3$ довільним чином.

Має місце

Лема 1.2 (лема Шпернера, 1928). *Нехай вершини триангуляції T трикутника Δ правильно пофарбовано. Тоді серед трикутників триангуляції знайдеться такий, всі вершини якого пофарбовано у різні кольори. Більше того, кількість таких трикутників непарна.*

Доведення. Побудуємо граф $G = (V, E)$: в множину вершин V включимо по внутрішній точці з кожного трикутника триангуляції T та одну точку, що лежить ззовні трикутника Δ ; ребрами з'єднуватимемо вершини, що лежать у сусідніх трикутниках зі спільною стороною, вершини якої пофарбовані у кольори 1 та 2 (різні).

Розподіл степенів вершин графа G такий: зовнішня вершина — непарний степінь; вершина з трикольорового трикутника — 1; вершина з трикутника, що пофарбований рівно в два кольори 1 та 2 — 2; вершина з трикутника, у фарбуванні якого відсутній один з кольорів 1 або 2 — 0.

З рівності $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ випливає непарність кількості трикольорових трикутників. $\square$

Перейдемо до комбінаторного доведення теореми Брауера.

Нехай Δ — трикутник в $\mathbb{R}^3$ з вершинами $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ та $e_3 = (0, 0, 1)$.

Розглянемо неперервне відображення

$$T = (f_1, f_2, f_3) : \Delta \rightarrow \Delta.$$

Припустимо, що

$$Tx \neq x \quad \forall x \in \Delta.$$

Позначимо $\text{diam}(T)$ максимальну довжину сторін трикутників триангуляції $T = \{S\}$.

Розглянемо послідовність таких триангуляцій T_k трикутника Δ , що

$$\text{diam}(T_k) \rightarrow 0.$$

В кожній з цих триангуляцій фарбуватимемо вершини v за правилом

$$c(v) = \min \{i : f_i(v) < v_i\} \in \{1, 2, 3\}.$$

Дане фарбування коректне та правильне. Тому за лемою Шпернера у кожній триангуляції T_k існує трикольоровий трикутник з вершинами $\{v^{k,1}, v^{k,2}, v^{k,3}\}$, причому

$$c(v^{k,i}) = i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Оскільки Δ є компактом, то можна вважати, що

$$v^{k,1} \rightarrow v \in \Delta, \quad k \rightarrow \infty.$$

Ясно, що

$$v^{k,2} \rightarrow v \quad \text{та} \quad v^{k,3} \rightarrow v.$$

Оскільки для всіх k i -та координата $Tv^{k,i}$ менше i -тої координати $v^{k,i}$, то у різниці $Tv - v$ немає додатніх координат.

Якщо $Tv \neq v$, то отримуємо неможливий випадок.

1.3. Теорема Какутані

Теореми Брауера та Шаудера можна узагальнити на багатозначні відображення.

Наведемо деякі факти про багатозначні відображення. Нехай X та Y — непорожні множини, через 2^Y позначимо булеан Y . Відображення

$$T : X \rightarrow 2^Y$$

будемо називати багатозначним. У цьому випадку кожній точці $x \in X$ поставлено у відповідність деяку множину $Tx \subseteq Y$, яку далі вважатимемо непорожньою.

Графіком багатозначного відображення $T : X \rightarrow 2^Y$ називатимемо множину

$$\Gamma_T = \{(x, y) \in X \times Y : y \in Tx\} \subseteq X \times Y.$$

Означення 1.5. Точка $\bar{x} \in X$ називається нерухомою точкою відображення $T : X \rightarrow 2^X$, якщо $\bar{x} \in T\bar{x}$.

Нехай X та Y — топологічні простори.

Означення 1.6. Багатозначне відображення

$$T : X \rightarrow 2^Y$$

називається напівнеперервним зверху в точці $x \in X$, якщо для довільної відкритої множини $U \subseteq Y$ такої, що $Tx \subseteq U$, існує окіл V точки x , що задовольняє умову

$$T(V) = \bigcup_{v \in V} Tv \subseteq U.$$

Відображення T називається напівнеперервним зверху, якщо воно є напівнеперервним зверху в кожній точці $x \in X$.

Якщо T — звичайне відображення, то для нього напівнеперервність зверху рівносильна неперервності.

Означення 1.7. Багатозначне відображення $T : X \rightarrow 2^Y$ називається замкненим, якщо графік Γ_T замкнений у $X \times Y$.

Лема 1.3. Нехай простір Y регулярний. Тоді напівнеперервне зверху відображення $T : X \rightarrow 2^Y$ із замкненими значеннями є замкненим.

Доведення. Нехай $x_\alpha \rightarrow x$, $y_\alpha \rightarrow y$ та $y_\alpha \in Tx_\alpha$. Припустимо, що $y \notin Tx$. Тоді існує замкнений окіл W точки y :

$$W \cap Tx = \emptyset.$$

Множина $V = Y \setminus W$ відкрита та $Tx \subseteq V$. З напівнеперервності зверху T випливає, що існує окіл U точки x :

$$T(U) \subseteq V.$$

Існує α_0 :

$$x_\alpha \in U \quad \forall \alpha \geq \alpha_0 \quad \Rightarrow \quad y_\alpha \in Tx_\alpha \subseteq V = Y \setminus W \quad \forall \alpha \geq \alpha_0.$$

Отримали протиріччя з $y_\alpha \rightarrow y$. □

Лема 1.4. Якщо простір Y хаусдорфовий та компактний, то замкнене відображення $T : X \rightarrow 2^Y$ напівнеперервне зверху.

Доведення. Оберемо $x \in X$ і відкриту множину $V \supseteq Tx$. Розглянемо

$$U = \{z \in X : Tz \subseteq V\}.$$

Оскільки $x \in U$ і $T(U) \subseteq V$, то достатньо довести, що множина U відкрита або, що множина $X \setminus U = \{z \in X : Tz \cap (Y \setminus V) \neq \emptyset\}$ замкнена.

Якщо $z_\alpha \rightarrow z \in X$ і $z_\alpha \in X \setminus U$, то знайдуться точки

$$y_\alpha \in Tz_\alpha \cap (Y \setminus V).$$

Унаслідок компактності Y існує така піднапрямленисть (y_β) , що $y_\beta \rightarrow y \in Y \setminus U$. Оскільки відображення T замкнене, то $y \in Tz$. Отже,

$$y \in Tz \cap (Y \setminus V),$$

звідки $z \in X \setminus U$. □

Зауваження 1.2. Припущення про компактність Y суттєве. Дійсно, розглянемо відображення $T : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^2}$, задане за правилом

$$Tx = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : y = xt\}.$$

Воно є замкненим, але вкладення

$$Tx \subseteq T0 + O_\varepsilon(0),$$

де $O_\varepsilon(0) = \{a \in \mathbb{R}^2 : \|a\| < \varepsilon\}$, неможливе для жодних $\varepsilon > 0$ та $x \neq 0$.

Тепер сформулюємо Какутані⁷.

Теорема 1.8 (Kakutani, 1941). *Нехай K — опуклий компакт у лінійному нормованому просторі E та $T : K \rightarrow 2^K$ — багатозначне відображення, що задовольняє умови:*

- 1) *для всіх $x \in K$ множина Tx є непорожньою опуклою замкненою підмножиною множини K ;*
- 2) *відображення T напівнеперервне зверху, тобто якщо $x \in K$ та відкрита множина U містить Tx , то існує такий окіл V точки x , що $Tv \subseteq U$ для всіх $v \in V \cap K$.*

Тоді існує точка $x_0 \in K$ з $x_0 \in Tx_0$.

Часто її формують у такому вигляді.

Теорема 1.9 (Kakutani, 1941). *Нехай K — непорожній опуклий компакт у лінійному нормованому просторі E та $T : K \rightarrow 2^K$ — багатозначне відображення, що задовольняє умови:*

- 1) *для всіх $x \in K$ множина Tx є непорожньою опуклою підмножиною множини K ;*
- 2) *відображення T замкнене.*

Тоді відображення T має нерухому точку.

Зауваження 1.3. Умову теореми Какутані про опуклозначність відображення T не можна відкинути. Дійсно, відображення $T : [0, 1] \rightarrow 2^{[0,1]}$, задане за правилом

$$Tx = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{якщо } x < \frac{1}{2}, \\ \{0, 1\}, & \text{якщо } x = \frac{1}{2}, \\ x - \frac{1}{2}, & \text{якщо } x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

замкнене, але без нерухомих точок.

Зауваження 1.4. Із замкненості відображення T та компактності множини K випливає компактність множини нерухомих точок.

⁷Сідзуо Какутані (Shizuo Kakutani, 28.08.1911, Осака — 17.08.2004) — видатний японський та американський математик, займався функціональним аналізом, комплексним аналізом, топологічними групами, марківськими процесами, теорією міри та ергодичною теорією. Найбільш відомі результати — теорема про нерухому точку для багатозначних відображень та теорема Маркова–Какутані.

Доведення теореми 1.9. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та оберемо в K деяку скінченну ε -сітку $x_{\varepsilon 1}, \dots, x_{\varepsilon N(\varepsilon)} \in K$. Для $i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$ розглянемо функції $\beta_{\varepsilon i} : K \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\beta_{\varepsilon i}(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_{\varepsilon i}\|, & \text{якщо } \|x - x_{\varepsilon i}\| < \varepsilon, \\ 0, & \text{якщо } \|x - x_{\varepsilon i}\| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Функції $\beta_{\varepsilon i}$ неперервні. Також маємо

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \beta_{\varepsilon i}(x) > 0 \quad \text{при } x \in K,$$

оскільки для кожного $x \in K$ існує такий номер i , що $\|x - x_{\varepsilon i}\| < \varepsilon$. Тому функції

$$\alpha_{\varepsilon k}(x) = \frac{\beta_{\varepsilon k}(x)}{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \beta_{\varepsilon i}(x)}, \quad k = 1, 2, \dots, N(\varepsilon),$$

неперервні на K . Зазначимо також, що

$$0 \leq \alpha_{\varepsilon k}(x) \leq 1 \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \alpha_{\varepsilon k}(x) = 1 \quad \text{при } x \in K.$$

Зафіксуємо точки $y_{\varepsilon i} \in Tx_{\varepsilon i}$ ($i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$) та задамо однозначне неперервне відображення $\phi_{\varepsilon} : K \rightarrow K$ формулою

$$\phi_{\varepsilon}(x) = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \alpha_{\varepsilon k}(x) y_{\varepsilon k}.$$

Маємо

$$\phi_{\varepsilon}(K) \subseteq K.$$

Таким чином, для кожного $\varepsilon > 0$ маємо однозначне неперервне відображення

$$\phi_{\varepsilon} : K \rightarrow K.$$

За теоремою Шаудера у цього відображення є нерухома точка $x_{\varepsilon} \in K$:

$$\phi_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}) = x_{\varepsilon}. \tag{1.1}$$

Унаслідок компактності множини K існують послідовність (ε_n) додатних чисел і точка $\bar{x} \in K$ такі, що:

$$\varepsilon_n \rightarrow 0, \tag{1.2}$$

$$\|x_{\varepsilon_n} - \bar{x}\| \rightarrow 0, \tag{1.3}$$

$$\phi_{\varepsilon_n}(\chi_{\varepsilon_n}) = \chi_{\varepsilon_n}. \quad (1.4)$$

Покажемо, що точка $\bar{x} \in K$ є шуканою нерухомою точкою відображення T .
Покладемо

$$O_\delta = \bigcup_{y \in T\bar{x}} O_\delta(y),$$

де $O_\delta(y) = \{z \in E : \|z - y\| < \delta\}$.

Доведемо, що $\bar{x} \in O_\delta$ для довільного $\delta > 0$, звідки, внаслідок замкненості $T\bar{x}$, отримаємо потрібне $\bar{x} \in T\bar{x}$ (замкненість множини $T\bar{x}$ впливає із замкненості відображення T).

O_δ — опукла відкрита множина та $T\bar{x} \subseteq O_\delta$. Унаслідок леми 1.4 існує відкрита куля $O_\varepsilon(\bar{x})$ така, що $T(O_\varepsilon(\bar{x}) \cap K) \subseteq O_\delta$. А внаслідок умов (1.2) і (1.3) існує число N таке, що для $n \geq N$ маємо $\varepsilon_n < \varepsilon/2$ та $\chi_{\varepsilon_n} \in O_{\varepsilon/2}(\bar{x})$. Якщо $\alpha_{\varepsilon_n i}(\chi_{\varepsilon_n}) > 0$, то

$$\|\chi_{\varepsilon_n i} - \chi_{\varepsilon_n}\| < \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\|\chi_{\varepsilon_n i} - \bar{x}\| \leq \|\chi_{\varepsilon_n i} - \chi_{\varepsilon_n}\| + \|\chi_{\varepsilon_n} - \bar{x}\| < \varepsilon_n + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, для $n > N$ маємо $\chi_{\varepsilon_n i} \in O_\varepsilon(\bar{x})$ для всіх таких i , що $\alpha_{\varepsilon_n i}(\chi_{\varepsilon_n}) > 0$. Для цих i отримуємо

$$y_{\varepsilon_n i} \in T\chi_{\varepsilon_n i} \subseteq T(O_\varepsilon(\bar{x}) \cap K) \subseteq O_\delta. \quad (1.5)$$

Умову (1.1) запишемо у вигляді

$$\chi_{\varepsilon_n} = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon_n)} \alpha_{\varepsilon_n i}(\chi_{\varepsilon_n}) y_{\varepsilon_n i}. \quad (1.6)$$

З (1.5) і (1.6) одержуємо, що для $n \geq N$ точка χ_{ε_n} — опукла комбінація тільки тих точок $y_{\varepsilon_n i}$, які лежать у O_δ , звідки, внаслідок опуклості O_δ , маємо

$$\chi_{\varepsilon_n} \in O_\delta.$$

Перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$, одержуємо, що $\bar{x} \in \text{cl}O_\delta \subseteq O_{2\delta}$. Як уже було вказано, звідси впливає, що $\bar{x} \in T\bar{x}$. $\square$

1.4. Застосування теореми Какутані

Теорема Какутані має багато застосувань, переважно в математичній економіці та теорії ігор. Найбільш вагомі застосування: доведення існування рівноваги Неша у теорії ігор; модель Ерроу–Дебре в загальній теорії економічної рівноваги.

Теорема 1.10. Нехай E — лінійний нормований простір, X, Y — опуклі компакти в E ; неперервна функція $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ така, що функції

$$x \mapsto f(x, y)$$

опуклі, а функції

$$y \mapsto f(x, y)$$

угнуті. Тоді

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y).$$

Доведення. Застосуємо теорему Какутані до відображення

$$T : (x, y) \mapsto (A_y, B_x),$$

де

$$A_y = \left\{ u \in X : f(u, y) = \min_{x' \in X} f(x', y) \right\}, \quad B_x = \left\{ v \in Y : f(x, v) = \max_{y' \in Y} f(x, y') \right\}.$$

Множини A_y, B_x непорожні, опуклі та замкнені. Необхідно довести, що відображення $T : X \times Y \rightarrow 2^{X \times Y}$ замкнене (самостійно).

Теорема 1.9 дає точку (x_0, y_0) , для якої

$$x_0 \in A_{y_0} = \left\{ u \in X : f(u, y_0) = \min_{x' \in X} f(x', y_0) \right\},$$

$$y_0 \in B_{x_0} = \left\{ v \in Y : f(x_0, v) = \max_{y' \in Y} f(x_0, y') \right\}.$$

Тобто,

$$f(x_0, y_0) = \min_{x' \in X} f(x', y_0) = \max_{y' \in Y} f(x_0, y').$$

Звідси,

$$\min_{x' \in X} \max_{y' \in Y} f(x', y') \leq f(x_0, y_0) \leq \max_{y' \in Y} \min_{x' \in X} f(x', y').$$

Оскільки завжди

$$\min_{x' \in X} \max_{y' \in Y} f(x', y') \geq \max_{y' \in Y} \min_{x' \in X} f(x', y'),$$

то

$$f(x_0, y_0) = \min_{x' \in X} \max_{y' \in Y} f(x', y') = \max_{y' \in Y} \min_{x' \in X} f(x', y'),$$

що і треба було довести. □

Як приклад розв'яжемо задачу існування точок рівноваги Неша⁸ для досить загальної ситуації.

Задамо лінійні нормовані простори $E_1, E_2, \dots, E_p$ та

$$C_i \subseteq E_i$$

— непорожні множини;

$$f_i : C = C_1 \times \dots \times C_p \rightarrow \mathbb{R}$$

— функції, $F = (f_1, \dots, f_p)$.

Задача рівноваги Неша полягає у знаходженні такої точки

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p) \in C,$$

що

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p) = \inf_{x_1 \in C_1} f_1(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p), \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p) = \inf_{x_2 \in C_2} f_2(\bar{x}_1, x_2, \dots, \bar{x}_p), \\ \dots\dots\dots \\ f_p(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p) = \inf_{x_p \in C_p} f_p(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, x_p). \end{cases} \quad (1.7)$$

Позначимо $NE(F, C)$ множину розв'язків задачі (1.7). Її елементи називатимемо точками рівноваги за Нешем.

Нехай $C = \prod_{i=1}^p C_i$ — опукла компактна підмножина лінійного нормованого простору $E = \prod_{i=1}^p E_i$.

Розглянемо багатозначні відображення

$$\begin{aligned} \prod_{i=2}^p C_i \ni (x_2, \dots, x_p) &\mapsto BR_1(x_2, \dots, x_p) = \\ &= \left\{ \bar{x}_1 \in C_1 : f_1(\bar{x}_1, x_2, \dots, x_p) = \inf_{x_1 \in C_1} f_1(x_1, x_2, \dots, x_p) \right\}, \\ &\dots\dots\dots \\ \prod_{i=1, i \neq k}^p C_i \ni (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p) &\mapsto \end{aligned}$$

⁸Джон Форбс Неш молодший (John Forbes Nash, Jr., 13.06.1928 — 23.05.2015) — видатний американський математик. Зробив значний внесок в теорію ігор, теорію нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, диференціальну геометрію. Лауреат Нобелівської премії з економіки (1994), Премії Абеля (2015).

$$\begin{aligned}
& \mapsto \text{BR}_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p) = \\
& = \left\{ \bar{x}_k \in C_k : f_k(x_1, \dots, \bar{x}_k, \dots, x_p) = \inf_{x_k \in C_k} f_k(x_1, x_2, \dots, x_p) \right\}, \\
& \dots\dots\dots \\
& \prod_{i=1}^{p-1} C_i \ni (x_1, \dots, x_{p-1}) \mapsto \text{BR}_p(x_1, \dots, x_{p-1}) = \\
& = \left\{ \bar{x}_p \in C_p : f_p(x_1, \dots, x_{p-1}, \bar{x}_p) = \inf_{x_p \in C_p} f_p(x_1, x_2, \dots, x_p) \right\}.
\end{aligned}$$

Покладемо

$$\begin{aligned}
\text{BR}(x_1, \dots, x_p) &= \text{BR}_1(x_2, \dots, x_p) \times \dots \\
&\dots \times \text{BR}_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p) \times \dots \times \text{BR}_p(x_1, \dots, x_{p-1}).
\end{aligned}$$

Точка $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p) \in C$ є розв'язком задачі (1.7) тоді й тільки тоді, коли вона є нерухомою точкою відображення $\text{BR} : C \rightarrow 2^C$, тобто

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p) \in \text{BR}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p).$$

Відображення $\text{BR} : C \rightarrow 2^C$ задовольняє умови теореми Какутані, якщо припустити, що для $i = \overline{1, p}$

- функція f_i неперервна на множині $C_1 \times \dots \times C_p$, причому для всіх $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p) \in C_1 \times \dots \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times \dots \times C_p$ функція

$$C_i \ni \eta \rightarrow f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \eta, x_{i+1}, \dots, x_p)$$

опукла (доведіть це).

Приходимо до такої теореми.

Теорема 1.11. *Нехай $E_1, E_2, \dots, E_p$ — лінійні нормовані простори. Припустимо, що:*

- 1) C_i — непорожня опукла компактна підмножина E_i ;
- 2) f_i — неперервна на множині $C_1 \times \dots \times C_p$ функція, причому для всіх $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p) \in C_1 \times \dots \times C_{i-1} \times C_{i+1} \times \dots \times C_p$ функція $C_i \ni \eta \rightarrow f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \eta, x_{i+1}, \dots, x_p)$ опукла.

Тоді множина $\text{NE}(F, C)$ точок рівноваги за Нешем непорожня.

Розглянемо ще одне застосування. Тепер це застосування теореми Брауера до питання про опуклість чебишовських множин.

Нехай E — лінійний нормований простір. Відстанню від заданої точки x до заданої множини $C \subseteq E$ називають величину

$$d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Під елементом найкращого наближення або найближчою точкою для заданої точки x будемо розуміти таку точку $y_0 \in C$, що $\|x - y_0\| = d(x, C)$, тобто $\|x - y_0\| \leq \|x - y\|$ для всіх $y \in C$. Множину всіх найближчих точок з C для заданої точки x позначимо $P_C x$.

Означення 1.8. Непорожню множину C називають чебишовською, якщо довільна точка x має єдину найближчу точку в множині C , тобто

$$\forall x \text{ множина } P_C \text{ складається з однієї точки.}$$

Якщо C — чебишовська множина, то відображення P_C , що ставить у відповідність точці x її найближчу точку $P_C x$ із C , називається метричною проєкцією на C .

Ясно, що чебишовська множина є замкненою. Опишемо всі чебишовські множини евклідового простору $\mathbb{R}^m$.

Теорема 1.12 (Л. Бунт⁹, Т. Моцкін¹⁰). *Чебишовська множина евклідового простору є замкненою та опуклою.*

Головну роль у розглянутому нижче доведенні грає теорема Брауера про нерухому точку.

Лема 1.5. *Метрична проєкція P_C на чебишовську множину C є неперервним відображенням.*

Доведення. Спочатку зазначимо, що для $x, y \in \mathbb{R}^m$

$$|d(x, C) - d(y, C)| \leq \|x - y\|. \quad (1.8)$$

Припустимо, що метрична проєкція P_C розривна в деякій точці x , тобто знайдуться число $\varepsilon > 0$ і послідовність (x_n) , $x_n \rightarrow x$, такі, що

$$\|P_C x_n - P_C x\| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

⁹Лукас Ніколаас Хендрік Бунт (Lucas Nicolaas Hendrik Bunt, 10.06.1905 — 22.01.1984) — голландський математик.

¹⁰Теодор Самуїл Моцкін (Theodore Samuel Motzkin, 26.03.1908, Берлін — 15.12.1970, Лос-Анджелес) — ізраїльський та американський математик. Один з розробників математичної термінології на івриті. Відомий своїми роботами з теорії лінійних нерівностей. Займався комбінаторикою, теорією графів, теорією наближення, чисельними методами та теорією чисел.

Унаслідок (1.8) послідовність $(P_C x_n)$ обмежена. Нехай y — її часткова границя. Ясно, що $y \neq P_C x$. За (1.8)

$$\|x - y\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - P_C x_{n_k}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, C) = d(x, C).$$

Оскільки множина C замкнена, то $y \in C$, тобто точка y також є найближчою до x . Отримали протиріччя з тим, що C — чебишовська множина. $\square$

Означення 1.9. Чебишовську множину C називають чебишовським сонцем, якщо

$$P_C(P_C x + t(x - P_C x)) = P_C x \quad \forall x \notin C \quad \forall t \geq 0.$$

Лема 1.6. Чебишовська множина є чебишовським сонцем.

Доведення. Нехай C — чебишовська множина та $x \notin C$. Розглянемо промінь ℓ , що виходить з $y = P_C x \in C$ та проходить через x . Покладемо $r = \|x - y\|$ та розглянемо кулю $B = B(x, r)$. Задамо відображення $T : B \rightarrow B$ за формулою

$$Tz = x + r \frac{x - P_C z}{\|x - P_C z\|}, \quad z \in B.$$

Точка Tz — точка перетину сфери $S(x, r)$ та променю, що виходить з x у напрямку $x - P_C z$.

Відображення T неперервне (впливає з неперервності метричної проекції на чебишовську множину). За теоремою Брауера існує точка $z_0 \in B$ така, що

$$Tz_0 = z_0.$$

З означення Tz_0 випливає, що точка x лежить на відрізку, що з'єднує z_0 з її проекцією $P_C z_0$. При цьому найближчим елементом до кожної точки відрізка $[z_0, P_C z_0]$ буде точка $P_C z_0$ (впливає з нерівності трикутника та чебишовості C). Однак для x найближча точка $y = P_C x$, і вона єдина. Отже, $P_C z_0 = y$. Таким чином, для всіх точок із $[y, z_0]$ найближчою точкою із C є точка y .

Застосовуючи попередні міркування, проведені для точки x , до точки z_0 , ми ще далі просунемось по променю ℓ . У результаті для кожної точки $p \in \ell$ точка y буде єдиною найближчою з множини C . $\square$

Лема 1.7. Чебишовське сонце є опуклою множиною.

Доведення. Нехай $x, y \in C$ та $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, де $\lambda \in (0, 1)$. Оскільки C — чебишовське сонце, то при $z \notin C$ кожна точка $z + t(z - P_C z)$ для $t > 0$ має точку $P_C z$ своєю найближчою із C . Тому

$$\|z + t(z - P_C z) - P_C z\|^2 \leq \|z + t(z - P_C z) - x\|^2. \quad (1.9)$$

Використовуючи властивості скалярного добутку, отримуємо

$$\frac{1}{t}\|z - P_C z\|^2 + 2(z - P_C z, z - P_C z) \leq \frac{1}{t}\|z - x\|^2 + 2(z - P_C z, z - x).$$

Спрямовуючи $t \rightarrow +\infty$ у цій нерівності, отримуємо

$$(z - P_C z, z - x) \geq \|z - P_C z\|^2.$$

Аналогічно, підставляючи y замість x у (1.9), маємо

$$(z - P_C z, z - y) \geq \|z - P_C z\|^2.$$

Звідси

$$\|z - P_C z\|^2 \leq \lambda(z - P_C z, z - x) + (1 - \lambda)(z - P_C z, z - y) = 0.$$

Отже,

$$z = P_C z \in C.$$

Це доводить опуклість множини C . □

У нескінченновимірних лінійних просторах про опуклість чебишовських підмножин відомо небагато. Наприклад, на момент написання цього тексту¹¹ не відомо, чи опукла довільна чебишовська множина в нескінченновимірному гільбертовому просторі (проблема В. Клі, 1961).

1.5. Порядкові теореми про нерухому точку

Крім теорем Банаха, Брауера та Шаудера використовуються також порядкові теореми про нерухому точку типу теореми Тарського. Вони корисні при дослідженні операторних рівнянь в частково впорядкованих просторах, причому можна не використовувати явно метричні чи топологічні властивості цих просторів.

Нагадаємо відомі поняття.

Нехай M — непорожня множина.

Означення 1.10. Бінарне відношення $\circ \in M \times M$ називають відношенням часткового порядку (на M) якщо:

- $(x, x) \in \circ$ для всіх $x \in M$ (рефлексивність);
- якщо $(x, y) \in \circ$ і $(y, x) \in \circ$, то $x = y$ (антисиметричність);

¹¹Січень 2026 року.

- якщо $(x, y) \in o$ і $(y, z) \in o$, то $(x, z) \in o$ (транзитивність).

Замість запису $(x, y) \in o$ будемо використовувати нотацію $x \leq y$, або $y \leq x$. Крім того, будемо писати $y < x$ коли $y \leq x$ та $x \neq y$.

Означення 1.11. Частково впорядкованою множиною називають впорядковану пару $(M, \leq)$, де M — непорожня множина, $\leq$ — відношення часткового порядку на M .

Означення 1.12. Ланцюгом L в частково впорядкованій множині $(M, \leq)$ називається така непорожня множина $L \subseteq M$, що для кожної пари елементів $x, y \in L$ або $y \leq x$, або $x \leq y$.

Нехай $(M, \leq)$ — частково впорядкована множина та $F \subseteq M$.

Означення 1.13. Елемент $z \in F$ називають найбільшим елементом множини F , якщо $x \leq z$ для всіх $x \in F$. Елемент $z \in F$ називають найменшим елементом множини F , якщо $z \leq x$ для всіх $x \in F$.

Означення 1.14. Елемент $z \in M$ називають мажорантою множини F , якщо $x \leq z$ для всіх $x \in F$. Елемент $z \in M$ називають мінорантою множини F , якщо $z \leq x$ для всіх $x \in F$.

Означення 1.15. Мажоранта z множини F називається її супремумом, якщо $z \leq y$ для довільної мажоранти y множини F . Міноранта z множини F називається її інфімумом, якщо $y \leq z$ для довільної міноранти y множини F .

Супремум множини F позначимо через $\sup F$, а її інфімум — через $\inf F$.

Означення 1.16. Елемент $z \in M$ називається максимальним, якщо з $z \leq x$ випливає $z = x$. Елемент $z \in M$ називається мінімальним, якщо з $x \leq z$ випливає $z = x$.

Центральним пунктом підрозділу є доведення (незалежне від леми Цорна і аксіоми вибору) наступної порядкової теореми про нерухому точку.

Теорема 1.13 (Bourbaki¹², 1940; Kneser¹³, 1950). *Нехай:*

- (i) відображення $T : M \rightarrow M$ частково впорядкованої множини $(M, \leq)$ задовольняє $x \leq Tx$ для всіх $x \in M$;

¹²Ніколя Бурбакі (Nicolas Bourbaki) — колективний псевдонім групи французьких математиків, створеної в 1935 році. Метою групи було написання серії книг «Elements de mathematique». Книги Бурбакі написані в аксіоматичній манері й мали на меті дати виклад математики на основі теорії множин Цермело–Френкеля.

¹³Гельмут Кнезер (Hellmuth Kneser, 16.08.1898 — 23.08.1973) — німецький математик, який зробив помітний внесок у теорію груп та топологію.

(ii) кожен ланцюг з M має супремум.

Тоді T має нерухому точку.

Зауваження 1.5. Теорема 1.13 елементарно виводиться з леми Цорна. Множина M має максимальний елемент $z \in M$. Оскільки $z \leq Tz$, то $z = Tz$.

Зауваження 1.6. Теорема 1.13 залишиться вірною, якщо в (i) замінити « $\leq$ » на « $\geq$ » та в (ii) — «супремум» на «інфімум».

Доведення теореми 1.13. Нехай a — фіксований елемент множини M . Назвемо баштою множину $C \subseteq M$, що має такі три властивості:

- 1) $a \in C$;
- 2) $T(C) \subseteq C$;
- 3) супремум кожного ланцюга з C належить C .

Ясно, що башти існують. Наприклад, сама множина M є баштою.

Якщо деяка башта C є ланцюгом, то для точки $w = \sup C \in B$, в силу включення $Tw \in C$, має місце нерівність

$$w \leq Tw \leq w,$$

тобто, $Tw = w$, що і потрібно було довести.

Для доведення твердження теореми потрібно сконструювати башту, яка є ланцюгом.

Перетин башт є баштою. Отже, перетин $A \neq \emptyset$ усіх башт буде мінімальною баштою. Покажемо, що мінімальна башта A є ланцюгом.

Оскільки множина $\{x \in M : x \geq a\}$ є баштою, то

- 4) $a \leq x$ для всіх $x \in A$.

Розглянемо множину

$$P = \{x \in A : y \in A, y < x \Rightarrow Ty \leq x\}.$$

Покажемо, що

- 5) якщо $x \in P$ і $z \in A$, то

$$z \leq x \text{ або } z \geq Tx.$$

Беремо елемент $x \in P$ та розглянемо множину

$$B = \{z \in A : z \leq x \vee Tx \leq z\}.$$

З умови 4) випливає, що B має властивість 1).

Множина B також має властивість 2). Дійсно, якщо $z \geq Tx$, то $Tz \geq z \geq Tx$; якщо $z = x$, то $Tz = Tx$; і, нарешті, якщо $z < x$, то $Tz \leq x$, оскільки $x \in P$.

Множина B має властивість 3). Дійсно, якщо $u = \sup F$, F — ланцюг з B , то або $y \leq x$ для всіх $y \in F$ і тоді $u \leq x$, або $y \geq Tx$ для деякого $y \in F$ і тоді $u \geq Tx$.

Таким чином, множина B є баштою, що лежить в A . Тому, $B = A$, звідки випливає властивість 5).

Покажемо, що множина P є баштою.

Властивість 1) для P має місце.

Для доведення 2) розглянемо елемент $x \in P$ та покажемо, що якщо $z \in A$ і $z < Tx$, то $Tz \leq Tx$. З властивості 5) випливає, що або $z \geq Tx$, або $z \leq x$, тому якщо $z < Tx$, то $z \leq x$. Але тоді, оскільки $x \in P$, з $z < x$ випливає, що $Tz \leq x \leq Tx$, а з $z = x - Tx = Tx$.

Для доведення властивості 3) для множини P , розглянемо супремум v ланцюга $F \subseteq P$. Покажемо, що $v \in P$. Для цього розглянемо елемент $z \in A$ та $z < v$. З властивості 5) випливає кожна точка $x \in F$ задовольняє одну з нерівностей: $z \leq x$ або $x \leq Tx \leq z$. Друга нерівність не може бути справедливою для кожного $x \in F$, оскільки тоді $v \leq z$. Отже, для деякого $x \in F$ виконується $z \leq x$. Але якщо $z < x$, то $Tz \leq x \leq v$ за означенням множини P . Якщо $z = x$, то, оскільки $z \neq v$, в множині F знайдеться такий елемент y , що $z < y$, в цьому випадку $Tz \leq y \leq v$. Показали, що в обох випадках $Tz \leq v$, чим довели, що $v \in P$, тобто P має властивість 3). Отже, множина P є баштою.

Оскільки множина P є баштою та підмножиною мінімальної башти A , то

$$P = A.$$

З умови 5) випливає, що для довільних точок x та z з A маємо:

$$z \leq x \text{ або } z \geq Tx \geq x.$$

Тобто, A — ланцюг. □

З теореми 1.13 випливає такий результат.

Теорема 1.14. *Нехай:*

(i) відображення $T : X \rightarrow X$ частково впорядкованої множини $(X, \leq)$ є неспадним, тобто, для $x, y \in X$

$$x \leq y \Rightarrow Tx \leq Ty;$$

(ii) кожен ланцюг з X має супремум.

(iii) існує такий елемент $x_0 \in X$, що $x_0 \leq Tx_0$.

Тоді T має найменшу нерухому точку в множині $\{x \in X : x_0 \leq x\}$.

Зауваження 1.7. Відображення T має найбільшу нерухому точку в множині $\{x \in X : x \leq x_0\}$ якщо виконується (i), в (ii) замінити «супремум» на «інфімум», в (iii) нерівність $x_0 \leq Tx_0$ замінити на $Tx_0 \leq x_0$.

Доведення. Розглянемо множину

$$M = \{x \in X : x \leq Tx, x_0 \leq x\}.$$

Оскільки $x_0 \leq Tx_0$, то $x_0 \in M \neq \emptyset$. Крім того, $T(M) \subseteq M$. Дійсно, для точки $x \in M$ виконується $x_0 \leq x$ та $x \leq Tx$. З того, що відображення T є неспадним, випливає нерівність $Tx \leq T(Tx)$. Отже, $Tx \in M$.

Покажемо, що довільний ланцюг $C \subseteq M$ має супремум в M . Ясно, що існує $z = \sup C \in X$. З нерівності $x \leq z \forall x \in M$ та монотонності T випливає

$$x \leq Tx \leq Tz \quad \forall x \in M.$$

Оскільки $z = \sup C$, то $z \leq Tz$. Крім того, $x_0 \leq z$. Отже, $z \in M$.

Тепер теорема 1.13 гарантує існування нерухомої точки відображення T в множині

$$M \subseteq \{x \in X : x_0 \leq x\}.$$

Доведемо існування найменшої нерухомої точки відображення T в множині $\{x \in X : x_0 \leq x\}$. Розглянемо множину

$$N = \{y \in M : y \text{ — міноранта множини нерухомих точок } T \text{ в } M\}.$$

Аналогічно попереднім міркуванням з використанням теореми 1.13 доводимо існування нерухомої точки відображення T в множині N . Ця нерухома точка є найменшою нерухомою точкою T в множині N та, звичайно, в множині $\{x \in X : x_0 \leq x\}$. $\square$

Завершимо підрозділ теоремою Тарського про нерухому точку неспадних відображень, що діють в повних ґратках.

Означення 1.17. Частково впорядковану множину $(M, \leq)$ називають ґраткою, якщо кожна непорожня скінченна підмножина M має супремум та інфімум.

Означення 1.18. Частково впорядковану множину $(M, \leq)$ називають повною ґраткою, якщо кожна непорожня підмножина M має супремум та інфімум.

Має місце

Теорема 1.15 (Tarski¹⁴, 1955). *Нехай $(X, \leq)$ — повна ґратка. Кожне неспадне відображення $T : X \rightarrow X$ має нерухому точку. Крім того, таке відображення має найменшу та найбільшу нерухомі точки.*

Доведення. Нехай $a = \inf X$ та $b = \sup X$. Тоді $a \leq Ta$ та $Tb \leq b$. Отже, твердження випливає з теореми 1.14 та зауваження 1.7. $\square$

Нагадаємо формулювання аксіоми вибору.

Означення 1.19. Функцією вибору для множини X називається така функція

$$\varphi : 2^X \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X,$$

що $\varphi(A) \in A$ для всіх $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$.

Неформально, функція φ «вибирає» елемент з кожної непорожньої підмножини X .

Аксіома вибору. *Для довільної множини існує функція вибору.*

Зауваження 1.8. Часто аксіому вибору формулюють у такому вигляді: для кожної родини $\{X_s\}_{s \in S}$ непорожніх множин існує функція

$$f : S \rightarrow \bigcup_{s \in S} X_s,$$

така, що $f(s) \in X_s$ для всіх $s \in S$.

Розглянемо два фундаментальних твердження з теорії множин.

Теорема 1.16 (теорема Хаусдорфа про максимальний ланцюг). *Довільна частково впорядкована множина E містить максимальний ланцюг, тобто, існує ланцюг в E , що не є власною підмножиною іншого ланцюга з E .*

Теорема Хаусдорфа стверджує таке. Нехай $(E, \leq)$ — непорожня частково впорядкована множина. Множину

$$\text{ch}(E) = \{L \subseteq E : L \text{ — ланцюг}\}$$

частково упорядкуємо відношенням вкладення $\subseteq$. Тоді частково впорядкована множина $(\text{ch}(E), \subseteq)$ має максимальний елемент.

¹⁴Альфред Тарський, прізвище при народженні Тайтельбаум (Alfred Tarski (Tajtelbaum) 14.01.1901, Варшава — 26.10.1983, Берклі, Каліфорнія) — видатний польський та американський математик та логик. Теорема 1.15 отримана в 1942 р., але опублікована лише в 1955 р.: Tarski A. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. Pacific Journal of Mathematics. 1955. Vol. 5. No. 2. P. 285–309.

Доведення теореми 1.16. Розглянемо ланцюг $L \subseteq \text{ch}(E)$. Множина

$$S = \bigcup_{C \in L} C$$

належить $\text{ch}(E)$ та $S = \sup L$.

Нехай φ — функція вибору для множини E . Для $L \in \text{ch}(E)$ позначимо через L^* множину всіх таких

$$x \in E \setminus \bigcup_{C \in L} C,$$

що $L \cup \{x\} \in \text{ch}(E)$. Покладемо

$$f(L) = \begin{cases} L \cup \{\varphi(L^*)\}, & \text{якщо } L^* \neq \emptyset, \\ L, & \text{якщо } L^* = \emptyset. \end{cases}$$

Нерухома точка відображення f є максимальним ланцюгом в $(E, \leq)$. За теореєю 1.13 існує $L \in \text{ch}(E)$: $f(L) = L$. $\square$

Теорема 1.17 (лема Цорна). *Якщо довільний ланцюг з частково впорядкованої множини E має мажоранту, то E має максимальний елемент.*

Доведення. Нехай E_0 — максимальний ланцюг з частково впорядкованої множини $(E, \leq)$, який існує за теореєю Хаусдорфа. Розглянемо точку $x \in E$ — мажоранту E_0 . Нехай $x \leq y$ для $y \in E$. Якщо $y \notin E_0$, то множина $E_0 \cup \{y\}$ є ланцюгом, що містить максимальний ланцюг E_0 . Отже, $y \in E_0$ та $x = y$. $\square$

Виведемо аксіому вибору з леми Цорна.

Для довільної множини X розглянемо непорожню родину $\mathbf{F}$ відображень

$$\psi : 2^D \setminus \{\emptyset\} \rightarrow D, \quad D \subseteq X,$$

що мають властивість

$$\psi(A) \in A \quad \text{для всіх } A \subseteq D, \quad A \neq \emptyset.$$

Задамо частковий порядок на $\mathbf{F}$

$$\psi_1 \preceq \psi_2 \Leftrightarrow D_1 \subseteq D_2, \quad \psi_2|_{2^{D_1} \setminus \{\emptyset\}} = \psi_1.$$

Довільний ланцюг в $(\mathbf{F}, \preceq)$ має мажоранту. Тому $\mathbf{F}$ містить максимальний елемент φ . Функція φ задана на $2^X \setminus \{\emptyset\}$, інакше легко побудувати функцію з $\mathbf{F}$, що строго більша за φ . Таким чином, відображення φ є функцією вибору для множини X .

1.6. Задачі

Задача 1.1. Нехай X та Y гомеоморфні, X має топологічну властивість нерухомої точки¹⁵. Доведіть, що Y має топологічну властивість нерухомої точки.

Задача 1.2. Нехай топологічний простір X має топологічну властивість нерухомої точки та Y — ретракт X . Доведіть, що Y має топологічну властивість нерухомої точки.

Задача 1.3. Нехай неперервне відображення $T : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ має властивість:

$$T(S^{n-1}) \subseteq B^n.$$

Доведіть, що існує точка $x_0 \in B^n$: $Tx_0 = x_0$.

Задача 1.4. Нехай $A \subseteq B^n$ — непорожня замкнена множина. Доведіть, що існує неперервне відображення $T : B^n \rightarrow B^n$ таке, що $F(T) = A$, де $F(T)$ — множина нерухомих точок відображення T .

Задача 1.5. Доведіть теорему 1.4 для випадку неперервного відображення.

Задача 1.6. Нехай C — відкрита опукла підмножина евклідового простору $\mathbb{R}^n$, $0 \in C$. Введемо функцію

$$p(x) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C \right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Функцію p називають функцією Мінковського множини C . Доведіть, що функція p має такі властивості:

- 1) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda > 0$;
- 2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$;
- 3) $\exists M > 0 : 0 \leq p(x) \leq M \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$;
- 4) $C = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) < 1\}$.

Задача 1.7. Доведіть, що опуклий компакт з непорожньою внутрішністю $C \subseteq \mathbb{R}^n$ є гомеоморфними образами кулі B^n .

Задача 1.8. Доведіть, що всі опуклі компакти з непорожньою внутрішністю в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфні.

¹⁵Кажуть, що топологічний простір X має топологічну властивість нерухомої точки, якщо довільне неперервне відображення $T : X \rightarrow X$ має нерухому точку.

Задача 1.9. Покажіть, як можна побудувати для довільної множини $C \subseteq \mathbb{R}^n$, опуклої, але не компактної, неперервне відображення $T : C \rightarrow C$ без нерухомих точок.

Задача 1.10. Нехай $K \subseteq \mathbb{R}^n$ — компактна опукла множина, $T : K \rightarrow K$ — неперервне відображення. Застосувавши лему 1.1 до сім'ї множин

$$F(x) = \{y \in K : (y - Ty, y - x) \leq 0\} \quad \forall x \in K,$$

доведіть, що T має нерухому точку.

Задача 1.11. В банахових просторах ℓ_2 , c_0 та $C([-1, 1])$ побудувати приклади неперервних відображень, що відображають замкнену кулю в себе, але не мають нерухомих точок.

Задача 1.12. Нехай H — сепарабельний гільбертовий простір, $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$. Якщо $T : B_H \rightarrow B_H$ — слабо секвенційно неперервний оператор, то T має нерухому точку в B_H .

Задача 1.13. Нехай A_1, A_2, A_3 — набір замкнених підмножин трикутника $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ з вершинами v_1, v_2 та v_3 . Нехай:

- 1) $\Delta = \bigcup_{k=1}^3 A_k$;
- 2) $\forall k \in \{1, 2, 3\} : v_k \in A_k$;
- 3) $\forall k, i \in \{1, 2, 3\} : [v_k, v_i] \subseteq A_k \cup A_i$.

Доведіть, що $\bigcap_{k=1}^3 A_k \neq \emptyset$.

Задача 1.14. Нехай $(X, d_X), (Y, d_Y)$ — метричні простори, (Y, d_Y) — компактний простір. Нехай $f \in C(X \times Y)$ та

$$g(x) = \max_{y \in Y} f(x, y).$$

Доведіть, що $g \in C(X)$.

Задача 1.15. Нехай функція $\phi : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна, Y — компакт. Доведіть, що відображення $T : X \rightarrow 2^Y$, задане співвідношенням

$$Tx = \left\{ \bar{y} \in Y : \phi(x, \bar{y}) = \inf_{y \in Y} \phi(x, y) \right\},$$

замкнене¹⁶.

¹⁶ X, Y — метричні простори.

Задача 1.16. Нехай A, B — непорожні опуклі компакти з банахових просторів X, Y , відповідно. Функція $L : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна на $A \times B$ та опукла по x на A (для всіх $y \in B$), угнута по y на B (для всіх $x \in A$). Доведіть, що існує сідлова точка функції L на $A \times B$, тобто, існує $(x_0, y_0) \in A \times B$:

$$L(x_0, y) \leq L(x_0, y_0) \leq L(x, y_0) \quad \forall x \in X \quad \forall y \in B.$$

Задача 1.17. Нехай $C \subseteq \mathbb{R}^n$ — опуклий компакт, $A : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ — неперервне відображення. Доведіть, що існує така точка $x \in C$, що

$$(Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Задача 1.18. Нехай $C \subseteq \mathbb{R}^n$ — замкнена опукла множина, $A : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ — неперервне відображення з властивістю¹⁷: для деякого $x_0 \in C$ виконано

$$\frac{(Ax, x - x_0)}{\|x\|} \rightarrow +\infty, \quad \|x\| \rightarrow +\infty, \quad x \in C.$$

Доведіть, що існує така точка $x \in C$, що

$$(Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Задача 1.19 (лема Тейхмюллера–Т'юкі). Нехай родина $\mathbf{E}$ підмножин деякої множини E має властивість: $A \in \mathbf{E}$ тоді і тільки тоді, коли довільна скінченна підмножина A належить $\mathbf{E}$. Доведіть, що в $\mathbf{E}$ є максимальний елемент.

Задача 1.20. Доведіть, що якщо в ґратці $(X, \leq)$ кожне неспадне відображення $T : X \rightarrow X$ має нерухому точку, то ґратка $(X, \leq)$ повна.

¹⁷ Дану властивість називають коерцитивністю.

Розділ 2

Елементи метричної теорії нерухомих точок

Класичні топологічні теореми Брауера, Шаудера та Какутані про існування нерухомих точок мають неконструктивний характер. Природно виділити класи операторів, для яких можна конструктивно знаходити нерухомі точки. Найвідомішим прикладом такого класу є стискаючі відображення. Дійсно, в класичному доведенні теореми Банаха–Пікара–Качіополлі явно будується послідовність, що збігається до нерухомої точки. Більш широким є клас нерозтягуючих операторів, теорія яких плідно розвивається з 1960-х років.

У даному розділі ми розглянемо питання існування нерухомих точок нерозтягуючих операторів, що діють в гільбертових просторах, та основні методи апроксимації нерухомих точок (для подальшого та глибшого знайомства з темою радимо звернутись до книг [6, 7]). Ці методи слід трактувати як шаблони для більш спеціалізованих алгоритмів [8].

2.1. Метрична проєкція на замкнену опуклу множину

Нехай H — дійсний гільбертовий простір з скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$. Сильну збіжність позначатимемо через $\rightarrow$, а слабку — $\rightharpoonup$.

Теорема 2.1. *Нехай $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина. Тоді для будь-якого елемента x простору H в C існує єдиний найближчий до x елемент. Іншими словами, існує єдиний елемент $z \in C$, для якого*

$$\|z - x\| = \min_{y \in C} \|y - x\|.$$

Перше доведення. Нехай $z_k \in C$ — мінімізуюча послідовність, тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k - x\| = d = \inf_{y \in C} \|y - x\|. \quad (2.1)$$

За правилом паралелограма (елементарний наслідок властивостей скалярного добутку)

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad x, y \in H,$$

можемо записати

$$\|z_k - z_l\|^2 = 2\|x - z_k\|^2 + 2\|x - z_l\|^2 - 4\left\|x - \frac{z_k + z_l}{2}\right\|^2. \quad (2.2)$$

З опуклості C випливає $\frac{1}{2}z_k + \frac{1}{2}z_l \in C$, тому

$$d^2 \leq \left\|x - \frac{z_k + z_l}{2}\right\|^2.$$

Отже,

$$\|z_k - z_l\|^2 \leq 2\|x - z_k\|^2 + 2\|x - z_l\|^2 - 4d^2.$$

З (2.1) випливає, що $\lim_{k,l \rightarrow \infty} \|z_k - z_l\| = 0$.

Оскільки простір H повний, множина C замкнена, то існує елемент $z \in C$ такий, що $z_k \rightarrow z$. Крім того,

$$\|z - x\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k - x\| = d.$$

Для доведення єдиності найближчого елемента слід тільки зазначити, що після підстановки в (2.2) замість z_k і z_l довільних двох елементів $z, z' \in C$, які задовольняють $\|z - x\| = \|z' - x\| = d$, одержимо

$$\|z - z'\|^2 = 2\|x - z\|^2 + 2\|x - z'\|^2 - 4\left\|x - \frac{z + z'}{2}\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0,$$

звідки випливає, що $z = z'$. □

Друге доведення. Оскільки $d(x, C) = \inf_{y \in C} \|y - x\| = d(0, C - x)$, то теорему достатньо довести для випадку $x = 0$. Позначимо $d(0, C)$ через d і розглянемо множини

$$C_n = \left\{ y \in C : \|y\| \leq d + \frac{1}{n} \right\}.$$

Перетин усіх C_n — це множина елементів, які розташовані на відстані d від нуля. Отже, потрібно довести, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ складається з однієї точки. Скористаємось принципом вкладених множин. Множини C_n утворюють спадний ланцюг опуклих замкнених множин. Потрібно показати, що $\text{diam} C_n \rightarrow 0$

($n \rightarrow \infty$). Для $x, y \in C_n$ маємо:

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 \leq \\ &\leq 2\left(\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - 2d^2\right) = \frac{8d}{n} + \frac{4}{n^2}.\end{aligned}$$

Отже, $\text{diam}C_n \leq \sqrt{\frac{8d}{n} + \frac{4}{n^2}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). $\square$

Теорема 2.1 дозволяє коректно ввести оператор P_C метричного проєктування (проєкції) простору H на опуклу замкнену множину $C \subseteq H$, який ставить у відповідність елементу $x \in H$ єдиний елемент $P_C x \in C$, для якого

$$\|P_C x - x\| = \min_{y \in C} \|y - x\|. \quad (2.3)$$

Оператор P_C можна охарактеризувати наступним чином.

Теорема 2.2. *Нехай $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина, $x \in H$, $z \in C$. Такі умови рівносильні:*

- 1) $z = P_C x$.
- 2) $(z - x, y - z) \geq 0 \quad \forall y \in C$.
- 3) $\|z - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|z - x\|^2 \quad \forall y \in C$.

Доведення. Рівносильність 2) та 3) випливає з тотожності

$$2(z - y, z - x) = \|z - y\|^2 + \|z - x\|^2 - \|x - y\|^2.$$

Доведемо рівносильність 1) та 2). Нехай $x \in H$ і $z = P_C x$. Оскільки множина C опукла, то

$$(1 - t)z + ty = z + t(y - z) \in C \quad \forall z \in C \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Унаслідок (2.3) функція

$$\phi(t) = \|x - z - t(y - z)\|^2 = \|x - z\|^2 - 2t(x - z, y - z) + t^2 \|z - y\|^2$$

досягає мінімуму в точці $t = 0$. Це означає, що $\frac{d}{dt}\phi(0) \geq 0$, тобто $(x - z, y - z) \leq 0$ для всіх $y \in C$, або $(z - x, y - z) \geq 0$ для всіх $y \in C$. З іншого боку, якщо $z \in C$ і $(z - x, y - z) \geq 0$ при $y \in C$, то

$$0 \leq (z - x, y - x + x - z) = -\|x - z\|^2 + (z - x, y - x).$$

Отже, $\|x - z\|^2 \leq (z - x, y - x) \leq \|z - x\| \|y - x\|$ і тим самим $\|x - z\| \leq \|y - x\| \forall y \in C$, тобто $z = P_C x$. $\square$

З теореми 2.2 випливає, що оператор метричного проєктування P_C нерозтягуючий, тобто

$$\|P_C x - P_C y\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in H.$$

Для деяких опуклих замкнених множин C відомі явні формули обчислення проєкції P_C . Наприклад, для кулі

$$B(x_0, R) = \{y \in H : \|y - x_0\| \leq R\}$$

та $x \notin B(x_0, R)$ маємо

$$P_{B(x_0, R)} x = x_0 + R \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|},$$

а для гіперплощини $L = \{y \in H : (x_0, y) = c\}$ ($x_0 \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$) проєкція $P_L x$ обчислюється за формулою

$$P_L x = x + (c - (x_0, x)) \frac{x_0}{\|x_0\|^2}.$$

Розглянемо скінченний набір замкнених опуклих множин $C_1, C_2, \dots, C_r$. Для $x_0 \in H$ визначимо послідовність (x_n) за таким правилом:

$$x_0 \xrightarrow{P_{C_1}} x_1 \xrightarrow{P_{C_2}} x_2 \xrightarrow{P_{C_3}} x_3 \xrightarrow{P_{C_4}} \dots \xrightarrow{P_{C_r}} x_r \xrightarrow{P_{C_1}} x_{r+1} \xrightarrow{P_{C_2}} \dots, \quad (2.4)$$

тобто

$$x_{n+1} = P_{C_{n \bmod r+1}} x_n.$$

Має місце

Теорема 2.3 (Л.М. Брегман¹). *Нехай $C_1, \dots, C_r \subseteq H$ — замкнені опуклі множини з непорожнім перетином. Тоді*

$$x_n \rightharpoonup \bar{x} \in \bigcap_{i=1}^r C_i, \quad n \rightarrow \infty.$$

¹Лев Меєрович Брегман (Lev M. Bregman, нар. 31 січня 1941, Ленінград — 24 лютого 2023, Беер-Шева) — радянський та ізраїльський математик. Автор поняття дивергенція Брегмана. Закінчив у 1963 році Ленінградський університет та працював у ньому до 1991-го. Кандидатську дисертацію захистив у 1966 році. Розробив релаксаційний метод знаходження спільної точки опуклих множин та застосував його для розв'язання задач опуклого програмування. Емігрував до Ізраїлю у 1991 році.

Доведення. Нехай $x \in \cap_{i=1}^r C_i$. Позначимо через (y_k^i) підпослідовність (x_{kr+i}) , де $i \in \{1, \dots, r\}$. Із означення метричної проєкції випливають нерівності

$$\|x_0 - x\| \geq \|x_1 - x\| \geq \|x_2 - x\| \geq \|x_3 - x\| \geq \dots \geq 0.$$

Отже, послідовність (x_n) обмежена та існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$. Зокрема, обмеженою є послідовність (y_k^1) . Тому існує така підпослідовність $(y_{k_l}^1)$, що $y_{k_l}^1 \rightharpoonup \bar{x} \in H$ ($l \rightarrow \infty$). Оскільки $y_{k_l}^1 \in C_1$, а множина C_1 слабо замкнена, то $\bar{x} \in C_1$.

Для $y_{k_l}^2 = P_{C_2} y_{k_l}^1$ маємо

$$\|y_{k_l}^1 - y_{k_l}^2\|^2 \leq \|y_{k_l}^1 - x\|^2 - \|y_{k_l}^2 - x\|^2.$$

Тому $\lim_{l \rightarrow \infty} \|y_{k_l}^1 - y_{k_l}^2\| = 0$. Звідси $y_{k_l}^2 \rightharpoonup \bar{x}$. Отримали, що $\bar{x} \in C_2$. Продовжуючи аналогічні міркування, одержуємо, що має місце включення

$$\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^r C_i.$$

Залишилось показати, що вся послідовність (x_n) слабо збігається до $\bar{x}$. Доводимо від супротивного. Припустимо, що (x_n) не збігається слабо до $\bar{x}$. Тоді існує така підпослідовність (x_{n_j}) , що

$$x_{n_j} \rightharpoonup \tilde{x} \neq \bar{x}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Підпослідовність (x_{n_j}) містить принаймні одну підпослідовність вигляду $(y_{k_l}^i)$ для деякого $i \in \{1, \dots, r\}$. Міркуючи як і раніше, отримаємо $\tilde{x} \in \cap_{i=1}^r C_i$. Розглянемо числову послідовність

$$\alpha_n = \|x_n - \bar{x}\|^2 - \|x_n - \tilde{x}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 - \|\tilde{x}\|^2 + 2(x_n, \tilde{x} - \bar{x}).$$

Послідовність (α_n) збіжна. Нехай $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$. З одного боку, розглянувши підпослідовність (α_{n_j}) , отримаємо

$$\alpha = \|\bar{x} - \tilde{x}\|^2.$$

З іншого, розглянувши $(y_{k_l}^1)$, отримаємо

$$\alpha = -\|\bar{x} - \tilde{x}\|^2.$$

Таким чином, $\alpha = 0$ та $\bar{x} = \tilde{x}$. □

Має місце

Теорема 2.4. Нехай $E_1, \dots, E_r \subseteq H$ — замкнені афінні підпростори з непорожнім перетином. Тоді для всіх $x \in H$

$$(P_{E_r} \dots P_{E_2} P_{E_1})^n x \rightarrow P_{\cap_{i=1}^r E_i} x, \quad n \rightarrow \infty.$$

Опишемо метод усереднених проєкцій знаходження спільної точки скінченного набору замкнених опуклих множин $C_1, C_2, \dots, C_r$.

Для $x_0 \in H$ будемо послідовність (x_n) за правилом:

$$x_{n+1} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r P_{C_i} x_n. \quad (2.5)$$

Обчислення проєкцій у (2.5) можна організувати паралельно.

Має місце

Теорема 2.5. Нехай $C_1, C_2, \dots, C_r \subseteq H$ — замкнені опуклі множини з непорожнім перетином, (x_n) — послідовність, побудована методом усереднених проєкцій (2.5). Тоді

$$x_n \rightarrow \bar{x} \in \bigcap_{i=1}^r C_i, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доведення. Розглянемо гільбертовий простір

$$\mathcal{H} = \underbrace{H \times H \times \dots \times H}_r$$

зі скалярним добутком $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^r (x_i, y_i)$. Задамо множини:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{ \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathcal{H} : x_i \in C_i \}, \\ \mathcal{D} &= \{ (x, x, \dots, x) \in \mathcal{H} : x \in H \}. \end{aligned}$$

Множина $\mathcal{C}$ — опукла та замкнена, а $\mathcal{D}$ — замкнений лінійний підпростір. Більш того, $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ тоді й тільки тоді, коли $\cap_{i=1}^r C_i \neq \emptyset$. Неважко переконатись у правильності формул:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{C}} \vec{x} &= (P_{C_1} x_1, P_{C_2} x_2, \dots, P_{C_r} x_r), \\ P_{\mathcal{D}} \vec{x} &= (x, x, \dots, x), \quad \text{де } x = \frac{\sum_{i=1}^r x_i}{r}. \end{aligned}$$

Для $\vec{x} = (x, x, \dots, x) \in \mathcal{D}$ розглянемо $P_{\mathcal{D}} P_{\mathcal{C}} \vec{x}$. Маємо

$$P_{\mathcal{D}} P_{\mathcal{C}} \vec{x} = \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r P_{C_i} x, \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r P_{C_i} x, \dots, \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r P_{C_i} x \right).$$

Застосувавши теорему 2.3 для послідовності

$$\vec{x}_{n+1} = P_D P_C \vec{x}_n, \quad \vec{x}_0 = (x_0, x_0, \dots, x_0) \in \mathcal{H},$$

одержимо потрібний результат. $\square$

Зауваження 2.1. Якщо додатково $C_1, C_2, \dots, C_r \subseteq H$ — замкнені афінні підпростори з непорожнім перетином, то

$$x_n \rightarrow P_{\cap_{i=1}^r C_i} x_0, \quad n \rightarrow \infty,$$

де (x_n) — послідовність, побудована методом усереднених проєкцій (2.5).

2.2. Нерозтягуючі оператори

Нехай E — лінійний нормований простір із нормою $\|\cdot\|$, $C \subseteq E$.

Означення 2.1. Оператор $T : C \rightarrow E$ називатимемо нерозтягуючим, якщо

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in E.$$

Позначимо через $F(T)$ множину нерухомих точок оператора T , тобто

$$F(T) = \{x \in C : Tx = x\}.$$

Зауваження 2.2. Множина нерухомих точок $F(T)$ нерозтягуючого оператора T , що діє в просторі E , може бути порожньою. Дійсно, якщо $Tx = x + y$ ($y \in E \setminus \{0\}$), то $F(T) = \emptyset$.

Для нерозтягуючих операторів, що діють у гільбертових просторах, множина $F(T)$ має відносно просту будову.

Лема 2.1. Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow H$ — нерозтягуючий оператор. Тоді множина $F(T)$ опукла та замкнена.

Доведення. З неперервності T випливає замкненість $F(T)$. Покажемо опуклість множини $F(T)$. Нехай $x, y \in F(T)$, $\alpha \in [0, 1]$. Тоді для $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ маємо

$$\begin{aligned} \|z - Tz\|^2 &= \|z\|^2 - 2\alpha(x, Tz) - 2(1 - \alpha)(y, Tz) + \|Tz\|^2 = \\ &= \|z\|^2 + \alpha \|x - Tz\|^2 - \alpha \|x\|^2 - \alpha \|Tz\|^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \alpha) \|y - Tz\|^2 - (1 - \alpha) \|y\|^2 - (1 - \alpha) \|Tz\|^2 + \|Tz\|^2 \leq \\
& \leq \|z\|^2 + \alpha \|x - z\|^2 - \alpha \|x\|^2 + (1 - \alpha) \|y - z\|^2 - (1 - \alpha) \|y\|^2 = \\
& = \|z\|^2 - 2\alpha(x, z) - 2(1 - \alpha)(y, z) + \|z\|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Отже, $z = Tz$. □

У випадку довільного банахового простору множина нерухомих точок нерозтягуючого оператора може бути неопуклою. Розглянемо простір $\mathbb{R}^2$ з нормою $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ та оператор $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданий формулою

$$Tx = (|x_2|, x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Ясно, що оператор T нерозтягуючий, $(1, 1)$, $(1, -1)$ — нерухомі точки оператора T . Однак відрізок, що з'єднує $(1, 1)$ та $(1, -1)$, не містить інших нерухомих точок оператора T ($F(T) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = |x_2|\}$).

Зауваження 2.3. Лема 2.1 справедлива для строго опуклих лінійних нормованих просторів.

При доведенні слабкої збіжності послідовностей елементів гільбертового простору будемо використовувати відому лему Опяла² [9].

Лема 2.2 (Opial, 1967). *Нехай послідовність (x_n) елементів гільбертового простору H слабо збігається до точки $x \in H$. Тоді для всіх $y \in H \setminus \{x\}$ маємо*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|.$$

Для нелінійних операторів, що діють в нескінченновимірних просторах, корисним є поняття демізамкненості.

Означення 2.2. Нехай C — непорожня підмножина банахового простору E , $F : C \rightarrow E$. Оператор F називатимемо демізамкненим, якщо для довільної послідовності точок $x_n \in C$ із $x_n \rightharpoonup x \in C$ та $Fx_n \rightarrow y$ випливає, що $Fx = y$.

Лема 2.3. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow H$ — нерозтягуючий оператор. Тоді оператор $I - T$ є демізамкненим.*

Доведення. Нехай (x_n) — така послідовність точок із C , що $x_n \rightharpoonup x \in C$ та $x_n - Tx_n \rightarrow y \in H$. Покажемо, що $(I - T)x = y$.

²Zdzislaw Opial (29.09.1930, Краків — 27.07.1974, Краків) — польський математик. Займався теорією диференціальних рівнянь та нелінійним функціональним аналізом.

Має місце нерівність

$$\|x_n - Tx - y\| \leq \|x_n - Tx_n - y\| + \|Tx_n - Tx\| \leq \|x_n - Tx_n - y\| + \|x_n - x\|.$$

Звідси випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx - y\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|.$$

Припустимо, що $x \neq Tx + y$. Тоді з леми Опяла випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx - y\|.$$

Отримали абсурдну нерівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx - y\| < \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx - y\|.$$

Отже, $x - Tx = y$. □

Зауваження 2.4. Цей результат, відомий під назвою «принцип демі-замкненості Браудера», є одним з фундаментальних результатів теорії нерозтягуючих операторів.

Теорема 2.6 (F. Browder, [10]). *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена обмежена множина, $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор. Тоді*

$$F(T) \neq \emptyset.$$

Доведення. Можемо вважати, що $0 \in C$. Розглянемо оператор $\lambda T : C \rightarrow C$, де $\lambda \in (0, 1)$. За теоремою Банаха рівняння

$$x = \lambda Tx$$

має єдиний розв'язок $x_\lambda \in C$.

З обмеженості множини C випливає, що

$$\|x_\lambda - Tx_\lambda\| = (1 - \lambda) \|Tx_\lambda\| \leq (1 - \lambda) \text{diam}(C) \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow 1.$$

Оберемо збіжну до 1 послідовність $\lambda_n \in (0, 1)$ таку, що

$$x_{\lambda_n} \rightharpoonup \bar{x} \in C.$$

З леми 2.3 випливає, що $\bar{x} \in F(T)$. □

Зауваження 2.5. Доведена теорема не випливає з відомої теореми

Шаудера–Тихонова³, оскільки нерозтягуючий оператор може не бути неперервним у слабкій топології.

Зазначимо, що теорема 2.6 не виконується для випадку довільного банахового простору. Дійсно, розглянемо в просторі c_0 нескінченно малих послідовностей з нормою $\|x\| = \max_n |x_n|$ оператор

$$Tx = (1, x_1, x_2, \dots),$$

де $x = (x_1, x_2, \dots)$. Оператор T нерозтягуючий та відображає одиничну замкнену кулю $B \subseteq c_0$ у себе. Нехай $x = (x_1, x_2, \dots)$ — нерухома точка T у B . Тоді $(x_1, x_2, \dots) = (1, x_1, x_2, \dots)$. Звідси випливає, що $x = (1, 1, \dots) \notin c_0$.

Зауваження 2.6. Теорема 2.6 справедлива для рівномірно опуклого банахового простору [11–13]. Питання про її справедливність для довільного рефлексивного простору досі відкрите.

Має місце цікавий результат.

Теорема 2.7 (W.O. Ray, [14]). *Нехай $C \subseteq H$ — непорожня замкнена опукла необмежена підмножина гільбертового простору H . Тоді існує нерозтягуючий оператор $T : C \rightarrow C$ такий, що $F(T) = \emptyset$.*

Доведення. Оскільки множина C необмежена, то існує елемент $y \in H$ такий, що

$$C_n = \{x \in C : (x, y) \geq n\} \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Зауважимо, що множини C_n опуклі та замкнені.

Нехай P_{C_n} — оператор метричного проєктування простору H на множину C_n . Оператор P_{C_n} нерозтягуючий. Зафіксуємо елемент $x \in C$. Побудуємо послідовність (λ_n) додатних чисел таку, що $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|P_{C_n} x\| < +\infty$. Тоді ряд $\sum \lambda_n P_{C_n} z$ абсолютно збіжний при кожному $z \in C$. Отже, оператор $T : C \rightarrow C$, заданий формулою

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{C_n},$$

коректно визначений та нерозтягуючий.

Покажемо, що $F(T) = \emptyset$, від супротивного. Нехай $z \in C$ — нерухома точка оператора T :

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{C_n} z.$$

³Нехай C — непорожня компактна опукла підмножина локально опуклого простору E , $T : C \rightarrow C$ — неперервний оператор. Тоді $F(T) \neq \emptyset$.

Якщо $z \in C_n \setminus C_{n+1}$, то $P_{C_k} z = z$ для $k \leq n$ і $(P_{C_k} z, y) > (z, y)$ для $k > n$.
Тоді

$$\begin{aligned} (z, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (P_{C_k} z, y) = \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k (z, y) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (P_{C_k} z, y) > \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (z, y) = (z, y). \end{aligned}$$

Звідси очевидно, що T не має нерухомої точки в C . $\square$

Повернемось до теореми 2.6. А саме, докладніше вивчимо схему апроксимації за допомогою якої отримано факт існування нерухомих точок.

Теорема 2.8 (F. Browder, [15]). *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор, $F(T) \neq \emptyset$, $y \in C$. Тоді для довільного $t \in (0, 1)$ існує єдиний елемент $x_t \in C$ такий, що*

$$x_t = ty + (1 - t)Tx_t.$$

При $t \rightarrow 0$ напрямленість $\{x_t\}$ сильно збігається до точки $P_{F(T)}y$, де $P_{F(T)}$ — оператор метричного проектування на множину $F(T)$.

Доведення. Оскільки $F(T)$ — непорожня замкнена опукла множина, то існує точка $y_0 = P_{F(T)}y \in F(T)$. Для довільного $t \in (0, 1)$ оператор $ty + (1 - t)T$ стискаючий і відображає множину C в себе. Тому він має єдину нерухому точку $x_t \in C$.

Покажемо, що напрямленість $\{x_t\}$ обмежена. Для $p \in F(T)$ має місце нерівність

$$\|x_t - p\| \leq (1 - t) \|Tx_t - p\| + t \|y - p\| \leq (1 - t) \|x_t - p\| + t \|y - p\|.$$

Звідси $\|x_t - p\| \leq \|y - p\|$. Тобто напрямленість $\{x_t\}$ обмежена, а разом з нею обмежена й напрямленість $\{Tx_t\}$. Крім того, маємо

$$\|x_t - Tx_t\| = t \|Tx_t - y\| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Оберемо довільну збіжну до нуля послідовність чисел $t_n \in (0, 1)$ і покажемо, що (x_{t_n}) містить підпослідовність, яка сильно збігається до $y_0 = P_{F(T)}y$. Оскільки послідовність (x_{t_n}) обмежена, можна вважати, що $x_{t_n} \rightharpoonup \bar{x} \in C$. Із (2.6) випливає включення $\bar{x} \in F(T)$.

Перемноживши скалярно тотожність $x_t - \bar{x} = (1 - t)(Tx_t - \bar{x}) + t(y - \bar{x})$ та $x_t - \bar{x}$, використавши нерівність Шварца, отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} \|x_t - \bar{x}\|^2 &= (1 - t)(Tx_t - \bar{x}, x_t - \bar{x}) + t(y - \bar{x}, x_t - \bar{x}) \leq \\ &\leq (1 - t) \|x_t - \bar{x}\|^2 + t(y - \bar{x}, x_t - \bar{x}). \end{aligned}$$

Звідси

$$\|x_t - \bar{x}\|^2 \leq (y - \bar{x}, x_t - \bar{x}).$$

Зокрема,

$$\|x_{t_n} - \bar{x}\|^2 \leq (y - \bar{x}, x_{t_n} - \bar{x}). \quad (2.7)$$

З нерівності (2.7) та $x_{t_n} \rightharpoonup \bar{x}$ випливає, що $x_{t_n} \rightarrow \bar{x}$.

Тепер покажемо, що $\bar{x} = y_0$. Оскільки x_t є нерухомою точкою оператора $ty + (1 - t)T$, то

$$x_t - y = -\frac{1 - t}{t}(x_t - Tx_t).$$

Для $x \in F(T)$, ураховуючи монотонність оператора $I - T$,⁴ отримуємо

$$\begin{aligned} (x_t - y, x_t - x) &= -\frac{1 - t}{t}(x_t - Tx_t, x_t - x) = \\ &= -\frac{1 - t}{t}((I - T)x_t - (I - T)x, x_t - x) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здійснивши в нерівності (2.8) граничний перехід при $t = t_n \rightarrow 0$, доходимо висновку, що $\bar{x}$ задовольняє нерівність

$$(\bar{x} - y, \bar{x} - x) \leq 0 \quad \forall x \in F(T),$$

що рівносильно рівності $\bar{x} = y_0$.

Покажемо, що й уся напрямленість $\{x_t\}$ сильно збігається до $y_0 = P_{F(T)}y$. Для цього припустимо, що $x_{s_n} \rightarrow y_1$, де $s_n \rightarrow 0$. Оскільки $y_1 \in F(T)$, то

$$(y_0 - y, y_0 - y_1) \leq 0. \quad (2.9)$$

Переставляючи місцями y_0 та y_1 , отримуємо

$$(y_1 - y, y_1 - y_0) \leq 0. \quad (2.10)$$

⁴Мова йде про нерівність

$$((I - T)x - (I - T)y, x - y) \geq 0 \quad \forall x, y \in C.$$

Склавши (2.9) та (2.10), отримуємо

$$(y_0 - y_1, y_0 - y_1) \leq 0,$$

тобто $y_0 = y_1$. □

Твердження 2.1. *Нехай у теоремі 2.8 маємо $F(T) = \emptyset$. Тоді*

$$\|x_t\| \rightarrow +\infty \text{ при } t \rightarrow 0.$$

Доведення. Дійсно, інакше існує слабо збіжна послідовність (x_{t_n}) , де $(0, 1) \ni t_n \rightarrow 0$. Її границя z має належати множині $F(T)$ (унаслідок (2.6)). □

У 2004 р. отримано узагальнення апроксимаційної теореми Браудера.

Теорема 2.9 (Н.К. Ху, [16]). *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор, $F(T) \neq \emptyset$, $f : C \rightarrow C$ — стискаючий оператор. Тоді для довільного $t \in (0, 1)$ існує єдиний елемент $x_t \in C$ такий, що $x_t = tf(x_t) + (1 - t)Tx_t$. При $t \rightarrow 0$ напрямленість $\{x_t\}$ сильно збігається до точки $\bar{x}$ такої, що $\bar{x} = P_{F(T)}f(\bar{x})$.*

Доведення. Теорему 2.9 легко отримати з теореми 2.8 такими міркуваннями. Уведемо допоміжну напрямленість $\{y_t\}$ за допомогою рівняння

$$y_t = tf(\bar{x}) + (1 - t)Ty_t, \quad t \in (0, 1).$$

За теоремою 2.8 маємо

$$y_t \rightarrow P_{F(T)}f(\bar{x}) = \bar{x} \text{ при } t \rightarrow 0.$$

Для доведення теореми 2.9 достатньо показати, що

$$\|y_t - x_t\| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0.$$

З оцінки

$$\begin{aligned} \|y_t - x_t\| &= \|t(f(\bar{x}) - f(x_t)) + (1 - t)(Ty_t - Tx_t)\| \leq \\ &\leq \alpha t \|\bar{x} - x_t\| + (1 - t) \|y_t - x_t\|, \end{aligned}$$

де $\alpha \in [0, 1)$ — коефіцієнт стискання оператора f , отримуємо

$$\|y_t - x_t\| \leq \alpha \|\bar{x} - x_t\| \leq \alpha \|\bar{x} - y_t\| + \alpha \|y_t - x_t\|.$$

Звідси $\|y_t - x_t\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|\bar{x} - y_t\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. □

Описана апроксимація має на меті поліпшення вихідної задачі. Задачу

$$x_t = ty + (1 - t)Tx_t \quad (2.11)$$

можна розв'язувати стандартним методом послідовних наближень, оскільки оператор $ty + (1 - t)T$, на відміну від оператора T , є стискаючим. Однак ітерації, що апроксимують розв'язок (2.11) при фіксованому $t \neq 0$, не апроксимують елемент $P_{F(T)}y$ при збільшенні номера ітерації.

Якщо оператор $T : H \rightarrow H$ стискаючий, то його єдину нерухому точку можна знайти за допомогою методу послідовних наближень (простої ітерації)

$$x_{n+1} = Tx_n. \quad (2.12)$$

У випадку нерозтягуючого оператора T (навіть з єдиною нерухомою точкою) процес (2.12) може виявитись розбіжним для всіх початкових наближень, відмінних від $x_0 \in F(T)$. Приклад: обертання круга $B \subseteq \mathbb{R}^2$ проти годинникової стрілки на кут $\pi/2$ радіан.

Має місце пов'язаний з методом (2.12) критерій існування нерухомої точки нерозтягуючого оператора T , що діє в гільбертовому просторі H .

Теорема 2.10. *Нехай H — гільбертовий простір, $T : H \rightarrow H$ — нерозтягуючий оператор. Операторне рівняння*

$$x - Tx = 0 \quad (2.13)$$

має розв'язок тоді й тільки тоді, коли для деякого $x_0 \in H$ послідовність (x_n) , що визначена формулою $x_{n+1} = Tx_n$, $n \geq 0$, обмежена.

Доведення. Нехай $x \in H$ — розв'язок рівняння (2.13). Тоді

$$\|x_{n+1} - x\| = \|Tx_n - Tx\| \leq \|x_n - x\|.$$

Звідси випливає обмеженість (x_n) .

Навпаки, нехай послідовність (x_n) обмежена. Побудуємо множини

$$C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} B_d(x_k),$$

де $d = \text{diam}\{x_n\}$. Множини C_n непорожні, опуклі та мають властивість

$$T(C_n) \subseteq C_{n+1}.$$

Нехай

$$C = \text{cl} \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Множина C є замкненою, опуклою та обмеженою. Оскільки $T(C) \subseteq C$, то за теоремою 2.6 оператор T має нерухому точку в C . $\square$

2.3. Алгоритм Красносельського–Манна

Розглянемо один з найпопулярніших ітераційних методів пошуку нерухомих точок — метод Красносельського–Манна. Він є джерелом багатьох ефективних алгоритмів оптимізації.

Перші варіанти методу розглядались ще в середині XX ст. У 1953 р. для задачі пошуку нерухомої точки неперервної функції $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ Манн запропонував ітераційний процес (mean value method): $x_0 \in [0, 1]$,

$$x_{n+1} = \frac{n}{n+1}x_n + \frac{1}{n+1}f(x_n). \quad (2.14)$$

Ці ітерації можна записати у вигляді

$$x_{n+1} = \frac{f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n+1}.$$

Через два роки М.О. Красносельський⁵ [17] запропонував для пошуку нерухомих точок нерозтягуючого оператора $T : C \rightarrow C$ (C — опукла замкнена обмежена підмножина банахова простору E) процес: $x_0 \in C$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + Tx_n}{2}.$$

Він довів його сильну збіжність для компактних нерозтягуючих операторів T , що діють у рівномірно опуклих банахових просторах.

⁵Марк Олександрович Красносельський (27.04.1920, Старокостянтинів — 13.02.1997, Москва) — радянський і російський математик, один з творців сучасного нелінійного функціонального аналізу. Народився в Старокостянтиніві (Україна). Закінчив фізико-математичний факультет Київського університету в 1942 році в евакуації (в Казахстані). У 1946 році переїхав до Києва, де працював в Інституті математики Академії наук Української РСР (до 1952 року). М.О. Красносельський був учнем видатного математика М.Г. Крейна. У 1948 році захистив кандидатську дисертацію, а в 1950 р. — докторську дисертацію по топологічним методам нелінійного аналізу. У 1953 році М.О. Красносельський переїхав у Воронежа, де протягом наступних 15 років очолював кафедру функціонального аналізу Воронежського університету. У 1968 році переїхав з Воронежа до Москви та почав працювати в Інститут автоматизації і телемеханіки (з 1969 року — Інститут проблем управління, ІПУ) АН СРСР. В інституті організував лабораторію «Математичних методів аналізу складних систем». У 1990 р перейшов в Інститут проблем передачі інформації АН СРСР (ІППІ). Серед його учнів тільки докторів фізико-математичних наук понад 30 осіб. Похований на Хованському кладовищі в Москві.

Нехай $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H , $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор. Припустимо, що

$$F(T) \neq \emptyset.$$

Ітераційний метод Красносельського–Манна має такий вигляд.

Алгоритм 2.1. Для заданого $x_0 \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n,$$

де (α_n) — послідовність чисел з $[0, 1]$.

Теорема 2.11. Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор із $F(T) \neq \emptyset$. Нехай послідовність чисел $\alpha_n \in [0, 1]$ задовольняє умову

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = +\infty. \quad (2.15)$$

Тоді згенерована алгоритмом 2.1 послідовність (x_n) слабо збігається до деякої точки з $F(T)$.

Доведення. Для довільного $p \in F(T)$ маємо

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \alpha_n \|x_n - p\| + (1 - \alpha_n) \|Tx_n - p\| \leq \|x_n - p\|.$$

Таким чином, існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \in \mathbb{R}$, а послідовність (x_n) обмежена.

Покажемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0. \quad (2.16)$$

Оцінимо зверху $\|x_{n+1} - p\|^2$, де $p \in F(T)$,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &= \|x_n - p + (1 - \alpha_n)(Tx_n - x_n)\|^2 = \\ &= \|x_n - p\|^2 + 2(1 - \alpha_n)(x_n - p, Tx_n - x_n) + \\ &+ (1 - \alpha_n)^2 \|Tx_n - x_n\|^2 = \|x_n - p\|^2 - (1 - \alpha_n) \|Tx_n - x_n\|^2 - \\ &- (1 - \alpha_n) \|p - x_n\|^2 + (1 - \alpha_n) \|Tx_n - p\|^2 + \\ &+ (1 - \alpha_n)^2 \|Tx_n - x_n\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 - \alpha_n (1 - \alpha_n) \|Tx_n - x_n\|^2. \end{aligned}$$

Звідси

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k (1 - \alpha_k) \|Tx_k - x_k\|^2 \leq \|x_0 - p\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.17)$$

З (2.17) і (2.15) випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - x_n\| = 0. \quad (2.18)$$

Маємо

$$\|x_{n+1} - x_n\| = (1 - \alpha_n) \|Tx_n - x_n\|.$$

Урахуємо цю рівність під час оцінки зверху $\|Tx_{n+1} - x_{n+1}\|$:

$$\begin{aligned} \|Tx_{n+1} - x_{n+1}\| &\leq \|Tx_{n+1} - Tx_n\| + \alpha_n \|Tx_n - x_n\| \leq \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \alpha_n \|Tx_n - x_n\| = \|Tx_n - x_n\|. \end{aligned} \quad (2.19)$$

З (2.19) випливає існування $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| \in \mathbb{R}$. Разом із (2.18) це гарантує виконання (2.16). Ураховуючи демізамкненість оператора $I - T$, обмеженість (x_n) і (2.16), робимо висновок, що всі часткові слабкі границі послідовності (x_n) є нерухомими точками оператора T .

Покажемо, що (x_n) слабо збігається до деякого елемента $y \in F(T)$. Нехай $a, b \in F(T)$ — дві слабкі часткові границі послідовності (x_n) . Припустимо, що $a \neq b$, $x_{n_k} \rightharpoonup a$, $x_{n_l} \rightharpoonup b$. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - a\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - b\| = \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \|x_{n_l} - b\| < \lim_{l \rightarrow \infty} \|x_{n_l} - a\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\|. \end{aligned}$$

Ця нерівність указує на те, що $a = b$. Отже, послідовність (x_n) слабо збіжна. $\square$

Зауваження 2.7. З (2.17) випливає нерівність (при обмеженій множині $C \subseteq H$):

$$\|Tx_n - x_n\| \leq \frac{\text{diam}(C)}{\sqrt{\sum_{k=0}^n \alpha_k (1 - \alpha_k)}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.4. Ергодична теорема для нерозтягуючих операторів

Твердження про граничну поведінку послідовності середніх вигляду

$$\frac{x + Tx + T^2x + \dots + T^{n-1}x}{n}$$

називають операторними ергодичними теоремами. Розглядають також інші процедури усереднення.

Перша операторна ергодична теорема (для лінійних ізометричних операторів гільбертового простору) була сформульована та доведена Дж. фон Нейманом⁶.

Ергодичні теореми для нелінійних відображень — багата на глибокі результати та цікаві проблеми галузь функціонального аналізу, що активно розвивається.

Ми доведемо лише класичну ергодичну теорему Байона для нелінійних нерозтягуючих операторів, що діють у гільбертовому просторі. Ця теорема стала джерелом численних узагальнень і уточнень.

Теорема 2.12 (J. V. Baillon). *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор. Якщо $F(T) \neq \emptyset$, то для довільного $x \in C$ послідовність середніх за Чезаро*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

слабко збігається до деякого елемента $y \in F(T)$.

Доведення. Нехай $F(T) \neq \emptyset$. Позначимо

$$x_k = T^k x \quad (x_0 = x), \quad y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k.$$

Для довільного $p \in F(T)$ маємо

$$\|x_n - p\| = \|Tx_{n-1} - Tp\| \leq \|x_{n-1} - p\|.$$

Таким чином, існує

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \in \mathbb{R},$$

а послідовності (x_n) , (y_n) і (Ty_n) обмежені.

Покажемо, що всі часткові слабкі границі (які існують) послідовності (y_n) є нерухомими точками оператора T .

⁶Джон фон Нейман (англ. John von Neumann, угор. Neumann Janos Lajos, нім. Johann von Neumann, 28.12.1903, Будапешт — 8.02.1957, Вашингтон) — видатний американський математик угорського походження. З 1930 року працював у США. Був одним з перших запрошених на роботу в заснований в 1930 році науково-дослідний Інститут перспективних досліджень (англ. Institute for Advanced Study), що розташовувався в Принстоні, де з 1933 року і до самої смерті посідав професорську посаду. Зробив значний внесок у квантову фізику, функціональний аналіз, теорію множин, інформатику та математичну економіку. Приймав участь в Манхеттенському проекті. Відомий як засновник теорії ігор разом із Оскаром Морґенштерном. Автор «архітектури фон Неймана», яка використовується в сучасних комп'ютерах.

Для цього, беручи до уваги демізамкненість оператора $I - T$ (лема 2.3), достатньо довести, що

$$\|y_n - Ty_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Для $u \in H$ маємо

$$\|y_n - u\|^2 = \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (x_k - u) \right\|^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (x_k - u, x_i - u).$$

Оскільки

$$2(x_k - u, x_i - u) = \|x_k - u\|^2 + \|x_i - u\|^2 - \|x_k - x_i\|^2,$$

то

$$2\|y_n - u\|^2 = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k - u\|^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \|x_k - x_i\|^2. \quad (2.21)$$

Обравши у (2.21) $u = y_n$, отримаємо

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \|x_k - x_i\|^2 = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k - y_n\|^2.$$

Поклавши у (2.21) $u = Ty_n$, одержимо

$$\begin{aligned} \|y_n - Ty_n\|^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k - Ty_n\|^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k - y_n\|^2 = \\ &= \frac{1}{n} \|x - Ty_n\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \|Tx_{k-1} - Ty_n\|^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k - y_n\|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \|x - Ty_n\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \|x_{k-1} - y_n\|^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k - y_n\|^2 = \\ &= \frac{1}{n} \|x - Ty_n\|^2 - \frac{1}{n} \|x_{n-1} - y_n\|^2 \leq \frac{1}{n} \|x - Ty_n\|^2. \end{aligned}$$

Остаточно маємо оцінку

$$\|y_n - Ty_n\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Ми довели, що для довільного $p \in F(T)$ існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \in \mathbb{R}$ та

всі часткові слабкі границі послідовності (y_n) належать множині $F(T)$. Покажемо, що звідси випливає слабка збіжність послідовності (y_n) до деякого елемента $y \in F(T)$. Для цього спочатку розглянемо дві точки $p_1, p_2 \in F(T)$. Маємо $\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 \in F(T)$ та

$$\left\| \frac{p_1 + p_2}{2} - x_n \right\|^2 = \|x_n - p_1\|^2 + \left\| \frac{p_1 - p_2}{2} \right\|^2 + (x_n - p_1, p_1 - p_2).$$

Отже, існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - p_1, p_1 - p_2) = l \in \mathbb{R}$. За теоремою Штольца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - p_1, p_1 - p_2) = l.$$

Нехай $a \in F(T)$, $b \in F(T)$ – дві слабкі часткові границі послідовності (y_n) . Тоді

$$(a - b, p_2 - p_1) = 0, \quad \forall p_1, p_2 \in F(T). \quad (2.22)$$

Поклавши у (2.22) $p_2 = a$, $p_1 = b$, отримаємо $\|a - b\|^2 = 0$. Отже, послідовність (y_n) слабо збігається до деякого елемента множини $F(T)$. $\square$

Зауваження 2.8. Якщо $F(T) = \emptyset$, то для довільного $x \in C$ маємо

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x \right\| \rightarrow +\infty.$$

Дійсно, інакше послідовність середніх $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$ має слабо збіжні підпослідовності, які внаслідок демізамкненості оператора $I - T$ та (2.20) є нерухомими точками оператора T .

Також Байон одержав уточнення теореми 2.12.

Теорема 2.13. *Нехай виконуються умови теореми 2.12. Припустимо, що*

$$C = -C \text{ та } T(-x) = -Tx \quad \forall x \in C.$$

Тоді для довільного $x \in C$ послідовність середніх за Чезаро $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$ сильно збігається до деякого елемента $y \in F(T)$.

2.5. Алгоритм Гальперна

Нехай $T : H \rightarrow H$ — нерозтягуючий оператор із $F(T) \neq \emptyset$. Побудувати послідовність, що сильно збігається до $P_{F(T)} y$, де $y \in H$, можна за допомогою такої конструкції. Нехай $t_0 \in (0, 1)$ та $x_0 \in H$ фіксовані. Беручи x_0 за початкову точку, зробимо один крок методу послідовних наближень розв'язання

задачі

$$x = t_0 y + (1 - t_0)Tx.$$

Отримаємо точку

$$x_1 = t_0 y + (1 - t_0)Tx_0.$$

Далі оберемо $t_1 \in (0, t_0)$ і з парою t_1, x_1 виконаємо аналогічну дію. Отримаємо точку x_2 і т.д.

Описаний метод запропонував Б. Гальперн [18] у 1967 р. Виявляється, що можна апріорно задати послідовність $t_n \rightarrow 0$ таким чином, що описана ітераційна процедура буде сильно збігатись до $P_{F(T)}y$ (якщо $F(T) \neq \emptyset$).

Перейдемо до вивчення цієї схеми. Спочатку сформулюємо лему про числові послідовності, що грає важливу роль у доведенні результату про збіжність.

Лема 2.4. *Нехай (x_n) — послідовність невід’ємних чисел, що задовольняє рекурентну нерівність*

$$x_{n+1} \leq (1 - a_n)x_n + a_n b_n + c_n,$$

де послідовності (a_n) , (b_n) і (c_n) мають властивості:

- 1) $a_n \in [0, 1)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$;
- 2) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \leq 0$;
- 3) $c_n \in [0, +\infty)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$.

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Доведення. Для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $n \geq N$

$$b_n < \varepsilon, \quad \sum_{n=N}^{\infty} c_n < \varepsilon.$$

Для $n > N$ з рекурентної нерівності маємо

$$x_{n+1} \leq \left(\prod_{k=N}^n (1 - a_k) \right) x_N + \left(1 - \prod_{k=N}^n (1 - a_k) \right) \varepsilon + \sum_{k=N}^n c_k.$$

Беручи до уваги рівносильність умов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ та $\prod_{n=0}^{\infty} (1 - a_n) = 0$, отримуємо, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq 2\varepsilon.$$

Звідси $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. □

Нехай $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H , $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор. Припустимо, що $F(T) \neq \emptyset$.

Ітераційний метод Гальперна має такий вигляд.

Алгоритм 2.2. Задаємо $x_0 \in C$ та $y \in C$, генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = \alpha_n y + (1 - \alpha_n) T x_n,$$

де (α_n) — послідовність чисел з $(0, 1)$.

Уперше збіжність цього ітераційного алгоритму дослідив у 1967 р. Б. Гальперн [18]. Він показав, що умови

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n &= +\infty \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

є необхідними для сильної збіжності побудованої послідовності (x_n) до нерухомих точок нерозтягуючих операторів T , та отримав достатні умови сильної збіжності. Зокрема, Б. Гальперн довів збіжність алгоритму 2.2 при $\alpha_n = \frac{1}{(n+1)^q}$, де $q \in (0, 1)$.

У 1977 р. П.-Л. Ліонс⁷ [19] покращив результат Б. Гальперна, довівши сильну збіжність алгоритму 2.2, при умові якщо послідовність задовольняє (2.23) та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_{n+1}^2} = 0. \quad (2.24)$$

Зазначимо, що умови Б. Гальперна та П.-Л. Ліонса не задовольняє числова послідовність $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$.

У 1992 р. Р. Вітман [20] довів сильну збіжність алгоритму 2.2 до нерухомої точки оператора T за виконання умов (2.23) та

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty. \quad (2.25)$$

У 1996 р. Н.Н. Bauschke в [21] запропонував циклічний алгоритм Гальперна, який будував послідовність, що сильно збігається до спільної нерухомої точки скінченної кількості нерозтягуючих операторів.

⁷П'єр-Луї Ліонс (Pierre-Louis Lions, 11.08.1956, Грасс) — видатний французький математик. Син Жака-Луї Ліонса. Отримав медаль Філдса у 1994 році. Займається теорією нелінійних рівнянь в частинних похідних, теорією ігор середнього поля.

Нарешті, у 2002 р. Н.К. Ху [22] сформулював теорему про сильну збіжність алгоритму 2.2 за виконання умов (2.23) та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_{n+1}} = 0. \quad (2.26)$$

Досі відкритим⁸ залишається питання: чи є (2.23) достатньою умовою сильної збіжності алгоритму 2.2 для довільного нерозтягуючого оператора $T : C \rightarrow C$?

Теорема 2.14. *Нехай $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор із $F(T) \neq \emptyset$, $y \in C$. Нехай послідовність чисел $\alpha_n \in (0, 1)$ задовольняє умови:*

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$,
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$,
- 3) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_{n+1}} = 0$.

Тоді згенерована алгоритмом 2.2 послідовність (x_n) сильно збігається до точки $P_{F(T)}y$.

Доведення. Покажемо обмеженість послідовності (x_n) . Для $p \in F(T)$ маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq (1 - \alpha_n) \|Tx_n - p\| + \alpha_n \|y - p\| \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|x_n - p\| + \alpha_n \|y - p\| \leq \max\{\|x_n - p\|, \|y - p\|\}. \end{aligned}$$

Звідси індукцією отримуємо $\|x_n - p\| \leq \{\|x_0 - p\|, \|y - p\|\}$, $n \geq 0$.

Таким чином, послідовність (x_n) обмежена, а разом з нею — також послідовність (Tx_n) .

Покажемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0 \quad (2.27)$$

та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0. \quad (2.28)$$

Використаємо лему 2.4 про числові послідовності. Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|(\alpha_n - \alpha_{n-1})(y - Tx_{n-1}) + (1 - \alpha_n)(Tx_n - Tx_{n-1})\| \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|x_n - x_{n-1}\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}| \cdot \|y - Tx_{n-1}\|. \end{aligned}$$

З леми 2.4 про числові послідовності випливає (2.27). Тепер ми можемо отримати (2.28) із (2.27).

$$\|x_n - Tx_n\| \leq \|x_n - x_{n+1}\| + \alpha_n \|y - Tx_n\| \rightarrow 0.$$

⁸Точніше, у січні 2026-го ми вважаємо його таким.

Доведемо, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (P_{F(T)}y - x_n, P_{F(T)}y - y) \leq 0. \quad (2.29)$$

Виділимо з (x_n) підпослідовність (x_{n_k}) таку, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (P_{F(T)}y - x_n, P_{F(T)}y - y) = \lim_{k \rightarrow \infty} (P_{F(T)}y - x_{n_k}, P_{F(T)}y - y).$$

Можна вважати, що $x_{n_k} \rightharpoonup \tilde{x}$. Із (2.28) випливає включення $\tilde{x} \in F(T)$. Тому одержуємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (P_{F(T)}y - x_{n_k}, P_{F(T)}y - y) = (P_{F(T)}y - \tilde{x}, P_{F(T)}y - y) \leq 0,$$

чим і доводимо (2.29).

Покажемо тепер, що $x_n \rightarrow P_{F(T)}y$. Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - P_{F(T)}y\|^2 &\leq (1 - \alpha_n) \|x_n - P_{F(T)}y\|^2 + \\ &\quad + 2\alpha_n (y - P_{F(T)}y, x_{n+1} - P_{F(T)}y). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Застосувавши до одержаної рекурентної нерівності (2.30) лему 2.4 про числові послідовності, робимо висновок, що $\|x_n - P_{F(T)}y\| \rightarrow 0$. $\square$

Розглянута схема є узагальненням усереднення за Чезаро.

Дійсно, якщо T — лінійний оператор, $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ та $x_0 = y$, то породжена алгоритмом Гальперна послідовність має вигляд

$$x_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^k y,$$

а за умови $\|T\| \leq 1$ послідовність (x_n) сильно збігається до $P_{N(I-T)}y$. Отже, з теореми 2.14 випливає ергодична теорема фон Неймана.

Має місце такий результат щодо швидкості збіжності.

Теорема 2.15 (F. Lieder, [23]). *Нехай $T : H \rightarrow H$ — нерозтягуючий оператор із $F(T) \neq \emptyset$. Тоді для послідовності (x_n) , що згенерована схемою*

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+2} x_0 + \frac{n+1}{n+2} T x_n,$$

має місце оцінка

$$\frac{1}{2} \|x_n - T x_n\| \leq \frac{\|x_0 - x\|}{n+1} \quad \forall n \geq 0 \quad \forall x \in F(T). \quad (2.31)$$

Причому оцінка (2.31) точна.

Нехай оператор $T : H \rightarrow H$ — нерозтягуючий, оператор $A : H \rightarrow H$ — ліпшицевий та сильно монотонний⁹. Розглянемо ітераційну схему:

$$\begin{cases} y_n = Tx_n, \\ x_{n+1} = y_n - \alpha_n Ay_n, \end{cases}$$

де послідовність чисел $\alpha_n \in (0, 1)$ задовольняє умови: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$.

Аналогічно теоремі 2.14 доводиться, що послідовність (x_n) сильно збігається до єдиного розв'язку варіаційної нерівності:

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in F(T).$$

Розглянемо задачу

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \bigcap_{i=1}^N C_i, \quad (2.32)$$

де f — опукла функція з ліпшицевим градієнтом, C_i — опуклі замкнені множини. Указана схема дозволяє для задачі (2.32) обґрунтувати такий метод

$$\begin{cases} y_n = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_{C_i} \right) x_n, \\ x_{n+1} = y_n - \alpha_n \nabla f(y_n), \end{cases}$$

де $\alpha_n > 0$ задовольняє наведені вище умови.

2.6. Задачі

Задача 2.1. Нехай $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$ — незростаюча послідовність опуклих замкнених множин. Припустимо, що $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$, і нехай $x \in H$. Доведіть, що $P_{C_n} x \rightarrow P_C x$.

Задача 2.2. Нехай $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$ — неспадна послідовність непорожніх опуклих замкнених множин. Покладемо $C = \text{cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)$ і нехай $x \in H$. Доведіть, що $P_{C_n} x \rightarrow P_C x$.

Задача 2.3. Нехай A — опукла замкнена множина з $\mathbb{R}^n$. Доведіть, що через довільну точку $x \in \text{fr} A$ можна провести опорну гіперплощину до множини A , тобто $\exists a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (a, x) \geq (a, y) \quad \forall y \in A$.

⁹Оператор $A : H \rightarrow H$ називаємо сильно монотонним на множині $C \subseteq H$, якщо існує така стала $\mu > 0$, що

$$(Ax - Ay, x - y) \geq \mu \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in C.$$

У цьому випадку кажуть, що оператор A — μ -сильно монотонний.

Задача 2.4. Нехай C — непорожня замкнена опукла підмножина гільбертового простору H , $x \in H \setminus C$. Доведіть, що існує $p \in H \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) < (p, x).$$

Задача 2.5. Нехай C — непорожня опукла підмножина гільбертового простору H , $\dim H < +\infty$, $x \in H \setminus C$. Доведіть, що існує $p \in H \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) \leq (p, x).$$

Задача 2.6. Нехай C, D — непорожні підмножини H такі, що $C \cap D = \emptyset$.

(i) Якщо припустити, що

множина $C - D$ опукла та замкнена,

то існує $p \in H \setminus \{0\}$ такий, що $\sup_{y \in C} (p, y) < \inf_{y \in D} (p, y)$.

(ii) Якщо припустити, що

$\dim H < +\infty$, множина $C - D$ опукла,

то існує $p \in H \setminus \{0\}$ такий, що $\sup_{y \in C} (p, y) \leq \inf_{y \in D} (p, y)$.

Задача 2.7. Нехай C, D — непорожні замкнені опуклі підмножини гільбертового простору H , $C \cap D = \emptyset$ та D обмежена. Доведіть, що існує $p \in H \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sup_{y \in C} (p, y) < \inf_{y \in D} (p, y).$$

Задача 2.8. Нехай $L \subseteq H$ — замкнений лінійний підпростір, $x \in H, z \in L$. Доведіть, що такі умови рівносильні:

1) $z = P_L x$.

2) $(z - x, y) = 0 \quad \forall y \in L$.

Задача 2.9. Нехай $L \subseteq H$ — замкнений лінійний підпростір. Доведіть, що оператор P_L лінійний.

Задача 2.10. Якщо $L \subseteq H$ — замкнений лінійний підпростір, то

$$H = L \oplus L^\perp,$$

тобто, кожний $x \in H$ можна єдиним чином подати у вигляді $x = y + z$, де $y \in L, z \in L^\perp$.

Задача 2.11. Нехай C — опукла підмножина гільбертового простору. Доведіть, що наступні умови рівносильні:

- 1) C — слабо секвенційно замкнена множина.
- 2) C — замкнена множина.
- 3) C — слабо замкнена множина.

Задача 2.12. Доведіть, що для гіперплощини $L = \{y \in H : (x_0, y) = c\}$ ($x_0 \neq 0, c \in \mathbb{R}$) проекція $P_L x$ обчислюється за формулою

$$P_L x = x - ((x_0, x) - c) \frac{x_0}{\|x_0\|^2}.$$

Задача 2.13. Нехай $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — зліченна ортонормована система елементів гільбертового простору H та $C = \text{cl lin}\{e_n\}$. Доведіть, що

$$P_C x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, \quad x \in H.$$

Задача 2.14. Нехай C — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H та $x, y \in H$. Доведіть рівність $P_{y+C} x = y + P_C(x - y)$.

Задача 2.15. Нехай C — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H та $x \in H$. Доведіть, що для всіх $\lambda \geq 0$ має місце рівність $P_C(P_C x + \lambda(x - P_C x)) = P_C x$.

Задача 2.16. Нехай H — нескінченновимірний гільбертовий простір. Доведіть, що оператор проектування на замкнену кулю не є слабо неперервним.

Задача 2.17. Нехай A — непорожня підмножина метричного простору (X, d) , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ — ліпшицева функція. Доведіть, що існує ліпшицеве продовження g функції f на весь простір X зі збереженням константи Ліпшиця.

Задача 2.18. Нехай $\{B(x_i, r_i)\}, \{B(y_i, r_i)\}, i = 1, \dots, n$, дві множини замкнених куль в гільбертовому просторі H для яких

$$\|y_i - y_j\| \leq \|x_i - x_j\| \quad \forall i \forall j.$$

Доведіть, що

$$\bigcap_{i=1}^n B(x_i, r_i) \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n B(y_i, r_i) \neq \emptyset.$$

Задача 2.19. Нехай $\{B(x_\alpha, r_\alpha)\}, \{B(y_\alpha, r_\alpha)\}, \alpha \in A$, дві множини замкнених куль в H для яких

$$\|y_\alpha - y_\beta\| \leq \|x_\alpha - x_\beta\| \quad \forall \alpha \forall \beta.$$

Доведіть, що

$$\bigcap_{\alpha \in A} B(x_\alpha, r_\alpha) \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} B(y_\alpha, r_\alpha) \neq \emptyset.$$

Задача 2.20. Нехай A — непорожня підмножина гільбертового простору H , $T : A \rightarrow H$ — нерозтягуючий оператор. Доведіть, що існує такий нерозтягуючий оператор $V : H \rightarrow H$, що $V|_A = T$.

Задача 2.21. Покажіть, що лема 2.1 справедлива для строго опуклих лінійних нормованих просторів.

Задача 2.22. Нехай C — непорожня множина гільбертового простору H , $T_1, T_2, \dots, T_m : C \rightarrow H$ — нерозтягуючі оператори, причому $\bigcap_{n=1}^m F(T_n) \neq \emptyset$. Доведіть, що оператор

$$Tx = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m T_n x \quad (x \in C)$$

є нерозтягуючим та $F(T) = \bigcap_{n=1}^m F(T_n)$.

Задача 2.23. Нехай C — непорожня підмножина гільбертового простору H , $T_1, T_2, \dots, T_m : C \rightarrow H$ — строго квазінерозтягуючі оператори¹⁰, причому $\bigcap_{n=1}^m F(T_n) \neq \emptyset$. Доведіть, що оператор

$$Tx = T_1 T_2 \dots T_m x \quad (x \in C)$$

є строго квазінерозтягуючим та $F(T) = \bigcap_{n=1}^m F(T_n)$.

Задача 2.24. Нехай H — гільбертовий простір, $D \subseteq H$. Доведіть, що оператор $T : D \rightarrow H$ твердо нерозтягуючий¹¹ тоді і тільки тоді, коли

$$(Tx - Ty, x - y) \geq \|Tx - Ty\|^2 \quad \forall x, y \in D.$$

¹⁰Оператор $T : C \rightarrow H$ називають строго квазінерозтягуючим, якщо

$$\|Tx - y\| < \|x - y\| \quad \forall x \in C \setminus F(T) \quad \forall y \in F(T).$$

¹¹Оператор $T : H \rightarrow H$ називатимемо твердо нерозтягуючим (firmly nonexpansive), якщо

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(I - T)x - (I - T)y\|^2 \quad \forall x, y \in H.$$

Задача 2.25. Нехай H — гільбертовий простір, $D \subseteq H$. Доведіть, що оператор $T : D \rightarrow H$ твердо нерозтягуючий тоді і тільки тоді, коли оператор $2T - I : D \rightarrow H$ нерозтягуючий.

Задача 2.26. Нехай H — гільбертовий простір, $D \subseteq H$. Доведіть, що оператор $T : D \rightarrow H$ твердо нерозтягуючий тоді і тільки тоді, коли $T = \frac{1}{2}(I + S)$, де $S : D \rightarrow H$ — нерозтягуючий оператор.

Задача 2.27. Нехай H — гільбертовий простір; $F \subseteq H$ — непорожня множина; (x_n) — послідовність точок H . Припустимо, що:

- 1) усі слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать F ;
- 2) для всіх $y \in F$ існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| \in \mathbb{R}$.

Доведіть, що (x_n) слабо збігається до деякої точки $x \in F$.

Задача 2.28. Нехай H — гільбертовий простір; $F \subseteq H$ — непорожня множина; (x_n) — послідовність точок H і $\bar{x}_n = \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k}$, де (λ_n) — послідовність додатніх чисел така, що $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$. Припустимо, що:

- 1) усі слабкі часткові границі послідовності $(\bar{x}_n)$ належать F ;
- 2) для всіх $y \in F$ існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{x}_n - y\| \in \mathbb{R}$.

Доведіть, що $(\bar{x}_n)$ слабо збігається до деякої точки $x \in F$.

Задача 2.29. Нехай H — гільбертовий простір, $T : H \rightarrow H$ — твердо нерозтягуючий оператор з $F(T) \neq \emptyset$. Розглянемо метод простої ітерації:

$$\begin{cases} x_0 \in H, \\ x_{n+1} = Tx_n. \end{cases}$$

Доведіть, що послідовність (x_n) слабо збігається до деякої точки з $F(T)$.

Задача 2.30. Нехай C — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H , $T : C \rightarrow H$ — нерозтягуючий оператор з $F(T) \neq \emptyset$. Припустимо, що послідовність точок $x_n \in C$ має властивості:

- 1) $\forall p \in F(T) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \in \mathbb{R}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$.

Доведіть, що послідовність (x_n) слабо збігається до точки з $F(T)$.

Задача 2.31. Нехай $C_1, \dots, C_r \subseteq H$ — замкнені опуклі множини з непорожнім перетином. Розглянемо послідовність

$$x_{n+1} = \frac{1}{r} (P_{C_1} x_n + P_{C_1} P_{C_2} x_n + \dots + P_{C_1} \dots P_{C_r} x_n),$$

де $x_0 \in H$. Доведіть, що

$$x_n \rightharpoonup \bar{x} \in \bigcap_{i=1}^r C_i \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Задача 2.32. Нехай $C_1, \dots, C_r \subseteq H$ — замкнені опуклі множини з непорожнім перетином. Розглянемо послідовність

$$x_{n+1} = \frac{1}{r-1} (P_{C_1} P_{C_2} x_n + P_{C_2} P_{C_3} x_n + \dots + P_{C_{r-1}} P_{C_r} x_n),$$

де $x_0 \in H$. Доведіть, що

$$x_n \rightharpoonup \bar{x} \in \bigcap_{i=1}^r C_i \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Задача 2.33. Нехай $E_1, E_2 \subseteq H$ — замкнені лінійні підпростори. Доведіть, що послідовність операторів $P_{E_1}, P_{E_2} P_{E_1}, P_{E_1} P_{E_2} P_{E_1}, P_{E_2} P_{E_1} P_{E_2} P_{E_1}, \dots$ поточно збігається до $P_{E_1 \cap E_2}$. Зокрема, для всіх $x \in H$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_{E_2} P_{E_1})^n x = P_{E_1 \cap E_2} x.$$

Задача 2.34. Отримайте ергодичну теорему для послідовності середніх

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k T^k x}{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k},$$

де (λ_n) — така послідовність додатних чисел, що $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = +\infty$, T — нерозтягуючий оператор, що відображає опуклу замкнену множину C гільбертового простору H у себе, $x \in C$.

Задача 2.35. Функція $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ задовольняє умову

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in [0, 1].$$

Для $x_0 \in [0, 1]$ покладемо

$$x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}.$$

Доведіть, що $x_n \rightarrow y \in [0, 1]$ і $f(y) = y$.

Задача 2.36. Доведіть, що задана (2.14) послідовність збігається до нерухомої точки неперервної функції $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Задача 2.37. Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор, $F(T) \neq \emptyset$, $y \in C$. Покажіть, що для довільного $t \in (0, 1)$ існує єдиний елемент $x_t \in C$, такий, що

$$x_t = T(ty + (1 - t)x_t).$$

Доведіть, що при $t \rightarrow 0$ напрямленість $\{x_t\}$ сильно збігається до точки $\bar{x}$, такої, що $\bar{x} = P_{F(T)}y$.

Задача 2.38. Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow C$ — нерозтягуючий оператор з $F(T) \neq \emptyset$, $f : C \rightarrow C$ — стискаючий оператор. Для заданого $x_0 \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми:

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)Tx_n,$$

де послідовність чисел $\alpha_n \in (0, 1)$ задовольняє умови: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$. Доведіть, що згенерована послідовність (x_n) сильно збігається до точки $z \in F(T)$, такої, що $z = P_{F(T)}f(z)$.

Задача 2.39. Нехай $T_i : C \rightarrow C$ — злічений набір нерозтягуючих операторів, що діють у замкненій опуклій підмножині C гільбертового простору H , $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$. Розглянемо схему:

$$x_{n+1} = \alpha_n a + \sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_n,$$

де $\alpha_0 = 1$, (α_n) — спадна послідовність чисел з $(0, 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\alpha_n \rightarrow 0$, $x_1 \in C$ і $a \in C$. Доведіть, що послідовність (x_n) сильно збігається до $P_F a$.

Задача 2.40. Нехай оператор $T : H \rightarrow H$ — нерозтягуючий, оператор $A : H \rightarrow H$ — ліпшицевий та сильно монотонний із сталими $L > 0$, $l > 0$, відповідно. Оператор $T_\alpha : H \rightarrow H$ задано рівністю

$$T_\alpha x = Tx - \alpha A T x, \quad \alpha \in [0, +\infty).$$

Доведіть, що для довільного $\mu \in (0, \frac{2l}{L^2})$ маємо

$$\|T_\alpha x - T_\alpha y\| \leq \left(1 - \frac{\tau}{\mu} \alpha\right) \|x - y\| \quad \forall x \in H \quad \forall y \in H,$$

де $\alpha \in [0, \mu]$, $\tau = 1 - \sqrt{1 - 2\mu + L^2\mu^2} \in (0, 1]$.

Задача 2.41. Нехай $C \subseteq H$ — непорожня замкнена опукла обмежена множина та $A : C \rightarrow H$ — монотонний¹² і неперервний оператор. Тоді нерівність

$$x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C$$

рівносильна нерівності

$$x \in C : (Ay, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Задача 2.42. Доведіть, що похідна опуклої диференційовної функції $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонним оператором.

Задача 2.43. Доведіть, що похідна сильно опуклої диференційовної функції $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ є сильно монотонним оператором.

Задача 2.44. Нехай оператор $T : H \rightarrow H$ — нерозтягуючий, оператор $A : H \rightarrow H$ — ліпшицевий та сильно монотонний. Розглянемо ітераційну схему:

$$\begin{cases} y_n = Tx_n, \\ x_{n+1} = y_n - \alpha_n Ay_n, \end{cases}$$

де послідовність чисел $\alpha_n \in (0, 1)$ задовольняє умови: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$. Доведіть, що породжена послідовність (x_n) сильно збігається до єдиного розв'язку варіаційної нерівності:

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in F(T).$$

Задача 2.45 (CQ-method, [24]). Нехай $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H , $T : C \rightarrow H$ — нерозтягуючий оператор. Припустимо, що $F(T) \neq \emptyset$. Розглянемо алгоритм, що для заданого $x_0 = x \in C$ генерує послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми:

$$\begin{cases} y_n = Tx_n, \\ C_n = \{z \in C : \|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|\}, \\ Q_n = \{z \in C : (x_n - z, x_0 - x_n) \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0. \end{cases}$$

Доведіть, що породжена описаним алгоритмом послідовність (x_n) сильно збігається до точки $z_0 = P_{F(T)} x_0$.

¹²Оператор $A : H \rightarrow H$ називаємо монотонним, якщо

$$(Ax - Ay, x - y) \geq 0 \quad \forall x, y \in H.$$

Задача 2.46 (hybrid method, [25]). Нехай $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H , $T : C \rightarrow H$ — нерозтягуючий оператор. Припустимо, що $F(T) \neq \emptyset$. Розглянемо алгоритм, що для заданого $x_0 = x \in C$ генерує послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою схеми:

$$\begin{cases} x_1 \in C, & C_1 = C, \\ y_n = Tx_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0. \end{cases}$$

Доведіть, що породжена описаним алгоритмом послідовність (x_n) сильно збігається до точки $z_0 = P_{F(T)}x_0$.

Література

- [1] Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз. Ч. 1. Київ: Вища школа, 1992. 495 с.
- [2] Чарін В.С. Лінійна алгебра. Київ: Техніка, 2005. 416 с.
- [3] Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Т. Функціональний аналіз. Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2014. 559 с.
- [4] Покутний О.О., Семенов В.В. Теорія операторних рівнянь (додаткові розділи). Київ: ВПЦ «Київський університет», 2017. 137 с.
- [5] Семенов В.В. Варіаційні нерівності: теорія та алгоритми. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2021. 167 с.
- [6] Goebel K., Kirk W.A. Topics in metric fixed point theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 244 p.
- [7] Bauschke H.H., Combettes P.L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Berlin, Heidelberg, NY: Springer, 2011. 408 p.
- [8] Ryu E.K., Yin W. Large-Scale Convex Optimization. Algorithms and Analysis via Monotone Operators. Cambridge: Cambridge University Press, 2023. 303 p.
- [9] Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. Bull. Amer. Math. Soc. 1967. 73. P. 591–597.
- [10] Browder F.E. Fixed-point theorems for noncompact mapping in Hilbert space. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1965. Vol. 53. P. 1272–1276.
- [11] Browder F.E. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space. Proc. Natl. Acad. Sci. 1965. 54. P. 1041–1044.
- [12] Kirk W.A. A fixed point theorem for mappings which do not increase distances. Amer. Math. Monthly. 1965. 72. P. 1004–1006.

- [13] Göhde D. Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung. *Math. Nachr.* 1965. 30. P. 251–258.
- [14] Ray W.O. The fixed point property and unbounded sets in Hilbert space. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1980. Vol. 258. N. 2. P. 531–537.
- [15] Browder F.E. Convergence of approximants of fixed points of nonexpansive non-linear mappings in Banach spaces. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1967. Vol. 24. P. 82–90.
- [16] Xu H.K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.* 2004. Vol. 298. P. 279–291.
- [17] Krasnosel'skii M.A. Two remarks on the method of successive approximations. *Uspekhi Mat. Nauk.* 1955. Volume 10. Issue 1(63). P. 123–127.
- [18] Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. Vol. 73. P. 957–961.
- [19] Lions P.-L. Approximation de points fixes de contractions. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B.* 1977. 284. P. A1357–A1359.
- [20] Wittmann R. Approximation of fixed points of nonexpansive mappings. *Arch. Math.* 1992. Vol. 58. P. 486–491.
- [21] Bauschke H.H. The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 1996. Vol. 202. P. 150–159.
- [22] Xu H.K. Iterative algorithms for nonlinear operators. *J. London Math. Soc.* 2002. P. 240–256.
- [23] Lieder F. On the convergence rate of the Halpern-iteration. *Optim Lett.* 2021. Vol. 15. P. 405–418. <https://doi.org/10.1007/s11590-020-01617-9>.
- [24] Nakajo K., Takahashi W. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2003. V. 279. P. 372–379.
- [25] Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2008. V. 341. P. 276–286.

Інформація про автора



Семенов Володимир Вікторович — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, старший науковий співробітник відділу методів негладкої оптимізації Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. Лауреат Державної премії України в галузі освіти (2018), лауреат Національної премії України імені Бориса Патона (2025).

Навчальне видання

СЕМЕНОВ Володимир Вікторович

ЕЛЕМЕНТИ НЕЛІНІЙНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"



Формат 60x84^{1/16}. Обл.-вид. арк. 2,8. Ум. друк. арк. 4.1. Наклад 50. Зам. № 226-11792.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний.
Підписано до друку 28.05.26

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"
Б-р Тараса Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 58; (38044) 239 31 28
e-mail: vpc@knu.ua
<http://vpc.knu.ua>

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02

