ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Лариса Аджубей
Дмитро Затула

Математичний аналіз

Числові ряди. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Ряди Фур'є

Навчальний посібник

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня

ОПП "Програмна інженерія" спеціальності F2 "Інженерія програмного забезпечення"

та ОПП "Інформатика" спеціальності F3 "Комп'ютерні науки"

Київ – 2026

УДК 517(075.8)

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор Володимир Семенов;

доктор фізико-математичних наук, професор Олександр Провотар, завідувач кафедри інтелектуальних програмних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики.

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 17 від 24 червня 2026 р.)

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 13 від 16 червня 2026 р.)

Автори:

кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри обчислювальної математики Лариса Трохимівна Аджубей;

кандидат фізико-математичних наук, доцент, заступник декана факультету комп'ютерних наук та кібернетики, доцент кафедри обчислювальної математики Дмитро Васильович Затула.

Математичний аналіз. Числові ряди. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Ряди Фур'є: навчальний посібник / Л. Т. Аджубей, Д. В. Затула. — Київ, 2026. 72 с.

Навчальний посібник присвячено теорії числових та функціональних рядів. Він охоплює відповідний розділ матеріалу, передбаченого програмою обов'язкової дисципліни "Математичний аналіз" для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня, які навчаються за освітньо-професійною програмою "Програмна інженерія" спеціальності F2 "Інженерія програмного забезпечення" та освітньо-професійною програмою "Інформатика" спеціальності F3 "Комп'ютерні науки".

Видання призначене для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також для всіх, хто цікавиться вивченням математичного аналізу.

© Аджубей Л.Т., Затула Д.В., 2026

Зміст

Передмова **5**

Розділ 1. Числові ряди **7**
1.1 Поняття та властивості числового ряду 7
1.2 Необхідна ознака збіжності ряду 9
1.3 Критерій Коші 10
1.4 Додатні числові ряди 10
1.5 Ряди з членами довільного знаку 15
1.6 Абсолютно та умовно збіжні ряди 16

Розділ 2. Функціональні ряди **21**
2.1 Поняття функціональної послідовності та функціонального ряду 21
2.2 Збіжність функціональних рядів 22
2.3 Рівномірна збіжність функціональної послідовності 23
2.4 Рівномірна збіжність функціональних рядів 26
2.5 Властивості функціональних рядів 30

Розділ 3. Степеневі ряди **35**
3.1 Поняття степеневих рядів та їх збіжність 35
3.2 Функціональні властивості степеневих рядів 38
3.3 Розвинення функцій у степеневі ряди 40

Розділ 4. Ряди Фур'є **45**
4.1 Поняття гармоніки 45
4.2 Ортогональна та ортонормована системи функцій 46
4.3 Ряд Фур'є по ортогональній системі функцій 48
4.4 Ряд Фур'є по тригонометричній системі функцій 49
4.5 Ряди Фур'є для парних і непарних функцій 52

Відповіді та вказівки **61**

Перелік позначень, символів і скорочень **67**

Список використаних джерел **70**

Предметний покажчик **71**

Передмова

Навчальний посібник “Математичний аналіз. Числові ряди. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Ряди Фур’є” підготовлено для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальностей F2 “Інженерія програмного забезпечення” та F3 “Комп’ютерні науки”, які навчаються на факультеті комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Видання призначене для методичної підтримки практичних занять, організації самостійної роботи студентів і систематизації основних понять, методів та алгоритмів розв’язування задач із відповідного розділу дисципліни “Математичний аналіз”.

Курс математичного аналізу є основою фундаментальної математичної підготовки для випускників природничих спеціальностей у класичних університетах.

Дане видання охоплює один із найважливіших розділів математичного аналізу — теорію рядів. Вивчення цієї теми є критично важливим для майбутніх фахівців як з інженерії програмного забезпечення, так і з комп’ютерних наук, оскільки апарат рядів лежить в основі чисельних методів, алгоритмів апроксимації та обробки сигналів.

У цьому посібнику детально розглянуто чотири ключових розділи:

1. Числові ряди: дослідження на збіжність за допомогою ознак порівняння, Д’Аламбера, Коші та ознаки порівняння зі степенем.

2. Функціональні ряди: поняття рівномірної збіжності та методи її перевірки (ознаки Вейєрштрасса, Діріхле, Абеля), а також властивості почленного диференціювання та інтегрування.

3. Степеневі ряди: знаходження області збіжності, розвинення функцій у ряди Тейлора та Маклорена.

4. Ряди Фур’є: представлення періодичних функцій у вигляді тригонометричних рядів, що є базою для гармонічного аналізу.

Кожен розділ містить стислий виклад теорії, достатній для розв’язання задач, типові приклади з детальними поясненнями, завдання для самостійного розв’язування та питання для самоконтролю. Така побудова дає змогу поєднати теоретичну системність із опрацюванням основних методів, а також забезпечує зручний перехід від означень і тверджень до самостійної роботи над задачами. Автори сподіваються, що цей посібник допоможе студентам ефективно опанувати складні концепції математичного аналізу в умовах інтенсивного навчального процесу.

Під час підготовки рукопису інструменти штучного інтелекту використовувалися виключно як допоміжний засіб для мовного редагування, уточнення

стилістики та структурування окремих фрагментів тексту. Усі змістові рішення, формулювання математичних тверджень, добір задач і перевірку коректності матеріалу виконано авторами, які несуть повну відповідальність за якість видання.

Зауваження та побажання можна надсилати електронною поштою: adzhubey@knu.ua, dm.zatula@knu.ua.

Розділ 1. Числові ряди

1.1 Поняття та властивості числового ряду

Розглянемо нескінченну числову послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Складений з її елементів вираз

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

називається ***числовим рядом***, де x_n — загальний член ряду, виражений як функція номера n: $x_n = \dfrac{1}{n}$, $x_n = aq^{n-1}$ тощо. Складемо з елементів ряду такі суми, які називаються ***частковими***:

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1, \\ S_2 &= x_1 + x_2, \\ &\ldots \\ S_n &= x_1 + \ldots + x_n. \end{aligned}$$

Числовий ряд називається ***збіжним***, якщо існує скінченна границя послідовності його часткових сум; ця границя називається ***сумою ряду***:

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

У протилежному випадку ряд називається ***розбіжним***:

$$\nexists \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{або} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

Приклад 1. *Дослідимо на збіжність числовий ряд*

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n + \ldots$$

Запишемо послідовність часткових сум ряду:

$$S_1 = x_1 = 2, \quad S_2 = x_1 + x_2 = 1 + 2 = 3,$$

$$S_3 = x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 2 + 3 = 6,$$

$$\dots$$

$$S_n = x_1 + \dots + x_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{2} = \infty$, то ряд є розбіжним.

Приклад 2. *Дослідимо на збіжність числовий ряд*

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}} + \dots$$

Члени ряда утворюють геометричну прогресію із першим членом $x_1 = \dfrac{2}{3}$ і знаменником $q = \dfrac{1}{2}$. Суму перших n членів геометричної прогресії обчислимо за формулою:

$$S_n = \frac{x_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q} = \frac{x_1 - x_n q}{1 - q} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3 \cdot 2^{n-2}}\right) = \dfrac{4}{3}$, то ряд є збіжним і його сума дорівнює $S = \dfrac{4}{3}$.

Властивості числових рядів

1. Збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ не порушується, якщо всі члени ряду помножити на одне й те саме число $k \neq 0$, причому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} kx_n = k \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

2. Сума (різниця) двох збіжних рядів є збіжним рядом, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ збіжний, то $R_n = S - S_n$ називається ***n-тим залишком ряду***, при цьому $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x_k$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(S - S_n\right) = 0.$

Якщо в ряді $x_1 + x_2 + \ldots + x_p + x_{p+1} + x_{p+2} + \ldots$ відкинути скінченне число перших p членів, то отримаємо ряд $x_{p+1} + x_{p+2} + \ldots$, який збігається або розбігається одночасно з початковим рядом.

Наслідок 1. *При дослідженні ряду на збіжність можна ігнорувати скінченне число його членів.*

1.2 Необхідна ознака збіжності ряду

Необхідна ознака збіжності ряду. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ збіжний, то його n-тий член x_n при необмеженому зростанні n прямує до нуля: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Наслідок 2 (достатня умова розбіжності ряду)**.** *Якщо n-тий член ряду при $n \to \infty$ не прямує до 0, то ряд розбігається.*

Приклад 1. *Дослідимо на збіжність числовий ряд*

$$a - a + a - a + \ldots, \quad \text{де } a \neq 0.$$

Помітимо, що

$$S_n = \begin{cases} 0, & n - \text{парне}; \\ a, & n - \text{непарне}. \end{cases}$$

Тож маємо дві часткові границі послідовності часткових сум ряду.

З іншого боку, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a \neq 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = -a \neq 0$, тобто НЕ виконується необхідна ознака збіжності ряду $\Rightarrow$ ряд є розбіжним.

Приклад 2. *Розглянемо числовий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} = 1 + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{8}{17} + \frac{5}{13} + \ldots + \frac{2n}{n^2+1} + \ldots$$

Визначимо границю загального члена ряду:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = 0.$$

Таким чином, необхідна умова збіжності ряду виконується. Але цього недостатньо, щоб робити кінцевий висновок. Наразі можна стверджувати лише, що ряд *може* збігатися.

Для встановлення факту збіжності чи розбіжності ряду в цьому випадку потрібно застосувати якусь із достатніх умов збіжності (*ознак збіжності*).

1.3 Критерій Коші

Питання про збіжність ряду, за означенням, еквівалентне питанню про збіжність послідовності часткових сум.

Теорема 1 (критерій Коші збіжності числового ряду)**.** *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *збігається* $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists N\colon\ \forall n>N,\ \forall p\in\mathbb{N}\ \Rightarrow\ \left|S_{n+p}-S_n\right|<\varepsilon$, *тобто*

$$\left|x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots+x_{n+p}\right|<\varepsilon.$$

Приклад 1. *Доведемо розбіжність* ***гармонічного ряду*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

По-перше, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, то справджується необхідна умова збіжності ряду. Покажемо за критерієм, що ряд — розбіжний:

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right|>\left(p\cdot\frac{1}{n+p}\right)\Big|_{p=n}=\frac{1}{2},$$

тобто $\exists\,\varepsilon^*=\dfrac{1}{2}\ \forall n\in\mathbb{N},\ \exists\,p=n\ \ \Rightarrow\ \left|S_{n+p}-S_n\right|>\varepsilon^*$.

1.4 Додатні числові ряди

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, всі члени якого є невід'ємними: $a_n\geqslant 0\ \ \forall n\in\mathbb{N}$; $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,\ \ S_{n+1}\geqslant S_n$.

Теорема 2 (критерій збіжності додатнього числового ряду)**.** *Для того, щоб ряд з додатніми членами був збіжним, необхідно і достатньо, щоб послідовність* (S_n) *була обмеженою зверху.*

Розглянемо основні ознаки збіжності додатних числових рядів.

1. Ознака порівняння рядів. Якщо члени ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$

додатні (невід'ємні) і не перевищують відповідних членів збіжного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{1.2}$$

тобто $a_n \leqslant b_n \quad \forall n > N \in \mathbb{N}$, то ряд (1.1) збіжний, а із розбіжності (1.1) випливає розбіжність (1.2).

Приклад 1. *Дослідимо на збіжність ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^n + n^2}}$.

Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{4^n + n^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4^n}} = \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

і при цьому

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^m}}{1 - \frac{1}{2}} \to 1, \quad m \to \infty,$$

то за ознакою порівняння рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^n + n^2}}$ — збіжний ряд.

Приклад 2. *Дослідимо на збіжність ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

і при цьому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (*гармонічний* ряд), то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ теж розбігається.

2. Ознака Д'Аламбера. Нехай всі члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ додатні та $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тоді: ряд є збіжним, якщо $q \in [0, 1)$; розбіжним, якщо $q > 1$.

3. Ознака Коші. Нехай всі члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ додатні та $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тоді: ряд є збіжним, якщо $q \in [0, 1)$; розбіжним, якщо $q > 1$.

Зауваження. Жодна із цих ознак не дає відповіді при $q = 1$.

Приклад 3. *Дослідимо на збіжність ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n!}$.

Запишемо відношення наступного члена ряду до попереднього:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 + 1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2 + 1} = \frac{n^2 + 2n + 2}{(n+1) \cdot (n^2 + 1)} \to 0 < 1, \quad n \to \infty,$$

звідки за ознакою Д'Аламбера робимо висновок, що ряд є збіжним.

Приклад 4. *Дослідимо на збіжність ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n^2-1}{n^2+2}\right)^{2n}$.

Застосуємо ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-1}{n^2+2}\right)^2\to 9=q,\quad n\to\infty.$$

Оскільки $q>1$, то ряд — розбіжний.

Узагальнений гармонічний ряд

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ збігається при $\alpha>1$ і розбігається при $\alpha\leqslant 1$.

Зауваження. Застосування ознаки Д'Аламбера не дає відповіді:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}\to 1,\quad n\to\infty.$$

4. Ознака порівняння зі степенем. Якщо $a_n=O\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$ при $n\to\infty$, то за умови, що $p>1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається, а при $p\leqslant 1$ — розбігається.

Приклад 5. *Дослідимо на збіжність ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\dfrac{n}{5\sqrt[3]{n^8}-2}\right)$.

Скористаємося асимптотичною формулою $\sin t=t+o(t),\quad t\to 0$, та запишемо еквівалентний вираз для n-го члена ряду:

$$a_n=\sin\left(\frac{n}{5\sqrt[3]{n^8}-2}\right)=\frac{n}{5\sqrt[3]{n^8}-2}+o\left(\frac{n}{5\sqrt[3]{n^8}-2}\right)=O\left(\frac{n}{\sqrt[3]{n^8}}\right)=O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)$$

при $n\to\infty$. Оскільки $p=\dfrac{5}{3}>1$, то за ознакою порівняння зі степенем ряд збігається.

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{5\sqrt[3]{n^8}-2}:\dfrac{1}{n^{\frac{5}{3}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{8}{3}}}{5\cdot n^{\frac{8}{3}}-2}=\dfrac{1}{5}\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\quad\Rightarrow\quad a_n=O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)$.

5. Ознака Раабе. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ є строго додатнім та

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

то при $p>1$ ряд — збіжний; при $p<1$ — розбіжний; при $p=1$ ознака відповіді не дає.

6. Ознака Гаусса. Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ при $n\to\infty$ виконується умова

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\alpha+\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

де α, β, $\varepsilon>0$ — сталі, а послідовність $\gamma_n=O(1)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, якщо $\alpha>1$, або $\alpha=1$, $\beta>1$; розбіжний, якщо $\alpha<1$, або $\alpha=1$, $\beta\leqslant 1$.

Приклад 6. *Дослідимо на збіжність ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\,e^n}{n^{n+p}}$, *де* $p>0$.

Перетворимо відношення сусідніх двох членів ряду, використовуючи асимптотичні формули для $\ln(1+t)$ та e^t при $t\to 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}}&=\frac{n!\,e^n\cdot(n+1)^{n+p+1}}{n^{n+p}\cdot(n+1)!\,e^{n+1}}=\frac{1}{e}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}=\\
&=\frac{1}{e}\cdot\exp\left\{(n+p)\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}=\\
&=\frac{1}{e}\cdot\exp\left\{(n+p)\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\right\}=\\
&=\frac{1}{e}\cdot\exp\left\{1+\frac{p}{n}-\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right\}=\exp\left\{\left(p-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right\}=\\
&=1+\frac{p-0{,}5}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)+o\left(\frac{p-0{,}5}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)=\\
&=1+\frac{p-0{,}5}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big),\quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p-0{,}5$. За ознакою Раабе маємо, що ряд збігається при $p>1{,}5$.

Задачі для самостійного розв'язування

Дослідіть на збіжність числові ряди:

1.4.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n-2}$

1.4.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$

1.4.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$

1.4.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$

1.4.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$

1.4.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

1.4.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$

1.4.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^2 n}$

1.4.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

1.4.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

1.4.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

1.4.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

1.4.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n \cdot n!}{n^n}$

1.4.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^{2n}$

1.4.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

1.4.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$

1.4.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)!}{2^n \cdot n!}$

1.4.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(2n-1)!!}$

1.4.19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$

1.4.20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-1)2^n}$

1.4.21 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^3}$

1.4.22 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

1.4.23 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^n\left(\dfrac{1}{n}\right)$

1.4.24 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{e^n}$

1.4.25 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n+3^n}{5^n}$

1.4.26 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-n+1}$

1.4.27 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{n^4+3}$

1.4.28 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 4^n}$

1.4.29 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

1.4.30 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$

1.5 Ряди з членами довільного знаку

Розглянемо ряди, частина членів яких є додатніми, частина — від'ємними, частина дорівнює нулю. Частинний випадок такого ряду — *ряд Лейбніца*, тобто ряд вигляду

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \quad (1.3)$$

де $a_n \geqslant 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3 (Лейбніца)**.** *Якщо модулі членів ряду* (1.3) *монотонно спадають при зростанні n, тобто*

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant \dots,$$

і n-ий член ряду прямує до 0, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд збігається і $0 < S \leqslant a_1$.

Приклад 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \dots$ *є збіжним рядом, оскільки виконуються умови теореми Лейбніца.*

Наслідок 3. *Якщо знакозмінний ряд "підмінити" його частковою сумою, то похибка від його абсолютної величини не перевищує першого з відкинутих членів:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = S_n + (-1)^n \cdot \big(a_{n+1} - a_{n+2} + \dots\big),$$

$$R_n = (-1)^n \cdot \big(a_{n+1} - a_{n+2} + \dots\big), \quad |R_n| \leqslant a_{n+1}.$$

Приклад 2. *Зокрема, для ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ *його 10-та часткова сума*

$$S_{10} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{10}$$

відрізняється від суми ряду на величину

$$|R_{10}| \leqslant \left|\frac{(-1)^{10}}{11}\right| = \frac{1}{11}.$$

Оскільки для збіжності знакозмінного ряду перевірка загальної умови збіжності ряду не є простою ($a_n \to 0,\ S_{n+m} \to 0$), то почнемо з випадків, коли збіжність ряду зводиться до збіжності додатного ряду.

1.6 Абсолютно та умовно збіжні ряди

Означення* 1.6.1.** *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *називається* ***абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Загалом, при дослідженні рядів на абсолютну збіжність використовуємо ознаки збіжності для рядів з невід'ємними членами.

Теорема 4. *Із збіжності ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *випливає збіжність* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Означення* 1.6.2.** *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *називається* ***умовно збіжним*, якщо цей ряд збіжний, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *— розбіжний.*

Приклад 1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ *є умовно збіжним (виконуються умови теореми Лейбніца), але не є абсолютно збіжним, бо ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

(як гармонічний ряд).

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots, \tag{1.4}$$

де (a_n) та (b_n) — дві послідовності дійсних чисел.

Ознака Абеля. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається, а числа a_n утворюють монотонну і обмежену послідовність ($\exists M \in \mathbb{R} :\ |a_n| \leqslant M \ \ \forall n \in \mathbb{N}$), то ряд (1.4) — збіжний.

Ознака Діріхле–Абеля. Якщо часткові суми ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ обмежені, тобто $\exists M \in \mathbb{R} :\ |S_n| = \left| \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \right| \leqslant M \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, а числа a_n утворюють монотонну послідовність, що прямує до 0: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд (1.4) — збіжний.

Зауваження. *Ознака Лейбніца* є частковим випадком цієї ознаки при $b_n = (-1)^{n+1}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ має обмежену послідовність часткових сум.

Приклад 2. *Дослідимо на збіжність ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(\lambda n)}{n}$, *де* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Збіжність ряду очевидна при $\lambda \in \{\pi m \,|\, m \in \mathbb{Z}\}$.

Позначимо $a_n = \dfrac{1}{n}$ та $b_n = \sin(\lambda n)$. У такому разі послідовність (a_n) — монотонно спадна і нескінченно мала, бо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Обчислимо часткові суми ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda n)$, використовуючи відому формулу із методу математичної індукції:

$$|S_n| = |\sin\lambda + \sin 2\lambda + \dots + \sin n\lambda| = \left|\frac{\sin\frac{(n+1)\lambda}{2} \cdot \sin\frac{n\lambda}{2}}{\sin\frac{\lambda}{2}}\right| < \frac{1}{\left|\sin\frac{\lambda}{2}\right|}.$$

Таким чином, послідовність (S_n) є обмеженою. Отже, за ознакою Діріхле–Абеля ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(\lambda n)}{n}$ є збіжним при $\lambda \notin \{2\pi m \,|\, m \in \mathbb{Z}\}$.

Приклад 3. *Дослідимо на збіжність ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n}$, *де* $x \in \mathbb{R}$.

Використаємо рівність $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x = 2\sin\dfrac{x}{2} \cdot \cos(nx)$ для обчислення суми виразів по $n = \overline{1,k}$:

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{k}\cos nx = \sum_{n=1}^{k}\left(\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)x - \sin\Big(n-\frac{1}{2}\Big)x\right) =$$

$$= \sin\Big(k+\frac{1}{2}\Big)x - \sin\Big(k-\frac{1}{2}\Big)x + \sin\Big(k-\frac{1}{2}\Big)x - \sin\Big(k-\frac{3}{2}\Big)x +$$

$$+ \sin\frac{7}{2}x - \sin\frac{5}{2}x + \sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x + \sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{x}{2} = \sin\Big(k+\frac{1}{2}\Big)x - \sin\frac{x}{2}.$$

Таким чином, $\forall x \notin A = \{2\pi m \,|\, m \in \mathbb{Z}\}$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| = \left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| = \left|\frac{2\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}.$$

Отже, ряд збігається для $\forall x \notin A$ за ознакою Діріхле–Абеля.

Якщо ж $x \in A$, то ряд перетворюється у гармонічний і є розбіжним.

Приклад 4. *Дослідимо на збіжність ряд* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin(\lambda n)}{\ln n}\cdot\cos\dfrac{\pi}{n}$, *де* $\lambda\in\mathbb{R}$.

Позначимо $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$ та $b_n = \sin(\lambda n)$. Послідовність $(a_n)_{n\geqslant 2}$ — монотонно спадна і $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n} = 0$.

Також часткові суми ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin(\lambda n)$ є обмеженими, тож за ознакою Діріхле–Абеля ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin(\lambda n)}{\ln n}$ є збіжним.

Послідовність $\left(\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$ — монотонно зростаюча і обмежена, бо

$$\left|\cos\frac{\pi}{n}\right| < 1 \quad \forall n \geqslant 2.$$

Таким чином, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin(\lambda n)}{\ln n}\cdot\cos\dfrac{\pi}{n}$ збігається за ознакою Абеля.

Задачі для самостійного розв'язування

Дослідіть ряди на абсолютну та умовну збіжність.

1.6.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+2}$

1.6.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$

1.6.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+n}$

1.6.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$

1.6.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{3n-1}$

1.6.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 3^n}$

1.6.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

1.6.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin(n)}{n^2}$

1.6.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

1.6.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$

1.6.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(n+1)}{n^2+1}$

1.6.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\pi)}{n!}$

1.6.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+10}$

1.6.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$

1.6.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

1.6.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

1.6.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^n}{n!}$

1.6.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{e^n}$

1.6.19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{n}$

1.6.20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1}$

Питання для самоконтролю

1. Що називається числовим рядом? Сформулюйте означення загального члена ряду.

2. Дайте означення n-тої часткової суми числового ряду. Що розуміють під збіжністю та сумою числового ряду?

3. Який числовий ряд називається розбіжним? Наведіть приклади відомих вам збіжних та розбіжних рядів.

4. Сформулюйте необхідну ознаку збіжності числового ряду. Чи є вона достатньою? Наведіть контрприклад.

5. Сформулюйте достатню умову розбіжності ряду. Який висновок можна зробити, якщо границя загального члена ряду не існує або не дорівнює нулю?

6. Що таке залишок числового ряду? Як пов'язані між собою збіжність і сума самого ряду та збіжність і сума його залишку?

7. Перелічіть та охарактеризуйте основні лінійні властивості збіжних числових рядів. Як впливає відкидання або зміна скінченної кількості членів на збіжність ряду?

8. Сформулюйте критерій Коші збіжності числового ряду. Яким чином можна сформулювати зворотнє до нього твердження?

9. Які ряди називаються додатними? Яку специфічну властивість має послідовність часткових сум такого ряду?

10. Сформулюйте ознаку порівняння для додатних рядів. На чому ґрунтується її застосування?

11. Який ряд називається узагальненим гармонічним рядом? За якої умови він є збіжним, а за якої — розбіжним?

12. Сформулюйте ознаку Д'Аламбера для додатних рядів. У якому випадку ця ознака не дає відповіді про збіжність?

13. Сформулюйте ознаку Коші. Який зв'язок існує між областями застосування ознак Д'Аламбера та Коші?

14. Сформулюйте ознаку Раабе збіжності додатних рядів. У яких випадках її застосовують замість ознак Д'Аламбера чи Коші?

15. Сформулюйте ознаку Гаусса. Для якого класу рядів вона є найбільш ефективним інструментом дослідження збіжності?

16. Які ряди називаються знакозмінними? Наведіть приклади.

17. Сформулюйте теорему Лейбніца для знакозмінних рядів. Які властивості має сума ряду Лейбніца?

18. Як оцінюється похибка знакозмінного ряду при заміні його повної суми n-тою частковою сумою?

19. Дайте означення абсолютної та умовної збіжності числового ряду. Який зв'язок існує між абсолютною збіжністю та звичайною збіжністю ряду?

20. Сформулюйте ознаки Абеля та Діріхле–Абеля збіжності знакозмінних рядів.

Розділ 2. Функціональні ряди

2.1 Поняття функціональної послідовності та функціонального ряду

Розглянемо послідовність

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots, \tag{2.5}$$

елементами якої є функції від змінної x. Границю послідовності $\forall x \in X$, $X \subset \mathbb{R}$, будемо називати ***граничною функцією*** $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Відображення $\Phi : \mathbb{N} \to F$, де F — множина всіх функцій, називається ***функціональною послідовністю (ФП)***. Значення відображення $\Phi(n) = f_n$ називається ***n-им членом*** послідовності.

Будемо використовувати позначення функціональної послідовності: (f_n).

Функціональна послідовність (f_n) називається ***збіжною*** в т. $x_0 \in X$, якщо в цій точці збіжною є відповідна числова послідовність $\{f_n(x_0)\}$.

Наслідок 4 (критерій Коші збіжності функціональної послідовності)**.** *Функціональна послідовність (f_n) збігається у довільній точці $x_0 \in X$* $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ \ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, N\big(\varepsilon, x_0\big) \in \mathbb{N} :\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \ \Rightarrow\ |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon.$$

Функціональна послідовність (f_n) називається ***поточково збіжною*** до функції f, якщо $\forall x \in X$: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Позначення: $f_n \to f$.

У випадках, коли важливим є сам факт поточкової збіжності ФП, а не гранична функція, будемо це позначати як $f_n \to$

Приклад 1. *Дослідимо поточкову збіжність послідовності $f_n(x) = x^n$ на відрізку $[0, 1]$.*

- Якщо $x \in [0, 1)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

- Якщо $x = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$.

Отже, дана послідовність збігається поточково до розривної функції:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Розглянемо також ряд, членами якого є функції:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \tag{2.6}$$

Функціональна послідовність (S_n) називається ***функціональним рядом (ФР)***, якщо існує така функціональна послідовність (f_n), для якої виконується умова:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in X \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Такий функціональний ряд будемо позначати $\sum f_n$. Значення S_n називається ***частковою сумою*** ФР $\sum f_n$, а функція f_n — ***загальним членом*** (n-им членом) функціонального ряду.

Приклад 2. $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \ldots + e^{-nx} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$

2.2 Збіжність функціональних рядів

Розглянемо функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Припускаючи збіжність, введемо позначення його суми $S(x)$, часткової суми $S_n(x)$ і його залишку після n-го члена

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = S(x) - S_n(x).$$

При цьому $\forall x$: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ — ***збіжний*** в т. $x_0 \in X$, якщо збіжний в цій точці відповідний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ або $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$, і ***абсолютно збіжний*** в т. x_0, якщо при $x = x_0$ збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

Поточковою сумою ФР $\sum f_n$ на множині X називається поточкова границя його часткових сум, якщо вона існує. ФР називається ***поточково збіжним*** на X, якщо його поточкова сума існує та скінченна в кожній точці множини X.

Якщо ФР збігається до деякої функції S, то будемо це позначати $\sum f_n \to S$. Якщо ж важливим є сам факт збіжності ряду, то позначатимемо це так: $\sum f_n \to$. Поточкову суму ряду, якщо вона існує, будемо позначати $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Множина точок $x \in X$, в кожній з яких $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ є збіжним, становить ***область збіжності*** функціонального ряду.

Приклад 1. *Визначимо область збіжності функціонального ряду*

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}.$$

Застосуємо ознаку Коші до ряду, складеного із абсолютних величин членів вихідного ряду:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|x^n|}} = \frac{1}{|x|} < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| > 1.$$

Таким чином, область абсолютної збіжності ряду включає в себе промені $(-\infty, -1)$ та $(1, +\infty)$. І навпаки, якщо $q > 1 \;\Leftrightarrow\; x \in (-1, 1)$, то ряд — розбіжний. Також за необхідною умовою, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = \infty \;\; \forall x \in (-1, 1)$.

Залишається питання стосовно збіжності (умовної/абсолютної) ряду при $x = \pm 1$ (ознака Коші не дає відповіді при $q = 1$).

- При $x = 1$ маємо числовий ряд $1 + 1 + 1 + \ldots$, який є розбіжним (виконується достатня умова розбіжності).
- При $x = -1$ маємо $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, який також є розбіжним, бо $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$.

2.3 Рівномірна збіжність функціональної послідовності

Для функції $f\colon X \to \mathbb{R}$ число $\sup\limits_{x\in D_f} |f(x)| \in \overline{\mathbb{R}}$ називається ***рівномірною нормою*** функції f на множині D_f та позначається $\|f\|$.

Функціональна послідовність (f_n) називається ***рівномірно збіжною*** до функції f на множині X, якщо $\|f_n - f\| \to 0$ при $n \to \infty$. При цьому функція f називається ***рівномірною границею*** ФП (f_n).

Позначення: $f_n \rightrightarrows f$, або $f_n \rightrightarrows$ (якщо важливий сам факт рівномірної збіжності, а не рівномірна границя).

Теорема 5 (зв'язок рівномірної та поточкової збіжності ФП)**.** *Якщо $f_n \rightrightarrows f$ на множині X, то на цій же множині X також $f_n \to f$.*

Наслідок 5 (єдиність рівномірної границі)**.** *Якщо $f_n \rightrightarrows$ на множині X, то рівномірна границя ФП (f_n) єдина.*

Можна також дати означення рівномірної збіжності ФП в іншому формулюванні.

Послідовність функцій $\{f_n(x)\}$ називається *рівномірно збіжною* до $f(x)$ на множині X, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall n \geqslant N_\varepsilon$ і для всіх $x \in X$ одночасно виконується нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ або $\sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Тут суттєво, що N_ε не залежить від x.

ФП (f_n) називається ***рівномірно фундаментальною***, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \ \forall n \geqslant N_\varepsilon \ \forall p \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \|f_{n+p} - f_n\| < \varepsilon.$$

Теорема 6 (критерій Коші для ФП)**.** *ФП (f_n) рівномірно збіжна тоді і тільки тоді, коли вона є рівномірно фундаментальною.*

Приклад 1. *Дослідимо на рівномірну збіжність функціональну послідовність*

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

1. По-перше, визначимо функцію f, до якої послідовність (f_n) збігається поточково:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{1 + n^2 x^2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, $f_n \to f$, де $f(x) \equiv 0$.

2. Покажемо, що функція f також є рівномірною границею (f_n). Оскільки

$$f_n'(x) = \frac{1 + n^2 x^2 - 2n^2 x \cdot x}{(1 + n^2 x^2)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \frac{1}{n},$$

то функція $f_n(x)$ монотонно зростає на проміжку $\left(0, \frac{1}{n}\right)$, а на $\left(\frac{1}{n}, +\infty\right)$ — спадає. Таким чином, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)\colon \ \forall n \geqslant N$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n} < \varepsilon, \ \text{ де } \quad N = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right].$$

Приклад 2. *Дослідимо на рівномірну збіжність функціональну послідовність*

$$f_n(x) = x^n, \ \ x \in [0,1).$$

1. Визначимо функцію f, до якої послідовність (f_n) збігається поточково:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad \forall x \in [0,1).$$

Таким чином, $f_n \to f$, де $f(x) \equiv 0$.

2. Покажемо, що функція f НЕ є рівномірною границею (f_n). Оберемо $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$. Тоді $\exists \varepsilon^* > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{x\in[0,1)} \left|f_n(x) - f(x)\right| \geqslant \left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| = \frac{1}{2} = \varepsilon^*.$$

Таким чином, $f_n \not\rightrightarrows f$ і загалом послідовність (f_n) не є рівномірно збіжною.

Задачі для самостійного розв'язування

Для заданих послідовностей $(f_n(x))$ знайдіть граничну функцію $f(x)$ та дослідіть на рівномірну збіжність на вказаній множині X.

2.3.1 $f_n(x) = x^n$, $X_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $X_2 = [0,1]$

2.3.2 $f_n(x) = \dfrac{n^2x}{1+n^2x^2}$, $X = [0,1]$

2.3.3 $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $X_1 = [0,1]$, $X_2 = \mathbb{R}$

2.3.4 $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $X = [0,1]$

2.3.5 $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$, $X = [2, +\infty)$

2.3.6 $f_n(x) = xe^{-nx}$, $X = [0, +\infty)$

2.3.7 $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $X_1 = [1, +\infty)$, $X_2 = \mathbb{R}$

2.3.8 $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$, $X = \mathbb{R}$

2.3.9 $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $X_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $X_2 = [0, 2]$

2.3.10 $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$, $X = [0, 1]$

2.3.11 $f_n(x) = \cos^n x$, $X = [0, \frac{\pi}{4}]$

2.3.12 $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$, $X = (0, +\infty)$

2.3.13 $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$, $X = [0, 1]$

2.3.14 $f_n(x) = \dfrac{x}{n}\, e^{-\frac{x}{n}}$, $X = [0, +\infty)$

2.4 Рівномірна збіжність функціональних рядів

ФР $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ називається ***рівномірно збіжним***, якщо послідовність його часткових сум (S_n) рівномірно збігається, тобто $S_n(x) \Rightarrow S(x),\ x \in X$, а саме:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ \ \Rightarrow\ \ \big|S_n(x) - S(x)\big| < \varepsilon\quad \forall x \in X\ \text{ одночасно,}$$

або $\sup\limits_{x \in X} \big|S_n(x) - S(x)\big| < \varepsilon$, або $r_n(x) = S(x) - S_n(x) \Rightarrow 0\quad \forall x \in X$.

ФР $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ задовольняє ***рівномірну умову Коші***, якщо послідовність його часткових сум (S_n) є рівномірно фундаментальною, тобто

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N_\varepsilon\colon\ \forall n \geqslant N_\varepsilon\ \ \forall p \in \mathbb{N}\quad \Rightarrow\quad \big\|S_{n+p}(x) - S_n(x)\big\| < \varepsilon\quad \forall x \in X.$$

Теорема 7 (критерій Коші для ФР)**.** *ФР $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ рівномірно збіжний тоді і тільки тоді, коли він задовольняє рівномірну умову Коші.*

Зауваження. Критерій є простим переформулюванням теореми для послідовностей.

Приклад 1. *Дослідимо на рівномірну збіжність функціональний ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((n-1)x+1)\cdot(nx+1)}, \quad x \in (0,+\infty).$$

За методом невизначених коефіцієнтів,

$$f_n(x) = \frac{1}{((n-1)x+1)\cdot(nx+1)} = \frac{A(x)}{(n-1)x+1} + \frac{B(x)}{nx+1}.$$

Після визначення коефіцієнтів $A(x)$ та $B(x)$ можна спростити вигляд часткових сум ряду:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{((k-1)x+1)\cdot(kx+1)} = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\left(1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+1} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,x+1} - \frac{1}{nx+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\left(1 - \frac{1}{nx+1}\right).$$

Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{x}.$$

Отже, $S(x) = \dfrac{1}{x}$. Покажемо, що ряд НЕ є рівномірно збіжним до своєї суми $S(x)$. Обираючи $x_n = \dfrac{1}{n} \in (0,+\infty)$, маємо, що $\exists\,\varepsilon^* > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\big|S_n(x_n) - S(x_n)\big| = \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n(nx_n+1)} - \frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{x_n(nx_n+1)} = \frac{n}{2} \geqslant \frac{1}{2} =: \varepsilon^*.$$

Таким чином, ряд не є рівномірно збіжним (за означенням).

Розглянемо основні ознаки рівномірної збіжності функціональних рядів.

Ознака Вейєрштрасса. Якщо для функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ можна вказати такий збіжний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, що $\forall n \geqslant n_0 \;\; \forall x \in X$: $\big|f_n(x)\big| \leqslant a_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається абсолютно і рівномірно на X.

При цьому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називають ***мажоруючим*** для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Приклад 2. *Дослідимо на рівномірну збіжність функціональний ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Оскільки

$$\big|f_n(x)\big| = \frac{1}{(n+x)^2} < \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

і при цьому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ є збіжним, то за ознакою Вейєрштрасса вихідний ряд збігається абсолютно і рівномірно на множині $(0, +\infty)$.

Приклад 3. *Дослідимо на абсолютну і рівномірну збіжність функціональний ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2 x) \cdot \cos(\pi n x)}{n\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $\big|\operatorname{arctg}(n^2 x)\big| < \dfrac{\pi}{2}$ і $|\cos(\pi n x)| \leqslant 1$ для довільних $x \in \mathbb{R}$ та $n \in \mathbb{N}$, то

$$\big|f_n(x)\big| = \frac{\big|\operatorname{arctg}(n^2 x) \cdot \cos(\pi n x)\big|}{n\sqrt{n}} < \frac{\pi}{2n^{\frac{3}{2}}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Із збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ випливає абсолютна і рівномірна збіжність на $X = \mathbb{R}$ ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ за ознакою Вейєрштрасса.

Ознака Абеля рівномірної збіжності ФР. Нехай $\forall x \in X$ послідовність $\big(f_n(x)\big)$ — монотонна. Якщо ФР $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \Rightarrow$ і $\big\|f_n\big\| = O(1)$ при $n \to \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\varphi_n(x) \Rightarrow$ на X.

Ознака Діріхле рівномірної збіжності ФР. Нехай $\forall x \in X$ послідовність $\big(f_n(x)\big)$ — монотонна. Якщо $\|f_n\| = o(1)$ і $\left\|\sum\limits_{k=1}^{n} h_k\right\| = O(1)$ при $n \to \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, h_n(x) \Rightarrow$ на X.

Приклад 4. *Дослідимо на рівномірну збіжність функціональний ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln n + |x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Позначимо $f_n(x) = \dfrac{1}{\ln n + |x|}$ та $h_n(x) = \sin(nx)$. Оскільки за ММІ:

$$|S_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} h_k(x) \right| = \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$$

для довільних $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi m \,|\, m \in \mathbb{Z}\}$ та $n \in \mathbb{N}$, то $\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} h_k \right\| = O(1)$ при $n \to \infty$.

Також послідовність $(f_n(x))$ є спадною (по n) для довільного $x \in \mathbb{R}$. При цьому $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Крім поточкової, присутня й рівномірна збіжність цієї послідовності до $f \equiv 0$ на множині $\mathbb{R}$, бо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, N(\varepsilon)$: $\forall n \geqslant N$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n(x) - f(x) \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ln n + |x|} = \frac{1}{\ln n} < \varepsilon, \ \text{ де } \quad N = \left[e^{\frac{1}{\varepsilon}} \right].$$

Таким чином, $\|f_n\| = o(1)$ для довільного $x \in \mathbb{R}$. Тому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, h_n(x) \ \Rightarrow$ на $\mathbb{R}$ за ознакою Діріхле.

Задачі для самостійного розв'язування

Визначте область збіжності (2.5.1–2.5.10) та дослідіть на рівномірну збіжність (2.5.11–2.5.20).

2.4.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n \cdot 2^n}$

2.4.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$

2.4.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$

2.4.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{e^{nx}}$

2.4.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$

2.4.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+x^n}$

2.4.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{x^n}$

2.4.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$

2.4.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$

2.4.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x(x+n)}{n} \right)^n$

2.4.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$

2.4.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, x \in [-1,1]$

2.4.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$

2.4.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$

2.4.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}$

2.4.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{1+n^4x^2}$

2.4.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^3}$

2.4.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{x^2+n^4}$

2.4.19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(nx)}{n\sqrt{n}}$

2.4.20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right),\ x \in [-1,1]$

2.5 Властивості функціональних рядів

Теорема 8 (про неперервність суми ФР). *Нехай функції $f_n(x)$ визначені на $X=[a,b]$ і всі є неперервними в деякій точці $x_0 \in [a,b]$. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається рівномірно на X, то і сума ряду $S(x)$ в точці x_0 також буде неперервною.*

Теорема 9 (Діні). *Нехай члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ є неперервними і невід'ємними на всьому проміжку $X=[a,b]$ $\big(f_n(x) \in C([a,b]),\ f_n(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a,b]\big)$. Якщо ряд має суму $S(x)$, неперервну на X, то він збігається рівномірно, тобто якщо $S_n(x) \to S(x)$, то $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, $n \to \infty$. Це випадок, коли рівномірна збіжність є необхідною умовою.*

Теорема 10 (про почленне інтегрування ФР). *Якщо $f_n(x)$, $n=1,2,3...$, неперервні на $X=[a,b]$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається рівномірно: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$, то інтеграл від $S(x)$ представляється так:*

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)\,dx + \ldots$$

Теорема 11 (про почленне диференціювання ФР). *Нехай $f_n(x)$, $n=1,2,3...$, визначені на $X=[a,b]$ і мають неперервні похідні $f_n'(x)$ на X. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається на X, а ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) + \ldots,$$

збігається рівномірно, то і сума ряду $S(x)$ має на X похідну, причому

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Приклад 1. *Дослідимо можливість застосування теореми про почленне диференціювання до функціонального ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Похідні членів ФР $\quad f_n'(x) = -\dfrac{\sin(nx)}{n} \in C(\mathbb{R})$.

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається абсолютно на $X = \mathbb{R}$ за ознакою Вейєрштрасса.

3) Для ряду $\Big(- \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \Big)$ позначимо $w_n(x) = \dfrac{1}{n}$ та $h_n(x) = \sin(nx)$.

Зрозуміло, що $\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} h_k \right\| = O(1)$ при $n \to \infty$.

Послідовність $(w_n(x))$ є спадною (по n) для $\forall x \in \mathbb{R}$, а також очевидно, що вона є рівномірно збіжною до функції $w \equiv 0$. Тож $\|w_n\| = o(1) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Тому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n(x)\, h_n(x) \ \Rightarrow$ на $\mathbb{R}$ за ознакою Діріхле. Отже, почленне диференціювання вихідного ряду є законним.

Приклад 2. *Дослідимо можливість застосування теореми про почленне диференціювання до функціонального ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Розглянемо ряд із похідних: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{x^2}{n^4}} \cdot \dfrac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^4 + x^2}$,

Оскільки $\dfrac{n^2}{n^4 + x^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ збіжний за ознакою Вейєрштрасса, абсолютно і рівномірно, то почленне диференціювання початкового ряду є законним.

Задачі для самостійного розв'язування

Дослідити можливість почленного інтегрування ряду (2.6.1–2.6.6) або почленного диференціювання ряду (2.6.7–2.6.10) на множині A:

2.5.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n-1}),\ A = [0,1]$

2.5.2 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n\sqrt{1+nx}},\ A = [0,1]$

2.5.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)},\ A = [0,1]$

2.5.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n,\ A = [0,1]$

2.5.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n},\ A = [-1,1)$

2.5.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos^2(nx)}{n(n+1)},\ A = [0,2\pi]$

2.5.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n^3},\ A = \mathbb{R}$

2.5.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2\left(\dfrac{n}{x}\right),\ A = [0,2]$

2.5.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+x^2},\ A = \mathbb{R}$

2.5.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right),\ A = \mathbb{R}^+$

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення функціональної послідовності та функціонального ряду. Наведіть приклади.
2. Що розуміють під областю збіжності та областю абсолютної збіжності функціонального ряду? Як вони пов'язані зі збіжністю відповідних числових рядів?
3. Сформулюйте означення поточкової збіжності функціональної послідовності та функціонального ряду на множині X.

4. Сформулюйте означення рівномірної збіжності функціональної послідовності на множині X у термінах «$\varepsilon - N$». У чому полягає відмінність між поточковою та рівномірною збіжністю?

5. Опишіть геометричний зміст рівномірної збіжності функціональної послідовності (ε-смуга навколо граничної функції).

6. Дайте означення рівномірної збіжності функціонального ряду на множині X. Яким чином можна його сформулювати через послідовність часткових сум ряду?

7. Сформулюйте критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності та функціонального ряду.

8. Яка необхідна ознака рівномірної збіжності функціонального ряду? Наведіть приклад, який показує, що прямування загального члена ряду до нуля не гарантує рівномірної збіжності.

9. Сформулюйте мажорантну ознаку Вейєрштрасса абсолютної та рівномірної збіжності функціонального ряду.

10. Наведіть приклад функціонального ряду, який є рівномірно збіжним на певній множині, але до якого не можна застосувати ознаку Вейєрштрасса.

11. Сформулюйте ознаку Діріхле рівномірної збіжності функціонального ряду вигляду $\sum a_n(x)b_n(x)$. Які умови накладаються на кожну з послідовностей функцій?

12. Сформулюйте ознаку Абеля рівномірної збіжності функціонального ряду. Порівняйте умови її застосування з умовами ознаки Діріхле.

13. Сформулюйте теорему Діні про рівномірну збіжність монотонної послідовності функцій. Які вимоги накладаються на члени ряду?

14. Сформулюйте теорему про неперервність суми функціонального ряду. За якої умови сума ряду неперервних функцій гарантовано буде неперервною функцією на множині?

15. Наведіть приклад, який демонструє, що сума ряду неперервних функцій може бути розривною, якщо збіжність ряду є лише поточковою, але не рівномірною.

16. Сформулюйте теорему про почленне інтегрування функціонального ряду. За яких умов інтеграл від суми ряду дорівнює сумі інтегралів від його членів?

17. Сформулюйте теорему про почленне диференціювання функціонального ряду. Які вимоги висуваються до початкового ряду та до ряду, складеного з похідних його членів?

18. Поясніть практичне та обчислювальне значення теорем про почленне інтегрування та диференціювання функціональних рядів для математичного аналізу та прикладних задач.

Розділ 3. Степеневі ряди

3.1 Поняття степеневих рядів та їх збіжність

Степеневий ряд — це функціональний ряд, а саме нескінченний многочлен

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Більш загальний вигляд $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$, де x_0 — деяке фіксоване число. При різних значеннях змінної x отримаємо різні числові ряди, які є збіжними або розбіжними. Особливий інтерес має множина значень x, при яких ряд збігається. Ця множина називається ***областю збіжності*** степеневого ряду.

Теорема 12 (Абеля)**.** *Якщо степеневий ряд збіжний в точці $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для всіх x, для яких $|x| < |x_0|$; якщо ряд розбіжний при $x = x_1$, то він розбіжний $\forall x\colon\ |x| > |x_1|$.*

Зауваження. При $x = x_0$ збігаються всі степеневі ряди. Також є ряди, які не збігаються при жодному іншому значенні x.

Приклад 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$. *Розглянемо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_nx^n|$. *За ознакою Д'Аламбера:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!}|x| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\cdot|x| < 1$$

лише при $x = 0$, тож вона є єдиною точкою збіжності ряду.

Приклад 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$. *Аналогічно для ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_nx^n|$ *за ознакою Д'Аламбера:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_nx^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}|x|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0<1$$

для всіх $x\in\mathbb{R}$, тому областю збіжності ряду є вся числова вісь.

Інтервалом збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ називається такий інтервал $(-R,R)$, що $\forall x\in(-R,R)$ ряд збігається абсолютно, а для точок x: $|x|>R$, ряд розбігається. При цьому число $R\in[0,+\infty]$ називається ***радіусом збіжності*** ряду.

При $R=0$ ряд є всюди розбіжним, а область його збіжності складається з однієї точки $x=0$.

При $R=+\infty$ ряд є абсолютно збіжним на всій числовій вісі.

Для ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ інтервал збіжності (x_0-R,x_0+R) є симетричним відносно точки $x=x_0$.

<u>*Область збіжності*</u> степеневого ряду складається з його інтервалу збіжности і, можливо, граничних точок цього інтервалу. Дослідити степеневий ряд на збіжність означає знайти його інтервал збіжності і встановити поведінку ряду у граничних точках.

Розглянемо формули для визначення радіуса збіжності степеневого ряду.

Перша формула Коші–Адамара

Якщо для степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ існує $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\neq0$, то $R=\dfrac{1}{L}$. Таким чином,

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

Дійсно, застосовуючи ознаку Д'Аламбера до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_nx^n\right|$, маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|=L|x|<1,$$

тож ряд збіжний абсолютно при $|x|<\dfrac{1}{L}$ і $R=\dfrac{1}{L}$.

Якщо $L = 0$, то $R = \infty$ і ряд збігається на всій числовій вісі.

Друга формула Коші–Адамара

Скористаємось ознакою Коші, досліджуючи на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$. Для цього розглянемо послідовність

$$\rho_1 = |a_1|,\ \rho_2 = \sqrt{|a_1|},\ \ldots,\ \rho_n = \sqrt[n]{|a_n|},\ \ldots$$

Позначаючи найбільшу границю як $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \rho_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \sqrt[n]{|a_n|}$, маємо, що

$$R = \frac{1}{\rho}.$$

Приклад 3. *Визначимо область збіжності степеневого ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Згідно із першою формулою Коші–Адамара,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad R = 1.$$

Таким чином, область абсолютної збіжності ряду включає в себе інтервал $(-1, 1)$, а при $|x| > 1$ ряд є розбіжним.

Залишається дослідити збіжність (умовну/абсолютну) степеневого ряду на кінцях інтервалу, тобто коли $x = \pm 1$.

При $x = 1$ маємо гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який є розбіжним.

При $x = -1$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, який є умовно збіжним за ознакою Лейбніца, бо $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ — монотонно спадна до нуля послідовність. Таким чином, $D = [-1, 1)$ — *область збіжності*.

Задачі для самостійного розв'язування

Знайти радіус збіжності та дослідити поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності.

3.1.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n \cdot 5^n}$

3.1.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n^2}$

3.1.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 x^n}{3^n}$

3.1.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n! x^n}{n^n}$

3.1.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+3)^n}{\sqrt{n}}$

3.1.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{2n-1}$

3.1.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$

3.1.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{2n+1}$

3.1.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

3.1.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^n$

3.1.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n x^n$

3.1.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + (-2)^n}{n} x^n$

3.1.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+5)^n}{n 2^n}$

3.1.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!} x^n$

3.1.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n \ln^2(n+1)}$

3.1.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{2^n \sqrt{n+1}}$

3.1.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n^2+1}}$

3.1.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

3.1.19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$

3.1.20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{\ln(n+1)}$

3.2 Функціональні властивості степеневих рядів

Теорема 13 (про рівномірну збіжність степеневого ряду)**.** *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *збігається на інтервалі* $(-R, R)$*, то він рівномірно збіжний на довільному замкненому проміжку* $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$*.*

Теорема 14 (про неперервність суми степеневого ряду)**.** *Сума степеневого ряду* $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *як функція змінної* x *неперервна на* $(-R, R)$*.*

Наведемо дві основні властивості степеневих рядів.

1. Степеневий ряд можна диференціювати почленно на проміжку його збіжності:

$$\varphi(x) = S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

Інтервал збіжності цього ряду такий же, що й для $S(x)$, тобто $x \in (-R, R)$.

2. Степеневий ряд можна інтегрувати почленно на інтервалі його збіжності ($x \in (-R, R)$), тобто при $a \in (-R, R)$:

$$\int_a^x S(t)\,dt = \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n t^n\,dt.$$

Особливий інтерес має інтегрування степеневого ряду на проміжку $[0, x]$, де $x < R$:

$$\int_0^x S(t)\,dt = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \ldots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}.$$

Знайдіть суми рядів, використовуючи властивості функціональних рядів.

3.2.1 Обчислити суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, $|x| < 1$.

3.2.2 Обчислити суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$, $x \in (-1, 1)$.

3.2.3 Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n$ при $|x| < 1$.

3.2.4 Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ через інтегрування геометричної прогресії.

3.2.5 Обчислити суму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 2^n}$.

3.2.6 Обчислити суму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$.

3.3 Розвинення функцій у степеневі ряди

Функція $f(x)$ може бути розвинена у степеневий ряд, якщо $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається на $(-R, R)$ і $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ для довільного $x \in (-R, R)$.

Теорема 15 (про єдиність розвинення функції у степеневий ряд)**.** *Якщо функція $f(x)$ може бути розвинена у степеневий ряд на $(-R, R)$, то це розвинення єдине і a_n — коефіцієнти Тейлора, а ряд називається рядом Тейлора (Маклорена) для функції $f(x)$.*

Дійсно, нехай $f(x)$ може бути розвинена у степеневий ряд на $(-R, R)$. Тоді його сума, тобто функція $f(x)$, диференційовна. Продиференцюємо ряд n разів:

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)!a_{n+1}x + \ldots, \quad n \in \{0,\, 1,\, 2,\, \ldots\}.$$

При $x = 0$ маємо, що $f'(0) = a_1,\ f''(0) = 2a_2,\ \ldots,\ f^{(n)}(0) = n!a_n$. Таким чином, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ — це коефіцієнти Тейлора, які визначені однозначно.

Наслідок 6. *Для того, щоб функція f могла бути розвинена у степеневий ряд на $(-R, R)$, необхідно, щоб f мала неперервні похідні будь-якого порядку.*

Теорема 16 (критерій розвинення функції у степеневий ряд)**.** *Для того, щоб функція $f(x)$ могла бути розвинена у ряд Маклорена на $(-R, R)$, необхідно та достатньо, щоб залишковий член у формулі Тейлора прямував до 0 на вказаному інтервалі.*

Необхідність:

Нехай $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ — збіжний ряд на $(-R, R)$. Тоді залишок збіжного ряду $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$ є збіжним у кожній точці $x \in (-R, R)$. Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0.$$

Достатність:

Нехай $R_n(x) \to 0$ у точці $x \in (-R, R)$ при $n \to \infty$. Тоді:

$$\big|R_n(x)\big| = f(x) - S_n(x);$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \big(f(x) - R_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} f(x) - 0 = f(x).$$

Зауважимо, що відрізками степеневих рядів є многочлени і тому степеневі ряди – зручний спосіб для наближених обчислень.

Теорема 17 (достатні умови розвинення у степеневий ряд)**.** *Якщо функція $f(x) \in C^\infty(-R, R)$ і всі її похідні обмежені одним і тим же числом: $\big|f^{(k)}(x)\big| \leqslant M,\ k = 1, 2, \dots, n, \dots,$ то має місце розвинення:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Розклади у степеневі ряди основних елементарних функцій:

1. $\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in \mathbb{R};$

2. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R};$

3. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R};$

4. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1];$

5. $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1, 1).$

1. Розглянемо, яким чином отримується розклад синуса. Для цього використаємо достатні умови для розвинення у ряд.

$$f^{(n)}(x) = \sin\Big(x + \frac{n\pi}{2}\Big), \qquad \Big|f^{(n)}(x)\Big| \leqslant 1.$$

Коефіцієнти Тейлора для цієї функції $(m = 1, 2, 3...)$:

$$f(0) = 0; \quad f^{(2m)}(0) = \sin \pi m = 0; \quad f^{(2m-1)}(0) = \sin\Big(m\pi - \frac{\pi}{2}\Big) = (-1)^{m-1}.$$

Таким чином,

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

3. Розглянемо, яким чином отримується розклад e^x. Для цього використаємо критерій розвинення функції у степеневий ряд.

Оскільки $f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}$ та довільного $x \in \mathbb{R}$, то $f(0) = 1$ та $f^{(n)}(0) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Відповідно до критерію, потрібно показати, що залишок ряду $R_n(x) \to 0$ на $(-R, R)$. Маємо, що коефіцієнти ряду Тейлора $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{n!}$. Тож знайдемо радіус збіжності за першою формулою Коші–Адамара:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}} = +\infty.$$

Тепер оцінимо залишок ряду (у формі Лагранжа):

$$\left|R_n(x)\right| = \left|x^{n+1}\right| \frac{e^\gamma}{(n+1)!} < |x|^{n+1} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!},$$

бо $\gamma = \theta x < |x|, \ \theta \in (0,1)$. Таким чином, $\left|R_n(x)\right| \to 0$ при $n \to \infty$. Отже,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

4. Розглянемо, яким чином отримується розклад $f(x) = \ln(1+x)$. Для цього розглянемо похідну суми ряду:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Це нескінченна спадна геометрична прогресія, тож утворений ряд збігається при $|x| < 1$, його можна інтегрувати на відрізку $[0, x]$, де $|x| < R = 1$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Інтервал збіжності такого ряду $(-1, 1)$.

При $x = -1$ маємо гармонічний ряд $\left(-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$, який є розбіжним.

При $x = 1$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, який є умовно збіжним за ознакою Лейбніца, бо $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ — монотонно спадна до нуля послідовність.

Таким чином, розвинення функції у ряд справедливе для $x \in (-1, 1]$.

Задачі для самостійного розв'язування

Розвинути задані функції в ряд Маклорена (за степенями x) або в ряд Тейлора (за степенями $x - x_0$) та вказати область збіжності розкладу.

3.3.1 $f(x) = e^{-x^2}$

3.3.2 $f(x) = \sin 3x$

3.3.3 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

3.3.4 $f(x) = \ln(1+5x)$

3.3.5 $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$

3.3.6 $f(x) = \sqrt{1+x}$

3.3.7 $f(x) = \cos^2 x$

3.3.8 $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

3.3.9 $f(x) = \dfrac{1}{4-x}$

3.3.10 $f(x) = e^x \sin x$

3.3.11 $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

3.3.12 $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$

3.3.13 $f(x) = \ln(2+x)$

3.3.14 $f(x) = \dfrac{3}{1+x-2x^2}$

3.3.15 $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x_0 = 1$

3.3.16 $f(x) = \sin x,\ x_0 = \pi/4$

3.3.17 $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$

3.3.18 $f(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$

3.3.19 $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

3.3.20 $f(x) = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення степеневого ряду. Запишіть загальний вигляд степеневого ряду за степенями x та за степенями $(x - x_0)$.

2. Сформулюйте першу теорему Абеля про збіжність степеневого ряду. Який геометричний зміст вона має для структури множини збіжності?

3. Що таке інтервал збіжності, радіус збіжності та область збіжності степеневого ряду? Чи може область збіжності складатися лише з однієї точки або з усієї числової прямої? Наведіть приклади.

4. Сформулюйте та запишіть формулу Коші–Адамара для знаходження радіуса збіжності степеневого ряду.

5. Як знайти радіус збіжності степеневого ряду за допомогою граничної форми ознаки Д'Аламбера? У чому полягає особливість знаходження радіуса для рядів, що містять лише парні або лише непарні степені x?

6. Опишіть загальний алгоритм дослідження збіжності степеневого ряду на кінцях його інтервалу збіжності.

7. Сформулюйте теорему про рівномірну збіжність степеневого ряду. На яких підмножинах інтервалу збіжності степеневий ряд гарантовано збігається рівномірно?

8. Які властивості має сума степеневого ряду всередині його інтервалу збіжності (неперервність, диференційованість, інтегрованість)?

9. Сформулюйте теорему про почленне диференціювання степеневого ряду. Як змінюються радіус, інтервал та область збіжності після операції диференціювання?

10. Сформулюйте теорему про почленне інтегрування степеневого ряду. Чи може область збіжності розширитися на кінцях інтервалу після інтегрування? Наведіть приклади.

11. Сформулюйте другу теорему Абеля (про неперервність суми степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності). Яке практичне значення вона має для підсумовування числових рядів?

12. Який ряд називається рядом Тейлора для заданої функції f у точці x_0? Запишіть формули для обчислення його коефіцієнтів. Який вигляд має ряд Маклорена?

13. Сформулюйте теорему про єдиність розкладу функції у степеневий ряд.

14. Сформулюйте необхідну і достатню умову розкладності нескінченно диференційовної функції у ряд Тейлора.

15. Сформулюйте достатню умову розкладності функції в ряд Тейлора, що базується на рівномірній обмеженості всіх її похідних на деякому інтервалі.

16. Запишіть стандартні розклади в ряд Маклорена для функцій e^x, $\sin x$ та $\cos x$. Вкажіть їхні радіуси та області збіжності.

17. Запишіть розклад у ряд Маклорена для логарифмічної функції $\ln(2+x)$ та визначте область збіжності отриманого ряду.

18. Запишіть розклад у ряд Маклорена для функції $(1+x)^\alpha$, де $\alpha \in \mathbb{R}$, та охарактеризуйте залежність його області збіжності від значення α.

Розділ 4. Ряди Фур'є

4.1 Поняття гармоніки

Різні галузі науки і техніки мають справу із періодичними явищами, що повторюються через певні проміжки часу. Такі явища описуються періодичними функціями.

Функція $f(x) \in X$ називається ***періодичною***, якщо існує таке найменше число T, що для $\forall\{x, x+T\} \subset X$ виконуються рівності: $f(x+T) = f(x)$ та $f(x+nT) = f(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, де nT — кратне періоду число.

Окремо виділяють періодичну функцію $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, яку називають ***гармонікою*** з амплітудою $|A|$, частотою ω і початковою фазою φ. Гармоніка має період $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Можна представити гармоніку у такому вигляді:

$$A\sin(\omega x + \varphi) = A\,(\cos\omega x\ \sin\varphi + \sin\omega x\ \cos\varphi).$$

Покладемо $a = A\sin\varphi,\ \ b = A\cos\varphi$. Тоді будемо мати представлення будь-якої гармоніки:

$$A\sin(\omega x + \varphi) = a\cos\omega x + b\sin\omega x,$$

де $A = \sqrt{a^2+b^2},\ \sin\varphi = \dfrac{a}{A},\ \cos\varphi = \dfrac{b}{A}$.

Покладемо $T = 2l,\ T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2l,\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2l} = \dfrac{\pi}{l}$ і гармоніка з $T = 2l$ має вигляд: $a\cos\dfrac{\pi x}{l} + b\sin\dfrac{\pi x}{l}$.



(*ілюстрацію згенеровано за допомогою ШІ*)

Розглянемо основну систему тригонометричних функцій $\left\{\cos\dfrac{n\pi x}{l}, \sin\dfrac{n\pi x}{l}\right\}$ загального періоду $T = 2l$ (l — напівперіод). У фізиці функції

$$U_n = a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \quad \text{та} \quad V_n = b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

називають ***основними гармоніками*** (гармоніка V_0 не розглядається, оскільки $V_0 \equiv 0$).

4.2 Ортогональна та ортонормована системи функцій

Функції $f \in R[a,b]$ і $g \in R[a,b]$ називають *ортогональними*, якщо

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Розглянемо систему функцій $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n ...\} \subset R[a,b]$. Таку систему називають ***ортогональною на*** $[a,b]$, якщо

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ \|\varphi_i\|^2 > 0, & i = j. \end{cases}$$

Якщо $\|\varphi_i\| = 1$, то систему $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ називають ***ортонормованою***.

Будь-яку ортогональну систему можна нормувати, тобто підібрати такі коефіцієнти $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$ так, щоб система $\{\mu_n\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$, яка є ортогональною, була ще й ортонормованою:

$$\int_a^b \mu_n^2\varphi_n^2(x)\,dx = \mu_n^2 \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Звідси

$$\mu_n = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx}} = \frac{1}{\|\varphi_n\|}.$$

Розглянемо тригонометричну систему функцій

$$\left\{\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ \cos\frac{n\pi x}{l}\right\},$$

ортогональну на $[-l, l]$. Ці функції будуть попарно ортогональні на будь-якому проміжку, довжина якого рівна спільному періоду $T = 2l$.

Отримаємо умови ортогональності:

1. $\int\limits_{-l}^{l} \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{l}{2\cdot n\pi}\cdot\begin{bmatrix}\sin\\ -\cos\end{bmatrix}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\Big|_{-l}^{l} = 0;$

2. $\int\limits_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(n+m)\pi x}{l} + \cos\frac{(n-m)\pi x}{l}\right)dx = 0,$
$m \neq n$;

3. $\int\limits_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\left(\sin\frac{(n-m)\pi x}{l} + \sin\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)dx = 0,$
m і n — будь-які цілі числа;

4. $\int\limits_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(n-m)\pi x}{l} - \cos\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)dx = 0,$
$m \neq n$.

Також обчислимо норми основних тригонометричних функцій:

$$\left\|\frac{1}{2}\right\|^2 = \int_{-l}^{l} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\cdot 2l = \frac{l}{2};$$

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2 = \int_{-l}^{l} \cos^2\frac{n\pi x}{l}\, dx = \left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2 = l.$$

Зрештою, маємо ортонормовану систему функцій $\left\{\dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}\right\}_{n=0}^{\infty}$.

4.3 Ряд Фур'є по ортогональній системі функцій

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$ і може бути представлена у вигляді ряду по ортогональній системі $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$f(x) = a_0\,\varphi_0(x) + a_1\,\varphi_1(x) + \ldots + a_n\,\varphi_n(x) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\varphi_n(x)$$

де a_n — константи. Поставимо задачу обчислити сталі a_n. Припустимо, що для всіх $n = 0, 1, 2, \ldots$ ряди

$$f(x)\,\varphi_n(x) = a_0\,\varphi_0(x)\,\varphi_n(x) + a_1\,\varphi_1(x)\,\varphi_n(x) + \ldots + a_n\,\varphi_n(x)\,\varphi_n(x) + \ldots$$

можна інтегрувати. У такому разі

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = a_n\cdot\|\varphi_n\|^2,$$

звідки

$$a_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Твердження. *Якщо функції системи $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ неперервні і для функції $f(x)$ справедливе представлення $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\varphi_n(x)$, причому ряд збігається рівномірно, то він є* ***рядом Фур'є*** *для функції f, а числа a_n називаються* ***коефіцієнтами Фур'є***.

4.4 Ряд Фур'є по тригонометричній системі функцій

Функція f називається ***кусково-неперервною*** на (a,b), якщо цей проміжок можна розбити на скінченне число проміжків (a_s,b_s), $s=\overline{1,N}$, на кожному з яких функція f обмежена і неперервна у внутрішніх точках, а на кінцях існують скінченні односторонні границі:

$$f(a_s+0)=\lim_{x\to a_s+0}f(x),\quad f(b_s-0)=\lim_{x\to b_s-0}f(x).$$

Нехай f — кусково-неперервна періодична функція із періодом $T=2l$. Спробуємо представити цю функцію у вигляді суми скінченної або зліченної кількості гармонік $a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}$, $n=0,1,2,\ldots$

Зрештою, отримаємо ***тригонометричний ряд Фур'є***:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{4.7}$$

Припустимо, що ряд (4.7) збігається на інтервалі $(-l,l)$ і допускає почленне інтегрування:

$$\int_{-l}^{l}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx+b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right].$$

Оскільки $\int\limits_{-l}^{l}\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,dx=\int\limits_{-l}^{l}\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,dx=0$, то середнє значення періодичної функції f дорівнює $\dfrac{a_0}{2}=\dfrac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\,dx$. Тобто

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx. \tag{4.8}$$

Для обчислення інших коефіцієнтів домножимо (4.7) на $\cos\dfrac{m\pi x}{l}$:

$$l \cdot a_m = \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{m\pi x}{l}\, dx = \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-l}^{l} \cos \frac{m\pi x}{l}\, dx}_{=0} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \underbrace{\int_{-l}^{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l}\, dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-l}^{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l}\, dx}_{=0} \right).$$

Оскільки при $m = n \neq 0$: $\int\limits_{-l}^{l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} = l$, то

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{m\pi x}{l}\, dx. \tag{4.9}$$

Аналогічно визначаються коефіцієнти

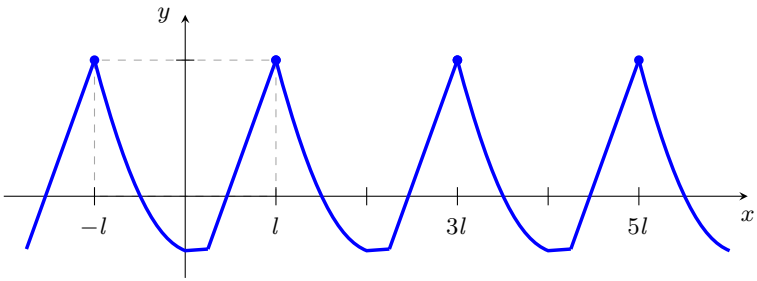
$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx. \tag{4.10}$$

Отже, якщо f — інтегровна і може бути розвинута у тригонометричний ряд, причому почленне інтегрування цього ряду і рядів, отриманих множенням на $\cos \frac{m\pi x}{l}$ і $\sin \frac{m\pi x}{l}$ можливе, то коефіцієнти a_m і b_m обчислюються за формулами (4.8)–(4.10).

При цьому функція f відповідає ряду Фур'є. Термін "відповідає" можна замінити на "рівний" тільки тоді, коли доведеною є збіжність ряду і рівність його суми функції $f(x)$.

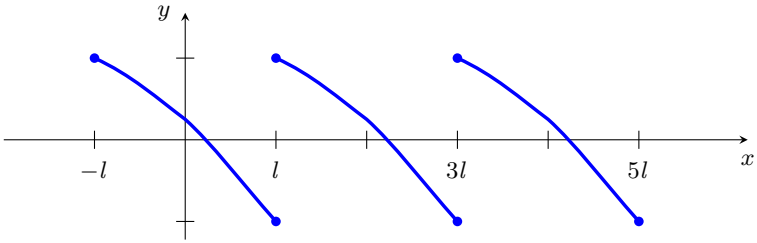
Теорема 18 (достатні умови представлення функції рядом Фур'є)**.** *Якщо для функції f на $[-l, l]$ має місце розвинення у деякий рівномірно збіжний на $[-l, l]$ тригонометричний ряд, то цей ряд є рядом Фур'є.*

На практиці часто виникає задача розвинення в тригонометричний ряд функції $f(x)$ заданої лише на $[-l, l]$. Тобто, про періодичність мова не йде, але це не заважає записати ряд Фур'є. Але, якщо періодично продовжити $f(x)$ з відрізку $[-l, l]$ на всю вісь Ox, то отримаємо періодичну функцію, що співпадає на $[-l, l]$ з $f(x)$, та для якої ряд Фур'є буде тотожним з рядом Фур'є для $f(x)$ на $[-l, l]$. Тобто, немає різниці між рядом Фур'є для f на $[-l, l]$ та рядом Фур'є для функції, що є її продовженням. Якщо $f(-l) = f(l)$, то для періодичного продовження f труднощів немає.



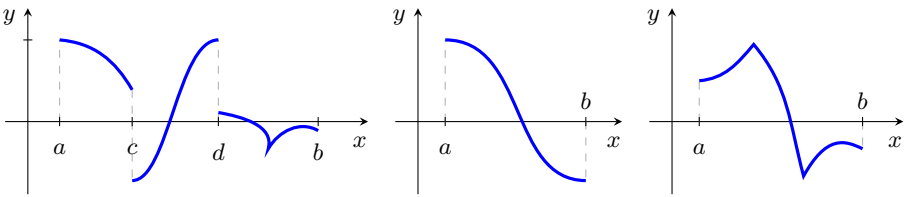
Якщо $f(-l) \neq f(l)$, то не можемо продовжити функцію періодично, не змінюючи її значень, бо згідно зі змістом періодичності $f(-l) = f(l)$ (можна зробити ці значення рівними, а можна виключити ці значення).

Зміна значень функції у скінченному числі точок або невизначеність її у цих точках не впливає на величину інтеграла, тож ряд Фур'є залишається незмінним. При $f(-l) \neq f(l)$ і неперервності $f(x)$ на $[-l, l]$ її періодичне продовження буде мати розриви у точках вигляду $x = (2k+1)l$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



Постає питання: до якого значення збігається ряд Фур'є у точках розриву? Вони є точками розриву I-го роду зі стрибком $\delta = f(-l) - f(l)$.

Функція f називається ***гладкою*** на $[a, b]$, якщо вона має неперервну похідну. Геометрично це означає, що при переміщенні вздовж кривої $y = f(x)$ напрямок дотичної змінюється неперервно, без стрибків. Функція, похідна якої допускає лише скінченне число точок розриву I-го роду (так званих ***кутових точок***) називається ***кусково-гладкою*** на $[a, b]$.



а) б) в)

а) розривна кусково-гладка функція;

б) гладка функція, плавна крива без кутових точок;

в) неперервна кусково-гладка функція.

Графік кусково-гладкої функції є неперервною або розривною кривою, що має скінченну кількість кутових точок (в них маємо скачок похідної).

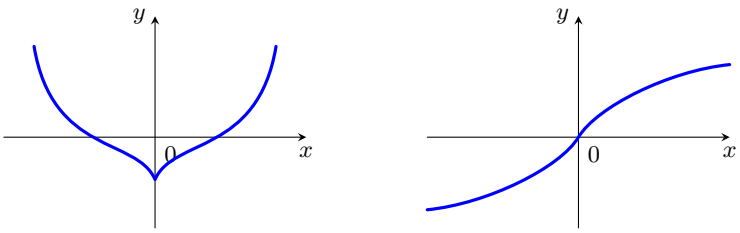
Будь-яка кусково-гладка функція f (неперервна чи розривна) є обмеженою і має обмежену похідну скрізь, за виключенням кутових і точок розриву (у цих точках не існує $f'(x)$).

Теорема 19. *Ряд Фур'є кусково-гладкої функції f (неперервної чи розривної), визначеної на $(-\infty, +\infty)$, та яка має період $T = 2l$, збігається для всіх $x \in \mathbb{R}$, причому його сума $S(x) = f(x)$ в кожній точці неперервності і дорівнює півстрибку $S(x_0) = \dfrac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$ в кожній точці розриву x_0.*

Зауваження. Якщо f є всюди неперервною, то ряд збігається абсолютно і рівномірно.

4.5 Ряди Фур'є для парних і непарних функцій

Нагадаємо, що функція називається ***парною***, якщо $f(-x) = f(x)$ і ***непарною***, якщо $f(-x) = -f(x)$ для довільного $x \in D_f$.



Для парної функції $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx$, бо

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{-l}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{l} f(x)\,dx = \\ = \int_{0}^{l} f(-x)\,dx + \int_{0}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

Також $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$ для непарної функції.

Нагадаємо, що:

а) добуток двох парних і двох непарних функцій є парною функцією;

б) добуток парної і непарної є непарною функцією.

Будемо розкладати в ряд Фур'є парну періодичну функцію f із періодом $2l$.

Оскільки $\cos\dfrac{n\pi x}{l}$ — парна функція, то парною буде також $f(x)\cdot\cos\dfrac{n\pi x}{l}$, а $f(x)\cdot\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ — непарною. Таким чином,

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Отже, для парної функції ряд Фур'є містить тільки косинуси:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Нехай тепер f — непарна періодична функція із періодом $2l$.

Оскільки $\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ — непарна функція, то парною буде також $f(x)\cdot\sin\dfrac{n\pi x}{l}$, а $f(x)\cdot\cos\dfrac{n\pi x}{l}$ — непарною. Таким чином,

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

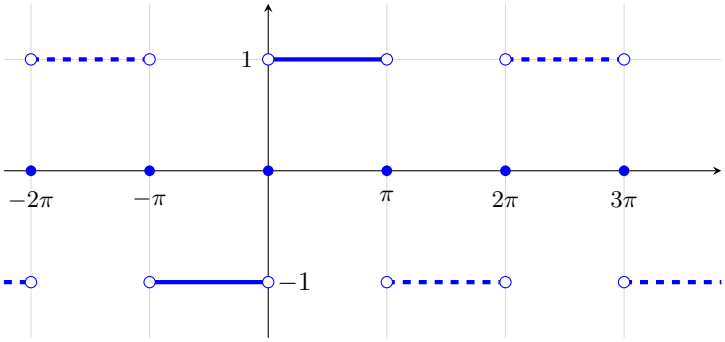
$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Отже, для непарної функції ряд Фур'є містить тільки синуси:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Приклад 1. *Розкладемо у ряд Фур'є функцію* $f(x) = sign\ x,\ x \in [-\pi, \pi]$.

Продовжимо функцію f періодично на всю дійсну вісь (період функції $T = 2\pi$). При цьому маємо, що продовження f — розривна кусково-гладка функція. Тим не менше, відповідний їй ряд Фур'є збігається $\forall x \in \mathbb{R}$ згідно із теоремою 19.



Коефіцієнти $a_0 = 0$ та $a_n = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ внаслідок непарності функції f.

Враховуючи напівперіод функції $l = \pi$ та згідно із формулами коефіцієнтів Фур'є, для решти коефіцієнтів:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi} =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}(\cos\pi n - \cos 0) = \frac{2}{\pi n}(1-\cos\pi n) = \frac{2\cdot(1-(-1)^n)}{\pi n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже, для функції f ряд Фур'є містить тільки синуси. При цьому, зважаючи на теорему 19, у точках розриву ($x = 0, x = \pm\pi$) ряд збігається до середнього арифметичного односторонніх границь (тобто до 0), що повністю збігається з довизначеними точками на нашому графіку. Тому для всіх $x \in [-\pi, \pi]$ маємо:

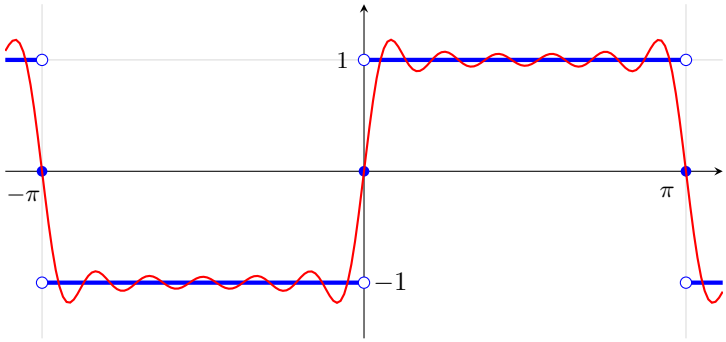
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot(1-(-1)^n)}{\pi n}\cdot\sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Зокрема, якщо $x = \pi/2$, то

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}}{2k-1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

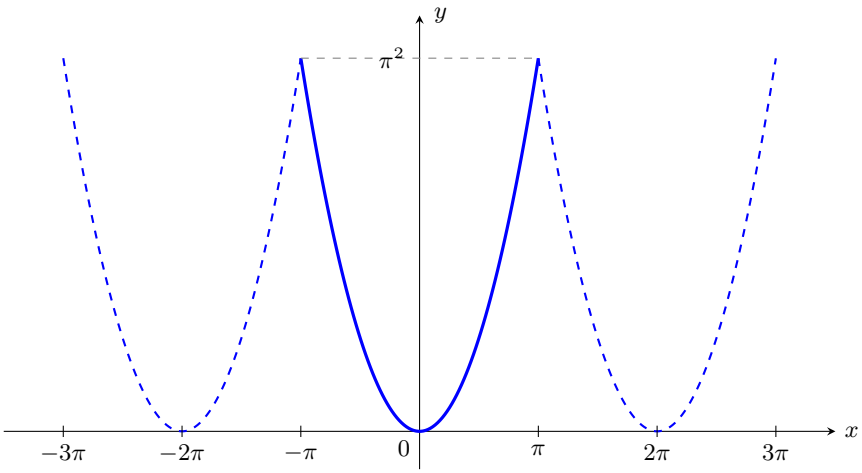
На малюнку нижче зображено процес наближення періодично продовженої функції f (крива синього кольору) частковою сумою її ряду Фур'є (крива

червоного кольору). Це наочно демонструє *ефект Гіббса* — характерні сплески біля точок розриву.



Приклад 2. *Розкладемо у ряд Фур'є функцію* $f(x) = x^2,\ x \in [-\pi, \pi]$.

Продовжимо функцію f періодично на всю дійсну вісь (період функції $T = 2\pi$). При цьому маємо, що продовження f — неперервна і кусково-гладка функція. Тож відповідний їй ряд Фур'є є збіжним абсолютно і рівномірно.



Оскільки півперіод функції $l = \pi$, то за формулами коефіцієнтів Фур'є:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{4}{\pi n^2} \cdot x \cos nx \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{4}{n^2} \cos \pi n = \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Коефіцієнти $b_n = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ внаслідок парності функції f.

Отже, для функції f ряд Фур'є містить тільки косинуси. При цьому внаслідок неперервності f маємо, що для всіх $x \in [-\pi, \pi]$:

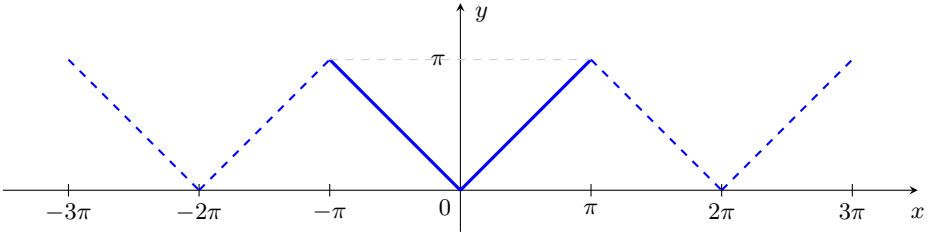
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Зокрема, якщо $x = 0$, то

$$f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Приклад 3. *Розкладемо у ряд Фур'є функцію* $f(x) = |x|, \ x \in [-\pi, \pi]$.

Продовжена функція є неперервною та кусково-гладкою. Ряд Фур'є кусково-гладкої функції періоду 2π збігається для $\forall x \in \mathbb{R}$, тож його сума дорівнює $f(x)$ у кожній точці неперервності.



За рахунок парності функції, маємо:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=\pi} = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = -\frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi n^2} \cdot \cos nx \Big|_{x=0}^{x=\pi} =$$

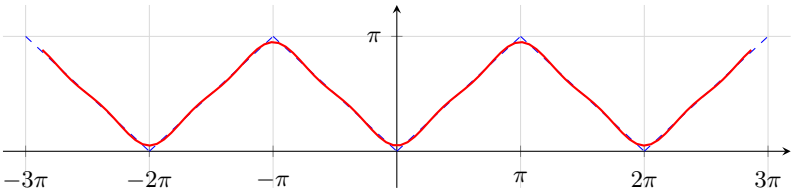
$$= \frac{2}{\pi n^2} \cdot (\cos \pi n - 1) = \frac{2}{\pi n^2} \cdot \big((-1)^n - 1\big).$$

Тобто при $n = 2m$: $a_n = 0$, а при $n = 2m+1$: $a_n = -\dfrac{4}{\pi n^2}$. Також $b_n = 0$. Таким чином,

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

На малюнку нижче зображено наближення періодично продовженої функції f (крива синього кольору) частковою сумою її ряду Фур'є (крива червоного кольору), а саме

$$S_3(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9}\right).$$



Задачі для самостійного розв'язування

Розкладіть функцію f у ряд Фур'є на проміжку $[-\pi, \pi]$.

4.5.1 $f(x) = |2x|$

4.5.2 $f(x) = x^2$

4.5.3 $f(x) = \pi - |x|$

4.5.4 $f(x) = \cos(ax), \quad a \notin \mathbb{Z}$

4.5.5 $f(x) = |\sin x|$

4.5.6 $f(x) = e^x + e^{-x}$

4.5.7 $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}$

4.5.8 $f(x) = |\cos x|$

4.5.9 $f(x) = (x^2 - \pi^2)^2$

4.5.10 $f(x) = x^4$

4.5.11 $f(x) = |x| + 1$

4.5.12 $f(x) = x$

4.5.13 $f(x) = x \cdot (\pi - |x|)$

4.5.14 $f(x) = \sin(ax), \quad a \notin \mathbb{Z}$

4.5.15 $f(x) = x \cos x$

4.5.16 $f(x) = e^x - e^{-x}$

4.5.17 $f(x) = 1 - \dfrac{x \cdot |x|}{\pi^2}$

4.5.18 $f(x) = x \cdot |\sin x|$

4.5.19 $f(x) = x^3 - \pi^2 x$

4.5.20 $f(x) = x^3$

Розкладіть функцію f у ряд Фур'є на зазначеному проміжку.

4.5.21 $f(x) = x,\ x \in [-1, 1]$

4.5.22 $f(x) = |x|,\ x \in [-2, 2]$

4.5.23 $f(x) = 2x,\ x \in [0, 1]$ (за синусами)

4.5.24 $f(x) = x^2 - 1,\ x \in [-1, 1]$

4.5.25 $f(x) = e^x,\ x \in [-3, 3]$

4.5.26 $f(x) = 10 - x,\ x \in [5, 15]$

4.5.27 $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right),\ x \in [0, 2]$ (за косинусами)

4.5.28 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1]; \\ 2 - x, & x \in (1, 2]. \end{cases}$

4.5.29 $f(x) = \cos(\pi x),\ x \in [0, 1]$ (за синусами)

4.5.30 $f(x) = \sin x,\ x \in [0, \pi/2]$ (за синусами)

4.5.31 $f(x) = \operatorname{sh} x,\ x \in [-1, 1]$

4.5.32 $f(x) = \pi - x,\ x \in [0, \pi]$ (за косинусами)

4.5.33 $f(x) = |x - 1|,\ x \in [0, 2]$

4.5.34 $f(x) = |x| - 3,\ x \in [-3, 3]$

4.5.35 $f(x) = a,\ x \in [0, 5]$ (за синусами)

4.5.36 $f(x) = 4 - x^2,\ x \in [-2, 2]$

4.5.37 $f(x) = 1 - |x|,\ x \in [-1, 1]$

4.5.38 $f(x) = e^{-x},\ x \in [-1, 1]$

4.5.39 $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right),\ x \in [0, 2]$ (за синусами)

4.5.40 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 2); \\ 0, & x \in (2, 4). \end{cases}$

4.5.41 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-3, 0); \\ x, & x \in (0, 3). \end{cases}$

4.5.42 $f(x) = \cos x,\ x \in [0, \pi/2]$ (за косинусами)

4.5.43 $f(x) = \operatorname{ch} x,\ x \in [-1, 1]$

4.5.44 $f(x) = x^3,\ x \in [-1, 1]$

4.5.45 $f(x) = \text{sign } (\cos x)$

Питання для самоконтролю

1. Що називається гармонікою? Як визначається її період?
2. Які дві функції називаються ортогональними на відрізку $[a, b]$?
3. Яка система функцій називається ортогональною на відрізку $[a, b]$? Яка система називається ортонормованою?
4. Доведіть ортогональність класичної тригонометричної системи функцій $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ на відрізку $[-\pi, \pi]$. Обчисліть норми цих функцій.
5. Сформулюйте загальне поняття коефіцієнтів та ряду Фур'є функції f за довільною ортогональною системою функцій.
6. Запишіть формули для обчислення коефіцієнтів класичного тригонометричного ряду Фур'є на відрізку $[-\pi, \pi]$.
7. Яка функція називається кусково-неперервною на проміжку? Наведіть приклади.
8. Який вигляд має тригонометричний ряд Фур'є для кусково-неперервної функції f із періодом $2l$?
9. Сформулюйте теорему про достатні умови представлення функції f рядом Фур'є на симетричному проміжку $[-l, l]$.
10. Яка функція називається гладкою; кусково-гладкою? Наведіть приклади.
11. Сформулюйте теорему про поточкову збіжність тригонометричного ряду Фур'є кусково-гладкої функції f. До якого значення збігається ряд Фур'є у точках розриву першого роду?
12. Які особливості має розклад у ряд Фур'є парних та непарних функцій на симетричному проміжку $[-\pi, \pi]$? Запишіть відповідні спрощені формули для коефіцієнтів (ряди за синусами та косинусами).
13. Опишіть суть та геометричний зміст явища Гіббса при наближенні розривних функцій за допомогою часткових сум ряду Фур'є. Як поводиться похибка наближення поблизу точки розриву?

14. Поясніть концепцію розкладу в ряд Фур'є функції, що задана лише на половині симетричного проміжку, тобто на відрізку $[0, \pi]$. Що означає продовжити функцію парним або непарним способом?

15. Як змінюються формули для коефіцієнтів ряду Фур'є та загальний вигляд тригонометричного ряду, якщо функція задана на довільному симетричному відрізку $[-l, l]$ періоду $2l$?

16. Запишіть загальний вигляд та формули для коефіцієнтів парного та непарного продовження функції, початково заданої на довільному несиметричному відрізку $[0, l]$.

17. Сформулюйте теорему про почленне інтегрування тригонометричних рядів Фур'є. Чи обов'язково вихідний ряд Фур'є має бути збіжним для можливості його інтегрування?

18. Сформулюйте теорему про почленне диференціювання рядів Фур'є. Які додаткові вимоги висуваються до функції f на границях відрізка?

Відповіді та вказівки

1.4. Додатні числові ряди

1.4.1. Розбіжний. 1.4.2. Розбіжний. 1.4.3. Збіжний. 1.4.4. Збіжний. 1.4.5. Збіжний. 1.4.6. Збіжний. 1.4.7. Збіжний. 1.4.8. Збіжний. 1.4.9. Розбіжний; 1.4.10. Збіжний. 1.4.11. Збіжний. 1.4.12. Збіжний. 1.4.13. Розбіжний. 1.4.14. Збіжний. 1.4.15. Збіжний. 1.4.16. Збіжний. 1.4.17. Збіжний. 1.4.18. Збіжний. 1.4.19. Збіжний. 1.4.20. Збіжний. 1.4.21. Збіжний. 1.4.22. Збіжний. 1.4.23. Збіжний. 1.4.24. Збіжний. 1.4.25. Збіжний. 1.4.26. Збіжний. 1.4.27. Збіжний. 1.4.28. Розбіжний. 1.4.29. Збіжний. 1.4.30. Збіжний.

1.6. Абсолютно та умовно збіжні ряди

1.6.1. Умовно збіжний. 1.6.2. Умовно збіжний. 1.6.3. Абсолютно збіжний. 1.6.4. Умовно збіжний. 1.6.5. Розбіжний. 1.6.6. Абсолютно збіжний. 1.6.7. Умовно збіжний. 1.6.8. Абсолютно збіжний. 1.6.9. Умовно збіжний. 1.6.10. Абсолютно збіжний. 1.6.11. Умовно збіжний. 1.6.12. Абсолютно збіжний. 1.6.13. Умовно збіжний. 1.6.14. Умовно збіжний. 1.6.15. Абсолютно збіжний. 1.6.16. Розбіжний. 1.6.17. Абсолютно збіжний. 1.6.18. Абсолютно збіжний. 1.6.19. Умовно збіжний. 1.6.20. Умовно збіжний.

2.3. Рівномірна збіжність функціональної послідовності

2.3.1. $f(x) = 0$; на X_1 послідовність рівномірно збіжна (р.з.), на X_2 — нерівномірно збіжна. 2.3.2. $f(x) = 0$; нерівномірно збіжна. 2.3.3. $f(x) = 0$; на X_1 — р.з., на X_2 — нерівномірно збіжна. 2.3.4. $f(x) = 0$; р.з. 2.3.5. $f(x) = 0$; р.з. 2.3.6. $f(x) = 0$; р.з. 2.3.7. $f(x) = 0$ (при $x \neq 0$); на X_1 — р.з., на X_2 — нерівномірно збіжна. 2.3.8. $f(x) = 0$; р.з. 2.3.9. $f(x) = 0$; на X_1 — р.з., на X_2 — нерівномірно збіжна. 2.3.10. $f(x) = x$; р.з. 2.3.11. $f(x) = 0$; р.з. 2.3.12. $f(x) = \pi/2$; нерівномірно збіжна. 2.3.13. $f(x) = 0$; р.з. 2.3.14. $f(x) = 0$; нерівномірно збіжна.

2.4. Рівномірна збіжність функціональних рядів

2.4.1. $x \in [-2, 2)$. 2.4.2. $x > 1$. 2.4.3. $x > 0$. 2.4.4. $x > 0$. 2.4.5. $x \in (1/e, e)$. 2.4.6. $|x| > 1$. 2.4.7. $|x| > 1$. 2.4.8. $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. 2.4.9. $x \in \mathbb{R}$. 2.4.10. $x = 0$. 2.4.11. Рівномірно збіжний (р.з.) на $\mathbb{R}$ (ознака Вейєрштрасса, мажоранта $1/n^2$). 2.4.12. Р.з. на $[-1, 1]$. 2.4.13. Р.з. на $\mathbb{R}$. 2.4.14. Р.з. на $\mathbb{R}$. 2.4.15. Р.з. на $\mathbb{R}$. 2.4.16. Р.з. на $\mathbb{R}$. 2.4.17. Р.з. на $\mathbb{R}$. 2.4.18. Р.з. на $\mathbb{R}$. 2.4.19. Р.з. на $\mathbb{R}$. 2.4.20. Р.з. на $\mathbb{R}$.

2.5. Властивості функціональних рядів

2.5.1. Ні, оскільки послідовність часткових сум $S_n(x) = x^n - 1$ прямує до -1 при $x \in [0, 1)$ та до 0 при $x = 1$ (гранична функція розривна, збіжність

нерівномірна).
2.5.2. Ряд можна інтегрувати, оскільки він збігається рівномірно на $[0,1]$ за ознакою Вейєрштрасса (мажоранта $1/2^n$).
2.5.3. Ряд можна інтегрувати, оскільки він збігається рівномірно на $[0,1]$ (загальний член $a_n(x) = \frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n+1)x}$).
2.5.4. Ні, оскільки ряд є розбіжним при $x = 1$.
2.5.5. Ряд можна інтегрувати, оскільки він збігається рівномірно на $[0,1]$ за ознакою Діріхле.
2.5.6. Ряд можна інтегрувати, оскільки він збігається рівномірно на $[0,1]$ за ознакою Вейєрштрасса (мажоранта $1/n^2$).
2.5.7. Ряд можна диференціювати, оскільки ряд із похідних $\sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$ збігається рівномірно за ознакою Вейєрштрасса.
2.5.8. Ні, оскільки функції f_n не визначені при $x = 0$.
2.5.9. Ряд можна диференціювати, оскільки ряд із похідних збігається рівномірно за ознакою Вейєрштрасса (мажоранта $1/n^3$).
2.5.10. Ряд можна диференціювати, оскільки ряд із похідних збігається рівномірно за ознакою Діріхле.

3.1. Поняття степеневих рядів та їх збіжність

3.1.1. $[-5,5)$. 3.1.2. $[1,3]$. 3.1.3. $(-3,3)$. 3.1.4. $(-e,e)$. 3.1.5. $[-4,-2)$. 3.1.6. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 3.1.7. $(-2,4)$. 3.1.8. $(-1,1]$. 3.1.9. $(-\infty,+\infty)$. 3.1.10. $x = 0$. 3.1.11. $(-2,2)$. 3.1.12. $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. 3.1.13. $[-3.1.-3)$. 3.1.14. $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$. 3.1.15. $[-1,1]$. 3.1.16. $[1,5)$. 3.1.17. $[-1,1)$. 3.1.18. $(-4,4)$. 3.1.19. $[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$. 3.1.20. $[-3,-1)$.

3.2. Функціональні властивості степеневих рядів

3.2.1. $S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. 3.2.2. $S(x) = -\ln(1-x)$. 3.2.3. $S(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$. 3.2.4. $S(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. 3.2.5. $\ln 2$. 3.2.6. $3/4$.

3.3. Розвинення функцій у степеневі ряди

3.3.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, x \in \mathbb{R}$.
3.3.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1!}, x \in \mathbb{R}$.
3.3.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, |x| < 1$.
3.3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 5^n x^n}{n}$, $|x| < \frac{1}{5}$.
3.3.5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{9^{n+1}}, |x| < 3$.
3.3.6. $1 + \frac{x}{2} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n, |x| < 1$.

3.3.7. $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}, x\in\mathbb{R}$.

3.3.8. $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x|<1$.

3.3.9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^{n+1}}, |x|<4$.

3.3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n/2}\sin(n\pi/4)}{n!}x^n, x\in\mathbb{R}$.

3.3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}, |x|<1$.

3.3.12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1}, |x|\leqslant\frac{1}{2}$.

3.3.13. $\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n2^n}, |x|<2$.

3.3.14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n 2^{n+1})x^n, |x|<\frac{1}{2}$.

3.3.15. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n, |x-1|<1$.

3.3.16. $\frac{\sqrt{2}}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n!}(x-\frac{\pi}{4})^n, x\in\mathbb{R}$.

3.3.17. $2(1+\frac{x}{24}-\frac{x^2}{576}+\dots), |x|<8$.

3.3.18. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, x\in\mathbb{R}$.

3.3.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}, |x|<1$.

3.3.20. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x\in\mathbb{R}$.

4.5. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій

4.5.1 $f(x)=|2x|\sim\pi-\frac{8}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$

4.5.2 $f(x)=x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

4.5.3 $f(x)=\pi-|x|\sim\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$

4.5.4 $f(x)=\cos(ax)\sim\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a\cos nx}{a^2-n^2}\right)$

4.5.5 $f(x)=|\sin x|\sim\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$

4.5.6 $f(x) = e^x + e^{-x} \sim \frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx\right)$

4.5.7 $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \sim \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

4.5.8 $f(x) = |\cos x| \sim \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx$

4.5.9 $f(x) = (x^2-\pi^2)^2 \sim \frac{8\pi^4}{15} - 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos nx$

4.5.10 $f(x) = x^4 \sim \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx - 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos nx$

4.5.11 $f(x) = |x| + 1 \sim 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$

4.5.12 $f(x) = x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$

4.5.13 $f(x) = x(\pi - |x|) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$

4.5.14 $f(x) = \sin(ax) \sim \frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin nx}{a^2-n^2}$

4.5.15 $f(x) = x\cos x \sim -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}\sin nx$

4.5.16 $f(x) = e^x - e^{-x} \sim \frac{4\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{1+n^2}\sin nx$

4.5.17 $f(x) = 1 - \frac{x|x|}{\pi^2} \sim 1 - \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2\pi^2-2)(-1)^{n+1}-2}{n^3}\sin nx$

4.5.18 $f(x) = x|\sin x| \sim \frac{2}{\pi}\sin x - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$

4.5.19 $f(x) = x^3 - \pi^2 x \sim 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$

4.5.20 $f(x) = x^3 \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(6-n^2\pi^2)}{n^3}\sin nx$

4.5.21 $f(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x)$

4.5.22 $f(x) \sim 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k-1)\pi x}{2}}{(2k-1)^2}$

4.5.23 $f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x)$

4.5.24 $f(x) \sim -\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x)$

4.5.25 $f(x) \sim \frac{\operatorname{sh} 3}{3} + 2 \operatorname{sh} 3 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3 \cos \frac{n\pi x}{3} - n\pi \sin \frac{n\pi x}{3})}{9 + n^2\pi^2}$

4.5.26 $f(x) \sim \frac{10}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi(10-x)}{5}$

4.5.27 $f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{4n^2 - 1}$

4.5.28 $f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}$

4.5.29 $f(x) \sim \frac{8}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - 1} \sin 2k\pi x$

4.5.30 $f(x) \sim \frac{8}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{4n^2 - 1} \sin 2nx$

4.5.31 $f(x) \sim 2 \operatorname{sh} 1 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n\pi}{1 + n^2\pi^2} \sin(n\pi x)$

4.5.32 $f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$

4.5.33 $f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}$ (збігається з 4.5.28)

4.5.34 $f(x) \sim -\frac{3}{2} - \frac{12}{\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k-1)\pi x}{3}}{(2k-1)^2}$

4.5.35 $f(x) \sim \frac{4a}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi x}{5}}{2k-1}$

4.5.36 $f(x) \sim \frac{8}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$

4.5.37 $f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}$

4.5.38 $f(x) \sim \operatorname{sh} 1 \cdot \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2} (\cos n\pi x + n\pi \sin n\pi x)\right)$

4.5.39 $f(x) \sim \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \sin n\pi x$

4.5.40 $f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}}{2n-1}$

4.5.41 $f(x) \sim \frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k-1)\pi x}{3}}{(2k-1)^2} + \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{3}$

4.5.42 $f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos 4nx$

4.5.43 $f(x) \sim \operatorname{sh} 1 \cdot \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2} \cos n\pi x\right)$

4.5.44 $f(x) \sim \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6-n^2\pi^2)}{n^3} \sin n\pi x$

4.5.45 $f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1)x$

Перелік позначень, символів і скорочень

У цьому розділі подано основні позначення, символи, скорочення та назви букв латинського і грецького алфавітів, що використовуються в посібнику. Зазначені позначення вживаються в тексті без додаткових пояснень. Перелік покликаний уніфікувати записи, полегшити читання математичного тексту та забезпечити зручне звернення до вживаної символіки.

Числові множини:

$\mathbb{N}$ — *множина натуральних чисел*;
$\mathbb{Z}$ — *множина цілих чисел*;
$\mathbb{Q}$ — *множина раціональних чисел*;
$\mathbb{R}$ — *множина дійсних чисел*;
$\overline{\mathbb{R}}$ — *розширена множина дійсних чисел*;

Також, якщо до символів $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ додається індекс "+" чи "−", то це означає, що розглядається лише *невід'ємна* (*недодатна*) частина множини. Наприклад, $\mathbb{Z}^+$ — цілі невід'ємні числа, $\mathbb{R}^-$ — дійсні недодатні числа; обидві ці множини містять нуль.

Логічні та службові позначення:

$\forall$ — *квантор загальності*, еквівалентний вислову "для будь-якого" або "для всіх";
$\exists$ — *квантор існування*, еквівалент слова "існує";
$\exists!$ — еквівалентний вислову "існує єдиний";
$\Rightarrow$ — *імплікація*, визначається у записах типу $A \Rightarrow B$ як вислів "із істинності твердження A випливає твердження B";
$\Leftrightarrow$ — *символ еквівалентності*, запис типу $A \Leftrightarrow B$ означає, що одночасно виконуються імплікації $A \Rightarrow B$ та $B \Rightarrow A$, або ж "для того, щоб A було істинним, необхідно та достатньо, щоб B було істинним";
$\wedge$ — *символ кон'юнкції*, запис $A \wedge B$ означає одночасне виконання A та B;
$\sim$ — еквівалентно;
$\varnothing$ — *порожня множина*;

$i = \overline{n, m}$ — запис означає, що величина (індекс) i набуває почергово усіх цілих значень, починаючи з n і закінчуючи m включно;

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ — *сума* n доданків;

$a \in A$ ($a \notin A$) — означає, що a є (не є) елементом множини A;

$A \subset B$ — A є *підмножиною* B (в нестрогому розумінні), тобто $\forall\, a : (a \in A \Rightarrow a \in B)$;

$A \not\subset B$ — A не є підмножиною B, тобто $\exists\, a \in A \wedge a \notin B$;

$A = B$ — *рівність множин*, тобто $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$;

$B = \{a \in A \,|\, P(a)\}$ — це означає, що B складається з елементів множини A, які мають задану *властивість* P.

Простори функцій:

$C[a; b]$ — простір неперервних функцій на відрізку $[a, b]$.

Скорочення:

ФП — функціональна послідовність;

ФР — функціональний ряд;

СР — степеневий ряд.

Латинський алфавіт

Букви	Назви букв	Букви	Назви букв	Букви	Назви букв
A a	а	J j	йот	S s	ес
B b	бе	K k	ка	T t	те
C c	це	L l	ель	U u	у
D d	де	M m	ем	V v	ве (фау)
E e	е	N n	ен	W w	дубль-ве
F f	еф	O o	о	X x	ікс
G g	ге	P p	пе	Y y	ігрек
H h	аш	Q q	ку	Z z	зет
I i	і	R r	ер		

Грецький алфавіт

Букви	**Назви букв**	**Букви**	**Назви букв**
A α	альфа	N ν	ню
B β	бета	Ξ ξ	ксі
Γ γ	гамма	O o	омікрон
Δ δ	дельта	Π π	пі
E ε	епсилон	P ρ	ро
Z ζ	дзета	Σ σ	сигма
H η	ета	T τ	тау
Θ θ	тета	Υ υ	іпсилон
I ι	йота	Φ φ	фі
K κ	каппа	X χ	хі
Λ λ	ламбда	Ψ ψ	псі
M μ	мю	Ω ω	омега

Список використаних джерел

[1] Авдєєва Т. В., Качаєнко О. Б. *Ряди Фур'є. Практикум.* — К.: НТУУ "КПІ", 2016. – 88 с.

[2] Денисьєвський М. О. *Конспект лекцій з математичного аналізу. Інтеграли. Ряди.* — Електронне видання. — 2024. — 97 с.

[3] Денисьєвський М. О., Курченко О. О., Нагорний В. Н., Нестеренко О. Н., Петрова Т. О., Чайковський А. В. *Збірник задач з математичного аналізу. Частина І. Функції однієї змінної.* — К.: ВПЦ "Київський університет", 2005. — 257 с.

[4] Денисьєвський М. О., Чайковський А. В. *Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних.* — К.: ВПЦ "Київський університет", 2012. — 276 с.

[5] Дороговцев А. Я. *Математичний аналіз. Частина 1.* — К: Либідь, 1993. — 320 с.

[6] Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. *Математичний аналіз. Частина 1.* — К: Вища школа, 1992. — 495 с.

[7] Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. *Математичний аналіз. Частина 2.* — К: Вища школа, 1993. — 375 с.

[8] Назаренко М. О., Нестеренко О. Н., Петрова Т. О., Чайковський А. В. *Збірник типових задач з математичного аналізу: функції однієї змінної. Частина 3.* — Електронне видання. — 2023. — 56 с.

[9] Синявська О. О., Слюсарчук П. В. *Ряди Фур'є. Навчальний посібник для студентів спеціальностей математика, прикладна математика, статистика.* – Ужгород, 2015. – 70 с.

[10] Стрелковська І. В., Паскаленко В. М. *Ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є: навч. посіб. для фахівців в галузі зв'язку.* – Одеса, 2021. – 122 с.

Предметний покажчик

А

Абсолютно збіжний ряд, 16

Абеля ознака, 16

Абеля теорема, 35

В

Вейєрштрасса ознака (мажорантна ознака), 27

Властивості функціональних рядів, 30

Властивості числових рядів, 8

Г

Гармоніка, 45

Гармонічний ряд, 10

Гаусса ознака, 13

Гладка функція, 51

Д

Д'Аламбера ознака, 11

Диференціювання функціонального ряду, 30

Діні теорема, 30

Діріхле ознака, 28

Діріхле–Абеля ознака, 16

Додатні числові ряди, 10

Достатня умова розбіжності ряду, 9

З

Загальний член ряду, 7

Залишок ряду, 7

Збіжність функціонального ряду, 22

Збіжний числовий ряд, 7

Знакозмінний ряд, 15

І

Інтегрування функціонального ряду, 30

Інтервал збіжності, 36

К

Коефіцієнти Фур'є, 48

Коші критерій, 10

Коші ознака, 11

Кусково-гладка функція, 51

Кусково-неперервна функція, 49

Л

Лейбніца ряд, 15

Лейбніца теорема, 15

М

Маклорена ряд, 40

Мажорантна ознака, 27

Н

Необхідна ознака збіжності ряду, 9

Неперервність суми функціонального ряду, 30

О

Область збіжності функціонального

ряду, 23

Область збіжності степеневого ряду, 36

Ознака порівняння рядів, 10

Ознака порівняння зі степенем, 12

Ознака Раабе, 13

Ортогональна система функцій, 46

Ортонормована система функцій, 47

П

Парні та непарні функції, 52

Поточкова збіжність, 21

Похибка знакозмінного ряду, 15

Р

Радіус збіжності, 36

Рівномірна збіжність функціональної послідовності, 24

Рівномірна збіжність функціонального ряду, 26

Рівномірна норма, 23

Розбіжний числовий ряд, 7

Ряд степеневий, 35

Ряд Тейлора, 40

Ряд узагальнений гармонічний, 12

Ряд умовно збіжний, 16

Ряд функціональний, 22

Ряд Фур'є, 48

Ряд числовий, 7

С

Степеневий ряд, 35

Сума функціонального ряду, 30

Т

Теорема Діні, 30

Теорема Лейбніца, 15

Теорема про неперервність суми ФР, 30

Теорема про почленне диференціювання ФР, 30

Теорема про почленне інтегрування ФР, 30

Тригонометричний ряд Фур'є, 49

У

Узагальнений гармонічний ряд, 12

Умовно збіжний ряд, 16

Ф

Функціональна послідовність, 21

Функціональний ряд, 22

Ч

Часткова сума ряду, 7

Числовий ряд, 7