Факультет комп’ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

Кашпур О.Ф., Кузьмін А.В., Вовк В.С.

ТЕОРІЯ ПОТЕНЦІАЛІВ

(для студентів факультету комп’ютерних наук та кібернетики освітньої програми «Прикладна математика»)

Київ — 2026

УДК 514.644

ББК 21.19я73

Автори

Кашпур О.Ф., Кузьмін А. В., Вовк В. С.

Рецензенти

академік НАНУ, д. ф.-м. н., професор **Хіміч О.М.** *(Інститут кібернетики імені. В.М. Глушкова НАН України),*

д. ф.-м. н., професор **Семенов В.В.** *(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)*

Ухвалено НМК факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 11 від 18 травня 2026 року).

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 15 від 27 травня 2026 року).

В навчальному посібнику в межах навчальної дисципліни "Рівняння математичної фізики" поглиблено розглядається теорія потенціалів для основних граничних задач еліптичного та параболічного типу. Сформульовані і доведені теореми про властивості потенціалів об'єму, простого та подвійного шару. Розглядається зв'язок між граничними задачами для рівняння Лапласа, Гельгольмца та теплопровідності і інтегральними рівняннями Фредгольма другого роду с полярними ядрами. Формулюються теореми існування та єдиності розв'язків граничних задач. В останньому розділі посібника наводяться приклади розв'язання задач з використанням наведених теоретичних відомостей, а також задачі для самостійного розв'язування.

ISBN

Вступ

Теорія потенціалів є ефективним підходом дослідження коректності основних граничних задач математичної фізики для рівнянь еліптичного та параболічного типів. Головна ідея такого підходу полягає у зведенні граничних задач до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду, записаних по границі області. Як правило, такі інтегральні рівняння мають полярне ядро і тому питання існування та єдиності розв'язків таких інтегральних рівнянь, а тим самим граничних задач можна дослідити використовуючи класичні теореми Фредгольма. Крім того можливість зведення граничних задач до граничних інтегральних рівнянь лежить в основі побудови ефективних чисельних методів розв'язання таких задач. Цей клас методів отримав назву «Методи граничних елементів».

Математичний апарат, який використовується для зведення граничних задач до інтегральних рівнянь спирається на спеціальні розв'язки диференціальних рівнянь в частинних похідних, так звані фундаментальні розв'язки, за допомогою яких можна утворити три потенціали: потенціал об'єму, потенціал простого шару та потенціал подвійного шару.

В посібнику розглянуті фундаментальні розв'язки для операторів Лапласа та Гельгольмца , оператора теплопровідності та хвильового оператора в двовимірному та тривимірному просторах. Показано, що вони як узагальнені функції задовольняють відповідним диференціальним рівнянням з дельта-функцією Дірака в якості вільного члена.

З отриманих фундаментальних розв'язків визначаються потенціали об'єму, простого та подвійного шару для операторів Лапласа та Гельгольмца для двовимірного та тривимірного просторів. Формулюються і доводяться теореми про властивості цих потенціалів. Зокрема фундаментальні теореми про граничні значення потенціалу подвійного шару та теорема про граничні значення правильної нормальної похідної потенціалу простого шару. Саме вони дозволяють звести основні граничні задачі для рівняння Лапласа та Гельгольмца до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

Далі формулюються та доводяться теореми про існування та єдиність розв'язків зовнішньої та внутрішньої задач Діріхле та Неймана для рівнянь Лаплас та однорідного рівняння Гельгольмца для тривимірного простору. Також розглядаються особливості застосування теорії потенціалу для двовимірного випадку.

Теоретична частина навчального посібника завершується розглядом підходів використання теорії потенціалів для дослідження основних граничних задач рівняння теплопровідності. Граничні задачі для однорідного рівняння теплопровідності з однорідними початковими умовами зводяться до інтегральних рівнянь змішаного типу Фредгольма по просторовій змінній і Вольтера по змінній часу.

Останній розділ містить приклади розв'язання задач та задачі для самостійного розв'язування.

Наведені питання для самоконтролю.

Розділ 1

Поняття узагальнених функцій та дії над ними

Поняття узагальнених функцій з'явилося як результат природного розширення класичного поняття функції. Так, виконання деяких дій над класичними функціями виводить за межи таких. Вперше узагальнену функцію в математичні дослідження у 1947 році ввів англійський фізик Поль Дірак у своїх квантово-механічних дослідженнях як необхідність математичного моделювання процесів, що відбуваються в ядрі атома. Така функція отримала назву δ - функція Дірака. Ця функція дозволяє записати просторову щільність фізичної величини (маси, величини заряду, інтенсивності джерела тепла, сили тощо) зосередженої або прикладеної в одній точці.

Розглянемо приклад, який дає уявлення про δ - функцію. Нехай ε - окіл точки $x=0$ прямої є джерелом тепла одиничної інтенсивності. Будемо припускати також, що джерело рівномірно розподілене по довжині ε - околу. Враховуючи припущення, джерело тепла може бути описане наступною функцією

$$\boldsymbol{f}_{\varepsilon}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}0 & \boldsymbol{x}>-\varepsilon\\ \dfrac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon\le\boldsymbol{x}\le\varepsilon\\ 0, & \boldsymbol{x}>\varepsilon\end{cases} \qquad (1.1).$$

При цьому важливо, що сумарна кількість тепла, що виділяється ε - околом дорівнює одиниці, тобто $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon}(x)dx=1$ (1.2).

Припустимо, що фізичний розмір джерела такий малий, що його розмірами можна нехтувати, тобто будемо вважати що джерело є точковим.

В цьому випадку природно визначити функцію

$$f_0(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, \ x \neq 0 \\ \infty, \ x = 0 \end{cases} \quad (1.3).$$

Легко бачити, що інтеграл Лебега функції $f_0(x)$ існує і $\int_{-\infty}^{\infty} f_0(x)dx = 0$.

Тобто користуючись звичайним граничним переходом (поточковою границею) ми отримуємо функцію, яка не описує одиничне точкове джерело тепла.

Для коректного визначення граничної функції пропонується розглядати замість сильної (поточкової) границі, слабку границю.

Для цього введемо набір пробних функцій $D(R^n) = \overset{0}{C^\infty}(R^n)$ - множину нескінченно диференційованих в R^n функцій з компактним носієм. Тобто таких функцій, що для кожної існує куля $U_A(0)$ радіусу A, що за межами цієї кулі функція обертається в тотожній нуль з усіма своїми похідними.

Тепер покажемо, що $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$ для ∀ φ∈ $D(R^1)$.

Дійсно:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx \right| \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)| dx =$$

$$\frac{1}{2\varepsilon}\eta(\varepsilon)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx = \eta(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\rightarrow} 0$$

Це означає, що слабка границя дорівнює $\varphi(0)$ для $\forall \varphi \in D(R^1)$.

Рівність $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$ і покладена в основу визначення δ - функції.

Таким чином δ - функцію Дірака можна визначити, як слабку границю послідовності функції $f_\varepsilon(x)$ на множині $D(R^1)$, що збігається до числа $\varphi(0)$

при цьому можна записати

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \qquad (1.4).$$

Останній вираз будемо розглядати як лінійний неперервний функціонал, який будь – якій функції $\varphi \in D(R^1)$ ставить у відповідність число $\varphi(0)$.

Означення *Узагальненою функцією* f будемо називати *будь–який* лінійний неперервний функціонал $\left\langle f, \varphi \right\rangle$ заданий на множині основних (пробних) функцій $\varphi \in D(R^n)$.

Лінійність і неперервність розуміємо в традиційному сенсі:

$$\left\langle f, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 \right\rangle = a_1 \left\langle f, \varphi_1 \right\rangle + a_2 \left\langle f, \varphi_2 \right\rangle,$$

$$\lim_{k \to \infty} \left\langle f, \varphi_k \right\rangle = 0 \;\; \forall \left\{ \varphi_k \right\}_{k=1,\infty}, \;\; \sup_{x \in K} \left| D^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \varphi_k(x) \right| \underset{k \to \infty}{\to} 0. \qquad (1.5).$$

Тобто послідовність $\varphi_k(x)$ прямує до нуля разом з усіма своїми похідними

Серед усіх узагальнених функцій виділяють клас **регулярних узагальнених** функцій , для яких функціонал можуть бути представлений у вигляді:

$$\left\langle f, \varphi \right\rangle = \iiint_{R^n} f(x)\varphi(x)dx \qquad (1.6)$$

з функцією $f(x) \in L_1^{loc}(R^n)$ - тобто абсолютно інтегрованою функцією на будь – якому компакті, що належить R^n. При цьому кожна локально інтегрована функція визначає єдину регулярну узагальнену функцію і навпаки, кожна регулярна узагальнена функція визначає єдину локально інтегровану функцію. Тобто будь яка локально інтегрована функція може розглядатися і як узагальнена і як звичайна.

При цьому єдиність означає, що дві локально інтегровані функції співпадають якщо вони відрізняються між собою на множині нульової міри.

Усі інші лінійні неперервні функціонали визначають **сингулярні узагальнені** функції. Прикладом останніх може служити δ - функція Дірака. Дуже часто узагальнені функції називають також **розподілами**.

Хоча сингулярні узагальнені функції є частинним випадком узагальнених функцій, але для їх представлення найчастіше теж використовується позначення (1.6) таке саме як і для регулярних узагальнених функцій.

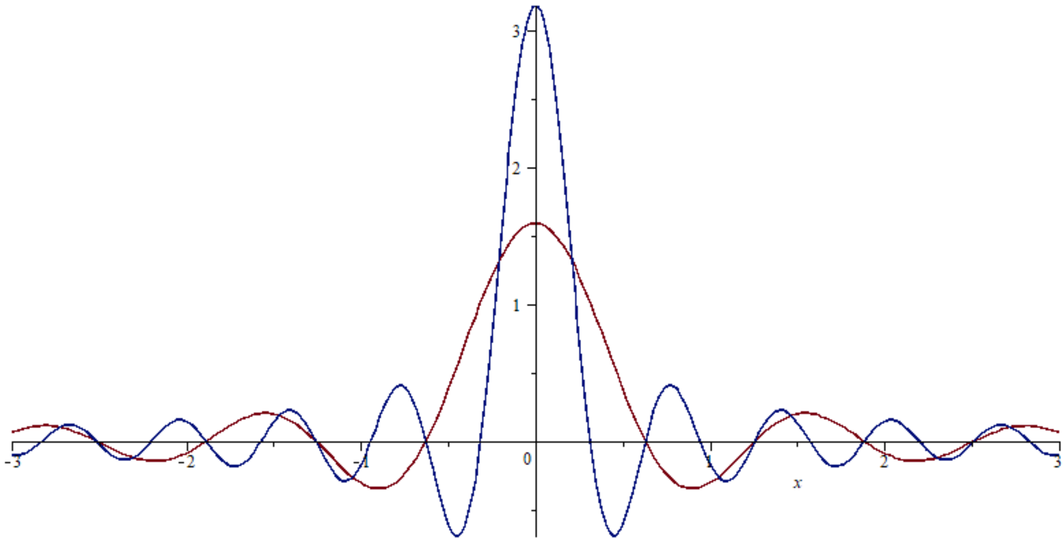
Справа в тому, що для будь – якої сингулярної узагальненої функції $\langle f, \varphi \rangle$ **існує послідовність регулярних узагальнених функцій, яка слабко збігається до неї. Ця послідовність неєдина.**

Тобто, існує $\{f_k\}_{k=1..\infty} \in L_1^{loc}(R^n)$, що $\lim\limits_{k\to\infty} \iiint\limits_{R^n} f_k(x)\varphi(x)dx = \langle f, \varphi \rangle$.

Зауважимо, що δ - функцію ми побудували як границю $\boldsymbol{f_{\varepsilon}(x)}$, яку можна було назвати δ - подібною послідовністю локально інтегрованих функцій.

Можна навести і інші приклади δ - подібних послідовностей:

$$f_m(x) = \frac{m}{\pi(1+m^2x^2)} \qquad f_m(x) = \frac{\sin mx}{\pi x} \qquad f_m(x) = \frac{m}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-m^2x^2}{2}}$$



Графік $f_m(x) = \frac{\sin mx}{\pi x}$ для m=5, m=10

Для цих прикладів неважко показати, що $\lim_{k\to\infty} \iiint_{R^n} f_k(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$

Узагальнені функції та фізичні розподіли

Узагальнені функції (часто їх називають розподілами) можна інтерпретувати як щільність розподілу електричних, магнітних зарядів або розподіл мас, тощо. Так наприклад функцію Дірака можна трактувати як щільність з якою розподілена маса, що дорівнює одиниці в точці $\boldsymbol{x} = 0$. Аналогічним чином можна ввести і здвигнуту функцію Дірака.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \varphi(a). \qquad (1.7).$$

Використовуючи (1.7) можна зобразити щільність розподілу зосереджених мас або іншої фізичної величини в точках прямої.

Так, якщо в точках $x_i \in [a,b]$ струни розташовані зосереджені (точкові) маси $\boldsymbol{m}_i$, $\boldsymbol{i} = 1,2,...$, то щільність такого розподілу мас можна зобразити у вигляді $\rho(x) = \rho_0 + \sum_{i=1} m_i\delta(x - x_i)$, де ρ_0 - щільність самої струни, m_i - маси кульок. При цьому повну масу, зосереджену можна порахувати $\int_a^b \rho(x)dx = \sum_i m_i + \rho_0(b-a)$.

Аналогічно δ - функції, введеній на прямій, можна ввести δ - функцію для $N-$вимірного евклідова простору.

$$\iiint_{\mathrm{R_N}} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \varphi(a) \qquad (1.8).$$

Тобто щільність розподілу точкових мас у просторі можна також записати у вигляді $\rho(x) = \sum_{i=1} m_i\delta_3(x - x_i)$.

Якщо щільність зарядів $f(y)$ представляє собою локально інтегровану функцію, то маємо для потенціалу електростатичного поля $\mathrm{P}(x)$ відому формулу електростатики: $\mathrm{P}(x) = \iiint\limits_{R^3} f(y) \frac{1}{4\pi |x-y|} dy$.

Точковий одиничний електричний заряд розташований в точці $x \in R_3$ створює потенціал рівний $\frac{1}{4\pi |x - x_0|} = \iiint\limits_{R_3} \delta(y - x_0) \frac{1}{4\pi |x-y|} dy$. В цьому випадку $\delta(y - x_0)$ можна сприймати як щільність одиничного точкового заряду розташованого в точці x_0.

Узагальненням точкової функції Дірака є так звана поверхнева функція Дірака, яку можна визначити як лінійний неперервний функціонал, який приймає значення $<\delta_S, \varphi> = \iint\limits_{S} \varphi(x) dx$ (1.9).

Ця узагальнена функція може бути інтерпретована як щільність розподілу зарядів в просторі які зосереджені на поверхні $\boldsymbol{S}$. Потенціал електростатичного поля можна записати у вигляді

$$W(x) = < \mu(y)\delta_S(y), \frac{1}{4\pi |x-y|} > = \iiint\limits_{R_3} \mu(y)\delta_S(y) \frac{1}{4\pi |x-y|} dy = \iint\limits_{S} \frac{\mu(y) dy}{4\pi |x-y|} . \quad (1.10).$$

Легко бачити, що $W(x)$ представляє собою потенціал електростатичного поля, утворений зарядженою поверхнею S і називається **потенціалом простого шару**.

Дії над узагальненими функціями

Головною перевагою узагальнених функцій є те, що будь – яка узагальнена функція має похідні будь – якого порядку. Тобто існує розумний спосіб приписати будь якій узагальненій функції узагальнену функцію яка є її похідною будь-якого порядку. И таким чином щоб це правило було коректним і для звичайних функцій.

Для визначення похідної узагальненої функції розглянемо спочатку звичайну неперервно диференційовану функцію $f(x)$ і скористаємось наступною формулою інтегрування за частинами:

$$\int_{R^n} D^{\alpha_1 \dots \alpha_n} f(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{R^n} f(x) D^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \varphi(x) dx \qquad (1.11),$$

яка є вірною для будь – якої функції $\varphi \in D(R^n)$. Права частина рівності (1.11) має зміст для будь – якої локально інтегрованої функції. Таким чином похідною $D^{\alpha_1 \dots\dots \alpha_n}$ будь – якої локально інтегрованої функції $\boldsymbol{f}$ будемо називати лінійний неперервний функціонал, який приймає значення

$$< D^{\alpha_1 \dots \alpha_n} f, \varphi > = (-1)^{|\alpha|} \int_{R^n} f(x) D^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \varphi(x) dx \qquad (1.12).$$

Аналогічним чином вводиться похідна і для сингулярних узагальнених функцій. Тобто $D^{\alpha_1 \dots\dots \alpha_n} f$ визначається як лінійний неперервний функціонал

$$< D^{\alpha_1 \dots \alpha_n} f, \varphi > = (-1)^{|\alpha|} < f, D^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \varphi > \qquad (1.12')$$

Розглянемо приклади обчислення похідних деяких узагальнених функцій.

Приклад 1 Знайти $\theta'(x)$, де $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ - функція Хевісайда.

Розглянемо наступні рівності:

$< \theta', \varphi > = -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi'(x)dx = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = < \delta, \varphi >$. Таким чином можна записати $\theta'(x) = \delta(x)$. Тобто похідна від функції Хевісайда дорівнює дельта функції Дірака.

Приклад 2 Знайти $\delta''(x)$

$< \delta'', \varphi > = < \delta, \varphi'' > = \varphi''(0)$.

Приклад 3. $f(x)$ - кусково неперервно диференційована функція, яка має в деякій точці $\boldsymbol{x}_0$ розрив першого роду.

$$< f',\varphi >= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{x_0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx =$$

$$-f(x_0-0)\varphi(x_0) + f(x_0+0)\varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)dx + \int_{x_0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx =$$

$$\varphi(x_0)\left[f(x_0)\right] + \int_{-\infty}^{\infty}\left\{f'(x)\right\}\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}([f(x_0)]\delta(x-x_0) + \{f'(x)\})\varphi(x)dx$$

Тобто $f^{'}(x) = \left[f(x_0)\right]\delta(x-x_0) + \{f'(x)\}$.

Де $[f(x_0)] = f(x_0+0) - f(x_0-0)$. $\{f'(x)\}$ - локально інтегрована функція, яка співпадає з звичайною похідною функції $f(x)$ в усіх точках де вона існує.

Таким чином для функції, яка має скінчену кількість точок розриву першого роду має місце така формула обчислення похідної:

$$f'(x) = \left\{f'(x)\right\} + \sum_i \left[f(x_i)\right]\delta(x-x_i) \qquad (1.13).$$

Приклад 4 Нехай функція $f(x)$ задана в просторі R^3 кусково неперервно-диференційована і має розрив першого роду на кусково гладкій поверхні S. Будемо припускати, що поверхня S розділяє простір R^3 на два півпростори R_+^3 та R_-^3 Зафіксуємо на S напрям нормалі, яка направлена всередину R_+^3.

Визначимо похідну від узагальненої функції $f(x)$.

$$< \frac{\partial f}{\partial x_i},\varphi >= -\iiint_{R^3} f(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx = -\iiint_{R_+^3} f(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx -$$

$$-\iiint_{R_-^3} f(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx = \iint_S f(x+0)\varphi(x)\cos(n,x_i)ds - \iint_S f(x-0)\varphi(x)\cos(n,x_i)ds +$$

$$+\iiint_{R_-^3}\varphi(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}dx + \iiint_{R_+^3}\varphi(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}dx = \iiint_{R_3}(\{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\} + \delta_S(x)[f(x)]_S\cos(n,x_i))\varphi(x)dx$$

Де $\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right\}$ - класична похідна функції $f(x)$ в усіх точках, де вона існує. $\left[f(x)\right]_S = \left(f(x+0) - f(x-0)\right)\big|_{x\in S}$ - стрибок функції $f(x)$ на поверхні S при переході від R_+^3 до R_-^3.

Таким чином можна записати, що

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} + \left[f(x)\right]_{S(x)} \cos(n, x_i)\delta_S(x) \qquad (1.14).$$

Носій та порядок узагальнених функцій

Вводячи поняття узагальнених функцій ми використовували множину основних (пробних) функцій $D(R^n) = C_\infty^0(R^n)$. Взагалі кажучи, простір пробних функцій, а таким чином і розподілів можна узагальнити, ввівши простір основних функцій як $D(\Omega) = C_\infty^0(\Omega)$, тобто клас пробних функцій складається з функцій, які нескінченно - диференційовані в Ω і на границі області перетворюються в нуль разом з усіма своїми похідними.

Для побудови функцій такого класу використовуються функція яка називається ε - шапочкою і яка має вигляд:

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| \le \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases} \qquad (1.15).$$

Постійну C_ε обираємо так, щоб $\iiint\limits_{R^n} \omega_\varepsilon(x)dx = 1$. $\quad \omega_\varepsilon(x) \in C^\infty(R^n)$

Легко бачити, що $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \iiint\limits_{R^n} \omega_\varepsilon(y-x)\varphi(y)dy = \varphi(x)$. Це фактично означає, що ε - шапочка **слабко збігається** до $\delta(x)$ коли $\varepsilon \to +0$.

Введемо функцію $\eta(x) = \iiint\limits_{R^n} \chi(y)\omega_\varepsilon(y-x)dy$. Де $\chi(x)$ - характеристична функція множини $\Omega_{2\varepsilon}$. Тобто $\chi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in \Omega_{2\varepsilon} \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin \Omega_{2\varepsilon} \end{cases}$. Множина $\Omega_{2\varepsilon}$ утворилася з множини Ω шляхом відступу всередину Ω від границі на полосу ширини 2ε.

Тоді будь – яка функція $\varphi(x) = \eta(x) f(x) \in D(\Omega)$ якщо $f(x) \in C^{\infty}(R^n)$.

Таким чином можна утворити достатньо широкий клас пробних функцій.

Узагальнені функції взагалі кажучи не мають значень в окремих точках. В той же час можна говорити про обернення узагальненої функції в нуль в деякій області.

Означення 1 Будемо говорити, що узагальнена функція f обертається в нуль в області Ω, якщо $< f, \varphi >= 0, \ \forall \varphi \in D(\Omega)$. Нульовою множиною узагальненої функції O_f будемо називати об'єднання усіх областей у яких узагальнена функція f обертається в нуль. Носієм узагальненої функції f називають множину $\operatorname{supp} f = R^n / \mathrm{O}_f$

Означення 2 Будемо говорити, що узагальнена функція $\boldsymbol{f}$ має порядок сингулярності (або просто порядок) $\leq \boldsymbol{j}$, якщо

$$f = \sum_{|\alpha| \leq j} D^{\alpha} g_{\alpha}, \ g_{\alpha} \in L^1_{loc}(\Omega) \qquad (1.16).$$

Якщо число j у формулі (1.16) неможливо зменшити, то говорять що порядок узагальненої функції f дорівнює j.

Згортка та регуляризація узагальнених функцій.

Згорткою $f * g$ цих функцій будемо називати функцію

$$\big(f * g\big)(x) = \iiint_{R^n} f(y) g(x - y) dy = \iiint_{R^n} g(y) f(x - y) dy = \big(g * f\big)(x) \qquad (1.17).$$

Нехай $f(x), g(x)$ дві локально інтегровані функції в R^n. При цьому функція $h(x)=\iiint\limits_{R^n}\left|g(y)\, f(x-y)\right|dy$ буде теж локально інтегрована в R^n.

Таким чином згортка є локально інтегровану функцію і тим самим визначає регулярну узагальнену функцію, яка дії на основну функцію за правилом $\iiint\limits_{R^n}(f*g)(x)\varphi(x)dx$.

Розглянемо випадок згортки двох функцій f та ψ, де f - узагальнена, а ψ - основна (пробна) функція. Оскільки ψ - фінітна функція, то згортка $\left(f*\psi\right)(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\psi(x-y)dy$ (лінійний неперервний функціонал для кожного фіксованого x) існує, а враховуючи нескінчену гладкість пробної функції, $\left(f*\psi\right)\in C^{\infty}(R^n)$. Згортку для регулярної узагальненої функції запишемо у вигляді інтегралу $\iiint\limits_{R^n} f(y)\varphi(x-y)dy = \left(f*\psi\right)(x)$. Для сингулярної узагальненої функції згортка записується у вигляді лінійного неперервного функціоналу для кожного фіксованого значення x. $< f(y),\varphi(x-y) >=$ $\left(f*\psi\right)(x)\in C^{\infty}(R^n)$ гладкість згортки випливає з лінійності і неперервності функціоналу та гладкості пробної функції.

Виберемо тепер в якості пробної функції для згортки $\omega_{\varepsilon}(x)$.

Означення 3 Функцію $f_{\varepsilon}(x)=(f*\omega_{\varepsilon})(x)$ будемо називати регуляризацією узагальненої функції f.

Зрозуміло, що $f_{\varepsilon}\in C^{\infty}(R^n)$, а враховуючи, властивості ε - шапочки, легко бачити, що $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} f_{\varepsilon}=f$ слабко. Або $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int(f*\omega_{\varepsilon})(x)\varphi(x)dx =< f,\varphi >$

Тобто будь – яку узагальнену функцію можна представити як слабка границю своїх регуляризацій $f_{\varepsilon}\in C^{\infty}(R^n)$.

Приклад Розглянемо узагальнену функцію $P\dfrac{1}{x-a}$, яка співпадає на усій числовій прямій з функцією $\frac{1}{x-a}$ за винятком точки $\boldsymbol{a}$ і визначає лінійний неперервний функціонал, який діє за правилом $< P\frac{1}{x-a},\psi >= V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(x)}{x-a}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{\psi(x)}{x-a}dx + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty}...dx)$

Розглянемо узагальнену функцію $P\frac{1}{(x-a)^2}$, яка співпадає на усій числовій прямій з функцією $\frac{1}{(x-a)^2}$ за винятком точки $\boldsymbol{a}$ і визначає лінійний неперервний функціонал, який діє за правилом

$$< P\frac{1}{(x-a)^2},\psi >= V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}dx + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty}...dx)$$

Покажемо, що $\left(P\frac{1}{x-a}\right)' = -P\frac{1}{(x-a)^2}$ з точки зору узагальнених функцій. Дійсно

$$\left\langle\left(P\frac{1}{x-a}\right)',\psi\right\rangle = -\left\langle\left(P\frac{1}{x-a}\right),\psi'\right\rangle = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{\psi'(x)}{x-a}dx + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{\psi'(x)}{x-a}dx\right) =$$

$$-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{d\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{x-a} + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{d\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{x-a}\right) =$$

$$-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\left.\frac{\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{x-a}\right|_{-\infty}^{a-\varepsilon} + \left.\frac{\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{x-a}\right|_{a+\varepsilon}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{(x-a)^2} + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{(x-a)^2}\right) =$$

$$-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon}\frac{\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{(x-a)^2}dx + \int\limits_{a+\varepsilon}^{\infty}\frac{\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{(x-a)^2}dx\right) - \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\psi(a-\varepsilon)-\psi(a)}{-\varepsilon} - \frac{\psi(a+\varepsilon)-\psi(a)}{\varepsilon}\right) =$$

$$-V.p.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\psi(x)-\psi(a)\right)}{(x-a)^2}dx = -\left\langle P\frac{1}{(x-a)^2},\psi\right\rangle$$

Питання до першого розділу

1. Поняття δ - функції Дірака, слабка збіжність

2. Які фізичні характеристики можна моделювати за допомогою δ - функції.
3. Що називається дельта подібною послідовністю. Надайте приклади.
4. Надати визначення узагальнених функцій, навести приклади.
5. Чи можна звичайні неперервно-диференційовані функції розглядати як узагальнені.
6. Чи мають узагальнені функції значення в окремих точках.
7. Сингулярні та регулярні узагальнені функції. Який зв'язок між цими класами узагальнених функцій.
8. Поясніть як вводяться похідні для узагальнених функцій, наведіть приклади обчислення похідних.
9. Використання узагальнених функцій для моделювання фізичних розподілів. Запишіть щільність розподілу мас для однорідної струни в деяких відомих точках якої знаходяться маленькі кульки відомої маси.
10. Що називається згорткою та регуляризацією узагальнених функцій, представлення узагальнених функцій через їх регуляризацію.

Розділ 2

Фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів

Нехай L - диференціальний оператор порядку m вигляду

$$L = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{2.1}$$

Розглянемо диференціальне рівняння $Lu = f(x)$ (2.2).

Означення 1 Узагальненим розв'язком рівняння (3.2) будемо називати будь – яку узагальнену функцію u, яка задовольняє рівняння (3.2) в розумінні виконання рівності: $< Lu, \varphi >=< f, \varphi >,\ \forall \varphi \in D(\Omega)$ (2.3).

Рівність (3.3) рівнозначна $< u, L^* \varphi >=< f, \varphi >,\ \forall \varphi \in D(\Omega)$ (2.3'),

$L^* \varphi = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi)$ - спряжений оператор (2.4).

Особливу роль в математичній фізиці відіграють фундаментальні розв'язки для основних диференціальних операторів математичної фізики: (Гельгольмца, Лапласа, теплопровідності, хвильового), які представляють собою узагальнені розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь:

$$(\Delta + k^2) q_k(x) = -\delta(x) \tag{2.5}$$

$$\left(a^2 \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon(x,t) = -\delta(x,t) \tag{2.6}$$

$$\left(a^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x,t) = -\delta(x,t) \tag{2.7}$$

Означення 2 Узагальнені функції $q_k(x), \varepsilon(x,t), \psi(x,t)$ називаються фундаментальними розв'язками оператора Гельгольмца, теплопровідності, хвильового відповідно, якщо вони задовольняють рівняння (3.5), (3.6), (3.7) як узагальнені функції:

$$\iiint\limits_{R^n} q_k(x)(\Delta + k^2)\varphi(x)dx = -\varphi(0) \qquad (2.5'),$$

$$\iiint\limits_{R^{n+1}} \varepsilon(x,t)\left(a^2\Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(x,t)dxdt = -\varphi(0,0) \qquad (2.6'),$$

$$\iiint\limits_{R^{n+1}} \theta(x,t)\left(a^2\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(x,t)dxdt = -\varphi(0,0) \qquad (2.7').$$

$$\delta(x,t) = \delta(x)\delta(t)$$

Неважко зрозуміти, що фундаментальні розв’язки визначені таким чином є неєдиними і визначаються з точністю до розв’язків відповідного однорідного рівняння. Але серед множини фундаментальних розв’язків вибирають такі, які мають певний характер поведінки на нескінченості.

Загальний метод знаходження фундаментальних розв’язків операторів з постійними коефіцієнтами полягає в застосуванні прямого та оберненого перетворення Фур’є по просторовій змінній x та зведення рівняння в частинних похідних до алгебраїчного рівняння у випадку стаціонарного рівняння, або до звичайного диференціального рівняння у випадку нестаціонарного рівняння.

Ми покажемо що деякі узагальнені функції представляють собою фундаментальні розв’язки основних диференціальних операторів.

Фундаментальні розв’язки операторів Лапласа та Гельгольмца

Розглянемо оператор Лапласа $\Delta_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Покажемо, що для двовимірного оператора Лапласа функція

$$q^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}, \text{ де } |x| = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.8).$$

Є фундаментальним розв’язком, тобто задовольняє як узагальнена функція рівняння $\Delta_2 \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|} = -\delta(x)$.

Останнє рівняння треба розуміти як співвідношення

$$\iint_{R^2} \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\Delta_2\varphi(x)dx = -\varphi(0),\ \forall\varphi\in D(R^2) \qquad (2.9).$$

Зауважимо, що для будь-якої точки двовимірного простору окрім точки 0 функція $q^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}$ має неперервні похідні будь- якого порядку.

Доведемо рівність (3.9). Використаємо другу формулу Гріна для оператора Лапласа:

$$\iint_{R^2} \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\Delta_2\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{U_R/U_\varepsilon} \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\Delta_2\varphi(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{U_R/U_\varepsilon} \Delta_2 \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\varphi(x)dx +$$

$$+\oint_{C_R} .....dl + \lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{C_\varepsilon}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\right)\varphi(x)\right)dl$$

Покажемо, що $\Delta_2 \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|} = 0,\ x \neq 0$.

Дійсно $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\mathbf{x}|} = -\frac{\mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}|^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4}$

$\Delta_2 \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|} = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4}\right) = 0$. Таким чином, першій інтеграл дорівнює нулю. Інтеграл по сфері S_R для великого значення R теж дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції φ.

Обчислимо граничні значення поверхневих інтегралів по сфері S_ε.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{C_\varepsilon}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\right)\varphi(x)\right)dl =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{2\pi}\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi(\varepsilon\cos(\theta),\varepsilon\sin(\theta))}{\partial n}d\theta - \int_0^{2\pi}\varepsilon\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\varepsilon\cos(\theta),\varepsilon\sin(\theta)d\theta\Big)$$

При обчисленні останнього інтегралу враховано, що $\left.\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|x|}\right|_{x\in C_\varepsilon} = -\left.\frac{\partial}{\partial r}\ln\frac{1}{r}\right|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$. Множник ε під знаком інтегралу з'являється як якобіан переходу до полярної системи координат.

Враховуючи неперервну диференційованість функції φ, здійснюючи граничний перехід при $\varepsilon \to 0$, отримаємо, що перший інтеграл прямує до нуля, а другий до значення $-\varphi(0,0)$, що і доводить рівність (3.9).

Фундаментальний розв'язок тривимірного оператора Гельгольмца

$$\Lambda_3 = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2$$

Покажемо, що для тривимірного оператора Гельгольмца функція

$$\boldsymbol{q}_{\pm}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}|} \qquad (2.10)$$

є фундаментальним розв'язком, тобто задовольняє як узагальнена функція диференціальному рівнянню: $\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 q_{\pm}^k(x)}{\partial x_i^2} + k^2 q_{\pm}^k(x) = -\delta(x)$, яке треба розуміти як $\iiint_{R^3} q_{\pm}^k(x)\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2\right)\varphi(x)dx = -\varphi(0)$ (2.11).

Обчислимо ліву частину рівності (3.11) використаємо другу формулу Гріна для оператора Гельгольмца.

$$\iiint_{R^3} q_{\pm}^k(x)\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2\right)\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\iiint_{U_R/U_\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2\right)\varphi(x)\cdot q_{\pm}^k(x)dx =$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\iiint\limits_{U_R/U_\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+k^2\right)q_\pm^k(x)\cdot\varphi(x)dx+\iint\limits_{S_R}\cdots dS+\right.$$
$$\left.+\iint\limits_{S_\varepsilon}\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}q_\pm^k(x)-\varphi(x)\frac{\partial q_\pm^k(x)}{\partial n}\right)dS\right)$$

Обчислимо кожний з інтегралів.

Покажемо, що $\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+k^2\right)q_\pm^k(x)=0,\ x\neq 0$.

Дійсно, для обчислення другої похідної можна скористатися формулою:

$$\frac{\partial^2 q_+^k(x)}{\partial x_j^2}=\frac{\partial^2}{\partial|x|^2}\left(\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial|x|}{\partial x_j}\right)^2+\frac{\partial}{\partial|x|}\left(\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial^2|x|}{\partial x_j^2}\right)$$

Обчислимо окремо перший та другий доданки

$$\frac{\partial^2}{\partial|x|^2}\left(\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\right)=-\frac{e^{ik|x|}(k^2|x|^2+2ik|x|-2)}{4\pi|x|^3}\ ,\qquad \left(\frac{\partial|x|}{\partial x_j}\right)^2=\frac{x_j^2}{|x|^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial|x|}\left(\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial^2|x|}{\partial x_j^2}\right)=\frac{e^{ik|x|}(ik|x|-1)}{4\pi|x|^5}\left(|x^2|-x_j^2\right).$$

Після підстановки та приведення подібних отримаємо

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+k^2\right)q_\pm^k(x)=\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|^3}\left(-k^2|x|^2\right)+k^2\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}=0\,.$$

Таким чином першій інтеграл дорівнює нулю.

Інтеграл по сфері великого радіусу $\boldsymbol{S_R}$ дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції.

$$\oiint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}q_\pm^k(x)dS=\frac{e^{ik|\varepsilon|}}{4\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon^2\sin\theta\frac{\partial\varphi(\varepsilon\cos\psi\cos\theta,\varepsilon\sin\psi\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)}{\partial n}d\psi d\theta\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}0$$

Обчислимо останній поверхневий інтеграл

$$-\iint_{S_\varepsilon} \frac{\partial q_{\pm}^k(x)(x)}{\partial n}\varphi(x)dS = \frac{e^{ik\varepsilon}(ik\varepsilon\text{-}1)}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon}\varphi(x)dS = \frac{e^{ik\varepsilon}(ik\varepsilon\text{-}1)}{4\pi\varepsilon^2}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon^2\sin\theta\cdot\varphi(\varepsilon\cos\psi\cos\theta,\varepsilon\sin\psi\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\psi d\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\varphi(0)$$

Таким чином рівність (2.11) доведена.

Зауважимо, що з формули (2.10) легко отримати фундаментальний розв’язок для тривимірного оператора Лапласа, тобто показати, що функція

$$\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}|} \tag{2.12}$$

задовольняє наступному рівнянню. $\Delta_3\frac{1}{4\pi|x|} = -\delta(x),\ x\in R^3$ (2.13).

Формально формула (3.12) можна отримати з (3.10) при $k=0$.

Фундаментальний розв’язок двовимірного оператора Гельгольмца

Покажемо, що $q^k(x) = \frac{1}{2\pi}K_0(-ik|x|),\ x = (x_1, x_2)$ (2.14)

є фундаментальним розв’язком двовимірного оператора Гельгольмца, тобто задовольняє співвідношенню:

$$\iint_{R^2} q^k(x)\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+k^2\right)\varphi(x)dx = \text{-}\varphi(0) \tag{2.15}$$

У формулі (3.14) функція $\boldsymbol{K}_{\nu}(\boldsymbol{x})$ - функція Бесселя другого роду уявного аргументу ν - порядку і є одним з двох лінійно – незалежних розв’язків лінійного диференціального рівняння Бесселя уявного аргументу $x^2Y'' + xY' - (x^2+\nu^2)Y = 0$.

Доведення (3.15) аналогічне доведенню співвідношення (2.9).

Покажемо, що (3.14) задовольняє рівняння:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+k^2\right)\frac{1}{2\pi}K_0(-ik|x|)=0,\ \ x\neq 0$$

Обчислимо частинні похідні

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\frac{1}{2\pi}K_0(-ik|x|)=\frac{1}{2\pi}\left(-k^2K_0''(-ik|x|)\frac{x_j^{\ 2}}{|x|^2}-ikK_0'(-ik|x|)\frac{|x^2|-x_j^2}{|x|^3}\right)$$

Таким чином

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+k^2\right)\frac{1}{2\pi}K_0(-ik|x|)=\frac{1}{2\pi}\left(-k^2K_0''(-ik|x|)-ikK'(-ik|x|)\frac{1}{|x|}+k^2K_0(-ik|x)|\right)=0$$

Остання рівність стає очевидною якщо помножити останнє рівняння на $|\boldsymbol{x}|^2$ та ввести нову незалежну змінну $\xi=-ik|x|$.

При доведенні рівності (2.15) важливим є також характер поведінки фундаментального розв'язку і його першої похідної к околі точки $x=0$.

Відомо, що $K_0(ix)\sim\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\mathrm{x}|},\ K_0'(ix)\sim-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|x|},\ x\to+0$.

Фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності

Покажемо, що фундаментальним розв'язком оператора теплопровідності є $\varepsilon(x,t)=\frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}},\ x\in R^n$ (2.16).

$\theta(t)$ - функція Хевісайда.

Це означає, що узагальнена функція (3.16) задовольняє інтегральній тотожності :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\iiint_{R^n}\varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a^2\Delta\varphi\right)dxdt=-\varphi(0,0),\ \forall\varphi\in D(R^{n+1}) \quad (2.17).$$

Очевидно, що $\varepsilon\left(x,t\right)\in C^{\infty}\left(t>0,x\in R^n\right)$. Покажемо, що ця функція задовольняє рівняння теплопровідності:

$$\left(a^2\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon(x,t) = 0,\ \ t>0,\ x\in R^n. \qquad (2.18).$$

Обчислимо частинні похідні: $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \left(\dfrac{|x|^2}{4a^2t^2} - \dfrac{n}{2t}\right)\varepsilon \qquad \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x_i} = -\dfrac{x_i}{2a^2t}\varepsilon$

$\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_i^2} = \left(\dfrac{x_i^2}{4a^2t^2} - \dfrac{1}{2a^2t}\right)\varepsilon$. Підставляючи знайдені похідні в оператор теплопровідності встановимо справедливість співвідношення (2.18).

Покажемо справедливість (2.17) використовуючи другу формулу Гріна для оператора теплопровідності.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\iiint_{R^n}\varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right)dxdt = \lim_{\tau\to 0, R\to\infty}\int_{\tau}^{\infty}\iiint_{U_R}\varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right)dxdt =$$

$$= \lim_{\tau\to 0 R\to\infty}\left[\int_{\tau}^{\infty}\iiint_{U_R}\varphi(x,t)\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - a^2\Delta\varepsilon\right)dxdt + \int_{\tau}^{\infty}\iint_{S_R}a^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\varepsilon - \frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\varphi\right)dS_R dt + \iiint_{U_R}\varepsilon\,\varphi\Big|_{\tau}^{\infty}dx\right] =$$

$= -\lim\limits_{\tau\to 0}\iiint\limits_{R^n}\varphi(x,\tau)\varepsilon(x,\tau)dx$. Можна показати, що $\iiint\limits_{R^3}\dfrac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}dx = 1,\ t>0$.

Покажемо, що $\dfrac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}}}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n}\xrightarrow[\tau\to+0]{\text{слабко}}\delta(x)$.

Дійсно $\left|\iiint\limits_{R^n}\dfrac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}}}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n}\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)dx\right| \le \dfrac{K}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n}\iiint\limits_{R^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}}|x|dx = A$, де

$K = \max\limits_{x}\|\mathbf{grad}\varphi(x)\|$ (нерівність Ліпшица для функцій багатьох змінних). Для обчислення останнього інтегралу перейдемо до узагальненої сферичної системи координат та введемо нову змінну: $\xi = \dfrac{r}{2a\sqrt{\tau}}$.

$$A = \frac{K\sigma_n}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n}\lim_{R\to\infty}\int_0^R \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{r}^2}{4\mathrm{a}^2\tau}} r^n dr = \frac{2a\sqrt{\tau}K\sigma_n}{\pi^{\frac{n}{2}}}\lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{R}{2a\sqrt{\tau}}} e^{-\xi^2}\xi^n d\xi =$$

$$\frac{2a\sqrt{\tau}K\sigma_n}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-\xi^2}\xi^n d\xi = \mathrm{O}(\tau^{0.5}) \underset{\tau\to+0}{\to} 0$$

Фундаментальний розв'язок хвильового оператора

Покажемо, що узагальнена функція

$$\psi_1(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |\mathrm{x}|) \qquad (2.19)$$

є фундаментальним розв'язком одновимірного хвильового оператора, тобто задовольняє інтегральному співвідношенню:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(x,t)(a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2})dxdt = -\varphi(0,0), \quad \forall\varphi\in D(R^2) \qquad (2.20).$$

Обчислимо ліву частину виразу (3.20). Врахуємо, що $\psi_1(x,t) = 0,\ |x| > at$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(x,t)(a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2})dxdt = -\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\frac{|x|}{a}}^{\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dtdx + \frac{a}{2}\int_0^\infty\int_{-at}^{at}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dxdt =$$

$$\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\varphi\left(x,\frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}dx + \frac{a}{2}\int_0^\infty\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial x}\right)dt =$$

$$\frac{1}{2a}\int_0^\infty\frac{\partial\varphi\left(x,\frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}dx + \frac{1}{2a}\int_0^\infty\frac{\partial\varphi\left(-x,\frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}dx + \frac{a}{2}\int_0^\infty\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial x}\right)dt =$$

В першому та другому інтегралах введемо нову змінну $x = at$, отримаємо

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial t}dt + \frac{a}{2}\int_0^\infty\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial x}\right)dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{d\varphi(at,t)}{dt}dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{d\varphi(-at,t)}{dt}dt = -\frac{1}{2}\varphi(0,0) - \frac{1}{2}\varphi(0,0) = -\varphi(0,0)$$

Таким чином формула (3.20) доведена.

Без доведення наведемо вигляд фундаментального розв’язку для двовимірного та тривимірного хвильового оператора.

$$\psi_2(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x^2|}}, \quad x \in R^2 \qquad (2.21).$$

$$\psi_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x), \quad x \in R^3 \qquad (2.22).$$

Питання до другого розділу

1. Надати визначення фундаментального розв’язку основних диференціальних операторів математичної фізики.
2. Поясніть, чому фундаментальні розв’язки є узагальненими функціями.
3. Запишіть фундаментальний розв’язок операторів Лапласа та Гельгольмца для R^3.
4. Який фізичний зміст має фундаментальний розв’язок оператора Лапласа в R^3.
5. Записати фундаментальний розв’язок рівнянь Лапласа та Гельгольмца для R^2. Надайте фізичний зміст цього фундаментального розв’язку.
6. Чи є фундаментальні розв’язки операторів Лапласа та Гельгольмца регулярними узагальненими функціями. Надайте пояснення.
7. Показати, що фундаментальні розв’язки операторів Лапласа та Гельгольмца задовольняють рівнянню Лапласа та однорідному рівнянню Гельгольмца в усіх точках простору за винятком початку координат.
8. Записати фундаментальний розв’язок рівняння теплопровідності.
9. Який фізичний зміст має фундаментальний розв’язок оператора теплопровідності.
10. Записати фундаментальні розв’язок хвильового оператора для R^1, R^2, R^3

11. Чи буде фундаментальний розв’язок хвильового оператора в R^3 регулярною узагальненою функцією. Поясніть чому.
12. Чи буде фундаментальний розв’язок хвильового оператора в R^2 регулярною узагальненою функцією. Поясніть чому.

Розділ 3

Потенціали операторів Лапласа та Гельгольмца, їх властивості

Теорія потенціалів є ефективним засобом дослідження існування і єдиності розв’язків граничних задач для еліптичних та параболічних рівнянь. За допомогою потенціалів граничні задачі можна звести до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з полярним ядром, а іноді до інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду з сингулярним (полярним) або навіть гіперсингулярним ядром.

При отримані замість граничної задачі інтегрального рівняння Фредгольма дослідження існування і єдиності розв’язку можна проводити використовуючи теорію Фредгольма для інтегральних рівнянь.

Крім того, використовуючи потенціали можна побудувати більш ефективні чисельні методи знаходження розв’язків граничних задач, чисельні методи які базуються на теорії потенціалу називають методами граничних інтегральних рівнянь.

Введемо потенціали для основних еліптичних операторів Лапласа і Гельгольмца для тривимірного евклідового простору.

$$U(x)=\iiint_{\Omega}\frac{\rho(y)}{4\pi|x-y|}dy \quad (3.1), \qquad U^k(x)=\iiint_{\Omega}\frac{e^{\pm ik|x-y|}\rho(y)}{4\pi|x-y|}dy \quad (3.1'),$$

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})=\iint_{S}\frac{\mu(\boldsymbol{y})}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y \quad (3.2), \qquad V^k(x)=\iint_{S}\frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y \quad (3.2'),$$

$$W(x)=\iint_{S}\sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y \quad (3.3), \quad W^k(x)=\iint_{S}\sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}dS_y \quad (3.3').$$

Точки $x, y \in R^3$.

Означення 1 Інтеграли (3.1), (3.1’) будемо називати потенціалом об’єму для оператора Лапласа та Гельгольмца відповідно, інтеграли (3.2), (3.2’) будемо називати потенціалами простого шару для оператора Лапласа та Гельгольмца відповідно, Інтеграли (3.3), (3.3’)будемо називати потенціалами подвійного шару для оператора Лапласа та Гельгольмца відповідно.

При цьому функції ρ, μ, σ називають щільністю потенціалів, які задані в області Ω або на поверхні $\boldsymbol{S}$.

Як легко бачити, при записі усіх потенціалів використовується фундаментальний розв’язок відповідного оператора:

Фундаментальний розв’язок оператора Лапласа $\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ для потенціалів об’єму, простого шару і подвійного шару для оператора Лапласа, або фундаментальний розв’язок оператора Гельгольмца $\dfrac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ для потенціалів об’єму, простого шару і подвійного шару.

Аналогічно потенціалам для операторів Лапласа і Гельгольмца в тривимірному просторі, можна ввести потенціали і для двовимірного простору. При цьому треба використовувати фундаментальні розв’язки оператора Лапласа і Гельгольмца в двовимірному просторі.

Нагадаємо, що фундаментальний розв’язок рівняння Лапласа при $\boldsymbol{n}=2$ має вигляд $\boldsymbol{q}_0(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$, та фундаментальний розв’язок для оператора Гельгольмца при $\boldsymbol{n}=2$, який можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{q}_k(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)=\pm\frac{\boldsymbol{i}}{4}\left(\boldsymbol{J}_0(\boldsymbol{k}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\pm \boldsymbol{i}\boldsymbol{N}_0(\boldsymbol{k}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\right) \qquad (3.4).$$

В (3.4) функції $\boldsymbol{J}_0(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{N}_0(\boldsymbol{x})$ - функції Бесселя нульового порядку першого і другого роду.

Відповідно до вигляду фундаментальних розв’язків, потенціали в двовимірному просторі матимуть вигляд:

$$\boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{x}) = \iint_{\boldsymbol{D}} \rho(\boldsymbol{y})\boldsymbol{q}_0(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\boldsymbol{dx} \quad (3.5), \quad \boldsymbol{U}_k(\boldsymbol{x}) = \iint_{\boldsymbol{D}} \rho(\boldsymbol{y})\boldsymbol{q}_k(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\boldsymbol{dx} \quad (3.5'),$$

$$\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{x}) = \oint_{\boldsymbol{C}} \mu(\boldsymbol{y})\boldsymbol{q}_0(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\boldsymbol{dl}_y \quad (3.6), \quad \boldsymbol{V}_k(\boldsymbol{x}) = \oint_{\boldsymbol{C}} \mu(\boldsymbol{y})\boldsymbol{q}_k(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\boldsymbol{dl}_y \quad (3.6'),$$

$$\boldsymbol{W}_0(\boldsymbol{x}) = \oint_{\boldsymbol{C}} \sigma(\boldsymbol{y})\frac{\partial \boldsymbol{q}_0(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)}{\partial \boldsymbol{n}_y}\boldsymbol{dl}_y \quad (3.7), \quad \boldsymbol{W}_k(\boldsymbol{x}) = \oint_{\boldsymbol{C}} \sigma(\boldsymbol{y})\frac{\partial \boldsymbol{q}_k(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)}{\partial \boldsymbol{n}_y}\boldsymbol{dl}_y \quad (3.7').$$

Відмітимо, що властивості потенціалів залежать від декількох факторів, перелічимо їх:

властивостей щільності потенціалів;

положення точки $\boldsymbol{x}$ (належить $\boldsymbol{x}$ області інтеграції або не належить);

властивості поверхні $\boldsymbol{S}$ для потенціалів простого і подвійного шару.

Властивості потенціалів поза областю інтеграції

Теорема 1 *(про властивості потенціалів поза областю інтеграції)* Якщо щільності потенціалів простого і подвійного шару інтегровані на поверхні $\boldsymbol{S}$, $\iint_{S} |\mu(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{dS}_y < \infty,\ \iint_{S} |\sigma(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{dS}_y < \infty$, а потенціалу об'єму інтегрована в області Ω $\iiint_{\Omega} |\rho(\boldsymbol{y})|\boldsymbol{dy} < \infty$, то відповідні потенціали для оператору Лапласа і Гельгольмца є функціями які мають неперервні похідні будь-якого порядку в довільній області Ω_1, яка не перетинається з областю інтегрування (Ω для потенціалу об'єму та $\boldsymbol{S}$ для потенціалів простого та подвійного шару) і в кожній точці Ω_1 ці потенціали задовольняють рівняння Лапласа або однорідне рівняння Гельгольмца відповідно.

Доведення теореми для будь – якого з потенціалів практично не відрізняється, тому продемонструємо доведення для випадку ***потенціалу простого шару оператора Гельгольмца***.

Оскільки щільність потенціалу простого шару μ інтегрована на $\boldsymbol{S}$, а функція $\dfrac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ є неперервно-диференційованою скільки завгодно разів у випадку, коли $(x,y)\in(\Omega_1,S)$, $\Omega_1\cap S=\emptyset$, то можна застосувати теорему про можливість диференціювання такого інтегралу, шляхом обчислення похідної від підінтегральної функції.

Тобто $D^{\alpha}V^{k}(x)=\iint\limits_{S}\mu(y)D^{\alpha}\left(\dfrac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)dS_y,\ x\in\Omega_1$, оскільки підінтегральна функція $\mu(y)D^{\alpha}\left(\dfrac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)$ - є неперервною функцією аргументу x, майже для кожного $y\in S$, то $\iint\limits_{S}\mu(y)D^{\alpha}\left(\dfrac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)dS_y\in C(\Omega_1)$.

Оскільки потенціал має неперервні похідні будь – якого порядку, то

$$(\Delta+k^2)V^{k}(x)=\iint\limits_{S}\mu(y)(\Delta_x+k^2)\left(\dfrac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)dS_y=0,\ \ x\in\Omega_1.$$

Останній інтеграл дорівнює нулю, оскільки при $x\neq y$, $(\Delta_x+k^2)\left(\dfrac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)\equiv 0$. Таким чином теорема доведена.

Теорема 2 *(про неперервність і неперервну диференційованість потенціалу об'єму)* Якщо щільність потенціалу об'єму обмежена в області Ω, то потенціал об'єму для оператора Лапласа і Гельгольмца (3.1) та (3.1') э неперервними і неперервно-диференційованими функціями в усьому евклідовому просторі R^3.

Доведення Розглянемо функцію $\rho_1(y)=\begin{cases}\rho(y), y\in\Omega\\ 0, \quad\ y\in\Omega'\end{cases}$. Функція ρ_1 залишається інтегрованою в будь – якій області $\Omega_1\in R^3$.

Нехай $x\in R^3$ довільна точка . Розглянемо будь – яку область, яка містить точку $\boldsymbol{x}$, нехай це область Ω_1, тоді $\quad U_k(x)=\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\rho_1(y)dy$.

На останню формулу будемо дивитися як на результат відображення деякої функції $\rho_1 \in L_2(\Omega_1)$ за допомогою полярного ядра $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$.

Відомо (Лекція 2 лема 3), що результатом відображення буде функція $\boldsymbol{U_k}\in \boldsymbol{C}(\Omega_1)$. Таким чином неперервність потенціалу доведена.

Розглянемо тепер функцію $\boldsymbol{U_k^{(s)}}(\boldsymbol{x})=\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x_s}}\frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\rho_1(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dy}$

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}=\frac{\left(\pm ik|x-y|-1\right)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\frac{\partial|x-y|}{\partial x_s}=$$

$$\frac{\left(\pm ik|x-y|-1\right)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\frac{x_s-y_s}{|x-y|}=\frac{A_s(x,y)}{|x-y|^2}$$

Де $\boldsymbol{A_s}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$-неперервна функція. Таким чином $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x_s}}\frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ є полярним ядром в будь – який області тривимірного простору.

А це означає що $\boldsymbol{U_k^{(s)}}(\boldsymbol{x})=\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x_s}}\frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\rho_1(\boldsymbol{y})\boldsymbol{dy}$ як результат відображення функції $\rho_1\in \boldsymbol{L}_2(\Omega_1)$ за допомогою полярного ядра є неперервною функцією. Тобто $\boldsymbol{U_k^{(s)}}\in \boldsymbol{C}(\Omega_1)$.

Покажемо тепер, що $\boldsymbol{U_k^{(s)}}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial \boldsymbol{U_k}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x_s}}$.

Розглянемо

$$\int\limits_{z_0}^{z_s}U_k^{(s)}(..x_s..)dx_s=\int\limits_{z_0}^{z_s}\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\rho_1(y)dydx_s=\iiint\limits_{\Omega_1}\rho_1(y)\int\limits_{z_0}^{z_s}\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}dx_sdy=$$

$$\left.\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\rho_1(y)dy\right|_{x_s=z_s}-\left.\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\rho_1(y)dy\right|_{x_s=z_0}=\left.U_k(x)\right|_{x_s=z_s}-\left.U_k(x)\right|_{x_s=z_0}$$

Вважаємо точку $\boldsymbol{z}_s$ - змінною, а $\boldsymbol{z}_0$ фіксованою і обчислимо похідну від лівої і правої частини останньої рівності $\frac{\partial \boldsymbol{U}_k(..\boldsymbol{z}_s..)}{\partial \boldsymbol{z}_s} = \boldsymbol{U}_k^{(s)}(..\boldsymbol{z}_s..)$. Таким чином теорема доведена.

Теорема 3 (*Про другі похідні потенціалу об'єму)* Якщо цільність потенціалу об'єму $\rho \in \boldsymbol{C}^{(1)}(\Omega) \cap \boldsymbol{C}(\overline{\Omega})$, то об'ємний потенціал (3.1) і (3.1') має в області Ω неперервні похідні другого порядку і задовольняє відповідно рівнянню Пуассона

$$\Delta U(x) = -\rho(x),\ x \in \Omega \tag{3.6}$$

або неоднорідному рівнянню Гельгольмца

$$(\Delta + \boldsymbol{k}^2)\boldsymbol{U}_k(\boldsymbol{x}) = -\rho(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{3.6'}$$

Доведення проведемо для потенціалу об'єму оператора Гельгольмца в тривимірному випадку. Усі інші випадки розглядаються аналогічно.

Оскільки щільність потенціалу є неперервною, то згідно до теореми 2 потенціал об'єму має неперервні перші похідні зокрема і в області Ω. Обчислимо похідну потенціалу об'єму:

$$\frac{\partial U_k(x)}{\partial x_j} = \iiint\limits_{\Omega} \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dy = -\iiint\limits_{\Omega} \rho(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dy =$$
$$= \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial \rho(y)}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dy - \iint\limits_{S} \rho(y) \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \cos(n(y), y_j) dS_y \tag{3.7}$$

В (3.7) була використана формула інтегрування за частинами. Таким чином перша частинна похідна потенціалу об'єму представлена у вигляді двох потенціалів: потенціалу об'єму з неперервною щільністю $\frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{y}_j}$ і потенціалу простого шару з інтегрованою щільністю $\rho(y)\cos(n(y), y_j)$. З теореми 2 випливає що перший доданок - потенціал об'єму є неперервно-диференційована функція, а з теореми 1 випливає, що і другий доданок -

потенціал простого шару є теж неперервно-диференційована функція.

Таким чином можна обчислити другу похідну, шляхом диференціювання рівності (3.7).

$$\frac{\partial^2 U_k(x)}{\partial^2 x_j} = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial \rho(y)}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dy - \iint\limits_{S} \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \cos(n(y), y_j) dS_y =$$

$$-\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial \rho(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y_j}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y_j}} \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \boldsymbol{dy} + \iint\limits_{\boldsymbol{S}} \rho(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y_j}} \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y}_j) \boldsymbol{dS}_y = \boldsymbol{A}.$$

Перший доданок в правій частині останньої рівності є невласним інтегралом ($x \in \Omega$) , запишемо його у вигляді:

$$A = -\lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{\Omega/U(x,\varepsilon)} \frac{\partial \rho(y)}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} d\Omega_y + \iint\limits_{S} \rho(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \cos(n_y, y_j) dS_y =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{\Omega/U(x,\varepsilon)} \rho(y) \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dy - \underline{\iint\limits_{S} \rho(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \cos(n_y, y_j) dS_y} +$$

$$+\underline{\iint\limits_{S} \rho(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \cos(n_y, y_j) dS_y} - \iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \rho(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \cos(n_y, y_j) dS_y$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{\left(\pm ik|x-y|-1\right) e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \frac{y_j - x_j}{|x-y|} = \frac{\left(\pm ik|x-y|-1\right) e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \cos(\overrightarrow{y-x}, \overrightarrow{y_j}) =$$

$$= -\frac{\left(\pm ik|x-y|-1\right) e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \cos(n_y, y_j).$$

Тобто , вектор $\overrightarrow{y-x}$ має напрям протилежний зовнішньої нормалі на сфері $S(x,\varepsilon)$. Тоді можемо записати, що

$$\iint\limits_{\boldsymbol{S}(x,\varepsilon)} \rho(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y_j}} \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y}_j) \boldsymbol{dS}_y = -\iint\limits_{\boldsymbol{S}(x,\varepsilon)} \rho(\boldsymbol{y}) \frac{\left(\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|-1\right) \boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2} \cos^2(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y}_j) \boldsymbol{dS}_y =$$

$$-\frac{(\pm \mathrm{ik}\varepsilon - 1) \boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}\varepsilon}}{4\pi\varepsilon^2} \varepsilon^2 \iint\limits_{\boldsymbol{S}(0,1)} \rho(\boldsymbol{x} + \varepsilon\xi) \cos^2(\boldsymbol{n}_\xi, \boldsymbol{y}_j) \boldsymbol{dS}_\xi$$

Таким чином друга похідна має вигляд:

$$\frac{\partial^2 U_k(x)}{\partial^2 x_j} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iiint\limits_{\Omega/U(x,\varepsilon)} \rho(y)\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}dy + \right.$$

$$\left. + \frac{(\pm \mathrm{ik}\varepsilon - 1)e^{\pm ik\varepsilon}}{4\pi}\iint\limits_{S(0,1)} \rho(x+\varepsilon\xi)\cos^2(n_\xi, x_j)dS_\xi \right] \quad (3.8).$$

Обчислимо нарешті значення оператора Гельгольмца від потенціалу об'єму. $\left(\Delta + k^2\right)U_k(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iiint\limits_{\Omega/U(x,\varepsilon)} \rho(y)\left(\Delta_x + k^2\right)\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}dy\right] -$

$-\rho(x)\iint\limits_{S(0,1)}\sum_{j=1}^{3}\cos^2(n_\xi, x_j)dS_\xi = -\rho(\boldsymbol{x})$. Таким чином теорема 3 доведена.

Зауважимо, що теорема 3 має цілком конкретне застосування.

Зокрема частинні розв'язки рівняння Гельгольмца $\left(\Delta + \boldsymbol{k}^2\right)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\Omega$ або Пуассона $\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\Omega$ можна знайти у вигляді потенціалів об'єму для оператора Гельгольмца або Лапласа, з щільністю потенціалу $\rho(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.

Поверхня Ляпунова

Означення 2 Поверхню $\boldsymbol{S}\in\boldsymbol{R}^3$ будемо називати поверхнею Ляпунова, якщо вона задовольняє наступним умовам:

В будь – якій точці $\boldsymbol{x}$ поверхні $\boldsymbol{S}$ існує єдина цілком визначена нормаль $\boldsymbol{n}_x$.

Для будь – яких точок $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S}$, існують такі додатні константи a, α, що кут θ між векторами нормалі $\boldsymbol{n}_x, \boldsymbol{n}_y$ задовольняє умові $\theta \le a|x-y|^\alpha$ (3.9)

Теорема 4 *(Про сферу Ляпунова)* Нехай S замкнена поверхня Ляпунова, тоді існує така постійна $d > 0$, що якщо довільну точку $x_0\in S$ прийняти за центр сфери радіусу $\boldsymbol{d}$, то будь – яка пряма паралельна нормалі n_{x_0} до поверхні S перетинає поверхню S в середині сфери лише один раз (Рисунок 1).

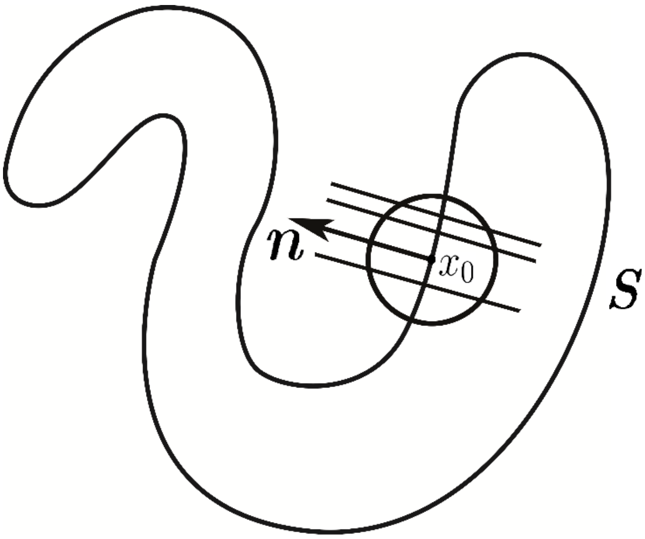


Рисунок 1

Цю сферу $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{d})$ будемо називати сферою Ляпунова. Зрозуміло, що якщо число $\boldsymbol{d}$ є радіусом сфери Ляпунова, то будь – яке число менше за $\boldsymbol{d}$ теж буде радіусом сфери Ляпунова. Звідси випливає, що число $\boldsymbol{d}$ можна обрати так, що б воно задовольняє нерівності $\boldsymbol{ad}^{\alpha} < 1$ (3.10).

Місцева система координат на поверхні Ляпунова

На поверхні $\boldsymbol{S}$ виберемо довільну точку $\boldsymbol{x}$ і визначимо її початком місцевої локальної системи координат, вісь ξ_3 направимо в напрямку зовнішньої нормалі $\boldsymbol{n}_x$, а дві інші вісі ξ_1, ξ_2 розташуємо в дотичній площині до поверхні $\boldsymbol{S}$ в точці $\boldsymbol{x}$ так що б обрані вісі утворювали праву трійку (Рисунок 2). Враховуючи теорему 4, зрозуміло, що частину поверхні Ляпунова $\boldsymbol{S}$, яка розташована в середини сфери $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})$ можна записати у вигляді явного рівняння

$\xi_3 = f(\xi_1, \xi_2)$, з деякою функцією $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^1$. (3.11).

При цьому очевидно, що $\boldsymbol{f}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(0,0)}{\partial \xi_{\boldsymbol{i}}} = 0,\ \boldsymbol{i} = 1,2$. (3.12).

Рівності (3.12) мають місце оскільки рівняння дотичної площини, що проходить через точку (0,0,0) має вигляд $\xi_3 = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}(0,0)}{\partial \xi_1}\xi_1 + \dfrac{\partial \boldsymbol{f}(0,0)}{\partial \xi_2}\xi_2$, а з іншого боку ця площина задається рівнянням $\xi_3 = 0$.

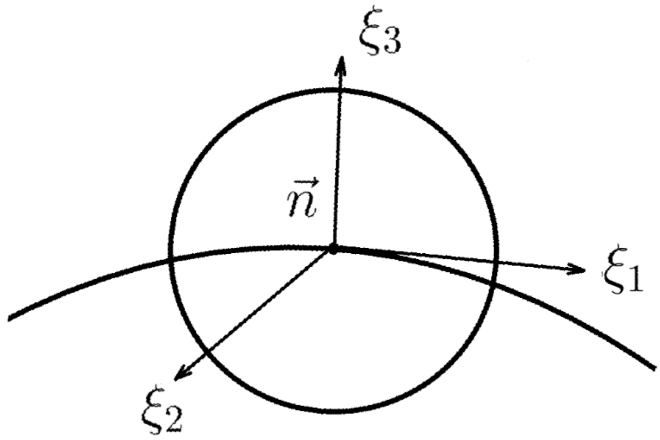


Рисунок 2

Оскільки, виконується (3.11), та (3.12), то сама функція $\boldsymbol{f}$ і її частинні похідні в середині сфери Ляпунова будуть малими. Наша задача оцінити порядок малості функції $\boldsymbol{f}$ і її частинних похідних.

Позначимо через $S_1(x) = S \cap U(x,d)$ – частину поверхні, яка лежить всередині сфери Ляпунова. Візьмемо довільну точку $y \in S_1(x)$, оцінимо $\cos(\boldsymbol{n}_y, \xi_3) = \cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{n}_x)$ (Рисунок 3).

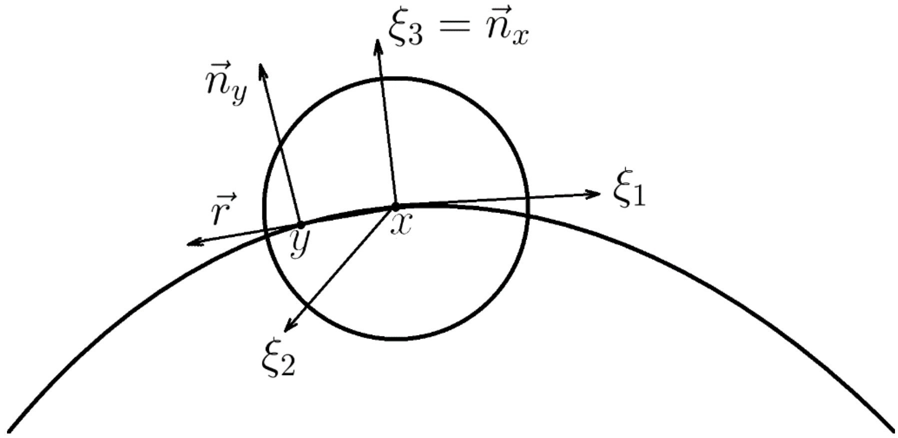


Рисунок 3

$\cos(\boldsymbol{n}_y, \xi_3) = \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - ... \geq 1 - \frac{\theta^2}{2!}$, остання нерівність виконується завдяки нерівностям (3.9), (3.10) $\theta \leq \boldsymbol{a}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^\alpha < \boldsymbol{a}\boldsymbol{d}^\alpha < 1$. Нехай

$\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, тоді $\cos(\boldsymbol{n}_y, \xi_3) = \cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{n}_x) \geq 1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{r}^{2\alpha} \geq \frac{1}{2}$ (3.13).

Оскільки в середині сфери Ляпунова рівняння поверхні має вигляд (3.11), то вектор одиничної нормалі можна записати:

$$n_y = \frac{\left(-\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}, -\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}, 1\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}\right)^2}} = \begin{pmatrix} \cos(n_y,\xi_1) \\ \cos(n_y,\xi_2) \\ \cos(n_y,\xi_3) \end{pmatrix} \quad (3.14).$$

Оцінимо $\sqrt{1+\left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}\right)^2} = \frac{1}{\cos(n_y,n_x)} \leq$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}a^2r^{2\alpha}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}a^2r^{2\alpha}}{1-\frac{1}{2}a^2r^{2\alpha}} \leq 1 + a^2r^{2\alpha}.$$

Таким чином $\left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}\right)^2 \leq 2a^2r^{2\alpha} + a^4r^{4\alpha} \leq 3a^2r^{2\alpha}$,

$\left|\frac{\partial \boldsymbol{f}(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_{\boldsymbol{i}}}\right| \leq \sqrt{3}\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}^{\alpha}, \boldsymbol{i} = 1,2$ або (3.15)

$\cos(n_y,\xi_k) \leq \sqrt{3}ar^{\alpha} = \sqrt{3}a|x-y|^{\alpha}, i = 1,2$ (3.15').

Оцінимо $|\xi_3| = |\boldsymbol{f}(\xi_1,\xi_2)|$ для частини поверхні $\boldsymbol{S}_1(\boldsymbol{x})$. Позначимо через $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2,\ \boldsymbol{r}^2 = \rho^2 + \xi_3^2$. Враховуючи оцінку (3.15), можна записати оцінку для похідної вздовж будь – якого напряму в дотичній площині

$\left|\frac{\partial f}{\partial \eta}\right| \leq \sqrt{3}ar^{\alpha} \leq \sqrt{3}ad^{\alpha} \leq \sqrt{3}$ (3.16).

Таким чином $|\xi_3| = |f(\xi_1,\xi_2)| \leq \int_0^{\rho}\left|\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|d\eta \leq \sqrt{3}\rho$ (3.17),

звідси маємо $\rho^2 \leq r^2 \leq 4\rho^2$, або $\rho \leq r \leq 2\rho$

З (3.16) маємо $\left|\frac{\partial f}{\partial \eta}\right| \le \sqrt{3}ar^{\alpha} \le 2^{\alpha}\sqrt{3}a\rho^{\alpha}$.

Таким чином з (3.17) $|\xi_3| \le \frac{2^{\alpha}a\sqrt{3}}{\alpha+1}\rho^{\alpha+1} = \boldsymbol{a}_1\rho^{\alpha+1} \le \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{r}^{\alpha+1}$ (3.18).

Оцінимо тепер $\cos(n_y,\vec{r})$ де $\vec{r} = \overrightarrow{y-x}$. Дійсно

$$\cos(n_y,\vec{r}) = \sum_{k=1}^{3}\frac{y_k - x_k}{|y-x|}\cos(n_y,\xi_k) = \sum_{k=1}^{2}\frac{\xi_k}{r}\cos(n_y,\xi_k) + \frac{\xi_3}{r}\cos(n_y,\xi_3) \le$$
$$2\sqrt{3}r^{\alpha} + a_1 r^{\alpha} = c_1 r^{\alpha}$$

Остаточно маємо $\cos(n_y,\vec{r}) = \cos(n_y,\overrightarrow{y-x}) \le c_2|y-x|^{\alpha}$ (3.19).

Тілесний кут спостереження поверхні

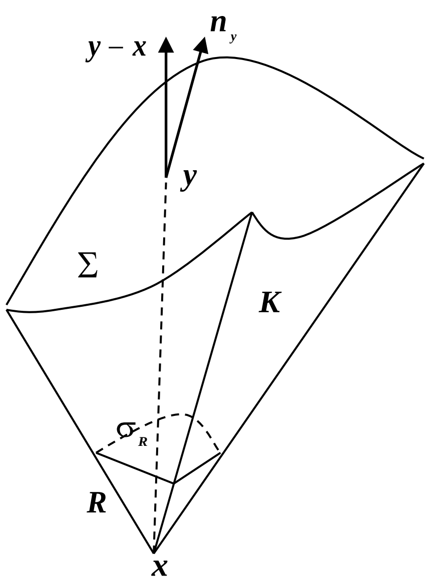


Рисунок 4

Розглянемо двосторонню кусково – гладку поверхню Σ, яка може бути як замкненою так і незамкненою. Зафіксуємо одну з двох сторін поверхні, обравши на ній додатній напрямок нормалі. Нехай $\boldsymbol{y} \in \Sigma$ - довільна точка, $\boldsymbol{n}_y$ - зовнішня нормаль в точці $\boldsymbol{y}$ до поверхні Σ. Нехай $\boldsymbol{x}$ - довільна точка простору (точка спостереження поверхні), зокрема може належати і поверхні Σ.

Будемо вважати, що взаємне розташування поверхні Σ і точки $\boldsymbol{x}$ є таким, що $\cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \ge 0$ (Рисунок 4).

З’єднаємо кожну точку поверхні Σ з точкою $\boldsymbol{x}$. Поверхня, яка утворюється в результаті з’єднання країв поверхні Σ з точкою $\boldsymbol{x}$ утворює конічну поверхню $\boldsymbol{K}$.

Виберемо точку $\boldsymbol{x}$ за центр сфери достатньо малого радіусу $\boldsymbol{R}$, такого, щоб сфера $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{R})$ не перетиналася з поверхнею Σ. Позначимо через $\sigma_{\boldsymbol{R}}$ - площу поверхні тієї частини сфери, яка опинилася в середині конусу.

Означення 3 Тілесним кутом спостереження поверхні Σ з деякої точки $x \in R^3$ будемо називати величину $\omega(x,\Sigma) = \dfrac{\sigma_R}{R^2}$ (3.20).

Величина (3.20) очевидно не залежить від радіусу сфери $\boldsymbol{R}$ і тому представляє міру тілесного кута.

У випадку, коли поверхня Σ є такою, що величина $\cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$ змінює свій знак в залежності від положення точки $\boldsymbol{y}$, то для визначення тілесного кута спостереження такої поверхні, вона розбивається на окремі частини $\Sigma = \bigcup\limits_{\boldsymbol{i}=1} \Sigma_{\boldsymbol{i}}$ на кожній з яких $\boldsymbol{sign}(\cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{const},\ \boldsymbol{y} \in \Sigma_i$.

Таким чином $\omega(\boldsymbol{x},\Sigma) = \sum\limits_{\boldsymbol{i}} \omega(\boldsymbol{x},\Sigma_{\boldsymbol{i}})\boldsymbol{sign}(\cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))\Big|_{\boldsymbol{y}\in\Sigma_{\boldsymbol{i}}}$ (3.20’).

Лема 1 Для будь – якої кусково-гладкої поверхні Σ, кут спостереження цієї поверхні визначається за формулою $\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{R}) = -\iiint\limits_{\Sigma} \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \boldsymbol{dS}_y$ (3.21).

(3.21) – потенціал подвійного шару з щільністю -1.

Теорема 5 (про обмеженість кута спостереження для скінчених поверхонь Ляпунова) Якщо Σ- скінчена поверхня Ляпунова, то існує така постійна C_0, що

$\iiint\limits_{\Sigma} \left| \dfrac{\partial}{\partial n_y} \dfrac{1}{|x-y|} \right| dS_y \le C_0$ для довільної точки $x \in R^3$ (3.22).

Питання до третього розділу

1. Надайте означення потенціалу простого шару для оператора Лапласа та Гельгольмца для двовимірного та тривимірного просторів. Поясніть що об’єднує ці об’єкти.
2. Надайте визначення потенціалів об’єму для операторів Лапласа та Гельгольмца. Який фізичний зміст має цей потенціал.

3. Надайте означення потенціалу подвійного шару для операторів Лапласа та Гельгольмца. Чи відомий вам їх фізичний зміст.
4. Поясніть, де потенціали об’єму, простого та подвійного шару є невласними інтегралами, чому.
5. Сформулювати теорему про властивості потенціалів операторів Лапласа та Гельгольмца поза областю інтеграції.
6. Що відомо про поведінку перших похідних потенціалу об'єму.
7. Сформулювати теорему про другі похідні потенціалу об'єму.
8. Як записати частинний розв’язок рівняння Пуассона використовуючи потенціал об’єму.
9. Надати означення поверхні Ляпунова, сформулювати теорему про існування сфери Ляпунова.
10. Чи буде тетраедр, паралелепіпед поверхнями Ляпунова. Поясніть чому.
11. Надати визначення тілесного кута спостереження поверхні з деякої точки простору.
12. Нехай деяка область обмежується скінченою поверхнею Ляпунова. Спробуйте пояснити під яким тілесним кутом ми бачимо цю поверхню з довільної точки що знаходиться всередині області, ззовні області, на поверхні області.
13. Сформулювати лему про обчислення тілесного кута спостереження поверхні з деякої точки простору.

Розділ 4

Властивості потенціалів подвійного та простого шару

Згідно до теореми 1 розділу 2, потенціал подвійного шару оператора Гельгольмца (та Лапласа) $W^k(x)=\iint\limits_S \sigma(y)\dfrac{\partial}{\partial n_y}\dfrac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}dS_y$ для будь – якої області, яка не має перетину з поверхнею S є функцією яка має похідні будь – якого порядку.

В точках поверхні S потенціали подвійного шару є невласним інтегралом і його поведінка залежить від властивості щільності та властивості поверхні інтегрування.

Теорема 6 (*Про пряме значення потенціалу подвійного шару)* Якщо S замкнена поверхня Ляпунова, $\sigma\in C(S)$, тоді потенціал подвійного шару (4.3), (4.3') має в будь – якій точці поверхні S цілком визначене скінчене значення і це значення неперервно змінюється, коли точка x пробігає поверхню S.

Доведення Оскільки $\sigma\in C(S)$, то σ - обмежена на поверхні S, таким чином $\left|\sigma(y)\dfrac{\partial}{\partial n_y}\dfrac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right|\le M\left|\dfrac{\partial}{\partial n_y}\dfrac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right|\le M\sqrt{1+k^2|x-y|^2}\left|\dfrac{\partial}{\partial n_y}\dfrac{1}{4\pi|x-y|}\right|\le M_1\left|\dfrac{\partial}{\partial n_y}\dfrac{1}{4\pi|x-y|}\right|,\ x,y\in S$.

Згідно до теореми 5 інтеграл $\iiint\limits_S\left|\dfrac{\partial}{\partial n_y}\dfrac{1}{|x-y|}\right|dS_y$ існує, а таким чином існує інтеграл $W^k(x)=\iint\limits_S \sigma(y)\dfrac{\partial}{\partial n_y}\dfrac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}dS_y$ коли $x\in S$.

Покажемо тепер, що $W^k\in C(S)$. Розглянемо $K(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial n_y}\dfrac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$, як ядро інтегрального оператора.

Оскільки $K(x,y)=\dfrac{A(x,y)}{4\pi\left|x-y\right|^2}\cos(n_y,y-x)$, де $A(x,y)=-\left(\mp ik\left|x-y\right|+1\right)e^{\pm ik\left|x-y\right|}$, то згідно (4.19) $\cos(\boldsymbol{n}_y,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\le \boldsymbol{c}_1\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right|^{\alpha}$. Таким чином $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\dfrac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cos(\boldsymbol{n}_y,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right|^{-0.5\alpha}}{4\pi\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right|^{2-0.5\alpha}}=\dfrac{\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right|^{2-0.5\alpha}}$. є полярним ядром. А це в свою чергу забезпечує відображення неперервної на $\boldsymbol{S}$ щільності σ в неперервний на $\boldsymbol{S}$ потенціал подвійного шару $\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{k}}$. Теорема доведена.

Означення 4 Значення потенціалу подвійного шару в точках поверхні будемо називати прямим значенням потенціалу подвійного шару і позначатимемо його $\overline{W^k(x)},\ x\in S$.

Інтеграл Гауса

Інтегралом Гауса будемо називати потенціал подвійного шару оператора Лапласа з щільністю $\sigma(\boldsymbol{y})=1$, тобто

$$W_0(x)=\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi\left|x-y\right|}dS_y \qquad (4.1).$$

Лема Якщо $\boldsymbol{S}$, замкнена поверхня Ляпунова що обмежує область Ω то інтеграл Гауса приймає такі значення:

$$\boldsymbol{W}_0(\boldsymbol{x})=\begin{cases}-1, & \boldsymbol{x}\in\Omega\\ -0.5, & \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}\\ 0, & \boldsymbol{x}\in\Omega'\end{cases} \qquad (4.2).$$

Доведення. Розглянемо випадок коли $\boldsymbol{x}\in\Omega'$. В цьому випадку функція $\dfrac{1}{4\pi\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right|}$ - гармонічна в області Ω по аргументу y оскільки $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S}$ то $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$.

Згідно до властивості гармонічної функції маємо $\displaystyle\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi\left|x-y\right|}dS_y=0$

Для випадку, коли $\boldsymbol{x}\in\Omega$ розглянемо область $\Omega_\varepsilon=\Omega/\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\varepsilon)$. Функція

$\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ буде гармонічною в області Ω_ε і для неї має місце співвідношення

$\iint\limits_{s} \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \boldsymbol{dS}_y + \iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \boldsymbol{dS}_y = 0.$ Обчислимо значення

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \frac{\cos(n_y, y-x)}{4\pi|x-y|^2} dS_y = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}(-1) \iint\limits_{S(x,\varepsilon)} dS_y = 1$$

Кут між векторами $(n_y, y-x) = \pi$ (Рисунок 5).

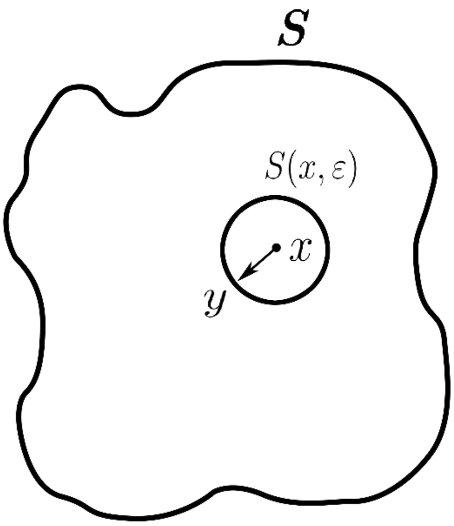


Рисунок 5

Випадок $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$ можна дослідити, якщо розглянути область $\Omega_\varepsilon^1 = \Omega / (\Omega \cap \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, \varepsilon))$

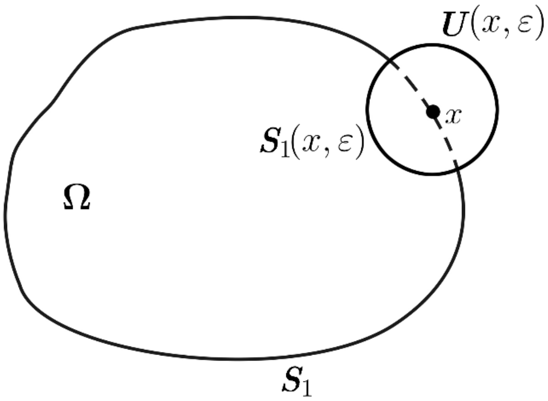


Рисунок 6

у якій функція $\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ - гармонічна і записати інтеграл по замкненій поверхні

$\boldsymbol{S}_{\varepsilon}^{1}$ яка обмежує область Ω_{ε}^{1} та спрямувати ε до нуля.

Очевидно, що $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{S_1(x,\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y=\frac{1}{2}$ (Рисунок 6). Таким чином $W_0(x)=-0.5$ коли $x\in S$.

Аналізуючи інтеграл Гауса, легко бачити, що навіть у найпростішому випадку постійної щільності потенціал подвійного шару при переході через поверхню $\boldsymbol{S}$ має розрив.

Наступна теорема вивчає поведінку потенціалу подвійного шару при підході до поверхні S з середини та ззовні області.

Теорема 7 *(Про граничні значення потенціалу подвійного шару)* Нехай $\boldsymbol{S}$ - замкнута поверхня Ляпунова, а σ неперервна на S щільність, тоді потенціал подвійного шару оператора Гельгольмца та Лапласа $\boldsymbol{W}^{k}(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{C}(\overline{\Omega})\cap\boldsymbol{C}(\overline{\Omega'})\cap\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S})$ і його граничні значення при підході до поверхні $\boldsymbol{S}$ з середини області Ω $\boldsymbol{W}_{i}^{k}(\boldsymbol{x})$ і з зовні області Ω $\boldsymbol{W}_{e}^{k}(\boldsymbol{x})$ задовольняють співвідношенням:

$$\begin{aligned}W_i^k(x)&=-\frac{\sigma(x)}{2}+\overline{W^k(x)},\quad x\in S\\ W_e^k(x)&=\frac{\sigma(x)}{2}+\overline{W^k(x)},\quad x\in S\end{aligned}\qquad (4.3).$$

Доведення Розглянемо потенціал подвійного шару

$$\boldsymbol{W}^{k}(\boldsymbol{x})=\iint\limits_{S}\sigma(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{\boldsymbol{e}^{\pm i\boldsymbol{k}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y=\iint\limits_{S}\sigma(\boldsymbol{y})(1\mp i\boldsymbol{k}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\boldsymbol{e}^{\pm i\boldsymbol{k}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y$$

Для скорочення запису позначимо $(1\mp ik|x-y|)e^{\pm ik|x-y|}=\varphi(|x-y|)$.

Розглянемо довільну точку $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{S}$ та запишемо потенціал подвійного шару у вигляді:

$$\begin{aligned}W^k(x)&=W^k(x)\pm\iint\limits_{S}\sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y=\\&=W_1^k(x)+\sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)W_0(x)\end{aligned},$$

Де $W_1^k(x)=\iint\limits_S\left[\sigma(y)\varphi(|x-y|)-\sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\right]\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y$ (4.4),

а $W_0(x)=\iint\limits_S\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y$ - інтеграл Гауса. Покажемо, що $\boldsymbol{W}_1^{\boldsymbol{k}}$ неперервна функція в точці $\boldsymbol{x}_0$. Візьмемо точку $\boldsymbol{x}_0$ за центр сфери $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0,\eta)$, яка розіб'є поверхню $\boldsymbol{S}$ на дві частини S' і S'', де $S'=S\cap U(x_0,\eta)$, а $S''=S/S'$. Враховуючи представлення поверхні $S=S'\cup S''$, запишемо W_1^k у вигляді

$$W_1^k(x)=\iint\limits_{S'}\left[\sigma(y)\varphi(|x-y|)-\sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\right]\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y+\iint\limits_{S''}[\cdots]dS_y$$

Покажемо, що в точці x_0 W_1^k неперервна за означенням, тобто $\left|W_1^k(x)-W_1^k(x_0)\right|$ можна зробити як завгодно малим за рахунок зближення точок $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{x}_0$. Запишемо очевидну нерівність

$\left|W_1^k(x)-\overline{W_1^k(x_0)}\right|\le\left|W_1''^k(x)-\overline{W_1''^k(x_0)}\right|+\left|W_1'^k(x)\right|+\left|\overline{W_1'^k(x_0)}\right|$. Оцінимо праву частину нерівності. Почнемо з $W_1'^k(x)$. Виберемо радіус сфери η так щоб \` $\left|\left[\sigma(y)\varphi(|x-y|)-\sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\right]\right|\le\frac{\varepsilon}{3C_0}$, де ε - довільне мале число, а C_0 - константа з формулювання теореми 5, нерівність (4.22). Це можливо завдяки неперервності $\sigma(\boldsymbol{y})\varphi(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)$. Таким чином $\left|\boldsymbol{W}_1'^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\right|\le\frac{\varepsilon}{3\boldsymbol{C}_0}\iint\limits_{S'}\left|\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_y}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right|\boldsymbol{dS}_y\le\frac{\varepsilon}{3}$. Аналогічна нерівність виконується і для $\left|\overline{\boldsymbol{W}_1'^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}_0)}\right|\le\frac{\varepsilon}{3}$, як для частинного випадку положення точки $\boldsymbol{x}$.

Зафіксуємо радіус сфери η і будемо вважати, що точка $\boldsymbol{x}$ достатньо близька до точки $\boldsymbol{x}_0$, така $|x-x_0|\le\frac{1}{2}\eta$, тоді на поверхні $\boldsymbol{S}''$ $|x-y|\ge|y-x_0|-|x-x_0|\ge\eta-\frac{\eta}{2}=\frac{\eta}{2}$. Таким чином підінтегральна функція в інтегралі $W_1''^k(x)$ є неперервною для $y \in S''$, $x \in S(x_0,\eta)$ і тому неперервним буде і сам інтеграл, тобто

$\left|W_1''^k(x) - \overline{W_1''^k(x_0)}\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$. Це доводить неперервність $W_1^k(x)$ в точці $\boldsymbol{x}_0$.

З неперервності $W_1^k(x)$, можемо записати що для довільної $x_0 \in S$

$$W_{1\,i}^k(x_0) = W_{1\,e}^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} \qquad (4.5).$$

Врахуємо представлення

$$W^k(x) = W_1^k(x) + \sigma(x_0)\varphi(|x - x_0|)W_0(x) \qquad (4.6).$$

Обчислимо граничні значення потенціалу в точці $\boldsymbol{x}_0$ з середини та ззовні враховуючи відомі значення інтегралу Гауса :

$$W_i^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} + \sigma(x_0)\varphi(|x_0 - x_0|)W_{0i}(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} - \sigma(x_0) \qquad (4.7);$$

$$W_e^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} + \sigma(x_0)\varphi(|x_0 - x_0|)W_{0e}(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} \qquad (4.8).$$

Оскільки $\overline{W_1^k(x_0)} = \overline{W^k(x_0)} - \sigma(x_0)\overline{W_0(x_0)} = \overline{W^k(x_0)} + \frac{\sigma(x_0)}{2}$ (4.9).

Враховуючи (4.28) - (4.30) отримаємо:

$$W_i^k(x_0) = \overline{W^k(x_0)} - \frac{\sigma(x_0)}{2}$$
$$W_e^k(x_0) = \overline{W^k(x_0)} + \frac{\sigma(x_0)}{2}$$

Таким чином теорема доведена.

Теорема 8 (про неперервність перших похідних потенціалу подвійного шару) Нехай $\boldsymbol{S}$ - замкнута поверхня Ляпунова, а σ неперервна на S щільність, тоді потенціал подвійного шару оператора Гельгольмца та Лапласа $W^k(x)$ мають неперервні похідні першого порядку в усьому евклідовому просторі R^3.

Потенціал простого шару та його властивості

Нагадаємо, що потенціали простого шару для оператора Лапласа та Гельгольмца записуються у вигляді $V(x) = \iint\limits_S \frac{\mu(y)}{4\pi|x-y|} dS_y$

$$V^k(x)=\iint_S \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y .$$

Вивчимо властивості цих потенціалів в усьому евклідовому просторі.

Теорема 9 *(про неперервність потенціалу простого шару)* Якщо S - замкнута поверхня Ляпунова, а μ вимірювана і обмежена на S, то потенціал простого шару оператора Лапласа та Гельгольмца є функцією неперервною в усьому евклідовому просторі.

Доведення. Оскільки властивості потенціалів в будь – якій точці простору, яка не належить поверхні S досліджувались в теоремі 1, то встановити неперервність потенціалу простого шару необхідно лише в точках поверхні S . Нехай точка x належить поверхні S .

Побудуємо сферу Ляпунова $S(x,d)$ і нехай $S'_d(x)$ - частина поверхні S, яка знаходиться всередині сфери Ляпунова. Тоді потенціал простого шару

$$V^k(x)=\iint_{S'_d(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y+\iint_{S\backslash S'_d(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y \qquad (4.10).$$

У другому інтегралі (4.9) підінтегральна функція є неперервна і обмежена , а значить цей інтеграл існує.

Для оцінки першого інтегралу введемо локальну систему координат ξ_1,ξ_2,ξ_3 с центром в точці x. Нехай $G'(x)$ - проекція $S'_d(x)$ на площину $\xi_3=0$, дотичну до поверхні S в точці x. Зводимо поверхневий інтеграл до подвійного $dS_y=\dfrac{d\xi_1 d\xi_2}{\cos(n_y,\xi_3)}$, тоді.

$$\left|\iint_{S'_d(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y\right| \le \iint_{G'(x)} \frac{|\mu(\xi_1,\xi_2)|d\xi_1 d\xi_2}{4\pi\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}\cos(n_y,\xi_3)} \le 2M\int_0^{2\pi}\int_0^d \frac{\rho d\rho d\varphi}{4\pi\rho}=Md$$

При оцінці інтегралу були використані оцінки (4.13) $\cos(n_y,\xi_3)\ge\dfrac{1}{2}$ та оцінка

$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} \le \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} = \frac{1}{\rho}$. Таким чином потенціал простого шару дійсно існує в кожній точці простору $\boldsymbol{R}^3$

Покажемо тепер неперервність потенціалу в точці $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$

Виберемо сферу Ляпунова $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\eta),\ \eta < \boldsymbol{d}$. Тоді потенціал простого шару можна представити аналогічно (4.10) у вигляді:

$$V^k(x) = \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y + \iint\limits_{S\setminus S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y \qquad (4.10').$$

Перший інтеграл $\boldsymbol{V}_1^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \iint\limits_{S\setminus S'_\eta(x)} \frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\mu(\boldsymbol{y})}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y$ є неперервною функцією (для довільного y підінтегральна функція як функція x є неперервною) і для $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, що $\left|\boldsymbol{V}_1^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{V}_1^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}')\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$ як тільки $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| < \delta$.

Покажемо, що $\left|\iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y - \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}dS\right| \le \frac{2\varepsilon}{3},\ |x-x'| < \delta$

Очевидно, що

$$\left|\iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y - \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}dS_y\right| \le \left|\iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y\right| + \left|\iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}dS\right|$$

Розглянемо другий інтеграл і виберемо точки $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ так, що $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| < \frac{\eta}{2}$.

Введемо локальну систему координат з центром в точці $\boldsymbol{x}$. Тоді нехай точка $y = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, а $x' = (\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)$ Тоді $\frac{1}{r} = \frac{1}{|y-x'|} \le \frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - \xi'_1)^2 + (\xi_2 - \xi'_2)^2}} = \frac{1}{\rho}$

$$\rho \le |y - x'| = |y - x' + x - x| \le |x - x'| + |x - y| \le \eta + \frac{\eta}{2} = \frac{3\eta}{2}$$

Таким чином можна записати оцінку інтеграла

$$\left|\iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}dS_y\right| \le 2M \iint\limits_{G'_\eta(x)} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{4\pi\sqrt{\left(\xi_1-\xi'_1\right)^2+\left(\xi_2-\xi'_2\right)^2}} \le$$

$$\le 2M\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{3\eta}{2}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{4\pi\rho} = \frac{3\eta M}{2} \le \frac{\varepsilon}{3}$$

за рахунок вибору достатньо маленького значення η.

Інтеграл $\left|\iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$, як частинний випадок попереднього інтегралу при $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$. Таким чином встановлено, що $\left|\boldsymbol{V}^k(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{V}^k(\boldsymbol{x}')\right| \le \varepsilon$, якщо $\left|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\right| \le \delta$. Теорема доведена.

Нормальна похідна потенціалу простого шару

Будемо розглядати потенціал простого шару $V^k(x) = \iint\limits_S \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y$ для оператору Гельгольмца Візьмемо довільну точку $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{S}$ тоді існує неперервна похідна $\frac{\partial V^k(x)}{\partial x_i}$, $i = 1,2,3$ проведемо через цю точку будь яку нормаль $\boldsymbol{n}_x$ до поверхні $\boldsymbol{S}$ (Рисунок 7).

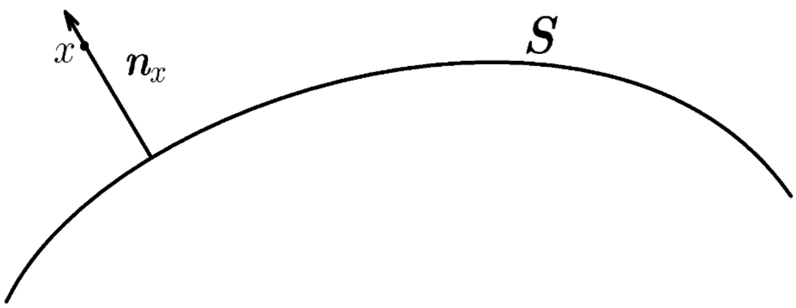


Рисунок 7

Для такого випадку в точці $\boldsymbol{x}$, можна обчислити похідну по напрямку нормалі n_x від потенціалу простого шару, яку обчислюють шляхом диференціювання підінтегральної функції $\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_x} = \frac{\partial}{\partial n_x} \iint_S \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|} dS_y = \iint_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dS_y$

Обчислимо підінтегральний вираз

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{\pm ik|x-y|-1}{4\pi|x-y|^2} e^{\pm ik|x-y|} \sum_{j=1}^{3} \frac{x_j - y_j}{|x-y|} \cos(n_x, x_j) =$$

$$\frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \cos(n_x, x-y)$$

Теорема 10 *(про пряме значення нормальної похідної потенціалу простого шару)* Якщо μ обмежена і вимірювана функція на поверхні Ляпунова $\boldsymbol{S}$, то нормальна похідна потенціалу простого шару

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_x} = \iint_S \mu(y) \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \cos(n_x, x-y) dS_y \qquad (4.11)$$

має в кожній точці поверхні $\boldsymbol{S}$ цілком визначене скінчене значення, яке неперервно змінюється коли точка $\boldsymbol{x}$ пробігає поверхню $\boldsymbol{S}$, це значення називають прямим значенням нормальної похідної потенціалу простого шару. Пряме значення нормальної похідної потенціалу простого шару позначають $\overline{\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_x}}$, $x \in S$.

Доведення При доведенні теореми будемо розглядати нормальну похідну потенціалу, як результат відображення щільності μ за допомогою інтегрального оператора з ядром

$$K(x,y) = \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \cos(n_x, x-y). \qquad (4.12).$$

Враховуючи властивості поверхні Ляпунова, можна показати, що ядро (4.33) є полярним, оскільки для достатньо малих значень $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$, $\cos(n_x, x-y) \le a_2 |x-y|^{\alpha}$. Це означає, що

$$K(x,y)=\frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}\cos(n_x,x-y)|x-y|^{-\frac{\alpha}{2}}}{4\pi|x-y|^{2-\frac{\alpha}{2}}}=\frac{A(x,y)}{4\pi|x-y|^{2-\frac{\alpha}{2}}}$$ - є полярним ядром. Звідси маємо, що інтегральний оператор з полярним ядром відображає обмежену функцію у неперервну.

Теорема 11 *(про граничні значення нормальної похідної потенціалу простого шару)* Якщо S замкнута поверхня Ляпунова, а μ неперервна на S щільність, то потенціал простого шару має на S граничні значення **правильної нормальної похідної** при підході до точки $x \in S$ з середини та ззовні області Ω і ці граничні значення можуть бути обчислені:

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_i}=\frac{\partial \overline{V^k(x)}}{\partial n}+\frac{\mu(x)}{2} \qquad (4.13),$$

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_e}=\frac{\partial \overline{V^k(x)}}{\partial n}-\frac{\mu(x)}{2} \qquad (4.14).$$

Означення 5 Граничні значення нормальної похідної в точці $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}$ потенціалу простого шару з середини $\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_i}$ та з зовні $\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_e}$ будемо називати правильними, якщо вони є граничними значеннями $\frac{\partial V^k(x)}{\partial n}$ коли $x \to x_0$ вздовж нормалі n_{x_0} з середини та ззовні відповідно.

Доведення. (*схема доведення***).** Розглянемо вираз, який представляє собою суму потенціалу подвійного шару і нормальної похідної потенціалу простого шару з однаковою щільністю μ.

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_x}+W^k(x)=\iint_S \mu(y)\left[\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}+\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right]dS_y \qquad (4.15).$$

Можна показати, що ця функція змінюється неперервно, коли точка $\boldsymbol{x}$ перетинає поверхню $\boldsymbol{S}$, рухаючись по нормалі до цієї поверхні в точці $\boldsymbol{x}$.

Враховуючи неперервність (4.36) при переході через поверхню $\boldsymbol{S}$ **вздовж нормалі** , можемо записати для довільної точки $x_0 \in S$

$$\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_i} + W_i^k(x_0) = \frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_e} + W_e^k(x_0) = \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} + \overline{W^k(x_0)}.$$

Звідси маємо: $\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_i} = \overline{W^k(x_0)} - W_i^k(x_0) + \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} = \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} + \frac{\mu(x_0)}{2}$.

$\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_e} = \overline{W^k(x_0)} - W_e^k(x_0) + \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} = \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} - \frac{\mu(x_0)}{2}$ Що і треба було довести.

Зауваження. Теореми 1-11 про властивості потенціалів, сформульовані і доведені для потенціалів операторів Гельгольмца і Лапласа в просторі R^3. Мають місце аналогічні теореми і для оператора Лапласа в просторі R^2 без змін в їх формулюванні.

Питання до четвертого розділу

1. Якому рівнянню задовольняє потенціал подвійного шару оператора Лапласа в області Ω, яка обмежена поверхнею S, та в області Ω' - доповнені.
2. Чи є потенціал подвійного шару невласним інтегралом, якщо да, то в яких точках простору.
3. Як ви розумієте термін пряме значення потенціалу подвійного шару. Які ще значення цього потенціалу можна обчислювати.
4. Значення потенціалу подвійного шару на поверхні Ляпунова, сформулювати теорему про властивості прямого значення потенціалу подвійного шару.
5. Поняття інтегралу Гауса, визначити його значення в різних точках простору.
6. Яке пряме значення має інтеграл Гауса.
7. Сформулювати теорема про граничні значення потенціалу подвійного шару.
8. Що називається стрибком потенціалу подвійного шару при переході через поверхню Ляпунова. Яка величина цього стрибка.

9. Що називається прямим значенням правильної нормальної похідної потенціалу простого шару. Які ще значення правильної нормальної похідної можна обчислювати.
10. Сформулювати теорему про пряме значення нормальної похідної потенціалу простого шару.
11. Сформулювати теорему про граничні значення нормальної похідної потенціалу простого шару.
12. Який стрибок має правильна нормальна похідна потенціалу простого шару при переході через поверхню Ляпунова.
13. Яку властивість має нормальна похідна потенціалу подвійного шару.

Розділ 5

Дослідження існування розв'язків основних граничних задач рівняння Лапласа та Гельгольмца

Будемо розглядати замкнену Ляпуновську поверхню, яка обмежує дві області Ω та $\Omega^{'}$ - зовнішню по відношенню до області Ω. Будемо розглядати основні граничні задачі рівняння Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega \\ u\big|_{x\in S} = f(x) \end{cases} \quad (5.1),\qquad \begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega^{'} \\ u\big|_{x\in S} = f(x),\ u(x) = O\left(|x|^{-1}\right),\ |x| \to \infty \end{cases} \quad (5.1'),$$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x\in S} = f(x) \end{cases} \quad (5.2),\qquad \begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega^{'} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x\in S} = f(x),\ u(x) = O\left(|x|^{-1}\right),\ |x| \to \infty \end{cases} \quad (5.2').$$

Назвемо граничні задачі (5.1) та (5.1') внутрішньою та зовнішньою граничними задачами Діріхле і позначати D_i та D_e відповідно. Граничні задачі (5.2) та (5.2') будемо називати внутрішньою та зовнішньою граничними задачами Неймана та позначати N_i та N_e відповідно.

Функцію $f(x)$ вважаємо неперервною на поверхні Ляпунова S.

Враховуючи властивості потенціалів, будемо шукати розв'язки граничних задач Діріхле у вигляді потенціалу подвійного шару, а задач Неймана у вигляді потенціалу простого шару з невідомими щільностями:

$$u(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y \qquad D_i \text{ та } D_e \qquad (5.3),$$

$$u(x) = \iint\limits_S \mu(y) \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y \qquad N_i \text{ та } N_e \qquad (5.4).$$

В області Ω та $\Omega^{'}$ потенціали простого шару та подвійного шару задовольняють рівняння Лапласа.

Для знаходження розв'язків відповідних граничних задач необхідно задовільними граничним умовам на поверхні S та для зовнішніх задач умовам регулярності на нескінченості.

Запишемо інтегральні співвідношення, які дозволять задовольнити граничні умови та визначити невідомі щільності потенціалів.

Для запису інтегральних співвідношень використаємо теореми про граничні значення потенціалу подвійного шару (теорема 7) та граничні значення нормальної похідної потенціалу простого шару (теорема 11).

$$f(x)=\iint_S \sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y-\frac{\sigma(x)}{2},\ x\in S,\ D_i \qquad (5.5),$$

$$f(x)=\iint_S \sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y+\frac{\sigma(x)}{2},\ x\in S,\ D_e \qquad (5.6),$$

$$f(x)=\iint_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y+\frac{\mu(x)}{2},\ x\in S,\ N_i \qquad (5.7),$$

$$f(x)=\iint_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y-\frac{\mu(x)}{2},\ x\in S,\ N_e \qquad (5.8).$$

Тут $f(x)$ треба сприймати як граничне значення потенціалу подвійного шару для задачі Діріхле, або простого шару для задачі Неймана при підході з середини для внутрішньої задачі та ззовні для зовнішньої задачі відповідно яке задане граничними умовами задач Діріхле та Неймана.

Неважко бачити, що рівняння (5.5) – (5.8) є інтегральними рівняннями Фредгольма другого роду з полярним ядром і розпадаються на дві пари союзних (спряжених): $D_i,\, N_e$ та $D_e,\, N_i$. З теорем Фредгольма відомо, що існування і єдність розв'язків інтегрального рівняння і спряженого до нього виконується одночасно. Тому ми будемо досліджувати одночасно пару рівнянь $D_i,\, N_e$ та пару рівнянь $D_e,\, N_i$.

Ядро інтегрального рівняння (5.6) має вигляд

$$K(x,y)=\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}=-\frac{\cos(y-x,n_y)}{4\pi|x-y|^2} \qquad (5.9),$$

відповідно спряженого до нього рівняння (5.8)

$$K^*(x,y)=\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}=-\frac{\cos(x-y,n_x)}{4\pi|x-y|^2} \qquad (5.10)$$

Враховуючи властивості поверхні Ляпунова і оцінки $\cos(y-x,n_y)<a_1|x-y|^{\alpha}$, можна встановити, що ядра $K(x,y), K^*(x,y)$ є полярними і для таких інтегральних рівнянь можна застосовувати теореми Фредгольма.

Дослідження внутрішньої задачі Діріхле та зовнішньої задачі Неймана.

Покажемо, що інтегральні рівняння Фредгольма (5.5) з полярним ядром (5.9) та спряжене до нього рівняння (5.8) мають єдиний розв'язок для будь – якого неперервного вільного члена.

Розглянемо однорідне рівняння для рівняння (5.8)

$$\iint_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y-\frac{\mu(x)}{2}=0,\ x\in S, \qquad (5.8')$$

Нехай $\mu_0(\boldsymbol{x})\in \boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{S})$ розв'язок однорідного рівняння (5.8'), зрозуміло, що в цьому випадку функція $\mu_0(\boldsymbol{x})\in \boldsymbol{C}(\boldsymbol{S})$ і задовольняє рівняння

$$\iint_S \mu_0(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y-\frac{\mu_0(x)}{2}=0,\ x\in S, \qquad (5.8'')$$

Побудуємо потенціал простого шару з щільністю μ_0 і позначимо його

$$V_0(x)=\iint_S \mu_0(y)\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y. \qquad (5.11).$$

Потенціал (5.11) має правильну нормальну похідну при підході до поверхні $\boldsymbol{S}$ з зовні, а рівняння (5.8'') означає, що $\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e}\equiv 0$ (5.12).

Зрозуміло, що для $\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{x})$ задовольняє граничній задачі

$$\begin{cases} \Delta V_0(x) = 0,\ x \in \Omega' \\ \left.\dfrac{\partial V_0(x)}{\partial n}\right|_{x\in S} = 0,\ V_0(x) = O\left(\dfrac{1}{|x|}\right), x \to \infty \end{cases} \qquad (5.13),$$

яка має лише тривіальний розв'язок, тобто $\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}'$. Оскільки потенціал простого шару є неперервною функцією в усьому евклідовому просторі, то $V_0(x) \equiv 0,\ x \in S$, таким чином $V_0(x)$ задовольняє граничній задачі Діріхле $\begin{cases} \Delta V_0(x) = 0,\ x \in \Omega \\ V_0(x)\big|_{x\in S} = 0 \end{cases}$, яка має лише тривіальний розв'язок $V_0(x) \equiv 0, x \in \Omega$. Таким чином маємо, що $\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$, а це означає, враховуючи (5.11), що $\mu_0(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$. Таким чином однорідне рівняння (5.8') має лише тривіальний розв'язок, а відповідне неоднорідне рівняння (5.8) і спряжене до нього неоднорідне рівняння (5.5) має єдиний розв'язок для будь – якого неперервного вільного члену $f(x)$. З наведених міркувань має місце теорема.

Теорема 12 (про існування розв'язку внутрішньої задачі Діріхле та зовнішньої задачі Неймана) Нехай $\boldsymbol{S}$ замкнена поверхня Ляпунова, тоді внутрішня задача Діріхле (5.1) та зовнішня задача Неймана (5.2') мають єдині розв'язки для будь – яких неперервних функцій $f(x)$ і розв'язки цих задач можна представити у вигляді потенціалу подвійного шару (5.3) та простого шару (5.4) відповідно.

Дослідження зовнішньої задачі Діріхле та внутрішньої задачі Неймана.

Розглянемо однорідне рівняння, яке відповідає рівнянню Фредгольма (5.6)

$$\iint_S \sigma_0(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y + \frac{\sigma_0(x)}{2} = 0,\ x \in S,\ D_e \qquad (5.6').$$

Згідно до властивостей інтегралу Гауса $W_0(x)$, легко перевірити, що, рівняння (5.6’) має нетривіальний розв’язок $\sigma_0(x) \equiv 1$, (тобто 1 – власна функція, а -2 – характеристичне число інтегрального оператора) можна показати, що **інших нетривіальних розв’язків не існує**. Це означає, що розв’язок спряженого неоднорідного рівняння (5.7) існує тоді і лише тоді, коли його вільний член $f(x)$ ортогональний розв’язкам спряженого однорідного рівняння, тобто функції $\sigma_0(x) \equiv 1$. Умову ортогональності можна записати у вигляді

$$\iint\limits_S 1 * f(x) dS = 0 \qquad (5.14).$$

І розв’язок внутрішньої задачі Неймана неєдиний і визначається з точністю до адитивної константи. Таким чином має місце теорема.

Теорема 13 (Про існування розв’язку внутрішньої задачі Неймана) Нехай $\boldsymbol{S}$ замкнута поверхня Ляпунова, а $f \in C(S)$, тоді внутрішня задача Неймана (5.2) має розв’язок тоді і лише тоді, коли виконана умова ортогональності (5.14), розв’язок можна представити у вигляді потенціалу простого шару (5.4) і розв’язок визначається з точністю до адитивної константи.

Розглянемо випадок зовнішньої задачі Діріхле. Згідно до того, що однорідне рівняння (5.6’) має один нетривіальний розв’язок, то однорідне спряжене до нього рівняння

$$\iint\limits_S \mu_1(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y + \frac{\mu_1(x)}{2} = 0 \text{ , } x \in S, \ N_i \qquad (5.7')$$

теж має один нетривіальний розв’язок $\mu_1(x)$-(власну функцію характеристичного числа $\lambda = -2$. Згідно до третьої теореми Фредгольма, спряжене неоднорідне рівняння (5.6) (для зовнішньої задачі Діріхле) має розв’язок тоді і лише тоді, коли виконується умова ортогональності $\iint\limits_S f(x)\mu_1(x) dS = 0$ і при цьому розв’язок інтегрального рівняння (5.6) буде неєдиний. А значить неєдиний розв’язок зовнішньої задачі Діріхле.

В той же час з теорем єдиності нам відомо, що зовнішня задача Діріхле має єдиний розв'язок (друга теорема єдиності гармонічних функцій). Отже маємо протиріччя, яке викликане тим, що потенціал подвійного шару $u(x)=\iint_S \sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y$ у вигляді якого ми шукаємо розв'язок зовнішньої задачі Діріхле не є гармонічною функцією регулярною на нескінченості. Дійсно цей потенціал веде себе як $\iint_S \sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), |x|\to\infty$, тобто прямує до нуля швидше ніж регулярна гармонічна функція у тривимірному просторі.

Для виправлення цієї ситуації будемо шукати розв'язок зовнішньої задачі Діріхле D_e у підправленому вигляді:

$$u(x)=\iint_S \sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y+\frac{1}{|x|}\iint_S \sigma(y)dS_y \qquad (5.15),$$

де перший доданок як і раніше є потенціалом подвійного шару, а другий називають потенціалом Робена, який не порушуючи гармонічність цієї функції, забезпечує регулярність на нескінченості. При цьому ми вважаємо, що система координат обрана таким чином, що точка $x=0\in\Omega$.

Для знаходження щільності σ, запишемо інтегральне співвідношення використовуючи теорему про граничні значення потенціалу подвійного шару (потенціал Робена є неперервною функцією в $\boldsymbol{R}^3$):

$$f(x)=\iint_S \sigma(y)\left(\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}+\frac{1}{|x|}\right)dS_y+\frac{\sigma(x)}{2} \qquad (5.16).$$

$K(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}+\frac{1}{|x|}\right)$ - ядро інтегрального рівняння.

Покажемо, що (5.16) має єдиний розв'язок. Для цього покажемо, що відповідне однорідне рівняння

$$\iint\limits_S \sigma_0(y)\left(\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}+\frac{1}{|x|}\right)dS_y+\frac{\sigma_0(x)}{2}=0,\ x\in S \qquad (5.16')$$

має лише тривіальний розв'язок. Нехай σ_0 деякий розв'язок рівняння (5.16') Побудуємо потенціал з щільністю σ_0

$$U_0(x)=\iint\limits_S \sigma_0(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y+\frac{1}{|x|}\iint\limits_S \sigma_0(y)dS_y \qquad (5.17),$$

який задовольняє рівняння Лапласа для $x\in\Omega'$. З (5.16') випливає, що граничне значення потенціалу U_0 при підході до поверхні S з зовні дорівнює нулю, тобто функція U_0 є розв'язком граничної задачі $\begin{cases}\Delta U_0(x)=0, x\in\Omega' \\ U_0\big|_{x\in S}=0, U_0(x)=\dfrac{1}{|x|},\ |x|\to\infty\end{cases}$, ця задача має лише тривіальний розв'язок, тобто $U_0(x)\equiv 0, x\in\Omega'$. Помножимо (5.17) на $|x|$, та спрямуємо $x\to\infty$. В результаті отримаємо, що $\iint\limits_S \sigma_0(y)dS=0$ (5.18).

Тобто будь – який розв'язок інтегрального рівняння (5.16'), задовольняє співвідношення (5.18), але тоді рівняння (5.16') спрощується і приймає вигляд $\iint\limits_S \sigma_0(y)\left(\dfrac{\partial}{\partial n_y}\dfrac{1}{4\pi|x-y|}\right)dS_y+\dfrac{\sigma_0(x)}{2}=0$. Відомо, що це рівняння має у якості розв'язку функцію $\sigma_0(x)\equiv const$, але з (5.18) випливає що $\sigma_0(x)\equiv 0$. Таким чином, однорідне рівняння має лише тривіальний розв'язок, а відповідне неоднорідне рівняння (5.16) має єдиний розв'язок для будь – якого вільного члена $f(x)$. Тобто нами доведена теорема.

Теорема 14 *(про існування розв'язку зовнішньої задачі Діріхле)* Нехай S замкнена поверхня Ляпунова, $f\in C(S)$, тоді зовнішня задача Діріхле (5.1') має єдиний розв'язок регулярний на нескінченості для довільної неперервної функції f і цей розв’язок може бути знайдений у вигляді суми потенціалі подвійного шару і потенціалу Робена.

Третя гранична задача для рівняння Лапласа

Окрім основних граничних задач рівняння Лапласа, метод потенціалів може бути застосований до третьої граничної задачі (Ньютона).

$$\begin{cases} \Delta u(x)=0,\ x\in\Omega \\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial n}+\alpha(x)u\right]\Bigg|_{x\in S}=f(x) \end{cases} \qquad (5.19),$$

$$\begin{cases} \Delta u(x)=0,\ x\in\Omega' \\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial n}+\alpha(x)u\right]\Bigg|_{x\in S}=f(x), \\ u(x)=O\left(|x|^{-1}\right), |x|\to\infty \end{cases} \qquad (5.19').$$

Будемо припускати, $\alpha(x)\ge 0,\ x\in S,\ \alpha\in C(S)$. Розв’язок граничних задач (5.18) та (5.18’) будемо шукати у вигляді потенціалів простого шару $U(x)=\iint\limits_S \mu(y)\dfrac{1}{4\pi|x-y|}dS_y$. Враховуючи теорему про граничні значення нормальної похідної потенціалу простого шару запишемо інтегральні рівняння для щільності потенціалу μ по поверхні $\boldsymbol{S}$:

$$f(x)=\iint\limits_S \mu(y)\left(\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}+\frac{\alpha(x)}{4\pi|x-y|}\right)dS_y+\frac{\mu(x)}{2},\ x\in S,\ H_i \qquad (5.20),$$

$$f(x)=\iint\limits_S \mu(y)\left(\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}+\frac{\alpha(x)}{4\pi|x-y|}\right)dS_y-\frac{\mu(x)}{2},\ x\in S,\ H_e \qquad (5.20').$$

Можна показати, що інтегральні рівняння (5.20) та (5.20’) мають єдині розв’язки для будь – якої неперервної функції $\boldsymbol{f(x)}$ ці розв’язки можуть бути знайдені у вигляді потенціалу простого шару. Що свідчить про існування та єдиність розв’язків внутрішньої та зовнішньої задач Ньютона.

Дослідження існування розв’язків граничних задач рівняння Гельгольмца.

Розглянемо граничні задачі для однорідного рівняння Гельгольмца

$$\begin{cases} \left(\Delta + k^2\right)u(x) = 0,\ x \in \Omega \\ u\big|_{x\in S} = f(x) \end{cases} \quad (5.21), \qquad \begin{cases} \left(\Delta + k^2\right)u(x) = 0,\ x \in \Omega' \\ u\big|_{x\in S} = f(x),\ u(x) = O\left(|x|^{-1}\right),\ |x| \to \infty \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial |x|} \pm iku(x) = o\left(|x|^{-1}\right),\ |x| \to \infty \end{cases} \quad (5.21'),$$

$$\begin{cases} \left(\Delta + k^2\right)u(x) = 0,\ x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x\in S} = f(x) \end{cases} \quad (5.22), \qquad \begin{cases} \left(\Delta + k^2\right)u(x) = 0,\ x \in \Omega' \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x\in S} = f(x),\ u(x) = O\left(|x|^{-1}\right),\ |x| \to \infty \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial |x|} \pm iku(x) = o\left(|x|^{-1}\right),\ |x| \to \infty \end{cases} \quad (5.22').$$

Будемо шукати розв’язки граничних задач для рівняння Гельгольмца у вигляді потенціалу простого шару $V^k(x) = \iint\limits_S \mu(y) \dfrac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dS_y$ для задачі Неймана (5.22), (5.22’) та у вигляді потенціалу подвійного шару $W^k(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \dfrac{\partial}{\partial n_y} \dfrac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dS_y$ для задачі Діріхле (5.21), (5.21’).

Теорема 15 (Про існування розв’язків граничних задач для рівняння Гельгольмца) Нехай число k^2 не є власним числом внутрішньої задач Діріхле та Неймана оператора Лапласа в області Ω, тоді граничні задачі Діріхле та Неймана, внутрішня та зовнішня (5.21), (5.22) та (5.21’), (5.22’) мають єдиний розв’язок для будь – якої неперервної функції $f(x)$ на поверхні S ці розв’язки можна представити у вигляді потенціалів подвійного шару та простого шару відповідно.

Доведення Будемо шукати розв’язки внутрішньої та зовнішньої задачі Діріхле у вигляді потенціалу подвійного шару $u(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \dfrac{\partial}{\partial n_y} \dfrac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dS_y$ (5.22), а внутрішньої та зовнішньої задач Неймана у вигляді потенціалу простого шару $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \iint_S \frac{\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\mu(\boldsymbol{y})}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y$ (5.24).

Враховуючи властивості потенціалів та фундаментальних розв'язків оператора Гельгольмца, відомо, що ці функції задовольняють однорідному рівнянню Гельгольмца та умовам регулярності на нескінченості у випадку зовнішніх задач.

Для визначення невідомої щільності користуючись теоремами про граничні значення потенціалів простого і подвійного шару, запишемо граничні інтегральні рівняння:

$$f(x) = -\frac{\sigma(x)}{2} + \iint_S K(x,y)\sigma(y)dS_y,\ D_i \quad (5.25),$$

$$f(x) = \frac{\sigma(x)}{2} + \iint_S K(x,y)\sigma(y)dS_y,\ D_e \quad (5.25'),$$

$$f(x) = \frac{\mu(x)}{2} + \iint_S K^*(x,y)\mu(y)dS_y,\ N_i \quad (5.26),$$

$$f(x) = -\frac{\mu(x)}{2} + \iint_S K^*(x,y)\mu(y)dS_y,\ N_e \quad (5.26').$$

Де $K(x,y) = \frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{ik|x-y|-1}{4\pi|x-y|^2}e^{ik|x-y|}\cos(y-x,n_y)$ (5.27),

та $K^*(x,y) = \frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{-ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{-ik|x-y|-1}{4\pi|x-y|^2}e^{-ik|x-y|}\cos(x-y,n_x)$ (5.27')

ядра основного та спряженого інтегральних рівнянь.

Вивчимо випадок зовнішньої задачі Діріхле та внутрішньої задачі Неймана $\boldsymbol{D}_e$, $\boldsymbol{N}_i$.Розглянемо однорідне інтегральне рівняння, яке відповідає

$$\boldsymbol{N}_i \quad 0 = \frac{\mu(x)}{2} + \iint_S \frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{-ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\mu(y)dS_y \quad (5.28).$$

Припустимо, що (5.28) має нетривіальний розв'язок μ_0, тоді і однорідне рівняння $0 = \frac{\sigma(x)}{2} + \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\sigma(y)dS_y,\ D_e$ (5.29),

теж має нетривіальний розв'язок σ_0. Складемо потенціал простого шару з щільністю μ_0 $V_0^k(x) = \iint\limits_S \frac{e^{-ik|x-y|}\mu_0(y)}{4\pi|x-y|}dS_y$. З теореми про розрив нормальної похідної потенціалу простого шару та рівності

$$0 = \frac{\mu_0(x)}{2} + \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{-ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\mu_0(y)dS_y \ \ (N_i) \qquad (5.28')$$

маємо, що граничне значення нормальної похідної потенціалу простого шару з середини дорівнює нулю і цей потенціал є розв'язком граничної задачі: $\begin{cases} (\Delta + k^2)V_0^k(x) = 0,\ x \in \Omega \\ \left.\frac{\partial V_0^k(x)}{\partial n_i}\right|_{x \in S} = 0 \end{cases}$, але оскільки $\boldsymbol{k}^2$ не є власним числом внутрішньої задачі Неймана, то остання гранична задача має лише тривіальний розв'язок, тобто $\boldsymbol{V}_0^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \equiv 0,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}$. Враховуючи неперервність потенціалу простого шару в усьому евклідовому просторі можна записати, що $\boldsymbol{V}_0^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \equiv 0,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$. Звідси випливає, що $\boldsymbol{V}_0^{\boldsymbol{k}}$ задовольняє граничній задачі $\begin{cases} (\Delta + k^2)V_0^k(x) = 0,\ x \in \Omega' \\ \left.V_0^k(x)\right|_{x \in S} = 0 \end{cases}$, а оскільки V_0^k задовольняє умові Зомерфельда, то єдиним розв'язком останньої задачі Діріхле є тотожній нуль. Отже маємо, що $\boldsymbol{V}_0^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \equiv 0,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega} \cup \boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{\Omega}'$, а це в свою чергу означає, що $\mu_0 = 0, x \in S$ і рівняння (5.28) та (5.29) мають лише тривіальні розв'язки. Згідно до теореми Фредгольма відповідні неоднорідні рівняння (5.25') та (5.26) мають єдиний розв'язок для будь-якого вільного члена $\boldsymbol{f}$. Теорема доведена.

Питання до п'ятого розділу

1. В якому вигляді варто шукати розв’язок задачі Діріхле та Неймана для рівняння Лапласа. Поясніть чому.
2. Які властивості потенціалу подвійного шару дозволяють використовувати його для зведення зовнішньої та внутрішньої граничних задач Діріхле до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.
3. Які властивості потенціалу подвійного шару використовуються для зведення граничної задачі Неймана рівняння Лапласа до інтегральних рівнянь Фредгольма.
4. Записати граничні інтегральні рівняння для внутрішньої задачі Діріхле та зовнішньої задачі Неймана рівняння Лапласа. До якого класу належить ядро інтегрального рівняння, поясніть чому.
5. Сформулювати теореми існування розв’язку для внутрішньої задачі Діріхле та зовнішньої задачі Неймана рівняння Лапласа.
6. Граничні інтегральні рівняння для зовнішньої задачі Діріхле та внутрішньої задачі Неймана рівняння Лапласа. Які властивості мають ядра цих рівнянь.
7. Чому при дослідженні зовнішньої задачі Діріхле за допомогою потенціалу подвійного шару виникає протиріччя. Поясніть природу протиріччя. Як його виправити.
8. Теореми існування розв’язку для внутрішньої задачі Неймана та зовнішньої задачі Діріхле.
9. В якому вигляді зручно шукати розв’язок третьої граничної задачі рівняння Лапласа.
10. Граничні інтегральні рівняння для третьої зовнішньої та внутрішньої граничних задач рівняння Лапласа.
11. Запишіть інтегральні рівняння для першої та другої граничних задач рівняння Гельгольмца. Чи утворюють ці рівняння дві пари спряжених рівнянь.
12. Сформулюйте теорему про існування розв’язку граничних задач для рівняння Гельгольмца.
13. Поясніть, чому в теоремі про існування розв’язку граничних задач для рівняння Гельгольмца робиться припущення про параметр рівняння k^2 який не повинен бути власним числом оператора Лапласа. Що буде, коли ця умова не виконана.

Розділ 6

Граничні задачі рівняння Лапласа на площині

Граничні задачі для рівняння Лапласа у двовимірних областях можуть бути досліджені за допомогою **логарифмічних потенціалів** простого і подвійного шару $U_0(x) = \oint\limits_C \mu(y) q_0(|x-y|) dl_y$ (6.1),

$$\boldsymbol{W}_0(\boldsymbol{x}) = \oint\limits_C \sigma(\boldsymbol{y}) \frac{\partial \boldsymbol{q}_0(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)}{\partial \boldsymbol{n}_y} \boldsymbol{dl}_y \qquad (6.2).$$

Де $\boldsymbol{q}_0(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ з врахуванням деяких особливостей цих потенціалів.

Зокрема з розділу 4 відомо, що у тривимірному просторі потенціали простого шару є гармонічною функцією в області Ω і в області Ω', а потенціал подвійного шару є гармонічною функцією в області Ω, і не є гармонічною в Ω' (порушується регулярність на нескінченості).

Для потенціалів у двовимірному просторі маємо, що логарифмічний потенціал подвійного шару є гармонічною функцією як в області D так і в області D', а логарифмічний потенціал простого шару є гармонічною функцією в області D, але не є гармонічною в області D'.

Зокрема потенціал простого шару при $|x| \to \infty$ зростає як $\ln|x|$, але гармонічна функція у двовимірному просторі повинна бути обмеженою. Постановка граничних задач для рівняння Лапласа у двовимірному просторі мають вигляд аналогічний задачам у тривимірному просторі з урахування обмеженості розв’язку в нескінченно-віддаленій точці.

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \ x \in D \\ u\big|_{x\in C} = f(x) \end{cases} \quad (6.3), \qquad \begin{cases} \Delta u(x) = 0, \ x \in D' \\ u\big|_{x\in C} = f(x), \ u(x) = O(1), \ |x| \to \infty \end{cases} (6.3'),$$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ x \in D \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x \in C} = f(x) \end{cases} \quad (6.4) \quad , \qquad \begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ x \in D' \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x \in C} = f(x),\ u(x) = O(1),\ |x| \to \infty \end{cases} (6.4')$$

Теореми єдиності гармонічних функцій в двовимірному випадку також мають відмінність в формулюванні для внутрішньої та зовнішньої задачі Неймана від аналогічної теореми для тривимірного простору.

Теорема 16 *(єдиності гармонічної функції з умовами Неймана у двовимірному просторі)* Якщо в скінченій області $D \subset R^2$ існує гармонічна функція, а у області $D' \subset R^2$ гармонічна функція регулярна на нескінченості, яка приймає на границі C області D або D' задане значення нормальної похідної, то в D та D' ця функція визначається з точність до адитивної константи.

Друга особливість стосується зовнішньої задачі Неймана.

Лема 1 Для того щоб зовнішня задача Неймана (6.31’) мала розв’язок необхідно виконання умови $\oint\limits_C f(x)dx = 0$. (6.5)

Доведення Розглянемо двозв’язну область $U(0,R)/D$, де $U(0,R)$ - круг радіусу R з центром в початку координат. Враховуючи властивості гармонічних функцій можна записати для розв’язку задачі Неймана співвідношення: $\oint\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}dx + \oint\limits_{C(R,0)} \frac{\partial u}{\partial n}dx = 0$ (6.5’), де C - контур, що обмежує область D, а $C(R,0)$ - коло радіусу R з центром в початку координат. Спрямуємо $R \to \infty$ та врахуємо поведінку похідної гармонічної функції двох змінних в нескінченно-віддаленій точці $\frac{\partial u}{\partial n} = O(1/R^2)$, $\oint\limits_{C(R,0)} dx = 2\pi R$. Таким чином $\oint\limits_{C(R,0)} \frac{\partial u}{\partial n}dx = O(1/R) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. Звідси маємо $\oint\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}dx = \oint\limits_C f(x)dx = 0$, і лема доведена.

Для знаходження розв’язку задачі Діріхле так само, як і у тривимірному просторі, будемо використовувати логарифмічний потенціал подвійного шару $\oint\limits_C \sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dy$, а для задачі Неймана логарифмічний потенціал простого шару $\oint\limits_C \mu(y)\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dy$.

Використовуючи двовимірний аналог теореми про граничні значення потенціалу подвійного шару, та теореми про граничні значення нормальної похідної потенціалу простого шару, (їх формулювання аналогічні) отримаємо інтегральні рівняння Фредгольма другого роду для кожної з граничних задач:

$$f(x)=\oint\limits_C \sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dy-\frac{\sigma(x)}{2} \qquad D_i \qquad (6.6),$$

$$f(x)=\oint\limits_C \sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dy+\frac{\sigma(x)}{2} \qquad D_e \qquad (6.6’),$$

$$f(x)=\oint\limits_C \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dy+\frac{\mu(x)}{2} \qquad N_i \qquad (6.7),$$

$$f(x)=\oint\limits_C \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dy-\frac{\mu(x)}{2} \qquad N_e \qquad (6.7’).$$

Граничні інтегральні рівняння (6.6), (6.6’), (6.7), (6.7’) - інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з полярними ядрами у випадку, коли контур C - контур Ляпунова.

Для дослідження властивостей інтегральних рівнянь (6.6), (6.6’), (6.7), (6.7’) корисною буде наступна лема:

Лема 2 Якщо функція $f(x)$ задовольняє умові $\oint\limits_C f(x)dx=0$ (6.5), а інтегральне рівняння $f(x)=\oint\limits_C \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dy-\frac{\mu(x)}{2}$ (N_e) має розв'язок, то логарифмічний потенціал простого шару $\oint\limits_C \mu(y)\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dy$ дає розв'язок зовнішньої задачі Неймана N_e.

Доведення Нехай рівняння (6.7') має розв'язок. Візьмемо функцію μ що є розв'язком цього рівняння як щільність потенціалу простого шару $\oint\limits_C \mu(y)\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dy$. Цей потенціал задовольняє граничній умові задачі Неймана і є гармонічною поза контуром C за винятком можливо нескінченно віддаленої точки у якій ця функція може бути необмеженою. Покажемо що при виконанні умови (6.5) потенціал простого шару є обмеженою функцією в нескінченно віддаленій точці. Проінтегруємо обидві частини рівняння (6.7') по контуру C

$$\oint\limits_C f(x)dx = \oint\limits_C\oint\limits_C \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dydx - \oint\limits_C \frac{\mu(x)}{2}dx = 0. \qquad (6.8).$$

У подвійному інтегралі поміняємо місцями x та y в підінтегральній функції $\oint\limits_C\oint\limits_C \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dydx = \oint\limits_C\oint\limits_C \mu(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dydx$.

Використаємо властивості логарифмічного інтегралу Гауса (вони аналогічні тривимірному випадку)

Отримаємо: $\oint\limits_C \mu(x)\left\{\oint\limits_C \frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dy\right\}dx = -\frac{1}{2}\oint\limits_C \mu(x)dx$

Таким чином з (6.8) та останньої рівності випливає

$$\oint\limits_C \mu(x)dx = 0 \qquad (6.9).$$

У рівності (6.9) замінимо x на y та помножимо цю рівність на $\ln|x|$ і додаємо до потенціалу простого шару $\oint\limits_C \mu(y)\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dy$. В результаті отримаємо новий вираз для потенціалу простого шару $\oint_C \mu(y)\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x|}{|x-y|}dy$ (6.10).

Інтеграл (6.10) є обмеженим в нескінченно віддаленій точці і більш того він прямує до нуля. Таким чином лема доведена.

Дослідження існування розв'язків інтегральних рівнянь D_i та N_e (6.6) (6.7') здійснюється аналогічно тривимірному випадку, а відповідна теорема існування розв'язку має аналогічне формулювання теоремі 12 (*про існування розв'язку внутрішньої задачі Діріхле та зовнішньої задачі Неймана)*

Дослідження пари рівнянь D_e та N_i теж повторює тривимірний випадок, а відповідні результати аналогічні теоремі 13 (*Про існування розв'язку внутрішньої задачі Неймана)* та теоремі 14 (*про існування розв'язку зовнішньої задачі Діріхле*).

При досліджені задачі D_e її розв'язок шукають у вигляді суми потенціалу подвійного шару та потенціалу Робена:

$$u(x)=\oint_C \sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dy+\oint_C \sigma(y)dy \qquad (6.11)$$

при цьому інтегральне рівняння для знаходження щільності буде мати вигляд: $f(x)=\oint_C \sigma(y)\left[\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}+1\right]dy+\frac{\sigma(x)}{2}$ (6.12).

Питання до шостого розділу

1. В чому відмінність теореми єдиності гармонічних функцій з умовами Неймана на границі для двовимірного та тривимірного випадків. Чим ця відмінність викликана.
2. Поясніть поведінку логарифмічних потенціалів простого та подвійного шару в нескінченно віддаленій точці, гармонічність потенціалів.

3. Запишіть постановку зовнішньої та внутрішньої задачі Діріхле та Неймана для області на площині.
4. В якому вигляді треба шукати розв'язки граничних задач Діріхле та Неймана, поясніть чому.
5. Запишіть граничні інтегральні рівняння до яких можна звести граничні задачі для рівняння Лапласа на площині.
6. Які властивості мають ядра цих рівнянь, які обмеження накладаються на контур, що обмежує область.
7. Яку особливість має інтегральне рівняння теорії потенціалів для зовнішньої задачі Неймана.
8. Поясніть чому розв'язок зовнішньої задачі Діріхле на площині треба шукати у вигляді потенціалу подвійного шару плюс потенціал Робена.

Розділ 7

Теплові потенціали та їх застосування для дослідження граничних задач рівняння теплопровідності

Властивості теплових потенціалів

Нехай Ω - просторова область обмежена границею S, а $\varepsilon_3(x,t)=\dfrac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$ - фундаментальний розв’язок оператора теплопровідності у тривимірному просторі.

Тоді $U(x,t)=\int\limits_0^t\iiint\limits_{\Omega}a^2\varepsilon(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau$ (7.1),

$$V(x,t)=\int\limits_0^t\iint\limits_{S}a^2\varepsilon(x-y,t-\tau)\mu(y,\tau)dS_yd\tau \quad (7.2),$$

$$W(x,t)=\int\limits_0^t\iint\limits_{S}a^2\frac{\partial\varepsilon(x-y,t-\tau)}{\partial n_y}\sigma(y,\tau)dS_yd\tau \quad (7.3).$$

Будемо називати тепловими потенціалами об’єму, простого шару, подвійного шару відповідно. Функції ρ,μ,σ будемо називати щільностями відповідних потенціалів.

Властивості теплових потенціалі дуже схожі до властивостей потенціалів операторів Гельгольмца та Лапласа.

Властивість 1 Теплові потенціали об’єму, простого шару та подвійного шару задовольняють однорідним початковим умовам:

$U(x,0)=V(x,0)=W(x,0)=0$. Ця властивість очевидно випливає з формул (6.1) – (6.3).

Властивість 2 Якщо точка $x\notin\Omega$ для теплового потенціалу об’єму, або точка $x\notin S$ для теплових потенціалів простого шару та подвійного шару, то усі три потенціали є функціями, які мають неперервні похідні будь – якого порядку по аргументах $x, t > 0$ і задовольняють в кожній такій точці $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ однорідному рівнянню теплопровідності.

Ця властивість безпосередньо випливає з властивостей фундаментального розв'язку оператора теплопровідності та властивості інтегралів, що залежать від параметрів. Для теплових потенціалів подвійного шару та простого шару мають місце теоремі про граничне значення потенціалу подвійного шару та граничне значення теплового потенціалу простого шару.

Теорема 17 *(про граничне значення теплового потенціалу подвійного шару)* Нехай $\boldsymbol{S}$ замкнена поверхня Ляпунова, $\sigma(x,t) \in C(S \times (t > 0))$, тоді тепловий потенціал подвійного шару (6.3) при підході вздовж нормалі $\boldsymbol{n}$ до точки $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{t}$ поверхні $\boldsymbol{S}$ області $\boldsymbol{\Omega}$ з середини та ззовні прямує до своїх неперервних граничним значенням і ці значення визначаються рівностями

$$W_i(x,t) = -\frac{\sigma(x,t)}{2} + \overline{W}(x,t),\ x \in S \qquad (7.4),$$

$$W_e(x,t) = \frac{\sigma(x,t)}{2} + \overline{W}(x,t),\ x \in S \qquad (7.5),$$

$\overline{W}(x,t) = \int\limits_0^t \iint\limits_S a^2 \frac{\partial \varepsilon(x-y,t-\tau)}{\partial n_y} \sigma(y,\tau) dS_y d\tau$ - пряме значення теплового потенціалу подвійного шару, яке неперервно змінюється коли точка $(x,t) \in (S \times t > 0)$.

Теорема 18 *(про граничні значення нормальної похідної теплового потенціалу простого шару)* Нехай S замкнена поверхня Ляпунова, $\mu(x,t) \in C(S \times (t > 0))$, тоді нормальна похідна теплового потенціалу простого шару (6.2) при підході вздовж нормалі $\boldsymbol{n}$ до точки x, t поверхні S області Ω з середини та ззовні прямує до своїх неперервних граничним значенням і ці значення визначаються рівностями

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial n_i} = \frac{\mu(x,t)}{2} + \overline{\frac{\partial V(x,t)}{\partial n}},\ x \in S \qquad (7.6)$$

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial n_e} = -\frac{\mu(x,t)}{2} + \overline{\frac{\partial V(x,t)}{\partial n}},\ x \in S \qquad (7.7)$$

$\overline{\frac{\partial V(x,t)}{\partial n}} = \int_0^t \iint_S a^2 \frac{\partial \varepsilon(x-y,t-\tau)}{\partial n_x} \mu(y,\tau) dS_y d\tau$ - пряме значення нормальної похідної теплового потенціалу простого шару, яке неперервно змінюється коли точка $(x,t) \in (S \times t > 0)$.

Граничні інтегральні рівняння для граничних задач теплопровідності

Наведені теореми дозволяють звести граничні задачі рівняння теплопровідності до граничних інтегральних рівнянь відносно невідомої щільності. Запишемо канонічні граничні задачі теплопровідності:

$$\begin{cases} a^2 \Delta u(x,t) - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0,\ x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,t)\big|_{x \in S} = f(x,t) \end{cases} \qquad (7.8),$$

$$\begin{cases} a^2 \Delta u(x,t) - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0,\ x \in \Omega',\ t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,t)\big|_{x \in S} = f(x,t) \end{cases} \qquad (7.8'),$$

$$\begin{cases} a^2 \Delta u(x,t) - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0,\ x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x \in S} = f(x,t) \end{cases} \qquad (7.9),$$

$$\begin{cases} a^2 \Delta u(x,t) - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0,\ x \in \Omega',\ t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x \in S} = f(x,t) \end{cases} \qquad (7.9').$$

Це внутрішня та зовнішня граничні задачі першого і другого роду для однорідного рівняння теплопровідності з однорідними початковими умовами і неоднорідними граничними умовами.

Розв’язок задачі Діріхле (7.8), (7.8’) будемо шукати у вигляді теплового потенціалу подвійного шару (7.3), а розв’язок задач Неймана у вигляді теплового потенціалів простого шару (7.2) з невідомими щільностями σ та μ. Використовуючи теорему 17 та теорему 18, можемо записати інтегральні рівняння відносно невідомих щільностей

$$f(x,t)=\int_0^t\iint_S a^2\frac{\partial\varepsilon(x-y,t-\tau)}{\partial n_y}\sigma(y,\tau)dS_y d\tau-\frac{\sigma(x,t)}{2},\ x\in S,t>0,D_i \quad (7.10),$$

$$f(x,t)=\int_0^t\iint_S a^2\frac{\partial\varepsilon(x-y,t-\tau)}{\partial n_y}\sigma(y,\tau)dS_y d\tau+\frac{\sigma(x,t)}{2},\ x\in S,t>0,D_e \quad (7.11),$$

$$f(x,t)=\int_0^t\iint_S a^2\frac{\partial\varepsilon(x-y,t-\tau)}{\partial n_x}\mu(y,\tau)dS_y d\tau+\frac{\mu(x,t)}{2},\ x\in S,t>0,N_i \quad (7.12),$$

$$f(x,t)=\int_0^t\iint_S a^2\frac{\partial\varepsilon(x-y,t-\tau)}{\partial n_x}\mu(y,\tau)dS_y d\tau-\frac{\mu(x,t)}{2},\ x\in S,t>0,N_e \quad (7.13).$$

Інтегральні рівняння (7.10) – (7.13) представляють собою рівняння змішаного типу - Фредгольма другого роду по просторовій змінній та Вольтера по змінній τ і розпадаються на дві пари спряжених рівнянь (7.10), (7.13) та (7.11), (7.12).

Можна показати що інтегральні рівняння (7.10) – (7.13) мають єдиний розв’язок для будь – якої неперервної функції $\boldsymbol{f(x,t)}$, а це в свою чергу свідчить про існування і єдність розв’язку граничних задач (7.8), (7.9) та (7.8’), (7.9’) .

Аналогічно граничним задачам Діріхле та Неймана до інтегрального рівняння можна звести і граничну задачу з умовами третього роду (Ньютона), розв’язок якої треба шукати у вигляді теплового потенціалу простого шару.

Дослідження розв’язку більш загальної задачі продемонструємо на прикладі задачі Діріхле для неоднорідного рівняння теплопровідності з неоднорідними початковими умовами.

$$\begin{aligned} &a^2\Delta u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -F(x,t),\ x\in\Omega,\ t>0 \\ &u(x,0) = u_0(x),\ u(x,t)\big|_{x\in S} = f(x,t) \end{aligned} \tag{7.14}$$

Використаємо представлення її розв'язку через функцію Гріна першої граничної задачі:

$$u(x,t) = \int_0^t \iiint_\Omega E_1(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau + \iiint_\Omega E_1(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi -$$
$$-a^2\int_0^t \iint_S \left(\frac{\partial E_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi} f(\xi,\tau) \right) dS_\xi d\tau$$

При цьому сама функція Гріна $E_1(x,\xi,t-\tau) = \omega_1(x,\xi,t-\tau) + \varepsilon(x-\xi,t-\tau)$ може бути знайдена як розв'язок канонічної задачі:

$$\begin{aligned} &a^2\Delta_x\omega_1(x,\xi,t-\tau) - \frac{\partial\omega_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial t} = 0,\ \ x,\xi\in\Omega, t>0 \\ &\omega_1(x,\xi,t-\tau)\big|_{t-\tau\le 0} = 0,\ \omega_1(x,\xi,t-\tau)\big|_{x\in S} = -\varepsilon\ (x,\xi,t-\tau)\big|_{x\in S} \end{aligned}$$

Аналогічні міркування можна провести для усіх інших граничних задач рівняння теплопровідності.

Питання до сьомого розділу

1. Надати означення теплових потенціалів об'єму, простого та подвійного шару.
2. Які властивості мають теплові потенціали поза областю інтеграції.
3. Яким початковим умовам задовольняють теплові потенціали.
4. Сформулювати теорема про граничні значення теплового потенціалу подвійного шару.
5. Сформулювати теорема про граничні значення нормальної похідної теплового потенціалу простого шару.

6. Записати інтегральні рівняння для основних граничних задач рівняння теплопровідності. До якого класу відносяться ці рівняння.

Розділ 8

Приклади розв'язання задач та задачі для самостійного розв'язку

Задача 1 Знайти об'ємний потенціал V кулі при постійній щільності $\rho = \rho_0 = const$ поставивши граничну задачу для V і розв'язавши її.

Розв'язання

Для розв'язання задачі необхідно використати властивості потенціалу об'єму. Сформулюємо їх:

1. Потенціал об'єму всередині області інтеграції має неперервні похідні другого порядку і задовольняє рівняння Пуассона $\Delta V(x) = -\rho_0, \ |x| < R$.
2. Потенціал об'єму поза області інтеграції має неперервні похідні будь-якого порядку та задовольняє рівняння Лапласа $\Delta V(x) = 0, \ |x| > R$.
3. Потенціал об'єму є неперервною та неперервно диференційованою функцією в усьому евклідовому просторі.
4. Потенціал об'єму є регулярною в нескінченно віддаленій точці $V(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \to \infty$.

Врахуємо, що щільність потенціалу є постійною величиною, що гарантує залежність потенціалу об'єму V лише від однієї сферичної координати r та не залежить від сферичних кутів φ, θ. Враховуючи цей факт запишемо спрощений вигляд рівняння Пуассона та Лапласа.

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV(r)}{dr}\right) = -\rho_0, \ 0 \le r < R \qquad (8.1),$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV(r)}{dr}\right) = 0, \ R < r < \infty \qquad (8.2).$$

Запишемо умови неперервності та неперервної диференційованості потенціалу об'єму:

$V(R-0)=V(R+0)$, $V'(R-0)=V'(R+0)$ (8.3).

Запишемо умови регулярності на нескінченості та обмеженості потенціалу об'єму в центрі кулі: $V(r)=O\left(\frac{1}{r}\right)$, $V(0)<\infty$ (8.4).

Знайдемо розв'язок граничної задачі (7.1) – (7.4).

Загальний розв'язок рівняння Пуассона та Лапласа мають вигляд $V(r)=-\rho_0\frac{r^2}{6}-\frac{c_1}{r}+c_2,\ 0\le r<R$, $V(r)=-\frac{c_3}{r}+c_4,\ R<r<\infty$.

Використаємо властивості (4). В результаті з обмеженості розв'язку отримаємо $c_1=0$, з умови регулярності на нескінченості маємо $c_4=0$

Виконаємо умови неперервності та неперервної диференційованості потенціалу об'єму:

$$\begin{cases} V(R-0)=-\rho_0\frac{R^2}{6}+c_2=V(R+0)=-\frac{c_3}{R} \\ V'(R-0)=-\rho_0\frac{R}{3}=V'(R+0)=\frac{c_3}{R^2} \end{cases}$$

З останньої системи рівнянь знайдемо $c_3=-\rho_0\frac{R^3}{3}$, $c_2=\rho_0\frac{R^2}{2}$.

Таким чином потенціал об'єму кулі матиме вигляд:

$$V(r)=\begin{cases} \rho_0\frac{R^2}{2}-\rho_0\frac{r^2}{6}, 0\le r\le R \\ \frac{\rho_0R^3}{3r},\ R\le r<\infty \end{cases}. \tag{8.5}$$

Задача 2 Знайти електростатичне поле об'ємних зарядів розподілених з постійною щільністю всередині кулі центр якої розташований над ідеально провідною заземленою площиною $z=0$ на висоті h.

Розв'язання

Потенціал, який створює окрема куля заряджена з постійною щільністю нам відомий з попередньої задачі і дається формулою (5). Для розв'язання цієї задачі скористаємося наступним штучним прийомом. Враховуючи, що площина $z=0$ має нульовий потенціал замінимо вплив площини, який вона здійснює на сумарний потенціал разом з кулею на сумарний потенціал двох симетрично розташованих відносно площини куль рівномірно заряджених зарядами протилежних знаків, верхня з зарядом $\rho_0 = const$, нижня з зарядом $-\rho_0$. Таким чином буде забезпечена виконання нульового потенціалу на площині (Рисунок 8).

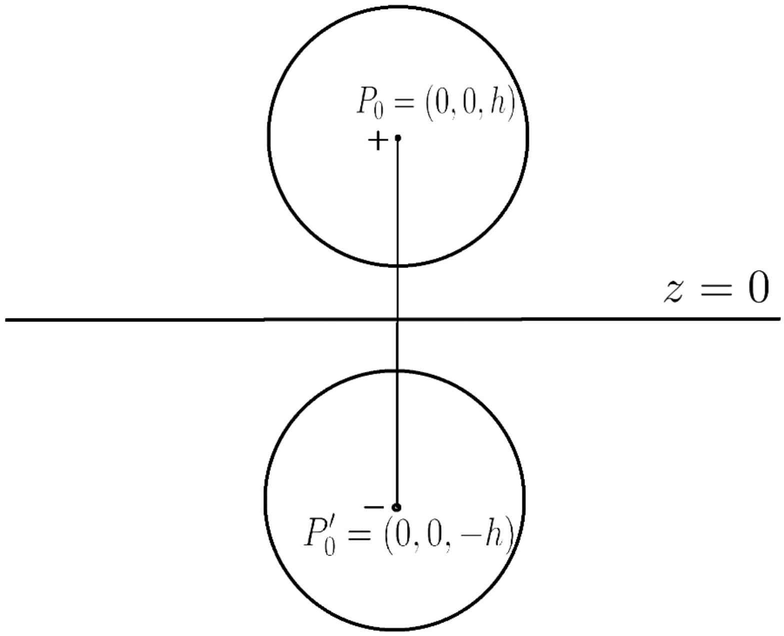


Рисунок 8

Для запису потенціалу, який створюють окремо верхня і нижня кулі скористаємось модернізованою формулою (7.5) та запишемо її в сферичних координатах з центрами в точках $P_0 = (0,0,h)$ та $P_0' = (0,0,-h)$. Надалі будемо позначати $r = |P - P_0|$, $r_1 = |P - P_0'|$, де $P = (x, y, z)$. Тоді потенціал який створює верхня куля запишеться формулою (5), а для нижньої кулі матиме вигляд:

$$V(r_1) = \begin{cases} -\rho_0 \dfrac{R^2}{2} + \rho_0 \dfrac{r_1^2}{6}, 0 \le r_1 \le R \\ -\dfrac{\rho_0 R^3}{3r_1^2},\ R \le r_1 < \infty \end{cases} \qquad (8.6).$$

Скористаємось принципом суперпозиції електростатичних полів запишемо сумарний потенціал, який утворюють обидві кулі в верхньому півпросторі $z>0$. Врахуємо, що зовнішнє поле, яке утворює нижня куля дається нижнім рядком формули (7.6).

$$V(x,y,z)=\begin{cases}\rho_0\dfrac{R^2}{2}-\rho_0\dfrac{r^2}{6}-\dfrac{\rho_0 R^3}{3r_1^2}, 0\le r\le R,\ z>0\\ \dfrac{\rho_0 R^3}{3r}-\dfrac{\rho_0 R^3}{3r_1^2},\ R\le r<\infty,\ z>0\end{cases} \qquad (8.7).$$

В формулі (7.7) $r=\sqrt{x^2+y^2+\left(z-h\right)^2}$, $r_1=\sqrt{x^2+y^2+\left(z+h\right)^2}$.

Наступні задачі розв'язати самостійно:

Задача 3 Знайти потенціал простого шару розподіленого з постійною щільністю $\nu=\nu_0=const$ на сфері. Поставивши граничну задачу та розв'язавши її.

<u>*Вказівка*</u> Для розв'язання задачі скористатися властивостями потенціалу простого шару.

Задача 4 Знайти потенціал простого шару розподіленого з постійними щільностями $\nu=\nu_0=const$ та $\nu=\nu_1=const$ на концентричних сферах. Поставивши граничну задачу та розв'язавши її.

Задача 5 Знайти потенціал подвійного шару розподіленого з постійною щільність $\mu=\mu_0=const$ на сфері. Поставивши граничну задачу та розв'язавши її.

<u>*Вказівка*</u> Для розв'язання задачі скористатися властивостями потенціалу простого шару.

Задача 6 Знайти потенціал об'єму який розподілений в кульовому шарі $a\le r\le b$ з постійною щільністю $\rho_0=const$. Поставивши граничну задачу та розв'язавши її.

Задача 7 Знайти логарифмічний потенціал круга з постійною щільністю зарядів.

Задача 8 Знайти логарифмічний потенціал простого шару відрізка з постійною щільністю зарядів.

Розв'язання

Нехай відрізок розташований на вісі $-a < x < a$, тоді логарифмічний потенціал простого шару запишеться у вигляді $V(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \ln \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2}} d(x - x_0)$

Обчислимо інтеграл за частинами $V(x_0, y_0) = -\frac{1}{4\pi}(x - x_0)\ln((x - x_0)^2 + y_0^2)\Big|_{-a}^{a} + \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \frac{(x - x_0)^2 d(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + y_0^2}$.

Останній інтеграл легко зводиться до табличного.

Задача 9 Знайти логарифмічний потенціал простого шару кола радіуса R з постійною щільністю μ_0.

Задача 10 Знайти логарифмічний потенціал простого шару для відрізку $-a \le x \le a,\ y = 0$ з щільністю $\mu = x$.

Задача 11 Знайти логарифмічний потенціал подвійного шару відрізку з постійною щільністю зарядів $\nu = const$.

Задача 12 Знайти логарифмічний потенціал подвійного шару для кола радіусу R з щільністю $\nu = const$.

Задача 13 Показати що якщо щільність є абсолютно інтегрованою функцією на поверхні S, то потенціал простого та подвійного шару для оператора Гельгольмца задовольняє однорідному рівнянню Гельгольмца.

Задача 14 Обчислити потенціал для оператора Гельгольмца для кулі радіусу R з щільністю $\rho = const$.

Задача 15 Обчислити потенціал для оператора Гельгольмца для кулі радіусу R з щільністю $\rho = e^{-|x|}$.

Задача 16 Обчислити потенціал простого шару для оператора Гельгольмца для сфери радіусу R з щільністю $\rho = const$.

Задача 17 Розв'язати першу та другу граничні задачі для рівняння Лапласа в півпросторі $x_3 > 0, -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty$ використовуючи потенціали подвійного та простого шару відповідно.

<u>*Розв'язання*</u>

а) Розглянемо розв'язок першої граничної задачі (задачі Діріхле).

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, -\infty < x_1, x_2 < \infty, x_3 > 0 \\ u\big|_{x_3=0} = f(x_1, x_2) \end{cases} \tag{8.8}$$

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді потенціалу подвійного шару

$$W(x) = \iint_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y \tag{8.9}$$

Тут S - площина $x_3 = 0$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $|x-y| = \left[\sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$

Згідно властивостей потенціалу подвійного шару щільність $\sigma(y)$ повинна задовольняти інтегральному рівнянню:

$$f(x) = \iint_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y - \frac{\sigma(x)}{2},\ x \in S \tag{8.10}$$

Обчислимо пряме значення потенціалу подвійного шару, тобто значення потенціалу подвійного шару на поверхні S.

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{4\pi|y-x|} = \frac{\partial}{\partial|y-x|}\left(\frac{1}{4\pi|y-x|}\right) \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial|y-x|}{\partial y_i} \cdot n_i = -\frac{1}{4\pi|y-x|^2} \sum_{i=1}^{3} \frac{y_i - x_i}{|y-x|} \cdot n_i =$$

$= -\dfrac{\cos\left(\mathbf{y-x}, \mathbf{n_y}\right)}{|y-x|^2}$ Врахуємо, що точки y, x лежать на площині $x_3 = 0$, тобто кут між векторами $\mathbf{y-x}$ та вектором зовнішньої нормалі $\mathbf{n_y}$ є прямим, тоді $\cos\left(\mathbf{y-x}, \mathbf{n_y}\right) = 0$

Таким чином з інтегрального рівняння маємо $\sigma(x) = -2f(x)$.

Підставимо знайдену щільність в (7.10) та обчислимо похідну по нормалі $\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|y-x|}\bigg|_S = -\frac{\partial}{\partial y_3}\frac{1}{4\pi|y-x|}\bigg|_{y_3=0} = \frac{-x_3}{4\pi\left[\left(y_1-x_1\right)^2+\left(y_2-x_2\right)^2+x_3^2\right]^{3/2}}$

Остаточно $W(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x_3 f(y_1,y_2)dy_1dy_2}{2\pi\left[\left(y_1-x_1\right)^2+\left(y_2-x_2\right)^2+x_3^2\right]^{3/2}}$

б) Розглянемо далі розв'язок задачі Неймана для півпростору

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0,-\infty<x_1,x_2<\infty,x_3>0\\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x_3=0}=f(x_1,x_2)\end{cases} \qquad (8.11).$$

Розв'язок задачі (7.11) будемо шукати у вигляді потенціалу простого шару $V(x)=\iint\limits_S \mu(y)\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y$ (8.12).

Враховуючи властивості потенціалу простого шару, щільність потенціалу повинна задовольняти інтегральному рівнянню:

$$f(x)=\iint\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y+\frac{\mu(x)}{2},\ x\in S \qquad (8.13)$$

Продовжити розв'язок задачі самостійно.

Задача 18 Знайти розв'язок задачі Неймана для круга користуючись логарифмічним потенціалом простого шару.

<u>Розв'язання</u>

Запишемо постановку задачі:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0,\ x_1^2+x_2^2<R^2\\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x_1^2+x_2^2=R^2}=f(x_1,x_2)\end{cases} \qquad (8.14).$$

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді логарифмічного потенціалу простого шару.

$$V(x) = \oint_C \mu(y)\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dl_y \qquad (8.15).$$

При цьому щільність потенціалу повинна задовольняти інтегральному рівнянню Фредгольма $f(x) = \oint_C \mu(y)\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_x}\ln\frac{1}{|x-y|}dl_y + \frac{\mu(x)}{2}, x \in C$ (7.16).

Обчислимо пряме значення нормальної похідної потенціалу простого шару:

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_x}\ln\frac{1}{|x-y|} = -\frac{1}{2\pi}\frac{|x-y|}{|x-y|^2}\sum_{i=1}^{2}\frac{(x_i - y_i)}{|x-y|}n_{x_i} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{n_x})}{|x-y|} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\cos\phi}{|x-y|}.$$

Для обчислення ядра інтегрального рівняння розглянемо малюнок

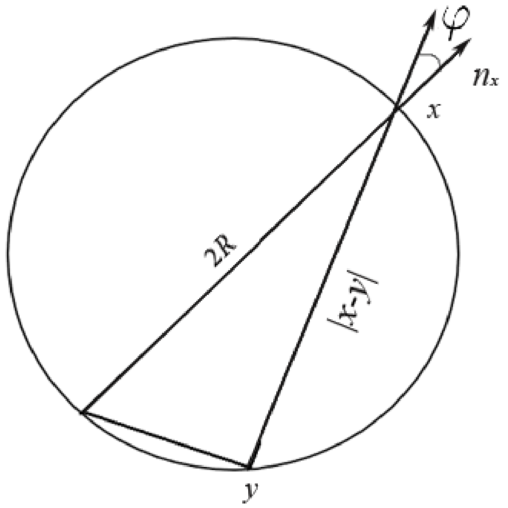


Рисунок 9

З прямокутного трикутника запишемо довжину катету $|x-y| = 2R\cos\varphi$ (Рисунок 9)

Таким чином інтегральне рівняння (7.16) буде мати вигляд:

$f(x) = -\oint_C \mu(y)\frac{1}{4\pi R}dl_y + \frac{\mu(x)}{2}, x \in C$ або $\mu(x) = 2f(x) + \frac{1}{2\pi R}\oint_C \mu(y)dl_y, x \in C$, де C - коло радіуса R. Легко бачити, що інтегральне рівняння має вироджене ядро і його розв'язок може бути знайдений в явному вигляді.

$\mu(x) = 2f(x) + \frac{1}{2\pi R}D$, де $D = \oint_C \mu(y)dl_y = \oint_C \left(2f(y) + \frac{D}{2\pi R}\right)dl_y = 2\oint_C f(y)dl_y + D$.

Таким чином D - залишається вільною константою, а на функцію $f(x)$ накладається умова ортогональності $\oint\limits_C f(y)dl_y = 0$. Остаточно маємо

$\mu(x) = 2f(x) + \frac{1}{2\pi R}D$.

Підставимо знайдену щільність в формулу (7.15).

$$V(x) = \oint\limits_C f(y)\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}dl_y + \frac{D}{4\pi^2 R}\oint\limits_C \ln\frac{1}{|x-y|}dl_y$$

Запишемо останню формулу в полярних координатах. Нехай точці x відповідають полярні координати (ρ_0, φ_0), точці y відповідно (R, φ).

Тоді

$$V(\rho_0,\varphi_0) = \frac{R}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\ln\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + R^2 - 2\rho_0 R\cos(\varphi-\varphi_0)}}d\varphi +$$
$$+\frac{D}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + R^2 - 2\rho_0 R\cos(\varphi-\varphi_0)}}d\varphi$$

Неважко пересвідчитись, що другий інтеграл в останній формулі є константою. Таким чином розв'язок задачі визначається з точністю до адитивної константи: $V(\rho_0,\varphi_0) = \frac{R}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\ln\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + R^2 - 2\rho_0 R\cos(\varphi-\varphi_0)}}d\varphi + D$

Задача 19_ За допомогою логарифмічного потенціалу подвійного шару розв'язати внутрішню та зовнішню задачі Діріхле для круга.

Задача 20 Розв'язати першу граничну задачу рівняння Лапласа для півплощини користуючись логарифмічним потенціалом подвійного шару.

Задача 21 Показати, що фундаментальним розв'язком оператора $\Delta - k^2$ в R^3 є функція $-\frac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|}$. Записати потенціали для цього оператора.

Задача 22 Для оператора $\Delta - k^2$ обчислити потенціал простого шару розподіленого з постійною щільністю μ_0 на сфері.

Задача 23 Для оператора $\Delta - k^2$ обчислити потенціал об'єму розподіленого з постійною щільністю ρ_0 на кулі.

Задача 24 Для оператора $\Delta - k^2$ обчислити потенціал подвійного шару розподіленого з постійною щільністю ν_0 на сфері.

Література

1. Перестюк В.О, Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики Київ Либідь 2006 423 с.
2. Гончаренко В.М. Основи теорії рівнянь математичної фізики К.: Вищя шк., 1995, -352 с.
3. Положий Г.Н. Уравнения математической физики .- М.: Высшая школа , 1964,-560 с.
4. Вірченко Н.О. Основні методи розв’язання рівнянь математичної фізики. – К.: КПІ, 1997. – 370 с.
5. Кузьмін А.В., Кашпур О.Ф. Вовк В.С. Практикум з дисципліни “Рівняння математичної фізики”. - К. Видавництво Людмила, 2025. – 152 с.

Зміст