

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

П.М. Зінько, Т.П. Зінько, О.А. Капустян

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ: ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Для студентів спеціальності

F4 Системний аналіз та наука про дані

КИЇВ – 2026

УДК 303.732.4: 004.45(075.8): 519.816

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Протокол №13 від 21 квітня 2026 року

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Протокол №10 від 20 квітня 2026 року

Рецензенти:

Мащенко Сергій Олегович, професор, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Кудін Володимир Іванович, професор, доктор технічних наук, професор кафедри інтелектуальних технологій факультету інформаційних технологій Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Зінько П.М., Зінько Т.П., Капустян О.А. Системний аналіз: лабораторний практикум. – Київ. – 2026. – 125 с.

Викладено довідкові матеріали до лабораторного практикуму з навчальної дисципліни «Системний аналіз», яка є обов'язковою для студентів, що навчаються за освітньо-науковою програмою першого (бакалаврського) рівня вищої освіти «Системний аналіз» спеціальності F4 «Системний аналіз та наука про дані». Наведено основні теоретичні відомості з дослідження перехідних процесів у неперервних динамічних системах; впливу зворотного зв'язку на динамічні властивості лінійних систем; синтезу лінійних систем сумісного оцінювання та керування; моделей та методів аналізу ієрархій підтримки прийняття рішень; методів розкриття невизначеностей у задачах системного аналізу; методів розв'язування системних задач протидії коаліцій з урахуванням факторів ризику. Наведено інструкції та вимоги до виконання лабораторних робіт з побудови обчислювальних технологій, згідно з робочою програмою навчальної дисципліни «Системний аналіз», питання для підготовки до виконання лабораторних робіт, а також сформульовані варіанти індивідуальних самостійних завдань по усіх лабораторних роботах.

Для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які навчаються за освітньо-науковою програмою першого (бакалаврського) рівня вищої освіти «Системний аналіз» спеціальності F4 «Системний аналіз та наука про дані».

© Зінько П.М., Зінько Т.П., Капустян О.А., 2026

ЗМІСТ

Вступ	4
Тема № 1. Числові методи дослідження перехідних процесів у лінійних стаціонарних динамічних системах	9
Тема № 2. Дослідження впливу зворотного зв'язку на динамічні властивості лінійної стаціонарної системи	17
Тема № 3. Програмне керування і перехідний процес переводу лінійної стаціонарної системи із початкового стану в довільно заданий кінцевий стан.....	25
Тема № 4. Дослідження стійкості лінійної неперервної стаціонарної системи. Критерій Рауса.....	29
Тема № 5. Синтез лінійних динамічних систем сумісного оцінювання та керування.....	37
Тема № 6. Метод аналізу ієрархій багатокритеріального та багатоцільового прийняття рішень.....	61
Тема № 7. Розкриття невизначеностей у задачах системного аналізу.....	83
Тема № 8. Системна задача протидії коаліцій з урахуванням факторів ризику.....	100
Додаток 1. Розв'язання задачі Коші для системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.....	120
Література.....	123

Вступ

Науково-технічний прогрес поставив принципово нові завдання перед людством, зумовив необхідність нового підходу до створення нових сучасних технічних об'єктів і технологій, а також до вивчення явищ та атрибутів сучасного світу [1–7,18–20]. Серед цих завдань особливе місце займають задачі системного аналізу. Практична важливість розв'язання системних задач зумовлена тим, що в сучасному світі наукові, технічні, соціальні, економічні, екологічні, політичні й інші сфери діяльності людини не можуть існувати окремо. Вони завжди складають цілісне середовище проживання й активної діяльності людей. Зміни в кожній із цих сфер неодмінно позначаються на інших сферах, проблеми однієї сфери впливають на проблеми інших. Таку залежність визначають взаємозв'язки різної природи – фінансової, матеріальної, енергетичної – у формі трудових ресурсів, складу, рівня і якості життя людей, рівня й тенденцій розвитку технологій тощо. Звідси випливає необхідність системного підходу до розв'язання комплексних задач у різних сферах діяльності [1,7,19–21]. Відсутність системного підходу під час розв'язування комплексних практичних задач може призвести до небажаних, непрогнозованих або навіть до катастрофічних наслідків.

Характерною ознакою сучасного етапу науково-технічного прогресу є також стрімко зростаюча складність взаємозв'язків і взаємодії різних сфер діяльності людини і навколишнього середовища [22]. Глобальні масштаби взаємного впливу різних процесів та їхній високий динамізм викликали зміну звичних стереотипів у розумінні ступеня й рівня впливу цивілізації на навколишнє середовище. Пророцтво глобальних екологічних катастроф стало реальністю. Це підтверджує той факт, що вплив людства на біосферу вже перевищує реальні можливості планети компенсувати його наслідки. Тому головний висновок вчення В.І. Вернадського про те, що на певному етапі свого розвитку людство має взяти на себе відповідальність за подальшу еволюцію нашої планети, повинен бути негайно втілений у життя. У протилежному випадку людство не матиме майбутнього. Розв'язання цієї надзвичайно важливої проблеми неможливе без виконання системного аналізу виниклої глобальної проблемної ситуації, без передбачення на основі системного мислення сценаріїв її розвитку, без прогнозування на базі системної методології необхідних дій для виключення негативних результатів.

Таким чином, виникнення і розвиток системного мислення, системної методології й системного аналізу зумовлено об'єктивною необхідністю пізнання світу в усьому його різноманітті і цілісності в інтересах найраціональнішого використання матеріальних, енергетичних та інформаційних ресурсів планети на благо людства.

Неформалізованість, нечіткість, невизначеність початкової інформації та низка інших важливих особливостей системності практичної діяльності людини визначає доцільність раціонального поєднання під час проведення системного аналізу як інтуїції та досвіду дослідника, так і об'єктивних знань, а також обчислювальних можливостей комп'ютерів [3,9,23]. У цьому своєрідному симбіозі можливостей та об'єктивних наукових знань комп'ютер відіграє роль підсилювача інтуїції і творчого начала людини, тобто роль потужного інструменту в розв'язанні задач системного аналізу.

Системний аналіз можна сприймати як універсальну наукову методологію, що з єдиних позицій вивчає і властивості об'єктів, і відношення між ними. Становлення та розвиток теорії та практики системного аналізу підтверджує справедливність висловлювання відомого системного аналітика Дж. Кліра: «Головне у розвитку науки у другій половині 20-го століття – це перехід від одновимірної науки, що спиралася переважно на експериментування, до науки двовимірної, в яку наука про системи, базована переважно на відношеннях, поступово входить як другий вимір». Спираючись на це визначення, системний аналіз можна віднести до двовимірної методології.

Системний аналіз як загальнонаукова міждисциплінарна методологія має такі особливості:

- являє собою погоджену сукупність методологічних принципів, процедур і методів досліджень, орієнтованих на діалектичне пізнання загальних властивостей та особливостей міждисциплінарних системних задач та способів їхнього розв'язання з метою одержання конкретно-наукових і прикладних результатів у різних сферах людської діяльності.

- є наступним кроком у розвитку сучасної науки, а саме перехідним етапом від двовимірної науки до багатовимірної, здатної всебічно досліджувати не лише власне систему, але й початкові умови її створення, а також умови її функціонування та управління у штатних і позаштатних ситуаціях, тому виникає необхідність, по-перше, у багатовимірному системному аналізі умов функціонування системи і, по-друге, у багатовимірному системному аналізі системи як цілісного об'єкта.

Системний аналіз можна інтерпретувати як прикладну наукову методологію, арсенал засобів якої базується не тільки і не стільки на аксіомах, скільки на евристичних методах, прийомах, алгоритмах. Системний аналіз на відміну від аксіоматичних дисциплін має прямо протилежну мету дослідження: за умови, що існує практична задача, для якої відомі фізичні, технологічні, економічні та інші обмеження, потрібно знайти систему прийомів і методів, які дадуть змогу одержати її розв'язок із практично прийнятною точністю, за допустимий час та за прийнятних витрат усіх видів ресурсів. При цьому системний аналіз дає можливість вивчати все різноманіття властивостей об'єкта

з позиції досягнення поставленої мети його дослідження як єдиного цілого. У той же час аксіоматичні дисципліни дають змогу вивчати окремі властивості об'єкта з позиції аналізу тільки цих властивостей, без урахування впливу на них інших властивостей.

Отже, стосовно традиційних наукових дисциплін системний аналіз можна розглядати як наступний крок у розвитку методології сучасної науки, а саме як перехід від одновимірної науки до багатовимірної, де всебічно досліджують не лише власне систему, але й умови її створення й функціонування, умови управління функціонуванням системи у штатних позаштатних, критичних і надзвичайних ситуаціях з урахуванням факторів ризику, а також неповноти, неточності й недостовірності інформації.

Враховуючи наведені особливості системного аналізу, його змістовне визначення як наукової методології може бути таким [1,19,20]. *Системний аналіз* – це прикладна наукова методологія, яка спирається на широке різноманіття системно організованих, структурно взаємозалежних і функціонально взаємодіючих евристичних процедур, методичних прийомів, математичних методів, алгоритмічних, програмних і обчислювальних засобів, що забезпечує формування цілісних, міждисциплінарних знань про досліджуваний об'єкт як про сукупність взаємозалежних процесів різної природи. Ці знання використовуються для прийняття рішень щодо подальшого розвитку і поведінки об'єкта з урахуванням багатьох конфліктних критеріїв і цілей, наявності факторів ризику, неповноти і недостовірності інформації.

Умови переходу людства до інформаційного суспільства, проникнення нових інформаційних технологій у різні сфери життя та діяльності людини [9] якісно змінюють не лише цілі, задачі та зміст освіти, але і роль, місце й значення окремих дисциплін у загальній системі освіти. Потреба у формуванні людини і дослідника, здатного адаптуватися до швидко змінюваних умов та норм сучасного суспільства і націленого на удосконалення цього суспільства, зумовлює необхідність перегляду парадигми освіти і зміни багатьох аспектів процесу пізнання. У світовій практиці чітко простежується тенденція корінної зміни цього процесу – тепер більше уваги приділяється системному мисленню, що дає можливість виявляти глибинні явища, взаємні зв'язки та вплив елементів навколишнього світу. Тому формування і розвиток теоретичних основ системного аналізу як прикладної наукової методології повинні бути системно погоджені з цілями, задачами, очікуваними результатами і стратегією розвитку систем освіти, а також із загальними тенденціями розвитку сучасного суспільства [9]. Необхідність у такому підході випливає з основних вимог до випереджальної системи освіти і, зокрема, з вимоги освоєння наукової методології та способів застосування системного аналізу на практиці з метою виявлення суті і визначення шляхів розв'язання політичних, економічних,

екологічних, соціальних, науково-технічних та інших практично важливих проблем.

У даному лабораторному практикуму осучаснені та розвинуті методи, ідеї та підходи з раніше опублікованих навчально-методичних матеріалів авторів [10,12]. У навчальному посібнику наведено вісім тем. У кожній темі даються необхідні теоретичні відомості, приклади розв'язування розглядуваних задач, обчислювальні алгоритми, питання для підготовки до виконання лабораторних робіт, завдання та варіанти для самостійної роботи.

У темі № 1 наводяться числові методи дослідження перехідних процесів у неперервних лінійних стаціонарних динамічних системах. Показано взаємозв'язок між лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку з постійними коефіцієнтами та керуванням і математичною моделлю динамічної системи у векторно-матричній формі. З використанням матричного експоненціалу та періоду квантування неперервна динамічна модель зводиться до дискретної.

У темі № 2 досліджується вплив зворотного зв'язку на динамічні властивості лінійної неперервної стаціонарної системи. Використано тип зворотного зв'язку за станом динамічної системи. Вводиться певний критерій функціонування такої динамічної системи зі зворотним зв'язком. Використано два числові алгоритми оптимізації для мінімізації уведеного критерію.

У темі № 3 наводиться алгоритм побудови програмного керування, яке лінійну неперервну стаціонарну динамічну систему переводить із заданого початкового стану у довільно заданий кінцевий стан за задане скінчене число ітерацій.

У темі № 4 використано критерій Рауса для дослідження стійкості лінійної неперервної стаціонарної системи. Для обчислення коефіцієнтів характеристичного рівняння застосовано робастний метод Левер'є, який додатково можна використовувати як алгоритм обернення квадратних матриць.

У темі № 5 для лінійної неперервної нестационарної динамічної системи з квадратичним критерієм якості керування при невідомих станах системи побудовані оптимальні регулятори з використанням двох типів спостерігачів стану: спостерігач стану повного порядку та спостерігач стану низького порядку (спостерігач Люенберга). На основі побудованих спостерігачів стану здійснюється керування суб-оптимальною динамічною системою.

У темі № 6 наведено метод аналізу ієрархій (МАІ) багатокритеріальної підтримки прийняття рішень. Наводяться математичні основи МАІ: метод головного власного вектора для знаходження пріоритетів з побудованих за оцінками експертів додатних обернено симетричних матриць парних порівнянь, методи побудови показника узгодженості експертної інформації та метод ієрархічної композиції для синтезу ваг. На прикладі типової задачі оцінювання

детально розглядаються основні етапи МАІ: побудова ієрархічної структури, парні порівняння елементів ієрархії, обчислення їх локальних та глобальних ваг.

У темі № 7 сформульовано задачі розкриття невизначеностей цілей, ситуацій і конфліктів. Для знаходження раціонального компромісу цілей наведено два основні підходи: перший базується на ідеї, запропонованої Парето, а другий – на зведенні багатоцільової задачі до типової задачі з одним критерієм. Викладено методи і прийоми знаходження множини Парето, розкриття невизначеності цілей, невизначеності дії партнера або супротивника.

У темі № 8 запропоновано математичний апарат формалізації і розв'язання системної задачі розкриття невизначеностей та оптимізації цілей партнерів обох коаліцій в задачах протидії двох коаліцій з урахуванням факторів ризику: непрогнозованої ситуації протидії коаліцій, форс-мажорного ризику та інформаційного ризику, зумовленого неповнотою, неточністю, недостовірністю початкової інформації. Стратегія дії кожної коаліції полягає у підвищенні рівня реалізації своїх інтересів за допомогою збільшення значення вектор-функції цілей та зниження ступеня й рівня ризику.

ТЕМА №1

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

Розглянемо неперервну лінійну стаціонарну систему, математична модель якої має вигляд [10,11,24]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \in [0, \infty); \quad (1.1)$$

$$y(t) = Cx(t), x(t)|_{t=0} = x^0. \quad (1.2)$$

Тут $x(t) \in R^n$ – вектор стану системи у момент часу $t \in R^1$ (R^n – n -вимірний евклідов простір), $u(t) \in R^m$ – вхідна змінна (або вхідний процес), $y(t) \in R^l$ – вихідна змінна (або вихідний процес), $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ і $C \in R^{l \times n}$ – матриці параметрів системи. Розміри векторів стану, входу та виходу задовольняють умовам: $m \leq n$, $l \leq n$.

Рівняння (1.1) називається *рівнянням еволюції станів системи* в диференціальній формі або *рівнянням динаміки системи*. Рівняння (1.2) називається *рівнянням виходу системи, створюючою функцією виходу, рівнянням вимірного каналу* або просто *рівнянням вимірів* (станів $x(t)$ системи). При цьому $y(t)$ – це результат виміру стану $x(t)$.

Модель у формі (1.1), (1.2) описує множину реальних систем, які зустрічаються в механіці (політ ракети, літака, супутника тощо), кібернетиці, економіці, екології, електромеханіці, теорії ланцюгів, фізиці, біології, медицині та ін.

Зокрема, до моделі (1.1), (1.2) можна звести будь-яку систему, що описується диференціальним рівнянням n -го порядку.

Наприклад, нехай зв'язок між вхідним $u(t) \in R^1$ і вихідним $y(t) \in R^1$ процесами в деякій системі задається лінійним диференціальним рівнянням

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = bu(t) \quad (1.3)$$

з початковими умовами

$$y(t)|_{t=0} = y_0, y'(t)|_{t=0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t)|_{t=0} = y_0^{(n-1)}. \quad (1.4)$$

У рівнянні (1.3) a_0, \dots, a_{n-1}, b – задані дійсні числа (коефіцієнти рівняння). Покажемо, як цю модель привести до вигляду (1.1), (1.2). Уведемо допоміжний вектор $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ у такому вигляді:

$$y(t) = Ce^{At}x^0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau. \quad (1.10)$$

Процес (1.10) називається ще *реакцією системи (1.1), (1.2) на вхідний процес $u(t)$* .

Припустимо, що $x^0 = 0$, тоді з рівності (1.10) маємо

$$y(t) = C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau. \quad (1.11)$$

У цьому конкретному випадку процес $y(t)$ (при попередньо заданому процесі $u(t)$) називають *перехідним*. Як правило, вважають

$$u(t) = \text{const для } \forall t \in [0, \infty).$$

Насправді, процес $y(t)$ (у крайньому разі для стійкої системи) являє собою перехід системи зі стану спокою при $t = 0$ у новий стан спокою при $t \rightarrow \infty$.

У загальному випадку $u(t)$ розглядають як поліном

$$u(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k, \quad (1.12)$$

гармонійний сигнал

$$u(t) = Q \sin(\omega t + \varphi) \text{ чи } u(t) = Q \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.13)$$

тощо. У (1.12), (1.13) $a_0, a_1, \dots, a_k, Q, \omega, \varphi$ – числові параметри.

(Студентам самостійно придумати н'ять інших типів входів.)

Побудова (або, точніше, обчислення, а потім побудова) процесу (1.11) за заданим входом $u(t)$ становить основний зміст задачі дослідження перехідного процесу в системі. Для того, щоб розв'язати цю задачу, розглянемо спочатку загальний випадок, тобто, знайдемо реакцію (1.10) системи на заданий вхід $u(t)$. Для знаходження алгоритму числового розв'язку цієї задачі зробимо так: виділимо на осі часу точки $t_k = kT_0, k = 0, 1, \dots$. Тут T_0 – так званий *період квантування (період дискретизації)*. Значення $x(kT_0), y(kT_0), u(kT_0)$ у точках $t = kT_0$ будемо позначати відповідно x^k, y^k, u^k .

Вхідний процес $u(t)$ апроксимуємо кусково-постійним процесом так, як показано на рис. 1.1. На рис. 1.1 показано точками координати $u(t)|_{t=kT_0} = u^k$ вхідного процесу. Сам же процес замінюється горизонтальними відрізками, які

щільно прилягають один до одного. Іншими словами, апроксимуючий процес $\hat{u}(t)$ визначається так:

$$\forall t \in [kT_0, (k+1)T_0), \hat{u}(t) = u^k, k = 0, 1, \dots$$

Для розв'язання поставленої задачі, по-перше, замінимо скрізь у інтегралах згортки процес $u(t)$ на $\hat{u}(t)$ і, по-друге, будемо шукати значення змінних $x(t)$ і $y(t)$ тільки в точках $t_k = kT_0, k = 0, 1, \dots$

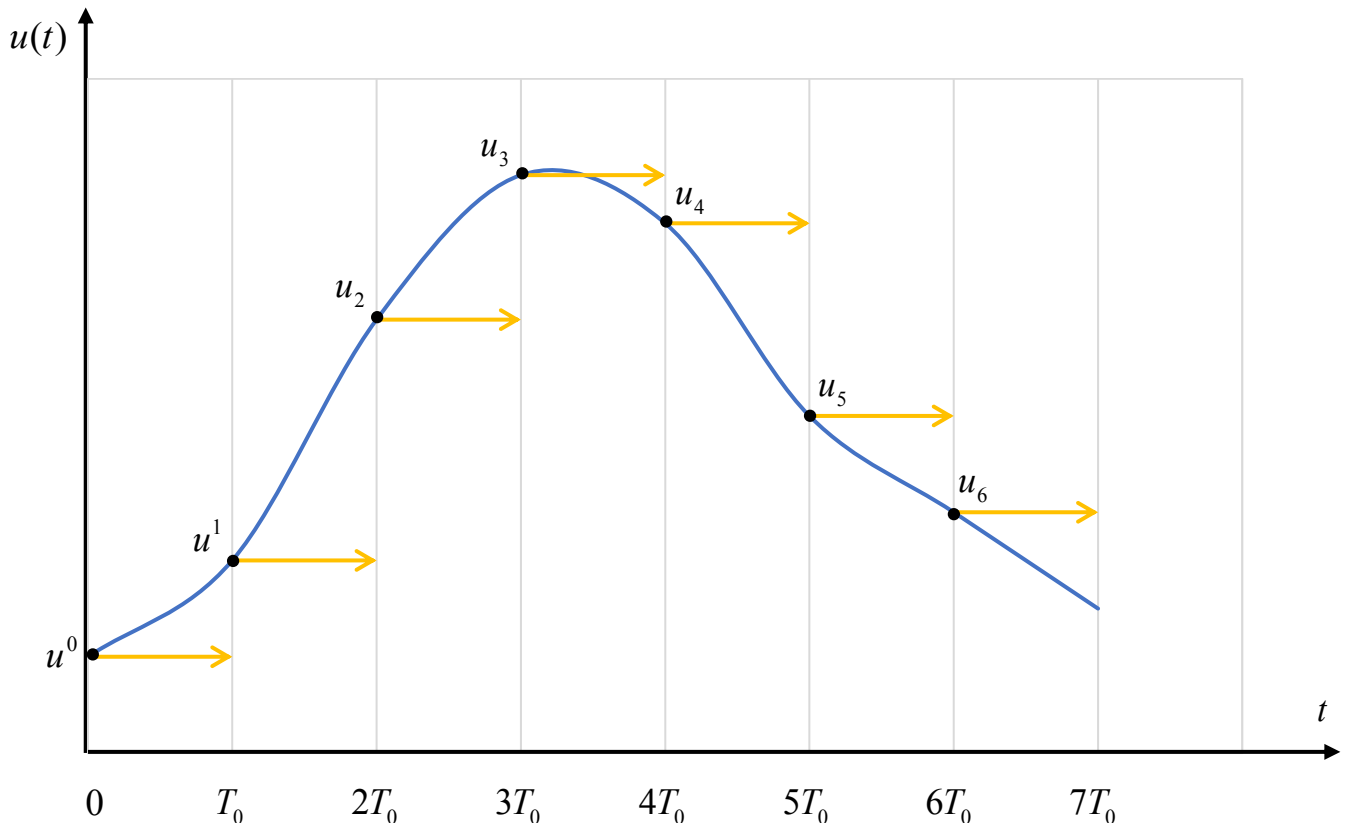


Рис.1.1. Апроксимація вхідного процесу $u(t)$ кусково-постійним процесом – послідовністю $\{u^k\}_{k=0}^{\infty}$.

Перепишемо спочатку розв'язок (1.8) у припущенні, що рівняння (1.1) розглядається для значення $t \in [t_k, t_{k+1})$ з початковою умовою $x(t)|_{t=t_k} = x^k$. Аналогічно (1.8) будемо мати

$$x(t) = e^{A(t-t_k)} x^k + \int_{t_k}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) dt. \quad (1.14)$$

Замінюючи у рівнянні (1.14) $u(\tau)$ на $\hat{u}(\tau)$ і враховуючи, що

$$\forall \tau \in [t_k, t_{k+1}) \hat{u}(\tau) = u^k$$

визначимо значення $x(t)$ у момент t_{k+1} :

$$x^{k+1} = e^{AT_0} x^k + \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\tau \right) Bu^k. \quad (1.15)$$

Обчислюючи інтеграл у круглих дужках, знаходимо

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\tau = \int_0^{T_0} e^{A\varepsilon} d\varepsilon = \int_0^{T_0} e^{A\varepsilon} d(A\varepsilon) A^{-1} = (e^{AT_0} - I) A^{-1}. \quad (1.16)$$

Тут використана підстановка $t_{k+1} - \tau = \varepsilon$. Тоді $d\varepsilon = -d\tau$.

Після підстановки правої частини співвідношення (1.16) у рівність (1.15) одержуємо таку рекурентну формулу для обчислення станів системи в точках $t = t_k$ за заданим вхідним процесом (послідовністю) $\{u^k\}_{k=0}^{\infty}$:

$$x^{k+1} = \Phi(T_0)x^k + \Gamma(T_0)u^k, \quad x^k \Big|_{k=0} = x^0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.17)$$

де

$$\Phi(T_0) = e^{AT_0}, \quad \Gamma(T_0) = (\Phi(T_0) - I) A^{-1} B. \quad (1.18)$$

Повертаючись до рівняння виходу (1.2), для значень вихідного процесу будемо мати

$$y^{k+1} = Cx^{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots. \quad (1.19)$$

При цьому $y^0 = Cx^0$.

Модель (1.17) – (1.19) називають *точною дискретною моделлю неперервної системи* (1.1) – (1.2). Вона в дійсності є такою для постійного або кусково-постійного вхідного процесу.

Питання для підготовки до виконання лабораторної роботи 1.

1. Які ще визначення, згідно з класифікацією динамічних систем за Р. Калманом, можна використати для моделі (1.1)?
2. Запишіть векторну модель (1.1), (1.2) у скалярному вигляді.
3. Чи може бути більшою розмірність вектора виходу за розмірність вектора стану?
4. Який вигляд має i -й рядок матриці Фробеніуса?
5. Запишіть формулу розв'язку задачі Коші при умові, що початковий час t_0 не дорівнює нулю.
6. Запишіть формулу зв'язку між вхідним та вихідним процесами для неперервної динамічної системи при умові, що $x^0 = 0$.

7. Запишіть формулу обчислення матриці $\Gamma(T_0)$ дискретної моделі, яка не містить операції обернення матриці A .
8. Запишіть дискретну модель, яка відповідає неперервній динамічній моделі (1.1), (1.2).
9. Дайте пояснення, чому останній рядок матриці Фробеніуса A складається із коефіцієнтів лінійного диференціального рівняння n -го порядку, взятих зі знаком мінус.
10. Як позначається вектор входу у дискретний момент часу kT_0 ?
11. Запишіть приклад вхідного процесу $u(t)$, $t \in [0; \infty)$, який містить тригонометричні функції tg та ctg .
12. Як позначається i -та компонента вектора стану у дискретний момент часу kT_0 ?
13. Чи можуть бути векторами у дискретній моделі матриці C та $\Gamma(T_0)$?
14. Запишіть формулу наближеного обчислення матричного експоненціалу e^{AT_0} , яка містить q доданків.

Лабораторна робота 1

Для практичної реалізації рекурентного алгоритму (1.17), (1.18), з метою визначення реакції системи на заданий вхідний процес, будемо використовувати різні за точністю наближення матричного експоненціалу (1.9). Так, будемо вважати:

$$\begin{aligned} \Phi_1(T_0) &= I + AT_0, \\ \Phi_2(T_0) &= I + AT_0 + \frac{(AT_0)^2}{2!}, \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi_q(T_0) &= I + AT_0 + \frac{(AT_0)^2}{2!} + \dots + \frac{(AT_0)^q}{q!}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

При виконанні лабораторної роботи параметр точності q задається студентом.

(Самостійна робота: при обчисленні матриці $\Gamma(T_0)$ слід підставити $\Phi_q(T_0)$ з (1.20) у праву частину формули (1.18), уникаючи операції обернення матриці A).

З метою спрощення позначень далі будемо писати $\Phi(T_0) = \Phi$, $\Gamma(T_0) = \Gamma$, опускаючи позначення залежності цих матриць від T_0 . При обчисленні

перехідного процесу слід покласти $x^0 = 0$, при цьому послідовність $\{u^k\}_{k=0}^{\infty}$ буде заданою. Результати роботи повинні закінчуватись графіками, певний зразок якого показаний на рис. 1.2.

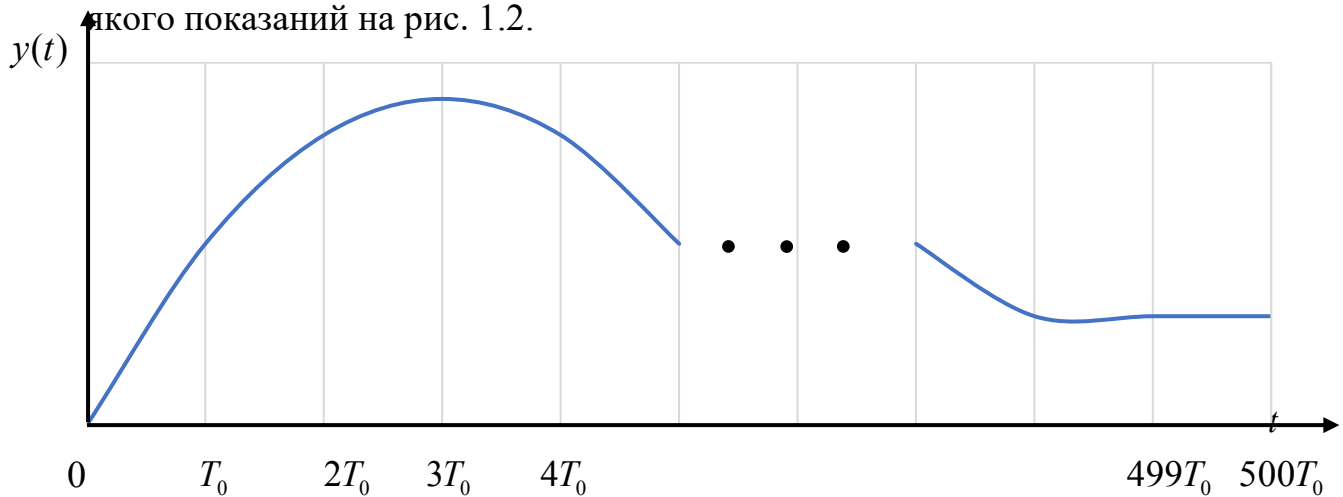


Рис. 1.2. Приклад вихідного процесу $\{y^k\}$ при заданому вхідному $\{u^k\}$ процесі, $u^k = 1, a_1 = 1, a_2 = 3, b = 1, T_0 = 0.02, q = 10$.

Крім того, потрібно навести таблицю компонент вектора станів $x^k, k = 0, 1, 2, \dots$:

k	x_1^k	x_n^k
0			
1			
2			
3			
⋮			
⋮			

Варіанти індивідуальних завдань до лабораторної роботи 1.

$$n = 3, \quad m = 1, \quad l = 1, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0 \ 0);$$

$$a_1 \in [1; 10], T_0 \in [0.000001; 0.999999];$$

$$a_2 \in [1; 10], q = 1 \div 10; b \in R^1;$$

Тут b, a_1, a_2, T_0 – дійсні числа, q – натуральне число.

Необхідно задавати такі типи вхідних процесів:

1) $u^k = \text{const}$ для довільного k , наприклад, $u^k = 1, k \in [0; k_0]$;

2) $u^k = 1$ для довільного $k \in [0; k_1]$, $u^k = -1 \ \forall k \in [k_1 + 1; 2k_1]$ та ін.;

3) $u^k = 1$ для довільного $k \in [0; k_2]$, $u^k = -1 \forall k \in [k_2 + 1; 2k_2]$,

$u^k = 1$ для довільного $k \in [2k_2 + 1; 3k_2]$ та ін.,

де k_0, k_1, k_2 – натуральні числа.

На друк потрібно виводити графіки вихідного процесу $y(t)$ та значення вибраних параметрів $a_1, a_2, b, T_0, q, k_0, k_1, k_2$, а також вказувати, який тип вхідного процесу реалізовано.

Зауваження: 1) вибираючи період квантування T_0 , необхідно перевірити виконання умови: $[I + AT_0]^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$; 2) задаючи певні значення параметрів k_0, k_1, k_2 необхідно враховувати значення періоду квантування T_0 таким чином, щоб забезпечити тривалість характерних вихідних процесів $y(t)$: 10 секунд – 20 секунд.

Також необхідно виконати на комп'ютері такий аналіз:

- 1) змінюється період квантування T_0 ;
- 2) змінюється параметр q ;
- 3) змінюються дійсні параметри a_1, a_2 ;
- 4) змінюється параметр b ;
- 5) знайти параметри a_1, a_2 , такі щоб:
 - а) вихідний процес був коливним із затухаючою амплітудою,
 - б) вихідний процес був коливним із постійною амплітудою,
 - в) вихідний процес був неколивним.

ТЕМА №2

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ЗВОРОТНОГО ЗВ'ЯЗКУ НА ДИНАМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНОЇ СТАЦІОНАРНОЇ СИСТЕМИ

Розглядаємо неперервну лінійну стаціонарну систему [10]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(t)|_{t=0} = x^0, \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t), t \in [0, \infty) \quad (2.2)$$

з одним входом і виходом, яка знаходиться під дією кусково-постійного вхідного процесу

$$\forall t \in [t_k, t_{k+1}), u(t) = u(t_k) = u^k, t_k = kT_0, \quad (2.3)$$

де T_0 – мінімальний інтервал постійності вхідного процесу (період квантування часового параметра t), $k = 0, 1, \dots$ – «дискретний» час, $u(t_k) = u^k \in R^1$ – елемент обмеженої послідовності $\{u^k\}_{k=0}^{\infty}$ значень процесу на вході системи.

У формулах (2.1), (2.2) $x(t) \in R^n$ – стан системи, $y(t) \in R^1$ – вихідна змінна, A , B і C – матриці і вектори відповідних розмірів.

При умові (2.3) системі (2.1), (2.2) відповідає точна дискретна модель (або, точніше, модель у дискретному часі):

$$x^{k+1} = \Phi x^k + \Gamma u^k, x^k |_{k=0} = x^0, \quad (2.4)$$

$$y^k = Cx^k, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

де, як показано у попередній темі,

$$\Phi = e^{AT_0}, \Gamma = (\Phi - I)A^{-1}B,$$

$$e^{AT_0} = I + AT_0 + \frac{(AT_0)^2}{2!} + \dots + \frac{(AT_0)^q}{q!} + \dots \quad (2.6)$$

Нагадаємо, що як і у темі № 1 при обчисленні матриці Γ за формулою (2.6), необхідно позбутися операції обертання матриці A , підставивши замість матриці Φ $q + 1$ доданок матричного експоненціала e^{AT_0} .

Модель (2.4), (2.5) являє собою по суті рекурентні алгоритми послідовного обчислення станів $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ системи під дією керувань $\{u^k\}_{k=0}^{\infty}$. Цій моделі відповідає така графічна схема:

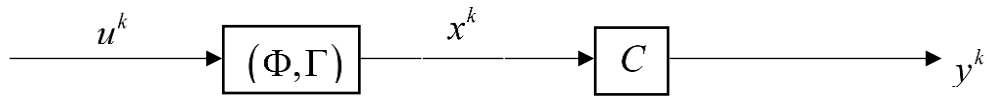


Рис.2.1. Прямий зв'язок між змінними x^k, u^k, y^k .

У схемі показаній на рис.2.1, бачимо основні причинно-наслідкові зв'язки між змінними, станами та виходами дискретної системи (2.4) – (2.6).

Припустимо, що стан $x^k, k = 0, 1, \dots$ може бути точно вимірним. Нехай у кожний момент дискретного часу k керування u^k формується таким чином:

$$u^k = -g^T x^k + \bar{u}^k, k = 0, 1, \dots, \quad (2.7)$$

де $g \in R^n$ – деякий фіксований вектор, $\bar{u}^k \in R^1$ – нове керування, за допомогою якого можна, як і раніше, змінити бажаним способом стан системи.

Дискретна система (2.4), (2.5) з керуванням (2.7) може бути графічно представлена так:

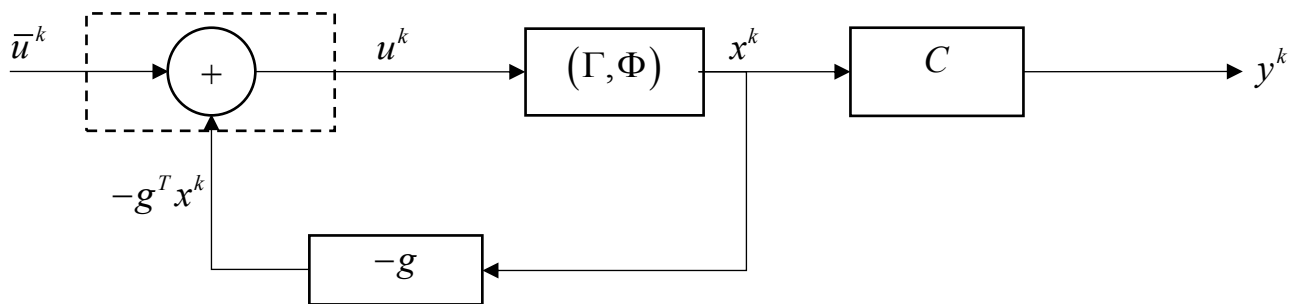


Рис. 2.2. Зворотний зв'язок у дискретній системі за станом.

Круг на цій схемі символічно зображує операцію додавання (алгебраїчну) двох змінних, позначених стрілками, направленими в середину круга. Вихідна стрілка позначає результат операції.

З рис.2.2 бачимо, що складова $(-g^T x^k)$ керування (2.7) формується в тій частині схеми, яка зв'язана із зворотним (порівняно з рис.2.1) спрямуванням передачі інформації. Тому ця складова одержала назву *зворотного зв'язку*. Система з керуванням вигляду (2.7) – *система керування із зворотним зв'язком за станом*.

За допомогою зворотного зв'язку за станом можна суттєво змінити динамічні властивості системи (тобто модифікувати матрицю Φ у формулі (2.4)).

Підставляючи (2.7) у (2.4), одержимо нову ітераційну формулу обчислення станів дискретної моделі

$$x^{k+1} = (\Phi - \Gamma g^T) x^k + \Gamma \bar{u}^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad x^0 = 0. \quad (2.8)$$

За певних обставин (пара (Φ, Γ) – керована) за допомогою вектора g можна забезпечити будь-які наперед задані характеристичні числа матриці $\Phi - \Gamma g^T$ (тут ми вважаємо, що вектор $g \in R^n$ є змінним вектором). Це означає довільну зміну динаміки системи за рахунок уведення в систему (за допомогою керування вигляду (2.7)) зворотного зв'язку.

Питання для підготовки до виконання лабораторної роботи 2.

1. Поясніть суть прямого зв'язку між вхідним процесом, станом та вихідним процесом.
2. Що таке «нове керування» у вхідному процесі в дискретній динамічній системі зі зворотнім зв'язком?
3. Які інші типи зворотного зв'язку (окрім зворотного зв'язку за станом) існують?
4. Чому у лабораторній роботі поклали $\bar{u}^k = 1, k = 0, 1, 2, \dots$?
5. Чи можна у лабораторній роботі покласти $\bar{u}^k = p, k = 0, 1, 2, \dots$, де p будь-яке дійсне число?
6. Дайте означення характеристичних чисел матриці $\Phi - \Gamma l^T$, яка фігурує у формулі (2.8).
7. Якими лініями утворена фігура, площу якої ми мінімізуємо?
8. Дайте геометричну інтерпретацію формули (2.10).
9. Які критерії зупинки роботи алгоритму локальних варіацій можна використати?
10. Яку роль відіграє константа λ у модифікованому градієнтному методі, який не потребує обчислення похідних?
11. Які критерії зупинки роботи модифікованого градієнтного методу, який не потребує обчислення похідних, можна використати?
12. Вектор h^r , який обчислюється на кроці 3 алгоритму 2, являється наближеним значенням якого вектора?
13. Яку обчислювальну роботу необхідно виконати, щоб отримати значення цільової функції $J(g^r)$?

Лабораторна робота 2

Проведемо порівняльне дослідження перехідних процесів у системі із зворотним зв'язком і без нього. Для цього припустимо, що у (2.8) для будь-якого $k = 0, 1, \dots$ виконується рівність $\bar{u}^k = 1$ при значенні $x^k|_{k=0} = 0$. Розглянемо випадок $n = 3$, матрицю A та вектори B і C у (2.1), (2.2) (а значить і у формулах (2.4) – (2.6)) запишемо у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, C = (1, 0, 0)$$

I. Використання алгоритму локальних варіацій для розв'язання задачі оптимізації.

Вектор g^T у формулі (2.8) записуємо у такому вигляді

$$g^T = (g_1, g_2, g_3). \quad (2.9)$$

При розглянутих умовах процес зміни вихідної змінної $y(t)$ системи (перехідний процес) буде мати такий вигляд:

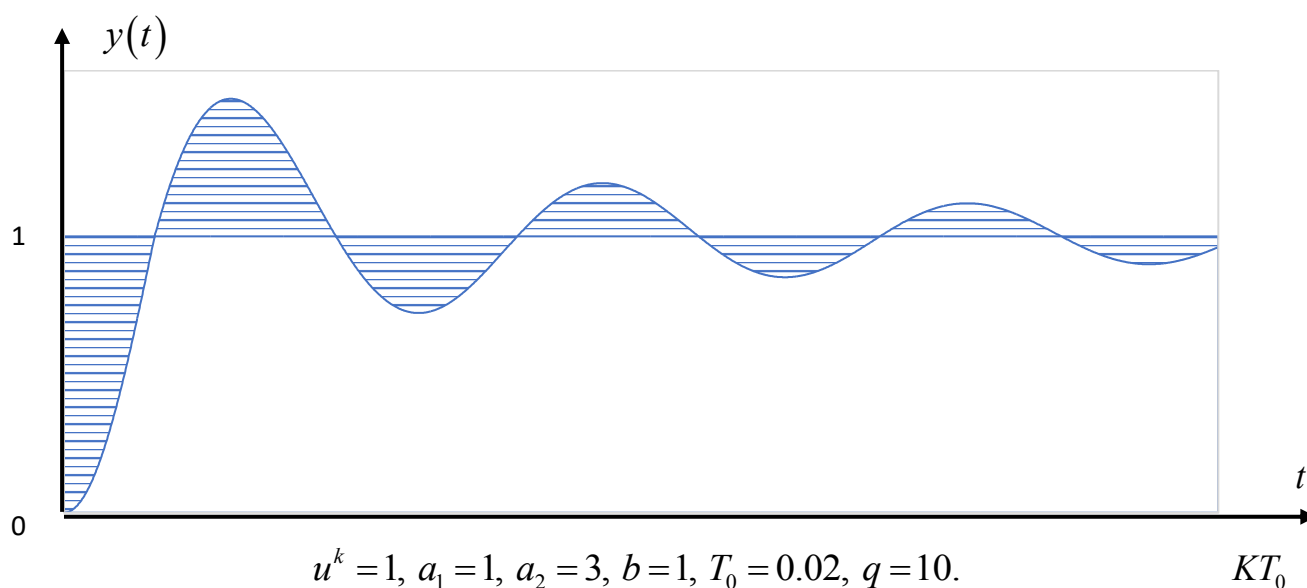


Рис.2.3. Вихідний процес $y(t)$.

Метою роботи є оптимізація перехідного процесу, а саме вибір таких параметрів g_1, g_2, g_3 , за яких заштрихована на рис.2.3 площа зветься б до мінімуму. Мірою цієї площі (критерій оптимізації) приймемо

$$J(g) = J(g_1, g_2, g_3) = \sum_{k=0}^K |x_1^k - 1| \cdot T_0, \quad (2.10)$$

де x_1^k – перша компонента вектора x^k , який обчислюється за формулою (2.8), T_0 – період квантування.

Параметр K є натуральним числом, яке вибирається студентом.

Нижче пропонується два алгоритми оптимізації цільової функції $J(g)$, яка задається формулою (2.10).

Спочатку для мінімізації критерію (2.10) використаємо алгоритм локальних варіацій [12], який не вимагає обчислення похідних цільової функції, і не є очевидною модифікацією алгоритму, який вимагає таких обчислень.

Алгоритм 1.

Початок.

1. Вибрати константу $\rho_0 > 0$ (рекомендується вибирати $\rho_0 = 1$), покласти $g^0 = 0$.

2. Обчислити n -вимірні вектори $h^i, i \in \overline{1, 2n}$:

$$h^{2j-1} = e^j; h^{2j} = -e^j, j \in \overline{1, n},$$

де e^j – j -й стовпчик одиничної $n \times n$ -матриці.

3. Покласти $r = 0, g = g^0$.

4. Обчислити $J(g)$.

Основний цикл.

5. Покласти $\rho = \rho_r$.

6. Покласти $i = 1$.

7. Обчислити значення цільової функції $J(g + \rho h^i)$.

8. Якщо виконується нерівність $J(g + \rho h^i) < J(g)$, то покласти $g = g + \rho h^i$ та перейти на крок 6; інакше перейти на крок 9.

9. Якщо виконується нерівність $i < 2n$, то покласти $i = i + 1$ та перейти на крок 7; інакше перейти на крок 10.

10. Покласти $g^{r+1} = g, \rho_{r+1} = \rho / 2, r = r + 1$ та перейти на крок 5.

II. Модифікований градієнтний метод, який не потребує обчислення похідних.

Тепер будемо мінімізувати площу заштрихованої фігури одночасно за трьома компонентами вектора $l^T = (l_1, l_2, l_3)$ за допомогою наступного алгоритму оптимізації (модифікованого градієнтного методу, який не потребує обчислення похідних) [12]:

Алгоритм 2.

1. Вибрати початковий вектор $g^0 = (0; 0; 0)^T$; вибрати константи $\varepsilon_0 > 0, \lambda' > 0, \beta > 0, \lambda \in (0; 0.5)$ (доцільно вибирати: $\varepsilon_0 \in [10^{-3}; 10^{-2}]$, $\lambda = 0.4$, $\lambda' \in [10^{-3}; 10^{-2}]$, $\beta \in [5; 10]$).

2. Покласти $r = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$.

3. Обчислити вектор h^r , j -та компонента якого дорівнює:

$$h_j^r = \frac{J(g^r + \varepsilon e^j) - J(g^r)}{\varepsilon}, j \in \overline{1,3},$$

де e^j – j -й орт.

4. Обчислити величину $\Delta_r = J(g^r + \varepsilon \beta h^r) - J(g^r)$.

5. Якщо виконується нерівність $\Delta_r < 0$, то використовуючи допоміжний алгоритм 3, обчислити таке значення $\bar{\rho}$, для якого виконується двостороння нерівність

$$\frac{\bar{\rho}(1-\lambda)\Delta_r}{\varepsilon\beta} \leq J(g^r + \bar{\rho}h^r) - J(g^r) \leq \frac{\bar{\rho}\lambda\Delta_r}{\varepsilon\beta}$$

і перейти на крок 6; інакше покласти $\varepsilon = \varepsilon / 2$ та перейти на крок 3.

6. Якщо виконується нерівність $J(g^r + \bar{\rho}h^r) - J(g^r) \leq -\lambda'\varepsilon$, то перейти на крок 7; інакше покласти $\varepsilon = \varepsilon / 2$ і перейти на крок 3.

7. Обчислити наступне наближення шуканого вектора $g^{r+1} = g^r + \bar{\rho}h^r$.

8. Покласти $r = r + 1$ і перейти на крок 3.

Алгоритм 3.

1. Вибрати константу $\rho > 0$. (доцільно вибрати $\rho = 1$).

2. Визначити функції $\psi_r(\alpha)$, $\varphi_r(\alpha)$, $\alpha \in R^1$:

$$\psi_r(\alpha) \triangleq J(g^r + \alpha h^r) - J(g^r) - \frac{\alpha(1-\lambda)\Delta_r}{\varepsilon\beta};$$

$$\varphi_r(\alpha) \triangleq J(g^r + \alpha h^r) - J(g^r) - \frac{\alpha\lambda\Delta_r}{\varepsilon\beta}.$$

3. Покласти $\mu = \rho$.

4. Обчислити значення $\psi_r(\mu)$.

5. Якщо $\psi_r(\mu) = 0$, то покласти $\bar{\rho} = \mu$ і завершити обчислення; якщо $\psi_r(\mu) < 0$, то покласти $\mu = \rho + 1$ і перейти на крок 4; якщо $\psi_r(\mu) > 0$, то перейти на крок 6.

6. Обчислити значення $\varphi_r(\mu)$.

7. Якщо $\varphi_r(\mu) \leq 0$, то покласти $\bar{\rho} = \mu$ і завершити обчислення; інакше покласти $a_0 = \mu - \rho$, $b_0 = \mu$ і перейти на крок 8.

8. Покласти $i = 0$.

9. Обчислити $v_i = (a_i + b_i) / 2$.

10. Обчислити значення функцій $\psi_r(v_i), \varphi_r(v_i)$.

11. Якщо $\psi_r(v_i) \geq 0$ та $\varphi_r(v_i) \leq 0$, то покласти $\bar{\rho} = v_i$ і завершити обчислення; інакше перейти на крок 12.

12. Якщо $\psi_r(v_i) > 0$, то покласти $a_{i+1} = a_i, b_{i+1} = v_i, i = i + 1$ та перейти на крок 9; інакше покласти $a_{i+1} = v_i, b_{i+1} = b_i, i = i + 1$ та перейти на крок 9.

Варіанти індивідуальних завдань до лабораторної роботи 2.

$n = 3, m = 1, l = 1,$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1, 0, 0),$$

$a_1 \in [1; 10], a_2 \in [1; 10], T_0 \in [0.000001; 0.9999999],$

$q \in [2; 10], K \in \{100; 200; 300; 400; 500; 600; 700; 800; 900; 1000\}.$

Параметри a_1, a_2, T_0 – дійсні числа; параметри q, K – натуральні числа. Вибираючи значення параметрів T_0 та K , потрібно забезпечувати тривалість вихідного процесу приблизно $10 \div 20$ секунд.

На друк виводити: значення цільової функції $J(g^r), r = 0, 1, 2, \dots$ – площі заштрихованої фігури на рис.2.3; графіки вихідного процесу $y(t)$ при значенні вектора $g^0 = (0; 0; 0)^T$ та $g = g^*$, де g^* – вектор, який отримується при розв'язуванні оптимізаційної задачі мінімізації площі заштрихованої фігури на рис.2.3 за допомогою алгоритму 1 або алгоритму 2. Також потрібно виводити значення усіх вибраних параметрів: a_1, a_2, T_0, q, K та значення вектора g^* (при цьому вказувати кількість ітерацій виконаних для знаходження вектора g^*).

Зробити порівняльний аналіз:

- 1) значень цільової функції J при різних значеннях вектора $g^r, r = 0, 1, 2, \dots$;
 - 2) використання двох алгоритмів оптимізації для мінімізації площі заштрихованої фігури на рис.2.3: модифікованого градієнтного методу, який не потребує обчислення похідних та алгоритму локальних варіацій.
- У таблиці наводяться варіанти задання параметрів: a_1, a_2, K .

№	a_1	a_2	K
1	2	3	100
2	2	4	150
3	2	5	200
4	2	6	250
5	2	7	300
6	2	8	350

7	2	9	400
8	2	10	450
9	3	4	500
10	3	5	550
11	3	6	600
12	3	7	650
13	3	8	700
14	3	9	750
15	3	10	800
16	4	5	850
17	4	6	900
18	4	7	950
19	4	8	1000
20	4	9	100
21	4	10	150
22	5	6	200
23	5	7	250
24	5	8	300
25	5	9	350
26	5	10	400
27	6	7	500
28	6	8	600
29	6	9	650
30	6	10	700
31	7	8	750
32	7	9	800
33	7	10	850
34	8	9	900
35	8	10	1000

ТЕМА №3

ПРОГРАМНЕ КЕРУВАННЯ І ПЕРЕХІДНИЙ ПРОЦЕС ПЕРЕВОДУ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ПОЧАТКОВОГО СТАНУ В ДОВІЛЬНО ЗАДАНИЙ КІНЦЕВИЙ СТАН

Нехай задано модель неперервної лінійної стаціонарної системи [10]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \in [0, \infty), \quad (3.1)$$

$$y(t) = Cx(t), x(t)|_{t=t_0} = 0, \quad (3.2)$$

де, як звичайно, $x(t) \in R^n$ – вектор стану системи в момент часу t , $u(t) \in R^m$ – вхідна змінна (керування), а $y(t) \in R^l$ – вихідна змінна, A, B, C – матриці параметрів відповідних розмірів.

Нехай у системі використовується кусково-постійний вхідний процес

$$\forall t \in [kT_0, (k+1)T_0), u(t) = u(t_k) = u(kT_0) = u^k, \quad (3.3)$$

де $k = 0, 1, \dots$ – так званий дискретний час (йому відповідають точки $t = kT_0$ на осі неперервного часу), T_0 – період квантування. За умови (3.3) неперервній системі (3.1), (3.2) буде відповідати точна дискретна модель (див. Тему №1):

$$x^{k+1} = \Phi x^k + \Gamma u^k, x^k|_{k=0} = 0, \quad (3.4)$$

$$y^k = Cx^k, k = 0, 1, \dots, \quad (3.5)$$

де, як і раніше,

$$\Phi = e^{AT_0}, \Gamma = (\Phi - I)A^{-1}B. \quad (3.6)$$

(Як і в попередніх лабораторних, студенти самостійно змінюють формулу для обчислення матриці Γ , тобто потрібно позбутися операції обертання матриці A).

Теорема 3.1. Нехай для вхідного процесу (3.3) значення вхідних змінних (керування) обчислюються за формулами:

$$u^k = G^T(k)l^0, G(k) = (\Phi^{-1})^k \Gamma, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

де вектор l^0 знаходиться за правилом

$$l^0 = \left[\Phi^{k_0-1} \sum_{p=0}^{k_0-1} G(p)G^T(p) \right]^{-1} x^*. \quad (3.8)$$

Тоді дискретна система (3.4) – (3.6) з початкового стану $x(t)|_{t=0} = 0$ переходить у довільно заданий стан $x^* \in R^n$ за скінченне число $k_0 \geq n$ тактів керування (ітерацій).

Керування, побудоване за алгоритмом (3.7), (3.8), не використовує інформацію про поточний стан $x(t)$ (або $x^k, k = 0, 1, 2, \dots$) системи. Тому воно називається ще *програмним керуванням, або програмою*. Система, в якій використовується програмне керування, називається *розімкнутою або системою з програмним керуванням*.

Питання для підготовки до виконання лабораторної роботи 3.

1. Запишіть формулу для обчислення матриці $\Gamma(T_0)$, яка не містить операції обернення матриці A ;
2. Запишіть формулу наближеного обчислення матричного експоненціалу $\Phi(T_0)$, яка містить $q + 1$ доданок.
3. За якою формулою обчислюють вхідний процес $u^k, k = 0, 1, \dots$, який переводить дискретну систему (3.4) – (3.6) із точки $x^0 = 0$ у довільну точку $x^* \in R^n$?
4. Яку роль відіграє параметр k_0 в алгоритмі, та які значення він може приймати?
5. Вектор l^0 є вектор-стовпець чи вектор-рядок?
6. При якому значенні параметра k виконується наближена рівність $x^* \approx x^k$?
7. Яке керування називається програмним?
8. Запишіть формулу обчислення матриці, яка є оберненою до матричного експоненціалу $\Phi(T_0)$.
9. Чому в наведеному алгоритмі пропонується використовувати тільки непарні значення параметра q ?
10. Чи буде алгоритм працездатним, якщо, наприклад, вибрати значення параметра $q = 4$ або $q = 6$?
11. Які значення приймають параметри n, m, l у пропозованих варіантах індивідуальних завдань?

Лабораторна робота 3

Метою роботи є перевірка вищенаведеного твердження за допомогою комп'ютерного моделювання. Для цього будемо користуватися моделлю (3.4), (3.5), оскільки для кусково-постійного керування (а саме воно тут розглядається) дана дискретна модель є аналогом неперервної моделі (3.1), (3.2).

Обчислюючи траєкторію x^0, x^1, x^2, \dots руху або реакцію системи на керування (3.7), (3.8), скористаємось таким алгоритмом:

Алгоритм.

1. За заданими матрицями A , B і періодом квантування T_0 обчислити

$$\Phi_3 = I + AT_0 + \frac{(AT_0)^2}{2!} + \frac{(AT_0)^3}{3!} \approx e^{AT_0},$$

$$\Phi_3^{-1} = I - AT_0 + \frac{(AT_0)^2}{2!} - \frac{(AT_0)^3}{3!} \approx e^{-AT_0},$$

$$\Gamma_3 = (\Phi_3 - I)A^{-1}B.$$

В останньому виразі матрицю A^{-1} треба ввести в круглі дужки, підставивши замість матриці Φ_3 чотири доданки матричного експоненціалу та виконати необхідні перетворення.

2. Обчислити степінь $\Phi_3^{k_0-1}$ за схемою:

$$\Pi_j = \Phi_3 \Pi_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, (k_0 - 1), \quad \text{де } \Pi_0 = I,$$

$$\Phi_3^{k_0-1} = \Pi_{k_0-1}.$$

Тут I – одинична матриця розміру $n \times n$.

3. Обчислити суму $\sum_{p=0}^{k_0-1} G(p)G^T(p)$ у циклі:

for $j = 0, 1, \dots, k_0 - 1$ *do*

begin

$$P_j = \Phi_3^{-1} P_{j-1}, \quad P_{-1} = \Phi_3,$$

$$G(j) = P_j \Gamma_3.$$

Значення $G(j)$ для $j = 0, \dots, k_0 - 1$ запам'ятовуємо

$$\sum_j = \sum_{j-1} + G(j)G^T(j), \quad \sum_{-1} = 0$$

end.

4. Обчислити матрицю L

$$L = \Pi_{k_0-1} \sum_{k_0-1}.$$

5. Для знайденої матриці L обчислити обернену (результатом буде L^{-1}).
6. Обчислити вектор

$$l^0 = L^{-1} x^*.$$

7. У циклі по $k = 0, 1, \dots, k_0 - 1$ обчислити входи:

$$u^k = G^T(k)l^0$$

(використовуючи $G(k)$ із пункту 3) та стани і виходи:

$$x^{k+1} = \Phi_3 x^k + \Gamma_3 u^k,$$

$$y^k = Cx^k.$$

8. Вивести таблицю

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	u^k
0				
1				
...				
k_0				

Також необхідно надрукувати знайдені значення матриць $\Pi_{k_0-1}, \sum_{k_0-1}, L, L^{-1}$ та вектор l^0 .

9. Побудувати графіки вихідного процесу y^k і вхідного процесу u^k при $k \in [0, k_0]$.

Варіанти індивідуальних завдань до лабораторної роботи 3.

$$n = 3, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, C = (1 \ 0 \ 0),$$

$$a_1 \in [1; 10], a_2 \in [1; 10], b \in R, k_0 \in [1; 1000],$$

$$(x^*) - \text{будь-який вектор}, T_0 \in [0.000001; 1).$$

За аналогічною схемою будуються алгоритми, в яких замість матриць Φ_3, Γ_3 використовуються матриці Φ_5, Γ_5 ; Φ_7, Γ_7 , тощо.

Необхідно виконати комп'ютерний аналіз:

- 1) змінюється значення параметра k_0 ;
- 2) змінюється кінцева точка x^* (близько до початку координат, далеко від початку координат);
- 3) змінюється параметр q ;
- 4) змінюється період квантування T_0 .

ТЕМА №4

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНОЇ НЕПЕРЕРВНОЇ СТАЦІОНАРНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ. КРИТЕРІЙ РАУСА.

Розглянемо неперервну лінійну стаціонарну систему з одним входом $u(t) \in R^1$ і одним виходом $y(t) \in R^1$ [10]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(t)|_{t=0} = x^0, \quad (4.1)$$

$$y(t) = Cx(t), t \in [0, \infty). \quad (4.2)$$

Тут $x(t) \in R^n$ – вектор стану системи, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^n$, $C \in R^n$ – параметри системи. Загальний розв’язок рівняння (4.1) (воно називається рівнянням еволюції вектора стану системи) має вигляд (див. дод. 1)

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (4.3)$$

При цьому вихідна змінна $y(t)$ відповідно до (4.2) знаходиться звичайним множенням векторів

$$y(t) = C \left(e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right).$$

Нехай $0 \leq \|x^0\| \leq d_1$, d_1 – деяка константа, $d_1 > 0$. Нехай також вхідний процес обмежений

$$\forall t > 0 \quad |u(t)| \leq d_2,$$

де d_2 – константа ($d_2 > 0$). Спробуємо відповісти на питання, чи буде за цих умов обмеженим процес $x(t), t \in [0, \infty)$?

Відповідь на це запитання суттєво залежить від того, як поводить себе складова $e^{At}x^0$ в (4.3). При цьому можливі такі варіанти:

- 1) норма $\|e^{At}x^0\|$ зі зростанням t необмежено зростає;
- 2) норма $\|e^{At}x^0\|$ зі зростанням t є обмеженою;
- 3) границя норми $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}x^0\| = 0$.

Випадок 1) відповідає *нестійкій системі*, випадок 2) – *стійкій системі* і випадок 3) – *асимптотично стійкій системі*.

Виявляється (і це буде продемонстровано на лекціях), реакція лінійної системи на обмежену вхідну дію буде обмеженою, якщо система стійка. Таким

чином, для дослідження стійкості системи достатньо дослідити однорідну частину, тобто цілком достатньо розглянути рівняння (тобто в (4.1) покласти $B = 0$):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t), \quad t \in [0, \infty), \\ x(t)|_{t=0} &= x^0, \quad \|x^0\| > 0.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Властивість системи бути стійкою суттєво залежить від коренів характеристичного рівняння для матриці A . Характеристичне рівняння має вигляд

$$\delta(\lambda) = |\lambda I - A| = |A - \lambda I| = 0,\tag{4.5}$$

де $I - (n \times n)$ одинична матриця, λ – параметр, $|\cdot|$ – визначник матриці.

Розкриваючи визначник у (4.5), одержимо

$$\delta(\lambda) = \lambda^n + \dots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0,\tag{4.6}$$

де

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = -tr A, \alpha_2 = \sum_{1 \leq i < k \leq n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ki} \\ a_{ik} & a_{kk} \end{vmatrix}, \dots, \alpha_n = (-1)^n |A|,$$

$tr A$ – слід матриці A .

Рівняння n -го ступеню (4.6) має n коренів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ у комплексній області (не обов'язково різних). Для простоти далі розглянемо випадок, коли всі корені попарно різні. У цьому випадку за допомогою перетворення подібності з невивродженою матрицею

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix}\tag{4.7}$$

матрицю A можна привести до діагональної форми

$$QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).\tag{4.8}$$

Повертаючись до рівняння (4.4), зробимо заміну змінних

$$z(t) = Qx(t). \quad (4.9)$$

Це перетворення взаємно однозначне внаслідок невинродженності матриці Q . Із (4.9) знаходимо

$$x(t) = Q^{-1}z(t). \quad (4.10)$$

Тоді рівняння (4.4) набуває вигляду (у нових змінних $z(t)$)

$$\dot{z}(t) = QAQ^{-1}z(t) \quad (4.11)$$

при початковому векторі

$$z(t)|_{t=0} = Qx^0 = z^0. \quad (4.12)$$

З урахуванням (4.8) рівняння (4.11) можна переписати так:

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} z(t). \quad (4.13)$$

Система розпадається на n незалежних одне від одного рівнянь

$$\dot{z}_i(t) = \lambda_i z_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.14)$$

де $z_i(t)$ – i -та координата вектора $z(t)$.

Розв'язок диференціального рівняння (4.14) має вигляд

$$z_i(t) = e^{\lambda_i t} \cdot z_i(0), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.15)$$

де значення $z_i(0)$ може бути знайдено згідно з (4.12) за заданим початковим станом x^0 . Розв'язок (4.15) у векторному вигляді можна записати так:

$$z(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} z^0. \quad (4.16)$$

Або, здійснюючи зворотний перехід до змінної $x(t)$, одержимо

$$x(t) = Q^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} Qx^0. \quad (4.17)$$

З рівності (4.14) робимо висновок, що розв'язок $x(t)$ рівняння (4.4) є не що інше, як лінійна комбінація експонент $e^{\lambda_i t}$.

У загальному випадку $\lambda_i, i \in \overline{1, n}$ – комплексні числа. Нехай

$$\operatorname{Re} \lambda_i = \mu_i, \operatorname{Im} \lambda_i = \omega_i,$$

тоді

$$\lambda_i = \mu_i + j\omega_i,$$

де j – комплексна одиниця. Отже,

$$e^{\lambda_i t} = e^{\mu_i t} \cdot e^{j\omega_i t} = e^{\mu_i t} (\cos(\omega_i t) + j \sin(\omega_i t)).$$

Звідси знаходимо модуль

$$\operatorname{mod}(e^{\lambda_i t}) = e^{\mu_i t}, i \in \overline{1, n}.$$

Висновок. 1) Система стійка, якщо при попарно різних власних числах матриці A для $\forall i \in \overline{1, n}$ $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$; 2) система асимптотично стійка, якщо за тих же умов $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ для довільного $i \in \overline{1, n}$; 3) система нестійка, якщо за тих же умов $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ хоча б для одного значення $i \in \overline{1, n}$.

Таким чином, для асимптотично стійкої лінійної системи достатньо вивести, що всі корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристичного рівняння (4.5) матриці A мають строго від'ємні дійсні частини. Існує ряд критеріїв від'ємності $\operatorname{Re} \lambda_i, i \in \overline{1, n}$. Найбільш зручний в обчислювальному аспекті – це критерій Рауса.

Критерій Рауса.

Нехай характеристичне рівняння (4.6) одержано, тобто відомі його коефіцієнти $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Складемо з коефіцієнтів цього рівняння так звану матрицю Рауса $R = (r_{ij})$, де

$$\begin{aligned} r_{11} &= 1, r_{12} = \alpha_2, r_{13} = \alpha_4, \dots, \\ r_{21} &= \alpha_1, r_{22} = \alpha_3, r_{23} = \alpha_5, \dots \end{aligned} \quad (4.18)$$

Іншими словами, перший рядок матриці R – це коефіцієнти характеристичного рівняння з парними індексами, другий рядок – з непарними. Інші елементи знаходяться за формулою

$$r_{ij} = r_{i-2, j+1} - \frac{r_{i-2, 1}}{r_{i-1, 1}} r_{i-1, j+1}, \quad \begin{aligned} i &= 3, 4, \dots, \\ j &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.19)$$

Невизначені елементи прирівнюються до нуля.

Матриця Рауса має $n+1$ рядок і $\frac{n+1}{2}$ стовпчик при n – непарному та n рядків і $\frac{n+2}{2}$ стовпчиків – при n парному.

Теорема. Для асимптотичної стійкості лінійної стаціонарної системи необхідно і достатньо, щоб усі елементи першого стовпчика матриці Рауса були додатними.

Допоміжна задача. Як розкрити визначник у формулі (4.5), щоб при відомій матриці A , знайти коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ характеристичного рівняння (4.6). Для цього існує метод Левер'є. Метод полягає в обчисленні послідовностей матриць $A_1, A_2, \dots, A_n; B_1, B_2, \dots, B_n$:

$$A_1 = A, \operatorname{tr} A_1 = -\alpha_1, B_1 = A_1 + \alpha_1 I,$$

$$A_2 = AB_1, \frac{\operatorname{tr} A_2}{2} = -\alpha_2, B_2 = A_2 + \alpha_2 I,$$

.....

$$A_{n-1} = AB_{n-2}, \frac{\operatorname{tr} A_{n-1}}{n-1} = -\alpha_{n-1}, B_{n-1} = A_{n-1} + \alpha_{n-1} I,$$

$$A_n = AB_{n-1}, \frac{\operatorname{tr} A_n}{n} = -\alpha_n, B_n = A_n + \alpha_n I.$$

Таким чином, коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ характеристичного рівняння (4.5) обчислені.

Для контролю правильності обчислень можна використати той факт, що

$$\frac{(-B_{n-1})}{\alpha_n} = A^{-1},$$

і, отже, добуток $A \times ((-B_{n-1}) / \alpha_n) = I$, де I – $n \times n$ одинична матриця.

Іншими словами, наведений алгоритм можна також використати для обернення квадратної матриці A .

Питання для підготовки до виконання лабораторної роботи 4.

1. Яких значень можуть набувати параметри n, m, l у моделі (1.1), (1.2)?
2. Який вигляд має формула обчислення вихідного процесу $y(t)$ при умові, що виконується рівність $x^0 = 0$?
3. Чому дорівнює $e^{At} x^0$ при умові, що виконується рівність $B = 0$?

4. Якщо динамічна система нестійка, то що можна стверджувати про вектор-функцію $e^{At}x^0$?
5. Запишіть загальний вигляд характеристичного рівняння для динамічної системи (4.4).
6. Скільки коренів має характеристичного рівняння для динамічної системи (4.4)?
7. Чи можуть усі корені характеристичного рівняння для динамічної системи (4.4) бути дійсними?
8. Якщо параметр n є непарне число, то що можна стверджувати про корені характеристичного рівняння для динамічної системи (4.4)?
9. Сформулюйте твердження про стійкість, асимптотичну стійкість та нестійкість динамічної системи (4.4) в залежності від коренів характеристичного рівняння.
10. Запишіть формули для знаходження елементів першого та другого рядків матриці Рауса.
11. Яку структуру має матриця Рауса в залежності від параметра n ?
12. Що можна стверджувати про динамічну систему, для якої усі елементи першого стовпчика матриці Рауса є невід'ємними?
13. Які способи обчислення коефіцієнтів характеристичного рівняння Вам відомі?
14. Які додаткові послідовності матриць обчислюють у методі Лєвер'є?
15. Запишіть формулу обчислення матриці оберненої до A у методі Лєвер'є.

Лабораторна робота 4

1. Задана матриця A .
2. Обчислюються коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ характеристичного рівняння за наведеним методом Лєвер'є (вивід на друк).
3. Обчислюються елементи матриці Рауса за формулами (4.18), (4.19) (вивід на друк).
4. Аналізуються знаки першого стовпчика матриці і робиться висновок про стійкість, асимптотичну стійкість або нестійкість системи.

Варіанти індивідуальних завдань до лабораторної роботи 4.

$$1. \begin{bmatrix} -3 & 2.2 & 0.8 & 0 \\ 0.4 & -4.7 & 6.8 & 0.1 \\ 0.3 & -3.1 & -4.4 & 0.6 \\ -0.5 & 0.8 & 1.9 & -1.3 \end{bmatrix}, \quad 2. \begin{bmatrix} 7 & 2.19 & 0.8 & 0 \\ 0.4 & 5.29 & 6.79 & 0.1 \\ 0.29 & -3.1 & 5.59 & 5.9 \\ -0.49 & 0.8 & 1.89 & 8.69 \end{bmatrix},$$

$$3. \begin{bmatrix} 5.012 & 2.457 & 2.507 & 0.069 \\ 0.691 & 0.797 & 7.463 & 0.548 \\ 0.223 & -3.264 & 1.166 & 0.827 \\ -0.696 & 0.421 & 3.221 & 7.691 \end{bmatrix}, 4. \begin{bmatrix} 0.7446 & 0.1372 & 0.0981 & 0.0035 \\ 0.0319 & 0.5701 & 0.4213 & 0.0274 \\ 0.0153 & -0.1879 & 0.5901 & 0.0413 \\ -0.0376 & 0.0348 & 0.1533 & 0.8846 \end{bmatrix},$$

$$5. \begin{bmatrix} -4 & 0.5 & 0.7 & -1.2 \\ 1 & -6 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1 & -3.8 & 3 \\ 1.5 & 0 & 1.5 & -4.5 \end{bmatrix}, 6. \begin{bmatrix} -5.5 & -2.0 & 0.2 & -31 \\ 0.3 & -3.1 & 2.1 & -0.1 \\ 0.5 & 3.4 & -4.0 & 0 \\ 0.1 & -0.3 & 1.4 & -2.1 \end{bmatrix},$$

$$7. \begin{bmatrix} -0.9 & 3.1 & -0.2 \\ -0.4 & -2.5 & 3.2 \\ 1.1 & -1.5 & -3.1 \end{bmatrix}, 8. \begin{bmatrix} -2 & 0.1 & 0.3 & -0.4 & 0 \\ 0.3 & -2.9 & -0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & -0.5 & -1.8 & 1.5 & 0.2 \\ 0 & 1.0 & 0 & -2.0 & 0.6 \\ -1 & 0 & 0.1 & 0 & -1.3 \end{bmatrix},$$

$$9. \begin{bmatrix} -3 & 0.1 & 0.3 & -0.4 & 0 \\ 0.3 & -3.7 & -0.5 & 0.7 & 0.4 \\ 0.1 & -0.5 & -1.9 & 1.5 & 0.3 \\ 0 & 1.2 & 0 & -2.3 & 0.7 \\ -1 & 0 & 0.2 & 0 & -1.5 \end{bmatrix}, 10. \begin{bmatrix} -1 & 0.1 & 0.3 & -0.4 & 0.1 \\ 0.3 & -5.9 & -0.5 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & -0.5 & 1.9 & 1.5 & 0.6 \\ 0 & 1.0 & 0 & -2.9 & 0.7 \\ -1 & 0.2 & 0.1 & 0.5 & -1.8 \end{bmatrix},$$

$$11. \begin{bmatrix} -3 & 0.6 & 0.8 & -0.4 & 0.7 \\ 0.3 & -2.9 & -0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 2.2 & -0.5 & -1.8 & 1.5 & 0.2 \\ 0 & 1.0 & 0.9 & -2.0 & 0.7 \\ -2 & 0.3 & 0.1 & 0.4 & 1.3 \end{bmatrix}, 12. \begin{bmatrix} -6 & 0.1 & 0.3 & -0.4 & 0.8 \\ 0.3 & -6.9 & -0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & -0.5 & -1.8 & 1.5 & 0.2 \\ 0.7 & 2.0 & 0 & 2.0 & 0.9 \\ -1 & 0.5 & 0.1 & 0.6 & -1.9 \end{bmatrix},$$

$$13. \begin{bmatrix} -1 & 0.1 & 0.3 & -0.4 & 7.0 \\ 0.3 & -2.9 & -0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & -0.5 & -1.8 & 1.4 & 0.2 \\ 0.8 & 3.0 & 0 & -7.0 & 8.6 \\ -4 & 0 & 0.1 & 0.9 & -1.3 \end{bmatrix}, 14. \begin{bmatrix} -2 & 0.7 & 2.3 & -0.4 & 0.9 \\ 0.3 & -4.9 & -0.5 & 0.8 & 0.1 \\ 0.3 & -0.5 & 1.8 & 1.5 & 2.2 \\ 0 & 1.8 & 0 & -2.5 & 1.6 \\ -6 & 0.4 & 0.1 & 0 & -1.7 \end{bmatrix}.$$

$$15. \begin{bmatrix} -1.6 & 0.5 & 0.7 & -0.4 & 4.0 \\ 0.4 & -3.9 & -0.5 & 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & -0.5 & -1.8 & 1.4 & 0.9 \\ 0.9 & 3.3 & 0 & -5.0 & 4.6 \\ -3 & 0 & 0.4 & 0.8 & -4.3 \end{bmatrix}, \quad 16. \begin{bmatrix} -6 & 0.9 & 8.3 & -0.4 & 1.9 \\ 0.9 & -4.9 & -0.5 & 0.8 & 1.1 \\ 0.3 & -0.7 & 1.8 & 1.5 & 3.2 \\ 0.3 & 2.8 & 0 & -2.5 & 2.6 \\ -4 & 0.8 & 0.8 & 0 & -1.1 \end{bmatrix}.$$

На друк виводяться матриця Рауса і коефіцієнти характеристичного рівняння і робиться висновок про стійкість системи.

*Також студентам необхідно самостійно придумати **три** матриці розміру 5×5 . Перша із них повинна бути нестійкою, друга – стійкою, а третя – асимптотично стійкою.*

Додатково обчислити A^{-1} .

ТЕМА №5

СИНТЕЗ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ СУМІСНОГО ОЦІНЮВАННЯ ТА КЕРУВАННЯ

5.1. Постановка задачі

Нехай модель об'єкта керування описується рівнянням [10, 11, 24]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad (5.1)$$

а виміри (виходи, спостереження) – співвідношенням

$$y(t) = C(t)x(t), \quad (5.2)$$

де $x \in R^n$ – вектор стану системи; $y \in R^k$ – вектор вимірів ($k \leq n$); $t \in [t_0, t_1]$ – час (t_0 і t_1 – задані дійсні числа); на керування (входи) обмежень не накладається, тобто $u \in R^m$; $m \leq n$; $A(t), B(t), C(t)$ – матриці розміру $(n \times n), (n \times m), (k \times n)$, відповідно, (елементи цих матриць неперервно диференційовані по t).

Початковий стан $x^0 \in R^n$ – довільний. Припускається, що існує деяка точка x_*^0 , яка характеризує апіорну інформацію про початкові стани системи.

Функціонал якості керування квадратичний

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [x^T(t)S(t)x(t) + u^T(t)Q(t)u(t)] dt + \frac{1}{2} x^T(t_1)\pi x(t_1), \quad (5.3)$$

де $S(t), \pi$ – невід'ємно визначені симетричні матриці розміру $(n \times n)$, $Q(t)$ – додатно визначена симетрична матриця розміру $(m \times m)$, T – знак транспонування. Задача полягає в знаходженні функції керування (входу) $u(t), t \in [t_0, t_1]$, яка мінімізує функціонал (5.3).

Відомо, що *оптимальна синтезуюча функція* $u^*(t, x(t))$ з повним оберненим зв'язком має вигляд

$$u^*(t, x) = Q^{-1}(t)B^T(t)K_2(t)x(t), \quad (5.4)$$

де симетрична матриця $K_2(t)$ є розв'язок матричного диференціального рівняння Ріккати з фіксованою умовою на правому кінці:

$$\frac{dK_2(t)}{dt} = -A^T(t)K_2(t) - K_2(t)A(t) - K_2(t)B(t)Q^{-1}(t) \times \\ \times B^T(t)K_2(t) + S(t), K_2(t_1) = -\pi \quad (5.5)$$

(тут припускається, що в кожний момент часу t відома інформація про всі координати вектора стану $x(t)$).

У нашій постановці вектор $x(t)$ не доступний для використання при знаходженні керування, а вимірюється (спостерігається) тільки вектор $y(t)$ (та інформація про вихід $y(t)$ накопичується).

Потрібно знайти керування $u(t, Y_{t_0}^t)$, яке залежить від усіх доступних до моменту часу t вимірів $Y_{t_0}^t = \{y(\tau), t_0 \leq \tau \leq t\}$, так, щоб властивості синтезованої системи були близькі до випадку повної інформації про стан $x(t)$.

Ідея полягає в одержанні оцінки $\hat{x}(t)$ вектора стану $x(t)$ у кожний момент часу t за результатами вимірів $Y_{t_0}^t$ і використанні цієї оцінки у керуванні (5.4) замість $x(t)$. Чим точніше оцінка $\hat{x}(t)$, тим ближче синтезована система за своїми властивостями до оптимальної при повній інформації про стан. На рис.5.1 зображено структуру такої субоптимальної системи. Оцінка $\hat{x}(t)$ залежить від усіх вимірів до моменту t , тобто являється функціоналом $Y_{t_0}^t$. Отже, керування (5.4), яке використовує замість $x(t)$ його оцінку $\hat{x}(t)$, також залежить від $Y_{t_0}^t$.

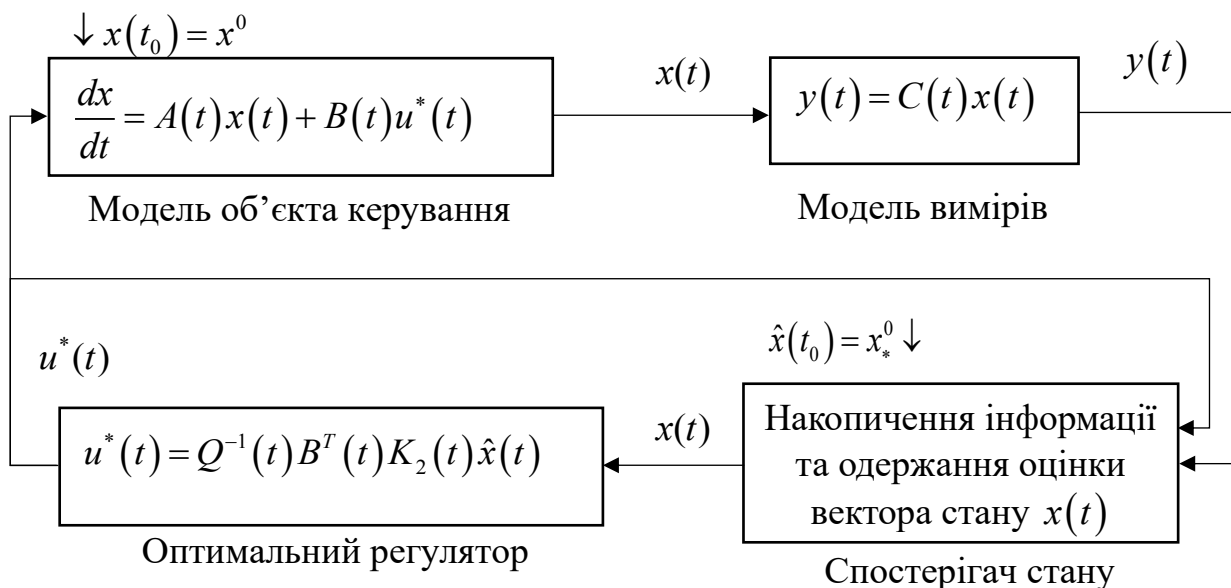


Рис.5.1. Схема лінійної системи сумісного оцінювання та керування

5.2. Синтез спостерігачів стану

5.2.1. Синтез спостерігача стану повного порядку

Припускаємо, що для системи (5.1), (5.2) існує деяка точка x_*^0 , в околі якої знаходиться початковий стан $x(t_0)$. Потрібно на спостережуваному на інтервалі $[t_0, t]$ виході $y(t)$ визначити оцінку $\hat{x}(t)$ вектора стану $x(t)$.

У випадку, коли $k = n$ і матриця $C(t)$ не вироджена для довільних t , вектор стану $x(t)$ може бути знайдений із співвідношення (5.2) за формулою

$$x(t) = C^{-1}(t)y(t).$$

У цьому випадку похибка оцінки вектора $x(t)$ дорівнює нулю.

У загальному випадку (коли $k < n$) припустимо, що вектор $y(t)$ поступає на вхід пристрою (який оцінює вектор стану $x(t)$), диференціальне рівняння якого має вигляд

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = D(t)\hat{x}(t) + H(t)u(t) + K(t)y(t), \quad \hat{x}(t_0) = x_*^0, \quad (5.6)$$

де $D(t), H(t), K(t)$ – невідомі матриці розміру $(n \times n), (n \times m), (n \times k)$, відповідно.

Позначимо через $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ похибку оцінювання. Віднімемо від рівняння (5.1) рівняння (5.6) і врахувавши рівність (5.2), отримаємо

$$\frac{d(x(t) - \hat{x}(t))}{dt} = A(t)x(t) - D(t)\hat{x}(t) + [B(t) - H(t)]u(t) - K(t)C(t)x(t).$$

Якщо тепер покласти $H(t) = B(t)$, то диференціальне рівняння похибки матиме вигляд

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = [A(t) - K(t)C(t)]\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t_0) = x(t_0) - x_*^0. \quad (5.7)$$

Звідси випливає, що похибка оцінювання $\varepsilon(t)$ повністю визначається матрицею $A(t) - K(t)C(t)$ і початковою похибкою $\varepsilon(t_0)$. Отже, невідома матриця $K(t)$ повинна вибиратись так, щоб похибка $\varepsilon(t)$ достатньо швидко зменшувалась (прямувала до нуля при $t \rightarrow \infty$).

Якщо всі матриці не залежать від часу, то для цього потрібно, щоб усі власні числа матриці $A - KC$ мали від'ємні дійсні частини.

У результаті рівняння оцінюючого пристрою (5.6) набуде вигляду

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \hat{x}(t_0) = x_*^0. \quad (5.8)$$

Оцінюючий пристрій (спостерігач стану (5.8)) має порядок n за числом координат вектора оцінок $\hat{x}(t)$, що задовольняє рівняння (5.8).

Для отримання оцінки $\hat{x}(t)$ вектора стану $x(t)$ потрібно задати матрицю $K(t)$ і проінтегрувати систему (5.8), (5.1), (5.2).

Якщо початкова умова $x(t)$ збігається з x_*^0 , то з (5.7) випливає

$$\varepsilon(t) \equiv 0, \hat{x}(t) = x(t), t > t_0.$$

Якщо ж $x(t_0) \neq x_*^0$, то тільки при правильному виборі матриці $K(t)$ будемо мати:

$$\hat{x}(t) \rightarrow x(t) \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

5.2.2. Синтез спостерігача стану низького порядку

Для стаціонарних систем, рівняння стану (5.1) і вимірів (5.2) яких мають вигляд

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t) \quad (5.9)$$

і матриця C має ранг k , $k < n$ можна побудувати спостерігач стану порядку $n - k$. При цьому припускається, що система (5.9) є повністю спостережною.

Для побудови спостерігача стану потрібно розширити вектор вимірів $y(t)$ за допомогою додаткового вектора $z(t)$ розміру $(n - k) \times 1$ і за допомогою невідомої матриці G розміру $(n - k) \times n$ так, щоб виконувалась рівність

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ G \end{pmatrix} x(t).$$

Тоді, якщо $(n \times n)$ матриця $\begin{pmatrix} C \\ G \end{pmatrix}$ є невинродженою, можна знайти стан системи (5.9) за формулою

$$x(t) = \begin{pmatrix} C \\ G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Оскільки виміри $z(t)$ у моделі відсутні, то їх пропонується замінити оцінкою $\hat{z}(t)$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{d\hat{z}(t)}{dt} = D\hat{z}(t) + Hu(t) + Ky(t), \quad \hat{z}(t_0) = Gx_*^0, \quad (5.10)$$

де невідомі матриці D, H, K повинні вибиратися із умови прямування похибки до нуля, тобто:

$$\varepsilon(t) = z(t) - \hat{z}(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Враховуючи, що справедливе співвідношення $z(t) = Gx(t)$, записуємо диференціальне рівняння для похибки

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= \frac{dz(t)}{dt} - \frac{d\hat{z}(t)}{dt} = G \frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\hat{z}(t)}{dt} = \\ &= G[Ax(t) + Bu(t)] - D\hat{z}(t) - Hu(t) - Ky(t) = \\ &= GAx(t) - D\hat{z}(t) + [GB - H]u(t) - Ky(t). \end{aligned}$$

Оскільки справедливі рівності $y(t) = Cx(t), z(t) = Gx(t), \hat{z}(t) = z(t) - \varepsilon(t)$, то з останнього рівняння отримаємо

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = D\varepsilon(t) + [GA - DG - KC]x(t) + [GB - H]y(t).$$

Звідси робимо висновок, що коли власні числа матриці D мають від'ємні дійсні частини і виконуються рівності

$$GA - DG - KC = 0, \quad GB - H = 0, \quad (5.11)$$

то похибка $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

(Студентам самостійно визначити, скільки скалярних рівнянь та скільки скалярних змінних містить матрична система рівнянь (5.11) і на цій основі зробити висновок про розв'язуваність матричної системи рівнянь (5.11)).

На практиці задаються матрицями D і K , потім із (5.11) визначають невідомі матриці H і G . Для існування розв'язку системи рівнянь (5.11) необхідно, щоб власні числа матриць A і D були різними. Знаючи $\hat{z}(t)$ і $y(t)$, оцінку вектора $x(t)$ обчислюють за формулою

$$\hat{x}(t) = \begin{pmatrix} C \\ G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ \hat{z}(t) \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Порядок оцінюючого пристрою (*спостерігач Люєнберга*), який описується співвідношеннями (5.10),(5.11),(5.12), дорівнює $n - k$ за числом координат вектора $\hat{z}(t)$.

Приклад 1. Нехай задана система

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t), \quad t \geq 0. \\ y(t) = x_2(t), \end{cases}$$

Запишемо її у векторно-матричній формі:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t),$$

$$y(t) = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

де $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = (0 \quad 1), n = 2, k = 1, x_*^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

1.1. Для синтезу спостерігача повного порядку (другого порядку) (5.8)

задаємо матрицю $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. При цьому власні числа матриці

$$A - KC = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ такі:}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Згідно з (5.8) маємо рівняння спостерігача стану повного порядку

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}_1(t)}{dt} = u(t) + y(t) - \hat{x}_2(t), \quad \hat{x}_1(0) = 1, \\ \frac{d\hat{x}_2(t)}{dt} = \hat{x}_1(t) + 2[y(t) - \hat{x}_2(t)], \quad \hat{x}_2(0) = 1. \end{cases}$$

Для знаходження наближених розв'язків задач Коші, які виникають у лабораторній роботі № 5, можна використати такі два наближені числові методи розв'язання задач Коші:

I. Метод Рунге-Куты 4-го порядку точності для розв'язування задачі Коші

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0 \in R^n, \quad t \geq t_0.$$

Будується послідовність векторів $\{x^i\}_{i=0}^{\infty}$ згідно з рекурентними формулами:

$$\begin{aligned}x^{i+1} &= x^i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad k_1 = hf(x^i, t_i), \\k_2 &= hf\left(x^i + \frac{k_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right), \quad k_3 = hf\left(x^i + \frac{k_2}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right), \\k_4 &= hf(x^i + k_3, t_i + h), \quad t_{i+1} = t_i + h, \quad i = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

де $h > 0$ – крок інтегрування. Похибка методу $O(h^5)$.

II. Метод Ейлера.

$$\begin{aligned}x^{i+1} &= x^i + hf(x^i, t_i), \\t_{i+1} &= t_i + h, \quad i = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Похибка методу $O(h^2)$.

1.2. Для синтезу оцінюючого пристрою низького порядку (першого порядку) (5.10) - (5.12) задаємо $D = -1, K = 1$. Невідомі «матриці» $G = (g_1, g_2)$ і H визначимо із системи (5.11), яка в нашому випадку набуває вигляду

$$\begin{cases}g_2 + g_1 = 0, \\g_2 - 1 = 0, \\g_1 = H.\end{cases}$$

Звідси знайдемо $g_1 = -1; g_2 = 1; H = -1$.

Із (5.10) і (5.12) отримаємо оцінку $\hat{z}(t)$

$$\frac{d\hat{z}(t)}{dt} = -\hat{z}(t) - u(t) + y(t), \quad \hat{z}(t_0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

і оцінку стану $\hat{x}(t)$

$$\hat{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ \hat{z}(t) \end{pmatrix},$$

тобто в координатній формі

$$\begin{cases}\hat{x}_1(t) = y(t) - \hat{z}(t), \\ \hat{x}_2(t) = y(t).\end{cases}$$

Знайдені нами параметри спостерігачів забезпечують прямування похибки оцінювання до нуля при $t \rightarrow \infty$.

Лабораторна робота 5

Отже, якщо для одержання оцінки вектора стану $x(t)$ використовується спостерігач повного порядку, то структура системи керування має вигляд

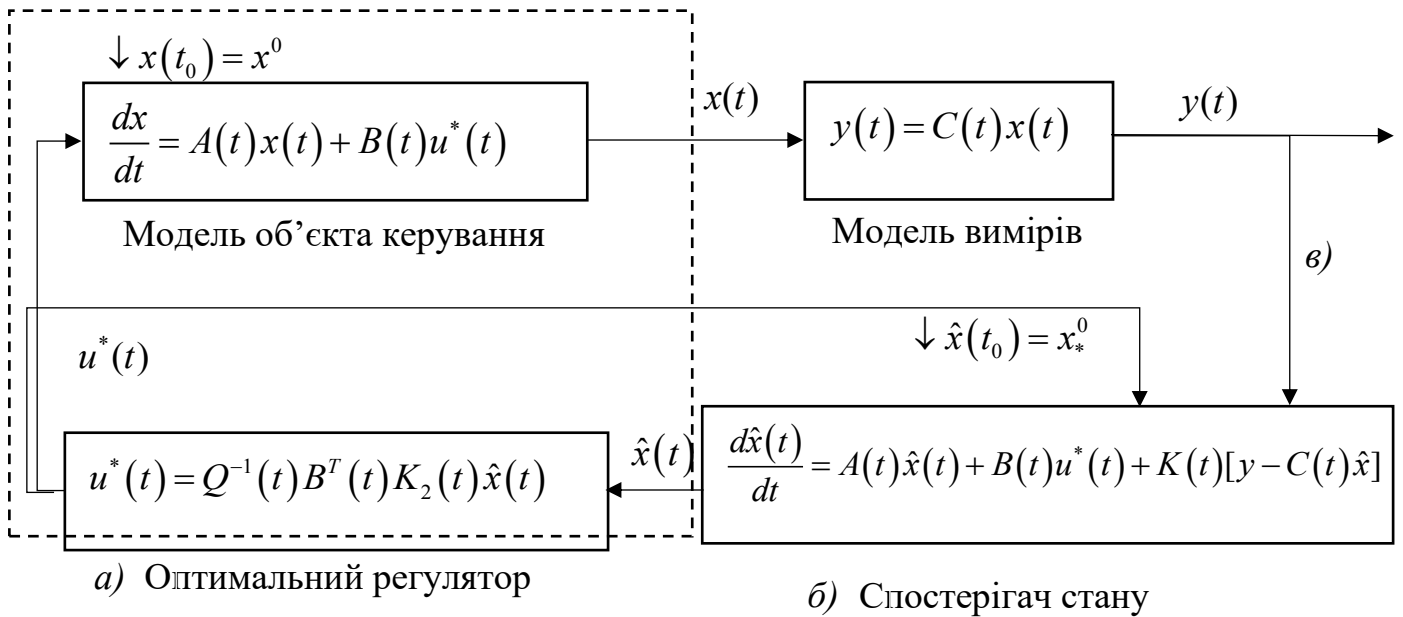


Рис. 5.2. Схема із спостерігачем стану повного порядку

Структура системи керування із спостерігачем стану низького порядку відрізняється від наведеної вище тільки блоком «спостерігач стану».

Тепер на конкретному прикладі продемонструємо побудову оптимального лінійного регулятора з накопиченням інформації.

Приклад 2. Нехай модель об'єкта керування і вимірів, а також функціонал якості керування задані у вигляді:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t), \quad t \in [0, 2], \\ y(t) = x_2(t), \end{cases} \quad (5.13)$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^2 u^2(t) dt + \frac{1}{2} [x_1^2(2) + x_2^2(2)] \rightarrow \min_u.$$

Потрібно знайти оптимальне керування з накопиченням інформації.

Розв'язування. Перепишемо модель (5.13) у векторно-матричній формі

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

де $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n = 2$, $k = 1$, $x_*^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Відмітимо, що у функціоналі якості I матриці S, Q, π мають вигляд:

$$S = 0, Q = 1; \pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1. Спочатку знайдемо оптимальний лінійний регулятор. Нехай шукана симетрична матриця $K_2(t)$ має вигляд

$$K_2(t) = \begin{pmatrix} K_{11}(t) & K_{12}(t) \\ K_{12}(t) & K_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідне рівняння Ріккати (5.5)

$$\dot{K}_2(t) = -A^T K_2(t) - K_2(t) A - K_2(t) B Q^{-1} B^T K_2(t), \quad K_2(2) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Підставивши в це рівняння відповідні значення матриць, одержимо систему диференціальних рівнянь (задачу Коші)

$$\begin{cases} \dot{K}_{11}(t) = -2K_{12}(t) - K_{11}^2(t), & K_{11}(2) = -1, \\ \dot{K}_{12}(t) = -K_{22}(t) - K_{11}(t)K_{12}(t), & K_{12}(2) = 0, \\ \dot{K}_{22}(t) = -K_{12}^2(t), & K_{22}(2) = -1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю задачу Коші, одержимо такий аналітичний розв'язок:

$$K_{11}(t) = \frac{-2[6 + 2(2-t)^2(5-t)]}{12(3-t) + (2-t)^3(6-t)},$$

$$K_{12}(t) = \frac{-6(2-t)(4-t)}{12(3-t) + (2-t)^3(6-t)},$$

$$K_{22}(t) = \frac{-12(3-t)}{12(3-t) + (2-t)^3(6-t)}.$$

Оптимальний лінійний регулятор знайдемо згідно із співвідношенням (5.4):

$$\begin{aligned}
u^*(t, x_1(t), x_2(t)) &= 1 \cdot (1 \ 0) \begin{pmatrix} K_{11}(t) & K_{12}(t) \\ K_{12}(t) & K_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \\
&= (K_{11}(t) \ K_{12}(t)) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = K_{11}(t)x_1(t) + K_{12}(t)x_2(t).
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Підставивши в цю рівність відповідні розв'язки (5.14) задачі Коші, одержимо

$$u^*(t, x_1(t), x_2(t)) = -\frac{2[6 + 2(2-t)^2(5-t)x_1(t) + 6(2-t)(4-t)x_2(t)]}{12(3-t) + (2-t)^3(6-t)}. \tag{5.15}$$

2.2. Згідно з пунктом 2 рівняння спостерігача стану повного порядку (другого порядку) таке:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}_1(t)}{dt} = u(t) + y(t) - \hat{x}_2(t), \hat{x}_1(0) = 1, \\ \frac{d\hat{x}_2(t)}{dt} = \hat{x}_1(t) + 2[y(t) - \hat{x}_2(t)], \hat{x}_2(0) = 1, \end{cases}$$

а рівняння спостерігача стану низького порядку (першого порядку):

$$\begin{cases} \frac{d\hat{z}(t)}{dt} = -\hat{z}(t) - u(t) + y(t), \hat{z}(0) = (-1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \\ \hat{x}_1(t) = y(t) - \hat{z}(t), \\ \hat{x}_2(t) = y(t). \end{cases}$$

Отримані з допомогою спостерігачів оцінки $\hat{x}(t)$ використовуються замість відповідних координат вектора стану $x(t)$ у керуванні (5.15)

$$u^*(t) = u^*(t, \hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) = -\frac{[12 + 4(2-t)^2(5-t)]\hat{x}_1(t) + 6(2-t)(4-t)\hat{x}_2(t)}{12(3-t) + (2-t)^3(6-t)}.$$

У лабораторній роботі потрібно порівняти значення функціонала I для випадку, коли вектор стану $x(t)$ доступний для виміру і оптимальний регулятор будується за формулою (5.4); у випадку, коли система керування функціонує як показано на рис. 5.2 (тобто коли оптимальний регулятор будується на основі оцінок $\hat{x}(t)$ вектора стану $x(t)$); і у випадку, коли керування $u(t)$ задається апріорі довільною функцією.

Варіанти лабораторних робіт відрізняються початковими значеннями x^0 і x_*^0 , вибором матриці K (у випадку спостерігача повного порядку) і матриць D і K (у випадку спостерігача низького порядку).

Для знаходження значення функціонала I можна скористатися, наприклад, формулою трапецій для наближеного обчислення інтегралів

$$\int_{t_0}^{t_0+Mh} f(t) dt \cong h \left[\frac{1}{2} f(t_0) + f(t_0+h) + f(t_0+2h) + \dots + f(t_0+(M-1)h) + \frac{1}{2} f(t_0+Mh) \right],$$

де $h > 0$, M – достатньо велике натуральне число.

У звіті повинні бути представлені графіки траєкторій $x_1(t)$, $x_2(t)$, графіки оцінок $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_2(t)$, графіки керування $u(t)$, значення функціоналу I , кінцеві точки $x_1(2)$, $x_2(2)$, які відповідають трьом способам вибору керування $u(t)$.

За вказаною схемою студенти самостійно можуть побудувати синтез сумісного оцінювання і керування для інших задач.

Приклад 3. Для заданої лінійної динамічної системи з квадратичним критерієм:

(вигляд динамічної системи та критерію для кожного студента за варіантами)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_2(t) - 2x_1(t), x_1(0) = -1, \\ \dot{x}_2(t) = 1.1x_1(t) + 2u(t), x_2(0) = -2, \\ y(t) = \beta x_2(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [4x_1^2(t) + 2x_2^2(t) + 3u^2(t)] dt + \frac{1}{4} x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

потрібно:

1. Встановити значення параметрів n, m, k (n – розмірність вектора стану, m – розмірність вектора входу (керування), k – розмірність вектора виходу).
2. Підібрати цілочисельні параметри α, β такі, щоб система була повністю керованою, спостережною та асимптотично стійкою. Параметри α, β вибираються з умов: $|\alpha|, |\beta| \in \{1, 2, 3, \dots\}$; $|\alpha|, |\beta| \rightarrow \min$.
3. Знайти матриці A, B, C, S, Q, π .
4. Записати матричне рівняння Ріккати в скалярному вигляді.
5. Знайти оптимальний регулятор.
6. Побудувати спостерігач стану повного порядку.

7. Побудувати спостерігач стану низького порядку.
8. Реалізувати програмно блок-схему функціонування системи, виводячи на графіки значення компонент стану $x_1(t), x_2(t)$ та оцінок компонент стану $x_1(t), x_2(t)$, графіки керувань та значення критеріїв I для трьох випадків:
 - а) керування $u(t)$ – довільне;
 - б) керування $u^*(t)$, яке розраховується на основі вектора стану $x(t)$.
 - в) керування $u^*(t)$, яке розраховується на основі оцінки вектора стану $x(t)$.
9. Аналіз отриманих результатів.

Розв'язування

1. Розмірність векторів стану, входу (керування), виходу, відповідно, дорівнюють: $n = 2$; $m = 1$; $k = 1$.
2. Спочатку записуємо матриці A, B, C в параметричній формі:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \alpha \\ 1.1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad \beta).$$

1) Забезпечуємо *асимптотичну стійкість системи*.

Для цього складаємо характеристичне рівняння:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & \alpha \\ 1.1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 1.1\alpha = 0.$$

Знаходимо корені цього рівняння:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 1.1\alpha}.$$

Перебором встановлюємо, що при $\alpha = -1$ обидва корені характеристичного рівняння мають від'ємні дійсні частини (також відмітимо, що $|\alpha|$ є мінімальним).

2) Забезпечуємо *повну керованість системи*.

Складаємо матрицю керованості $(B \parallel AB)$. Спочатку знаходимо матрицю

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & \alpha \\ 1.1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Отже, матриця керованості така:}$$

$$(B \parallel AB) = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Робимо висновок, що $\text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$ при будь-якому $\alpha \neq 0$.

3) Забезпечуємо повну спостережність системи.

Складаємо матрицю спостережності $\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}$. Спочатку знаходимо матрицю

$CA = (0 \ \beta) \begin{pmatrix} -2 & \alpha \\ 1.1 & 0 \end{pmatrix} = (1.1\beta \ 0)$. Отже, матриця спостережності така:

$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1.1\beta & 0 \end{pmatrix}$. Робимо висновок, що $\text{rang} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1.1\beta & 0 \end{pmatrix} = 2$ при будь-якому $\beta \neq 0$.

Отже, можемо покласти $\beta = 1$.

Таким чином, знайдені значення параметрів $\alpha = -1$, $\beta = 1$ забезпечують асимптотичну стійкість, повну керованість та спостережність динамічної системи.

Тепер можна переходити до виконання пунктів 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 свого індивідуального завдання, користуючись зразком лабораторної роботи, яка наведена у **прикладі 1**.

Також зауважуємо, що аналітичного розв'язку матричного рівняння Ріккати (як у **прикладі 1**) Ви не знайдете. Рекомендується знаходити наближений розв'язок матричного рівняння Ріккати, використовуючи певний числовий метод розв'язування систем диференціальних рівнянь (наприклад, метод Ейлера, чи метод Рунге-Куты).

Питання для підготовки до виконання лабораторної роботи 5.

1. Для якого типу (стаціонарних чи нестаціонарних) лінійних неперервних динамічних систем здійснюється синтез сумісного оцінювання та керування?
2. Сформулюйте означення невід'ємно визначеної матриці та додатно визначеної матриці.
3. В який момент часу (початковий чи кінцевий) задається гранична умова для матричного диференціального рівняння Ріккати (5.5)?
4. Який вигляд має оптимальна синтезуюча функція $u^*(t, x(t))$ з повним оберненим зв'язком при відомому векторі стану $x(t)$?
5. Для якого типу (стаціонарних чи нестаціонарних) лінійних неперервних динамічних систем здійснюється синтез спостерігачів стану повного порядку?

6. Для якого типу (стаціонарних чи нестаціонарних) лінійних неперервних динамічних систем здійснюється синтез спостерігачів стану низького порядку?
7. Обґрунтуйте твердження «Похибка оцінювання $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для стаціонарних динамічних систем, якщо усі власні числа матриці $A - KC$ мають від'ємні дійсні частини».
8. Які методи Ви знаєте для знаходження матриці K , щоб усі власні числа матриці $A - KC$ мали від'ємні дійсні частини?
9. Який вигляд має диференціальне рівняння для знаходження спостерігача стану повного порядку для нестаціонарних систем?
10. Що відомо про ранг матриці C лінійної неперервної динамічної системи, для якої здійснюється синтез спостерігачів стану низького порядку?
11. Скільки скалярних алгебраїчних рівнянь містить матрична система рівнянь (5.11) та скільки невідомих елементів у цій системі? Зробіть висновок про розв'язність системи (5.11).
12. Які практичні рекомендації надаються, щодо розв'язування матричної системи рівнянь (5.11)?
13. Який порядок має спостерігач стану низького порядку?
14. Запишіть формулу трапецій для наближеного обчислення значень квадратичного критерію (5.3).
15. Які методи використовуються для знаходження цілочисельних параметрів α, β таких, щоб задана параметрична динамічна система була повністю керованою, повністю спостережною та асимптотично стійкою?

Варіанти індивідуальних завдань до лабораторної роботи 5.

Варіант № 1.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_2(t) - 2x_1(t), x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) + u(t), x_2(0) = -1, \\ y(t) = \beta x_2(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [2x_1^2(t) + x_2^2(t) + 2u^2(t)] dt + \frac{1}{3} x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 2.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_2(t) - 1.5x_1(t), x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + u(t), x_2(0) = -1, \\ y(t) = \beta x_1(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [2.5x_1^2(t) + x_2^2(t) + 1.2u^2(t)] dt + \frac{2}{3}x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 3.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_2(t) - 0.5x_1(t), x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + 3u(t), x_2(0) = -1, \\ y(t) = \beta x_2(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [2.4x_1^2(t) + x_2^2(t) + 2.8u^2(t)] dt + \frac{1}{4}x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 4.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\alpha x_2(t) + 3u(t), x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = 3.4x_1(t) - x_2(t), x_2(0) = 2, \\ y(t) = \beta x_1(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [1.4x_1^2(t) + 0.4x_2^2(t) + 4.2u^2(t)] dt + \frac{1}{4}x_1^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 5.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_2(t) - 4x_1(t), x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 2u(t), x_2(0) = -1, \\ y(t) = \beta x_2(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [2x_1^2(t) + x_2^2(t) + 2u^2(t)] dt + \frac{1}{3}x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 6.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_2(t) - 3x_1(t), x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 4u(t), x_2(0) = -1, \\ y(t) = 2\beta x_2(t), \end{cases}$$
$$I = \int_0^T [2.2x_1^2(t) + 1.4x_2^2(t) + 1.2u^2(t)] dt + \frac{1}{7} x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 7.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_2(t) - 6x_1(t), x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 5u(t), x_2(0) = -1, \\ y(t) = 3\beta x_2(t), \end{cases}$$
$$I = \int_0^T [2.8x_1^2(t) + 1.6x_2^2(t) + 2.8u^2(t)] dt + \frac{2}{3} x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 8.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\alpha x_2(t) - 4u(t), x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t), x_2(0) = 2, \\ y(t) = \beta x_1(t), \end{cases}$$
$$I = \int_0^T [0.4x_1^2(t) + 0.8x_2^2(t) + 5u^2(t)] dt + \frac{1}{8} x_1^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 9.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\alpha x_2(t) + 2u(t), x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = 5x_1(t) - 2x_2(t), x_2(0) = -2, \\ y(t) = 4\beta x_1(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [1.4x_1^2(t) + 2.8x_2^2(t) + 2.5u^2(t)] dt + \frac{3}{8}x_1^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 10.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} 3\dot{x}_1(t) = -\alpha x_2(t) + 4u(t), x_1(0) = -5, \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - x_2(t), x_2(0) = 2, \\ y(t) = 3\beta x_1(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [3.4x_1^2(t) + 3.8x_2^2(t) + 1.5u^2(t)] dt + \frac{1}{5}x_1^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 11.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\alpha x_2(t) - 2.4u(t), x_1(0) = -4, \\ \dot{x}_2(t) = 3.2x_1(t) - 2x_2(t), x_2(0) = -2, \\ y(t) = 3\beta x_1(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [1.4x_1^2(t) + 1.8x_2^2(t) + 1.5u^2(t)] dt + \frac{2}{3}x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 12.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2\alpha x_2(t) - 4.2u(t), x_1(0) = 3, \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 2.4x_2(t), x_2(0) = -2, \\ y(t) = 3\beta x_1(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [1.4x_1^2(t) + 0.4x_2^2(t) + 2.5u^2(t)] dt + \frac{2}{7}x_1^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 13.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_2(t) - 2x_1(t), x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = 0.4x_1(t) - 5u(t), x_2(0) = -1, \\ y(t) = 2\beta x_2(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [4.4x_1^2(t) + x_2^2(t) + 6u^2(t)] dt + \frac{2}{5} x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант №14.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.5\alpha x_2(t) + 2u(t), x_1(0) = -2, \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t), x_2(0) = -2, \\ y(t) = 2\beta x_1(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [0.4x_1^2(t) + 0.6x_2^2(t) + 8u^2(t)] dt + \frac{1}{7} x_1^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 15.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -1.5\alpha x_2(t) - 4u(t), x_1(0) = 6, \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - 4x_2(t), x_2(0) = -2, \\ y(t) = 3\beta x_1(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [2.4x_1^2(t) + 1.6x_2^2(t) + 2.8u^2(t)] dt + \frac{3}{7} x_1^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 16.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2.5\alpha x_2(t) + 3u(t), x_1(0) = 2, \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t), x_2(0) = -5, \\ y(t) = 4\beta x_1(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [2.4x_1^2(t) + 3.6x_2^2(t) + 4.8u^2(t)] dt + \frac{2}{3}x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 17.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 1.5\alpha x_2(t) - 2u(t), x_1(0) = -5, \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 4x_2(t), x_2(0) = -2, \\ y(t) = 4\beta x_1(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [0.8x_1^2(t) + 3.6x_2^2(t) + 1.8u^2(t)] dt + \frac{1}{9}x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 18.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2.5\alpha x_2(t) - 2u(t), x_1(0) = 4, \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t), x_2(0) = -5, \\ y(t) = 2\beta x_2(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [2.4x_1^2(t) + 5.6x_2^2(t) + 4.8u^2(t)] dt + \frac{2}{7}x_1^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 19.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_2(t) - 0.2x_1(t), x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 5u(t), x_2(0) = -1, \\ y(t) = 3\beta x_2(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [4.4x_1^2(t) + 2x_2^2(t) + 2.3u^2(t)] dt + \frac{1}{5}x_1^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 20.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.4\alpha x_2(t) - 4u(t), x_1(0) = 2, \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t), x_2(0) = -2, \\ y(t) = 2\beta x_1(t), \end{cases}$$
$$I = \int_0^T [4x_1^2(t) + 0.6x_2^2(t) + 0.8u^2(t)] dt + \frac{1}{5}x_1^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 21.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3\alpha x_2(t) - 2x_1(t), x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - 0.5u(t), x_2(0) = -1, \\ y(t) = 2\beta x_2(t), \end{cases}$$
$$I = \int_0^T [4x_1^2(t) + 0.5x_2^2(t) + 4u^2(t)] dt + \frac{1}{3}x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 22.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.5\alpha x_2(t) - 2u(t), x_1(0) = -4, \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t), x_2(0) = -2, \\ y(t) = 3\beta x_1(t), \end{cases}$$
$$I = \int_0^T [2.4x_1^2(t) + 0.6x_2^2(t) + 3u^2(t)] dt + \frac{1}{5}x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 23.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -4\alpha x_2(t) - 0.2x_1(t), x_1(0) = 4, \\ \dot{x}_2(t) = 0.4x_1(t) + 1.5u(t), x_2(0) = -1, \\ y(t) = 2.5\beta x_2(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [3.4x_1^2(t) + 2x_2^2(t) + 6u^2(t)] dt + \frac{3}{4}x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 24.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.5\alpha x_2(t) - 2u(t), x_1(0) = 4, \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) - 0.2x_2(t), x_2(0) = -2, \\ y(t) = 2.5\beta x_1(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [1.5x_1^2(t) + 0.7x_2^2(t) + 8u^2(t)] dt + \frac{3}{5}x_1^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 25.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.8\alpha x_2(t) - 3u(t), x_1(0) = 2, \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) - 0.6x_2(t), x_2(0) = 4, \\ y(t) = 4\beta x_1(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [4.4x_1^2(t) + 0.8x_2^2(t) + 3.5u^2(t)] dt + \frac{5}{9}x_1^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 26.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.3\alpha x_2(t) + 0.2u(t), x_1(0) = -1, \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) - 1.2x_2(t), x_2(0) = -0.5, \\ y(t) = 2\beta x_2(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [2.5x_1^2(t) + 3.7x_2^2(t) + 3u^2(t)] dt + \frac{3}{4}x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 27.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.2\alpha x_2(t) - 3u(t), x_1(0) = -7, \\ \dot{x}_2(t) = 2.5x_1(t) - 2.5x_2(t), x_2(0) = -3, \\ y(t) = 2.6\beta x_1(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [2.2x_1^2(t) + 0.4x_2^2(t) + 4u^2(t)] dt + \frac{2}{7}x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 28.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_2(t) - 0.7x_1(t), x_1(0) = 2, \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 5u(t), x_2(0) = -3, \\ y(t) = 4\beta x_2(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [1.4x_1^2(t) + 2.6x_2^2(t) + 4.3u^2(t)] dt + \frac{7}{5}x_1^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 29.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\alpha x_2(t) - 2.7x_1(t), x_1(0) = 0.2, \\ \dot{x}_2(t) = 2.4x_1(t) - 3u(t), x_2(0) = -3.4, \\ y(t) = 7\beta x_2(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [5.4x_1^2(t) + 3.6x_2^2(t) + 3.3u^2(t)] dt + \frac{7}{9}x_1^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 30.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.2\alpha x_2(t) - 1.7x_1(t), x_1(0) = 4.2, \\ \dot{x}_2(t) = 2.2x_1(t) - 3u(t), x_2(0) = -3.4, \\ y(t) = 2.2\beta x_2(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [0.4x_1^2(t) + 7.6x_2^2(t) + 3.8u^2(t)] dt + \frac{5}{6}x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 31.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.2\alpha x_2(t) + 4u(t), x_1(0) = -5, \\ \dot{x}_2(t) = 5x_1(t) - 20x_2(t), x_2(0) = -2.6, \\ y(t) = 3\beta x_1(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [4.4x_1^2(t) + 5.8x_2^2(t) + 0.5u^2(t)] dt + \frac{3}{7}x_1^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 32.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_2(t) - 2x_1(t), x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = 0.8x_1(t) - 7u(t), x_2(0) = -1, \\ y(t) = 3.4\beta x_2(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [4.3x_1^2(t) + 0.5x_2^2(t) + 8u^2(t)] dt + \frac{2}{7}x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 33.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.8\alpha x_2(t) + 2.4u(t), x_1(0) = -2, \\ \dot{x}_2(t) = 0.3x_1(t) - 0.2x_2(t), x_2(0) = -5, \\ y(t) = 2.7\beta x_1(t), \end{cases}$$

$$I = \int_0^T [1.4x_1^2(t) + 0.8x_2^2(t) + 0.8u^2(t)] dt + \frac{2}{7}x_1^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 34.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -1.5\alpha x_2(t) + 3u(t), x_1(0) = -0.2, \\ \dot{x}_2(t) = 1.3x_1(t) - 2x_2(t), x_2(0) = -2, \\ y(t) = 4\beta x_2(t), \end{cases}$$
$$I = \int_0^T [5.4x_1^2(t) + 9.6x_2^2(t) + 8.1u^2(t)] dt + \frac{11}{7}x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

Варіант № 35.

Задана неперервна параметрична лінійна система керування із квадратичним критерієм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 1.2\alpha x_2(t) - 3x_1(t), x_1(0) = 0.1, \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 4x_2(t), x_2(0) = -1, \\ y(t) = 3\beta x_2(t), \end{cases}$$
$$I = \int_0^T [4.2x_1^2(t) + 5x_2^2(t) + 2.1u^2(t)] dt + \frac{1}{9}x_2^2(T) \rightarrow \min_u$$

ТЕМА № 6

МЕТОД АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО ТА БАГАТОЦІЛЬОВОГО ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Метод аналізу ієрархій (МАІ) був розроблений у 70-х роках минулого століття Томасом Л. Сааті для моделювання взаємозв'язків між окремими складовими частинами задачі прийняття рішення за допомогою ієрархічної структури з наступним визначенням ваг або пріоритетів альтернативних варіантів рішень відносно елементів цієї структури [13 – 17,25 – 27]. Функції МАІ полягають у структуризації складності, вимірюванні у шкалі відношень і синтезі. Трьома спорідненими з функціями базовими принципами МАІ є декомпозиція, порівняльні судження та ієрархічна композиція.

Принцип декомпозиції полягає у структуризації складної проблеми у вигляді ієрархії факторів, які впливають на головну ціль (мету) прийняття рішення. Ієрархію можуть утворювати критерії, під-критерії, групи зацікавлених осіб (актори), цілі, під-цілі та політики акторів, сценарії, альтернативні варіанти рішень тощо. На останньому рівні ієрархії як правило знаходяться альтернативні варіанти рішень.

Для обчислення ваг факторів і пріоритетів альтернатив у МАІ використовується *принцип порівняльних суджень*, згідно з яким суб'єктивні оцінки експертів є основною інформацією для визначення переваг одного елемента ієрархії над іншим. У МАІ елементи, що знаходяться на одному рівні ієрархії, попарно порівнюються між собою відносно їх впливу на спільний елемент вищого рівня ієрархії, і експерт дає оцінку щодо інтенсивності переваги одного елемента над іншим у спеціальній шкалі.

Принцип ієрархічної композиції використовується для синтезу пріоритетів за всіма рівнями ієрархії.

Аксиоми МАІ.

МАІ базується на чотирьох аксіомах: однорідності, оберненості, незалежності та адекватності. *Аксиома однорідності* стверджує, що елементи, які порівнюються не повинні відрізнятися між собою біль ніж на порядок величини (інакше це призведе до значних помилок у судженнях, зменшення точності та збільшення неузгодженості оцінок). Згідно з другою *аксіомою оберненості*: якщо $P_C(E_A, E_B)$ є результат парного порівняння елементів A та B відносно їх батьківського елемента C (і означає в скільки разів більше елемент A володіє певною властивістю в порівнянні з елементом B , то $P_C(E_B, E_A) = 1/P_C(E_A, E_B)$). Третя аксіома – це *незалежність елементів вищих рівнів ієрархії від елементів нижчих рівнів*. Використання МАІ потребує представлення проблеми у вигляді ієрархії, коли елементи нижчих рівнів залежать від елементів вищих рівнів.

Якщо ж проблема прийняття рішень є настільки складною, що потребує моделювання за допомогою мережевої структури зі зворотними зв'язками, то для синтезу слід використовувати метод супер-матриці. Четверта аксіома МАІ полягає в *адекватному представленні поглядів експертів*. Оскільки МАІ дуже гнучкий і може використовуватися в різних областях прийняття рішень різними способами, то експерти, які надають оцінки парних порівнянь елементів ієрархії, мають перевірити, що їхні погляди адекватно представлені в результатах реалізації МАІ.

Матриці парних порівнянь та їх властивості.

За результатами експертного оцінювання в МАІ формуються додатні обернено симетричні матриці парних порівнянь. Квадратна матриця $A = (a_{ij})_{i=1, \overline{n}}^{j=1, \overline{n}}$, для якої виконується $a_{ij} > 0$, $a_{ij} = 1 / a_{ji}$, $i, j \in \overline{1, n}$, називається додатною обернено симетричною матрицею. Додатна обернено симетрична матриця $A = (a_{ij})_{i=1, \overline{n}}^{j=1, \overline{n}}$, для якої виконуються співвідношення $a_{ik} = a_{ij} a_{jk}$, $i, j \in \overline{1, n}$, називається *узгодженою*. Матриця A називається *не приводимою*, якщо вона не може бути представлена у вигляді $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}$, де A_1, A_3 – квадратні під-матриці, а 0 – нульова під-матриця. Обернено симетричні матриці парних порівнянь не містять нулів, отже, вони завжди не приводимі.

Нехай маємо n кавунів A_1, A_2, \dots, A_n з відомими вагами w_1, w_2, \dots, w_n . Тоді можна сформулювати матрицю парних порівнянь, у рядках якої знаходяться відношення ваги кожного кавуна до ваг інших кавунів. Отримаємо таку рівність:

$$Aw = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix} = n \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix} = n \cdot w.$$

Для отримання ваг необхідно розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь:

$$Aw = nw \text{ чи } (A - nI)w = 0.$$

Ця система має нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли детермінант матриці $A - nI$ дорівнює нулю, тобто коли n є власним числом матриці A . Матриця A має одиничний ранг, оскільки кожний її рядок дорівнює першому рядку помноженому на певну константу. В результаті всі власні числа матриці

A , окрім одного, дорівнюють нулю. Сума власних чисел матриці дорівнює її сліду – сумі діагональних елементів. В нашому випадку слід матриці дорівнює n . Отже, n є власним числом матриці A та існує нетривіальний розв'язок – додатний вектор w , який єдиний з точністю до константи. Єдиність вектора w забезпечується нормуванням – шляхом ділення кожного елементу вектора w на суму всіх його елементів.

Таким чином, знаючи матрицю парних порівнянь A , можна отримати ваги. У цьому випадку розв'язком буде будь-який нормований стовпчик матриці A . Відмітимо, що для елементів матриці A мають виконуватися наступні властивості: оберненої симетричності $(a_{ij} = 1/a_{ji}, a_{ii} = 1)$ та узгодженості $(a_{ik} = a_{ij}a_{jk})$.

У загальному випадку на практиці немає можливості отримати точні значення відношень w_i / w_j , а можна визначити тільки їх оцінки.

Теорема 1. Найбільше власне число λ_{\max} додатної обернено симетричної матриці задовольняє нерівності $\lambda_{\max} \geq n$ і рівність має місце тоді і тільки тоді, коли матриця A є узгодженою.

Теорема 2. Якщо додатна матриця A є узгоджена, то кожний її рядок є додатним кратним будь-якого одного рядка.

Теорема 3. Якщо A – додатна та узгоджена матриця, тоді виконуються рівності: $a_{ij} = 1/a_{ji}, a_{ii} = 1$.

Теорема 4. Додатна матриця A узгоджена тоді і тільки тоді, коли вона має одиничний ранг та елементи на головній діагоналі дорівнюють одиниці.

Теорема 5 (про монотонність). Нехай $A = (a_{ij})_{i=1, n}^{j=1, n}$ – додатна узгоджена матриця з головним власним вектором $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$. Якщо замінити один елемент a_{ij} на елемент $a_{ij} + \varepsilon, \varepsilon > 0$ та використовуючи рядок i побудувати нову узгоджену матрицю $A^* = (a_{ij}^*)_{i=1, n}^{j=1, n}$ з головним власним вектором $w^* = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*)^T$, то виконується нерівність $w_i^* > w_i$.

Теорема 6. Якщо A – додатна узгоджена матриця і матриця A' отримана з A викреслюванням i -го рядка та i -го стовпчика, то матриця A' є узгодженою та її відповідний власний вектор отримується з A , якщо покласти $w_i = 0$ та нормалізувати компоненти.

Наведемо фундаментальну шкалу Сааті $1 \div 9$ переваги одного об'єкта над іншим.

Таблиця 1. Фундаментальна шкала

Інтенсивність важливості	Якісна оцінка	Пояснення
1	Однаково важливі	Об'єкти рівні за своїми значеннями
3	Ненабагато важливіші	Існують вербальні висловлювання щодо пріоритету одного об'єкта над іншим, але ці висловлювання не досить переконливі
5	Суттєво важливіші	Існують добрі докази та логічні критерії, які можуть показати, що певний об'єкт є більш важливим
7	Значно важливіші	Існує переконливий доказ великої значущості одного об'єкта над іншим
9	Абсолютно важливіші	Усвідомлення пріоритету одного об'єкта над іншим максимально підтверджується
2,4,6,8	Проміжні оцінки	Потрібен певний компроміс
	Обернене значення ненульових оцінок	Якщо оцінка m_{ij} надана на підставі порівняння i -го та j -го об'єктів, то m_{ji} має обернене значення $1/m_{ij}$
	Нормування	Нормування виникає з описаної шкали

Етапи методу аналізу ієрархії.

Етап 1. Побудова ієрархічної структури факторів, які впливають на головну ціль прийняття рішення; визначення альтернативних варіантів рішень.

Етап 2. Отримання суджень експертів щодо парних порівнянь елементів одного рівня ієрархії відносно спільного елементу вищого рівня ієрархії. Парні порівняння проводяться у фундаментальній шкалі відносної важливості і структуруються в матрицю парних порівнянь (МПП), яка є додатною та обернено симетричною.

Етап 3. Математична обробка суджень експертів:

- обчислення локальних ваг елементів кожного рівня ієрархії відповідно до батьківських елементів вищого рівня;
- аналіз узгодженості експертних оцінок;
- обчислення глобальних ваг елементів ієрархії відносно головної цілі прийняття рішення.

При аналізі реальної системи (складного об'єкта) число елементів та їх взаємозв'язків є настільки великим, що перевищує здатність експертів сприймати інформацію в повному обсязі. У цьому випадку реальність підрозділяється на складові частини за допомогою ієрархії. Ієрархія є певним видом системи, заснованим на припущенні, що елементи системи можуть

групуватися в окремі підмножини. Елементи кожної підмножини знаходяться під впливом елементів деякої цілком визначеної підмножини і, у свою чергу, впливають на елементи іншої підмножини. Але елементи в кожній підмножині незалежні.

Етапи МАІ проілюструємо на модельному прикладі прийняття рішення відділом продажів продукції дитячого харчування ТМ «Nestle» при розробці стратегії співпраці з ключовими торговими партнерами на наступний плановий період.

Генеральна мета (фокус): Побудувати рейтинг альтернатив (торгових партнерів) для планування подальшої співпраці.

Було обрано 6 критеріїв для оцінювання альтернатив (торгових партнерів):

- Кількість магазинів, в яких реалізує свою продукцію партнер (зазвичай, чим вищий цей показник, тим краще, оскільки це збільшує покриття території мережею).
- Товарооборот, тис. грн. – обсяг продаж продукції дитячого харчування від виробника до партнера.
- Ротація продаж, грн. на 1 торгову точку – середні продажі у розрахунку на 1 торгову точку партнера.
- Торгові умови, % від товарообороту – оплата послуг партнеру за реалізацію продукції та виконання послуг, визначених у договорі.
- Доля полиці, % – доля представленості на полиці у порівнянні з конкурентами.
- Очікуваний ріст, % – ріст продажів у наступному плановому періоді.

Торгові партнери (альтернативи): Фоззі, АТБ, Метро, Ашан, Фут-мережа, ЕКО-маркет.

Експерти надали наступну таблицю, яка характеризує альтернативи за обраними критеріями:

Таблиця 2. Характеристика торгових клієнтів (альтернатив) за вибраними критеріями.

	Кількість магазинів	Товарооборот, тис. грн.	Ротація продаж	Торгові умови	Доля полиці	Очікуваний ріст
Фоззі	300	11 235	37	16,3	20	5-6%
АТБ	850	15 500	18	22	20	5-10%
Метро	25	7 500	300	12	35	10-15%
Ашан	10	10 400	1 040	18	10	<2%
Фут-мережа	45	900	20	8	35	1-3%
ЕКО	60	4500	75	15	10	8-10%

Побудуємо ієрархічну структуру для задачі оцінювання альтернатив за обраними критеріями.

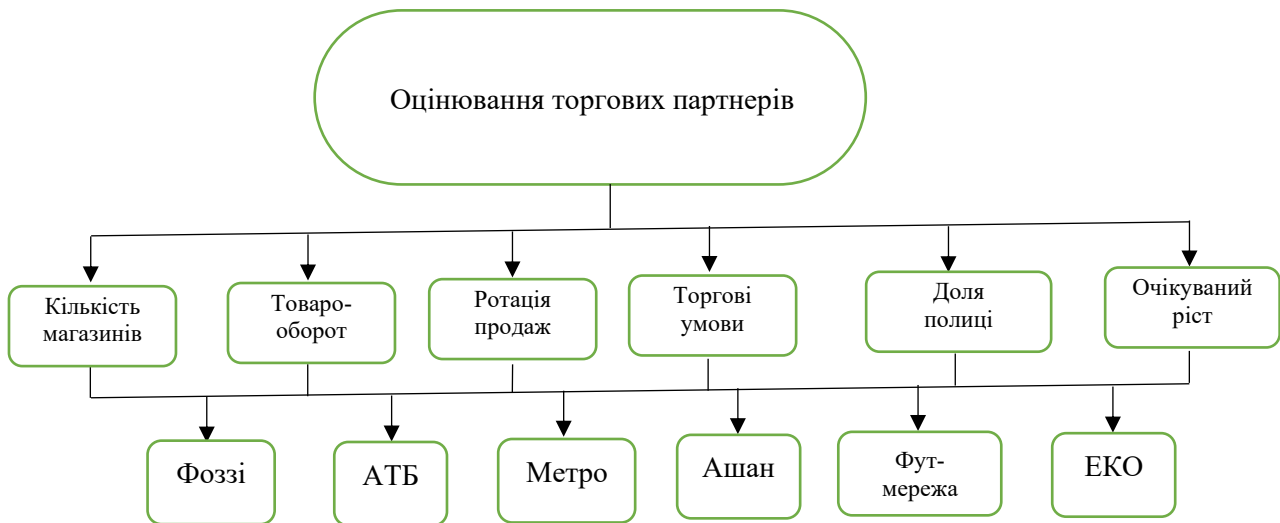


Рис.6.1. Ієрархія задачі оцінювання торгових партнерів

Після того як ієрархічна структура побудована, необхідно провести парні порівняння елементів, що знаходяться на одному рівні ієрархії, по відношенню до кожного елементу більш високого рівня ієрархії. Експерт повинен дати відповіді на питання типу: *Який критерій важливіший «Кількість магазинів» чи «Ротація продаж» при виборі торгових партнерів? Яким є ступінь переваги за шкалою Саати?* Такі питання задаються для усіх пар критеріїв, які знаходяться на другому рівні ієрархії. Загалом експерту пропонується провести $n(n-1)/2$ порівнянь, де n – кількість критеріїв. У прикладі $n = 6$, отже, експерту потрібно здійснити 15 порівнянь різних пар критеріїв. Експерт дає свої оцінки у фундаментальній шкалі, яка є вербальною, і має 9 поділок. Наприклад, якщо при порівнянні критеріїв «Кількість магазинів» та «Ротація продаж» експерт вважає, що критерій «Кількість магазинів» є суттєво важливіший за критерій «Ротація продаж» для досягнення головної мети «Оцінювання торгових клієнтів», то він ставить кількісну оцінку 5 у відповідній позиції матриці парних порівнянь.

Наступний етап – порівняти усі альтернативи. Альтернативи порівнюються відносно кожного з критеріїв другого рівня ієрархії. Експерту ставляться питання типу: *Яка альтернатива АТБ чи ЕКО краща з точки зору критерію «Товарооборот»? Яким є ступінь переваги?* Оскільки в ієрархічній структурі є шість альтернатив та шість критеріїв, то експерту необхідно провести 90 ($90 = 15 \times 6$) порівнянь пар альтернатив.

Побудова матриць парних порівнянь (МПП).

За результатами проведених експертом (чи експертами) парних порівнянь формуються матриці парних порівнянь (МПП), які є квадратними обернено симетричними матрицями $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$, для яких $a_{ij} = 1/a_{ji}, i, j = \overline{1, n}$. Для

прикладу оцінювання торгових партнерів згідно оцінок експертів отримуємо сім МПП:

Таблиця 3. Матриця парних порівнянь критеріїв.

	Кількість магазинів	Товарооборот	Ротація продаж	Торгові умови	Доля полиці	Очікуваний ріст
Кількість магазинів	1	1/7	5	1/6	1/5	2
Товарооборот	7	1	9	7	5	8
Ротація продаж	1/5	1/9	1	1/6	1/7	1/3
Торгові умови	6	1/7	6	1	3	5
Доля полиці	5	1/5	7	1/3	1	6
Очікуваний ріст	1/2	1/8	3	1/5	1/6	1

Таблиця 4. МПП альтернатив за критерієм «Кількість магазинів».

Кількість магазинів	Фоззі	АТБ	Метро	Ашан	Фут-мережа	ЕКО
Фоззі	1	1/4	6	6	5	4
АТБ	4	1	9	9	8	8
Метро	1/6	1/9	1	2	1/2	1/2
Ашан	1/6	1/9	1/2	1	1/3	1/3
Фут-мережа	1/5	1/8	2	3	1	1/2
ЕКО	1/4	1/8	2	3	2	1

Таблиця 5. МПП альтернатив за критерієм «Товарооборот».

Товарооборот	Фоззі	АТБ	Метро	Ашан	Фут-мережа	ЕКО
Фоззі	1	1/3	4	2	8	6
АТБ	3	1	5	4	9	7
Метро	1/4	1/5	1	1/3	6	4
Ашан	1/2	1/4	3	1	8	4
Фут-мережа	1/8	1/9	1/6	1/8	1	1/6
ЕКО	1/6	1/7	1/4	1/4	6	1

Таблиця 6. МПП альтернатив за критерієм «Ротація продаж».

Ротація продаж	Фоззі	АТБ	Метро	Ашан	Фут-мережа	ЕКО
Фоззі	1	3	1/5	1/8	3	1/3
АТБ	1/3	1	1/5	1/9	1/2	1/4
Метро	5	5	1	1/5	5	4
Ашан	8	9	5	1	9	7
Фут-мережа	1/3	2	1/5	1/9	1	1/3
ЕКО	3	4	1/4	1/7	3	1

Таблиця 7. МПП альтернатив за критерієм «Торгові умови».

Торгові умови	Фоззі	АТБ	Метро	Ашан	Фут-мережа	ЕКО
Фоззі	1	1/3	4	1/2	8	2
АТБ	3	1	6	3	9	3
Метро	1/4	1/6	1	1/5	6	1/3
Ашан	2	1/3	5	1	7	3
Фут-мережа	1/8	1/9	1/6	1/7	1	1/8
ЕКО	1/2	1/3	3	1/3	8	1

Таблиця 8. МПП альтернатив за критерієм «Доля полиці».

Доля полиці	Фоззі	АТБ	Метро	Ашан	Фут-мережа	ЕКО
Фоззі	1	1	1/6	5	1/6	5
АТБ	1	1	1/6	5	1/6	5
Метро	6	6	1	9	1	6
Ашан	1/5	1/5	1/9	1	1/9	1
Фут-мережа	6	6	1	9	1	9
ЕКО	1/5	1/5	1/6	1	1/9	1

Таблиця 9. МПП альтернатив за критерієм «Очікуваний ріст».

Очікуваний ріст	Фоззі	АТБ	Метро	Ашан	Фут-мережа	ЕКО
Фоззі	1	1/2	1/5	4	3	1/3
АТБ	2	1	1/3	5	4	1/2
Метро	5	3	1	9	7	2
Ашан	1/4	1/5	1/9	1	1/3	1/5
Фут-мережа	1/3	1/4	1/7	3	1	1/5
ЕКО	3	2	1/2	5	5	1

Узгодженість МПП.

Оцінка варіантів рішень з використанням МАІ здійснюється як на основі об'єктивної, так і суб'єктивної початкової інформації. У випадку, коли початкова інформація отримана з об'єктивних джерел у повному обсязі і є несуперечливою, результати прийняття рішень однозначні, тому немає необхідності в узгодженості початкових даних. Проте при використанні в процесі прийняття рішень суб'єктивної інформації, представленої у вигляді кількісних (числових) чи якісних (лінгвістичних) оцінок, виникають умови невизначеності. Причинами виникнення невизначеності є: неповнота знань експертів про властивості

об'єктів; недостатній ступінь упевненості в правильності оцінок; суперечливість знань; нечіткість представлення інформації. Наслідками прояву невизначеності є систематичні і випадкові помилки опитування експертів. Помилки в експертних оцінках призводять до неузгодженості даних і порушення таких властивостей суджень як зв'язність та транзитивність. Якість, а отже точність і обґрунтованість прийнятого рішення є тим гіршою, чим більше порушені властивості зв'язності та транзитивності між експертними даними. Крім того, психологами встановлено, що людина не може з достатньою надійністю порівнювати більше дев'яти елементів, оскільки зростає неузгодженість внаслідок природних обмежень людських здібностей.

У МАІ використовують метод оцінки узгодженості заданої експертом МПП, який оснований на обчисленні відношення узгодженості (consistency ratio):

$$BU = CR = \frac{CI}{MRCI} \left(BU = CR = \frac{CI}{MRCI} 100\% \right),$$

де CI – індекс узгодженості (IY) створеної експертом МПП, $MRCI$ – індекс узгодженості матриці такої ж розмірності, заповненої випадковим чином (випадковий індекс узгодженості, табл. 10).

Таблиця 10. Випадковий індекс узгодженості.

Розмір матриці n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$MRCI$	0	0.52	0.89	1.11	1.25	1.35	1.40	1.45	1.49	1.52

Розмір матриці n	12	13	14	15
$MRCI$	1.54	1.56	1.58	1.59

Числова оцінка ступеня узгодженості базується на тому факті, що для повністю узгодженої додатної обернено симетричної матриці максимальне власне число дорівнює порядку матриці парних порівнянь. Тому індекс узгодженості обчислюється за формулою:

$$IY = CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1},$$

де λ_{max} – максимальне власне число МПП, n – розмірність МПП (число порівнюваних елементів).

Для визначення допустимого рівня узгодженості заданої експертом МПП знайдене значення CR (BU) порівнюється з пороговим значенням (Табл. 11).

Таблиця 11. Порогові значення $CR(BU)$ для МПП різних розмірів.

Розмір МПП, n	Порогове значення $CR(BU)$
3	0.05 (5%)
4	0.08 (8%)
≥ 5	0.1 (10%)

Якщо обчислене значення CR менше або дорівнює пороговому значенню, то експертні оцінки мають допустимий рівень неузгодженості і можуть використовуватися в подальших процедурах. Для повністю узгоджених МПП $CR=0$. Якщо значення CR перевищує поріг, то експертні оцінки мають неприпустимо високий рівень неузгодженості і повинні бути переглянуті експертом (або можна використати алгоритми автоматичного підвищення узгодженості МПП).

Обчислення локальних пріоритетів.

За заповненою експертом МПП об'єктів потрібно обчислювати вектори локальних пріоритетів (або ваг), що виражають відносну силу, важливість, бажаність, цінність об'єктів відносно елементу вищого рівня ієрархії. Згідно з теорією Т. Сааті, локальні ваги обчислюються за *методом головного власного вектора*. Згідно з цим методом вектор ваг – це нормалізований власний вектор МПП, який відповідає найбільшому власному числу λ_{\max} .

Існує декілька методів знаходження головного власного вектора МПП A .

Граничний метод:

- 1) Задати довільний вектор $x^0 > 0$;
- 2) Обчислити $A^k x^0$ при $k = 1, 2, 3, \dots$;
- 3) Визначити норму вектора $y: \|y\| = \sum_{i=1}^n |y_i|$. Тоді відношення $A^k x^0 / \|A^k x^0\|$ збігається до головного власного вектора матриці A при $k \rightarrow \infty$, а відношення $\|A^k x^0\| / \|A^{k-1} x^0\|$ збігається до максимального власного числа λ_{\max} матриці A при $k \rightarrow \infty$.

Степеневий метод:

- 1) Задати довільний вектор $x^0 > 0, \|x^0\| = 1$;
- 2) Обчислити послідовність скалярних значень $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ та векторів x^1, x^2, x^3, \dots , які задовольняють умовам: $\|x^1\| = \|x^2\| = \|x^3\| = \dots = 1$ та $Ax^{k-1} = \lambda_k x^k, k = 1, 2, \dots$

Ці значення обчислюються за формулами:

$$x^k = Ax^{k-1} / \|Ax^{k-1}\|, \lambda_k = \|Ax^{k-1}\|, k = 1, 2, \dots$$

Тоді послідовність $\{x^k\}$ збігається до головного власного вектора матриці A при $k \rightarrow \infty$, а $\{\lambda_k\}$

– до її максимального власного числа.

Метод геометричного середнього (RGMM – row geometric mean method):

Ненормовані ваги обчислюються за формулою:

$$v_i = \left(\prod_{j=1}^n a_{ij} \right)^{1/n}, i = \overline{1, n},$$

де $A = (a_{ij})_{i=1, n}^{j=1, n}$ – заповнена експертами МПП. Для подальшого використання в

МАІ проводиться нормування отриманих ваг: $w_i = v_i / \sum_{i=1}^n v_i, i = \overline{1, n}$. При

використанні RGMM мірою узгодженості МПП A слугує незміщена оцінка дисперсії збурень:

$$s^2 = \frac{2 \sum_{i < j} [\ln a_{ij} - \ln(v_i / v_j)]^2}{(n-1)(n-2)}.$$

Менша дисперсія свідчить про більшу узгодженість МПП A .

Геометричним індексом узгодженості GCI МПП A при використанні методу RGMM знаходження ваг називається величина [28]:

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i < j} \ln^2 e_{ij},$$

де $e_{ij} = a_{ij} v_j / v_i$ – похибка апроксимації відношення v_i / v_j за допомогою a_{ij} .

Оскільки традиційний індекс узгодженості CI може бути представлений у вигляді $CI = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i < j} (e_{ij} - 1)$, то геометричний індекс узгодженості GCI – це середнє значення квадрата відстані між логарифмом похибки та логарифмом одиниці ($e_{ij} = 1$ для узгодженої МПП):

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i < j} (\ln e_{ij} - \ln 1)^2.$$

Наступна теорема ілюструє залежність між GCI та CR при малих похибках.

Теорема 7. Нехай $A = (a_{ij})_{i=1, n}^{j=1, n}$ є матрицею парних порівнянь, а вектор $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ є вектор ваг отриманий методом *RGMM*. Тоді виконується рівність

$$GCI = \frac{2n}{n-2} CI + o(\varepsilon^3),$$

де $\varepsilon = \max_{i,j} \{|\ln e_{ij}|\}$, $e_{ij} = a_{ij} v_j / v_i$.

Наслідок теореми 7. При виконанні умов теореми 7 виконується рівність $GCI = k(n)CR + o(\varepsilon^3)$, де $k(n) = \frac{2n}{n-2} E(CI(n))$.

Таким чином, для малих похибок e_{ij} геометричний індекс узгодженості *GCI* пропорційний традиційній мірі узгодженості *CR*. Використовуючи імітаційне моделювання, оцінено регресію *GCI* від *CR* для різних інтервалів *CR* у проміжку $CR \leq 1$. Отримані порогові значення для *GCI* наведено у табл. 12.

Таблиця 12. Порогові значення *GCI* для різних значень *CR*.

CR	Порогове значення GCI		
	$n=3$	$n=4$	$n \geq 5$
0.01	0.0314	0.0352	0.037
0.05	0.1573	0.1763	0.185
0.1	0.3147	0.3526	0.370
0.15	0.4720	0.5289	0.555

Якщо значення *GCI* перевищують вказані пороги, то МПП є неузгодженою.

Наведемо доволі простий алгоритм наближеного обчислення λ_{\max} – максимального власного числа МПП *A*.

1. Обчислити вектор нормованих ваг $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ МПП *A*.

2. Обчислити вектор $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)^T$, де $\sigma_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} w_j, i = \overline{1, n}$.

3. Обчислити $\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^n \sigma_i w_i$.

Підвищення узгодженості точкових оцінок експертів.

При розв'язанні практичних задач підтримки прийняття рішень побудовані експертами МПП переважно виявляються неузгодженими (особливо при великих значеннях *n*). Причинами неузгодженості є психологічні обмеження

людини-експерта, похибки експертів при висловлюванні своїх суджень та використанні фундаментальної шкали. Зрозуміло, що якщо надані експертами оцінки не мають допустимої узгодженості, то вони не можуть бути використані при прийнятті рішення. Тому постає необхідність у розробці методів підвищення узгодженості експертної інформації. Традиційний метод – це організація зворотного зв'язку з експертом, коли експерту для перегляду повертається вся недостатньо узгоджена МПП, або її найбільш неузгоджені елементи. Процедура перегляду повторюється допоки не буде досягнуто допустимого рівня узгодженості експертних оцінок. Відмітимо, що зворотній зв'язок з експертом потребує багато часу, зусиль і витрат. Тому для підвищення узгодженості (коли це можливо) використовують методи автоматичного підвищення узгодженості МПП, які базуються на наступних двох теоремах.

Теорема 8. Нехай $A = (a_{ij})_{i=1, \overline{n}}^{j=1, \overline{n}}$ – додатна обернено симетрична матриця, λ_{\max} – максимальне власне число матриці A , $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ – власний вектор матриці A . Якщо μ_{\max} – максимальне власне число матриці A^* :

$$A^* = (a_{ij}^*)_{i=1, \overline{n}}^{j=1, \overline{n}}, \quad a_{ij}^* = (a_{ij})^\alpha \left(\frac{w_i}{w_j} \right)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

то виконується нерівність $\mu_{\max} \leq \lambda_{\max}$ причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли матриця A є узгодженою.

Теорема 9. Нехай $A = (a_{ij})_{i=1, \overline{n}}^{j=1, \overline{n}}$ – додатна обернено симетрична матриця, λ_{\max} – максимальне власне число матриці A , $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ – власний вектор матриці A . Якщо μ_{\max} – максимальне власне число матриці A^* :

$$A^* = (a_{ij}^*)_{i=1, \overline{n}}^{j=1, \overline{n}}, \quad a_{ij}^* = \begin{cases} \alpha a_{ij} + (1-\alpha) \frac{w_i}{w_j}, & i=1, 2, \dots, n; j > i; \\ 1, & i=2, 3, \dots, n; j < i; \\ \alpha a_{ji} + (1-\alpha) \frac{w_j}{w_i}, & \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1,$$

то виконується нерівність $\mu_{\max} \leq \lambda_{\max}$, причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли матриця A є узгодженою.

Наведемо два алгоритми автоматичного підвищення узгодженості МПП A .

- I. Вибрати значення параметра $\alpha, 0 < \alpha < 1$. Покласти $k=0$. $A^{(0)} = A$.
- II. Обчислити нормовані ваги $w^{(k)} = (w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \dots, w_n^{(k)})^T$ матриці $A^{(k)}$.

- III. Для матриці $A^{(k)}$ обчислити відношення узгодженості $CR^{(k)}$. Якщо $CR^{(k)} \leq 0.1$, то перейти на крок VI, інакше перейти на крок IV.
- IV. Обчислити матрицю $A^{(k+1)} = (a_{ij}^{(k+1)})$, використовуючи один з двох методів:
- а) метод зваженого геометричного середнього

$$a_{ij}^{(k+1)} = (a_{ij}^{(k)})^\alpha \left(\frac{w_i^{(k)}}{w_j^{(k)}} \right)^{1-\alpha};$$

- б) метод зваженого арифметичного середнього

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} \alpha a_{ij}^{(k)} + (1-\alpha) \frac{w_i^{(k)}}{w_j^{(k)}}, & i=1,2,\dots,n; j>i; \\ \frac{1}{\alpha a_{ji}^{(k)} + (1-\alpha) \frac{w_j^{(k)}}{w_i^{(k)}}}, & i=2,3,\dots,n; j<i. \end{cases}$$

- V. Покласти $k = k + 1$ і перейти на крок II.
- VI. Вивести значення $k, A^{(k)}, CR^{(k)}$.

Отримана матриця $A^{(k)}$ є достатньо узгодженою.

Теорема 10. Для описаного алгоритму виконуються співвідношення:

$$CR^{(k+1)} < CR^{(k)}, k = 0, 1, 2, \dots; \lim_{k \rightarrow \infty} CR^{(k)} = 0.$$

Критерії ефективності підвищення узгодженості:

1. $\delta^{(k)} = \max_{i,j} \left\{ |a_{ij}^{(k)} - a_{ij}^{(0)}| \right\};$
2. $\sigma^{(k)} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij}^{(k)} - a_{ij}^{(0)})^2}.$

Модифікація $A^{(k)}$ МПП A вважається прийнятною, якщо виконуються нерівності: $\delta^{(k)} < 0.2$ та $\sigma^{(k)} < 0.1$. При цих значеннях модифікована МПП $A^{(k)}$ зберігає більшу частину інформації початкової МПП A .

При виборі значення параметра α слід враховувати, що кількість ітерацій k збільшується при збільшенні значення α і чим більшим є α , тим меншим є відхилення модифікованої МПП $A^{(k)}$ від початкової. Доцільно вибирати значення α з інтервалу $0.5 \leq \alpha < 1$.

Для прикладу з оцінювання торгових партнерів ваги критеріїв та альтернатив відносно критеріїв наведені, відповідно, у табл. 13 – 20. *Зауважимо, що ОПР встановив поріг для достатньої узгодженості МПП ВУ $\leq 15\%$.*

Таблиця 13. Ваги критеріїв.

	Кількість магазинів	Товарооборот	Ротація продаж	Торгові умови	Доля полиці	Очікуваний ріст	Власний вектор	Вектор лок. пріоритетів
Кількість магазинів	1	1/7	5	1/6	1/5	2	0.602	0.060
Товарооборот	7	1	9	7	5	8	5.102	0.512
Ротація продаж	1/5	1/9	1	1/6	1/7	1/3	0.224	0.022
Торгові умови	6	1/7	6	1	3	5	2.063	0.207
Доля полиці	5	1/5	7	1/3	1	6	1.552	0.156
Очікуваний ріст	1/2	1/8	3	1/5	1/6	1	0.429	0.043

Визначимо ступінь узгодженості для даної МПП.

Проведемо наступні обчислення:

σ_i	19.7	1.722	31	8.867	9.510	22.333
w_i	0.06	0.512	0.022	0.207	0.156	0.043
$\sigma_i w_i$	1.182	0.882	0.682	1.835	1.484	0.960

$$\lambda_{\max}=7.028; IU = \frac{7.028 - 6}{5} = 0.206; MRCI = 1.25;$$

$$BU = \frac{0.206}{1.25} = 0.165; BU=(16.5\%).$$

Оскільки перевищений поріг узгодженості, встановлений ОПР, то використаємо одну ітерацію алгоритму автоматичного підвищення узгодженості МПП (метод зваженого арифметичного середнього):

$$a_{ij}^{(k+1)} = \alpha a_{ij}^{(k)} + (1 - \alpha) \frac{w_i^{(k)}}{w_j^{(k)}}, k = 0, \alpha = 0.8.$$

Спочатку обчислюємо елементи верхнього трикутника матриці $A^{(1)}$:

$$a_{12}^{(1)} = 0.8 \cdot \frac{1}{7} + 0.2 \cdot \frac{0.060}{0.512} = 0.137;$$

$$a_{13}^{(1)} = 0.8 \cdot 5 + 0.2 \cdot \frac{0.060}{0.022} = 4.545;$$

$$a_{14}^{(1)} = 0.8 \cdot \frac{1}{6} + 0.2 \cdot \frac{0.060}{0.207} = 0.191;$$

$$a_{15}^{(1)} = 0.8 \cdot \frac{1}{5} + 0.2 \cdot \frac{0.060}{0.156} = 0.237;$$

$$a_{16}^{(1)} = 0.8 \cdot 2 + 0.2 \cdot \frac{0.060}{0.043} = 1.879;$$

$$a_{34}^{(1)} = 0.8 \cdot \frac{1}{6} + 0.2 \cdot \frac{0.022}{0.207} = 0.155;$$

$$a_{35}^{(1)} = 0.8 \cdot \frac{1}{7} + 0.2 \cdot \frac{0.022}{0.156} = 0.142;$$

$$a_{36}^{(1)} = 0.8 \cdot \frac{1}{3} + 0.2 \cdot \frac{0.022}{0.043} = 0.369;$$

$$a_{23}^{(1)} = 0.8 \cdot 9 + 0.2 \cdot \frac{0.512}{0.022} = 11.855;$$

$$a_{24}^{(1)} = 0.8 \cdot 7 + 0.2 \cdot \frac{0.512}{0.207} = 6.095;$$

$$a_{25}^{(1)} = 0.8 \cdot 5 + 0.2 \cdot \frac{0.512}{0.156} = 4.656;$$

$$a_{26}^{(1)} = 0.8 \cdot 8 + 0.2 \cdot \frac{0.512}{0.043} = 8.781;$$

$$a_{45}^{(1)} = 0.8 \cdot 3 + 0.2 \cdot \frac{0.207}{0.156} = 2.665;$$

$$a_{46}^{(1)} = 0.8 \cdot 5 + 0.2 \cdot \frac{0.207}{0.043} = 4.963;$$

$$a_{56}^{(1)} = 0.8 \cdot 6 + 0.2 \cdot \frac{0.156}{0.043} = 5.526.$$

Елементи нижнього трикутника матриці $A^{(1)}$ є оберненими величинами до відповідних елементів верхнього трикутника.

Отже, нова таблиця «ваги критеріїв» має такий вигляд:

Таблиця 14. Ваги критеріїв.

	Кількість магазинів	Товарооборот	Ротація продаж	Торгові умови	Доля полиці	Очікуваний ріст	Власний вектор	Вектор лок. пріоритетів
Кількість магазинів	1	0.137	4.545	0.191	0.237	1.879	0.613	0.061
Товарооборот	7.299	1	11.855	6.095	4.656	8.781	5.276	0.521
Ротація продаж	0.220	0.084	1	0.155	0.142	0.369	0.231	0.023
Торгові умови	5.236	0.164	6.452	1	2.665	4.963	2.046	0.202
Доля полиці	4.219	0.215	7.042	0.375	1	5.526	1.538	0.152
Очікуваний ріст	0.532	0.114	2.710	0.201	0.181	1	0.426	0.042

$\lambda_{\max} = 6.6836$; $I_U = 0.1367$; $V_U = 0.109$ ($V_U = 10.9\%$). Значить, отримана матриця достатньо узгоджена.

Таблиця 15. МПП альтернатив за критерієм «Кількість магазинів».

Кількість магазинів	Фоззі	АТБ	Метро	Ашан	Фут-мережа	ЕКО	Власний вектор	Вектор локальних пріоритетів
Фоззі	1	1/4	6	6	5	4	2.376	0.240
АТБ	4	1	9	9	8	8	5.241	0.530
Метро	1/6	1/9	1	2	1/2	1/2	0.458	0.046
Ашан	1/6	1/9	1/2	1	1/3	1/3	0.318	0.032
Фут-мережа	1/5	1/8	2	3	1	1/2	0.649	0.066
ЕКО	1/4	1/8	2	3	2	1	0.849	0.086

$$\lambda_{\max} = 6.3577; IU=0.0715; BU=0.058 (BU=5.8\%).$$

Відношення узгодженості BU=5.8%, а отже, матриця добре узгоджена.

Таблиця 16. МПП альтернатив за критерієм «Товарооборот»

Товарооборот	Фоззі	АТБ	Метро	Ашан	Фут-мережа	ЕКО	Власний вектор	Вектор локальних пріоритетів
Фоззі	1	1/3	4	2	8	6	2.245	0.244
АТБ	3	1	5	4	9	7	3.947	0.429
Метро	1/4	1/5	1	1/3	6	4	0.858	0.093
Ашан	1/2	1/4	3	1	8	4	1.513	0.164
Фут-мережа	1/8	1/9	1/6	1/8	1	1/6	0.191	0.021
ЕКО	1/6	1/7	1/4	1/4	6	1	0.455	0.049

$$\lambda_{\max} = 6.5026; IU=0.1005; BU=0.081 (BU=8.1\%).$$

Відношення узгодженості BU=8.1 %, а отже, матриця добре узгоджена.

Таблиця 17. МПП альтернатив за критерієм «Ротація продаж».

Ротація продаж	Фоззі	АТБ	Метро	Ашан	Фут-мережа	ЕКО	Власний вектор	Вектор локальних пріоритетів
Фоззі	1	3	1/5	1/8	3	1/3	0.649	0.066
АТБ	1/3	1	1/5	1/9	1/2	1/4	0.312	0.032
Метро	5	5	1	1/5	5	4	2.154	0.218
Ашан	8	9	5	1	9	7	5.320	0.538
Фут-мережа	1/3	2	1/5	1/9	1	1/3	0.413	0.042
ЕКО	3	4	1/4	1/7	3	1	1.043	0.105

$$\lambda_{\max} = 6.5768; IU=0.1154; BU=0.093 (BU=9.3\%).$$

Відношення узгодженості BU=9.3 %, а отже, матриця добре узгоджена.

Таблиця 18. МПП альтернатив за критерієм «Торгові умови».

Торгові умови	Фоззі	АТБ	Метро	Ашан	Фут-мережа	ЕКО	Власний вектор	Вектор локальних пріоритетів
Фоззі	1	1/3	4	1/2	8	2	1.484	0.172
АТБ	3	1	6	3	9	3	3.367	0.391
Метро	1/4	1/6	1	1/5	6	1/3	0.505	0.059
Ашан	2	1/3	5	1	7	3	2.030	0.235
Фут-мережа	1/8	1/9	1/6	1/7	1	1/8	0.186	0.021
ЕКО	1/2	1/3	3	1/3	8	1	1,049	0.122

$$\lambda_{\max} = 6.3934; IU=0.0787; BU=0.063 (BU=6.3\%).$$

Відношення узгодженості BU=6.3 %, а отже, матриця добре узгоджена.

Таблиця 19. МПП альтернатив за критерієм «Доля полиці».

Доля полиці	Фоззі	АТБ	Метро	Ашан	Фут-мережа	ЕКО	Власний вектор	Вектор локальних пріоритетів
Фоззі	1	1	1/6	5	1/6	5	0.941	0.096
АТБ	1	1	1/6	5	1/6	5	0.941	0.096
Метро	6	6	1	9	1	6	3.533	0.361
Ашан	1/5	1/5	1/9	1	1/9	1	0.281	0.029
Фут-мережа	6	6	1	9	1	9	3.780	0.387
ЕКО	1/5	1/5	1/6	1	1/9	1	0.301	0.031

$$\lambda_{\max} = 6.3971; IU=0.0794; BU=0.064 (BU=6.4\%).$$

Відношення узгодженості BU= 6.4 %, а отже, матриця добре узгоджена.

Таблиця 20. МПП альтернатив за критерієм «Очікуваний ріст».

Очікуваний ріст	Фоззі	АТБ	Метро	Ашан	Фут-мережа	ЕКО	Власний вектор	Вектор локальних пріоритетів
Фоззі	1	1/2	1/5	4	3	1/3	0.858	0.101
АТБ	2	1	1/3	5	4	1/2	1.372	0.161
Метро	5	3	1	9	7	2	3.516	0.413
Ашан	1/4	1/5	1/9	1	1/3	1/5	0.268	0.032
Фут-мережа	1/3	1/4	1/7	3	1	1/5	0.439	0.052
ЕКО	3	2	1/2	5	5	1	2.054	0.241

$$\lambda_{\max} = 6.1565; IU=0.031; BU=0.025 (BU=2.5\%).$$

Відношення узгодженості BU=2.5 %, а отже, матриця добре узгоджена.

Зведемо усі отримані локальні ваги в одну таблицю.

Таблиця 21. Ваги критеріїв та ваги альтернатив відносно критеріїв.

Альтернативи	Ваги					
	Кількість магазинів 0.061	Товарооборот 0.521	Ротація продаж 0.023	Торгові умови 0.202	Доля полиці 0.152	Очікуваний ріст 0.042
Фоззі	0.240	0.244	0.066	0.172	0.096	0.101
АТБ	0.530	0.429	0.032	0.391	0.096	0.161
Метро	0.046	0.093	0.218	0.059	0.361	0.413
Ашан	0.032	0.164	0.538	0.235	0.029	0.032
Фут-мережа	0.066	0.021	0.042	0.021	0.387	0.052
ЕКО	0.086	0.049	0.105	0.122	0.031	0.241

Синтез локальних пріоритетів (обчислення глобальних пріоритетів).

Глобальними пріоритетами (вагами) альтернатив ієрархії називаються ваги відносно вершини ієрархії – головної мети прийняття рішення.

За методом дистрибутивного синтезу глобальні ваги альтернатив обчислюють як лінійну згортку локальних ваг елементів ієрархії:

$$w_i^{глоб} = \sum_{j=1}^M w_j^C r_{ij}, i = \overline{1, N},$$

де w_j^C – вага j -го критерію, r_{ij} – нормовані значення локальних ваг альтернатив відносно критеріїв, $\sum_{i=1}^N r_{ij} = 1 \forall j = \overline{1, M}$, N – кількість альтернатив, M – кількість критеріїв.

Продемонструємо як, наприклад, обчислюється глобальна вага альтернативи Фоззі.

$$w_1^{глоб} = 0.061 \times 0.240 + 0.521 \times 0.244 + 0.023 \times 0.066 + 0.202 \times 0.172 + 0.152 \times 0.096 + 0.042 \times 0.101 = 0.01464 + 0.127124 + 0.001518 + 0.034744 + 0.014592 + 0.004242 = 0.197.$$

Глобальні ваги альтернатив (торгових партнерів) за методом дистрибутивного синтезу наведені у табл. 22.

Таблиця 22. Глобальні ваги торгових партнерів відносно головної мети та їх ранжування.

Альтернативи	Глобальні ваги	Ранжування
Фоззі	0.197	II
АТБ	0.357	I
Метро	0.140	IV
Ашан	0.153	III
Фут-мережа	0.081	V
ЕКО	0.073	VI

Отже, найбільш пріоритетною альтернативою за оцінками експерта є торговий партнер АТБ. На другому місці – Фоззі, на третьому місці – Ашан, на четвертому – Метро. Торгові партнери Фут-мережа та ЕКО є найменш пріоритетними і займають відповідно п'яте та шосте місця у ранжуванні.

Питання для підготовки до виконання лабораторної роботи 6.

1. Які базові принципи методу аналізу ієрархій існують?
2. На яких аксіомах базуються методи аналізу ієрархій? Охарактеризуйте їх.
3. Яка квадратна матриця A називається додатною обернено симетричною?
4. Яка додатна обернено симетрична матриця A називається узгодженою?
5. Яка квадратна матриця A називається не приводимою?
6. Чи є обернено симетрична матриця парних порівнянь A не приводимою?
7. Охарактеризуйте фундаментальну шкалу Сааті $1 \div 9$ переваги одного об'єкта над іншим.
8. Сформулюйте етапи методу аналізу ієрархій та охарактеризуйте їх.
9. Які обов'язкові вимоги повинні бути виконані при формуванні експертами матриці парних порівнянь?
10. Наведіть формулу обчислення індексу узгодженості $IU(CI)$ для матриці парних порівнянь A .
11. Наведіть формулу обчислення відношення узгодженості $BV(CR)$ для матриці парних порівнянь A .
12. Яким чином обчислили випадкові індекси узгодженості $MRCI$ для матриць парних порівнянь різних розмірів?
13. Які методи існують для знаходження головного власного вектора матриці парних порівнянь?
14. Наведіть формулу обчислення геометричного індексу узгодженості GCI для матриці парних порівнянь A .
15. Наведіть формулу обчислення наближеного значення максимального власного числа λ_{\max} матриці парних порівнянь A .
16. Запишіть формулу обчислення глобальних ваг (пріоритетів) за методом дистрибутивного синтезу.
17. Сформулюйте теореми, на яких базуються алгоритми автоматичного підвищення узгодженості матриці парних порівнянь A .
18. Яким чином використовуються глобальні ваги для ранжування альтернатив?
19. Наведіть два алгоритми автоматичного підвищення узгодженості МПП A (метод зваженого арифметичного середнього, метод зваженого геометричного середнього).
20. Які існують критерії ефективності підвищення узгодженості матриці парних порівнянь?

21. Яке значення параметра α в алгоритмах автоматичного підвищення узгодженості МПП рекомендується вибирати, щоб зменшити відхилення МПП $A^{(k)}$ від початкової A ?

Лабораторна робота 6

Спочатку наведемо перелік класів задач, які розв'язуються із застосуванням методу аналізу ієрархій:

- 1) Задачі вибору;
- 2) Задачі оцінювання;
- 3) Задачі розподілу ресурсів;
- 4) Задачі аналізу співвідношення доходи/витрати;
- 5) Задачі прогнозування, планування та розвитку.

Задачі вибору полягають у визначенні однієї альтернативи із певної множини варіантів.

У *задачах оцінювання* обчислюються відносні ваги (пріоритети) кожної альтернативи. На відміну від задач вибору, у яких визначається одна найкраща альтернатива, в результаті розв'язання задач оцінювання визначаються ще порядок, інтервали і відношення між альтернативами. Знайдені пріоритети можуть також використовуватися в *задачах розподілу ресурсів*, які розглядаються як один з різновидів задач оцінювання, що доцільно виділити в окремий клас задач. Ресурси розподіляються пропорційно нормованим вагам альтернатив.

Задачі аналізу співвідношення доходи/витрати зазвичай формулюються у вигляді задач математичного програмування, в яких найчастіше максимізуються доходи при обмеженнях на допустимі витрати, або ж мінімізуються витрати при пороговому обмеженні на рівень доходів. У цих задачах МАІ використовується для визначення коефіцієнтів цільової функції чи функцій-обмежень.

В контексті розв'язання *задач прогнозування* МАІ застосовується в двох напрямках. Перший напрямок – це використання МАІ для об'єднання результатів прогнозів за декількома методами для отримання єдиного, комплексного прогнозу, а також для вибору методу прогнозування. Другий напрямок – це прогнозування альтернативних наслідків і отримання ймовірностей сценаріїв.

Окремим видом задач прогнозування, для розв'язання яких можна застосовувати МАІ є *аналітичне планування*. Аналітичне планування – це ітераційний процес послідовного прогнозування та вибору.

Приклади *задач розвитку*: оцінювання перспектив використання синтетичного палива для транспорту, прогнозування вигід від використання технологій водневого палива, прогнозування наслідків розміщення національної системи протиракетної оборони країни, оцінювання долі ринку компанії,

оцінювання освітніх інноваційних проектів, оцінювання інтелектуальних активів фірми, вибір оптимальних моделей альянсів між банками і страховими компаніями тощо.

Варіанти індивідуальних завдань до лабораторної роботи 6.

1. Студент вибирає конкретну проблему із переліку класів задач, які розв'язуються із застосуванням методу аналізу ієрархій. Формулює глобальну ціль (мету), формулює критерії, за якими будуть оцінюватися альтернативи (кількість критеріїв – не менше п'яти), описує альтернативи, які дають можливість досягнути поставлену глобальну мету (кількість альтернатив – не менше п'яти).

2. Побудувати ієрархічну структуру вибраної конкретної проблеми (як правило трьох-рівневу ієрархічну структуру).

3. Заповнити матрицю парних порівнянь критеріїв відносно головної мети.

4. Обчислити для отриманої МПП головний власний вектор, нормований власний вектор (ваги, локальні пріоритети), максимальне власне число λ_{\max} , індекс узгодженості ІУ та відношення узгодженості ВУ.

5. Реалізувати хоча б одну ітерацію обох алгоритмів автоматичного підвищення узгодженості МПП (метод зваженого геометричного середнього, метод зваженого арифметичного середнього) при значенні параметра $\alpha \in [0.5; 1)$.

Провести порівняльний аналіз отриманих результатів.

6. Заповнити МПП альтернатив відносно всіх критеріїв. Обчислити для отриманих МПП головний власний вектор, нормований власний вектор (ваги, локальні пріоритети), максимальне власне число λ_{\max} , індекс узгодженості ІУ та відношення узгодженості ВУ. Провести аналіз отриманих результатів.

7. Обчислити глобальні ваги (пріоритети) альтернатив. Сформулювати висновок щодо розв'язання поставленої проблеми.

ТЕМА № 7

РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ У ЗАДАЧАХ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Невизначеність – типова властивість практичних задач системного аналізу. Прикладні задачі, які не містять невизначеності, є скоріше винятком, ніж правилом. На практиці найпоширенішими є невизначеності цілей, ситуацій, конфліктів [1, 4].

Невизначеність цілей – це невизначеність вибору і досягнення цілей у багатокритеріальних задачах прийняття рішень.

Невизначеність знань про можливі ситуації – це невизначеність впливу неконтрольованих факторів на процеси практичної діяльності (*ситуаційна невизначеність*).

Невизначеність конфліктів – це невизначеність вибору цілей задумів і планів у процесі взаємодії партнерів або протидії конкурентів чи супротивників (*інформаційна невизначеність конфліктів*).

Задачі та методи розкриття невизначеності цілей.

При дослідженні реального об'єкта виникає потреба в узгодженні його цілей. При цьому для одних цілей оптимальні розв'язки відповідають мінімальному значенню відповідного критерію, а для інших – максимальному. Але деякими математичними прийомами ці задачі легко звести до єдиного типу критеріїв і одного типу задач оптимізації. Тобто, наприклад, приходимо до такої задачі багатокритеріальної оптимізації:

$$f_1(x) \rightarrow \max_{x \in D}, f_2(x) \rightarrow \max_{x \in D}, \dots, f_m(x) \rightarrow \max_{x \in D}, \quad (7.1)$$

де D – допустима множина невідомого вектора x . Оскільки функції $f_i(\cdot), i \in \overline{1, m}$ в основному є різними за природою, то максимального значення кожна функція досягає для свого значення вектора x , і майже неможливо (окрім тривіального випадку, коли глобальні максимуми усіх функцій на допустимій множині D однакові) знайти таке значення вектора x^0 , для якого умови (7.1) будуть виконуватися для усіх критеріїв. Звідси випливає задача знаходження такого значення вектора x^0 , за якого забезпечуватиметься раціональний компроміс заданих цілей. Для знаходження раціонального компромісу заданих цілей існує два підходи:

- *перший підхід* – виключити з аналізу заздалегідь неприйнятні варіанти;
- *другий підхід* – знайти способи зведення багатоцільової задачі до типової задачі оптимізації з одним критерієм.

Розкриття невизначеності цілей на підставі принципу Парето.

В основі першого підходу лежить ідея, запропонована Парето: зменшити множину початкових варіантів, вилучивши з аналізу заздалегідь непридатні варіанти. Припустимо, що вибрано вектор $x^* \in D$. Робимо інший вибір $\tilde{x} \in D$ такий, що для усіх цільових функцій виконуються нерівності:

$$f_j(\tilde{x}) \geq f_j(x^*), j \in \overline{1, m}, \quad (7.2)$$

причому хоча б одна з нерівностей є строгою. Очевидно, що вибір вектора \tilde{x} є кращий за x^* у сенсі величини значень цільових функцій. Тому усі вектори x^* , для яких виконується умова (7.2), потрібно вилучити з цього аналізу. Множину усіх таких значень векторів x^* , для яких неможливо підібрати вектори \tilde{x} з умови (7.2), називають *множиною Парето*, а вектор x^* – *неполіпшуваним вектором результатів (вектором Парето)*.

Нижче більш детально опишемо підхід до знаходження множини Парето. Нехай

$$f = \{f_j(x) : j \in \overline{1, m}, x \in D\}, D = \{x : x^- \leq x \leq x^+\},$$

де x^- та x^+ є відомі вектори. Знайдемо таку множину Γ значень векторів $x^* \in D$, що поділяє початкову множину D на дві підмножини: Π і \bar{D} , для яких виконується:

$$\Pi \cup \bar{D} = D, \Pi \cap \bar{D} = \emptyset. \quad (7.3)$$

Підмножина Π складається із таких векторів $x' \in D$, для яких при усіх $j \in \overline{1, m}$ виконується нерівність

$$f_j(x') \geq f_j(x^*) = f_j^*. \quad (7.4)$$

Підмножину Π визначає співвідношення

$$\Pi = \{x : x = x', x' \in D, f_j(x') \geq f_j(x^*), j \in \overline{1, m}\},$$

а підмножина \bar{D} описується наступним чином

$$\bar{D} = \{x : x = x'', x'' \in D, f_j(x'') < f_j(x^*), j \in \overline{1, m}\}.$$

Вектор $x^* \in D$ – *неполіпшуваний вектор результатів* для множини f , а множина Π , яка задовольняє умову (7.4) – *множина Парето*. Множина Γ – *межа множини Парето* і належить до неї. Згідно з формулою (7.3) маємо: $\bar{D} = D \setminus \Pi$. Тому усі варіанти розв'язків, які належать підмножині \bar{D} , вилучають з розгляду.

Згідно з принципом Парето раціональний розв'язок задачі багатокритеріальної задачі (раціональний компроміс у багатоцільовій задачі) необхідно шукати серед векторів x , які належать множині Парето. Принцип Парето не дає змогу виділити один-єдиний розв'язок, а сприяє звуженню множини альтернативних розв'язків. Побудова множини Парето дає змогу отримати додаткову інформацію, що сприяє якісній оцінці під час зіставлення різних варіантів. Який з цих варіантів кращий – визначає особа, яка приймає рішення (ОПР).

Метод технічних обмежень.

Деякі методи розкриття невизначеності цілей ґрунтуються на використанні апріорної інформації про задані цілі. Наприклад, у задачах проектування і планування часто задають певні нормативні обмеження зверху (загальна вартість, допустимі габарити, вага тощо) або обмеження знизу деяких технічних характеристик і показників (наприклад, показників надійності, міцності, довговічності тощо). Як обмеження зверху, так і обмеження знизу можна звести до однієї з форм. Нехай задано обмеження:

$$\begin{cases} f_i(x) \geq f_i^*, i \in \overline{1, m_0}, \\ f_i(x) \leq f_i^*, i \in \overline{m_0 + 1, m}. \end{cases} \quad (7.5)$$

Обмеження (7.5) можна подати або у вигляді обмежень зверху:

$$\begin{cases} -f_i(x) \leq -f_i^*, i \in \overline{1, m_0}, \\ f_i(x) \leq f_i^*, i \in \overline{m_0 + 1, m}, \end{cases}$$

або у вигляді обмежень знизу:

$$\begin{cases} f_i(x) \geq f_i^*, i \in \overline{1, m_0}, \\ -f_i(x) \geq -f_i^*, i \in \overline{m_0 + 1, m}. \end{cases}$$

Тепер припустимо, що на цільові функції накладено обмеження вигляду $f_i(x) \leq f_i^*, i \in \overline{1, m}$, або $f_i(x) \geq f_i^*, i \in \overline{1, m}$.

За цих обмежень потрібно забезпечити $f_i(x) \rightarrow \max_{x \in D}, i \in \overline{1, m}$.

Для такої постановки можливі різні варіанти розкриття невизначеностей цілей завдяки зведенню багатоцільової задачі до стандартної одно-цільової.

Варіант 1. Визначимо для кожного значення вектора $x \in D$ функцію

$$F_1(x) = \min_{i \in \overline{1, m}} (f_i(x) / f_i^*)$$

і будемо шукати такі значення $x^0 \in D$, які задовольняють умову $F_1(x^0) = \max_{x \in D} F_1(x)$. За такого формулювання задачі гарантовано, що у найгіршому випадку (який відповідає $\min_{i \in \{1, m\}} (f_i(x) / f_i^*)$) буде забезпечено максимальне значення $F_1(x)$. Така задача є *максимінною задачею оптимізації*.

Варіант 2. Визначимо для кожного значення вектора $x \in D$ функцію $F_2(x) = \max_{i \in \{1, m\}} (f_i(x) / f_i^*)$ і будемо шукати такі вектори $x^0 \in D$, за яких функція $F_2(x)$ прийматиме мінімальне значення: $F_2(x^0) = \min_{x \in D} F_2(x)$. За такого формулювання задачі гарантовано, що у найгіршому випадку (який відповідає максимально можливому відхиленню $f_i(x) / f_i^*$) буде забезпечено мінімальне значення функції $F_2(x)$. Така задача є *мінімаксною задачею оптимізації*.

Відмінність варіантів 1 і 2 полягає в тому, що вони стосуються різних умов оптимальності. Варіант 1 забезпечує максимально можливе відхилення серед усіх функцій $f_i(x)$ від їх заданих граничних значень f_i^* , оскільки воно забезпечене для найгіршого випадку, що характеризується співвідношенням

$$F_1(x^0) = \max_{x \in D} \min_{i \in \{1, m\}} (f_i(x) / f_i^*).$$

Варіант 2 є оберненою задачею – задачею забезпечення мінімально можливого відхилення всіх функцій $f_i(x)$ від заданих граничних значень f_i^* . Такого відхилення досягають для найгіршого випадку за умови

$$F_2(x^0) = \min_{x \in D} \max_{i \in \{1, m\}} (f_i(x) / f_i^*).$$

Зауважимо, що звуження множини Парето здійснюється за допомогою принципів *максиміна* або *мінімакса*, чи при їх одночасному використанні (при звуженні інтервалу з двох сторін).

Розкриття невизначеності дії партнера або супротивника.

Цей тип невизначеності властивий для активної практичної діяльності людей у процесі розроблення і здійснення ними стратегій досягнення певних цілей. Його характеризує інформаційна невизначеність, яка виникає в ході активних дій або протидій учасників і повністю не контролюється. До цього виду невизначеності призводять стратегії, в яких взаємодіють два чи більше партнерів у певній сфері діяльності або протидіють конкуренти чи супротивники. Прикладами таких задач є задачі виробничого планування й прогнозування діяльності фірм з урахуванням дії партнерів або протидії конкурентів; задачі національної безпеки за умов конфлікту різних цілей та інтересів; задачі

планування заходів і дій щодо запобігання нелегальній міграції; задачі забезпечення військової та економічної безпеки тощо.

Задачі взаємодії двох партнерів.

Нехай ми розглядаємо деякий абстрактний ринок, на якому взаємодіють два суб'єкти, причому їхні відносини не є такими, що протидіють один одному. Кожний із суб'єктів має свою цільову функцію:

$f_1(x^1, x^2)$ – цільова функція першого суб'єкта, а x^1 – параметри, якими керує перший суб'єкт;

$f_2(x^1, x^2)$ – цільова функція другого суб'єкта, а x^2 – параметри, якими керує другий суб'єкт.

При цьому передбачається, що між суб'єктами відбувається обмін інформацією тільки про обсяги виробництва та інші показники, які характеризуються векторами x^1 та x^2 , але при цьому не повідомляються функції цілі. Принцип гарантованого результату полягає в тому, що буде знайдено найкращий розв'язок для найгіршого випадку.

Суб'єкт 1 вибирає свої параметри x^1 та передає їх суб'єкту 2. Той, маючи інформацію про значення параметрів x^1 , вибирає для себе таку стратегію, що буде максимізувати його цільову функцію, і передає обрані ним значення параметрів x^2 суб'єкту 1. Той, у свою чергу, коригує свої параметри, максимізуючи свою цільову функцію. При такому підході з'являється гарантія того, що навіть при виборі другим суб'єктом таких параметрів, які призводять до зменшення цільової функції першого суб'єкта, суб'єкт 1 має шанс підібрати свої параметри таким чином, щоб одержати найкращий результат.

Задача протидії двох суб'єктів.

У задачі протидії можна виділити кілька *принципових особливостей*:

- 1) сторони не тільки не повідомляють один одному про будь-які свої дії, а й свідомо вносять дезінформацію як про свої цілі, так і про ситуації;
- 2) ситуації залежать не тільки від природних умов, а й від дій сторін;
- 3) дії сторін приводять до змін параметрів і цілей;
- 4) цілі сторін є протилежними;

Кожен учасник має свою функцію цілі вигляду $f_i(x^1, x^2), i \in \overline{1, 2}$.

Розв'язування цієї задачі проводиться у двох напрямках:

1. Орієнтування на гарантований результат у найгіршому випадку;
2. Орієнтування на найбільш ймовірний варіант поведінки сторони, яка протидіє, та забезпечення найкращого для себе результату за цих умов.

У першому випадку кожний суб'єкт прагне забезпечити собі певні гарантовані результати за найгірших умов, які створені активною протидією конкурента чи супротивника. Для досягнення гарантованого результату кожен суб'єкт виходить із таких умов: супротивник вибрав для себе такі параметри дії, які завдають стороні, що протидіє, найбільших збитків; з огляду на першу умову супротивник вибирає такі параметри власної діяльності, щоб у найгіршій ситуації мати максимально можливі для себе значення цільової функції.

У такому разі гарантований результат f_1^* для першого суб'єкта виражатиме співвідношення

$$f_1^* = \max_{x^1} \min_{x^2} f_1(x^1, x^2),$$

а для другого суб'єкта: $f_2^* = \max_{x^2} \min_{x^1} f_2(x^1, x^2)$.

Пошук гарантованого результату може здійснюватися трьома основними методами: табличним (пошук максмін та мінмакс), класичним (дослідження функцій на екстремум) та графічним (дослідження графіків цільових функцій).

Питання для підготовки до виконання лабораторної роботи 7.

1. Які типи невизначеностей є найпоширенішими у задачах системного аналізу?
2. Сформулюйте задачу багатокритеріальної оптимізації.
3. Які підходи існують для знаходження раціонального компромісу заданих цілей?
4. У чому полягає суть підходу до розкриття невизначеності цілей на підставі принципу Парето?
5. Який вектор називають не поліпшуваним вектором результатів (вектором Парето)?
6. Чи дає принцип Парето змогу виділити один-єдиний розв'язок,?
7. За допомогою яких принципів здійснюється звуження множини Парето?
8. В чому полягає суть методу технічних обмежень?
9. З якою метою використовують апріорну інформацію про задані в технічному завданні обмеження?
10. Якими принциповими особливостями обґрунтовано вибір критеріїв для розв'язування оптимізаційних задач?
11. Які особливості принципу гарантованого результату, його переваги та недоліки?
12. У чому полягає стратегія задачі розкриття невизначеності протидії двох суб'єктів?

13. У яких напрямках проводиться розв'язування задачі протидії двох суб'єктів ?
14. Якими трьома основними методами здійснюється пошук гарантованого результату?

Лабораторна робота 7

I. Задача розкриття невизначеностей цілей

Задано:

- 1) аналітичні залежності цільових функцій $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$;
- 2) порогові обмеження цільових функцій $f_1^*, f_2^*, \dots, f_m^*$;
- 3) допустима множина D .

Потрібно:

- 1) знайти множину Парето у заданій множині і визначити умови раціонального компромісу для заданих у варіанті цільових функцій, враховуючи порогові обмеження;
- 2) звузити множину Парето, використовуючи прийом технічних обмежень (виконати мінімаксу та максимінну оптимізацію на множині Парето);
- 3) зробити письмовий звіт про виконану роботу.

Продемонструємо виконання лабораторної роботи при $m = 2$ та $x \in R^1$.

Нехай потрібно знайти та звузити множину Парето і визначити умови раціонального компромісу для заданих цільових функцій:

$$f_1(x) = -2x^2 - 7x + 60, \quad f_2(x) = 10x^2 - 20, \quad (7.6)$$

допустимої множини $x \in [1; 4]$, та технічних обмежень:

$$f_1(x) \geq 30; \quad f_2(x) \geq 10; \quad (f_1^* = 30; f_2^* = 10). \quad (7.7)$$

Із формул (7.6), (7.7) з врахуванням допустимої множини отримуємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} -2x^2 - 7x + 60 \geq 30, \\ 10x^2 - 20 \geq 10, \\ 1 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

розв'язавши яку знайдемо множину Парето $x \in [\sqrt{3}; 2.5]$. Тепер побудуємо

таблицю 1 значень функцій $f_1(x)/f_1^*; f_2(x)/f_2^*; \min_x \max_{i \in \{1,2\}} (f_i(x)/f_i^*)$;

$\max_x \min_{i \in \{1,2\}} (f_i(x) / f_i^*)$ в дискретних точках (з кроком сітки 0.1) на проміжку $[1.7; 2.5]$.

Таблиця 1. Значення функцій $f_1(x) / f_1^*; f_2(x) / f_2^*; \min_x \max_{i \in \{1,2\}} (f_i(x) / f_i^*)$; $\max_x \min_{i \in \{1,2\}} (f_i(x) / f_i^*)$ з кроком дискретизації 0.1.

x	$\frac{f_1(x)}{f_1^*}$	$\frac{f_2(x)}{f_2^*}$	$\max_{i \in \{1,2\}} \frac{f_i(x)}{f_i^*}$	$\min_x \max_{i \in \{1,2\}} \frac{f_i(x)}{f_i^*}$	$\min_{i \in \{1,2\}} \frac{f_i(x)}{f_i^*}$	$\max_x \min_{i \in \{1,2\}} \frac{f_i(x)}{f_i^*}$
1.7	1.4107	0.89	1.4107		0.89	
1.8	1.364	1.24	1.364	1.364	1.24	
1.9	1.316	1.61	1.61		1.316	1.316
2.0	1.2667	2	2		1.2667	
2.1	1.216	2.41	2.41		1.216	
2.2	1.164	2.84	2.84		1.164	
2.3	1.1107	3.29	3.29		1.1107	
2.4	1.056	3.76	3.76		1.056	
2.5	1	4.25	4.25		1	

Аналізуючи результати наведені в табл. 1, робимо висновок про необхідність проведення додаткових обчислень з меншим кроком дискретизації 0.01 на проміжку $[1.8; 1.9]$.

Таблиця 2. Значення функцій $f_1(x) / f_1^*; f_2(x) / f_2^*; \min_x \max_{i \in \{1,2\}} (f_i(x) / f_i^*)$; $\max_x \min_{i \in \{1,2\}} (f_i(x) / f_i^*)$ з кроком дискретизації 0.01

x	$\frac{f_1(x)}{f_1^*}$	$\frac{f_2(x)}{f_2^*}$	$\max_{i \in \{1,2\}} \frac{f_i(x)}{f_i^*}$	$\min_x \max_{i \in \{1,2\}} \frac{f_i(x)}{f_i^*}$	$\min_{i \in \{1,2\}} \frac{f_i(x)}{f_i^*}$	$\max_x \min_{i \in \{1,2\}} \frac{f_i(x)}{f_i^*}$
1.81	1.3593	1.2761	1.3593		1.2761	
1.82	1.3545	1.3121	1.3545		1.3121	
1.83	1.3497	1.3489	1.3497	1.3497	1.3489	1.3489
1.84	1.3450	1.3856	1.3856		1.3450	
1.85	1.3402	1.4225	1.4225		1.3402	

З табл. 2 бачимо, що як раціональний компроміс потрібно вибрати $x^0 = 1.83$. Значення цільових функцій в цій точці такі: $f_1(x^0) = 40.492$; $f_2(x^0) = 13.489$.

II. Задача розкриття невизначеності протидії двох суб'єктів

Задано:

- 1) цільову функцію $f_1(x_1, x_2)$ першого суб'єкта та область визначення $x_1 \in D_1$ стратегії першого суб'єкта;
- 2) цільову функцію $f_2(x_1, x_2)$ другого суб'єкта та область визначення $x_2 \in D_2$ стратегії другого суб'єкта.

Потрібно:

- 1) визначити гарантований результат кожного гравця табличним методом (при заданому кроці дискретної сітки); класичним методом (якщо це можливо); (за бажанням студента і графічним методом).
- 2) знайти множину Парето з умов: $f_1(x_1, x_2) \geq f_1^*$, $f_2(x_1, x_2) \geq f_2^*$, де значення $f_1^* = \max_{x_1} \min_{x_2} f_1(x_1, x_2)$, $f_2^* = \max_{x_2} \min_{x_1} f_2(x_1, x_2)$ обчислені в попередньому пункті 1) табличним методом;
- 3) визначити оптимальні значення x_1^* та x_2^* , за яких $\Delta = \min_{x_1, x_2} \max_{i \in \overline{1,2}} \Delta_i(x_1, x_2)$, де $\Delta_i(x_1, x_2) = |f_i(x_1, x_2) - f_i^*|, i \in \overline{1,2}$.

Задаємо дві цільові функції для суб'єктів 1 та 2:

$$f_1(x_1, x_2) = 6x_1^2 - 12x_1 + 4x_2^2 + 8x_2 + 40;$$

$$f_2(x_1, x_2) = -8x_1^2 + 16x_1 - 3x_2^2 + 6x_2 + 50;$$

та області визначення їх стратегій: $x_1 \in [-2; 2]$; $x_2 \in [-2; 2]$.

Потрібно знайти оптимальні розв'язки для цих суб'єктів з врахуванням обмежень:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) \geq f_1^*, \\ f_2(x_1, x_2) \geq f_2^*, \end{cases} \quad (7.8)$$

де

$$f_1^* = \max_{x_1} \min_{x_2} f_1(x_1, x_2); \quad f_2^* = \max_{x_2} \min_{x_1} f_2(x_1, x_2). \quad (7.9)$$

Спочатку обчислимо значення f_1^* , f_2^* , використовуючи табличний метод (крок сітки задано), згідно співвідношень (7.9). Відповідні результати наведена у таблицях 3 та 4.

Таблиця 3. Обчислення гарантованого результату f_1^*

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$	$\min_{x_2} f_1(x_1, x_2)$	$\max_{x_1} \min_{x_2} f_1(x_1, x_2)$
-2	-2	88	84	84
	-1	84		
	0	88		
	1	100		

	2	120		
-1	-2	58	54	
	-1	54		
	0	58		
	1	70		
	2	90		
0	-2	40	36	
	-1	36		
	0	40		
	1	52		
	2	72		
1	-2	34	30	
	-1	30		
	0	34		
	1	46		
	2	66		
2	-2	40	36	
	-1	36		
	0	40		
	1	52		
	2	72		

Із табл. 3 випливає, що $f_1^* = \max_{x_1} \min_{x_2} f_1(x_1, x_2) = f_1(-2, -1) = 84$.

Таблиця 4. Обчислення гарантованого результату f_2^*

x_2	x_1	$f_2(x_1, x_2)$	$\min_{x_1} f_2(x_1, x_2)$	$\max_{x_2} \min_{x_1} f_2(x_1, x_2)$
-2	-2	-34	-34	-11
	-1	2		
	0	26		
	1	34		
	2	26		
-1	-2	-23	-23	
	-1	17		
	0	41		
	1	49		
	2	41		
0	-2	-14	-14	
	-1	26		
	0	50		
	1	58		
	2	50		
1	-2	-11	-11	
	-1	29		
	0	53		

	1	61		
	2	53		
2	-2	-14	-14	
	-1	26		
	0	50		
	1	58		
	2	50		

Із табл. 4 випливає, що $f_2^* = \max_{x_2} \min_{x_1} f_2(x_1, x_2) = f_2(-2, 1) = -11$.

Тепер обчислимо гарантовані значення f_1^* та f_2^* , використовуючи класичний метод дослідження екстремумів функцій при обмеженнях.

Спочатку дослідимо функцію $f_1(x_1, x_2)$. Знаходимо частинну похідну за змінною x_2 та прирівнюємо її до нуля: $\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 8x_2 + 8 = 0$. Розв'язок цього

рівняння $x_2 = -1$. Враховуючи вираз для функції $f_1(x_1, x_2)$ робимо висновок, що мінімум досягається при $x_2 = -1$. Для знаходження значення x_1 , за якого функція f_1 досягатиме максимуму підставимо одержане значення $x_2 = -1$ та знайдемо частинну похідну функції $f_1(x_1, -1)$ за змінною x_1 і прирівняємо її до нуля:

$\frac{\partial f_1(x_1, -1)}{\partial x_1} = 12x_1 - 12 = 0$. Корінь цього рівняння: $x_1 = 1$. Це є точка мінімуму. А

максимуму функція $f_1(x_1, -1)$ за змінною x_1 приймає при $x_1 = -2$. Таким чином знайшли $f_1^* = f_1(-2, -1) = 84$.

Тепер досліджуємо функцію $f_2(x_1, x_2)$. Знаходимо частинну похідну за змінною x_1 та прирівнюємо її до нуля: $\frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -16x_1 + 16 = 0$. Розв'язок

цього рівняння $x_1 = -1$ (у цій точці досягається максимум функції f_2).

Враховуючи вираз для функції $f_2(x_1, x_2)$ робимо висновок, що мінімум досягається при $x_1 = -2$. Для знаходження значення x_2 , за якого функція f_2 досягатиме максимуму підставимо одержане значення $x_1 = -2$ та знайдемо частинну похідну функції $f_2(-2, x_2)$ за змінною x_2 і прирівняємо її до нуля:

$\frac{\partial f_2(-2, x_2)}{\partial x_2} = -6x_2 + 6 = 0$. Корінь цього рівняння: $x_2 = 1$. Це є точка максимуму

функції $f_2(-2, x_2)$ за змінною x_2 . Таким чином, знайшли $f_2^* = f_2(-2, 1) = -11$.

Знаходимо множину Парето як розв'язки на допустимій множині системи нерівностей:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) \geq f_1^*, \\ f_2(x_1, x_2) \geq f_2^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1^2 - 12x_1 + 4x_2^2 + 8x_2 + 40 \geq 84, \\ -8x_1^2 + 16x_1 - 3x_2^2 + 6x_2 + 50 \geq -11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x_1 - 1)^2}{3^2} + \frac{(x_2 + 1)^2}{(\sqrt{13.5})^2} \geq 1, \\ \frac{(x_1 - 1)^2}{3^2} + \frac{(x_2 - 1)^2}{(\sqrt{24})^2} \leq 1. \end{cases}$$

На рис.7.1 зображені два еліпси:

$$E1: \frac{(x_1 - 1)^2}{3^2} + \frac{(x_2 + 1)^2}{(\sqrt{13.5})^2} = 1 \text{ та } E2: \frac{(x_1 - 1)^2}{3^2} + \frac{(x_2 - 1)^2}{(\sqrt{24})^2} = 1.$$

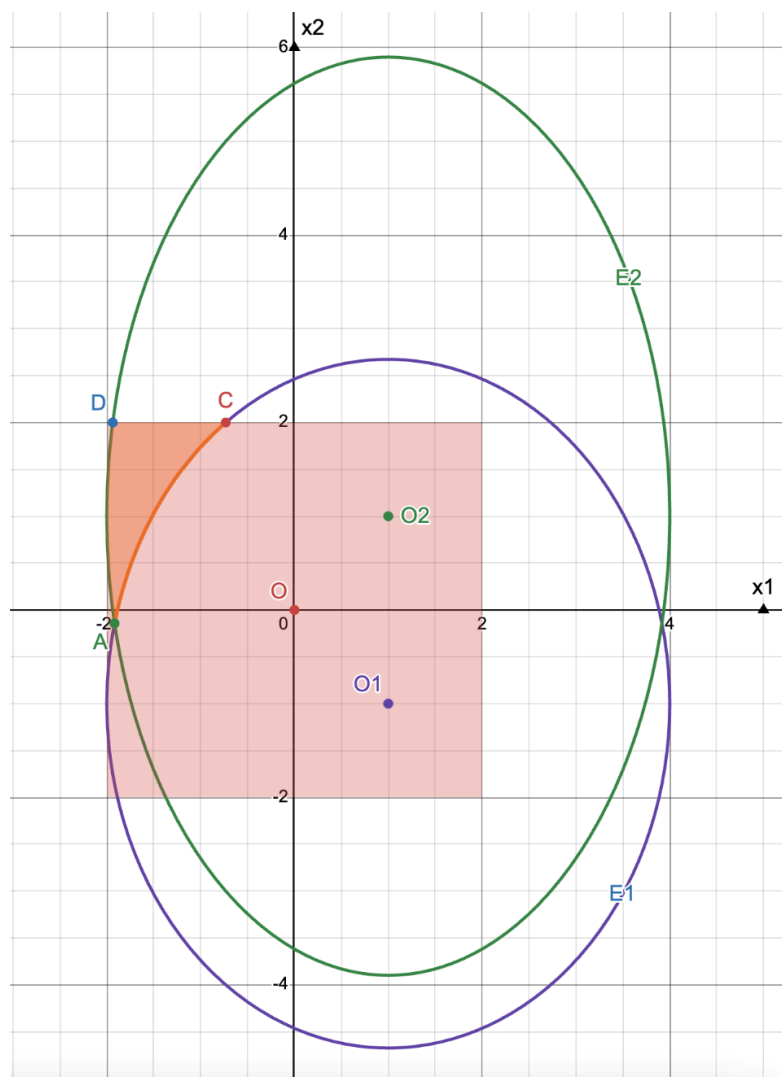


Рис. 7.1. Множина Парето.

Множиною Парето є криволінійний трикутник ADC , де точка A є точкою перетину еліпсів $E1$ та $E2$ у допустимій області; точка D є точкою перетину прямої $x_2 = 2$ та еліпса $E2$ у допустимій області; точка C є точкою перетину прямої $x_2 = 2$ та еліпса $E1$ у допустимій області. Координати цих точок такі:

$$A = \left(1 - \frac{\sqrt{417}}{7}; -\frac{1}{7}\right) \approx (-1.92; -0.14), \quad D = \left(1 - \sqrt{\frac{69}{8}}; 2\right) \approx (-1.94; 2),$$

$$C = \left(1 - \sqrt{\frac{45}{8}}; 2\right) \approx (-1.37; 2).$$

Значення x_1^0 та x_2^0 , за яких $\Delta = \min_{x_1, x_2} \max_i \Delta_i = 0$, де $\Delta_i = |f_i(x_1, x_2) - f_i^*|$, $i \in \overline{1, 2}$ є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 6x_1^2 - 12x_1 + 4x_2^2 + 8x_2 - 44 = 0, \\ -8x_1^2 + 16x_1 - 3x_2^2 + 6x_2 + 61 = 0 \end{cases}$$

і досягається у точці $A = \left(1 - \frac{\sqrt{417}}{7}; -\frac{1}{7}\right)$.

Варіанти індивідуальних завдань до лабораторної роботи 7.

У табл. 5 наведено варіанти індивідуальних завдань для задачі розкриття невизначеності цілей.

Таблиця 5. Варіанти індивідуальних завдань для задачі розкриття невизначеності цілей.

№	Цільові функції		Обмеження		Межі для x	
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_1^*	f_2^*		
1	$1.5x^2 + 1.6x - 5$	$-0.5x^2 + 275.5$	101	163	5	20
2	$5x^2 + 1.3x + 7$	$-5x^2 + 105$	15.3	80	0	7
3	$(5x^2 + 30) / (-2x + 24)$	$-7x + 40$	2.5	22	1	6
4	$100 \log x$	$-x^2 + 100$	60	19	0	10
5	$-6x^2 + 7x + 30$	$3x + 10$	21	11	0	4
6	2^x	$-x^2 + 9$	2	6	0	4
7	$\sin x$	$-x^2 + 4$	$\sqrt{2} / 2$	0.5	0	2
8	$x^3 - 3x + 2$	$-x^2 + 16$	3	1	2	4
9	$-3x^2 + 6x + 20$	$9 \ln x + 9$	20	10	1	5
10	$x^2 + 6x + 11$	$-x^2 + 6$	3	2	0	3
11	2^x	$x^3 + 2x + 5$	5	15	1	5
12	$0.8 \exp(-2(x-3)^2)$	$x^2 - 6x + 10$	0.2	1	1	5

13	$20/x$	$-x^{1.5} + 6x + 5$	5	12	1	5
14	$0.8\exp(-2(x-3)^2)$	$2/x + 0.25$	0.4	0.5	1	5
15	3^{x+1}	$-3x^2 + 4x + 5$	1	3	1	3
16	$-0.75x + 3$	$x^2 + 6x - 5$	1	2	0	5
17	$\sqrt{5x^2 + 10}$	$-0.5x^2 + 3$	10	6	1	6
18	$2x^2 + 4x - 7$	$-0.1x^2 + 50$	5	23	1	4
19	$-x^3 + 51x^2 - 9x + 10$	$-1/x + 3$	1	2.333	0	4
20	$7 - \exp(2x - 12)$	$\sqrt{x - 4} + 3$	6	3	5	8
21	$(2x^2 + 15)/(9x + 5)$	$-0.5x^2 + 5x + 11$	9	17	4	11
22	$15\sin(x + 1)$	$10\cos(2x - 2.4) + 12$	12.82	16	6	8
23	$\sin(0.53x - 4)$	$0.134x^2 - 1$	0.35	1.4	0	5.5
24	$-x$	$\sqrt{x - 4} - 1$	-5	1.3	4	10
25	$x^2/3$	$10/\lg(x + 5)$	3	10	0	10
26	$3\sqrt{x}$	$1/(x + 1) + 4$	6	4.1	0	10
27	$-2x^2 + 6x + 34$	$3.5x^2 - 5x + 17$	10	25	1	8
28	$15\sin(x - 3) - 10\ln x + 34$	$5\sin x + 2x$	10	6	4	9
29	$10x^2 + 16x - 15$	$-0.5x^2 + 25.5$	11	13	0	5
30	$\log x + x - 1$	$-2x^2 + 455$	10	5	0.001	20
31	$20\sin x + 20$	$6x + 15$	20	25	-6	6
32	$8 - \sqrt{x}$	$\sqrt{2x}$	6	2	1	10
33	$2x^3 - x^2 + 5$	$-\exp(6x - 2) - 12\sqrt{x} + 56$	12	25	0	8
34	$\ln(100x)$	$4\exp x$	5	10	0.01	5
35	$3\ln x - 5x^2 + 53$	$5x^2 + 2x - 5$	4	3	1	3
36	$30/x$	$-x^2 - 3x + 25$	3	2	1	3
37	$0.2x^2 - 3x + 8$	$3\cos(2x) + 3$	2	0.2	0	10
38	$2^x + 3$	$-x^2 + 45$	5	5	1	10
39	$2\cos x + 5$	$-3\sin x + 3$	2	4	0	7
40	$(4x - 8)(3x - 9) + 4$	$(3x - 7)(2x - 3.5) + 10$	20	25	0	5
41	$0.5x^2 + 10x + 0.5$	$-3x^2 + 74$	22.5	47	0	6

У табл. 6 наведено варіанти індивідуальних завдань для задачі протидії двох суб'єктів.

Таблиця 6. Варіанти індивідуальних завдань для задачі протидії двох суб'єктів.

№	Цільові функції суб'єктів		Крок сітки	Межі зміни змінних		
	$f_1(x_1, x_2)$	$f_2(x_1, x_2)$		x_1	x_2	
1	$f_1(x_1, x_2)$	$8x_1^2 + 16x_1 + 6x_2^2 - 12x_2 + 50$	0.01	x_1	-2	2
	$f_2(x_1, x_2)$	$11x_1^2 - 17x_1 - 8x_2^2 + 24x_2 + 4$	0.01	x_2	-2	2
2	$f_1(x_1, x_2)$	$3x_1^2 + 6x_1x_2 - 12x_2 + 72$	0.01	x_1	-3	0
	$f_2(x_1, x_2)$	$-11x_1^2x_2 + 17x_1 + 8x_2^2 - 16x_2 + 100$	0.01	x_2	0	3
3	$f_1(x_1, x_2)$	$(-2x_1^3 - 4x_1^2 - 24x_1 + 17)(2x_2^2 - 10x_2 + 15)$	0.02	x_1	1	8
	$f_2(x_1, x_2)$	$(3x_2^2 - 18x_1x_2 - 33x_2 - 12)(x_1^2 - 6x_1 + 13)$	0.02	x_2	0	6
4	$f_1(x_1, x_2)$	$3x_1^2 + 6x_1x_2 - 12x_2 - 72$	0.01	x_1	0	3
	$f_2(x_1, x_2)$	$10x_1^2x_2 - 32x_1 + 4x_2^2 - 8x_2 + 64$	0.01	x_2	0	2
5	$f_1(x_1, x_2)$	$5x_1^2 - 12x_1x_2 + 3x_2^2 + 15$	0.01	x_1	0	3
	$f_2(x_1, x_2)$	$(-6x_1^3 + 15x_2^2 - 7x_2 + 10)(5x_1^2 - 8x_1 + 7)$	0.01	x_2	0	2
6	$f_1(x_1, x_2)$	$5x_1^2 + 6x_1x_2^2 - 7x_2^2 + 40$	0.02	x_1	0	3
	$f_2(x_1, x_2)$	$10x_1^2x_2 - 32x_1 + 4x_2^2 - 8x_2 + 64$	0.01	x_2	0	2
7	$f_1(x_1, x_2)$	$(-6x_1^2 + 10x_1 + 6)(-2x_2^2 + 5x_2 + 8)$	0.01	x_1	0	2
	$f_2(x_1, x_2)$	$(4x_2^2 - 9x_2 + 11)(-3x_1^2 + 15)$	0.01	x_2	-1	1
8	$f_1(x_1, x_2)$	$6x_1^2 - 12x_1 + 4x_2^2 + 8x_2 + 40$	0.01	x_1	-2	2
	$f_2(x_1, x_2)$	$-8x_1^2 + 16x_1 - 3x_2^2 + 6x_2 + 50$	0.01	x_2	-2	2
9	$f_1(x_1, x_2)$	$\cos^2\left(3\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$	0.01	x_1	0	2
	$f_2(x_1, x_2)$	$\sin\sqrt{(x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2}$	0.01	x_2	0	2
10	$f_1(x_1, x_2)$	$-6x_1^2 + 15x_1 - x_2^2 - 3x_2 + 42$	0.01	x_1	-1	1
	$f_2(x_1, x_2)$	$9x_1^2 + 2x_1 - 5x_2^2 + 17x_2 + 7$	0.01	x_2	-2	2
11	$f_1(x_1, x_2)$	$-20x_1^2 + 7x_1 - 3x_1x_2^2 + 46x_2 + 12$	0.01	x_1	0	3
	$f_2(x_1, x_2)$	$15x_1^2x_2 - 32x_1 + 18x_2^2 - 8x_2 + 123$	0.01	x_2	0	2
12	$f_1(x_1, x_2)$	$32x_1^2 + x_1 + 10x_2^2 - 14.5x_2 + 52$	0.01	x_1	2	6
	$f_2(x_1, x_2)$	$10x_1^2 - 17.5x_1 - 18x_2^2 + 27x_2 + 3$	0.02	x_2	1	10
13	$f_1(x_1, x_2)$	$6x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_2^2 + 9$	0.01	x_1	2	5
	$f_2(x_1, x_2)$	$-15x_1x_2 - 2x_2 + 2x_2^2 - 5x_1^2 + 20$	0.01	x_2	-3	1
14	$f_1(x_1, x_2)$	$5x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 + 10$	0.01	x_1	-2	2
	$f_2(x_1, x_2)$	$-2x_1x_2 - 2x_2^2 - 4x_1^2 + 20$	0.01	x_2	-2	2
15	$f_1(x_1, x_2)$	$2x_1^2 - 3x_2 + 3x_2^2 + 10$	0.01	x_1	-1	1
	$f_2(x_1, x_2)$	$2x_1 - 2x_2^2 + x_1^2 + 4$	0.01	x_2	-1	1
16	$f_1(x_1, x_2)$	$-x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1^2 + 8x_1$	0.01	x_1	0	3

	$f_2(x_1, x_2)$	$2x_1^2 - 10x_1x_2 + 4x_2^2 + 12x_2$	0.02	x_2	0	4
17	$f_1(x_1, x_2)$	$-x_1^2x_2^2 + 2x_2^2 + 4x_1^3 - 10$	0.01	x_1	0	3
	$f_2(x_1, x_2)$	$4x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2 + 5$	0.01	x_2	0	4
18	$f_1(x_1, x_2)$	$-10x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_1^2 + 8$	0.02	x_1	0	5
	$f_2(x_1, x_2)$	$-7x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1$	0.02	x_2	0	6
19	$f_1(x_1, x_2)$	$7x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1^2 - 12$	0.02	x_1	2	9
	$f_2(x_1, x_2)$	$x_1^2 - 3x_1x_2 + 9x_2^2 + 20$	0.02	x_2	1	6
20	$f_1(x_1, x_2)$	$-3x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2 + 9x_1 + 1$	0.01	x_1	0	3
	$f_2(x_1, x_2)$	$(-2x_2^3 + 5x_2^2 - 9)(-2x_1^2 + 5x_1 + 10)$	0.01	x_2	0	2
21	$f_1(x_1, x_2)$	$3x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2 + 1$	0.01	x_1	0	3
	$f_2(x_1, x_2)$	$(-6x_1^3 - 5x_2^2 + 10x_2 - 8)(-2x_1^2 + 5x_1 + 1)$	0.01	x_2	0	2
22	$f_1(x_1, x_2)$	$-x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2 + 1$	0.01	x_1	0	3
	$f_2(x_1, x_2)$	$-3x_2^5 - 2x_1 + 10x_2^3 + 1$	0.01	x_2	0	2
23	$f_1(x_1, x_2)$	$0.9x_2^2x_1 + 0.1x_1^3 - 0.17\ln(x_1 + 1)$	0.02	x_1	0	5
	$f_2(x_1, x_2)$	$7x_1^2 - 7.17x_1x_2^2 + 3.9x_1^2x_2 - 15x_1$	0.02	x_2	0	4
24	$f_1(x_1, x_2)$	$\cos x_1 - x_2$	0.01	x_1	0	3
	$f_2(x_1, x_2)$	$\sin x_1 + x_2$	0.01	x_2	-2	2
25	$f_1(x_1, x_2)$	$x_1^2 + x_2^2$	0.02	x_1	-2	2
	$f_2(x_1, x_2)$	$x_1x_2 + 5$	0.02	x_2	-2	2
26	$f_1(x_1, x_2)$	$0.5x_1^2 + 0.5x_2^2$	0.02	x_1	0	5
	$f_2(x_1, x_2)$	$0.5x_1^2 - 0.5x_2^2$	0.02	x_2	0	5
27	$f_1(x_1, x_2)$	$x_1^2 + x_2^2$	0.01	x_1	-2	2
	$f_2(x_1, x_2)$	$x_1^2 - x_2^2$	0.01	x_2	-2	2
28	$f_1(x_1, x_2)$	$x_1^3 - x_2^3$	0.02	x_1	0	4
	$f_2(x_1, x_2)$	$x_1^2 - x_2^2$	0.01	x_2	0	4
29	$f_1(x_1, x_2)$	$\sin(x_1 + x_2)$	0.01	x_1	-1	1
	$f_2(x_1, x_2)$	$\cos(x_1 + x_2)$	0.01	x_2	-2	2
30	$f_1(x_1, x_2)$	x_1x_2	0.01	x_1	1	4
	$f_2(x_1, x_2)$	$1/(x_1x_2)$	0.01	x_2	1	4
31	$f_1(x_1, x_2)$	$4x_1^3 - x_2 + 15$	0.02	x_1	1	8
	$f_2(x_1, x_2)$	$10x_1^2 + x_2^2 - 7$	0.02	x_2	1	9
32	$f_1(x_1, x_2)$	$-4x_1x_2 + 3x_1^2 + 9x_2^2 + 7x_1 - 2x_2 + 5$	0.01	x_1	1	5
	$f_2(x_1, x_2)$	$x_1^2 + 7x_1 - 8x_2^2 + 11x_2 + 13$	0.01	x_2	0	3
33	$f_1(x_1, x_2)$	$-6x_1x_2 + 3x_2^2 - 5x_1^2 + 17$	0.01	x_1	0	3

	$f_2(x_1, x_2)$	$5x_1^2 + 18x_1x_2 - x_2^2 - 7x_1 + 42$	0.01	x_2	-1	3
34	$f_1(x_1, x_2)$	$32x_2^2 - 5x_1^2 + 2x_1 - 12$	0.01	x_1	0	2
	$f_2(x_1, x_2)$	$7x_1^2 + 18x_1x_2 - 12x_2^2 + 30$	0,01	x_2	1	4
35	$f_1(x_1, x_2)$	$x_1x_2 + 0.4x_2^2 - x_1^2 + 22x_1 + 4$	0.01	x_1	0	3
	$f_2(x_1, x_2)$	$x_1^2 - 5x_1 - 15x_2^2 + 15x_2 + 17$	0.01	x_2	1	2
36	$f_1(x_1, x_2)$	$6x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1^2 + 3$	0.02	x_1	-2	2
	$f_2(x_1, x_2)$	$6x_1^2 - 7x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1 + 7$	0.02	x_2	-2	2
37	$f_1(x_1, x_2)$	$-12x_2 - x_1^2 + 2x_1 + 50$	0.01	x_1	-1	1
	$f_2(x_1, x_2)$	$-17x_1 - x_2^2 + 3x_2 + 15$	0.01	x_2	-2	2
38	$f_1(x_1, x_2)$	$-2x_1^2 + 3x_1 + 8x_2^2 - 5x_2 + 20$	0.02	x_1	0	4
	$f_2(x_1, x_2)$	$4x_1^2 - 10x_1 - x_2^2 + x_2 + 35$	0.02	x_2	0	3
39	$f_1(x_1, x_2)$	$-4x_1^2 - 2x_1 + 5x_2^2 + 7x_2 - 10$	0.01	x_1	-1	1
	$f_2(x_1, x_2)$	$x_1^2 + 2x_1 - 2x_2^2 + 3x_2 - 15$	0.01	x_2	-1	1
40	$f_1(x_1, x_2)$	$-4(x_1 - 2)^2 + 5x_2^2 - 10x_2 + 20$	0.01	x_1	-1	3
	$f_2(x_1, x_2)$	$-3x_1^2 + 12x_1 - 2x_2^2 + 4x_2 + 5$	0.02	x_2	0	4
41	$f_1(x_1, x_2)$	$3x_1^2 - x_1 - x_2^2 - 7x_2 + 4$	0.01	x_1	-2	2
	$f_2(x_1, x_2)$	$8x_1^2 + 6x_1 + 3x_2^2 + 16x_2$	0.01	x_2	-2	2

ТЕМА № 8

СИСТЕМНА ЗАДАЧА ПРОТИДІЇ КОАЛІЦІЙ З УРАХУВАННЯМ ФАКТОРІВ РИЗИКУ

Вважаємо, що є певна множина ситуацій, для яких може бути здійснена протидія коаліцій [14, 30, 31]. Кожну ситуацію для коаліцій 1 та 2 формально записуємо у вигляді:

$$S_{L_1} = \{\eta_{L_1}, \bar{\alpha}_{L_1}\}, L_1 \in \overline{1, L_{01}};$$
$$S_{L_2} = \{\eta_{L_2}, \bar{\alpha}_{L_2}\}, L_2 \in \overline{1, L_{02}};$$

де L_1, L_2 – порядковий номер ситуації, відповідно, для коаліцій 1 та 2; η_{L_1}, η_{L_2} – ймовірність появи ситуацій S_{L_1}, S_{L_2} ; $\bar{\alpha}_{L_1}, \bar{\alpha}_{L_2}$ – числові значення векторів (факторів невизначеності ситуацій) $\bar{\alpha}_1$ та $\bar{\alpha}_2$, визначених у формі:

$$\bar{\alpha}_{L_1} = \{\alpha_{L_1 k_1} \in D_{\alpha_1 k_1} \mid k_1 = \overline{1, k_{01}}\};$$
$$\bar{\alpha}_{L_2} = \{\alpha_{L_2 k_2} \in D_{\alpha_2 k_2} \mid k_2 = \overline{1, k_{02}}\}.$$

Тоді множини ситуацій, які відповідають коаліціям 1 та 2, можна записати у вигляді:

$$S_{01} = \{S_{L_1} \mid L_1 = \overline{1, L_{01}}\};$$
$$S_{02} = \{S_{L_2} \mid L_2 = \overline{1, L_{02}}\}.$$

Ми будемо розглядати випадок протидії коаліцій з урахуванням наступних груп факторів ризику:

- 1) фактори ризику непрогнозованої ситуації протидії коаліцій;
- 2) фактори форс-мажорного ризику;
- 3) фактори інформаційного ризику, зумовлені неповнотою та неточністю початкової інформації.

Оскільки ймовірність появи багатьох ситуацій мала, на практиці встановлюють певний поріг появи ймовірності і вилючають із розгляду всі ситуації, ймовірність яких нижча за рівень порогу. Тоді множини ситуацій, відповідно, для коаліції 1 та 2 такі:

$$S_{01} = \{S_{1L_1} = \langle \eta_{1L_1}, \bar{\alpha}_{1L_1} \rangle \mid \eta_{1L_1} > \eta_{01}, L_1 = \overline{1, L_{01}}\},$$
$$S_{02} = \{S_{2L_2} = \langle \eta_{2L_2}, \bar{\alpha}_{2L_2} \rangle \mid \eta_{2L_2} > \eta_{02}, L_2 = \overline{1, L_{02}}\},$$

де η_{01}, η_{02} – граничні значення ймовірностей; при цьому S_{01}, S_{02} не утворюють повну групу подій.

Ймовірність появи прогнозованої ситуації відповідно для першої та другої коаліцій має вигляд:

$$\eta_{1ps} = 1 - \prod_{L_1=1}^{L_{01}} (1 - \eta_{1L_1}), \quad \eta_{2ps} = 1 - \prod_{L_2=1}^{L_{02}} (1 - \eta_{2L_2}),$$

а ймовірність появи *непрогнозованої ситуації* становить:

$$\eta_{1ns} = 1 - \eta_{1ps}, \quad \eta_{2ns} = 1 - \eta_{2ps}.$$

Крім ризику появи непрогнозованої ситуації існує ризик впливу *форс-мажорних факторів*, а також ризик *інформаційної невизначеності*. Позначимо: η_{fm} – ймовірність появи форс-мажорних факторів; η_{in} – ймовірність появи фактора інформаційної невизначеності.

Можливі такі два варіанти:

- 1) здійснення небажаної події пов'язане з впливом хоча б одної з перерахованих вище трьох груп факторів ризику

$$\eta_{1\Xi} = 1 - (1 - \eta_{ns})(1 - \eta_{fm})(1 - \eta_{in});$$

- 2) здійснення небажаної події пов'язане з одночасним впливом факторів перерахованих груп ризику; внаслідок незалежності подій оцінку одночасної дії факторів перерахованих груп ризику можна виконати таким чином:

$$\eta_{2\Xi} = \eta_{ns} \eta_{fm} \eta_{in}.$$

Тепер перейдемо до аналізу ступеня досягнення інтересів кожної коаліції у врахуванням факторів ризику. Для цього врахуємо, що вплив факторів ризику призводить до появи нештатних ситуацій. Дія нештатних ситуацій може привести до прямого або непрямого збитку. *Прямий збиток* – це безпосереднє зменшення рівня досягнення мети (наприклад, випуску продукції), *непрямий збиток* – це зміна умов функціонування, які приводять до зменшення значень цільових функцій відносно їхніх значень у штатних ситуаціях (наприклад, підвищення вартості початкової сировини, податку на додану вартість продукції тощо).

Рівень прямого збитку визначатимемо так:

$$\bar{J}_{12\eta} = \frac{\bar{\Phi}_{12\eta}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \bar{\eta}_1) - \bar{\Phi}_{12\eta}^-}{\bar{\Phi}_{12\eta}^+ - \bar{\Phi}_{12\eta}^-}, \quad (8.1)$$

де $\bar{\Phi}_{12\eta}^+, \bar{\Phi}_{12\eta}^-$ – відповідно, максимальне та мінімальне значення розміру збитку для коаліції 1 від впливу факторів ризику; $\bar{\Phi}_{12\eta}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \bar{\eta}_1)$ – розмір збитку для

коаліції 1 за аналізованої ситуації ризику $\bar{\eta}_1 = (\eta_{ns}, \eta_{fm}, \eta_{in})$, $\bar{x}_{01}, \bar{x}_{02}$ – точні значення вектора узагальнених стратегій, відповідно, першої та другої коаліцій, $\tilde{x}_{01}^{(2)}$ – наближене значення вектора узагальнених стратегій коаліції 1 у формі наближеної інтерпретації коаліцією 2; $\tilde{x}_{02}^{(1)}$ – наближене значення вектора узагальнених стратегій коаліції 2 у формі наближеної інтерпретації коаліцією 1.

Співвідношення (8.1) визначає рівень ризику як розмір можливого прямого збитку від впливу факторів усіх груп ризику.

Для впливу факторів різних груп ризику (непрогнозованих ситуацій протидії, форс-мажорних подій, факторів інформаційної невизначеності) розмір прямого збитку визначають відповідно за формулами:

$$\begin{aligned}\bar{J}_{12ns}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \eta_{ns}) &= \frac{\bar{\Phi}_{12\eta_{ns}}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \eta_{ns}) - \bar{\Phi}_{12\eta_{ns}}^-}{\bar{\Phi}_{12\eta_{ns}}^+ - \bar{\Phi}_{12\eta_{ns}}^-}, \\ \bar{J}_{12fm}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \eta_{fm}) &= \frac{\bar{\Phi}_{12\eta_{fm}}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \eta_{fm}) - \bar{\Phi}_{12\eta_{fm}}^-}{\bar{\Phi}_{12\eta_{fm}}^+ - \bar{\Phi}_{12\eta_{fm}}^-}, \\ \bar{J}_{12in}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \eta_{in}) &= \frac{\bar{\Phi}_{12\eta_{in}}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \eta_{in}) - \bar{\Phi}_{12\eta_{in}}^-}{\bar{\Phi}_{12\eta_{in}}^+ - \bar{\Phi}_{12\eta_{in}}^-}.\end{aligned}\quad (8.2)$$

Унаслідок незалежності впливу факторів різних груп ризику остаточну оцінку ризику можна виконати різними прийомами:

- враховувати вплив факторів кожної групи окремо;
- враховувати вплив факторів хоча б однієї групи;
- враховувати спільний вплив факторів усіх груп ризику.

Найдоцільніше оцінювати вплив факторів незалежно, а остаточний рівень ризику в разі спільного впливу факторів кількох груп ризику, внаслідок незалежності впливу різних груп знаходити підсумовуванням можливого збитку. Оскільки ступінь ризику впливу факторів різних груп неоднаковий, то *узагальнений рівень ризику від впливу факторів кожної групи* відповідно до теорії ризику враховуватимемо у такій формі:

$$\bar{U}_{1ns} = \bar{f}_{1ns}(\eta_{ns})\bar{J}_{12ns}, \bar{U}_{1fm} = \bar{f}_{1fm}(\eta_{fm})\bar{J}_{12fm}, \bar{U}_{1in} = \bar{f}_{1in}(\eta_{in})\bar{J}_{12in}, \quad (8.3)$$

де $\bar{U}_{1ns}, \bar{U}_{1fm}, \bar{U}_{1in}$ – відповідно, узагальнений рівень ризику для коаліції 1 у разі впливу факторів ризику непрогнозованих ситуацій протидії, форс-мажорних подій, факторів інформаційної невизначеності; $\bar{J}_{12ns}, \bar{J}_{12fm}, \bar{J}_{12in}$ – збитки, визначені формулами (8.2); $\bar{f}_{1ns}(\eta_{ns}), \bar{f}_{1fm}(\eta_{fm}), \bar{f}_{1in}(\eta_{in})$ – вектор-функції, які

враховують залежності рівня збитку відповідно від ступеня ризику непрогнозованих ситуацій протидії, форс-мажорних подій, факторів інформаційної невизначеності. У найпростішому випадку вважають, що:

$$\bar{f}_{1ns}(\eta_{ns}) = \eta_{ns}, \bar{f}_{1fm}(\eta_{fm}) = \eta_{fm}, \bar{f}_{1in}(\eta_{in}) = \eta_{in}. \quad (8.4)$$

З урахуванням впливу однієї групи факторів ризику цільові функції для коаліції 1 зобразимо у вигляді:

$$\bar{F}_{12\eta_{ns}}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \eta_{ns}) = \bar{f}'_1(\eta_{ns})I'_{12}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}) - \bar{f}_{1ns}(\eta_{ns})I_{12ns}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \eta_{ns}), \quad (8.5)$$

де $\bar{F}_{12\eta_{ns}}(\cdot)$ – вектор-функція цілей коаліції 1 за умов впливу непрогнозованих ситуацій протидії; $\bar{I}'_{12}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}) = \frac{\bar{F}_{12}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}) - \bar{F}_{12}^-}{\bar{F}_{12}^+ - \bar{F}_{12}^-}$ – вектор-функція цілей коаліції 1 за відсутності факторів ризику; $\bar{f}'_1(\eta_{ns})$ – вектор функція, яка враховує вигляд залежності рівня непрямого збитку від ступеня ризику впливу непрогнозованих ситуацій протидії на рівень досягнення інтересів коаліцією 1; $\bar{f}_{1ns}(\eta_{ns})$ – вектор-функція, яка враховує вигляд залежності рівня прямого збитку від ступеня ризику впливу непрогнозованих ситуацій протидії на рівень досягнення інтересів коаліцією 1; $\bar{J}_{12ns}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \eta_{ns})$ – рівень прямого збитку, обумовлений ступенем ризику впливу непрогнозованих ситуацій.

У формулі (8.5) перший доданок враховує непрямий збиток, а другий доданок – прямий збиток від прогнозованих факторів ризику. Аналогічні вирази існують для інших груп факторів ризику.

За одночасного впливу розглянутих вище трьох груп факторів ризику внаслідок незалежності їх впливу цільову функцію для коаліції 1 визначає співвідношення:

$$\bar{F}_{\Xi 12}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \eta) = \bar{f}'_1(\eta_{ns})\bar{f}'_1(\eta_{fm})\bar{f}'_1(\eta_{in})I'_{12}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}) - (U_{1ns} + U_{1fm} + U_{1in}). \quad (8.6)$$

Беручи до уваги, що в найпростішому випадку виконується:

$$\bar{f}'_1(\eta_{ns}) = 1 - \eta_{ns}, \bar{f}'_1(\eta_{fm}) = 1 - \eta_{fm}, \bar{f}'_1(\eta_{in}) = 1 - \eta_{in}$$

і враховуючи (8.3) – (8.5), формула (8.6) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\Xi 12}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \eta) = & (1 - \eta_{ns})(1 - \eta_{fm})(1 - \eta_{in})I'_{12}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}) - \\ & - (\eta_{ns}\bar{J}_{12ns} + \eta_{fm}\bar{J}_{12fm} + \eta_{in}\bar{J}_{12in}). \end{aligned} \quad (8.7)$$

За одночасного впливу факторів $N^{(r)}$ груп ризику в загальному випадку маємо

$$\bar{F}_{\Xi 12}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \eta_{\Xi}) = \bar{f}'_1(\eta_{\Xi}) I'_{12}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}) - \sum_{k=1}^{N^{(r)}} \bar{f}_{1k}(\eta_k) \bar{J}_{12k}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \eta_k), \quad (8.8)$$

де $\bar{f}'_1(\eta_{\Xi})$ – функція, яка враховує вплив усіх груп факторів ризику на рівень досягнення інтересів коаліцією 1; $\bar{f}_{1k}(\eta_k)$ – функція, яка враховує ступінь впливу факторів k -ї групи факторів ризику; $\bar{J}_{12k}(\cdot)$ – рівень збитку від впливу факторів k -ї групи факторів ризику.

У найпростішому випадку після врахування формул (8.3) – (8.5), (8.6) формула (8.8) набуває вигляду

$$\bar{F}_{\Xi 12}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \eta_{\Xi}) = I'_{12}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}) \sum_{k=1}^{N^{(r)}} (1 - \eta_k) - \sum_{k=1}^{N^{(r)}} \eta_k \bar{J}_{12k}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \eta_k). \quad (8.9)$$

Стратегія коаліції 1 при врахуванні факторів ризику на основі формули (8.9) виражається в максимізації вектор-функції цілей:

$$\bar{F}_{\Xi 12}(\bar{x}_{01}, \tilde{x}_{02}, \bar{\alpha}_1, \eta_{\Xi}) \rightarrow \max.$$

Враховуючи однотипність підходів до побудови цільових функцій для коаліції 1 та коаліції 2, приходимо до висновку, що всі наведені міркування вірні й для стратегії коаліції 2. Можемо записати співвідношення для коаліції 2, аналогічне до (8.9):

$$\bar{F}_{\Xi 21}(\bar{x}_{02}, \tilde{x}_{01}, \bar{\alpha}_2, \eta_{\Xi}) = I'_{21}(\bar{x}_{02}, \tilde{x}_{01}) \sum_{k=1}^{N^{(r)}} (1 - \eta_k) - \sum_{k=1}^{N^{(r)}} \eta_k \bar{J}_{21k}(\bar{x}_{02}, \tilde{x}_{01}, \bar{\alpha}_2, \eta_k), \quad (8.10)$$

де \bar{I}'_{21} – вектор-функція цілей коаліції 2 за відсутності факторів ризику.

Формули (8.9), (8.10) є базовими для дослідження процесу протидії двох коаліцій за реальних умов впливу факторів ризику різної природи. Вплив кожного з факторів ризику враховується двома показниками – ступенем ризику, який визначається ймовірністю небажаного впливу відповідного фактора, і рівнем ризику, який визначається збитком результату небажаного впливу відповідного фактора ризику.

Стратегія дії кожної коаліції полягає у підвищенні рівня реалізації своїх інтересів за допомогою збільшення значення вектор-функції цілей і зниження ступеня й рівня ризику.

При розв'язанні задачі максимізації функції мети необхідно користуватися наступними прийомами:

- 1) оптимізація власних рішень учасників коаліції й оптимізація загальних коаліційних рішень;

- 2) мінімізація ступеня ризику на основі підвищення рівня інформованості ОПР про фактори ризику;
- 3) системне узгодження максимізації власної вектор-функції цілі й мінімізації рівня ризику за рахунок оптимізації загальних коаліційних рішень і погоджених рішень учасників коаліції за певного ступеня ризику;
- 4) одночасне системне узгодження максимізації функції цілі за штатної ситуації і мінімізації рівня прямого збитку від дії факторів ризику непрогнозованої ситуації за рахунок оптимізації рішень й підвищення рівня інформованості про фактори ризику. Оптимізація виконується не пошуком певного значення результуючого вектора, а підвищенням рівня повноти, вірогідності, точності інформації про відповідні фактори групи ризику. Чим вище рівень повноти, вірогідності і точності, тим менше ступінь ризику.

При реалізації методу рішення необхідно враховувати наступні фактори:

- забезпечення реалізації правил поведінки кожного учасника коаліції в рамках погодженої стратегії коаліції;
- забезпеченні кількісної оцінки ступеня досягнення потенційно можливого найкращого результату і ступеня переваги потенційно можливого найгіршого результату;
- забезпечення оцінки похибки рішення внаслідок неповноти, невірогідності, несвоєчасності інформації про цілі й рішення коаліцій, що протидіють;
- забезпечення можливості уточнення рішення за підвищення рівня інформованості коаліцій, що протидіють;
- забезпечення оцінки ступеня і рівня ризику через вплив форс-мажорних факторів, факторів ситуаційної невизначеності про цілі і дії сторін, що протидіють, та інших факторів ризику;
- забезпечення оцінки впливу факторів ризику на рівень досягнення цілей коаліції.

Питання для підготовки до виконання лабораторної роботи 8.

1. Які групи факторів ризику розглядають у випадку протидії коаліцій?
2. У якій формі враховується узагальнений рівень ризику від впливу факторів кожної групи ризику?
3. Який вигляд мають цільові функції для коаліції 1 з урахуванням впливу однієї групи факторів ризику?
4. Запишіть співвідношення, яке визначає цільову функцію для коаліції 1 за одночасного впливу розглянутих вище трьох груп факторів ризику.
5. Як визначається рівень прямого збитку?
6. У чому полягає стратегія коаліції 1 при врахуванні факторів ризику на основі формули (8.9)?

7. Запишіть співвідношення, яке визначає цільову функцію для коаліції 2 за одночасного впливу розглянутих вище трьох груп факторів ризику.
8. Якими показниками враховується вплив кожного з факторів ризику?
9. У чому полягає стратегія дії кожної коаліції?
10. Якими прийомами необхідно користуватися при розв'язанні задачі максимізації функції мети?
11. Які фактори необхідно враховувати при реалізації методу рішення?

Лабораторна робота 8

Постановка задачі протидії коаліцій з урахуванням факторів ризику.

Задано:

- цільові функції коаліцій, які протидіють;
- функції збитку від дії факторів ризику для першої та другої коаліцій;
- ситуаційні матриці ймовірностей факторів ризику для першої та другої коаліцій.

Потрібно:

- визначити гарантований результат цільових функцій для кожної із коаліцій, які протидіють;
- обчислити значення цільових функцій кожної із протидіючих коаліцій з урахуванням факторів ризику;
- визначити найнесприятливішу ситуацію з погляду ймовірності впливу факторів ризику. Для цієї ситуації знайти значення цільової функції для кожної з коаліцій з урахуванням і без урахування факторів ризику;
- побудувати аналітичні залежності цільових функцій $F_{12}(x_1, \tilde{x}_2)$, $F_{21}(x_2, \tilde{x}_1)$, на підставі яких визначити інтервальні оцінки $I'_{12}(x_1, \tilde{x}_2)$, $I'_{21}(x_2, \tilde{x}_1)$;
- визначити функціональні залежності $F_{\Xi 12}(x_1, \tilde{x}_2, \eta_{ns}, \eta_{fm}, \eta_{in})$, $F_{\Xi 21}(x_2, \tilde{x}_1, \eta_{ns}, \eta_{fm}, \eta_{in})$ взаємного впливу дій коаліцій;
- провести аналіз отриманих результатів.

Приклад розв'язання задачі протидії коаліцій.

Цільові функції коаліцій, які протидіють мають вигляд:

$$I'_{12}(x, y) = \frac{(x-2)^2 + 2.3xy + (y-1)^2}{15}; \quad I'_{21}(x, y) = \frac{9 - 0.03x - 1.3xy - (y-3)^2}{9}.$$

Допустима область зміни параметрів:

$$x \in [0; 2], \quad y \in [0; 3].$$

Функції збитку від дії трьох груп факторів ризику (непрогнозованих ситуацій протидії, форс-мажорних подій, факторів інформаційної невизначеності) для першої та другої коаліцій такі:

$$\begin{aligned}
 J_{12ns}(x, y) &= 0.07y - 0.02x; \\
 J_{12fm}(x, y) &= 0.03y + 0.11x + 0.002; \\
 J_{12in}(x, y) &= 0.14y + 0.01x - 0.06; \\
 J_{21ns}(x, y) &= 0.01y + 0.02x + 0.03; \\
 J_{21fm}(x, y) &= 0.05y + 0.02x + 0.06; \\
 J_{21in}(x, y) &= -0.019y + 0.012x + 0.031.
 \end{aligned}$$

Для кожної із коаліцій задано ситуаційні матриці ймовірностей факторів ризику:

$$R_1 = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0.23 & 0.27 & 0.11 & 0.01 \\ 0.11 & 0.11 & 0.07 & 0.29 \\ 0.05 & 0.06 & 0.02 & 0.08 \\ y=0 & y=1 & y=2 & y=3 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array} \end{array}; \quad R_2 = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \\ 0.06 & 0.02 & 0.10 \\ 0.09 & 0.01 & 0.21 \\ 0.13 & 0.21 & 0.23 \\ x=0 & x=1 & x=2 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array} \end{array}.$$

Тепер переходимо до розв'язання поставленої задачі.

Крок I. Використовуючи принцип гарантованого результату, знайдемо гарантований результат для кожної із коаліцій, які протидіють. Використаємо табличний метод. Складаємо таблиці значень цільових функцій коаліції 1 та коаліції 2 з кроком дискретизації $\Delta x = \Delta y = 0.5$ і знаходимо гарантований результат за формулами:

$$I_{12}^* = \max_x \min_y I'_{12}(x, y); \quad I_{21}^* = \max_y \min_x I'_{21}(x, y); \quad (8.10)$$

$$I'_{12}(x, y) = \begin{array}{c} \begin{array}{c} y \setminus x \\ 0.0 \\ 0.5 \\ 1.0 \\ 1.5 \\ 2.0 \\ 2.5 \\ 3.0 \end{array} \left\| \begin{array}{cccccc} 0.0 & 0.5 & 1.0 & 1.5 & 2.0 \\ 0.400 & 0.217 & 0.133 & 0.083 & 0.067 \\ 0.283 & 0.205 & 0.160 & 0.148 & 0.170 \\ 0.267 & 0.227 & 0.220 & 0.247 & 0.307 \\ 0.283 & 0.282 & 0.313 & 0.378 & 0.477 \\ 0.333 & 0.350 & 0.440 & 0.543 & 0.680 \\ 0.417 & 0.558 & 0.600 & 0.742 & 0.917 \\ 0.533 & 0.647 & 0.793 & 0.973 & 1.187 \end{array} \right\| \end{array}; \quad (8.11)$$

$y \setminus x$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	
0.0	0.000	-0.002	-0.003	-0.005	-0.007	(8.12)
0.5	0.306	0.268	0.230	0.192	0.154	
1.0	0.556	0.482	0.408	0.334	0.260	
1.5	0.750	0.640	0.530	0.420	0.310	
2.0	0.889	0.743	0.597	0.451	0.304	
2.5	0.972	0.790	0.608	0.426	0.243	
3.0	1.000	0.782	0.563	0.345	0.127	

Для першої коаліції значення гарантованого результату досягається у точці $x = 0$; $y = 1$ і дорівнює $I_{12}^* = I'_{12}(0; 1.0) = 0.267$.

Для другої коаліції значення гарантованого результату досягається у точці $x = 2.0$; $y = 1.5$ і дорівнює $I_{21}^* = I'_{21}(2.0; 1.5) = 0.310$.

Крок II. Знайдемо значення цільових функцій з урахуванням факторів ризику в точці гарантованого результату для кожної з протидіючих коаліцій. Для розв'язання цієї задачі використаємо ситуаційні матриці R_1 та R_2 ймовірностей факторів ризику для першої та другої коаліцій. Значення цільових функцій з урахуванням факторів ризику визначимо за формулою (8.7).

Для коаліції 1 гарантований результат отримано у точці $x = 0$; $y = 1.0$. За значення змінної $y = 1.0$ визначаємо, що необхідно розглянути ситуацію S_2 , оскільки для ситуації S_2 змінна y приймає значення одиниці. Таким чином, для коаліції 1 розглядаємо значення ймовірностей факторів ризику, які відповідають ситуації S_2 , тобто $\eta_{ns} = 0.27$; $\eta_{fm} = 0.11$; $\eta_{in} = 0.06$. Підставивши відповідні значення ймовірностей η_{ns} , η_{fm} , η_{in} , а також значення функцій $I'_{12}(x, y)$, $J_{12ns}(x, y)$, $J_{12fm}(x, y)$, $J_{12in}(x, y)$ у формулу

$$F_{\Xi 12}(0; 1) = (1 - \eta_{ns})(1 - \eta_{fm})(1 - \eta_{in})I'_{12}(0; 1) - (\eta_{ns}J_{12ns}(0; 1) + \eta_{fm}J_{12fm}(0; 1) + \eta_{in}J_{12in}(0; 1)),$$

для коаліції 1 одержимо значення функції $F_{\Xi 12}(x, y)$ у точці $x = 0$; $y = 1$: $F_{\Xi 12}(0; 1) = 0.136$.

Для коаліції 2 гарантований результат отримано у точці $x = 2$; $y = 1.5$. За значення змінної $x = 2$ визначаємо, що необхідно розглянути ситуацію S_3 , оскільки для ситуації S_3 змінна x приймає значення два. Таким чином, для коаліції 2 розглядаємо значення ймовірностей факторів ризику, які відповідають ситуації S_3 , тобто $\eta_{ns} = 0.10$; $\eta_{fm} = 0.21$; $\eta_{in} = 0.23$. Підставивши відповідні

значення ймовірностей $\eta_{ns}, \eta_{fm}, \eta_{in}$, а також значення функцій $I'_{21}(x, y), J_{21ns}(x, y), J_{21fm}(x, y), J_{21in}(x, y)$ у формулу

$$F_{\Xi 21}(2; 1.5) = (1 - \eta_{ns})(1 - \eta_{fm})(1 - \eta_{in})I'_{21}(2; 1.5) - (\eta_{ns}J_{21ns}(2; 1.5) + \eta_{fm}J_{21fm}(2; 1.5) + \eta_{in}J_{21in}(2; 1.5)),$$

для коаліції 2 одержимо значення функції $F_{\Xi 21}(x, y)$ у точці $x=2; y=1.5$: $F_{\Xi 21}(2; 1.5) = 0.118$.

Крок III. Виберемо найбільш несприятливу ситуацію з погляду ймовірності впливу факторів ризику. Для цієї ситуації знайдемо значення цільової функції для кожної з коаліцій з урахуванням і без урахування факторів ризику. Найбільш несприятливу ситуацію для кожної коаліції можна знайти з використанням ситуаційних матриць ймовірностей факторів ризику для першої та другої коаліцій. Для цього потрібно визначити ймовірність появи кожної ситуації.

Обчислимо ймовірності появи ситуацій S_1, S_2, S_3, S_4 для коаліції 1:

$$P(S_1) = 0.23 \times 0.11 \times 0.05 = 1.265 \times 10^{-3};$$

$$P(S_2) = 0.27 \times 0.11 \times 0.06 = 1.782 \times 10^{-3};$$

$$P(S_3) = 0.11 \times 0.07 \times 0.02 = 1.54 \times 10^{-4};$$

$$P(S_4) = 0.01 \times 0.29 \times 0.08 = 2.32 \times 10^{-4}.$$

Оскільки для першої коаліції ймовірність появи ситуації S_2 є максимальною, то робимо висновок, що ситуація S_2 є найнесприятливішою. Отже, потрібно знайти максимальне значення цільової функції $I'_{12}(x, y)$ для ситуації S_2 , тобто для значення змінної $y=1$. Матриця значень цільової функції $I'_{12}(x, y)$ має вигляд (8.11). При $y=1$ максимальне значення цільової функції $I'_{12}(x, y)$ по змінній x досягається в точці $x=2$ і дорівнює: $\max_x I'_{12}(x; 1) = I'_{12}(2; 1) = 0.307$.

Обчислимо ймовірності появи ситуацій S_1, S_2, S_3 для коаліції 2:

$$P(S_1) = 0.06 \times 0.09 \times 0.13 = 7.02 \times 10^{-4};$$

$$P(S_2) = 0.02 \times 0.01 \times 0.21 = 4.2 \times 10^{-5};$$

$$P(S_3) = 0.1 \times 0.21 \times 0.23 = 4.83 \times 10^{-3}.$$

Оскільки для другої коаліції ймовірність появи ситуації S_3 є максимальною, то ситуація S_3 є найнесприятливіша. Отже, потрібно знайти максимальне

значення цільової функції $I'_{21}(x, y)$ для ситуації S_3 , тобто для значення змінної $x = 2$. Матриця значень цільової функції $I'_{21}(x, y)$ має вигляд (8.12). При $x = 2$ максимальне значення цільової функції $I'_{21}(x, y)$ по змінній y досягається в точці $y = 1.5$ і дорівнює: $\max_y I'_{21}(2; y) = I'_{21}(2; 1.5) = 0.310$.

Крок IV. Тепер розглянемо значення цільових функцій для кожної із коаліцій з урахуванням факторів ризику. Для цього знову використовуємо формулу (8.7).

Для коаліції 1 потрібно знайти значення цільової функції у точці $x = 2; y = 1$ за найнесприятливішої ситуації S_2 , тобто значення ймовірностей для факторів ризику дорівнюватимуть: $\eta_{ns} = 0.27; \eta_{fm} = 0.11; \eta_{in} = 0.06$. З урахуванням впливу факторів ризику в найнесприятливішій ситуації значення цільової функції для коаліції 1 буде дорівнювати

$$F_{\Xi 12}(2; 1) = (1 - 0.27)(1 - 0.11)(1 - 0.06)0.307 - (0.27 \times 0.030 + 0.11 \times 0.054 + 0.06 \times 0.100) = 0.167.$$

Для коаліції 2 потрібно знайти значення цільової функції у точці $x = 2; y = 1.5$ за найнесприятливішої ситуації S_3 , тобто значення ймовірностей для факторів ризику дорівнюватимуть: $\eta_{ns} = 0.10; \eta_{fm} = 0.21; \eta_{in} = 0.23$. З урахуванням впливу факторів ризику в найнесприятливішій ситуації значення цільової функції для коаліції 2 буде дорівнювати

$$F_{\Xi 21}(2; 1.5) = (1 - 0.10)(1 - 0.21)(1 - 0.23) \times 0.310 - (0.10 \times 0.085 + 0.21 \times 0.175 + 0.23 \times 0.0265) = 0.110.$$

Крок V. Проведемо аналіз отриманих результатів:

1) відповідно до принципу гарантованого результату значення цільової функції коаліції 1 менше ніж значення цільової функції коаліції 2: $I'_{12}(0; 1) = 0.267; I'_{21}(2; 1.5) = 0.310; \Rightarrow I'_{12}(0; 1) < I'_{21}(2; 1.5)$;

2) під впливом факторів ризику значення обох цільових функцій зменшуються і значення цільової функції коаліції 1 стає більшим, ніж і значення цільової функції коаліції 2: $F_{\Xi 12}(0; 1) = 0.136; F_{\Xi 21}(2; 1.5) = 0.118; \Rightarrow F_{\Xi 12}(0; 1) > F_{\Xi 21}(2; 1.5)$

3) з урахуванням впливу факторів ризику значення цільової функції коаліції 1 зменшилося на 49.1%, у той же час як значення цільової функції коаліції 2 під впливом факторів ризику зменшилося на 61.9%. Отже, фактори ризику найбільше впливають на другу коаліцію;

4) найбільш несприятливою ситуацією для коаліції 1 є ситуація S_2 , а для коаліції 2 – ситуація S_3 . У випадку найнесприятливішої ситуації значення цільової функції коаліції 1 незначно менше, ніж значення цільової функції коаліції 2. Але для коаліції 1 вони більші, ніж у випадку гарантованого результату, а для коаліції 2 вони рівні з випадком гарантованого результату: $I'_{12}(2;1) = 0.307$; $I'_{21}(2;1.5) = 0.310$;

5) під впливом факторів ризику значення цільових функцій обох коаліцій зменшуються. Але у цьому випадку коаліція 1 знаходиться у вигіднішому (незначно) становищі порівняно з коаліцією 2: $F_{\Xi 12}(2;1) = 0.167$; $F_{\Xi 21}(2;1.5) = 0.110$.

Варіанти індивідуальних завдань до лабораторної роботи 8 [4].

У таблиці 1 наведено вигляд цільових функцій коаліції 1 та коаліції 2: $I'_{12}(x; y)$, $I'_{21}(x; y)$.

У таблиці 2 наведено функціональні залежності збитків: $J_{12ns}(x; y)$, $J_{12fm}(x; y)$, $J_{12in}(x; y)$, $J_{21ns}(x; y)$, $J_{21fm}(x; y)$, $J_{21in}(x; y)$.

У таблиці 3 наведено ситуаційні матриці ймовірностей факторів ризику: R_1 , R_2 .

Таблиця 1. Цільові функції коаліції 1 та коаліції 2.

№ вар.	x, y	$I'_{12}(x, y)$	$I'_{21}(x, y)$
1	$x \in [0; 2]$ $y \in [0; 2]$	$\sin\left(\pi \frac{x}{2}\right) + 0.01 \sin\left(\pi \frac{x}{2}\right)y - 0.1y$	$-\cos\left(\pi \frac{x}{2}\right) + 0.1 \cos\left(\pi \frac{x}{2}\right)y + 0.2y + 1$
2	$x \in [0; 3]$ $y \in [0; 3]$	$7x^2 + 12xy - 10y + 5x + 12$	$2.13(y - 1.5)^3 - 2.1xy - 4y - 1.5x + 30$
3	$x \in [0; 2]$ $y \in [0; 2]$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2} - 1\right) + 0.01 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2} - y\right)y - 0.1y$	$-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 0.1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 0.2y + 1$
4	$x \in [0; 3]$ $y \in [0; 2]$	$\frac{8.3x - 7.6xy - 12y + 25.2}{98.6}$	$\frac{-3.9x + 12.5xy + 13.9y + 12.6}{76.4}$
5	$x \in [0; 3]$ $y \in [0; 3]$	$\frac{(x - 2)^2 + (y - 2)^2}{1.6}$	$\frac{(x - 1)^2 - (y - 1)^2}{1.6}$
6	$x \in [0; 3]$ $y \in [0; 2]$	$x^2 + y^2 + 2xy$	$x^2 + y^2 + 2xy$

Продовження таблиці 1.

7	$x \in [0;5]$ $y \in [0;5]$	$\frac{15x^2 - 10x}{x^2 + 2x + 1} - x + y - \frac{9y^2 - 2y}{y^2 + 3y + 1}$	$\frac{15(x+y)^2 - 5(x+y)}{((x+y)^2 + 1)(x+y)} y$
8	$x \in [0;4]$ $y \in [0;4]$	$\frac{(x-1)^2 + (y-2)^2}{18}$	$\frac{-(x-3)^2 - (y-3)^2}{18} + 1$
9	$x \in [0;2]$ $y \in [1;4]$	$0.6(2x^2 + 17xy^2 + 3y + 67)$	$0.2(-5y^2 + x^2y + 2x + 93)$
10	$x \in [0;2]$ $y \in [0;2]$	$\frac{x^2 + 2y - 4y^2 + 15}{12}$	$\frac{x^2 + 2xy + 4y^2 + 12}{141}$
11	$x \in [0;5]$ $y \in [0;5]$	$-x^2 + 12x - 4.7 + y^2 - 10y$	$x^2 + 3y - 5x + 0.1xy - 1.5y^2 + 30$
12	$x \in [0;3]$ $y \in [0;2]$	$\frac{0.25x + 1.35xy - 0.81y + 7.4}{15.3}$	$\frac{1.1x + 1.35xy + 1.17y + 1.4}{13.5}$
13	$x \in [0;2]$ $y \in [0;3]$	$-0.05x^2 + 0.2xy + 2 - 0.08y^2$	$0.5(1.5y + 13.21x)$
14	$x \in [0;3]$ $y \in [0;3]$	$\frac{3x^2 + 4y^2 + 5xy}{10}$	$\frac{4x - 2y^2 + 5xy}{5}$
15	$x \in [0;2]$ $y \in [0;2]$	$\frac{3x^2 + 4y^2 - 6x - 32y + 67}{7}$	$\frac{x^2 + 5y^2 - 7x - 20y + 26}{19}$
16	$x \in [0;2]$ $y \in [0;3]$	$\frac{x^2 + 6x^2y - 15y^2 + 150}{10}$	$\frac{x^2 + 3x^2y + 4y^2 + 100}{10}$
17	$x \in [2;5]$ $y \in [3;5]$	$\frac{0.25x^2 + 0.18y^2 - 0.09x + 0.49}{20}$	$-0.32x^2 + x - 0.03y + 19$
18	$x \in [0;4]$ $y \in [0;3]$	$\frac{25x^2 + 2.2xy + 0.5y + 8}{62.5}$	$\frac{22.5x + 2.4y - 7}{62.5}$
19	$x \in [0;2]$ $y \in [0;2]$	$x^2 + 1.5xy + 3y^2 + 2y + 10$	$-x^2y + x + 9y + 15$
20	$x \in [0;2]$ $y \in [0;3]$	$\frac{(x-2)^2 + 2.3xy + (y-1)^2}{13}$	$1 - \frac{0.03x + 1.3xy + (y-3)^2}{7}$

Таблиця 2. Функціональні залежності збитків.

№ вар.	$J_{12ns}(x, y), J_{12fm}(x, y), J_{12in}(x, y)$	$J_{21ns}(x, y), J_{21fm}(x, y), J_{21in}(x, y)$
1	$J_{12ns} = 0.04y - 0.05xy - 0.03x - 0.06$ $J_{12fm} = 0.1y - 0.01xy + 0.014x + 0.2$ $J_{12in} = 0.12y - 0.33xy - 0.03x + 0.11$	$J_{21ns} = -0.015y - 0.03xy + 0.14x - 0.11$ $J_{21fm} = 0.18y - 0.01xy + 0.1x - 0.44$ $J_{21in} = -0.095y - 0.009xy + 0.032x + 0.64$
2	$J_{12ns} = 0.022x^2y - 0.053xy^2 - 0.63xy - 6x$ $J_{12fm} = 0.31y^2 - 0.16x^2y + 0.19xy - 0.3x$ $J_{12in} = 0.801y^2 - 0.64x^2y^2 - 0.47x + 0.59y$	$J_{21ns} = 0.148y^2x - 0.053(x+1)^{-1}y^2 - 0.3xy - 0.6x$ $J_{21fm} = 0.117y^2 - 0.639x^2y^2 + 0.99xy - 0.34x(y+1)$ $J_{21in} = 0.181y - 0.47x^2y - 0.771xy + 0.29y$
3	$J_{12ns} = \frac{x(0.3y - 0.1)}{19}$ $J_{12fm} = \frac{0.15x + 0.4y}{72}$ $J_{12in} = \frac{0.2xy - 6}{23}$	$J_{21ns} = \frac{(0.2x^2 + 0.5y)}{47}$ $J_{21fm} = \frac{0.3x^2 - 0.1y^2}{9}$ $J_{21in} = \frac{0.4xy + 0.05y}{34}$
4	$J_{12ns} = \frac{0.63x - 3.8xy + 2.3y - 0.6}{9.2}$ $J_{12fm} = \frac{-6.9xy + 1.7x + 2.9y - 2.9}{3.9}$ $J_{12in} = \frac{-3.6xy - 4.3x + 1.6y - 7.4}{2.5}$	$J_{21ns} = \frac{5.2x + 9.1xy - 4.7y + 1.3}{11.6}$ $J_{21fm} = \frac{9.2xy + 7.1x - 14.4y - 2.8}{7.2}$ $J_{21in} = \frac{8.2xy + 3.5x - 6.5y + 5.8}{3.2}$
5	$J_{12ns} = \frac{-0.17x + 0.73y + 0.51}{1.5}$ $J_{12fm} = \frac{0.25xy + 0.9y + 0.18}{1.9}$ $J_{12in} = \frac{0.45x - 0.1y + 4.3}{2.7}$	$J_{21ns} = \frac{-0.5x + 0.49y + 1.56}{2.9}$ $J_{21fm} = \frac{0.7x + 0.89y + 1.34}{4.3}$ $J_{21in} = \frac{0.38x - 0.05y + 0.21}{1.1}$
6	$J_{12ns} = \frac{x - y - xy}{1.3}$ $J_{12fm} = \frac{x - y - xy}{13}$ $J_{12in} = \frac{x - y - xy}{130}$	$J_{21ns} = \frac{-x + y + xy}{1.3}$ $J_{21fm} = \frac{-x + y + xy}{13}$ $J_{21in} = \frac{-x + y + xy}{130}$

Продовження таблиці 2.

7	$J_{12ns} = \frac{5x + 7xy - 1.5y + 30}{7}$ $J_{12fm} = \frac{-3xy - 6x + 2y + 10}{10}$ $J_{12in} = \frac{-5xy + 13x + 2y + 11}{15}$	$J_{21ns} = \frac{6x + 2y - 5xy + 3}{5}$ $J_{21fm} = \frac{3x + 5y - xy + 10}{12}$ $J_{21in} = \frac{-6x + 4y + xy + 4}{15}$
8	$J_{12ns} = 0.04y - 0.05x + 0.2$ $J_{12fm} = 0.11y + 0.03x$ $J_{12in} = 18y - 0.04x + 0.16$	$J_{21ns} = 0.02y + 0.1x + 0.1$ $J_{21fm} = 0.1y + 0.08x + 0.05$ $J_{21in} = 0.21y - 0.09x + 0.36$
9	$J_{12ns} = 6y + 1.4x^2 + 1$ $J_{12fm} = 0.5y + 0.05xy + 1.5x - 5$ $J_{12in} = -0.3y^2 - 0.66xy + x - \frac{107}{3}$	$J_{21ns} = y - 3x + 3$ $J_{21fm} = y + 0.25xy - 5x + 5$ $J_{21in} = 0.5y^2 + 1.5xy - x + 4.5$
10	$J_{12ns} = \frac{2.5x + y + 15.5}{54}$ $J_{12fm} = \frac{y + 2.5x + 11}{20}$ $J_{12in} = 0.5(y - xy - x + 14)$	$J_{21ns} = \frac{-0.5x + y + 15}{14}$ $J_{21fm} = \frac{y - 3xy + 11}{2}$ $J_{21in} = \frac{2.5x + y + 21.3}{112}$
11	$J_{12ns} = 0.1x(0.1y + 2)$ $J_{12fm} = \frac{0.05xy - 0.2y + 2x + 2}{3}$ $J_{12in} = \frac{-0.1xy + y + 2x + 20}{10}$	$J_{21ns} = 0.3y(0.1x + 2.5)$ $J_{21fm} = \frac{y + 0.05xy - 0.25x + 3}{2}$ $J_{21in} = \frac{x + y - 0.1xy - 0.25}{3}$
12	$J_{12ns} = \frac{1.05x - 1.2xy + 0.62y + 11.7}{21.1}$ $J_{12fm} = \frac{-0.53xy - 0.88x + 1.54y + 5.5}{19.2}$ $J_{12in} = \frac{0.92xy - 1.3x + 1.21y + 3.2}{17.2}$	$J_{21ns} = \frac{1.05x + 1.62y - 1.2xy + 1.7}{17.3}$ $J_{21fm} = \frac{-0.88x + 1.54y - 0.53xy + 5.5}{14.2}$ $J_{21in} = \frac{-1.3x + 1.21y + 0.92xy + 3.2}{18.7}$
13	$J_{12ns} = y - 0.5x + 2$ $J_{12fm} = \frac{3}{8}y + 0.2xy - 0.1x - 6$ $J_{12in} = -0.1y^2 - 1.3xy - 0.2x + 6$	$J_{21ns} = 0.003y - 0.007x + 0.002$ $J_{21fm} = 0.061y - 0.004x + 0.03$ $J_{21in} = 0.44y - 0.09x - 0.3$

Продовження таблиці 2.

14	$J_{12ns} = \frac{x + 1.2xy + 2y}{7}$ $J_{12fm} = 3x + y + 1.5xy + 3.78$ $J_{12in} = \frac{-2.6xy - 3.8x + 3.44y + 4.7}{10}$	$J_{21ns} = \frac{2.21x + 0.37y + 1.36xy + 3.6}{2}$ $J_{21fm} = 2.5x + 1.14y + 3.45xy - 3$ $J_{21in} = \frac{-x + 0.76y - 0.37xy + 5.3}{12.3}$
15	$J_{12ns} = \frac{5x + 3xy - 7y + 35}{42}$ $J_{12fm} = \frac{0.25xy + 0.3x + 0.14y + 0.7}{3.1}$ $J_{12in} = \frac{0.5xy + 2x - 14y + 70}{35}$	$J_{21ns} = \frac{1.2x - 1.4y + 5xy - 35.8}{89.6}$ $J_{21fm} = \frac{1.32x - 0.4y + 0.57xy - 10.94}{89.6}$ $J_{21in} = \frac{x - 14y + 9xy}{136}$
16	$J_{12ns} = 0.1y - 0.03x + 1.1$ $J_{12fm} = 0.3y + 0.3xy - 0.15x + 0.6$ $J_{12in} = 0.4y^2 + 0.4xy - 5.2x + 39.6$	$J_{21ns} = 0.1y - 1.93x + 0.02$ $J_{21fm} = \frac{3}{20}(y - xy - 0.1x + 3)$ $J_{21in} = 0.1y^2 - 0.1xy - 3x + 7.1$
17	$J_{12ns} = 0.125y - 0.042xy + 0.038x + 0.5$ $J_{12fm} = 0.087y - 0.09xy - 0.014x + 1.085$ $J_{12in} = 0.105y - 0.01xy + 0.04x + 0.3$	$J_{21ns} = y - 18x + 15$ $J_{21fm} = x^3 - x^2 - 8.06$ $J_{21in} = 5.006xy - \sin y + 1$
18	$J_{12ns} = \frac{x - 3xy + 6y + 28}{70}$ $J_{12fm} = \frac{7xy - 4.2x - 3y + 12}{60}$ $J_{12in} = \frac{3xy + 10x + 15y + 0.67}{500}$	$J_{21ns} = \frac{x + 7.6y - 4.1xy + 28}{17}$ $J_{21fm} = \frac{-4.02x - 31y - 7.3xy + 11.9}{8.2}$ $J_{21in} = \frac{9.9x + 16y + 4.3xy + 0.68}{8.7}$
19	$J_{12ns} = 0.3y + 0.3xy + 0.01x + 1$ $J_{12fm} = -0.01y - 0.8xy + x + 0.2$ $J_{12in} = -0.7y + xy + 0.81x + 0.49$	$J_{21ns} = -0.2y + 0.5xy + 0.144x - 0.2$ $J_{21fm} = -0.9y + 0.1xy + 0.9x + 0.1$ $J_{21in} = -0.9y + 0.01xy + 0.9x - 0.8$
20	$J_{12ns} = 0.07y - 0.02x$ $J_{12fm} = 0.03y + 0.011x + 0.002$ $J_{12in} = 0.14y + 0.01x - 0.06$	$J_{21ns} = 0.01y + 0.02x + 0.03$ $J_{21fm} = 0.05y + 0.02x + 0.06$ $J_{21in} = -0.019y + 0.012x + 0.031$

Таблиця 3. Ситуаційні матриці ймовірностей факторів ризику.

№ вар	Ситуаційні матриці ймовірностей факторів ризику	
	R_1	R_2
1	$\begin{array}{ c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & \\ \hline 0.03 & 0.03 & 0.05 & \eta_{ns} \\ \hline 0.01 & 0.015 & 0.02 & \eta_{fm} \\ \hline 0.04 & 0.01 & 0.01 & \eta_{in} \\ \hline y=0 & y=1 & y=2 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & \\ \hline 0.07 & 0.09 & 0.12 & \eta_{ns} \\ \hline 0.04 & 0.01 & 0.03 & \eta_{fm} \\ \hline 0.002 & 0.004 & 0.015 & \eta_{in} \\ \hline x=0 & x=1 & x=2 & \\ \hline \end{array}$
2	$\begin{array}{ c c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \\ \hline 0.13 & 0.12 & 0.10 & 0.12 & \eta_{ns} \\ \hline 0.07 & 0.02 & 0.03 & 0.05 & \eta_{fm} \\ \hline 0.02 & 0.19 & 0.02 & 0.04 & \eta_{in} \\ \hline y=0 & y=1 & y=2 & y=3 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \\ \hline 0.03 & 0.02 & 0.01 & 0.02 & \eta_{ns} \\ \hline 0.15 & 0.13 & 0.11 & 0.07 & \eta_{fm} \\ \hline 0.02 & 0.09 & 0.12 & 0.14 & \eta_{in} \\ \hline x=0 & x=1 & x=2 & x=3 & \\ \hline \end{array}$
3	$\begin{array}{ c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & \\ \hline 0.03 & 0.03 & 0.05 & \eta_{ns} \\ \hline 0.01 & 0.015 & 0.02 & \eta_{fm} \\ \hline 0.04 & 0.10 & 0.01 & \eta_{in} \\ \hline y=0 & y=1 & y=2 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & \\ \hline 0.07 & 0.09 & 0.12 & \eta_{ns} \\ \hline 0.04 & 0.01 & 0.03 & \eta_{fm} \\ \hline 0.002 & 0.004 & 0.015 & \eta_{in} \\ \hline x=0 & x=1 & x=2 & \\ \hline \end{array}$
4	$\begin{array}{ c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & \\ \hline 0.01 & 0.13 & 0.08 & \eta_{ns} \\ \hline 0.07 & 0.10 & 0.12 & \eta_{fm} \\ \hline 0.15 & 0.01 & 0.03 & \eta_{in} \\ \hline y=0 & y=1 & y=2 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \\ \hline 0.11 & 0.08 & 0.06 & 0.19 & \eta_{ns} \\ \hline 0.02 & 0.07 & 0.15 & 0.03 & \eta_{fm} \\ \hline 0.09 & 0.09 & 0.01 & 0.02 & \eta_{in} \\ \hline x=0 & x=1 & x=2 & x=3 & \\ \hline \end{array}$

Продовження таблиці 3.

5	$\begin{array}{c} \left\ \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0.10 & 0.15 & 0.10 & 0.05 \\ 0.15 & 0.20 & 0.05 & 0.15 \\ 0.25 & 0.015 & 0.10 & 0.10 \\ y=0 & y=1 & y=2 & y=3 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array} \end{array}$	$\begin{array}{c} \left\ \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0.20 & 0.10 & 0.05 & 0.15 \\ 0.10 & 0.015 & 0.20 & 0.15 \\ 0.025 & 0.23 & 0.10 & 0.21 \\ x=0 & x=1 & x=2 & x=3 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array} \end{array}$
6	$\begin{array}{c} \left\ \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \\ 0.10 & 0.40 & 0.10 \\ 0.20 & 0.50 & 0.10 \\ 0.30 & 0.05 & 0.20 \\ y=0 & y=1 & y=2 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array} \end{array}$	$\begin{array}{c} \left\ \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0.10 & 0.231 & 0.05 & 0.02 \\ 0.15 & 0.10 & 0.15 & 0.13 \\ 0.50 & 0.32 & 0.20 & 0.001 \\ x=0 & x=1 & x=2 & x=3 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array} \end{array}$
7	$\begin{array}{c} \left\ \begin{array}{cccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\ 0.02 & 0.02 & 0.04 & 0.06 & 0.03 & 0.01 \\ 0.10 & 0.10 & 0.10 & 0.10 & 0.10 & 0.12 \\ 0.03 & 0.08 & 0.10 & 0.07 & 0.02 & 0.04 \\ y=0 & y=1 & y=2 & y=3 & y=4 & y=5 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array} \end{array}$	$\begin{array}{c} \left\ \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0.10 & 0.231 & 0.05 & 0.02 \\ 0.15 & 0.10 & 0.15 & 0.13 \\ 0.50 & 0.32 & 0.20 & 0.001 \\ x=0 & x=1 & x=2 & x=3 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array} \end{array}$
8	$\begin{array}{c} \left\ \begin{array}{ccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 0.025 & 0.05 & 0.10 & 0.05 & 0.025 \\ 0.50 & 0.10 & 0.20 & 0.10 & 0.50 \\ 0.025 & 0.05 & 0.10 & 0.05 & 0.025 \\ y=0 & y=1 & y=2 & y=3 & y=4 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array} \end{array}$	$\begin{array}{c} \left\ \begin{array}{ccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 0.0125 & 0.025 & 0.05 & 0.025 & 0.0125 \\ 0.025 & 0.05 & 0.10 & 0.05 & 0.25 \\ 0.0125 & 0.25 & 0.05 & 0.025 & 0.0125 \\ x=0 & x=1 & x=2 & x=3 & x=4 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array} \end{array}$
9	$\begin{array}{c} \left\ \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0.30 & 0.50 & 0.10 & 0.30 \\ 0.30 & 0.40 & 0.04 & 0.10 \\ 0.10 & 0.70 & 0.12 & 0.30 \\ y=0 & y=1 & y=2 & y=3 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array} \end{array}$	$\begin{array}{c} \left\ \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \\ 0.10 & 0.20 & 0.25 \\ 0.10 & 0.01 & 0.10 \\ 0.01 & 0.15 & 0.05 \\ x=0 & x=1 & x=2 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array} \end{array}$

Продовження таблиці 3.

10	$\left\ \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \\ 0.15 & 0.10 & 0.20 \\ 0.10 & 0.01 & 0.15 \\ 0.05 & 0.25 & 0.10 \\ y=0 & y=1 & y=2 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array}$	$\left\ \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \\ 0.10 & 0.20 & 0.25 \\ 0.10 & 0.01 & 0.10 \\ 0.01 & 0.15 & 0.05 \\ x=0 & x=1 & x=2 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array}$
11	$\left\ \begin{array}{cccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\ 0.10 & 0.20 & 0.25 & 0.40 & 0.40 & 0.40 \\ 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.10 & 0.05 & 0.05 \\ 0.10 & 0.20 & 0.30 & 0.25 & 0.25 & 0.15 \\ y=0 & y=1 & y=2 & y=3 & y=4 & y=5 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array}$	$\left\ \begin{array}{cccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\ 0.15 & 0.20 & 0.30 & 0.30 & 0.20 & 0.10 \\ 0.05 & 0.10 & 0.15 & 0.15 & 0.25 & 0.20 \\ 0.30 & 0.25 & 0.30 & 0.40 & 0.50 & 0.35 \\ x=0 & x=1 & x=2 & x=3 & x=4 & x=5 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array}$
12	$\left\ \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \\ 0.30 & 0.25 & 0.27 \\ 0.07 & 0.11 & 0.14 \\ 0.01 & 0.015 & 0.01 \\ y=0 & y=1 & y=2 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array}$	$\left\ \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0.08 & 0.10 & 0.13 & 0.15 \\ 0.06 & 0.05 & 0.03 & 0.025 \\ 0.01 & 0.02 & 0.01 & 0.015 \\ x=0 & x=1 & x=2 & x=3 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array}$
13	$\left\ \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0.04 & 0.03 & 0.15 & 0.05 \\ 0.05 & 0.01 & 0.02 & 0.02 \\ 0.10 & 0.05 & 0.10 & 0.10 \\ y=0 & y=1 & y=2 & y=3 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array}$	$\left\ \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \\ 0.10 & 0.10 & 0.15 \\ 0.05 & 0.10 & 0.10 \\ 0.05 & 0.10 & 0.25 \\ x=0 & x=1 & x=2 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array}$
14	$\left\ \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0.03 & 0.11 & 0.09 & 0.02 \\ 0.17 & 0.43 & 0.03 & 0.03 \\ 0.26 & 0.25 & 0.02 & 0.06 \\ y=0 & y=1 & y=2 & y=3 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array}$	$\left\ \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0.13 & 0.01 & 0.19 & 0.27 \\ 0.07 & 0.24 & 0.30 & 0.15 \\ 0.16 & 0.50 & 0.29 & 0.08 \\ x=0 & x=1 & x=2 & x=3 \end{array} \right\ \begin{array}{l} \eta_{ns} \\ \eta_{fm} \\ \eta_{in} \end{array}$

Продовження таблиці 3.

15	$\begin{array}{ c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & \\ \hline 0.10 & 0.05 & 0.20 & \eta_{ns} \\ \hline 0.01 & 0.10 & 0.01 & \eta_{fm} \\ \hline 0.12 & 0.03 & 0.06 & \eta_{in} \\ \hline y=0 & y=1 & y=2 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & \\ \hline 0.10 & 0.20 & 0.25 & \eta_{ns} \\ \hline 0.10 & 0.01 & 0.10 & \eta_{fm} \\ \hline 0.01 & 0.15 & 0.05 & \eta_{in} \\ \hline x=0 & x=1 & x=2 & \\ \hline \end{array}$
16	$\begin{array}{ c c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \\ \hline 0.17 & 0.09 & 0.15 & 0.10 & \eta_{ns} \\ \hline 0.06 & 0.12 & 0.30 & 0.20 & \eta_{fm} \\ \hline 0.08 & 0.10 & 0.40 & 0.10 & \eta_{in} \\ \hline y=0 & y=1 & y=2 & y=3 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & \\ \hline 0.10 & 0.10 & 0.15 & \eta_{ns} \\ \hline 0.05 & 0.10 & 0.10 & \eta_{fm} \\ \hline 0.05 & 0.10 & 0.05 & \eta_{in} \\ \hline x=0 & x=1 & x=2 & \\ \hline \end{array}$
17	$\begin{array}{ c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & \\ \hline 0.17 & 0.09 & 0.15 & \eta_{ns} \\ \hline 0.06 & 0.12 & 0.20 & \eta_{fm} \\ \hline 0.08 & 0.10 & 0.10 & \eta_{in} \\ \hline y=0 & y=1 & y=2 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \\ \hline 0.10 & 0.10 & 0.15 & 0.02 & \eta_{ns} \\ \hline 0.50 & 0.10 & 0.10 & 0.10 & \eta_{fm} \\ \hline 0.10 & 0.10 & 0.25 & 0.01 & \eta_{in} \\ \hline x=0 & x=1 & x=2 & x=3 & \\ \hline \end{array}$
18	$\begin{array}{ c c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \\ \hline 0.10 & 0.20 & 0.20 & 0.15 & \eta_{ns} \\ \hline 0.05 & 0.01 & 0.30 & 0.10 & \eta_{fm} \\ \hline 0.25 & 0.01 & 0.20 & 0.10 & \eta_{in} \\ \hline y=0 & y=1 & y=2 & y=3 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & \\ \hline 0.02 & 0.20 & 0.30 & 0.10 & 0.10 & \eta_{ns} \\ \hline 0.08 & 0.20 & 0.20 & 0.10 & 0.13 & \eta_{fm} \\ \hline 0.01 & 0.10 & 0.13 & 0.12 & 0.11 & \eta_{in} \\ \hline x=0 & x=1 & x=2 & x=3 & x=4 & \\ \hline \end{array}$
19	$\begin{array}{ c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & \\ \hline 0.10 & 0.50 & 0.10 & \eta_{ns} \\ \hline 0.20 & 0.03 & 0.15 & \eta_{fm} \\ \hline 0.02 & 0.01 & 0.10 & \eta_{in} \\ \hline y=0 & y=1 & y=2 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & \\ \hline 0.30 & 0.09 & 0.40 & \eta_{ns} \\ \hline 0.20 & 0.10 & 0.07 & \eta_{fm} \\ \hline 0.08 & 0.30 & 0.20 & \eta_{in} \\ \hline x=0 & x=1 & x=2 & \\ \hline \end{array}$
20	$\begin{array}{ c c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & \\ \hline 0.23 & 0.27 & 0.11 & 0.01 & \eta_{ns} \\ \hline 0.11 & 0.11 & 0.07 & 0.29 & \eta_{fm} \\ \hline 0.05 & 0.06 & 0.02 & 0.08 & \eta_{in} \\ \hline y=0 & y=1 & y=2 & y=3 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline S_1 & S_2 & S_3 & \\ \hline 0.06 & 0.02 & 0.10 & \eta_{ns} \\ \hline 0.09 & 0.01 & 0.21 & \eta_{fm} \\ \hline 0.13 & 0.21 & 0.23 & \eta_{in} \\ \hline x=0 & x=1 & x=2 & \\ \hline \end{array}$

ДОДАТОК 1

Формула Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

Розглядається система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку у векторно-матричній формі

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \in [0, \infty). \quad (1)$$

Тут $x(t) \in R^n$ – n -вимірний вектор невідомих змінних, тотожний стану деякої системи, залежної від часу t ; $u(t) \in R^m$ – вектор зовнішніх впливів (вхід системи, керування); $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ – задані матриці, відповідно, розмірів $(n \times n)$ та $(n \times m)$.

Для рівняння (1) розглядається задача Коші, а саме, у припущенні, що заданий початковий вектор стану

$$x(t)|_{t=0} = x^0 \in R^n, \quad (2)$$

а також відомий вхідний процес $u(t), t \in [0, \infty)$, треба знайти розв'язок рівняння (1), тобто процес $x(t), t \in [0, \infty)$.

Як прийнято в теорії диференціальних рівнянь, спочатку знайдемо розв'язок поставленої задачі у випадку однорідного диференціального рівняння

$$\dot{x}(t) = Ax(t), t \in [0, \infty) \quad (3)$$

з тією ж початковою умовою (2).

Шуканий процес $x(t), t \in [0, \infty)$ будемо знаходити у вигляді розкладу в ряд Маклорена

$$x(t) = x^0 + x'(t)|_{t=0} \cdot t + x''(t)|_{t=0} \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots, t \in [0, \infty). \quad (4)$$

Використовуючи рівняння (3), послідовно диференціюємо:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \frac{d^2x(t)}{dt^2} = A^2x(t), \frac{d^3x(t)}{dt^3} = A^3x(t), \dots, t \in [0, \infty). \quad (5)$$

Покладемо в (5) $t = 0$ і отримаємо:

$$x'(t)|_{t=0} = Ax^0, \quad x''(t)|_{t=0} = A^2x^0, \quad x'''(t)|_{t=0} = A^3x^0, \dots$$

Тепер формула (4) набуває вигляду

$$\begin{aligned} x(t) &= x^0 + tAx^0 + \frac{(tA)^2}{2!}x^0 + \frac{(tA)^3}{3!}x^0 + \dots = \\ &= \left[I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots \right] x^0. \end{aligned} \quad (6)$$

Ряд в квадратних дужках у формулі (6) називається *матричним експоненціалом* або *експоненціальною функцією*

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots \quad (7)$$

Цей ряд збігається абсолютно та рівномірно для будь-якої постійної матриці A для всіх скінчених значень t .

Візьмемо похідну лівої та правої частини рівності (7)

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2!} + \dots = A \left[I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots \right] = Ae^{At} = e^{At} A. \quad (8)$$

З врахуванням (7) розв'язок (6) можна переписати у вигляді

$$x(t) = e^{At} x^0. \quad (9)$$

Безпосередньою підстановкою, приймаючи до уваги формулу (8), впевнюємось, що процес (9) задовольняє диференціальне рівняння (3) з початковими умовами (2).

Тепер знову повертаємось до початкового неоднорідного рівняння (1), використовуючи метод варіації довільної постійної. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді

$$x(t) = e^{At} z(t), \quad (10)$$

де $z(t) \in R^n$ – невідома функція.

Візьмемо похідну лівої та правої частини (10) і отримаємо:

$$\dot{x}(t) = Ae^{At} z(t) + e^{At} \dot{z}(t)$$

або

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + e^{At} \dot{z}(t).$$

З іншого боку, враховуючи рівність (1), після виключення похідної, одержимо

$$Bu(t) = e^{At} \dot{z}(t). \quad (11)$$

Помноживши в (11) ліву та праву частини на e^{-At} , отримаємо

$$\dot{z}(t) = e^{-At} Bu(t). \quad (12)$$

Інтегруючи рівність (12), отримаємо

$$z(t) = \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau + c, \quad (13)$$

де c – константа.

Із рівності (10), враховуючи (13), отримуємо

$$x(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} Bu(\tau) d\tau + e^{At} c. \quad (14)$$

Константа c знаходиться з умови (2): $c = x^0$.

Остаточно формулу (14) можемо переписати у вигляді

$$x(t) = e^{At} x^0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} Bu(\tau) d\tau.$$

Література

1. Згуровський М.З., Панкратова Н.Д. Основи системного аналізу, Підручник. –К.: Видав. Група ВНУ, 2007. – 544 с.
2. Катренко А.В. Системний аналіз, Підручник, Львів: Новий світ-2000 , 2011. – 396 с.
3. Наконечний О.Г., Зінько П.М. Математичні методи аналізу матричних даних в умовах невизначеності: Навчальний посібник. – К.: Р.К. Майстер-принт, «Фамільна друкарня», 2022. – 208 с.
4. Панкратова Н.Д. Системний аналіз. Теорія. Застосування, Підручник. – К.: Наукова думка, 2018. – 346с.
5. Прокопенко Т.О. Теорія систем і системний аналіз: Навч. посібник [Електр. ресурс] . – Черкаси, ЧДТУ, 2019. – 139 с. – Назва з титульного екрана.
er.cdtu.edu.ua/bitstream/ChSTU/986/1/TCICA_НП_Прокопенко.pdf
6. Швець С.В. Основи системного аналізу: Навч. посібник. – Суми: Сумський держ. університет, 2017. – 126 с.
7. Системний аналіз сталого розвитку: Навч. посібник. – К.: «МП Леся», 2015. – 512 с.
8. Бутко М.П., Бутко І.М., Фітковська М.Ю., Мурашко М.І. Системний підхід і моделювання в наукових дослідженнях. – К.: Видавництво: «Центр учбової літератури». – 2024. – 360 с.
9. Згуровський М.З. Глобальні тренди штучного інтелекту: Виклики, можливості, перспективи // Кібернетика та системний аналіз. – 2025, том 61, № 4. – С. 9 – 31.
10. Бакан Г.М., Волошин О.Ф., Зінько П.М. Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з курсу «Теорія систем». – К.: РВЦ «Київський університет», 1997. – 38 с.
11. Романенко В.Д., Мілявський Ю.Л. Теорія керування і прогнозування у складних системах [Електр. ресурс]: Підручник. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 404 с. назва з екрана
<https://ela.kpi.ua/handle/123456789/67937>
12. Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О.Г. Задачі, методи та алгоритми оптимізації: Навч. посіб. 2-ге вид., перероб. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2012. – 799 с.
13. Панкратова Н.Д., Недашківська Н.І. Моделі і методи аналізу ієрархій. Теорія. Застосування, Навч. посібник. – К.: НТУУ «КПІ», 2010. – 372 с.
14. Панкратова Н.Д., Недашківська Н.І. Комплексне оцінювання чутливості рішення на основі методу аналізу ієрархій // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2006. – № 3. – С. 7 – 25.
15. Пащенко Т.П., Чернега В.М., Хорошилова С.Й. Методика прийняття рішень щодо вибору напряму розмінування на основі методу аналізу ієрархій // Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. – 2024. - № 2 (50). – С. 129 – 138.

16. *Фісун М.Т., Кандиба І.О., Горбань Г.В., Фаленкова М.В.* Використання методу аналізу ієрархій для вибору засобів розробки синтаксичних аналізаторів при створенні DSL // *Наук. Праці ВНТУ*. – 2021. – № 1.
URL: <https://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/628/590>
(дата звернення: 31.05.2024)
17. *Чорней Н.Б., Чорней Р.К.* Теорія систем і системний аналіз, Навч. посібник. – К.: МАУП, 2005. – 256 с.
18. *Zgurovsky M., Yefremov K., Gapon S., Pyshnograiev I.* Assessment of the economical dimension of sustainable development of the ukraine's regions based on the brightness of night lights // *System research and information technologies*. – 2023, No. 2. – P. 49 – 62.
19. *Zgurovsky M.Z., Pankratova N.D.* System analysis: Theory and Applications, Springer. – 2007. – 475 p.
20. *Alan Dennis, Barbara Wixom, Roberta M. Roth,* Systems Analysis and Design, 7th Edition, Wiley, 2018.– 464 p.
21. *Pankratova N.D., Bidyuk P.I.* Foresight and forecast for prevention, mitigation and recovering after social, technical and environmental disasters // *Improving Disasters Resilience and Mitigation – IT Means and Tools*. – Springer, 2014. – P. 119 – 134.
22. *Mardani A., Jusoh A., Nor K.MD, Khalifah Z., Zakwan N.* Multiple criteria decision-making and their applications – a review of the literature from 2000 to 2014 // *Economic Research-Economika Istrahivanja*. – 2015, Vol. 28, Issue 1. – P. 516 – 571.
<https://dx.doi.org/10.1080/1331677X.2015.1075139>
23. *Levenchuk L.B., Tymoshchuk O.L., Guskova V.H., Bidyuk P.I.* Uncertainties in data processing, forecasting and decision making// *System research and information technologies*. – 2023, No. 3. – P. 66 – 80.
24. *Luis G. Birta, Gilbert Arber,* Modelling and Simulation: Exploring Dynamic System Behavior, Third Edition, Springer, 2021. – 551 p.
25. *Ramanathan R.* Data envelopment analysis for weight derivation and aggregation in the analytic hierarchy process // *Computers and Operations Research*. – 2006. – Vol. 33, No. 5. – P. 1289 – 1307.
26. *Saaty T.L.* Rank from comparisons and from ratings in the analytic hierarchy network processes // *European Journal of Operational Research*. – 2006. – Vol. 168, No. 2. – P. 557 – 570.
27. *Wang Y.M., Elhag T.M.S.* A goal programming method for obtaining interval weights from an interval comparison matrix // *European Journal of Operational Research*. – 2007. – Vol. 177, No. 1. – P. 458 – 471.
28. *Stein W.E., Mizzi P.J.* The harmonic consistency index for the analytic hierarchy processes // *European Journal of Operational Research*. – 2007. – Vol. 177, No. 1. – P. 488 – 497.

29. *Hafeez K., Malak N., Zhang Y.B.* Outsourcing non-core assets and complements of a firm using analytic hierarchy process // *Computers and Operations Research*. – 2007. – Vol. 34. – P. 3592 – 3608.
30. *Pankratova N.D., Kondratova L.P.* System evaluation of engineering objects operating taking into account the margin of permissible risk // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2016. – No. 3. – P. 13 – 19.
31. *Pankratova N.D., Zrazhevskaja N.G.* Method of dynamic VAR and CVAR risk measures forecasting for long range dependent time series on the base of the heteroscedastic model // *Intelligent Control and Automation*. – 2017. – No. 8. – P. 126 – 138.