

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка

І.В. Стеценко, С.Д. Волощук, Я.П. Троценко

Методи моделювання систем

Лабораторний практикум

Навчальний посібник

Київ – 2026

Рецензенти:

доктор технічних наук, старший дослідник О.Г. Лебідь,
доктор технічних наук, доцент Д.І. Черній

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики,
протокол № 15 від 27 травня 2026 р.

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики,
протокол № 11 від 18 травня 2026 р.

д.т.н., проф. Стеценко Інна Вячеславівна,
к.ф.-м.н., доц. Волощук Сергій Дмитрович,
Ph.D., асистент Троценко Ярослав Павлович

Методи моделювання систем. Лабораторний практикум: навчальний посібник /
І.В. Стеценко, С.Д. Волощук, Я.П. Троценко. – Київ, 2026. – 166 с.

Викладено матеріали до вибіркової навчальної дисципліни “Методи моделювання систем”. У посібнику наведено навчальний матеріал і завдання лабораторних робіт з прикладами їх виконання згідно з робочою програмою навчальної дисципліни “Методи моделювання систем”. Розглянуто основні завдання та методи моделювання, а саме: методи ідентифікації законів розподілу, апроксимації функціональної залежності та її дослідження, методи моделювання дискретно-подійних систем на основі мереж масового обслуговування та мереж Петрі, для яких також розглянуті методи імітаційного моделювання.

Для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які навчаються за освітньою програмою “Інформатика” спеціальності “Комп'ютерні науки” першого (бакалаврського) рівня вищої освіти.

Зміст

Вступ.....	6
Тема 1. Задачі, методи та процеси моделювання. Класифікація моделей	9
1.1. Поняття системи.....	9
1.2. Поняття та структура моделі.....	10
1.3. Підходи до побудови моделей.....	10
1.4. Класифікація моделей.....	11
1.5. Різновиди задач моделювання	12
1.6. Методи моделювання	13
1.7. Процес побудови та дослідження моделі	14
1.8. Системний підхід до моделювання	15
Питання для самоконтролю	17
Задачі для самостійного розв'язування	18
Тема 2. Ідентифікація закону розподілу випадкової величини.....	20
Питання для самоконтролю	26
Задачі для самостійного розв'язування	27
Тема 3. Лінійні регресійні моделі систем та їх дослідження.....	29
Питання для самоконтролю	38
Задачі для самостійного розв'язування	39
Тема 4. Гетероскедастичність та автокореляція залишків лінійної регресійної моделі	42
4.1. Гетероскедастичність залишків лінійної моделі множинної регресії	43
4.1.1. Гетероскедастичність залишків, її суть та наслідки.....	43
4.1.2. Тестування наявності гетероскедастичності.....	45
4.2. Автокореляція залишків лінійної моделі множинної регресії	48
4.2.1. Автокореляція залишків, її суть та наслідки.....	48
4.2.2. Методи виявлення автокореляції	50
Питання для самоконтролю	52
Задачі для самостійного розв'язування	53

Тема 5. Моделювання дискретно-подійних систем засобами мереж масового обслуговування та мереж Петрі.....	55
5.1. Поняття системи та мережі масового обслуговування	55
5.2. Блокування маршруту у мережі масового обслуговування.....	59
5.3. Поняття мережі Петрі	60
5.4. Часові затримки в мережах Петрі. Моделі типових процесів функціонування	64
5.5. Конфліктні переходи в мережах Петрі. Способи вирішення конфліктів	67
5.6. Багатоканальні переходи в мережах Петрі.....	69
5.7. Інформаційні зв'язки в мережах Петрі	70
Питання для самоконтролю	72
Задачі для самостійного розв'язування	73
Тема 6. Аналітичне дослідження властивостей мереж масового обслуговування та мереж Петрі.....	75
6.1. Аналітичне дослідження властивостей мереж масового обслуговування.....	75
6.1.1. Розрахунок параметрів розімкнених мереж масового обслуговування.....	75
6.1.2. Розрахунок параметрів замкнених мереж масового обслуговування.....	82
6.2. Матричне представлення мереж Петрі	86
6.3. Дослідження властивостей мереж Петрі	90
6.4. Дерево досяжності	95
Питання для самоконтролю	98
Задачі для самостійного розв'язування	99
Тема 7. Елементи імітаційного моделювання	102
7.1. Поняття генератора випадкових величин.....	102
7.1.1. Методи тестування генераторів випадкових величин	105
7.1.2. Методи генерування випадкових величин	107

7.2. Поняття алгоритму імітації.....	109
7.2.1 Алгоритми просування модельного часу	111
7.2.2 Алгоритми зміни стану моделі	112
7.2.3 Алгоритми збору статистичної інформації	115
7.3. Основи імітаційного моделювання мереж масового обслуговування	117
7.4. Основи імітаційного моделювання мереж Петрі.....	121
7.4.1. Матрично-векторний підхід до опису мережі Петрі.....	122
7.4.2. Об'єктно-орієнтований підхід до моделювання мереж Петрі	124
Питання для самоконтролю	125
Задачі для самостійного розв'язування	126
8. Лабораторні роботи.....	128
8.1. Лабораторна робота № 1. Ідентифікація закону розподілу	128
8.2. Лабораторна робота № 2. Апроксимація функціональної залежності	132
8.3. Лабораторна робота № 3. Аналітичне моделювання мережі масового обслуговування	141
8.4. Лабораторна робота № 4. Імітаційне моделювання мережі масового обслуговування	150
Список використаних джерел	161
Предметний покажчик	163
Іменний покажчик	166

Вступ

Сучасний етап розвитку науки і техніки характеризується стрімким зростанням складності досліджуваних систем, що функціонують у різних галузях діяльності людини – від економіки, біології та соціальних процесів до інформаційних технологій. У цих умовах традиційні підходи до аналізу та моделювання систем часто виявляються недостатніми, що зумовлює необхідність використовувати методи математичного та комп'ютерного моделювання. Моделювання дозволяє досліджувати властивості систем, не втручаючись безпосередньо в процес їхнього функціонування, прогнозувати поведінку, оптимізувати параметри та приймати обґрунтовані управлінські рішення.

Актуальність вивчення методів моделювання систем обумовлена також розвитком цифрових технологій, зростанням обсягів даних і потребою в їх ефективному аналізі. Особливого значення набувають методи, що поєднують аналітичні підходи з імітаційним моделюванням, дозволяючи досліджувати як детерміновані, так і стохастичні системи. Зокрема, моделі масового обслуговування та мережі Петрі є потужними інструментами для опису дискретно-подійних систем, таких як комп'ютерні мережі, виробничі процеси, логістичні системи та інформаційні потоки.

У цьому навчальному посібнику викладено основні методи моделювання систем, зокрема їх теоретичні основи, статистичні методи обробки даних та побудови регресійних моделей, аналітичні та імітаційні підходи до дослідження складних процесів. Його структура побудована так, щоб забезпечити послідовний перехід від загальних понять до спеціальних методів побудови та аналізу моделей.

При підготовці цього посібника автори спиралися на матеріали навчального посібника Стеценко І. В. “Моделювання систем”, які були переосмислені та доповнені відповідно до цілей і завдань даного видання.

У першій темі розглядаються базові поняття моделювання, зокрема визначення моделі, її властивості та роль у дослідженні систем. Окрему увагу приділено класифікації моделей, способам їх побудови та основним задачам моделювання. Також розглядається процес моделювання як послідовність етапів – від постановки задачі до перевірки адекватності моделі. Важливим елементом є системний підхід, що дозволяє враховувати взаємозв'язки між елементами складних систем.

Друга тема присвячена методам збору та аналізу даних, необхідних для побудови моделей. Розглядаються підходи до отримання експериментальної інформації та методи ідентифікації закону розподілу випадкових величин. Це є ключовим етапом у побудові стохастичних моделей, оскільки правильний вибір розподілу визначає адекватність подальшого моделювання.

У третій темі викладено методи апроксимації функціональних залежностей, що широко використовуються при побудові математичних моделей за експериментальними даними. Розкрито питання мультиколінеарності вхідних даних і розглянуто методи оцінювання параметрів регресійної моделі та їх аналізу.

Четверта тема присвячена важливим аспектам аналізу регресійних моделей, а саме проблемам гетероскедастичності та автокореляції залишків. Розглянуто їх сутність, причини виникнення та наслідки. Описано методи їх виявлення.

У п'ятій темі розглядаються методи моделювання дискретно-подійних систем за допомогою мереж масового обслуговування, які широко застосовуються для опису систем із чергами, а також мереж Петрі, включаючи моделі з часовими затримками, конфліктами та багатоканальними переходами. Такий підхід дозволяє формалізувати складні процеси взаємодії в системах різної природи.

У шостій темі розглядаються аналітичні методи дослідження мереж масового обслуговування, зокрема для розімкнених та замкнених систем. Також висвітлюється матричний підхід до виявлення і дослідження основних

властивостей мереж Петрі, що дає змогу аналізувати їх поведінку без проведення імітаційних експериментів.

Сьома тема присвячена елементам імітаційного моделювання, яке є одним із найбільш універсальних інструментів дослідження складних систем. Розглядаються методи генерації випадкових величин, алгоритми моделювання дискретно-подійних процесів, а також підходи до реалізації моделей мереж масового обслуговування та мереж Петрі.

Завершальна частина посібника містить лабораторні роботи, спрямовані на закріплення теоретичних знань і формування практичних навичок. Вони охоплюють перевірку генераторів випадкових чисел, ідентифікацію моделей за експериментальними даними, а також аналітичне й імітаційне дослідження систем масового обслуговування.

Таким чином, навчальний посібник охоплює широкий спектр методів моделювання систем і поєднує теоретичні основи з практичними аспектами їх застосування. Його використання сприятиме формуванню у студентів системного мислення, навичок аналізу складних процесів і здатності застосовувати сучасні методи моделювання у професійній діяльності.

Тема 1. Задачі, методи та процеси моделювання. Класифікація моделей

1.1. Поняття системи

Розглянемо основні поняття, які є важливими при моделюванні систем.

Означення. Система – це цілісний комплекс взаємопов'язаних елементів, який має певну структуру та взаємодіє із зовнішнім середовищем.

Структура системи визначається множиною зв'язків між її елементами та їх організацією.

Під **зв'язком** між елементами системи розуміють можливість впливу одного елемента на інший.

Середовище функціонування системи – це сукупність елементів зовнішнього світу, які не входять до складу системи, але впливають на її поведінку та властивості.

Вводиться також поняття **межі системи**, яка відокремлює систему від зовнішнього середовища. Вибір такої межі є умовним і залежить від мети дослідження.

Система називається:

- **відкритою**, якщо враховується вплив зовнішнього середовища;
- **закритою**, якщо цей вплив відсутній або не враховується.

Стан системи – це сукупність значень параметрів, що характеризують систему в певний момент часу.

Множина всіх можливих станів утворює **простір станів системи**.

Поведінка системи – це зміна її станів у часі під впливом внутрішніх процесів і зовнішнього середовища.

Варто зазначити, що інколи систему визначають як множину елементів, об'єднаних для досягнення певної мети. Таке визначення є доцільним для соціологічних і технічних систем, але не завжди придатне, наприклад, для систем навколишнього середовища (природи), оскільки мета їх функціонування може бути невизначеною [5].

1.2. Поняття та структура моделі

Означення. Модель – це представлення об'єкта, системи або процесу в деякій абстрактній формі, зручній для дослідження.

Структуру моделі можна представити схемою, зображеною на рис. 1.1 [4].

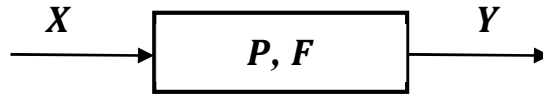


Рис. 1.1. Структура моделі

У загальному вигляді модель задається відображенням:

$$Y = F(X, P),$$

де:

X – множина вхідних змінних системи або об'єкта моделювання;

Y – множина вихідних змінних;

P – множина параметрів;

F – функція, функціонал, алгоритм або формальне представлення залежності змінних Y від змінних X .

1.3. Підходи до побудови моделей

Існує декілька основних підходів до побудови моделей систем, які відрізняються ступенем використання апріорної інформації про об'єкт.

1) Теоретичний підхід (моделі на основі перших принципів)

Модель будується на основі відомих законів функціонування системи. Такі закони можуть мати фізичну, хімічну, економічну або іншу природу та, як правило, задаються у вигляді рівнянь або інших формальних залежностей (наприклад, модель течії рідини у каналі, що ґрунтується на рівняннях гідродинаміки [12]).

Параметри моделі P у цьому випадку:

- пов'язані з реальними процесами в системі;
- мають чітку інтерпретацію.

Моделі такого типу називають **теоретичними, фізично інтерпретованими** або **white-box** моделями.

2) Емпіричний підхід (ідентифікаційний)

Припускається вигляд залежності F множини вихідних змінних Y від множини вхідних змінних X . Невідомі параметри P цієї залежності визначаються на основі експериментальних даних (спостережень за змінними X та Y).

Параметри P у цьому випадку:

- не мають прямої фізичної інтерпретації або вона є невідомою;
- підбираються з метою найкращого узгодження моделі з даними.

Моделі такого типу називають **емпіричними, статистичними** або **black-box** моделями (наприклад, оцінка щільності розподілу випадкової величини [13]).

3) Комбінований підхід

Поєднує теоретичні уявлення про систему з експериментальними даними. Частина структури моделі задається на основі відомих законів, а частина – визначається за результатами спостережень.

Моделі такого типу називають **напівемпіричними** або **grey-box** моделями.

На практиці вибір способу побудови моделі визначається:

- наявністю інформації про систему;
- складністю процесів;
- метою моделювання;
- доступністю експериментальних даних.

1.4. Класифікація моделей

Існує багато підходів до класифікації моделей залежно від властивостей системи, характеру змінних та способу їх опису (див. [3]). Наведемо дві з них [4].

За **характером змін у часі** класифікацію моделей можна представити схемою, зображеною на рис. 1.2.

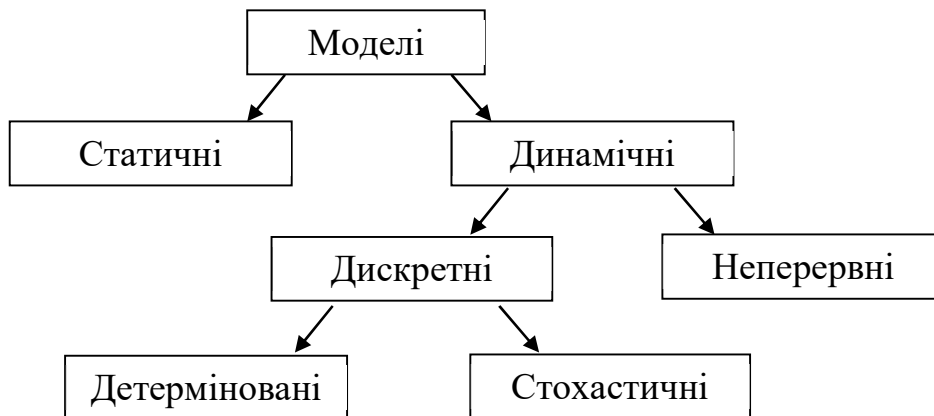


Рис. 1.2. Класифікація моделей за вихідною змінною

З точки зору способу представлення залежності вихідних змінних моделі від її вхідних змінних (тобто вигляду залежності F) розрізняють:

- алгебраїчні моделі – описуються алгебраїчними рівняннями;
- диференціальні моделі – задаються звичайними диференціальними рівняннями або з частинними похідними;
- різницеві моделі – описуються різницевими рівняннями;
- аналітичні моделі – мають явний функціональний вигляд;
- імітаційні моделі – задаються у вигляді алгоритму або комп'ютерної програми.

1.5. Різновиди задач моделювання

Серед усіх задач моделювання можна виділити такі різновиди [4]:

1. **Задача моделювання (або пряма задача)** – знайти значення вихідних змінних Y при відомих значеннях вхідних змінних X , відомій моделі F та визначених параметрах P .

2. **Задача управління (або зворотна задача)** – знайти такі значення вхідних змінних X , що дозволять отримати задані значення вихідних змінних Y при відомій моделі F та фіксованих значеннях параметрів P .

3. **Задача ідентифікації** – визначити єдину модель F з множини запропонованих моделей Φ та її параметри P , що забезпечують при вхідних

значення X вихідні значення Y . У цьому випадку відомими вважаються множини вхідних змінних X , вихідних змінних Y та моделей F .

4. Задачі оптимізації – знайти значення вхідних змінних $x \in X$, параметрів P та вихідних змінних Y , що задовольняють заданому критерію оптимізації K . Відомими в даній задачі є модель F , множина можливих вхідних значень X та критерій оптимізації K .

5. Задача прогнозування – визначити модель F та її параметри P , які забезпечують найкращий прогноз Y_{t+T} у момент часу $t + T$. Відомими при цьому є множини X_t значень вхідних змінних та Y_t вихідних змінних моделі до моменту часу t . Також заданий час прогнозування T .

1.6. Методи моделювання

Залежно від способу отримання та дослідження залежності між змінними моделі розрізняють аналітичні, математичні та імітаційні методи моделювання [4].

1) Аналітичні методи моделювання

Методи моделювання називають **аналітичними**, якщо представлення залежності F вихідних змінних Y від її вхідних змінних X має аналітичний вигляд, тобто представлений у вигляді відомих аналітичних функцій.

Аналітичною називається функція, яка може бути розкладена у ряд Тейлора. Такі функції є диференційовними безліч разів, і до них можуть застосовуватись методи математичного аналізу.

Застосування аналітичних методів дозволяє:

- отримати явний розв'язок задачі;
- дослідити властивості моделі (наприклад, монотонність, екстремуми, стійкість);
- використовувати апарат математичного аналізу.

Перевагою аналітичних методів є висока точність та наочність результатів. Недоліком – складність отримання аналітичного розв'язку для реальних складних систем.

2) Математичні методи моделювання

Методи моделювання називають **математичними**, якщо неможливо знайти залежність $Y = F(X)$ у явному вигляді, але відомий алгоритм пошуку розв'язку. Цей алгоритм може бути реалізований за допомогою спеціального програмного забезпечення або чисельними методами.

Перевагою таких методів є універсальність, недоліком – похибки апроксимації та залежність від обчислювальних ресурсів.

3) Імітаційні методи моделювання

Методи моделювання називають **імітаційними**, якщо процес функціонування системи описується алгоритмом, що відтворює її поведінку у часі.

У цьому випадку:

- модель задається у вигляді програми;
- явна аналітична залежність $Y = F(X)$ може бути відсутня;
- результати отримуються шляхом багаторазового запуску моделі (експериментів).

Імітаційне моделювання дозволяє:

- досліджувати складні системи;
- враховувати випадкові фактори;
- аналізувати системи з дискретними подіями.

Недоліком є необхідність статистичної обробки результатів та значні обчислювальні витрати.

1.7. Процес побудови та дослідження моделі

Процес побудови та дослідження моделі деякого процесу можна представити такими етапами [4].

1. Постановка задачі:

- визначення мети;
- формулювання задачі;
- визначення меж системи.

2. Побудова моделі:

- формування концептуальної моделі;
- вибір теоретичної бази;
- формалізація.

3. Реалізація моделі:

- програмна реалізація;
- налагодження.

4. Перевірка моделі:

- верифікація (правильність моделі);
- валідація (відповідність реальній системі).

5. Дослідження моделі:

- планування експериментів;
- проведення експериментів;
- збір даних.

6. Аналіз результатів:

- інтерпретація;
- формування висновків;
- прийняття рішень.

Процес моделювання – процедура циклічна, тому в ході побудови моделі доводиться повертатись до попередніх етапів процедури моделювання, щоб уточнити постановку задачі, специфікацію моделі, параметри моделі, алгоритм реалізації моделі або план проведення експериментів.

1.8. Системний підхід до моделювання

Задачею системного підходу до побудови та аналізу моделі є формування опису системи, який відповідає меті її дослідження [17].

Опис системи складається з:

- 1) множини вхідних змінних системи та їх основних характеристик;
- 2) множини вихідних змінних системи, які треба визначити для досягнення мети моделювання;

- 3) меж системи та її зовнішнього середовища;
- 4) елементів системи та їх основних властивостей;
- 5) зв'язків між елементами системи.

Сутність системного підходу полягає у розгляді системи як цілісного об'єкта, в якому важливими є не лише властивості окремих елементів, але й їх взаємодія.

Системний підхід ґрунтується на таких положеннях:

- система розглядається як єдине ціле;
- властивості системи не зводяться до суми властивостей її елементів (**емерджентність**);
- важливу роль відіграють прямі та зворотні зв'язки між елементами системи;
- оптимізація окремих підсистем не гарантує оптимальності системи в цілому.

Наведемо деякі характеристики, що заважають поліпшенню функціонування систем [11]:

- **змінюваність** – будь-яка модель має обмежений термін користування;
- **вплив зовнішнього середовища** – часто має випадковий характер;
- **антиінтуїтивна поведінка** – наслідки можуть проявлятися із запізненням або випередженням причин;
- **деградація елементів** – погіршення характеристик системи з часом;
- **взаємозалежність елементів** – зміни в одній частині системи впливають на інші;
- **організація** – існує ієрархія підсистем, що підкорюється призначенню системи.

Будь-яка система є об'єктивною за своєю природою, але її модель – суб'єктивною, оскільки залежить від:

- вибору меж системи;
- рівня деталізації;
- мети дослідження.

Тому одному й тому самому реальному об'єкту можуть відповідати різні моделі.

Моделі, побудовані із застосуванням системного підходу, називаються **системними моделями**.

Опис системи разом із метою та задачею дослідження складає **концептуальну модель системи**.

Етапи створення концептуальної моделі системи [4]:

- 1) орієнтація – визначення мети дослідження системи;
- 2) стратифікація – вибір рівня деталізації системи;
- 3) деталізація – визначення елементів системи;
- 4) локалізація – визначення меж системи та впливу зовнішнього середовища;
- 5) структуризація – визначення зв'язків між елементами системи та із зовнішнім середовищем.

Питання для самоконтролю

1. Дати означення поняття системи, структури системи, середовища функціонування системи.
2. Дати означення поняття моделі. Яку найпростішу структуру має модель?
3. Сформулювати означення фізичної та нефізичної моделі.
4. У чому різниця між задачами моделювання та задачами управління?
5. У чому різниця між задачами ідентифікації та оптимізації?
6. Назвіть відомі вам типи методів моделювання, коли вони застосовуються.
7. З чого складається опис системи моделювання?
8. В чому суть системного підходу до побудови моделі? Які моделі називаються системними моделями?
9. Назвіть характеристики системи, що негативно впливають на її модель.
10. Назвіть етапи створення концептуальної моделі системи.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Розглядається система “платформа для онлайн-навчання”.

Визначити:

- елементи системи;
- структуру системи;
- зовнішнє середовище.

Вказати, чи є система відкритою або закритою. Навести приклад стану системи та описати її поведінку.

2. Розглядається модель:

$$Y = k_1 X_1 + k_2 X_2^2.$$

Визначити множини:

- вхідних змінних;
- вихідних змінних;
- параметрів системи.

Якою є залежність між вхідними та вихідними змінними?

3. Розглядається процес зміни ціни товару залежно від попиту.

Запропонувати:

- модель, побудовану на основі теоретичних припущень;
- модель, побудовану за експериментальними даними.

Вказати до якого типу (white-box, black-box, grey-box) належить кожна модель.

4. Для кожної з наведених моделей визначити її тип:

- модель руху тіла за другим законом Ньютона;
- модель черги в супермаркеті;
- лінійна модель залежності обсягу попиту на товар від його ціни (вважати, що ціни не змінюються з часом);
- імітаційна модель роботи комп'ютерної мережі.

Класифікувати за ознаками:

- статична/динамічна;
- дискретна/неперервна;
- детермінована/стохастична.

5. Для кожної ситуації визначити різновид задачі.

- 1) Обчислити час очікування клієнта в черзі.
- 2) Підібрати параметри моделі попиту за даними.
- 3) Знайти таку швидкість обслуговування, щоб мінімізувати чергу.
- 4) Передбачити кількість клієнтів на наступний місяць.

6. Для кожної ситуації визначити метод моделювання (аналітичний, математичний або імітаційний):

- 1) Отримано явну формулу залежності температури від часу.
- 2) Розв'язання системи диференціальних рівнянь методом скінченних різниць.
- 3) Моделювання роботи банку за допомогою комп'ютерної програми.

7. Розглядається задача моделювання роботи служби доставки.

Визначити:

- мету моделювання;
- вхідні та вихідні змінні;
- параметри моделі.

Описати основні етапи процесу моделювання для цієї задачі. Навести приклад ситуації, коли потрібно повернутися до попереднього етапу.

8. Розглядається система “міський транспорт”.

Побудувати концептуальну модель:

- визначити мету;
- рівень деталізації;
- елементи;
- зовнішнє середовище;
- зв'язки.

Навести приклад:

- емерджентної властивості;
- зворотного зв'язку.

Тема 2. Ідентифікація закону розподілу випадкової величини

Закон розподілу є найважливішою характеристикою випадкової величини. Коли відомий закон розподілу випадкової величини, можна з певною ймовірністю прогнозувати її значення, знаходити ймовірність влучання випадкової величини у заданий інтервал, моделювати випадкові величини, використовуючи генератори випадкових чисел.

Якщо відхилення деякої випадкової величини від її очікуваного значення незначне, то часто таку випадкову величину вважають детермінованою та рівною середньому значенню.

Ідентифікацію закону розподілу випадкової величини проводять так [4]:

1. Формування вибірки.
2. Побудова гістограми частот.
3. Висування гіпотези про закон розподілу.
4. Оцінка параметрів закону розподілу.
5. Перевірка гіпотези за критерієм згоди.

Розглянемо ці пункти детальніше.

1. Формуємо велику вибірку значень досліджуваної випадкової величини.
2. Нехай η – випадкова величина.

- Визначимо її максимальне та мінімальне значення:

$$\eta_{\max} = \max_i(\eta_i), \quad \eta_{\min} = \min_i(\eta_i).$$

- Інтервал $[\eta_{\min}, \eta_{\max}]$ розбиваємо на k інтервалів довжиною

$$h = \frac{\eta_{\max} - \eta_{\min}}{k}.$$

- Якщо вибірка більша 100, то $k = 20$ або більше.
- Підраховуємо частоту (кількість) влучань випадкової величини η у кожен інтервал. Якщо деякий інтервал має менше ніж 5 влучань, то його об'єднують з одним із сусідніх інтервалів.
- Будуємо гістограму отриманих частот.

3. За формою гістограми висувають гіпотезу щодо закону розподілу досліджуваної випадкової величини. Для цього отриману гістограму порівнюють із відомими теоретичними розподілами (див., наприклад, [15]).

Введемо позначення:

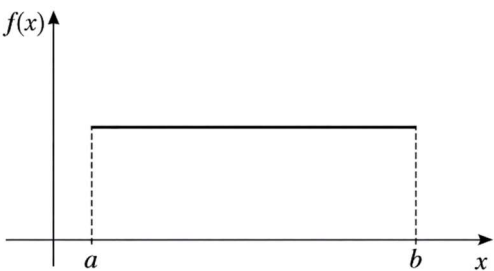
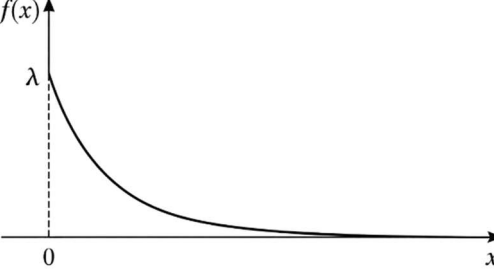
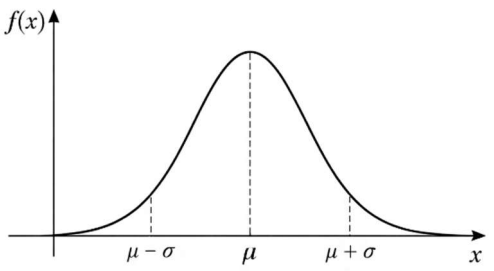
$f(x)$ – щільність закону розподілу випадкової величини;

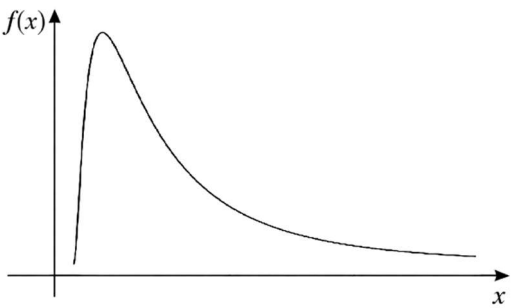
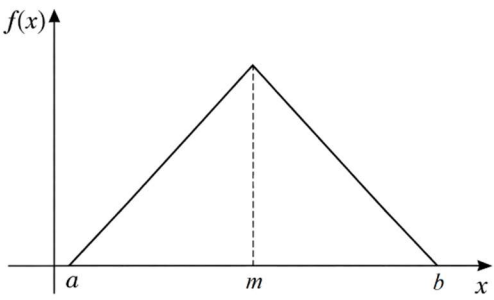
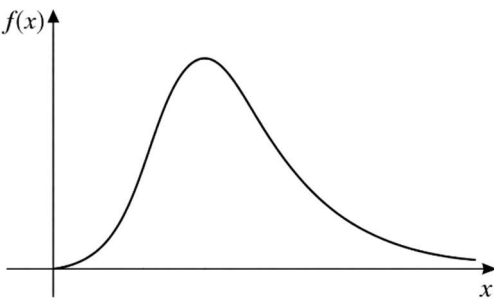

μ – математичне сподівання випадкової величини;

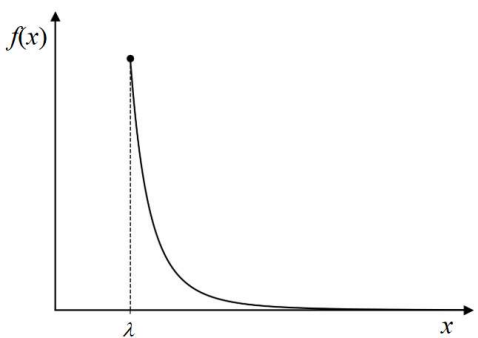
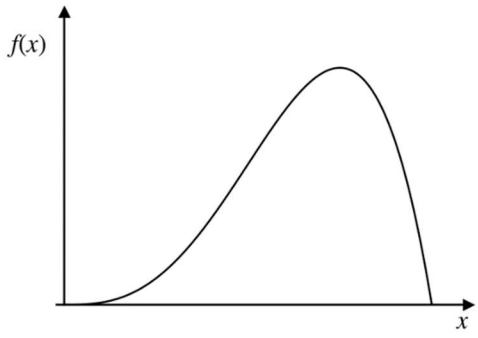
σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

Наведемо основні закони розподілу **неперервних** випадкових величин (див. таблицю 2.1) [4].

Таблиця 2.1. Закони розподілу неперервних величин

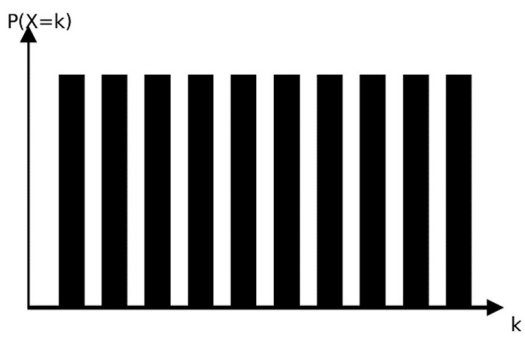
Функція щільності закону розподілу	Графік функції щільності закону розподілу
<p style="text-align: center;">Рівномірний розподіл</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases}$ $\mu = \frac{a+b}{2}, \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$	
<p style="text-align: center;">Експоненційний розподіл</p> $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ $\mu = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}$	
<p style="text-align: center;">Нормальний розподіл (Гаусса)</p> $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$ <p style="text-align: center;">μ – математичне сподівання, σ – стандартне відхилення</p>	

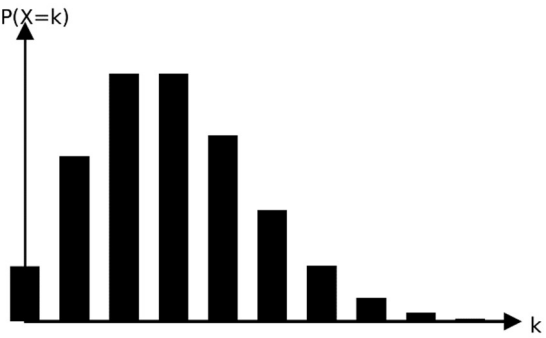
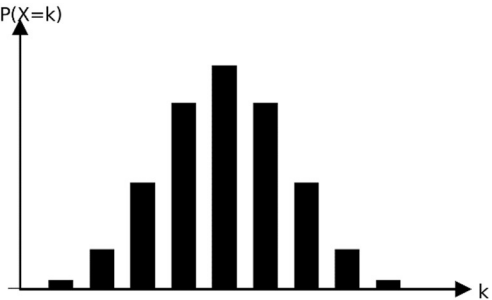
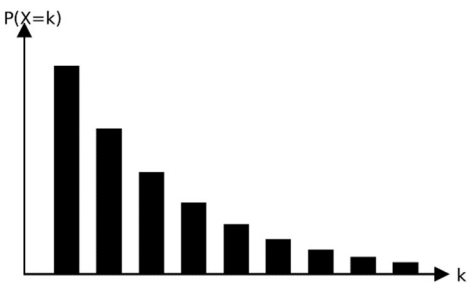
<p style="text-align: center;">Логнормальний розподіл</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{xb\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-a)^2}{2b^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ $\mu = e^{a+\frac{b^2}{2}}, \quad \sigma = \sqrt{e^{2a+b^2}(e^{b^2} - 1)}$	
<p style="text-align: center;">Трикутний розподіл</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(m-a)(b-a)}, & x \in [a, m], \\ \frac{2(b-x)}{(b-m)(b-a)}, & x \in [m, b], \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases}$ $\mu = \frac{a+m+b}{3},$ $\sigma = \frac{\sqrt{a(a-m) + b(b-a) + m(m-b)}}{3\sqrt{2}}$	
<p style="text-align: center;">Розподіл Вейбулла</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^a}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ $\mu = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right),$ $\sigma = \lambda \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right)^2}$	
<p style="text-align: center;">Розподіл Ерланга</p> $f(x) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ $\mu = \frac{k}{\lambda}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}$	

<p style="text-align: center;">Розподіл Парето</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \lambda^\alpha}{x^{\alpha+1}}, & x \geq \lambda, \\ 0, & x < \lambda, \end{cases}$ $\mu = \begin{cases} \infty, & \alpha \leq 1, \\ \frac{\alpha \lambda}{\alpha - 1}, & \alpha > 1, \end{cases}$ $\sigma = \begin{cases} \infty, & \alpha \leq 2, \\ \frac{\lambda}{\alpha - 1} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 2}}, & \alpha > 2 \end{cases}$	
<p style="text-align: center;">Бета-розподіл</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1], \end{cases}$ $\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \sigma = \frac{1}{\alpha + \beta} \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta + 1}}$	

Наведемо основні закони розподілу **дискретних** випадкових величин (див. таблицю 2.2) [4].

Таблиця 2.2. Закони розподілу дискретних величин

<p style="text-align: center;">Функція щільності закону розподілу</p>	<p style="text-align: center;">Графік функції щільності закону розподілу</p>
<p style="text-align: center;">Рівномірний дискретний розподіл</p> $P(k) = \frac{1}{n}, k = \overline{1, n},$ $\mu = \frac{n+1}{2}, \sigma = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}$	

<p>Розподіл Пуассона</p> $P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = \overline{0, n},$ $\mu = \lambda, \sigma = \sqrt{\lambda}$	
<p>Біноміальний розподіл</p> $P(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k},$ $k = \overline{0, n},$ $\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)}$	
<p>Геометричний розподіл</p> $P(k) = p(1-p)^k, k = \overline{0, n},$ $\mu = \frac{1-p}{p}, \sigma = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$	

4. Для вибраного закону розподілу визначимо основні параметри.

Оцінка математичного сподівання:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i.$$

Оцінка дисперсії:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\eta_i - \mu)^2.$$

Оцінка стандартного відхилення:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

Теоретична частота влучань значень випадкової величини η в i -й інтервал:

$p_i^T = P(i)$ – для дискретних законів розподілу;

$p_i^T = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = F(x_i) - F(x_{i-1})$ – для неперервних законів розподілу;

$$F(x_i) = P(\eta < x) = \int_{-\infty}^x f(u)du.$$

5. За критерієм χ^2 перевіряють відповідність множини значень випадкової величини до обраного закону розподілу, за таким алгоритмом дій [4].

- Обчислюємо експериментальне значення критерію χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i^T)^2}{np_i^T},$$

n_i – спостережувана кількість потраплянь в i -й інтервал,

np_i^T – теоретична кількість потраплянь в i -й інтервал.

- З таблиць розподілу χ^2 вибираємо критичне значення критерію:

$$\chi_{кр}^2 = \chi^2(\alpha, k - 1 - q),$$

α – рівень статистичної значущості (найчастіше беруть 0,05 або 0,01);

k – кількість інтервалів;

q – кількість параметрів закону розподілу.

Наприклад, в Microsoft Office Excel або Google Sheets значення $\chi_{кр}^2$ отримують за формулами:

$$\chi_{кр}^2 = \text{CHIINV}(\alpha, k - 1 - q),$$

$$\chi_{кр}^2 = \text{CHISQ.INV.RT}(\alpha, k - 1 - q).$$

- Якщо $\chi^2 < \chi_{кр}^2$, то з довірчою ймовірністю $1 - \alpha$ вибірка відповідає обраному закону розподілу.

Умови застосування критерію χ^2 :

1) Розмір вибірки більший (рівний) 100: $n \geq 100$.

2) Кількість влучань у кожен з інтервалів більша (рівна) 5: $n_5 \geq 5, i = \overline{1, k}$.

Якщо розмір досліджуваної вибірки менший за 100, то в якості критерія згоди використовують **λ -критерій** (критерій Колмогорова-Смірнова) [14].

Згідно з λ -критерієм:

1) Обчислюють вибіркве значення λ -критерію:

$$\lambda = \sqrt{n} \max_i |w_i - w_i^T|, \quad w_i = \sum_{j=1}^i \frac{n_j}{n}, \quad w_i^T = F(x_i).$$

n_j – кількість влучань значень випадкової величини в j -й інтервал;

x_i – середина i -го інтервалу;

$F(\cdot)$ – функція розподілу.

2) Критичне значення λ -критерію:

$$\lambda_{\text{кр}} = \lambda(0,05) = 1,36.$$

Це значення беруть при рівні статистичної значущості $\alpha = 0,05$ незалежно від закону розподілу. При цьому не вимагається об'єднувати інтервали, в яких частота потраплянь випадкової величини менша за 5.

3) Порівнюють вибіркве λ та $\lambda_{\text{кр}}$:

Якщо $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$, то з ймовірністю $1 - \alpha$ вибірка розподілена за законом розподілу з функцією розподілу $F(\cdot)$.

Питання для самоконтролю

1. Наведіть порядок дій щодо ідентифікації закону розподілу.
2. Назвіть послідовність дій для побудови гістограми частот.
3. Наведіть функції щільності та їх схематичне графічне зображення для експоненційного і нормального неперервних розподілів.
4. Наведіть функції щільності та їх схематичне графічне зображення для дискретного розподілу Пуассона та геометричного дискретного розподілу.
5. За якими формулами отримують оцінки математичного сподівання, дисперсії і теоретичної частоти потрапляння значення випадкової величини у інтервал?
6. При проведенні ідентифікації закону розподілу для чого використовують критерій χ^2 ?
7. Назвіть умови застосування критерію χ^2 .
8. Коли замість критерію χ^2 використовують критерій Колмогорова-Смірнова?

Задачі для самостійного розв'язування

1. Побудувати гістограму частот для неперервної випадкової величини за заданою вибіркою. Для визначення частот обрати 5 інтервалів. Висунути гіпотезу про розподіл випадкової величини.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Вип. велич.	0,21	1,45	0,52	4,1	0,88	2,31	0,15	3,24	1,12	0,67	5,82	1,94	0,33	2,76	1,05	0,92	3,51	1,38	0,44	7,2

2. Побудувати гістограму частот для неперервної випадкової величини за заданою вибіркою. Для визначення частот обрати 6 інтервалів. Висунути гіпотезу про розподіл випадкової величини.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Вип. велич.	4,8	2,4	1,5	5,3	2,1	3,5	1,2	2,6	2,7	3,9	3,1	3,2	3,4	2,3	3,7	2,8	4,2	4,5	0,8	1,9

3. Побудувати гістограму частот для дискретної випадкової величини за заданою вибіркою. Висунути гіпотезу про розподіл випадкової величини.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Вип. велич.	4	5	6	3	5	7	4	6	5	5	6	4	5	7	3	6	5	4	5	6

4. Побудувати гістограму частот для дискретної випадкової величини за заданою вибіркою. Висунути гіпотезу про розподіл випадкової величини.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Вип. велич.	4	6	5	3	7	5	6	4	5	8	3	6	5	4	7	5	6	2	5	4

5. За вибіркою зі 120 значень деякої неперервної випадкової величини з математичним сподіванням 5 і дисперсією 25 побудовано таблицю частот. Висунуто гіпотезу про відповідність даної випадкової величини експоненційному закону розподілу. Перевірити істинність даної гіпотези за критерієм χ^2 .

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Інтервал	[0,03; 1,11)	[1,11; 2,19)	[2,19; 3,27]	[3,27; 4,36)	[4,36; 5,44)	[5,44; 6,52)	[6,52; 7,60)	[7,60; 8,68)	[8,68; 9,77)	[9,77; 10,85)
Частота	31	18	11	11	11	4	9	6	2	3

№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Інтервал	[10,85; 11,93)	[11,93; 13,01)	[13,01; 14,10)	[14,10; 15,18)	[15,18; 16,26)	[16,26; 17,34)	[17,34; 18,42)	[18,42; 19,51)	[19,51; 20,59)	[20,59; 21,67]
Частота	4	2	2	2	0	1	2	0	0	1

6. За вибіркою зі 120 значень деякої неперервної випадкової величини з математичним сподіванням 50 і дисперсією 100 побудовано таблицю частот. Висунуто гіпотезу про відповідність даної випадкової величини нормальному закону розподілу. Перевірити істинність даної гіпотези за критерієм χ^2 .

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Інтервал	[23,80; 26,34)	[26,34; 28,89)	[28,89; 31,43)	[31,43; 33,97)	[33,97; 36,51)	[36,51; 39,05)	[39,05; 41,59)	[41,59; 44,13)	[44,13; 46,68)	[46,68; 49,22)
Частота	1	0	4	2	5	6	3	9	14	15

№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Інтервал	[49,22; 51,76)	[51,76; 54,30)	[54,30; 56,84)	[56,84; 59,38)	[59,38; 61,92)	[61,92; 64,47)	[64,47; 67,01)	[67,01; 69,55)	[69,55; 72,09)	[72,09; 74,63]
Частота	15	17	5	8	6	1	6	2	0	1

Тема 3. Лінійні регресійні моделі систем та їх дослідження

Нехай вихідні (або залежні) змінні Y деякої системи описуються залежністю F від вхідних (або незалежних) змінних X . В загальному випадку така залежність може бути функціональною. Якщо функціональна залежність F відома, то відомою є модель системи, а якщо невідома, то виникає задача побудови моделі даної системи, тобто задача побудови функціональної залежності F , яка наближено (а якщо є можливість, то точно) буде повертати значення \hat{Y} , близькі до значень вихідних змінних Y (тобто $\hat{Y} \approx Y$).

Означення. Апроксимацією називається процес побудови функціональної залежності вихідних змінних моделі від її вхідних змінних на основі відомих спостережень за ними.

Найчастіше функціональну залежність апроксимують за допомогою лінійних регресійних моделей.

Задача побудови лінійної регресійної моделі

Розглянемо систему з однією вихідною змінною Y та m вхідними змінними $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Нехай відомими є n спостережень за вихідною змінною Y , які залежать від відомих вхідних змінних X (таблиця 3.1).

Таблиця 3.1. Статистичні спостереження

№	x_1	x_2	...	x_m	Y
1	x_{11}	x_{12}		x_{1m}	y_1
2	x_{21}	x_{22}		x_{2m}	y_2
3	x_{31}	x_{32}	...	x_{3m}	y_3
	...				
n	x_{n1}	x_{n2}		x_{nm}	y_n

Суть задачі побудови лінійної регресійної моделі полягає в тому, щоб знайти функціональну залежність вибраного виду, що найкраще відповідає спостереженням згідно з **методом найменших квадратів (МНК)** [2].

Критерій МНК має вигляд:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min_f,$$

де y_i – спостережувані значення вихідної змінної;

$\hat{y}_i = f(x_i)$ – розраховані за побудованою функціональною залежністю значення вихідної змінної.

Розглянемо **послідовність дій при побудові лінійної регресійної моделі.**

1) **Формування масиву** спостережень за вхідною змінною X та вихідною змінною Y системи.

2) **Вибір специфікації** $f(\cdot)$ функціональної залежності:

$$y = f(x, b),$$

де b – невідомі параметри (або вектор параметрів) вибраної функції $f(\cdot)$.

3) **Оцінка значень** параметрів b (або компонент вектора параметрів b) за методом найменших квадратів.

4) Оцінка якості побудованої функціональної залежності засобами кореляційно-регресійного аналізу.

Опишемо ці пункти більш детально.

1. Формування масиву

Якщо x – вектор вхідних змінних, то задача побудови лінійної регресійної моделі має сенс лише тоді, коли вхідні змінні не мультиколінеарні між собою, тобто коли відсутня кореляційна або функціональна залежність між вхідними змінними x_1, x_2, \dots, x_m :

$$x_i \neq g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m), \quad i = \overline{1, m}.$$

Означення. Мультиколінеарністю називається наявність функціонального чи кореляційного зв'язку між вхідними змінними моделі.

Найбільш поширеним алгоритмом виявлення мультиколінеарності є алгоритм Фаррара-Глаубера [2].

Алгоритм Фаррара-Глаубера

1) Для усіх значень вхідних змінних x , поданих у таблиці 3.1, провести стандартизацію (нормалізацію) за формулою:

$$x_{ik}^* = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{\sqrt{n\sigma_{x_k}^2}},$$

де

$$\sigma_{x_k}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_k)^2}{n} \text{ – дисперсія змінної } x_k;$$

\bar{x}_k – середнє значення змінної x_k ;

$$k = \overline{1, m}; i = \overline{1, n}.$$

Для зручності подальших викладок, введемо позначення:

X – матриця вхідних змінних, елементами якої є стовпці значень вхідних змінних з таблиці 3.1;

X^* – матриця, отримана в результаті виконання процедури стандартизації.

В Excel або Google Sheets для проведення стандартизації даних використовують функцію

$$= \text{STANDARDIZE}().$$

2) Знайти кореляційну матрицю:

$$r = X^{*T} X^*,$$

яка складається з коефіцієнтів кореляції між x_i та x_j , взятих попарно.

X^* – стандартизована матриця, отримана у пункті 1. На діагоналі матриці X^* повинні бути одиниці.

В Excel або Google Sheets для матричного добутку використовують функцію

$$= \text{MMULT}(),$$

а для транспонування – функцію

$$= \text{TRANSPOSE}().$$

3) Визначити наявність мультиколінеарності за критерієм Пірсона χ^2 .

Для цього обчислити:

$$\chi^2 = -\left(n - 1 - \frac{2m + 5}{6}\right) \ln|r|, |r| = \det(r),$$

а в таблиці розподілу Пірсона (розподілу χ^2) вибрати значення $\chi_{кр}^2$:

$$\chi_{кр}^2 = \chi^2 \left(\alpha, \frac{m(m-1)}{2} \right),$$

$\chi_{кр}^2$ – критичне (табличне) значення критерію χ^2 з рівнем статистичної значущості α та степенем свободи $\frac{m(m-1)}{2}$, де m – кількість змінних x .

Висновок: якщо $\chi^2 > \chi_{кр}^2$, то серед x_1, x_2, \dots, x_m існує мультиколінеарність.

4) Визначити матрицю:

$$C_{m \times m} = r^{-1} = (X^{*T} X^*)^{-1},$$

де X^* – матриця, отримана в пункті 1.

В Excel або Google Sheets для обчислення оберненої матриці використовують функцію:

$$= \text{MINVERSE}().$$

5) Визначити наявність мультиколінеарності між змінною x_i та рештою змінних $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$ за критерієм Фішера (F -критерій), $i = \overline{1, m}$:

$$F_i = |c_{ii} - 1| \frac{n - m}{m - 1}, i = \overline{1, m},$$

де c_{ii} – діагональний елемент матриці C з пункту 4.

В таблиці розподілу Фішера (F -розподілу) вибираємо $F_{кр}$:

$$F_{кр} = F(\alpha, n - m, m - 1),$$

$F_{кр}$ – критичне (табличне) значення F -критерію з рівнем статистичної значущості α та степенями свободи $n - m, m - 1$.

В Excel або Google Sheets критичні значення F -критерію можна отримати за допомогою функцій:

$$= \text{FINV}();$$

$$= \text{F.INV.RT}().$$

Висновок: якщо $F_i > F_{кр}$, то вхідна змінна x_i , мультиколінеарна з іншими змінними.

6) Знаходимо частинні коефіцієнти кореляції для кожної пари змінних $x_i, x_j, i, j = \overline{1, m}, i \neq j$,

$$r(x_i, x_j) = \frac{-c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}},$$

де c_{ij}, c_{ii}, c_{jj} – елементи матриці C з пункту 4.

7) Перевірити наявність мультиколінеарності між парами $x_i, x_j, i \neq j$ за критерієм Стюдента (t -критерієм):

$$t(x_i, x_j) = \left| \frac{r(x_i, x_j)\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r^2(x_i, x_j)}} \right|,$$

де m – кількість змінних x_i, n – розмір вибірки.

В таблиці розподілу Стюдента вибираємо

$$t_{\text{кр}} = t\left(\frac{\alpha}{2}, n-m\right).$$

При цьому рівень статистичної значущості береться $\alpha/2$, оскільки критерій двосторонній.

В Excel або Google Sheets критичні значення t -критерію можна отримати за допомогою функцій:

$$= \text{TINV}(\alpha, n-m);$$

$$= \text{T.INV.2T}(\alpha, n-m).$$

Висновок: якщо $t(x_i, x_j) > t_{\text{кр}}$, то між парою вхідних змінних x_i, x_j існує мультиколінеарність.

2. Формування гіпотези про вид функціональної залежності

Згідно з методом найменших квадратів вимагається, щоб залежність вихідної величини y від вхідних змінних x була лінійною відносно параметрів $b = (b_0, b_1, \dots, b_m)^T$:

$$y = f(x, b),$$

$$f(x, b) = b_0 + b_1 f_1(x) + \dots + b_m f_m(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Наприклад, функція

$$f(x, b) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 \cos x_2 + b_3 x_3^2 + b_4 \ln(x_4)$$

є лінійною відносно параметрів b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 .

Вибір функції $f(x, b)$ (тобто вибір специфікації моделі) дослідник робить самостійно, а параметри $b = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_m)$ – визначаються згідно з МНК, щоб забезпечити мінімум квадратичного критерію.

3. Оцінка параметрів лінійної регресійної моделі

Параметри моделі $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ треба визначити так, щоб мав місце критерій методу найменших квадратів:

$$\Phi(b) = \sum_{i=1}^n (f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}, b) - y_i)^2 \rightarrow \min,$$

тобто потрібно мінімізувати $\Phi(b)$. $\Phi(b)$ – квадратична функція відносно $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$. Згідно з необхідною умовою екстремуму, вона прийматиме своє мінімальне значення в точці, для якої

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial b_0} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial b_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial b_m} = 0. \right.$$

Ця система є системою **нормальних рівнянь** з невідомими b_0, b_1, \dots, b_m . Розв'язавши її (одним з відомих методів) і підставивши її розв'язки у $f(x, b)$, отримаємо явний вигляд залежності $y(\cdot)$ від x .

Зрозуміло, що при підстановці даних з таблиці 3.1 у регресійну модель, повинна виконуватись рівність:

$$Xb = Y,$$

де

$$X = \begin{pmatrix} 1 & f_1(x_1) & \dots & f_m(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & \dots & f_m(x_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & \dots & f_m(x_n) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тоді система нормальних рівнянь (зважаючи на те, що диференціювання проводиться по b_0, b_1, \dots, b_m) матиме вигляд:

$$X^T X b = X^T Y.$$

Розв'язком цієї системи відносно невідомих b буде вектор:

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

Маючи коефіцієнти b , отримаємо функціональну залежність $y(\cdot)$ від x :

$$y = f(x) = b_0 + b_1 f_1(x) + \dots + b_m f_m(x).$$

4. Кореляційно-регресійний аналіз

Якість і практичну цінність побудованої моделі оцінюють за допомогою **кореляційно-регресійного аналізу**, який проводять за таким алгоритмом:

1) Обчислити **коефіцієнт детермінації**:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}))^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}) - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad R^2 \in [0, 1].$$

Коефіцієнт R^2 характеризує, на скільки вихідна змінна y залежить від вхідної змінної x . Чим ближче R^2 до 1, тим якіснішою є побудована залежність $y(\cdot)$ від x .

2) Обчислити **коефіцієнт кореляції**:

$$r = \sqrt{R^2} = \sqrt{\frac{\sigma_\Phi^2}{\sigma_3^2}},$$

де

$$\sigma_\Phi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}) - \bar{y})^2}{n - 1}$$

– факторна дисперсія змінної y ;

$$\sigma_3^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}$$

– загальна дисперсія змінної y .

Побудована залежність $y = f(x)$ є практично значущою, коли $R^2 > 0,5$; $r > 0,7$.

Якісну оцінку щільності зв'язку $y = f(x)$ проводять за шкалою Чеддока, поданою у таблиці 3.2 [4].

Таблиця 3.2. Шкала Чеддока

Сегмент коефіцієнта кореляції	Якісна оцінка щільності зв'язку
[0,1; 0,3]	Слабкий зв'язок
[0,3; 0,5]	Помірний зв'язок
[0,5; 0,7]	Помітний зв'язок
[0,7; 0,9]	Сильний зв'язок
[0,9; 0,99]	Дуже сильний зв'язок

3) Оцінити **істотність коефіцієнта кореляції**, або (що те саме) перевірити **адекватність моделі** за критерієм Фішера (F -критерій).

Обчислити значення критерію Фішера:

$$F = \frac{R^2/m}{(1 - R^2)/(n - m - 1)},$$

де n – розмір вибірки, m – кількість незалежних змінних x .

В таблиці розподілу Фішера (F -розподілу) вибрати $F_{кр}$:

$$F_{кр} = F(\alpha, n, n - m - 1)$$

– критичне (табличне) значення критерію Фішера, де

α – рівень статистичної значущості;

m – степінь свободи чисельника;

$n - m - 1$ – степінь свободи знаменника.

Висновок: якщо $F > F_{кр}$ то значення коефіцієнта кореляції є істотне, а побудована модель – адекватна.

4) Оцінити **статистичну значущість** коефіцієнтів моделі.

Статистичну значущість коефіцієнтів b_0, b_1, \dots, b_m моделі перевіряють за критерієм Стьюдента (t -критерієм). Обчислюють значення t -критерію:

$$t(b_i) = \left| \frac{b_i}{S_{b_i}} \right|, i = \overline{0, m},$$

де

$$S_{b_i} = \sqrt{S_{b_i}^2} \text{ – похибка коефіцієнта } b_i;$$

$$S_{b_i}^2 = \sigma_u^2 z_{ii} \text{ – дисперсія коефіцієнта } b_i;$$

z_{ii} – діагональний елемент матриці $Z = (X^T X)^{-1}$;

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}))^2}{n - m - 1}$$

– дисперсія залишків моделі.

В таблиці розподілу Стьюдента вибирають $t_{кр}$:

$$t_{кр} = t\left(\frac{\alpha}{2}, n - m - 1\right).$$

Рівень статистичної значущості береться $\alpha/2$, оскільки критерій двосторонній.

Висновок:

якщо $t(b_i) < t_{кр}$, то b_i – статистично незначущий коефіцієнт;

якщо $t(b_i) > t_{кр}$, то b_i – статистично значущий коефіцієнт.

5) Визначають **довірчий інтервал** коефіцієнта b_i :

$$b_i \in [b_i - t_{кр} S_{b_i}; b_i + t_{кр} S_{b_i}].$$

Коефіцієнти з довірчого інтервалу є статистично значущими.

Апроксимація за методом χ^2

Метод χ^2 доцільно використовувати, коли точність спостережуваних значень у вибірці різна. Критерій методу χ^2 має вигляд:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})}{\sigma_i} \right)^2 \rightarrow \min,$$

$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$ – середньоквадратичне відхилення значення y_i ;

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^k (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{k - 1}$$

– дисперсія значення y_i ; k – розмір вибірки для значення y_i .

Якщо точність (середньоквадратичне відхилення) для всіх $y_i, i = \overline{1, n}$ однакова і рівна σ^2 , то

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}))^2 \rightarrow \min.$$

Невідомі параметри b_0, b_1, \dots, b_m отримаємо аналогічно до МНК як розв'язки системи

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi^2}{\partial b_0} = 0, \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial b_1} = 0, \\ \dots, \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial b_m} = 0, \end{cases}$$

яка впливає з необхідної умови екстремуму критерію χ^2 .

Значення параметрів b_0, b_1, \dots, b_m , отримані за МНК і за критерієм χ^2 співпадають, проте значення критерію χ^2 не залежить від розмірності $y(\cdot)$, а значення критерію МНК – залежить. Тому для порівняння деяких двох результатів, отриманих за однією вибіркою, використовують критерій χ^2 . Менше значення критерію відповідає більш точному результату.

Гіпотезу про відповідність побудованої за критерієм χ^2 моделі спостережуваним значенням перевіряють таким чином.

За наведеною вище формулою визначають значення критерію χ^2 та порівнюють з критичним (табличним) значенням

$$\chi_{кр}^2 = \chi^2(\alpha, n - m - 1).$$

Висновок: якщо $\chi^2 < \chi_{кр}^2$, то функціональна залежність $y(\cdot)$ від x , знайдена за критерієм χ^2 , з довірчою ймовірністю $1 - \alpha$ відповідає спостережуваним значенням залежної змінної.

Питання для самоконтролю

1. В чому суть задачі апроксимації функціональної залежності?
2. Який вигляд має критерій МНК і в чому його суть?
3. Наведіть алгоритм апроксимації функціональної залежності.
4. Сформулюйте означення мультиколінеарності вхідних змінних.
5. Для чого використовують алгоритм Фаррара-Глаубера?
6. Які статистичні критерії використовуються в алгоритмі Фаррара-Глаубера і для чого?
7. Наведіть і обґрунтуйте формулу оцінки коефіцієнтів лінійної регресійної моделі.
8. За якою формулою обчислюють коефіцієнт детермінації і як тлумачать його значення?

9. За якою формулою обчислюють коефіцієнт кореляції і як тлумачать його значення?
10. Що таке шкала Чеддока і для чого її використовують?
11. Як перевірити адекватність лінійної регресійної моделі?
12. Як перевірити статистичну значущість коефіцієнтів лінійної регресійної моделі?
13. Що таке довірчий інтервал коефіцієнта і як його визначити?
14. В чому суть апроксимації за методом χ^2 ?

Задачі для самостійного розв'язування

1. Чи є мультиколінеарними незалежні змінні у вибірці.

№	x_1	x_2
1	2	2
2	4	3
3	5	5
4	8	10
5	10	12

2. Чи є мультиколінеарними незалежні змінні у вибірці.

№	x_1	x_2	x_3
1	1	2	2
2	3	4	5
3	4	5	8
4	5	6	9
5	7	10	11
6	8	11	13
7	10	14	18
8	12	16	21

3. Чи є мультиколінеарними незалежні змінні у вибірці.

№	x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	2	1	2
2	3	2	4	4
3	5	3	5	6
4	6	8	9	7
5	7	8	9	10
6	9	10	14	15
7	10	12	16	20
8	12	15	16	24

4. На основі даної вибірки побудувати лінійну регресійну модель і провести для неї кореляційно-регресійний аналіз.

№	x	y
1	2	10
2	4	21
3	7	32
4	8	42
5	9	50

5. На основі даної вибірки побудувати лінійну регресійну модель і провести для неї кореляційно-регресійний аналіз.

№	x_1	x_2	y
1	2	1	8
2	4	2	12
3	7	5	30
4	8	6	35
5	9	6	36

6. На основі даної вибірки побудувати лінійну регресійну модель і провести для неї кореляційно-регресійний аналіз.

№	x_1	x_2	x_3	y
1	1	1	2	5
2	3	2	4	10
3	4	5	5	14
4	5	6	7	17
5	7	8	9	27
6	8	10	10	29
7	10	12	14	34
8	12	15	16	43

Тема 4. Гетероскедастичність та автокореляція залишків лінійної регресійної моделі

Розглянемо лінійну регресійну модель:

$$y(x) = f(x, b) + \varepsilon,$$

де

$$f(x, b) = b_0 + b_1 f_1(x) + \dots + b_m f_m(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m),$$

$\varepsilon_i = y(x) - y_i, i = \overline{1, n}$ – залишки моделі.

Така модель будується на основі відомої вибірки за МНК згідно з критерієм

$$\Phi(b) = \sum_{i=1}^n (f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}, b) - y_i)^2 \rightarrow \min,$$

де

$$u_i = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}, b) - y_i, i = \overline{1, n},$$

є оцінкою залишків моделі ε_i , а

$$\sum_{i=1}^n u_i^2$$

– сума квадратів залишків.

Для побудови такої моделі можна використовувати МНК, коли виконуються **умови Гаусса-Маркова** [2]:

- 1) Математичне сподівання випадкових відхилень (тобто залишків моделі) повинне дорівнювати нулю.
- 2) Дисперсія випадкових відхилень повинна бути сталою величиною (гомоскедастичність).
- 3) Випадкові відхилення повинні бути незалежними одне від одного (автокореляція).
- 4) Випадкові відхилення повинні бути незалежним від незалежних змінних x_i .
- 5) Випадкові відхилення повинні мати нормальний закон розподілу.
- 6) Між незалежними змінними x_i повинна бути відсутня лінійна (кореляційна) залежність (мультиколінеарність).
- 7) Модель повинна бути лінійною відносно своїх параметрів.

4.1. Гетероскедастичність залишків лінійної моделі множинної регресії

4.1.1. Гетероскедастичність залишків, її суть та наслідки

Суть гетероскедастичності

При проведенні регресійного аналізу, заснованого на МНК, треба звертати увагу на виконання умов використання МНК, пов'язаних з випадковими відхиленнями моделі (випадковими залишками). Це є однією з умов Гауса-Маркова, виконання яких дозволяє використовувати МНК для побудови оцінок коефіцієнтів моделі, а саме умова гомоскедастичності.

Означення. Гомоскедастичністю називається така властивість регресійної моделі, коли дисперсії її випадкових відхилень ε_i рівні деякій сталій величині, тобто

$$D(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 = \text{const}, i = \overline{1, n}.$$

Означення. Гетероскедастичністю називається така властивість регресійної моделі, коли дисперсії її випадкових відхилень ε_i не рівні між собою.

На рис. 4.1–4.2 [2] введено позначення: z – спостереження у вибірці або їх комбінація, $p(z)$ – щільність розподілу ймовірностей, i – номер спостереження у вибірці. З рис. 4.1 зрозуміло, що кожне спостереження вибірки має однакову щільність розподілу, а отже і однакові дисперсії. Тому модель, побудована за даною вибіркою, є гомоскедастичною. На рис. 4.2. щільність спостережень є різною, отже, відповідна модель буде гетероскедастичною.

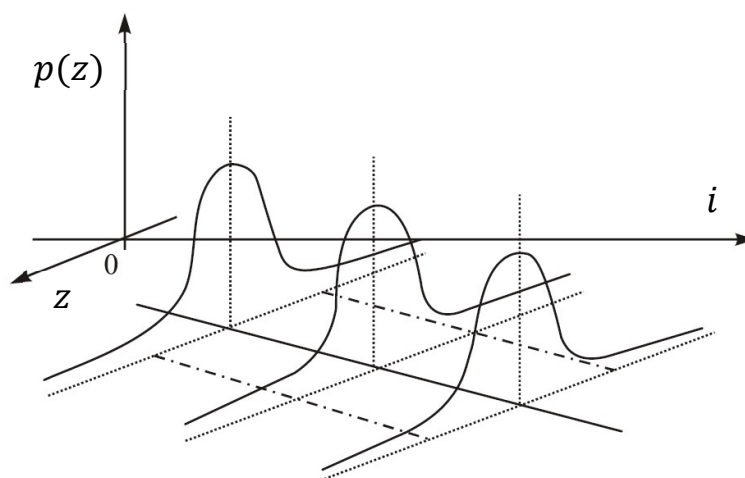


Рис. 4.1. Дисперсії гомоскедастичної моделі

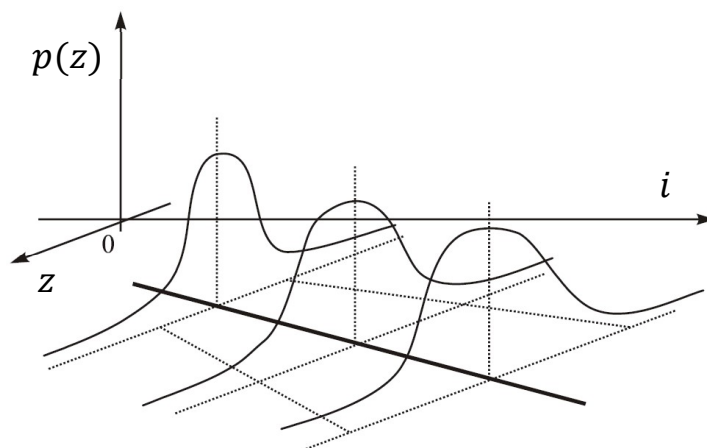


Рис. 4.2. Дисперсії гетероскедастичної моделі

При роботі з вибіркою ми маємо справу з конкретними реалізаціями $y_i, i = \overline{1, n}$ залежної змінної з визначеними відхиленнями $u_i, i = \overline{1, n}$. Але до реалізації цієї вибірки ці показники набували інших значень відповідно до деяких законів розподілу. Однією з вимог до цих законів розподілу є рівність похибок значень y_i , а отже і їх дисперсій. Іншими словами, не повинно існувати причин, які викликають велику похибку при одних спостереженнях і малу при інших.

На практиці гетероскедастичність досить поширене явище, бо ймовірнісні розподіли випадкових відхилень ε_i при різних спостереженнях часто бувають різними. Тобто апріорна ймовірність цього факту досить велика.

Проблема гетероскедастичності рідко зустрічається у динамічних моделях (часових рядах) і часто у моделях, входні дані яких пов'язані між собою (тобто мультиколінеарні).

Наслідки гетероскедастичності:

1. Оцінки коефіцієнтів, знайдених за МНК будуть незміщеними та лінійними.
2. Оцінки коефіцієнтів, знайдених за МНК не будуть ефективними (тобто не матимуть найменшу дисперсію в порівнянні з оцінками, отриманими за іншими методами). Крім того вони не будуть асимптотично ефективними. Збільшення дисперсій оцінок коефіцієнтів знижує ймовірність отримання точних коефіцієнтів.

3. Дисперсії оцінок будуть розраховуватись із зміщенням, а дисперсія залишків $\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}))^2}{n-m-1}$ не є незміщеною.
4. Гіпотези, які перевіряються на основі критеріїв Фішера та Стьюдента, а також довірчі інтервали коефіцієнтів будуть ненадійними, тобто зроблені на їх основі статистичні висновки можуть бути помилковими, стандартні похибки коефіцієнтів будуть занижені, а t -статистики – завищені.

4.1.2. Тестування наявності гетероскедастичності

В ряді випадків проблему гетероскедастичності можна передбачити і усунути ще на етапі вибору **специфікації** (вигляду функціональної залежності) моделі. Але набагато частіше цю проблему доводиться вирішувати вже після побудови рівняння регресії.

Виявлення гетероскедастичності – досить складний процес, оскільки для того, щоб визначити дисперсію залишків $D(\varepsilon_i)$ необхідно знати розподіл випадкової величини u , який відповідає вибраній реалізації x_i випадкової величини x . На практиці для кожного x_i є відомим (або визначається) єдине u_i , а це не дає змогу оцінити дисперсію випадкової величини u для даного x_i .

Для перевірки наявності гетероскедастичності розроблено ряд тестів і критеріїв. Розглянемо найбільш відомі з них.

Графічний аналіз відхилень

По осі абсцис відкладають незалежну змінну, або їх лінійну комбінацію, а по осі ординат – відхилення (залишок) ε_i або його квадрат ε_i^2 . Можливі варіанти отриманих графіків представлені на рис. 4.3.

На рис. 4.3 (а) всі відхилення знаходяться всередині смуги постійної ширини, яка паралельна осі абсцис. Це означає, що дисперсії $D(\varepsilon_i)$ сталі і незалежні від значень змінної x_i , тобто у цьому випадку виконуються умови гомоскедастичності.

На рис. 4.3 (б-г) спостерігається деяка систематична залежність в співвідношеннях між значеннями змінної x_i та квадратами відхилень ε_i^2 . Це означає, що у таких випадках є велика ймовірність присутності гетероскедастичності в статистичних даних. У випадку множинної регресії графічний аналіз можливий для кожної незалежної змінної окремо. Інколи замість незалежної змінної x_i по осі абсцис відкладаються значення моделі $\hat{y}_i = f(x_i, b)$, які одержані за емпіричним рівнянням регресії. Такий аналіз виправдовує себе при великій кількості змінних.

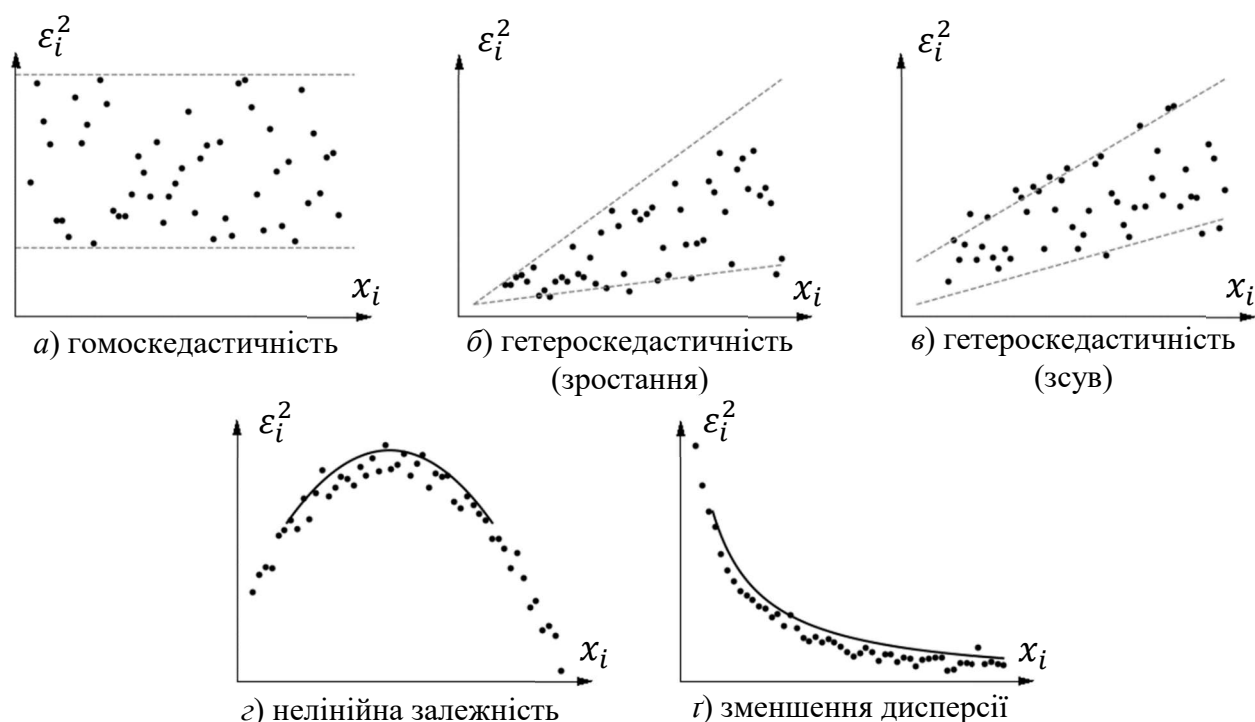


Рис. 4.3. Графічний аналіз залишків

Тест рангової кореляції Спірмена

При використанні тесту Спірмена вважають, що дисперсія відхилень моделі буде збільшуватись або зменшуватись разом із збільшенням значення незалежної змінної x_i . Тому існуватиме кореляційний зв'язок між випадковими величинами x_i та залишками u_i^2 .

Алгоритм тесту Спірмена:

1. Присвоюємо значенням x_i та $|u_i|$ у порядку їх зростання ранги від 1 до n .
2. Обчислюємо коефіцієнт рангової кореляції:

$$r_{xu} = 1 - 6 \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)},$$

де $d_i = \text{rang}(x_i) - \text{rang}(u_i)$, n – розмір вибірки.

3. За критерієм Стьюдента перевіряємо гіпотезу $H_0: r_{xu} = 0$ про те, що кореляційний зв'язок між x_i та u_i відсутній. Для цього шукаємо значення критерію за вибіркою, яка має розподіл Стьюдента:

$$t = \left| \frac{r_{xu} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xu}^2}} \right|.$$

В таблиці розподілу Стьюдента шукаємо критичне значення критерію:

$$t_{\text{кр}} = t(\alpha/2, n-2).$$

Висновок:

- якщо $t < t_{\text{кр}}$, то гіпотеза H_0 приймається, а отже **гетероскедастичність відсутня** за змінною x_i ;
- якщо $t > t_{\text{кр}}$, то гіпотеза H_0 відхиляється, а отже **гетероскедастичність присутня** за змінною x_i .

Зауваження. У розглянутому тесті рангової кореляції Спірмена на гетероскедастичність досліджувалась модель

$$f(x, b) = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_m x_m.$$

При необхідності дослідити модель

$$f(x, b) = b_0 + b_1 f_1(x) + \dots + b_m f_m(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m),$$

потрібно замість x_i розглядати $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$.

Тест Голдфельда-Квандта

При проведенні тесту Голдфельда-Квандта вважається, що u_i має нормальний розподіл і відсутня автокореляція залишків. Також вважається, що стандартне відхилення S_{u_i} пропорційне значенню x_i у спостереженні.

Алгоритм тесту Голдфельда-Квандта:

1. Дану вибірку розмірності n впорядкувати за зростанням значень обраної змінної x_i .

2. Впорядковану вибірку розбити на три частини розміром k , $n - 2k$, k відповідно. Рекомендується, щоб $k > n/3$, тобто:

при $n = 30$, $k = 11$;

при $n = 60$, $k = 22$.

3. Використовуючи МНК, побудувати дві регресійні моделі: перша – на основі першої підвибірки (перша частина розбиття розмірністю k), друга – на основі третьої підвибірки (остання частина розбиття розмірністю k). Для обох моделей знайти оцінки дисперсій залишків (дисперсій відхилень):

$$S_{1u}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n u_{1i}^2}{k - (m + 1)}, \quad S_{2u}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n u_{2i}^2}{k - (m + 1)},$$

де m – кількість незалежних змінних, $k - (m + 1)$ – ступінь свободи вибіркової дисперсії.

Якщо дисперсії залишків пропорційні значенням змінної x , то $S_{1u}^2 \ll S_{2u}^2$.

4. Знайдені дисперсії порівнюють за допомогою F -критерію і роблять висновок:

$$F = \frac{S_{2u}^2}{S_{1u}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n u_{2i}^2}{\sum_{i=1}^n u_{1i}^2},$$

$$F_{\text{кр}} = F(\alpha; k - (m + 1); k - (m + 1)).$$

Висновок:

- якщо $F > F_{\text{кр}}$, то гетероскедастичність у моделі спостерігається;
- якщо $F < F_{\text{кр}}$, то гетероскедастичність у моделі не спостерігається.

При виявленні гетероскедастичності коефіцієнти моделі потрібно оцінювати за методом зважених найменших квадратів [2].

4.2. Автокореляція залишків лінійної моделі множинної регресії

4.2.1. Автокореляція залишків, її суть та наслідки

Суть автокореляції

У якісній регресійній моделі, побудованій за МНК, залишки моделі

$$u_i = y_i - \hat{y}_i, i = \overline{1, n},$$

незалежні між собою. Іншими словами коваріація між залишками u_i та u_j має дорівнювати нулю:

$$\text{cov}(u_i, u_j) = M((u_i - M(u_i))(u_j - M(u_j))) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, n},$$

де $M(\cdot)$ – математичне сподівання. Отже,

$$\text{cov}(u_{i-1}, u_i) = 0, i = \overline{2, n},$$

тобто довільні два сусідні залишки незалежні один від одного [2].

Означення. Автокореляція залишків – це кореляційний взаємозв’язок між послідовними (сусідніми) залишками моделі.

Автокореляція називається **повною**, якщо зв’язок між послідовними залишками можна представити у вигляді функції.

Автокореляція залишків зазвичай зустрічається в регресійному аналізі при використанні часових рядів (тобто даних, які спостерігаються в часі).

Означення. Якщо $\text{cov}(u_{i-1}, u_i) > 0, i = \overline{2, n}$, то **автокореляція додатна**, якщо $\text{cov}(u_{i-1}, u_i) < 0, i = \overline{2, n}$, то **автокореляція від’ємна**.

Додатна автокореляція часто породжується деякими неврахованими в моделі факторами, які впливають на залежну змінну у постійно і в одному напрямку (збільшення або зменшення).

Автокореляція залишків виникає і у випадку, коли дисперсії залишків за кожним спостереженням рівні деякій константі, але при цьому

$$\text{cov}(u_{i-1}, u_i) \neq 0, i = \overline{2, n}.$$

Також автокореляція виникає, коли існує кореляція між послідовними значеннями деякої незалежної змінної x_i , або при неправильному виборі специфікації (функціональної залежності) моделі.

Наслідки автокореляції

Наслідки автокореляції подібні до наслідків гетероскедастичності, а саме:

1. Оцінки коефіцієнтів моделі b_0, b_1, \dots, b_m залишаються лінійними і незміщеними, але неефективними, тобто вони не є найкращими лінійними незміщеними оцінками.

2. Дисперсії оцінок коефіцієнтів b_0, b_1, \dots, b_m є зміщеними та заниженими, що призводить до збільшення t -критерію при перевірці статистичних гіпотез.

3. Оцінка дисперсії залишків $S_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^n u_i^2}{n-(m+1)}$ є зміщеною і як правило заниженою.

4. Висновки згідно з t - та F - критеріями при перевірці гіпотез про статистичну значущість можуть бути неправильними, що тягне за собою погіршення прогнозів, зроблених на основі досліджуваної моделі.

4.2.2. Методи виявлення автокореляції

Висновки щодо наявності автокореляції залишків будемо робити на основі оцінок $u_i, i = \overline{1, n}$ цих залишків, використовуючи такі критерії.

Критерій Дарбіна-Уотсона

Найбільш відомим критерієм визначення наявності автокореляції залишків є критерій Дарбіна-Уотсона. Згідно з цим критерієм будується статистична величина

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^n (u_i - u_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

Величина DW тісно пов'язана з коефіцієнтом кореляції $r(u_i, u_{i-1}) \in [-1, 1]$, а саме

$$DW \approx 2(1 - r(u_i, u_{i-1})).$$

Звідси **висновок**:

- $DW \in [0, 4]$;
- якщо $r(u_i, u_{i-1}) = 0$, тобто **автокореляція відсутня**, то $DW \rightarrow 2$;
- якщо $r(u_i, u_{i-1}) = 1$, тобто є **додатна автокореляція**, то $DW \rightarrow 0$;
- Якщо $r(u_i, u_{i-1}) = -1$, тобто є **від'ємна автокореляція**, то $DW \rightarrow 4$.

Для більш точних висновків використовують такий алгоритм.

Алгоритм Дарбіна-Уотсона

1. За даною вибіркою за МНК отримати лінійну регресійну модель (специфікація моделі вважається відомою):

$$\hat{y} = b_0 + b_1 f_1(x) + \dots + b_m f_m(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

2. Для побудованої моделі визначити залишки: $u_i = y_i - \hat{y}_i$, $i = \overline{1, n}$.

3. Обчислити значення критерію Дарбіна-Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^n (u_i - u_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

4. За таблицею критичних точок Дарбіна-Уотсона визначити:

- нижню критичну межу $DW_H(\alpha, n)$,
- верхню критичну межу $DW_B(\alpha, n)$,

де α – рівень статистичної значущості, n – розмір вибірки.

5. **Висновок:**

- $0 \leq DW < DW_H$ – існує додатна автокореляція;
- $DW_H \leq DW < DW_B$ – висновок зробити неможливо;
- $DW_B \leq DW < 4 - DW_B$ – автокореляція відсутня;
- $4 - DW_B \leq DW < 4 - DW_H$ – висновок зробити неможливо;
- $4 - DW_H \leq DW < 4$ – існує від'ємна автокореляція.

Умови використання критерію Дарбіна-Уотсона

- 1) Досліджувана модель має містити вільний коефіцієнт b_0 .
- 2) Вважається, що залежність між залишками моделі має вигляд:

$$u_i = \rho u_{i-1} + v_i,$$

де ρ – коефіцієнт, v_i – випадкова величина. Така залежність називається авторегресійною схемою 1-го порядку і позначається AR1.

3) Дані у вибірці повинні мати однакову періодичність.

4) Модель не повинна містити лагові змінні (значення моделі u_i не повинно залежати від змінних x_{i-1}, x_{i-2}, \dots), оскільки це призводить до зміщеності оцінок такої моделі.

Критерій фон Неймана

Ще одним відомим методом виявлення автокореляції залишків є критерій фон Неймана.

Алгоритм фон Неймана

1. За даною вибіркою, використовуючи МНК, отримати лінійну регресійну модель (специфікація моделі вважається відомою):

$$\hat{y} = b_0 + b_1 f_1(x) + \dots + b_m f_m(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

2. Для побудованої моделі визначити залишки:

$$u_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

3. Обчислити значення критерію фон Неймана:

$$Q = \frac{\sum_{i=2}^n (u_i - u_{i-1})^2 / (n-1)}{\sum_{i=1}^n u_i^2 / n},$$

n – розмір вибірки.

4. З таблиці розподілу фон Неймана визначити $Q_{кр} = Q(\alpha, n)$.

5. **Висновок:**

- якщо $Q < Q_{кр}$ – існує додатна автокореляція;
- якщо $Q > Q_{кр}$ – висновок зробити неможливо.

Також відмітимо, що при виявленні автокореляції залишків у моделі коефіцієнти моделі потрібно оцінювати за методом Ейткена або використати метод перетворення вихідної інформації (початкової вибірки) [2].

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте умови Гаусса-Маркова. Для чого вони використовуються?
2. В чому суть умови гомоскедастичності та умови гетероскедастичності?
3. Які наслідки матиме лінійна регресійна модель, побудована на основі вибірки з гетероскедастичними залишками?
4. Назвіть тести для виявлення гетероскедастичності.
5. Як проводять графічний аналіз наявності гетероскедастичності?
6. Який критерій використовується для підтвердження або спростування гетероскедастичності у тесті рангової кореляції Спірмена?

7. Наведіть формулу, за якою обчислюється коефіцієнт рангової кореляції у тесті Спірмена.
8. Які дві величини порівнюють у тесті Голдфелда-Квандта, на основі якого критерію виконують це порівняння і який при цьому роблять висновок?
9. Сформулюйте означення автокореляції залишків.
10. Які наслідки матиме лінійна регресійна модель, побудована на основі вибірки з автокореляцією залишків?
11. Назвіть критерії виявлення автокореляції залишків у вибірці.
12. У яких випадках за критерієм Дарбіна-Уотсона висновок про наявність автокореляції залишків зробити неможливо?
13. Перерахуйте умови використання критерію Дарбіна-Уотсона.
14. Наведіть алгоритм критерію фон Неймана.

Задачі для самостійного розв'язування

1. За допомогою графічного аналізу відхилень (залишків) визначити наявність або відсутність гетероскедастичності у регресійній моделі.

№	1	2	3	4	5
x	2	3	4	5	6
y	5	7	9	11	13

2. За допомогою графічного аналізу відхилень (залишків) визначити наявність або відсутність гетероскедастичності у регресійній моделі.

№	1	2	3	4	5	6
x_1	2	3	5	7	9	10
x_2	1	4	5	8	10	11
y	5	11	14	20	30	31

3. За допомогою тесту рангової кореляції Спірмена визначити наявність або відсутність гетероскедастичності у регресійній моделі. Дослідження провести за усіма незалежними змінними моделі.

№	1	2	3	4	5	6
x_1	2	3	4	8	9	10
x_2	2	3	5	9	10	10
y	5	5	8	18	21	22

4. За допомогою тесту Голдфелда-Квандта визначити наявність або відсутність гетероскедастичності у регресійній моделі. Дослідження провести за усіма незалежними змінними моделі.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_1	2	3	4	8	9	10	12	14	15	16	18
x_2	1	3	4	5	7	8	10	12	14	15	17
y	4	5	10	12	16	21	22	28	28	32	34

5. Дослідити наявність або відсутність автокореляції у регресійній моделі за критерієм Дарбіна-Уотсона.

№	1	2	3	4	5	6
x_1	2	3	4	6	7	8
x_2	2	3	5	7	8	9
y	6	10	12	15	17	20

6. Дослідити наявність або відсутність автокореляції у регресійній моделі за критерієм фон Неймана.

№	1	2	3	4	5	6
x_1	1	3	6	8	10	12
x_2	2	4	6	7	9	11
y	5	10	12	17	18	25

Тема 5. Моделювання дискретно-подійних систем засобами мереж масового обслуговування та мереж Петрі

5.1. Поняття системи та мережі масового обслуговування

Поняття мережі масового обслуговування (ММО) є досить поширеним у різноманітних сферах людської діяльності і використовується для моделювання як нескладних побутових систем (наприклад у сфері обслуговування), так і високотехнологічних процесів на виробництві. Будують мережі масового обслуговування шляхом об'єднання кількох систем масового обслуговування (СМО).

Означення. Системою масового обслуговування називають модель реальної системи, в яку вимоги надходять (згідно з чергою, якщо вона присутня), обслуговуються та покидають її.

Таким чином, модель СМО має описувати взаємозв'язки між: вхідним потоком вимог; чергою (якщо вона присутня в СМО); каналом обслуговування (або каналами для багатоканальних СМО), з врахуванням правил обслуговування; вихідним потоком опрацьованих вимог.

Вхідний потік вимог характеризується інтенсивністю (швидкістю) їх надходження у СМО і може мати як детермінований, так і стохастичний характер.

Черга виконує роль накопичувача вимог, які чекають на опрацювання. Черги можуть бути **необмеженими** або **обмеженими**. Обмежені черги не приймають вимоги для обслуговування, якщо їх кількість перевищує встановлений ліміт.

Канали обслуговування СМО задають правила опрацювання заявок та характеризуються часом обслуговування, який може бути випадковою величиною. Кількість каналів обслуговування визначає чи дана СМО є **одноканальною**, чи **багатоканальною**.

Вихідний потік вимог, як і вхідний, теж характеризується величиною інтенсивності виходу вимог зі СМО.

Прикладами СМО, які зустрічаються у повсякденному житті є каса в магазині, зупинка громадського транспорту, опрацювання запитів сервером, обслуговування клієнта банкоматом тощо.

Означення. **Мережа масового обслуговування** – це сукупність взаємопов’язаних систем масового обслуговування, у якій вимоги, після обслуговування попередньою СМО, із заданою ймовірністю потрапляють у чергу наступної СМО, і так далі, поки не пройдуть через усі СМО.

Класифікація ММО

Найпростішу класифікацію мереж масового обслуговування можна представити схемою, зображеною на рис. 5.1.

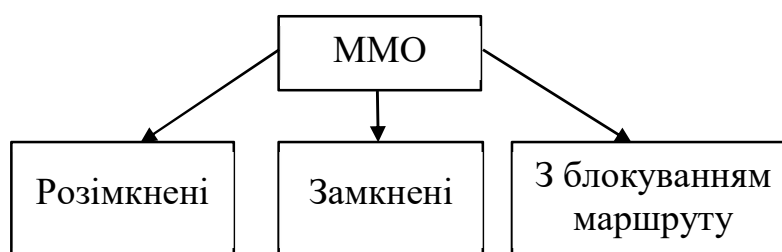


Рис. 5.1. Класифікація мереж масового обслуговування

У **розімкненій ММО** вимоги надходять у мережу, опрацюються і покидають мережу.

У **замкненій ММО** вимоги весь час знаходяться в ній, переходячи з однієї СМО до іншої, але ніколи не залишають ММО.

У **ММО з блокуванням маршруту** вимоги після обслуговування деякий час не переходять до наступної СМО (наприклад, через заповнення черги), а залишаються у каналі (пристрої) обслуговування.

Правила функціонування ММО

- Вимоги, що надходять у ММО, обслуговуються усіма СМО, розміщеними на шляху слідування вимоги у ММО.

- На вході до кожної СМО вимога намагається потрапити у чергу. СМО має лише одну або скінченну, або нескінченну чергу. Скінченні черги використовують, коли необхідно моделювати відмову в обслуговуванні вимоги.




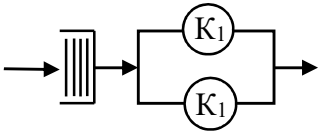
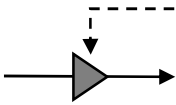
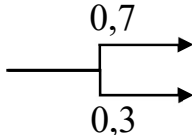
- Якщо черги немає, а канали обслуговування зайняті, або черга заповнена, то вимога покидає ММО і вважається неопрацьованою.

- На виході з черги кожної СМО вимога шукає вільний обслуговуючий канал серед декількох каналів, які паралельно включені у СМО. Якщо вільних каналів кілька, вимога може обирати один з них згідно з деяким правилом вибору (наприклад, ймовірнісним або пріоритетним).

- Якщо всі канали однакові, то вимога переглядає їх послідовно та займає перший вільний.

В таблиці 5.1 наведені елементи ММО та їх графічне представлення [4].

Таблиця 5.1. Графічне представлення елементів ММО

Назва елемента	Схема	Опис
Канал обслуговування		Пристрій обслуговування вимоги
Черга		Накопичувач вимог
Дуга		Маршрут слідування вимоги
Багатоканальна СМО		Паралельно з'єднані канали
Блокування		Блокування маршруту слідування вимоги
Розгалуження маршруту		Вибір маршруту слідування вимог з вказаною ймовірністю

У ММО можуть бути введені:

- Декілька типів вимог, якщо потрібно розрізнати час обслуговування або маршрут слідування вимоги.

- Розгалуження маршруту слідування вимоги з відомими ймовірностями вибору гілки маршруту.
- Блокування маршруту для обслуговування пристроїв СМО або для керування потоком вимог (наприклад, очікування певних умов просування вимоги).
- Черга з правилами впорядкування вимог вводиться при потребі встановити пріоритет в їх опрацюванні.

Приклад ММО

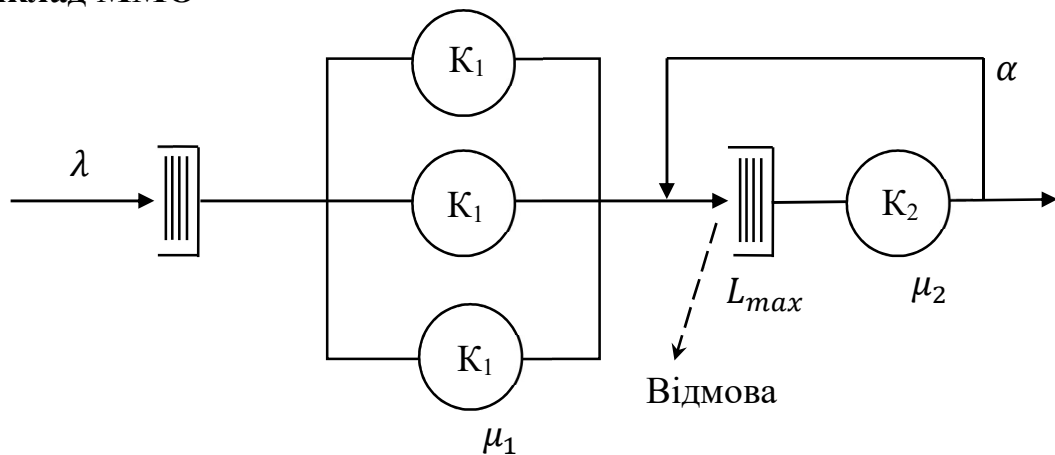


Рис. 5.2. ММО

ММО, зображена на рис. 5.2, складається з 2-х СМО: перша СМО з нескінченною чергою та трьома каналами обслуговування; друга СМО зі скінченною чергою з відмовою та одним каналом обслуговування. Вимога після обслуговування другою СМО з ймовірністю α може повернутись на повторне обслуговування, де, у разі відсутності місця у черзі, отримає відмову.

λ – інтенсивність (швидкість) вхідного потоку;

μ_1, μ_2 – інтенсивності (швидкості) вихідних потоків СМО;

α – ймовірність відмови у обслуговуванні;

L_{max} – максимальний розмір черги.

Усі СМО, які використовуються у ММО для моделювання системи, повинні задовольняти **умови**: у процесі масового обслуговування вимога, яка не отримала відмови, не знищується, не з'єднується з іншими вимогами та не ділиться на декілька вимог.

Для представлення системи моделювання засобами ММО, потрібно [4]:

- визначити об'єкт обслуговування (складові зовнішнього потоку заявок), тобто з'ясувати, які об'єкти є заявками у ММО та з якими параметрами вони надходять;
- провести аналіз процесу обслуговування, в результаті якого кожному обслуговуючому елементу поставити у відповідність СМО і визначити їх параметри;
- визначити параметри кожної СМО: наявність і розмір черги; кількість обслуговуючих каналів, ймовірності або пріоритети обслуговуючих каналів, інтенсивність (швидкість) обслуговування;
 - визначити зв'язки між СМО, з'єднавши СМО дугами згідно з процесом функціонування системи;
 - визначити маршрути проходження вимоги від однієї СМО до іншої, вказавши ймовірності їх вибору;
 - визначити, чи існують обмеження на вхід вимоги до СМО, і за необхідності ввести або відмову у подальшому обслуговуванні, або блокування маршруту;
 - визначити початковий стан ММО.

5.2. Блокування маршруту у мережі масового обслуговування

Блокування маршруту слідування вимоги у ММО – це стан ММО, коли вимога, завершивши обслуговування, за певних умов залишається у каналі обслуговування на деякий час. На схемі ММО блокування маршруту позначається пунктирною стрілкою. Канал обслуговування може бути заблокованим, коли канал обслуговування наступної СМО зайнятий і вільних місць в черзі з обмеженням немає, або якщо відсутні ресурси для подальшого обслуговування вимоги, або в результаті аварійної ситуації, або для синхронізації виробничих процесів, або для запобігання втратам (особливо на кінцевих етапах обслуговування). Альтернативним виходом з даної ситуації є відмова у подальшому обслуговуванні вимоги.

Наслідком введення у ММО блокування маршруту є ускладнення її аналізу та порушення незалежності каналів обслуговування, що може стати причиною їх взаємного блокування.

Означення. Блокуванням називається стан пристрою, коли вимога займає місце опрацювання у пристрої, але пристрій не виконує роботу з обслуговування вимоги (оскільки вже виконав).

Означення. Блокування маршруту – це факт закриття маршруту слідування вимоги у вказаному місці (пристрої) до моменту розблокування.

ММО, подана на рис. 5.2, складається з двох СМО і має точку, де вимога може отримати відмову (перед чергою 2-ї СМО). Давати вимозі відмову на цьому (завершальному) етапі обслуговування виглядає нелогічно, оскільки, як мінімум, тягне за собою витрати за обслуговування вимоги першою СМО. Тому замість відмови вводиться блокування маршруту, а вимога чекає на звільнення місця в черзі у каналі 1-ї СМО, в якому до цього опрацьовувалась (див. рис. 5.3).

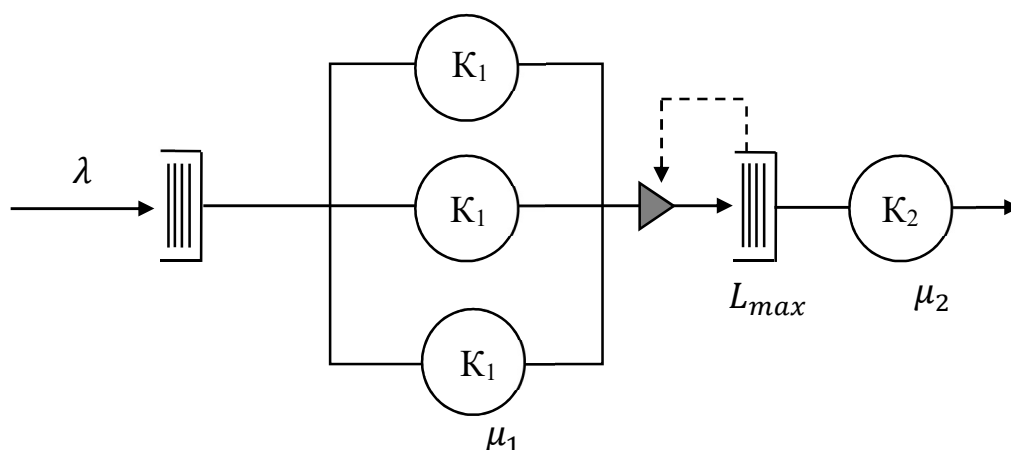


Рис. 5.3. ММО з блокуванням маршруту

5.3. Поняття мережі Петрі

Мережа Петрі є засобом моделювання та аналізу процесу функціонування дискретно-подійних динамічних систем, які можуть містити паралельні, синхронні та асинхронні процеси, за допомогою послідовності подій, які настають у результаті виконання певних умов.

Зміна стану дискретно-подійної системи відбувається у певні моменти часу після виконання **передумов** для здійснення деякої події або сукупності подій, які змінюють стан системи.

Означення. **Передумовами події** називають умови, виконання яких є обов'язковим для настання цієї події.

Означення. **Післяумовами події** називають умови, які є результатом настання цієї події.

В якості прикладу упорядкованої в часі дискретно-подійної системи, де події відбуваються послідовно і циклічно, розглянемо процес обслуговування клієнтів автоматом з продажу кави. Події, їх передумови та післяумови опишемо в таблиці 5.2.

Таблиця 5.2. Обслуговування клієнтів автоматом з продажу кави

Подія		Передумова	Післяумова
Внесення коштів у кавовий автомат		Автомат в режимі очікування	Очікування вибору напою
Вибір напою	Американо	Очікування вибору напою	Вибрано американо
	Еспресо		Вибрано еспресо
Приготування напою		Вибір напою зроблено	Напій готовий до видачі
Видача напою		Напій готовий до видачі	Автомат в режимі очікування

Основні графічні елементи, які використовуються при побудові мережі Петрі, відображені в таблиці 5.3 [4]. Відмітимо, що умови (передумови та післяумови), які на схемі позначаються позиціями, можуть містити маркери. Наявність або відсутність маркерів у позиції означає виконання або невиконання відповідної умови. Якщо у позиції розміщено кілька маркерів, то це означає **багатократне** виконання умови запуску переходу, і між цією позицією та переходом буде відповідна кількість дуг.

Таблиця 5.3. Графічне зображення елементів мережі Петрі

Назва елемента	Схема	Опис
Перехід		Подія
Позиція	○	Умова
Дуга	→	Зв'язки між подіями та умовами
Багато дуг	→ 15	Велика кількість зв'язків
Один маркер	●	Виконання або невиконання умови
Багато маркерів	○ 17	Багаторазове виконання умови

В якості прикладу, побудуємо мережу Петрі обслуговування клієнта автоматом з продажу кави (рис. 5.4).

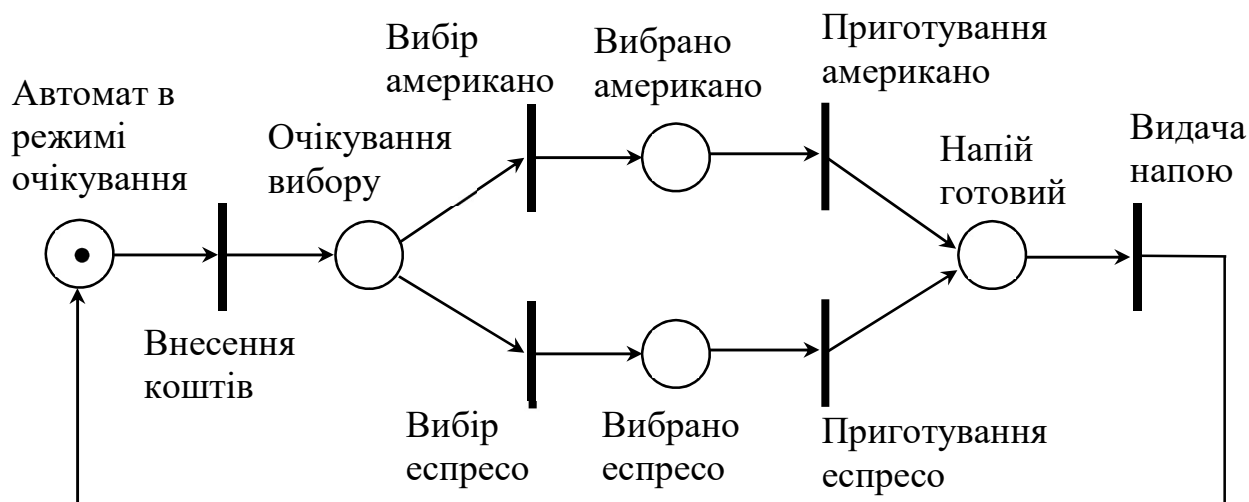


Рис. 5.4. Мережа Петрі процесу обслуговування клієнтів автоматом з продажу кави

Автомат перебуває у режимі очікування, тому в першій позиції “Автомат в режимі очікування” є маркер виконання умови очікування. Коли трапилась подія “Внесення коштів”, маркер через однойменний перехід потрапляє у позицію

“Очікування вибору”, тобто машина чекає, який напій обере клієнт. Далі обирається напій і спрацьовує перехід “Вибір американо” або перехід “Вибір еспресо”. Маркер через відповідний перехід потрапляє у позицію “Вибрано американо” чи “Вибрано еспресо”. Тоді виконана передумова запуску переходу “Приготування американо” або переходу “Приготування еспресо”. Один з цих переходів запускається, тобто готується обраний напій. Коли напій готовий, маркер переходить у позицію “Напій готовий”. Передумова для видачі напою виконана, відбувається подія “Видача напою”, а маркер через перехід “Видача напою” повертається у позицію “Машина в режимі очікування”.

Випадковий характер процесів, які моделюються мережами Петрі, проявляється у **випадковому запуску переходів**, для яких виконані усі передумови. Якщо ж одночасно виконані передумови запуску кількох переходів, то **послідовність їх запуску є випадковою**.

Алгоритм представлення системи засобами мережі Петрі [4]

1. В системі виділити **події** та зобразити їх як **переходи** у мережі Петрі.
2. З’ясувати **умови** виникнення подій і зобразити їх як **позиції** мережі Петрі.
3. Визначити **кількість маркерів** у кожній позиції мережі Петрі, тобто визначити, передумови яких подій виконуються.
4. З’єднати позиції та переходи **дугами** відповідно до причинно-наслідкових зв’язків досліджуваного процесу (врахувати передумови, післяумови, напрямки дуг).
5. З’ясувати **зміни в системі** при здійсненні кожної події та поставити їм у відповідність **переміщення маркерів** із позицій в переходи та навпаки.
6. Визначити **числові значення** часових затримок в переходах.
7. Визначити початковий **стан мережі Петрі**.

Означення. **Вектором маркування** (або **маркуванням**) називається вектор, кількість компонент якого рівна кількості позицій у мережі Петрі, а значення компонент дорівнюють кількості маркерів у позиціях, які їм

відповідають. В процесі функціонування системи, після настання подій вектор маркування завжди змінюється.

Перехід буде запущено – коли кількість маркерів у його вхідній позиції не менша кількості зв'язків. Після запуску переходу **маркери видаляються з вхідних позицій і встановлюються у вихідні позиції** відповідно до кількості зв'язків. Початковий стан маркерів повинен відповідати початковому стану моделі і дозволяти запустити хоча б один перехід.

В якості прикладу опишемо роботу системи, мережа Петрі якої представлена на рис. 5.5. У цій системі перехід T_1 не буде запущено, оскільки умова позиції P_1 виконана (в ній є один маркер), але умова позиції P_2 не виконана (в ній є один маркер, а потрібні два, оскільки з позиції P_2 до переходу T_1 виходить дві дуги). Перехід T_2 буде запущено, оскільки з позиції P_2 до переходу T_2 виходить одна дуга і в ній є один маркер.

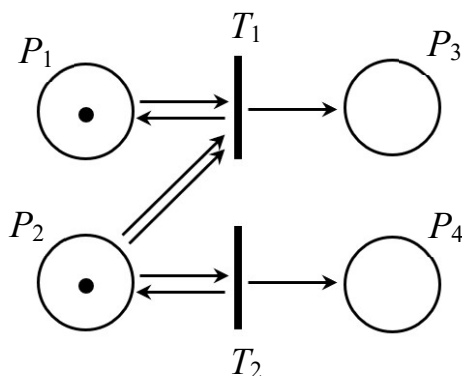


Рис. 5.5. Приклад мережі Петрі

5.4. Часові затримки в мережах Петрі. Моделі типових процесів функціонування

Означення. Мережами Петрі з часовими затримками називаються мережі, в яких на роботу переходу потрібен деякий час, і маркери з вхідних позицій видаляються, а у вихідних позиціях з'являються після вказаної затримки.

Процес функціонування мережі Петрі з часовими затримками полягає в циклічному послідовному перегляді всіх переходів і виконанні таких дій [4]:

1) Якщо умови запуску переходу виконані, маркери входять до переходу і фіксується момент виходу маркерів з переходу.

2) Обирається перехід, для якого момент виходу маркерів найменший і відбувається цей вихід.

3) Вихід маркерів з переходу змінює вектор маркування мережі Петрі, тому знову перевіряється умова запуску переходу (пункт 1).

4) Процес продовжується, поки будуть запускатись переходи або поки не закінчиться час роботи мережі.

При побудові моделей на основі мереж Петрі з часовими затримками часто доводиться моделювати деякі **типові процеси функціонування системи**. Розглянемо деякі з них [4].

Основні типові фрагментарні складові мережі Петрі

Надходження. У позиції “Вхід” цієї події завжди є маркер (див. рис. 5.6). Виконання події “Надходження” означає, що у позицію “Черга” прибуває k маркерів, а у позицію “Вхід” – один маркер. При потребі для переходу встановлюється часова затримка. Післяумовою переходу “Надходження” є наявність у позиції “Вихід” k вимог.

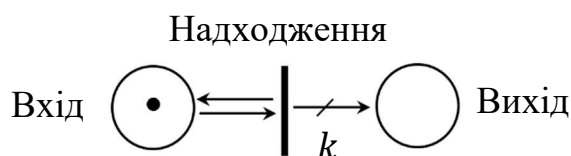


Рис. 5.6. Фрагмент мережі Петрі “Надходження”

Захоплення ресурсу. Нехай в наявності є ресурс у кількості p одиниць. Він використовується для обробки об’єктів 1 та об’єктів 2 (див. рис. 5.7). Об’єкти 1 вимагають m одиниць ресурсу, а часова затримка переходу на їх обробку – t_1 одиниць часу. Об’єкти 2 вимагають n одиниць ресурсу, а часова затримка переходу на їх обробку – t_2 одиниць часу. Об’єкти 1 через “Чергу об’єктів 1” при умові, що з позиції “Ресурс” у перехід “Захоплення ресурсу об’єктами 1” знайдеться m маркерів будуть оброблені з часовою затримкою t_1 , після чого перехід передасть один маркер у позицію “Кількість оброблених об’єктів 1” і m маркерів у позицію “Ресурс” для продовження функціонування системи (тут мається на увазі відновлювальний ресурс, наприклад, інструменти для обробки). Об’єкти 2

діятимуть аналогічно. Якщо кількості ресурсу вистачає, то спрацюють обидва переходи, а якщо ні, то спрацює той перехід, для якого вистачить ресурсу.

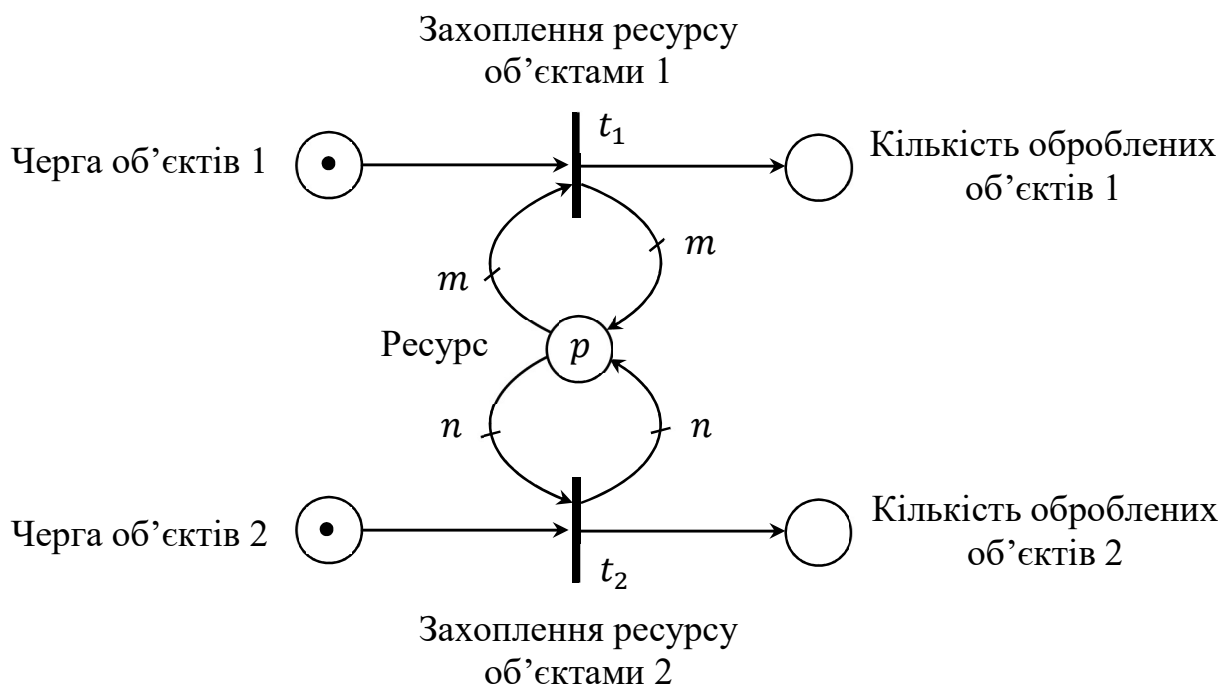


Рис. 5.7. Фрагмент мережі Петрі “Захоплення ресурсу”

Збирання. З об'єктів 1 у кількості m одиниць та об'єктів 2 у кількості n одиниць “Складальник” збирає один об'єкт 3 (див. рис. 5.8). Подія “Збирання” означає збільшення кількості зібраних об'єктів на одиницю та звільнення “Складальника”. Часова затримка переходу “Збирання” – t часових одиниць. Якщо у позиціях “Об'єкти 1” та “Об'єкти 2” з'явиться потрібна кількість маркерів, то виконається подія “Збирання”, оскільки у позиції “Складальник” завжди є маркер. Перехід “Збирання” з часовою затримкою t передасть маркер у позицію “Об'єкти 3”, збільшивши тим самим їх кількість на одиницю.

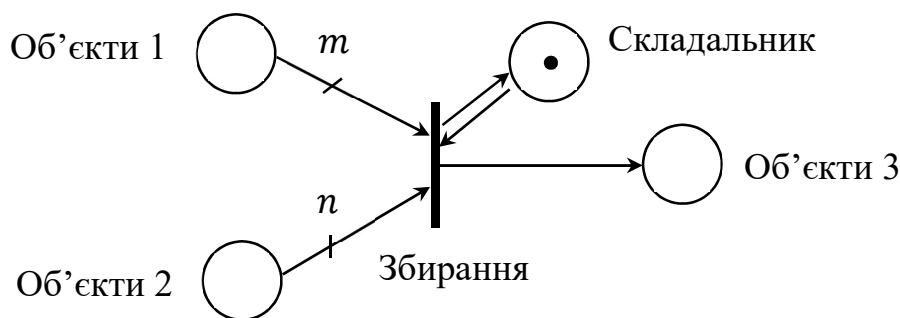


Рис. 5.8. Фрагмент мережі Петрі “Збирання”

5.5. Конфліктні переходи в мережах Петрі. Способи вирішення конфліктів

У мережі Петрі конфліктні ситуації виникають тоді, коли з'являється вибір щодо виконання однієї з кількох можливих подій.

Означення. Якщо у мережі Петрі наявність маркерів у позиціях така, що запуск одного з переходів унеможливилює запуск інших, то такі переходи називаються **конфліктними**, а мережа називається **мережею Петрі з конфліктними переходами** (див. рис. 5.9).

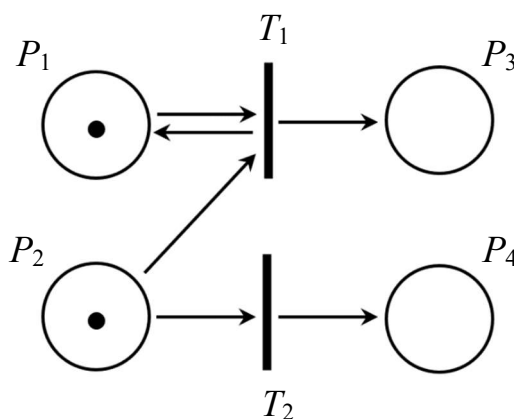


Рис. 5.9. Мережа Петрі з конфліктними переходами

Конфліктна ситуація мережі Петрі, зображеної на рис. 5.9, полягає в тому, що є можливість запуску лише одного з двох переходів T_1 або T_2 , оскільки в позиціях P_1 , P_2 недостатньо маркерів для їх одночасного запуску.

Способи вирішення конфлікту

1. **Пріоритетний спосіб.** Згідно з цим способом вказується пріоритет запуску конфліктних переходів. Тоді переходи будуть запускатись від переходу з найвищим пріоритетом до переходу з найнижчим пріоритетом. Можливий також **неявний спосіб** встановлення пріоритету, коли наперед відомо, який з переходів перевіряти у першу чергу, а значить і запускати першим, другим і т. д. В загальному випадку конфліктні переходи мережі Петрі повинні перевірятись у **випадковому порядку** і запускатись у разі виконання усіх умов запуску.

2. **Ймовірнісний спосіб.** Згідно з цим способом для переходу встановлюється ймовірність його спрацювання у разі конфлікту. За рівномірним законом розподілу генерується число від 0 до 1, яке порівнюється з ймовірністю

спрацювання переходу. Якщо згенероване число більше або рівне ймовірності спрацювання, то перехід спрацює.

На рис. 5.10 зображено мережу Петрі “Захоплення ресурсів” з двома парами конфліктних переходів. Перший конфлікт виникає між переходами “Термінова обробка” та “Запланована обробка” за ресурс “Верстат”. В цьому випадку логічно, щоб перехід “Термінова обробка” мав пріоритет над переходом “Запланована обробка” і запускався першим. Другий конфлікт виникає між переходами “Доставка автомобілем 1” та “Доставка автомобілем 2” за право доставити готову продукцію замовнику. В даному випадку цей конфлікт вирішується ймовірнісним способом, оскільки ймовірність їх спрацювання однакова і рівна 0,5.

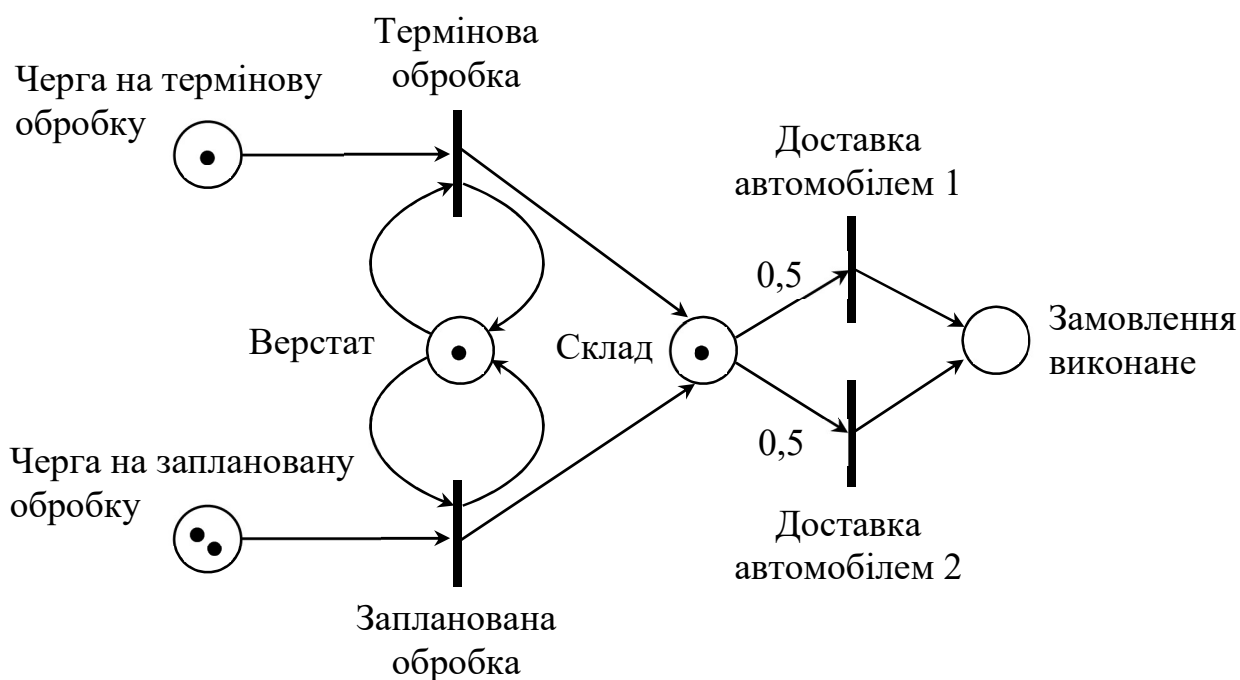


Рис. 5.10. Мережа Петрі “Захоплення ресурсів” з конфліктними переходами

Підсумовуючи описане вище, наведемо **правило функціонування мережі Петрі з конфліктними переходами**: при наявності конфліктів у мережі Петрі спочатку перевіряються умови всіх переходів, потім вирішуються конфлікти, а в кінці відбувається запуск переходу, який виграв конфлікт.

5.6. Багатоканальні переходи в мережах Петрі

Означення. Перехід з часовою затримкою у мережі Петрі називається **багатоканальним**, якщо він, у разі наявності потрібної кількості маркерів у вхідній позиції, може одночасно (паралельно) запуститись декілька разів, прийнявши при цьому потрібну кількість маркерів з вхідних позицій.

Іншими словами, один багатоканальний перехід працює як декілька ідентичних одноканальних переходів.

Щоб описати властивості багатоканального переходу потрібно:

- Задати кратність k багатоканального переходу. Вона вказує скільки операцій перехід може виконати одночасно.
- Описати умову запуску переходу. Якщо для запуску переходу потрібно n маркерів, а у його вхідних позиціях є m маркерів, то перехід паралельно запуститься k разів, якщо $k \leq \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$, або $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ разів, якщо $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor < k$ (тут $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ – ціла частина дробу $\frac{m}{n}$).
- Вказати пропускну здатність переходу, тобто максимальну кількість запусків переходу за одиницю часу.

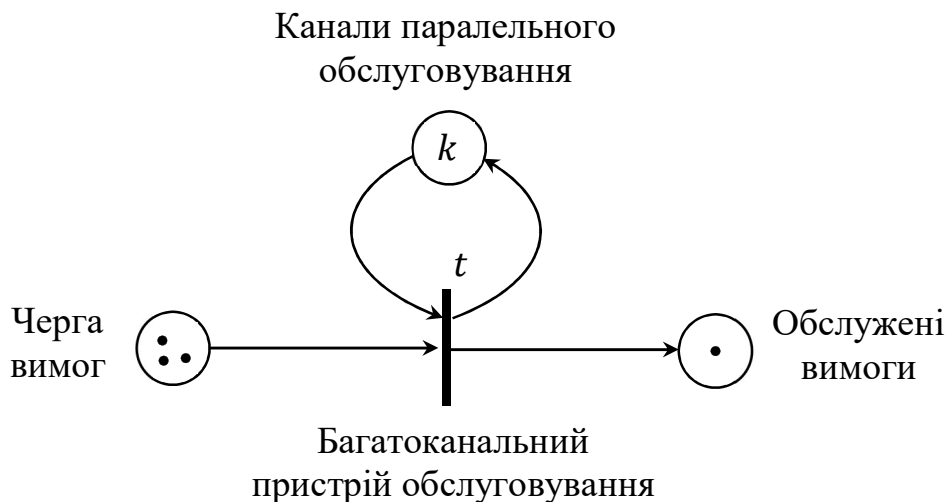


Рис. 5.11. Мережа Петрі з багатоканальним переходом

Наведена на рис. 5.11 мережа Петрі паралельно обслуговує k об'єктів [4]. В перехід з черги може потрапити три маркери (якщо $k \geq 3$) або k маркерів (якщо $k < 3$). Всі вони будуть опрацьовані протягом t одиниць часу. Перехід

запуститься лише тоді, коли у позиціях “Черга вимог” та “Канали паралельного обслуговування” є хоча б по одному маркеру.

Мережа Петрі, представлена на рис. 5.12, складається з двох одноканальних переходів і працює аналогічно мережі Петрі з двоканальним переходом.

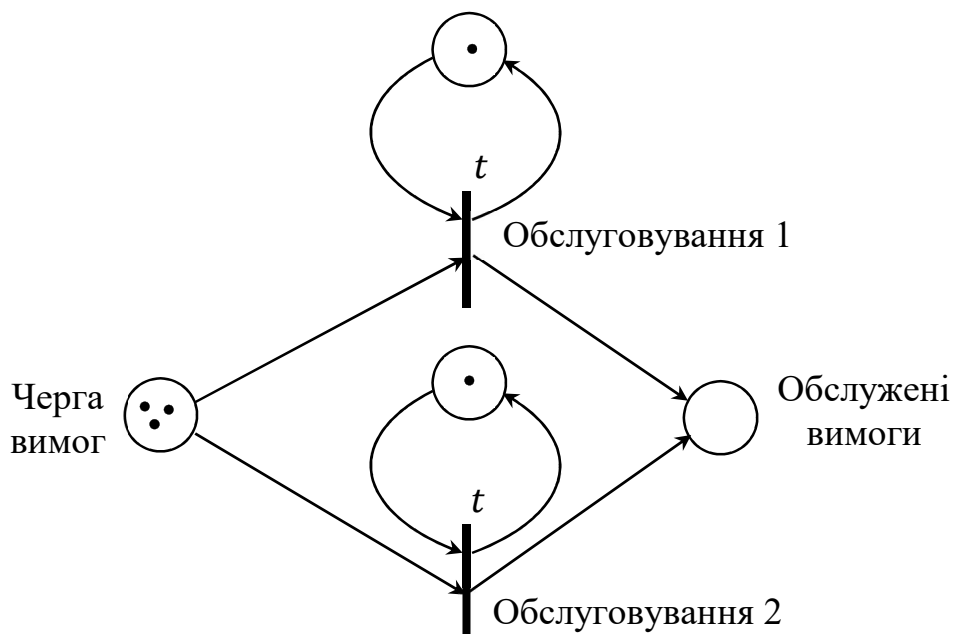


Рис. 5.12. Мережа Петрі з двома одноканальними переходами

При побудові мереж Петрі з багатоканальними переходами та роботою з ними дотримуються таких **правил**:

- Перевіряють умови запуску переходу та здійснюється запуск переходу стільки разів, скільки маркерів у його передумовах.
- Часовий момент входу кожного з маркерів у перехід запам'ятовується у масив.
- Під час виходу маркерів з переходу відповідне значення часового моменту видаляють з масиву.

5.7. Інформаційні зв'язки в мережах Петрі

Мережі Петрі з інформаційними зв'язками – це розширені мережі Петрі, які дозволяють моделювати не лише процеси функціонування дискретно-подійних систем, а і більш складні процеси управління дискретно-подійними системами, які вимагають забезпечення тісної взаємодії між елементами системи та

ситуація, коли під час відтворення музики надходить телефонний дзвінок. Перехід “Відтворення музики” має конфлікт з переходом “Відтворення сигналу вхідного дзвінка”, оскільки в усіх вхідних позиціях цих переходів є маркери. Є маркер і у позиції “Режим “без звуку” не активний”, яка з’єднана з конфліктними переходами інформаційним зв’язком, а отже запуск переходів не вплине на наявність маркера у цій позиції. Зрозуміло, що даний конфлікт вирішується пріоритетним способом, тобто запустити перехід “Відтворення сигналу вхідного дзвінка” більш важливо, ніж запустити перехід “Відтворення музики”. А це означає, що маркер з переходу “Звукова карта” у конфліктній ситуації піде у перехід “Відтворення сигналу вхідного дзвінка”. Тоді цей перехід запуститься і передасть маркер позиції “Динамік”.

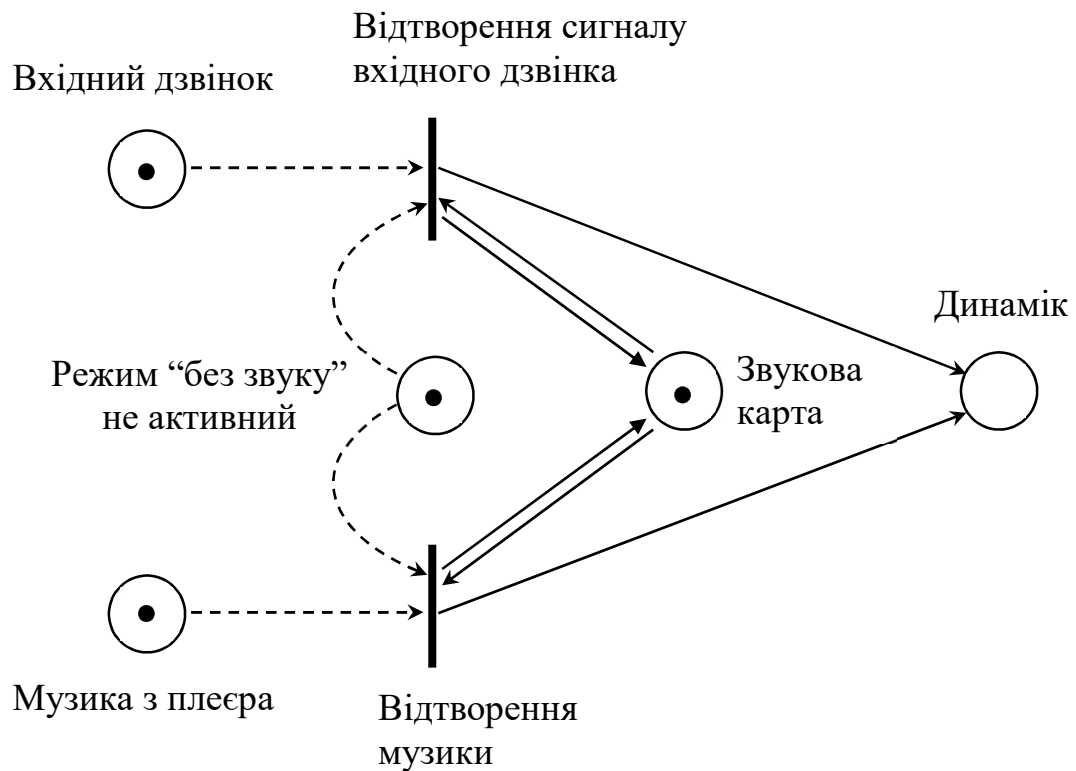


Рис. 5.14. Мережа Петрі з інформаційним зв’язком “Відтворення звуку на смартфоні”

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення системи масового обслуговування (СМО) та мережі масового обслуговування (ММО).
2. Що спільного та відмінного у розімкнених і замкнених ММО?

3. Назвіть правила функціонування ММО.
4. Перерахуйте елементи ММО та наведіть їх графічне зображення.
5. Поясніть, як працює блокування маршруту у ММО.
6. Що таке мережа Петрі і для чого вона використовується?
7. Назвіть і наведіть графічні елементи мережі Петрі.
8. Що означає наявність (відсутність) маркера у позиції мережі Петрі?
9. Як у мережі Петрі проявляється випадковий характер процесу, який нею моделюється?
10. Наведіть алгоритм представлення системи засобами мережі Петрі.
11. Сформулюйте означення вектора маркування.
12. Назвіть умову запуску переходу.
13. Що таке мережа Петрі з часовою затримкою?
14. Сформулюйте означення мережі Петрі з конфліктними переходами.
15. Назвіть способи вирішення конфлікту у мережі Петрі з конфліктними переходами.
16. Сформулюйте означення багатоканального переходу мережі Петрі.
17. Наведіть правила за якими працюють багатоканальні переходи у мережі Петрі.
18. Що таке інформаційний зв'язок між позицією і переходом мережі Петрі? Як він працює?

Задачі для самостійного розв'язування

1. Готову продукцію деякого підприємства направляють на склад місткістю 1000 одиниць для пакування. Машина для пакування має два ідентичних пакувальних канали. Запакована продукція проходить контроль якості пакування і з ймовірністю 0,02 повертається на повторне пакування. Скласти ММО описаної системи.
2. На підприємстві виготовляють запчастини. Заготовки нарізуються на СМО з одним верстатом і чергою до 500 заготовок. Потім вони направляються на чорнову обробку, яку виконують на двох однакових станках. Після чорнової

обробки запчастини направляються на чистову обробку, яку виконує один станок. Після чистової обробки запчастини потрапляють у пункт контролю якості, який на термінову повторну чистову обробку направляє 7% запчастин. Скласти ММО описаної системи (використати блокування маршруту).

3. Скласти мережу Петрі обслуговування клієнта банкоматом. У мережу включити умови: “черга не порожня”, “банкомат вільний”, “обслуговування розпочато”, “обслуговування завершено”; та події: “картка в банкоматі”, “картка повернута”.

4. Використовуючи фрагменти “Надходження” та “Захоплення ресурсу”, скласти мережу Петрі процесу виготовлення двох видів продукції з одного виду сировини. Передбачити таке початкове маркування, яке дозволить виготовити по 10 одиниць кожної продукції.

5. У систему надходять файли, які можуть бути надруковані на двох однакових принтерах. Скласти мережу Петрі з конфліктом процесу друку файлів. Передбачити перед вибором принтера перевірку, чи не зайнятий він. Звільнити принтер після завершення друку.

6. Скласти мережу Петрі роботи ліфта. Використати позицію “Кнопка виклику ліфта”, з’єднавши її інформаційним зв’язком з потрібним переходом та деактивувати її у потрібний момент. При побудові використати переходи: “Увімкнути ліфт”, “Рух ліфта”, “Відкрити двері”, “Закрити двері”, “Вимкнути ліфт”.

Тема 6. Аналітичне дослідження властивостей мереж масового обслуговування та мереж Петрі

6.1. Аналітичне дослідження властивостей мереж масового обслуговування

Для проведення аналітичного дослідження властивостей ММО роблять такі припущення [4]:

1) Вважають, що усі випадкові величини, які описують **час опрацювання вимоги каналом обслуговування СМО**, розподілені за експоненційним законом з параметром, який рівний інтенсивності обслуговування вимоги одним каналом СМО.

2) Вважають, що випадкова величина **“Час надходження вимоги в ММО”** розподілена за експоненційним законом з параметром, який рівний інтенсивності надходження вимог до ММО.

3) Вважають, що усі черги у ММО є необмеженими.

4) Вважають, що відомими є ймовірності надходження вимог з однієї СМО до іншої або до тієї ж СМО. Допускаються складні маршрути руху вимоги по ММО, але не допускаються блокування маршрутів.

6.1.1. Розрахунок параметрів розімкнених мереж масового обслуговування

На початковому етапі розрахунку параметрів розімкнених ММО потрібно чітко розуміти, які змінні подаються на вхід ММО, а які отримуємо на виході [4].

Вхідними змінними розімкненої ММО є:

- n – кількість систем масового обслуговування ММО;
- λ_0 – інтенсивність надходження вимог до ММО;
- (p_{ij}) – матриця ймовірностей, p_{ij} – ймовірність переходу вимоги з СМО _{i} у СМО _{j} ;
- λ_i – інтенсивність вхідного потоку у СМО _{i} ;
- r_i – кількість каналів обслуговування у СМО _{i} ;

- μ_i – інтенсивність опрацювання вимог кожним каналом СМО_i.

Вихідними змінними розімкненої ММО є:

- середня довжина черги СМО_i;
- середній час очікування в черзі СМО_i;
- середня кількість зайнятих пристроїв в СМО_i;
- середня кількість вимог в СМО_i;
- середній час обслуговування в СМО_i;
- середній час обслуговування в ММО.

Аналітичні дослідження розімкненої ММО проводять за умови **сталого режиму ММО**, тобто коли **інтенсивність вхідного потоку вимог до СМО_i не перевищує інтенсивності вихідного потоку вимог з СМО_i**. Це можливо, коли

$$\lambda_i < \mu_i r_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

У СМО_i входить потік вимог з інтенсивністю λ_i . Він складається з частини вхідного потоку λ_0 , який ззовні потрапляє у СМО_i з ймовірністю p_{0i} та частин усіх інших потоків λ_j , ($j = \overline{1, n}$), які виходять з СМО_j та потрапляють у СМО_i з ймовірністю p_{ji} . Тобто інтенсивність вхідного потоку у СМО_i обчислюється за формулою:

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^n p_{ji} \lambda_j, \quad i = \overline{1, n}.$$

Введемо **коефіцієнт передачі** e_i як частину зовнішнього вхідного потоку λ_0 вимог, що надходять у СМО_i:

$$\lambda_i = e_i \lambda_0, \quad i = \overline{1, n}.$$

З іншого боку λ_i – це усереднена кількість разів проходження вимогою СМО_i.

Тоді для пошуку e_i отримаємо систему:

$$e_i \lambda_0 = \sum_{j=0}^n p_{ji} \lambda_j.$$

Скоротивши рівняння системи на λ_0 , матимемо формули для розрахунку коефіцієнтів передачі:

$$e_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^n p_{ji} e_j, i = \overline{1, n}.$$

З врахуванням $\lambda_i = e_i \lambda_0, i = \overline{1, n}$, умова сталого режиму матиме вигляд:

$$\lambda_0 < \frac{\mu_i r_i}{e_i}, i = \overline{1, n}.$$

Ймовірність перебування у СМО_{*i*} з необмеженою чергою *k* вимог залежить від коефіцієнта передачі *e_i* і обчислюється за формулою:

$$p_i(k) = \begin{cases} \left(\frac{e_i \lambda_0}{\mu_i}\right)^k \frac{C_i}{k!}, & k \leq r_i, \\ \left(\frac{e_i \lambda_0}{\mu_i}\right)^k \frac{C_i}{r_i! r_i^{k-r_i}}, & k > r_i, \end{cases}$$

де:

λ_i – інтенсивність вхідного потоку;

r_i – кількість каналів обслуговування у СМО_{*i*};

μ_i – інтенсивність обслуговування вимог кожним каналом СМО_{*i*};

C_i – нормувальний множник.

Оскільки сума всіх ймовірностей перебування *k* вимог у СМО_{*i*} рівна 1, то умова для відшукування нормувального множника буде така:

$$C_i \left(\sum_{k=0}^{r_i} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^k \frac{1}{k!} + \sum_{k=r_i+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^k \frac{1}{r_i! r_i^{k-r_i}} \right) = 1.$$

Звідси, використавши суму геометричної прогресії, матимемо

$$C_i = \left(\left(\frac{e_i \lambda_0}{\mu_i}\right)^k \frac{1}{r_i! \left(1 - \frac{e_i \lambda_0}{\mu_i r_i}\right)} + \sum_{k=0}^{r_i-1} \left(\frac{e_i \lambda_0}{\mu_i}\right)^k \frac{1}{k!} \right)^{-1}.$$

У розімкненій ММО всі СМО поведуть себе незалежно одна від одної. Тому ймовірність перебування у СМО_{*1*} *k₁* вимог, і т.д., а у СМО_{*n*} – *k_n* вимог буде визначатись добутком

$$p(k_1, \dots, k_n) = \prod_{i=1}^n p_i(k_i).$$

У вище наведених формулах використано

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_i(k) = 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

Ефективність роботи розімкненої ММО визначається рядом її показників. Наведемо основні з них [4].

Основні показники ефективності розімкненої ММО

1. Середня кількість вимог у черзі СМО_i. Знаходиться як математичне сподівання випадкової величини “кількість вимог у черзі”:

$$L_i = \sum_{j=r_i+1}^{\infty} (j - r_i) p_i(j), \quad i = \overline{1, n}.$$

2. Середня кількість зайнятих пристроїв у СМО_i. Знаходиться як відношення інтенсивності надходження вимог до інтенсивності обслуговування вимог:

$$R_i = \frac{e_i \lambda_0}{\mu_i}.$$

3. Середня кількість вимог у СМО_i. Знаходиться як сума вимог у черзі та у пристроях:

$$M_i = L_i + R_i$$

4. Середній час очікування в черзі СМО_i. Знаходять за 2-ю формулою Літгла:

$$Q_i = \frac{L_i}{e_i \lambda_0} = \frac{L_i}{\lambda_i}.$$

5. Середній час перебування вимог у СМО_i. Знаходиться за 1-ю формулою Літгла:

$$T_i = \frac{M_i}{e_i \lambda_0} = \frac{M_i}{\lambda_i}.$$

6. Середній час перебування вимог у ММО:

$$T = \sum_{i=1}^n e_i T_i.$$

У наведених показниках e_i – коефіцієнт передачі СМО_{*i*}, або кількість проходів вимогою СМО_{*i*}.

Послідовність проведення аналітичного дослідження розімкненої ММО [4]

- 1) Формування множини вхідних даних.
- 2) Розрахунок коефіцієнтів передачі e_i .
- 3) Перевірка умови сталого режиму $\lambda_i < \mu_i r_i, i = \overline{1, n}$.
- 4) Розрахунок нормувальних множників C_i для кожної СМО.
- 5) Визначення ймовірностей $p_i(k)$ знаходження k вимог в СМО_{*i*}.
- 6) Розрахунок показників ефективності функціонування ММО.
- 7) Аналіз отриманих результатів.

Приклад розрахунку ефективності розімкненої ММО

Розглядається система опрацювання замовлень в онлайн-магазині. Процес обслуговування складається з трьох послідовних етапів. На першому етапі заявки надходять від клієнтів кожні 6 хвилин та опрацьовуються двома операторами. Кожен оператор перевіряє дані та може підтвердити до 8 замовлень за годину. На другому етапі заявки переходять до складу, де кожен з трьох працівників складу збирає одне замовлення протягом 12 хвилин. 15% заявок повертаються на доопрацювання оператору через технічні помилки або для додаткової перевірки. На третьому етапі кожен з чотирьох працівників доставляє клієнтам до 3 замовлень за годину. 10% замовлень повертаються на склад через помилки або брак товару та збираються повторно. Черги на опрацювання замовлень на кожному етапі вважаються необмеженими. Потрібно визначити завантаженість працівників на кожному етапі.

Розв'язування

Побудуємо мережу масового обслуговування. Кожному етапу опрацювання замовлень відповідає одна СМО: перша складається з двох каналів, друга – з трьох, третя – з чотирьох. Заявки надходять на опрацювання до 1-ї СМО та

покидають ММО після опрацювання 3-ю СМО. Оскільки в процесі опрацювання замовлення повертаються до попередніх етапів, то маємо ММО зі зворотними зв'язками (рис. 6.1).

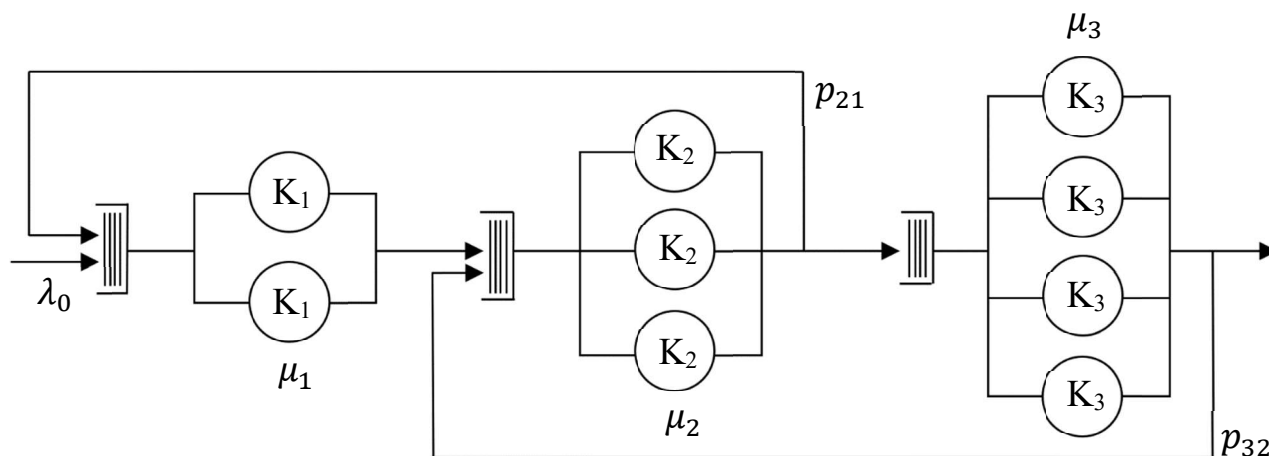


Рис. 6.1. Розімкнена ММО

Визначимо інтенсивності вхідного потоку в ММО та вихідних потоків з кожної СМО (кількість замовлень за годину):

- $\lambda_0 = \frac{60}{6} = 10$ – інтенсивність вхідного потоку в ММО;
- $\mu_1 = 8$ – інтенсивність вихідного потоку з 1-ї СМО;
- $\mu_2 = \frac{60}{12} = 5$ – інтенсивність вихідного потоку з 2-ї СМО;
- $\mu_3 = 3$ – інтенсивність вихідного потоку з 3-ї СМО.

Зазначимо ймовірності вибору маршруту слідування вимог:

$$p_{21} = 0,15, \quad p_{23} = 0,85, \quad p_{32} = 0,1.$$

Визначаємо коефіцієнти передачі:

$$e_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^n p_{ji} e_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad n = 3.$$

Для СМО₁:

$$e_1 = p_{01} + p_{11} e_1 + p_{21} e_2 + p_{31} e_3 = 1 + 0 \cdot e_1 + 0,15 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3.$$

Для СМО₂:

$$e_2 = p_{02} + p_{12} e_1 + p_{22} e_2 + p_{32} e_3 = 0 + 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0,1 \cdot e_3.$$

Для СМО₃:

$$e_3 = p_{03} + p_{13} e_1 + p_{23} e_2 + p_{33} e_3 = 0 + 0 \cdot e_1 + 0,85 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3.$$

Отримали систему:

$$\begin{cases} e_1 = 1 + 0,15e_2, \\ e_2 = e_1 + 0,1e_3, \\ e_3 = 0,85e_2. \end{cases}$$

Розв'язки системи:

$$e_1 = \frac{61}{51}, \quad e_2 = \frac{200}{153}, \quad e_3 = \frac{10}{9}.$$

Перевіряємо умову сталого режиму

$$\lambda_i = e_i \lambda_0 < \mu_i r_i, i = \overline{1, n},$$

де $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 4$ – кількість каналів обслуговування відповідної СМО.

Для зручності подамо її у вигляді

$$\frac{\mu_i r_i}{e_i} > \lambda_0, i = \overline{1, n}.$$

$$\frac{\mu_1 r_1}{e_1} = \frac{8 \cdot 2}{\frac{61}{51}} \approx 13,37705 > 10,$$

$$\frac{\mu_2 r_2}{e_2} = \frac{5 \cdot 3}{\frac{200}{153}} = 11,475 > 10,$$

$$\frac{\mu_3 r_3}{e_3} = \frac{3 \cdot 4}{\frac{10}{9}} = 10,8 > 10.$$

Отже, умова сталого режиму виконується.

Остаточно, обраховуємо завантаженість кожної СМО (середню кількість зайнятих працівників):

$$R_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}, \quad \lambda_i = e_i \lambda_0.$$

$$R_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\frac{61}{51} \cdot 10}{8} \approx 1,4951,$$

$$R_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{\frac{200}{153} \cdot 10}{5} \approx 2,61438,$$

$$R_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{\frac{10}{9} \cdot 10}{3} \approx 3,7307.$$

6.1.2. Розрахунок параметрів замкнених мереж масового обслуговування

Розглянемо вхідні та вихідні змінні замкнених ММО [4].

Вхідні змінні замкненої ММО:

- n – кількість СМО у ММО;
- N – кількість вимог у замкненій ММО;
- (p_{ij}) – матриця ймовірностей, p_{ij} – ймовірність переходу вимоги з СМО _{i} у СМО _{j} ;
- r_i – кількість каналів обслуговування у СМО _{i} ;
- μ_i – інтенсивність обслуговування вимог кожним каналом СМО _{i} .

Вихідні змінні замкненої ММО:

- середня довжина черги СМО _{i} ;
- середня кількість зайнятих пристроїв в СМО _{i} ;
- інтенсивність надходження вимог до СМО _{i} ;
- середня кількість вимог у СМО _{i} ;
- середній час очікування в черзі СМО _{i} ;
- середній час обслуговування в СМО _{i} .

В замкненій ММО кількість вимог незмінна, тому умова сталого режиму для неї завжди виконується, тобто має місце нерівність:

$$\lambda_i < \mu_i r_i, i = \overline{1, n}.$$

Оскільки ММО замкнена, то зовнішнього вхідного потоку λ_0 не існує. Початковою вважається СМО₁, а початковим вхідним потоком вимог буде λ_1 . Коефіцієнт передачі e_i вводиться як частка потоку λ_1 :

$$\lambda_i = e_i \lambda_1, i = \overline{2, n}.$$

Звідси зрозуміло, що $e_1 = 1$, а e_i – середня кількість разів проходження вимоги через СМО _{i} , $i = \overline{2, n}$, з моменту виходу цієї вимоги з СМО₁ і до моменту повернення її у СМО₁.

Середня кількість вимог, що надходить до СМО _{i} , рівна середній кількості вимог, що залишають її, тому вхідний потік вимог у СМО _{i} буде:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n p_{ji} \lambda_j, i = \overline{1, n}.$$

Враховуючи, що $\lambda_i = e_i \lambda_1$, для e_i отримаємо

$$e_i \lambda_1 = \sum_{j=1}^n p_{ji} \lambda_j, i = \overline{1, n},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_i = \sum_{j=1}^n p_{ji} e_j, i = \overline{2, n}, \\ e_1 = 1. \end{array} \right.$$

Якщо k_i – кількість вимог у СМО_i, то

$$\sum_{i=1}^n k_i = N,$$

де N – загальна кількість вимог у ММО.

У замкненій ММО окремі СМО залежні між собою, тому ймовірність того, що у СМО₁ перебуває k_1 вимог, і т.д., а у СМО_n – k_n вимог буде

$$p(k_1, \dots, k_n) = C(N) \prod_{i=1}^n p_i(k_i).$$

У наведеній формулі $C(N)$ – нормувальний множник, а функції $p_i(k)$, взагалі кажучи, не є ймовірностями і визначаються формулами:

$$p_i(k) = \begin{cases} \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^k \frac{1}{k!}, & k \leq r_i, \\ \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^k \frac{1}{r_i! r_i^{k-r_i}}, & k > r_i. \end{cases}$$

Знайдемо **нормувальний множник** $C(N)$, використовуючи:

$$\sum_{(k_1, \dots, k_n)} p(k_1, \dots, k_n) = 1.$$

Отже,

$$\sum_{(k_1, \dots, k_n)} C(N) \prod_{i=1}^n p_i(k_i) = 1,$$

$$C(N) = \left(\sum_{(k_1, \dots, k_n)} \prod_{i=1}^n p_i(k_i) \right)^{-1}.$$

Знаючи $C(N)$, можна обчислити $p(k_1, \dots, k_n)$, тобто ймовірність конкретного стану ММО. Ймовірність того, що СМО_{*i*} у ММО опрацьовує *j* вимог, а решта $N - j$ вимог розміщені у інших СМО обчислюється за формулою

$$P_{\text{СМО}_i}(j) = \sum_{(k_1, \dots, j, \dots, k_n)} p(k_1, \dots, j, \dots, k_n).$$

Зазначимо також, що

$$\sum_{j=0}^N P_{\text{СМО}_i}(j) = 1, i = \overline{1, n}.$$

Зважаючи на вказане вище, замкнена ММО, в яку входить дві СМО, що обслуговують N вимог, матиме нормувальний множник:

$$C(N) = \left(\sum_{(k_1, k_2): k_1 + k_2 = N} p_1(k_1)p_2(k_2) \right)^{-1} = \left(\sum_{\alpha=0}^N p_1(\alpha)p_2(N - \alpha) \right)^{-1},$$

а ймовірність того факту, що СМО₁ опрацьовує *j* вимог визначається за формулою:

$$P_{\text{СМО}_1}(j) = \sum_{(j, N-j)} p(j, N-j) = p(j, N-j) = C(N)p_1(j)p_2(N-j).$$

Ефективність роботи замкненої ММО характеризується такими показниками [4].

Основні показники ефективності функціонування замкненої ММО

1) **Середня кількість вимог у черзі СМО_{*i*}**. Розраховується як математичне сподівання випадкової величини “кількість вимог у черзі”:

$$L_i = \sum_{j=r_i+1}^N (j - r_i)P_{\text{СМО}_i}(j).$$

2) **Середня кількість зайнятих пристроїв у СМО_{*i*}**. Розраховується як різниця між загальною кількістю пристроїв і середньою кількістю вільних пристроїв:

$$R_i = r_i - \sum_{j=0}^{r_i-1} (r_i - j) P_{\text{СМО}_i}(j).$$

3) **Середня кількість вимог у СМО_i**. Розраховується як сума кількості вимог у черзі та у пристроях:

$$M_i = L_i + R_i.$$

4) **Інтенсивність вихідного потоку вимог у СМО_i**. Розраховується за формулою:

$$\lambda_i = R_i \mu_i.$$

5) **Середній час перебування вимоги в СМО_i**. Розраховується за другою формулою Літтла:

$$T_i = \frac{M_i}{\lambda_i}.$$

6) **Середній час очікування в черзі СМО_i**. Розраховується за першою формулою Літтла:

$$Q_i = \frac{L_i}{\lambda_i}.$$

Відзначимо, що загальна кількість вимог у ММО на будь якому етапі має дорівнювати N . Також, якщо довжина черги значна, а кількість зайнятих каналів n_i , то допущена помилка.

Послідовність проведення аналітичного дослідження замкненої ММО [4]

- 1) Формування множини вхідних даних.
- 2) Розрахунок коефіцієнтів передачі e_i .
- 3) Розрахунок нормувального множника $C(N)$ для ММО.
- 4) Визначення допоміжних функцій $p_i(k)$ для кожної СМО_i.
- 5) Визначення функцій $P_{\text{СМО}_i}(j)$, що задають ймовірності перебування j вимог в СМО_i.
- 6) Розрахунок показників ефективності функціонування мережі масового обслуговування.
- 7) Аналіз отриманих результатів.

6.2. Матричне представлення мереж Петрі

Досить популярним і відносно простим методом аналітичного дослідження властивостей функціонування мереж Петрі є матричний метод. Розглянемо його суть на прикладі мережі Петрі процесу обслуговування клієнтів автоматом з продажу кави (див. пункт 5.3). Для зручності подальших викладок позиції мережі назвемо $P_i, i = \overline{1,5}$, а переходи – $T_j, j = \overline{1,5}$.

Для дослідження будемо використовувати нумеровані назви позицій (P_i) і переходів (T_j) (див. рис. 6.2).

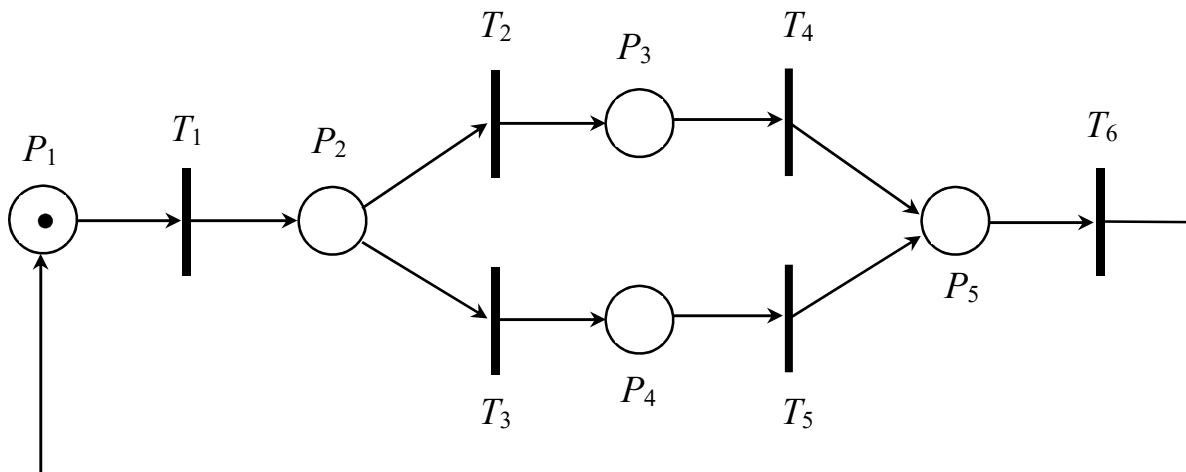


Рис. 6.2. Мережа Петрі з нумерованими позиціями і переходами

Зв'язки між позиціями та переходами представимо **матрицями входів** і **матрицями виходів** мережі Петрі [4].

Нехай рядок № j цих матриць відповідає переходу T_j , а стовпчик № i – позиції P_i . Тобто кількість рядків даних матриць рівна кількості переходів у мережі Петрі, а кількість стовпців – кількості позицій.

Означення. Матрицею входів у переходи мережі Петрі називається матриця

$$D^- = (d_{ji}^-),$$

де d_{ji}^- – кількість зв'язків (дуг) між позицією P_i та переходом T_j .

Означення. Матрицею виходів з переходів мережі Петрі називається матриця

$$D^+ = (d_{ji}^+),$$

де d_{ji}^+ – кількість зв'язків (дуг) між переходом T_j та позицією P_i .

Приклад 6.1.

Для мережі Петрі на рис. 6.2 матриця входів і матриця виходів будуть такими:

$$D^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Означення. Вектор, компоненти якого є кількістю маркерів в позиціях ММО називається **вектором маркування**, або **маркуванням**.

Наведемо основні правила, яких дотримуються при роботі з векторами маркування та матрицями входів і виходів [4].

Правила зміни вектора маркування

- Якщо на вхідних позиціях переходу T_j кількість маркерів рівна кількості зв'язків, то умова запуску переходу T_j виконана.
- Запуск переходу T_j відбувається таким чином: з вхідних позицій переходу T_j маркери видаляються у кількості, рівній кількості зв'язків, а у вихідні позиції переходу T_j маркери ставляться у кількості, рівній кількості зв'язків.

Приклад 6.2.

Вектор маркування мережі Петрі на рис. 6.2 має вигляд:

$$M = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0).$$

Розглянемо, як змінюватиметься вектор маркування в процесі приготування еспресо, тобто коли на схемі мережі Петрі буде активовано перехід T_3 . В цьому випадку переходи мережі Петрі будуть запускатись у такій послідовності:

$$T_1 - T_3 - T_5 - T_6.$$

Тоді вектор маркування буде змінюватись так:

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \xrightarrow{T_1} (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \xrightarrow{T_3} (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) \xrightarrow{T_5} (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) \xrightarrow{T_6} (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0).$$

Правила функціонування мережі Петрі у матричному представленні

• Якщо компоненти вектора маркування не менші за компоненти j -го рядка матриці входів D^- , то умова запуску переходу T_j виконана.

• Якщо умова запуску переходу виконана, то перехід T_j виконується так: від вектора маркування віднімається j -й рядок матриці входів D^- і додається j -й рядок матриці виходів D^+ .

j -й рядок матриці входів D^- або матриці виходів D^+ можна отримати, виконавши множення:

$$d_j^- = e_j D^- = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0) D^-,$$

$$d_j^+ = e_j D^+ = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0) D^+,$$

де у векторі $e_j = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)$ одиниця є j -м компонентом, а кількість його компонентів рівна кількості переходів.

Приклад 6.3.

Для переходу T_3 мережі Петрі, зображеної на рис. 6.2, відповідний (третій) рядок матриці входів D^- отримаємо шляхом добутку вектора e_3 і матриці D^- :

$$(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) D^- = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0).$$

Умова запуску переходу T_j у векторній формі:

$$M \geq e_j D^-,$$

тобто компоненти вектора маркування повинні перевищувати відповідні компоненти j -го рядка матриці входів D^- .

Результат запуску переходу T_j у векторній формі:

$$M' = M - e_j D^- + e_j D^+ = M + e_j (D^+ - D^-) = M + e_j D,$$

де

$$D = D^+ - D^-$$

– матриця змінювань.

Це означає, що вектор маркування, отриманий в результаті запуску переходу T_j , є сумою попереднього вектора маркування та j -го рядка матриці змінювань D .

Приклад 6.4.

Результатом запуску переходів $T_1 - T_3 - T_5$ мережі Петрі на рис. 6.2 буде:

$$\begin{aligned} M_1 &= M + e_1 D, \\ M_2 &= M_1 + e_3 D = M + (e_1 + e_3) D, \\ M_3 &= M_2 + e_5 D = M + (e_1 + e_3 + e_5) D = M + v D. \end{aligned}$$

Вектор

$$\begin{aligned} v &= e_1 + e_3 + e_5 = \\ &= (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) + (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) + (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0). \end{aligned}$$

називається **вектором запусків переходів**. Його компоненти є кількостями запусків переходів. Дійсно у послідовності $T_1 - T_3 - T_5$ перехід T_1 запускається 1 раз, перехід T_3 – один раз, перехід T_5 – один раз.

Щоб обчислити маркування M_3 , визначимо матрицю змінювань D :

$$D = D^+ - D^- = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$M_3 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) + (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1),$$

тобто ми отримали такий же результат, як і у прикладі 6.2.

Можна показати, що **вектор запусків переходів** визначається формулою:

$$v = \sum_j k_j e_j,$$

де k_j – кількість переходів T_j у послідовності запусків переходів.

Приклад 6.5.

Знайдемо результат запуску послідовності переходів $T_1 - T_2 - T_4 - T_6$ розглянутої на рис. 6.2 мережі Петрі.

$$\begin{aligned} M' &= M + (e_1 + e_2 + e_4 + e_6)D = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) + (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1)D = \\ &= (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) + (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0). \end{aligned}$$

Отриманий результат збігається з результатом, який можна легко отримати шляхом візуального аналізу мережі Петрі на рис. 6.2.

6.3. Дослідження властивостей мереж Петрі

Мережі Петрі мають ряд властивостей, які можна дослідити, виконавши деякі розрахунки і проаналізувавши отримані результати. Серед них відмітимо ***k*-обмеженість, досяжність, зберігання (збережуваність), активність** [4].

Обмеженість

Означення. Мережа Петрі називається ***k*-обмеженою**, якщо найбільша кількість маркерів у її позиціях не перевищує *k*.

У позиціях розглянутої на рис. 6.2. мережі Петрі не може збиратись більше одного маркера, тому вона 1-обмежена.

Досяжність

Означення. Маркування, що не може з'явитись за жодних умов називається **недосяжним**, решта маркувань називаються **досяжними**.

Приклад 6.6.

Логіка роботи автомата з продажу кави, мережу Петрі якої представлено на рис. 6.2, передбачає дві можливі послідовності запуску переходів:

$$T_1 - T_2 - T_4 - T_6 \quad \text{та} \quad T_1 - T_3 - T_5 - T_6.$$

Оскільки вектор початкового маркування мережі дорівнює $(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ і з кожного переходу мережі виходить лише одна дуга, то множина досяжних маркувань буде містити лише маркування $(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$, $(0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$, $(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$, $(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$, $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$. Решта маркувань будуть недосяжними.

Означення. **Досяжністю** мережі Петрі називається множина досяжних маркувань.

Твердження (про недосяжне маркування). Маркування M' є недосяжним, якщо матричне рівняння

$$M' = M + vD,$$

де v – невідоме, немає розв'язків, або серед компонент розв'язку є нецілі або від'ємні числа.

Проте, якщо компоненти v є цілі невід'ємні числа, це не означає, що M' – досяжне маркування. Існування розв'язку v з цілими невід'ємними компонентами є лише необхідною умовою досяжності.

Приклад 6.7.

Чи є досяжним маркування $M' = (0 \ 1 \ 0 \ 0)$ для заданої мережі Петрі (див. рис. 6.3)?

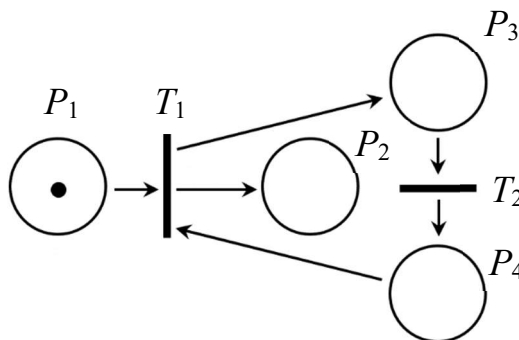


Рис. 6.3. Мережа Петрі, дослідження досяжності

Щоб дати відповідь на поставлене питання, розв'яжемо матричне рівняння

$$(0 \ 1 \ 0 \ 0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0) + vD.$$

Складаємо матрицю змінювань:

$$D = D^+ - D^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, отримали рівняння:

$$(0 \ 1 \ 0 \ 0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0) + v \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

з якого потрібно знайти вектор $v = (v_1, v_2)$. Помноживши вектор на матрицю, отримаємо

$$(0 \ 1 \ 0 \ 0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0) + (-v_1 \ v_1 \ v_1 - v_2 \ -v_1 + v_2),$$

звідки

$$(-v_1 \ v_1 \ v_1 - v_2 \ -v_1 + v_2) = (-1 \ 1 \ 0 \ 0).$$

Отримали систему з чотирьох рівнянь для визначення двох невідомих v_1, v_2 :

$$\begin{cases} -v_1 = -1, \\ v_1 = 1, \\ v_1 - v_2 = 0, \\ -v_1 + v_2 = 0. \end{cases}$$

Ця система сумісна та має єдиний розв'язок

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 1.$$

Отже, в результаті розв'язання матричного рівняння ми отримали цілі, додатні значення v_1, v_2 .

Це означає, що маркування $M' = (0 \ 1 \ 0 \ 0)$ може бути досягнуте послідовністю, в якій перехід T_1 присутній один раз і перехід T_2 – один раз. Проте жодна з послідовностей $T_1 - T_2$ або $T_2 - T_1$ не може бути реалізована в даній мережі Петрі, оскільки в початковому маркуванні не виконана умова запуску ні переходу T_1 , ні переходу T_2 (немає маркерів ні в позиції P_3 , ні в P_4).

Збережуваність

В процесі моделювання роботи деяких систем за допомогою мереж Петрі трапляються випадки, коли загальна кількість маркерів у мережі з часом не змінюється. Цей факт ми можемо спостерігати у мережі Петрі, наведеній на малюнку 6.2, оскільки цією мережею завжди рухається лише один маркер.

Означення. Якщо в мережі Петрі неможливе виникнення і знищення ресурсів, то мережа володіє властивістю **зберігання** (називається **збережуваною**).

Твердження (про збережуваність). Мережа Петрі є **збережуваною**, якщо існує вектор w з додатними компонентами, такий що для довільного досяжного маркування M' має місце рівність

$$Mw = M'w.$$

Оскільки для довільного досяжного маркування M' існує вектор v , такий, що

$$M' = M + vD,$$

то

$$M'w = (M + vD)w = Mw + vDw.$$

Звідси

$$vDw = 0 \Rightarrow Dw = 0,$$

оскільки v – вектор маркувань і він не може дорівнювати нулю.

Теорема (необхідні і достатні умови збережуваності мережі Петрі). Для того, щоб мережа Петрі була збережуваною, необхідно і достатньо, щоб існував вектор w з додатними компонентами, такий що

$$Dw = 0.$$

Приклад 6.8.

Дослідимо на збережуваність наведену на рис. 6.2 мережу Петрі за теоремою про необхідні і достатні умови збережуваності.

Перевіримо умову теореми

$$Dw = 0.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -w_1 + w_2 = 0, \\ -w_2 + w_3 = 0, \\ -w_2 + w_4 = 0, \\ -w_3 + w_5 = 0, \\ -w_4 + w_5 = 0, \\ w_1 - w_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи будуть довільні дійсні $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6$, а значить і додатні. Отже, необхідні і достатні умови теореми виконуються, і дана мережа Петрі є збережуваною.

Також відмітимо, що

- Довільна збережувана мережа Петрі є k -обмеженою;
- Якщо мережа Петрі не k -обмежена, то вона і не збережувана.

Активність

Означення. Якщо з довільного досяжного початкового стану мережі Петрі можливий перехід в інший довільний досяжний стан, то мережа Петрі називається **активною** (володіє властивістю активності).

Розрізняють п'ять рівнів активності переходів мережі Петрі [9].

Рівні активності переходів мережі Петрі:

- **Активність рівня 0** присвоюють переходу, який ніколи не може бути запущений.
- **Активність рівня 1** присвоюють переходу, якщо існує маркування, що дозволяє його запуск.
- **Активність рівня 2** присвоюють переходу, якщо для довільного цілого n існує послідовність запусків переходів, у якій досліджуваний перехід зустрічається принаймні n раз.
- **Активність рівня 3** присвоюють переходу, якщо існує нескінченна послідовність запусків переходів, у якій досліджуваний перехід зустрічається безліч раз.
- **Активність рівня 4** присвоюють переходу, якщо для довільного досяжного маркування існує послідовність запусків переходів, яка приводить до маркування, що запускає досліджуваний перехід.

Приклад 6.9.

Дослідити мережу Петрі, подану на рис. 6.4, на активність переходів.

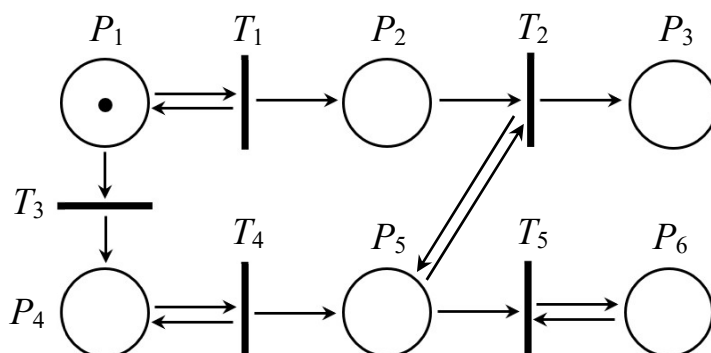


Рис. 6.4. Мережа Петрі, дослідження активності переходів

При запуску переходу T_3 , позиція P_1 втрачає маркер назавжди, оскільки отримати маркер P_1 може лише після запуску T_1 , а T_1 запуститься лише тоді, коли P_1 матиме маркер. Тому:

- Перехід T_1 : рівень активності 3, оскільки T_1 може запускатись безліч разів до першого запуску T_3 , після чого T_1 більше не запуститься.

- Перехід T_2 : має рівень активності 2, оскільки T_2 може бути запусканий будь-яку кількість разів, але не нескінченно. Дійсно, для того, щоб запустити перехід T_2 n разів, потрібно спочатку запустити перехід T_1 n разів, потім запустити перехід T_3 один раз і T_4 один раз, і тільки після цього будуть виконані умови запуску переходу T_2 n разів. Як тільки n накопичених у позиції P_1 маркерів будуть вичерпані, умова запуску переходу T_2 зникає назавжди.

- Перехід T_3 : рівень активності 1, оскільки існує маркування $M = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$, яке дозволяє запуск T_3 .

- Перехід T_4 : рівень активності 4, оскільки перехід T_4 завжди може бути запусканий після запуску переходу T_3 .

- Перехід T_5 : рівень активності 0, оскільки для запуску T_5 вимагається наявність маркерів одночасно у P_5 та P_6 , чого неможливо досягнути.

6.4. Дерево досяжності

Одним з популярних методів дослідження властивостей мережі Петрі є побудова його дерева досяжності. Дерево досяжності мережі Петрі візуалізує множину досяжних маркувань мережі. Коренем дерева досяжності є **початкове маркування**, а вузлами – всі інші маркування.

Означення. Термінальним називається маркування мережі Петрі, згідно з яким жоден з переходів мережі не може бути запусканий.

Означення. Дублюючим називається маркування мережі Петрі, що раніше вже зустрічалося в дереві досяжності.

Символом ∞ на дереві досяжності позначають зростання кількості маркерів у деякій позиції до нескінченності.

У маркуванні M на позиції j з'являється ∞ , якщо для деякого попереднього маркування M' має місце умова:

$$m'_k \leq m_k, k \neq j; m'_j < m_j,$$

де m'_k – компоненти маркування M' , а m_k – компоненти маркування M .

З'явившись у маркуванні один раз, символ ∞ вже не зникає.

Приклад 6.10.

Побудувати дерево досяжності мережі Петрі, поданої на рис. 6.5.

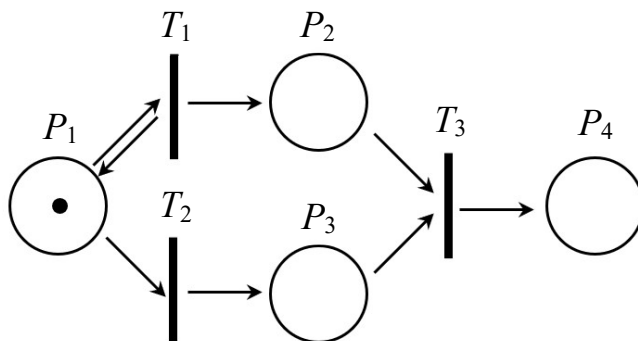


Рис. 6.5. Мережа Петрі, побудова дерева досяжності

Дерево досяжності даної мережі Петрі зображено на рис. 6.6. В корені дерева розміщено початкове маркування $(1\ 0\ 0\ 0)$.

Маркування кваліфікують як: початкове, граничне (потребує опрацювання), термінальне (не потребує опрацювання), дублююче, внутрішнє (не є початковим, дублюючим або термінальним).

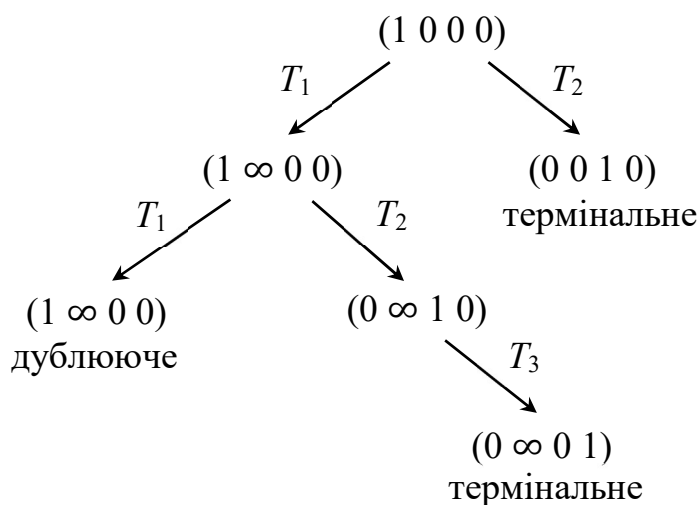


Рис. 6.6. Дерево досяжності мережі Петрі

Правила опрацювання маркування

- Якщо в дереві досяжності вже існує маркування M' яке не є граничним, а досліджуване маркування $M = M'$, то M – дублююче маркування (воно вже було включене в дерево).

- Якщо для маркування M жоден з переходів не запускається, то M – термінальне маркування.

- Від маркування M для довільного дозволеного переходу T_n створити нове маркування X дерева досяжності та дугу з позначкою T_n , що йде від маркування M до маркування X . Тоді M стане внутрішнім маркуванням, а X – граничним маркуванням.

Значення x_j маркування X знаходимо так:

- Якщо $m_j = \infty$, то $x_j = \infty$;
- Якщо на шляху до маркування X існує маркування M' таке, що

$$m'_k \leq x_k, k \neq j; m'_j < x_j,$$

то $x_j = \infty$;

інакше x_j присвоїти результат переходу T_n : $x_j = m_j + D_{nj}$.

- Алгоритм закінчується, коли всі маркування стануть термінальними, дублюючими чи внутрішніми.

Дослідження мережі Петрі за допомогою дерева досяжності

- Мережа Петрі k -обмежена тоді і лише тоді, коли в її дереві досяжності відсутній символ ∞ .

- Символ ∞ стоїть на необмежених позиціях мережі.
- Число k визначає найбільшу кількість маркерів у дереві досяжності.
- Якщо мережа Петрі k -обмежена, її варто дослідити на збережуваність.

Для цього для кожного маркування у дереві досяжності потрібно скласти систему рівнянь:

$$\begin{cases} w_1 M_1^{(1)} + w_2 M_2^{(1)} + \dots + w_p M_p^{(1)} = s, \\ \dots \\ w_1 M_1^{(m)} + w_2 M_2^{(m)} + \dots + w_p M_p^{(m)} = s, \end{cases}$$

де p – кількість позицій мережі Петрі;

m – кількість маркувань в дереві досяжності мережі Петрі;

s, w_i – невідомі величини.

• Якщо розв’язок цієї системи: $s \in \mathbb{Z}, s > 0, w_i \in \mathbb{Z}, w_i > 0, i = \overline{1, p}$, то мережа Петрі володіє властивістю збережуваності.

• Якщо маркування M' присутнє у дереві досяжності мережі Петрі, то це маркування є досяжним.

• Якщо в дереві досяжності є маркування $M'', M'' > M'$, то маркування M' покривається маркуванням M'' .

Наприклад маркування $(1 \ \infty \ 2 \ 0)$ покриває маркування $(1 \ 12 \ 1 \ 0)$.

Розглянута у прикладі 6.10 мережа Петрі необмежена, оскільки у дереві досяжності є символ ∞ .

З дерева досяжності неможливо визначити послідовність переходів, що приводить до заданого маркування, проте можна дослідити мережу Петрі на k -обмеженість, збережуваність та покриття маркування.

Підсумуємо розглянуті вище способи аналітичного дослідження властивостей мереж Петрі:

- k -обмеженість досліджується за допомогою дерева досяжності.
- Збережуваність досліджується матричним способом і за допомогою дерева досяжності.
- Досяжність досліджується матричним способом і за допомогою дерева досяжності.
- Активність досліджується шляхом аналізу графічного зображення мережі Петрі.

Питання для самоконтролю

1. Яким вимогам має задовольняти ММО для проведення її аналітичного дослідження?
2. Перерахуйте вхідні змінні для аналітичного моделювання розімкненої ММО.
3. Перерахуйте вихідні змінні для аналітичного моделювання розімкненої ММО.

4. Сформулюйте умову сталого режиму розімкненої ММО.
5. Що таке коефіцієнт передачі розімкненої СМО? Скільки коефіцієнтів передачі має розімкнена ММО?
6. Перерахуйте основні показники ефективності розімкненої ММО.
7. Перерахуйте вхідні змінні для аналітичного моделювання замкненої ММО.
8. Перерахуйте вихідні змінні для аналітичного моделювання замкненої ММО.
9. Чи задовольняють замкнені ММО умову сталого режиму?
10. Як вводяться коефіцієнти передачі для замкнених ММО?
11. Перерахуйте основні показники ефективності замкненої ММО.
12. Як побудувати матрицю входів мережі Петрі?
13. Як побудувати матрицю виходів мережі Петрі?
14. За якими правилами змінюються компоненти вектора маркування?
15. Наведіть правила функціонування мережі Петрі у матричному представленні.
16. Сформулюйте означення k -обмеженої мережі Петрі.
17. Сформулюйте означення досяжного і недосяжного маркування.
18. Коли мережа Петрі називається збережуваною?
19. Сформулюйте необхідну і достатню умову збережуваності мережі Петрі.
20. Як класифікують рівні активності мережі Петрі?
21. Які маркування мережі Петрі називають термінальним та дублюючим?
22. Що відображається на дереві досяжності мережі Петрі?

Задачі для самостійного розв'язування

1. Дано розімкнену ММО з вхідними параметрами: $\lambda_0 = 12$; $\mu_1 = 10$; $\mu_2 = 12$; $p_{11} = 0,4$; $p_{21} = 0,2$ (рис. 6.7). Розрахувати показники ефективності цієї ММО.

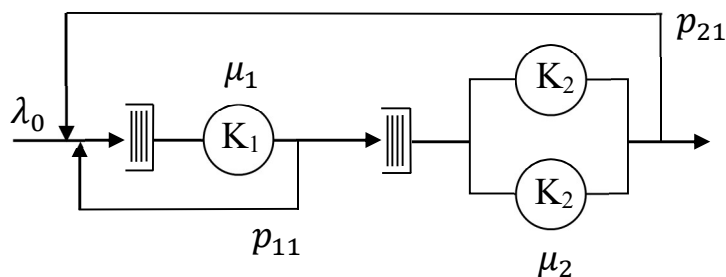


Рис. 6.7. Розімкнена ММО до задачі 1

2. Замкнена ММО, побудована на основі двоканальної та триканальної СМО з інтенсивностями вихідних потоків $\mu_1 = 3$ та $\mu_2 = 2,5$ відповідно опрацьовує 10 вимог (рис. 6.8). Ймовірність повернення вимог з виходу СМО₁ на її вхід дорівнює 0,4. Розрахувати показники ефективності цієї ММО.

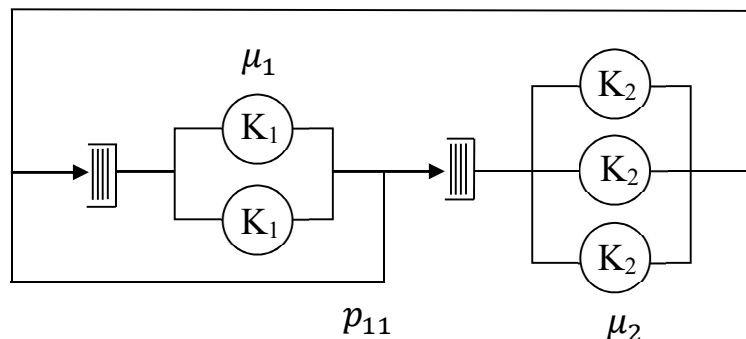


Рис. 6.8. Замкнена ММО до задачі 2

3. Дано мережу Петрі (рис. 6.9). Чи можуть бути запущеними переходи T_2, T_3 ? Яке маркування отримаємо в результаті запуску послідовності переходів $T_1-T_2-T_1-T_3$?

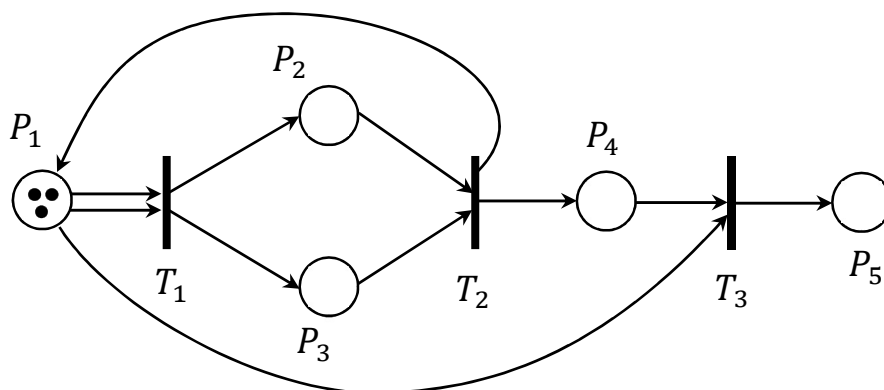


Рис. 6.9. Мережа Петрі до задачі 3

4. Дано мережу Петрі (рис. 6.10). Чи є для неї досяжним маркування $M = (2\ 0\ 0\ 4\ 4)$?

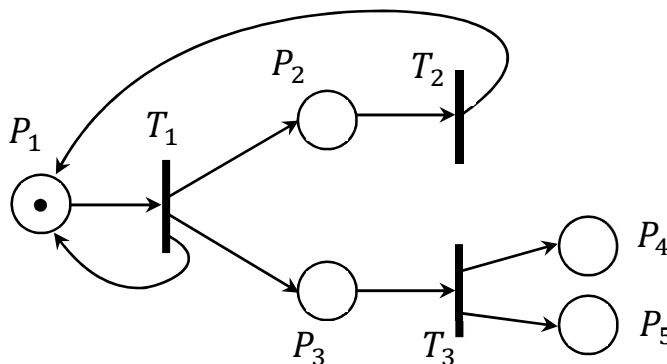


Рис. 6.10. Мережа Петрі до задачі 4

5. Чи є збереженою мережа Петрі, представлена на рис. 6.11.

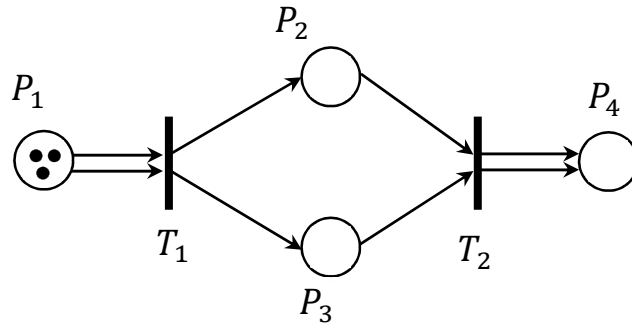


Рис. 6.11. Мережа Петрі до задачі 5

6. Визначити рівень активності переходів мережі Петрі, представленої на рис. 6.12.

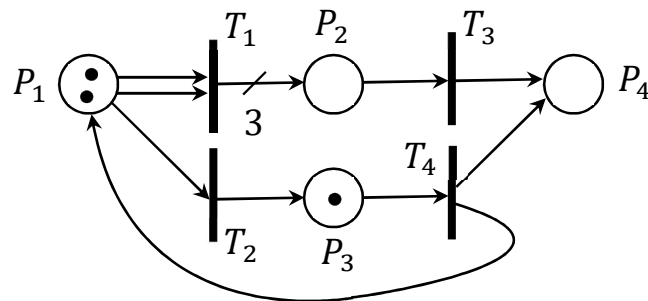


Рис. 6.12. Мережа Петрі до задачі 6

7. Побудувати дерево досяжності для мережі Петрі, представленої на рис. 6.13.

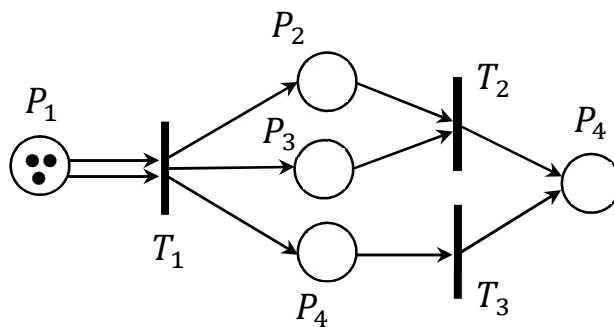


Рис. 6.13. Мережа Петрі до задачі 7

Тема 7. Елементи імітаційного моделювання

У сучасному світі імітаційне моделювання стає незамінним інструментом для дослідження складних систем, особливо, коли інші методи моделювання застосувати неможливо. Його актуальність зумовлена рядом факторів, серед яких варто виділити:

- необхідність приймати рішення в умовах невизначеності та ризиків;
- економічна вигода та безпека;
- підвищення ефективності управління конкретною системою;
- дослідження фізично недоступних систем;
- довгострокове прогнозування;
- універсальність у застосуванні.

Перевагами методу імітаційного моделювання є його гнучкість щодо проведення експериментів, масштабування часу, виявлення неефективних операцій чи некоректних даних. Це робить імітаційний метод ефективним засобом для оптимізації витрат і підвищення загальної продуктивності будь-якої системи.

Суть імітаційного моделювання полягає у тому, щоб через комп'ютерну програму відтворити роботу реальної системи і дослідити її властивості.

7.1. Поняття генератора випадкових величин

Часто імітаційні моделі можуть містити розподілені за різними законами випадкові величини, які потрібно вміти генерувати.

Для генерування випадкових величин використовуються:

- електронні таблиці розподілів випадкових величини (основний недолік – їх великий обсяг);
- апаратні генератори випадкових чисел (основний недолік – неможливість проведення направленої експерименту, низька швидкість);
- псевдовипадкові генератори на основі рекурсивних формул (найбільш поширений спосіб).

Як правило, у програмному забезпеченні вбудовані саме псевдовипадкові генератори рівномірно розподілених на проміжку $(0, 1)$ випадкових величин.

Якість генератора випадкових величин визначається такими факторами [10]:

- рівномірність розподілу випадкової величини;
- незалежність значень;
- великий період повторення;
- відтворюваність (можливість повторити послідовність);
- висока швидкодія;
- економне використання пам'яті.

Враховуючи, що множина чисел, згенерованих на комп'ютері, нещільна на $(0, 1)$, перевіримо їх математичне сподівання та дисперсію.

Для рівномірно розподіленої випадкової величини ζ щільність розподілу, математичне сподівання та дисперсія мають вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases}$$

$$M(\zeta) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$D(\zeta) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}.$$

У комп'ютері така величина задається скінченною множиною значень, однак при достатній розрядності ці значення добре наближають неперервний рівномірний розподіл.

Нехай розрядність чисел рівна n . Тоді теоретично генератор може згенерувати 2^n різних чисел на $(0, 1)$, а саме [4]:

$$\zeta_i = \frac{i}{2^n - 1}, \quad i = \overline{0, 2^n - 1},$$

$$p(\zeta_i) = p_i = \frac{1}{2^n}.$$

Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини ζ :

$$M(\zeta) = \sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{i}{2^n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n(2^n-1)} \cdot \frac{(2^n-1)2^n}{2} = \frac{1}{2},$$

$$D(\zeta) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \left(\frac{i}{2^n-1} - \frac{1}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2^n} \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\frac{i^2}{(2^n-1)^2} - \frac{i}{2^n-1} + \frac{1}{4} \right) \right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{2^n+1}{2^n-1}.$$

Отже, при достатньо великих значеннях n основні характеристики генерованої дискретної випадкової величини ζ співпадають з основними характеристиками неперервної на $(0, 1)$ випадкової величини ς . Тобто такі генератори можна використовувати в імітаційних моделях.

Серед генераторів поширеним є **лінійний конгруентний генератор рівномірно розподіленої випадкової величини** [4]:

$$z_{i+1} = (az_i + b) \bmod c,$$

$$\zeta_{i+1} = \frac{z_{i+1}}{c}, \zeta_{i+1} \in (0, 1),$$

де a, b, c – параметри генератора, z_0 – початкове значення, ζ_{i+1} – згенерована випадкова величина. Параметри a, b, c впливають на кількість різних випадкових чисел. Якщо число z_i вже зустрічалось, то всі наступні згенеровані числа теж будуть повторюватись.

Означення. Кількість різних значень у послідовності до першого повторення називається **періодом** генератора.

Правильний вибір параметрів a, b, c забезпечує максимальний період і кращі статистичні властивості генератора.

Приклад 7.1.

На B -бітовому комп'ютері при $b = 0$, $a = 1 + 4k$, $k > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $c = 2^B$ та початковому непарному z_0 період циклу генератора буде $P = 2^{B-2}$.

Якщо $b \neq 0$ і просте по відношенню до $c = 2^B$ (тобто найбільший спільний дільник чисел b і c рівний 1), $a = 1 + 4k, k \in \mathbb{N}$, то період циклу генератора буде $P = 2^B$.

Перевірка генератора на періодичність проводиться шляхом визначення довжини періоду P псевдовипадкової послідовності.

Розглянемо генератор $z_{i+1} = (9z_i + 3) \bmod 8, c = 8$, розрядність 3 біт.

Згідно з теорією період генератора $P = 2^3 = 8$.

Перевіримо для $z_0 = 5$:

$$z_1 = (9z_0 + 3) \bmod 8 = 0,$$

$$z_2 = (9z_1 + 3) \bmod 8 = 3,$$

$$z_3 = (9z_2 + 3) \bmod 8 = 6,$$

$$z_4 = (9z_3 + 3) \bmod 8 = 1,$$

$$z_5 = (9z_4 + 3) \bmod 8 = 4,$$

$$z_6 = (9z_5 + 3) \bmod 8 = 7,$$

$$z_7 = (9z_6 + 3) \bmod 8 = 2,$$

$$z_8 = (9z_7 + 3) \bmod 8 = 5 - \text{повтор.}$$

Тобто період генератора дійсно рівний 8.

Отже, період генератора визначають так: фіксують одне із z_i та підраховують кількість згенерованих реалізацій випадкової величини, поки не натраплять на зафіксоване число.

7.1.1. Методи тестування генераторів випадкових величин

Розглянемо **методи тестування** генераторів рівномірно розподілених на $(0, 1)$ випадкових величин [4].

Емпіричні тести – перевірка сформованих генератором чисел за допомогою статистичних тестів. Перевіряють найчастіше **рівномірність, випадковість та кореляцію**.

На рівномірність перевіряють методами визначення законів розподілу з використанням критерію згоди χ^2 . Кількість інтервалів вибирають $m = 20 - 50$, а кількість згенерованих чисел $N = (10^2 - 10^5)m$.

На випадковість перевіряють за критерієм серій, згідно з яким спостерігаються довжини зростаючих підпоследовностей згенерованої последовності.

Нехай r_1 – кількість серій довжиною 1; r_2 – кількість серій довжиною 2; і т.д. r_6 – кількість серій довжиною 6 і більше.

Обчислюють критерій

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 a_{ij} (r_i - Nb_i)(r_j - Nb_j),$$

де $a_{ij} \in A$, $b_i \in b$ [7]:

$$A = \begin{pmatrix} 4529,4 & 9044,9 & 13568 & 18091 & 22615 & 27892 \\ 9044,9 & 18097 & 27139 & 36187 & 45234 & 55789 \\ 13568 & 27139 & 40721 & 54281 & 67852 & 83685 \\ 18091 & 36187 & 54281 & 72414 & 90470 & 111580 \\ 22615 & 45234 & 67852 & 90470 & 113262 & 139476 \\ 27892 & 55789 & 83685 & 111580 & 139476 & 172860 \end{pmatrix},$$

$$b = \left(\frac{1}{6} \quad \frac{5}{24} \quad \frac{11}{120} \quad \frac{19}{720} \quad \frac{29}{5040} \quad \frac{1}{840} \right).$$

При великій кількості спостережуваних значень (більше 4000) значення статистичного критерію $R < \chi^2(0,1;6) = 10,6$, де 0,1 – рівень статистичної значущості (відповідно рівень довіри рівний 0,9).

Перевірка **кореляції** полягає в оцінюванні залежності між двома підпоследовностями випадкових величин, зсунутих одна відносно одної на j позицій, тобто між последовностями $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_h$ та $\zeta_{1+j}, \zeta_{2+j}, \zeta_{3+j}, \dots, \zeta_{h+j}$ [4].

Оцінювання кореляції для кожного значення $j = \overline{1, v}$ здійснюється за формулою:

$$\rho_j = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h (\zeta_i \zeta_{i+j} - M^2(\zeta)) \frac{1}{D(\zeta)}.$$

Ставиться і перевіряється гіпотеза $H_0: \rho_j = 0, j = \overline{1, v}$,

$$A_j = \frac{\rho_j}{\sqrt{D(\rho_j)}}, \quad D(\rho_j) = \frac{13h - 6}{h^2}.$$

Якщо $|A_j| < 1,645$, то гіпотеза приймається і послідовності випадкових чисел вважаються незалежними.

При $M(\zeta) = 1/2, D(\zeta) = 1/12$:

$$\rho_j = \frac{12}{h} \sum_{i=1}^h \zeta_i \zeta_{i+j} - 3, \quad j = \overline{1, v}.$$

Теоретичні тести: генератор випадкових величин перевіряють, зважаючи на його параметри. Обчислюють математичне сподівання та дисперсію і порівнюють їх з $1/2$ та $1/12$ відповідно (для генератора рівномірно розподіленої випадкової величини).

Рівномірність випадкових значень перевіряють графічно, зобразивши точки (ζ_i, ζ_{i+1}) або $(\zeta_i, \zeta_{i+1}, \zeta_{i+2})$ в одиничному квадраті чи кубі. Якщо заповнення фігури буде рівномірне, то вважають, що генератор генерує рівномірно розподілені випадкові величини.

7.1.2. Методи генерування випадкових величин

Для генерування випадкової величини із відомим законом розподілу використовують такі підходи [4]:

- метод оберненої функції;
- табличний метод;
- метод функціональних властивостей закону розподілу.

Метод оберненої функції ґрунтується на тому, що випадкова величина $\zeta = F(r)$ має рівномірний розподіл на інтервалі $(0, 1)$. Отже, випадкову величину r , яка має функції розподілу $F(x)$, можна отримати так:

- 1) Генеруємо рівномірно розподілену на $(0, 1)$ випадкову величину ζ .
- 2) Перетворюємо її на r : $r = F^{-1}(\zeta)$.

Приклад 7.2.

Отримаємо випадкову величину r , яка розподілена за законом Вейбулла $F_r(x) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k}$.

Генеруємо рівномірно розподілену на $(0, 1)$ випадкову величину u .

Розв'язуємо рівняння:

$$y = 1 - e^{-(r/\lambda)^k} \Rightarrow r = \lambda(-\ln[1 - y])^{1/k}.$$

Але $1 - y$ як і y рівномірно розподілена на $(0, 1)$. Тому, маючи реалізацію випадкової величини y , реалізацію випадкової величини r , розподіленої за законом Вейбулла, можна отримати за формулою

$$r = \lambda(-\ln y)^{1/k}.$$

При цьому найбільша складність – пошук F^{-1} , оскільки для деяких розподілів, наприклад нормального, F^{-1} взагалі не існує.

Табличний метод використовується, коли функція розподілу $F(x)$ задається таблицею значень (x_i, a_i) , $a_i = F(x_i)$. Тоді $F(x)$ має кусково-лінійний вигляд, і обернена функція $F^{-1}(x)$ теж кусково-лінійна.

Якщо випадкова величина ζ рівномірно розподілена на $(0, 1)$, то, використовуючи подібність трикутників, знаходимо відношення

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} = \frac{r - x_{i-1}}{\zeta - a_{i-1}},$$

$$r = x_{i-1} + \frac{x_i - x_{i-1}}{a_i - a_{i-1}}(\zeta - a_{i-1}), \quad \text{якщо } a_{i-1} < \zeta \leq a_i.$$

Через простоту цей метод широко використовується для генерування випадкових величин з довільним законом розподілу.

Метод функціональних властивостей закону розподілу розглянемо на прикладі **нормального розподілу** та **розподілу Ерланга** [8].

Для генерування **нормально розподіленої** випадкової величини з математичним сподіванням 0 і дисперсією 1 використовується **метод полярних координат**:

а) генеруємо дві рівномірно розподілені на $(0, 1)$ випадкові величини ζ_1, ζ_2 ;

б) утворюємо рівномірно розподілені на $(-1, 1)$ випадкові величини

$$\alpha_1, \alpha_2: \alpha_i = 2\zeta_i - 1, \quad i = 1, 2;$$

в) якщо $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq 1$, то обчислюємо

$$\beta = \sqrt{\frac{-2 \ln(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}.$$

Якщо $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 1$, то повертаємось до пункту а).

г) обчислюємо незалежні **нормально розподілені** випадкові величини з математичним сподіванням 0 і дисперсією 1:

$$\gamma_i = \alpha_i \beta, \quad i = 1, 2.$$

г) нормально розподілену випадкову величину r з математичним сподіванням a і дисперсією σ^2 отримують за формулою:

$$r = \sigma \gamma + a.$$

Випадкову величину, розподілену за **законом Ерланга** можна отримати за формулою:

$$r = -\frac{\mu}{k} \sum_{i=1}^k \ln(\zeta_i) = -\frac{\mu}{k} \ln \left(\prod_{i=1}^k \zeta_i \right),$$

де ζ_i – випадкова величина, рівномірно розподілена на $(0, 1)$, μ – математичне сподівання розподілу Ерланга k -го порядку, k – кількість випадкових величин ζ_i .

Основними перевітками генераторів випадкових величин є перевірка на **відповідність закону розподілу** та на **періодичність**.

Отже, загальну схему генерування випадкової величини (ВВ) можна представити так (див. рис. 7.1) [4]:

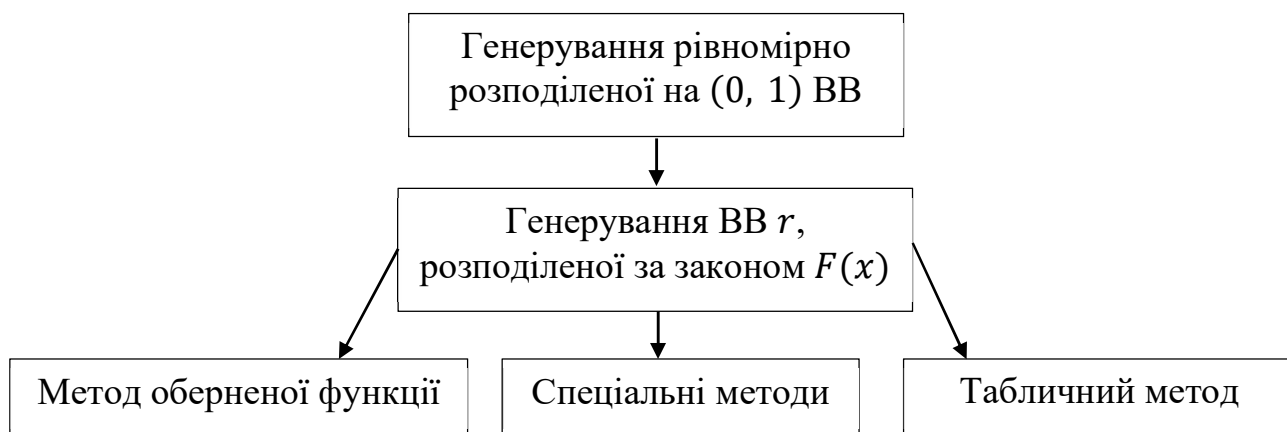


Рис. 7.1. Загальна схема генерування випадкової величини

7.2. Поняття алгоритму імітації

Означення. Алгоритм імітації – це формалізована процедура, що описує зміну стану моделі $S(t)$ у модельному часі t шляхом відтворення послідовності

подій та процесів функціонування реальної системи засобами комп'ютерної реалізації.

Означення. Подія – це миттєва зміна стану системи у певний момент часу.

Імітаційна модель задається сукупністю:

- множини станів системи $S(t)$;
- модельного часу $t \in [0, T_{mod}]$;
- набору подій, що змінюють стан системи;
- алгоритмів переходу між станами.

Реалізація алгоритму імітації передбачає [16]:

- 1) алгоритм просування модельного часу t ;
- 2) алгоритм зміни стану моделі $S(t) \rightarrow S(t + \Delta t)$;
- 3) алгоритм збору статистичних характеристик.

На рис. 7.2 зображено загальну схему алгоритму імітації [4].

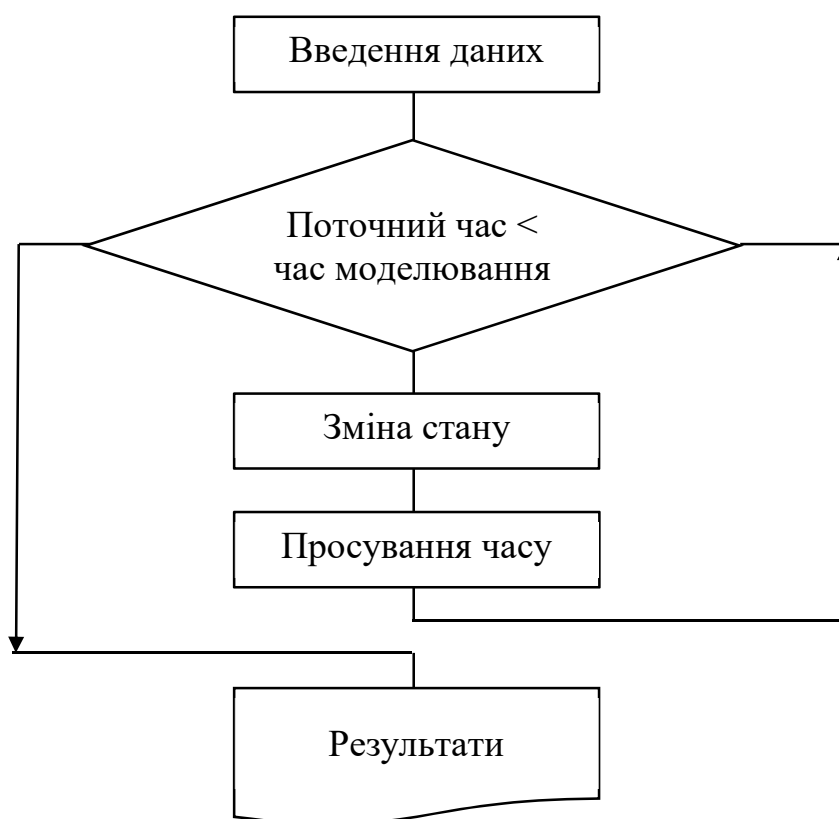


Рис. 7.2. Загальна схема алгоритму імітації

7.2.1. Алгоритми просування модельного часу

Просування модельного часу визначає, як змінюється змінна t у процесі моделювання. Розрізняють три основні підходи [4]:

- принцип фіксованого кроку Δt ;
- принцип найближчої події (подійний підхід);
- принцип проведення об'єктів через модель.

1. Принцип фіксованого кроку

Інтервал часу моделювання ділиться на рівні частини довжиною Δt :

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t.$$

На кожному кроці:

- перевіряються умови виникнення подій;
- виконується оновлення стану системи.

Інтервал Δt обирається достатньо малим, щоб ймовірність виникнення кількох подій на одному інтервалі була незначною.

Перевагами цього підходу є:

- простота реалізації;
- універсальність.

Недоліками:

- велика обчислювальна складність;
- низька ефективність для дискретно-подійних систем.

2. Подійний підхід

Модельний час змінюється від однієї події до наступної:

$$t = t_{event}.$$

Використовується **список майбутніх подій** (Future Event List, FEL), який містить моменти часу запланованих подій.

Цей підхід найчастіше застосовується при моделюванні **дискретно-подійних систем**, зміна стану яких відбувається лише у певні моменти часу і пов'язана з деякою подією: надходження вимоги, несправність, спрацювання сенсора тощо.

Алгоритм принципу найближчої події (подійного підходу):

1. Вибрати подію з мінімальним часом t_{event} .
2. Перейти до цього моменту часу.
3. Виконати подію.
4. Оновити список подій.

Переваги підходу:

- висока ефективність;
- точність моделювання.

Недоліком підходу є його складна реалізація.

Цей підхід є основним при моделюванні систем масового обслуговування.

3. Принцип проведення об'єктів через модель

За цим принципом об'єкти послідовно проходять через модель від моменту надходження до моменту виходу (алгоритм просування часу не будується). При кожному наступному проведенні враховується історія попередніх проведенень об'єктів через модель. Стан об'єкта моніториться і змінюється згідно з логікою моделі від моменту входу до моменту виходу.

Переваги підходу:

- наочність;
- зручність опису складних систем.

Недоліки:

- складність реалізації;
- потреба у спеціалізованих середовищах (GPSS, Simula, SimPy, Arena [6]).

7.2.2 Алгоритми зміни стану моделі

Стан системи змінюється відповідно до обраного підходу до моделювання.

Можна виділити три підходи до побудови алгоритму зміни стану моделі залежно від часу [4]:

- подійно-орієнтований;
- дієво-орієнтований;
- процесно-орієнтований.

1. Подійно-орієнтований підхід

Стан моделі змінюється шляхом виконання послідовності подій $S(t) \rightarrow S(t + \Delta t)$, де $S(t)$ – стан системи.

Для систем масового обслуговування типовими є події:

- **надходження**, коли у систему надходить вимога;
- **звільнення** каналу, коли канал закінчив опрацювання вимоги.

Як приклад, на рис. 7.3 зображено блок схему події “надходження вимоги” до одноканальної СМО з обмеженою чергою, а на рис. 7.4 – блок-схему події “звільнення каналу”. Схеми відображають дії, що складають відповідні події.

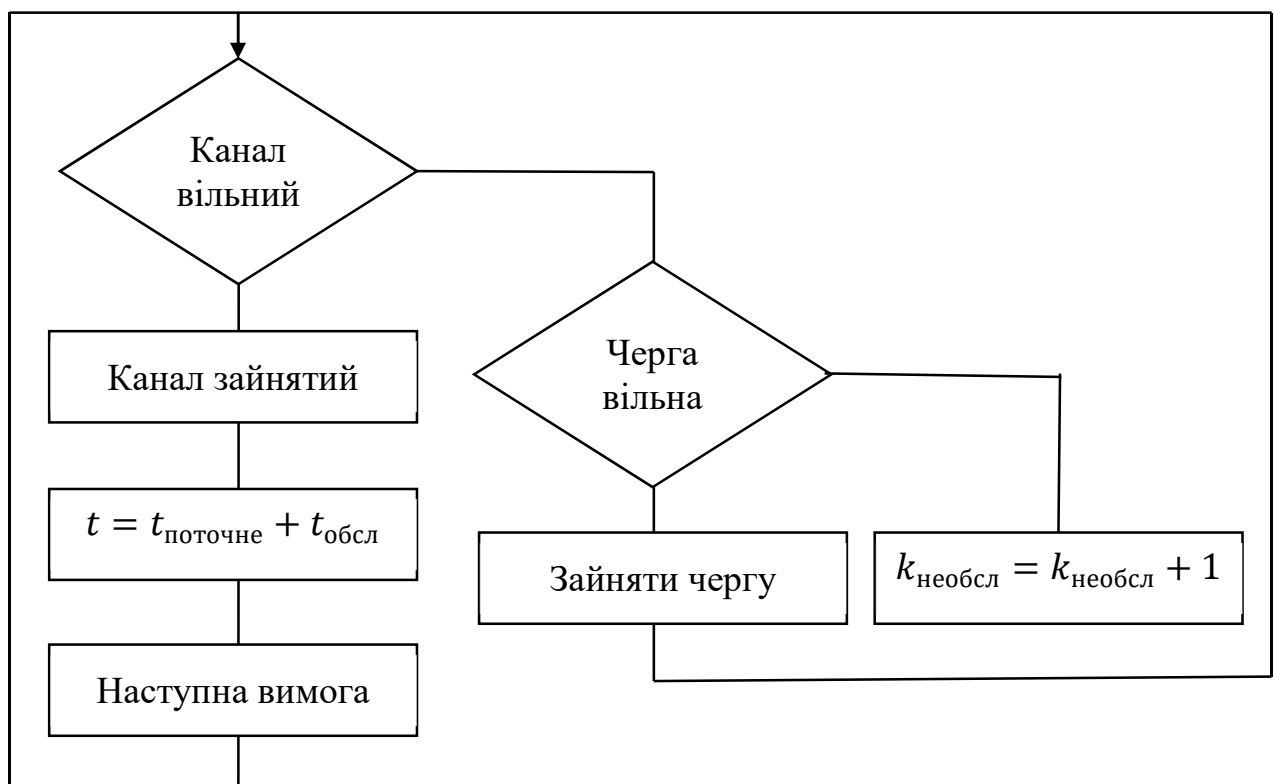


Рис. 7.3. Блок-схема події “надходження вимоги”

Після виконання події “надходження” фіксуються моменти часу настання наступних подій “надходження” та “звільнення каналу”. Із цих двох часових моментів обирається менший, а також визначається, якій саме події він відповідає. Далі модельний час переходить до моменту найближчої події, після чого ця подія виконується.

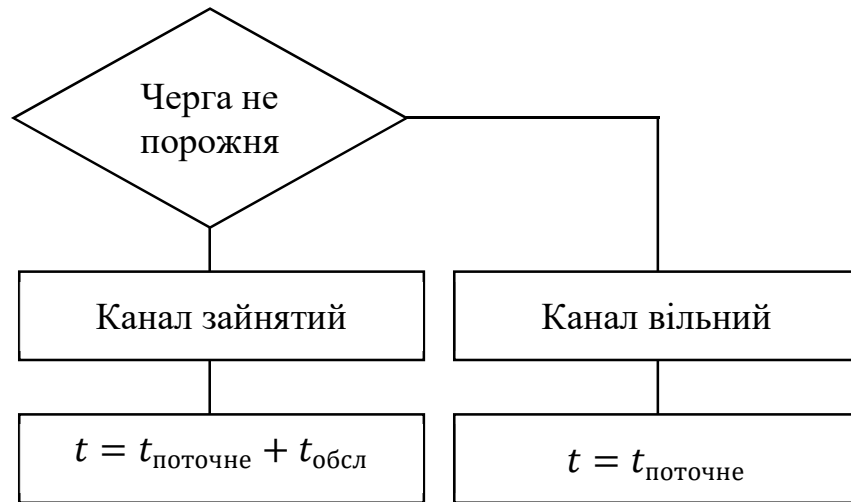


Рис. 7.4. Блок-схема події “звільнення каналу”

Після виконання події “звільнення каналу” фіксується момент настання наступної події “звільнення каналу” або відмічається, що в найближчому майбутньому звільнення каналу не передбачається.

Після виконання події:

- генеруються нові події;
- оновлюється список майбутніх подій.

2. Дієво-орієнтований підхід

Згідно з цим підходом описуються:

- множина дій;
- умови їх початку та завершення.

На кожному кроці часу перевіряються умови виконання дій. Якщо умова виконується – дія активується.

Дієво-орієнтований підхід ефективний, коли:

- тривалість дій залежить від стану системи;
- складно явно виділити події.

3. Процесно-орієнтований підхід

Згідно з цим підходом моделюється процес проходження об’єктів через систему з допомогою скінченного набору операторів, якими описується множина всіх можливих подій у системі. Далі процес імітації зводиться до

подійно-орієнтованого. Відмітимо, що цей підхід передбачає знання мов імітаційного моделювання, наприклад GPSS, Simula [1].

7.2.3 Алгоритми збору статистичної інформації

Як правило, поведінку імітаційної моделі вивчають на основі ряду її статистичних характеристик. Наведемо основні з них [4].

Ймовірність відмови

$$P_{ref} = \frac{N_{ref}}{N_{all}},$$

де N_{ref} – кількість відмов протягом часу моделювання T_{mod} ;

N_{all} – загальна кількість заявок протягом часу моделювання T_{mod} .

Середня довжина черги

Просування часу за принципом до найближчої події:

$$L_{aver} = \frac{1}{T_{mod}} \sum_i L_i \Delta t_i,$$

де L_i – довжина черги протягом часу Δt_i , T_{mod} – загальний час моделювання.

Просування часу за принципом Δt :

$$L_{aver} = \frac{1}{T_{mod}} \sum_{i=1}^n L_i \Delta t_i \approx \frac{\Delta t}{n \cdot \Delta t} \sum_{i=1}^n L_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i,$$

де n – кількість інтервалів Δt , $T_{mod} = n \cdot \Delta t$.

Середня кількість вимог у черзі

$$Q_{aver} = \frac{1}{N_{serv}} \sum_i L_i \Delta t_i,$$

де L_i – кількість вимог, що очікують обслуговування в системі i ;

Δt_i – інтервал часу, протягом якого спостерігалось значення L_i ;

N_{serv} – кількість вимог, опрацьованих протягом всього часу спостереження за ММО.

Також можна показати, що

$$Q_{aver} = \frac{L_{aver}}{\lambda_{exit}} = \frac{1}{T_{mod}} \sum_i L_i \Delta t_i \cdot \frac{1}{\frac{N_{serv}}{T_{mod}}} = \frac{1}{N_{serv}} \sum_i L_i \Delta t_i,$$

де $\lambda_{exit} = \frac{N_{serv}}{T_{mod}}$ – інтенсивність виходу вимоги з системи із врахуванням черги.

У більшості складних випадків для обчислення **середнього часу очікування вимог у черзі** використовується масив, що відображає стан черги вимог. Розмір такого масиву визначається максимально можливою кількістю вимог, які можуть одночасно перебувати в черзі.

Під час надходження вимоги до черги за нею закріплюється відповідна позиція в масиві згідно з правилом впорядкування. У цій позиції фіксується момент часу надходження вимоги. Коли вимога залишає чергу, відповідна комірка масиву звільняється. Такий механізм спостереження за часом очікування можна реалізувати за правилом LIFO (last input – first output).

Аналогічно, за допомогою масиву значень можна обчислювати й **середній час перебування вимоги в ММО**. У цьому випадку в масиві зберігаються моменти надходження вимог до мережі. При появі нової вимоги її час надходження фіксується у виділеній комірці масиву.

Середній час обслуговування в ММО

$$T_{net} = \frac{1}{N_{serv}} \sum_{i=1}^{N_{serv}} (t - t_{enter}),$$

де i – номер вимоги, N_{serv} – кількість обслужених вимог, t_{enter} – час надходження вимоги до ММО, t – поточний час.

Середнє завантаження пристрою:

$$R_{aver} = \frac{1}{T_{mod}} \sum_i R_i \Delta t_i,$$

де $R_i \in [0, 1]$ – зайнятість пристрою, Δt_i – інтервал часу, протягом якого спостерігалась зайнятість R_i .

7.3. Основи імітаційного моделювання мереж масового обслуговування

Імітаційне моделювання є потужним інструментом для відтворення поведінки систем різної складності. Він має особливу цінність, коли складно або неможливо побудувати модель іншого типу.

Імітаційна модель ММО – це програма, яка відтворює процес функціонування ММО на основі подійно-орієнтованого підходу, згідно з яким стан ММО змінюється в моменти настання певних подій, таких як: надходження вимоги у чергу чи канал обслуговування; звільнення каналу обслуговування; направлення вимоги з певною ймовірністю на повторне обслуговування тощо.

Структурні елементи імітаційної моделі ММО [4]:

- генератор вхідного потоку;
- усі різновиди СМО, які входять у ММО;
- канали зв'язку між елементами ММО.

Генератор вхідного потоку через деякі інтервали часу (нерідко випадкові з відомим розподілом) створює вимоги, які надходять у ММО. Якщо вимога на вході у ММО може потрапити до однієї з кількох СМО – то генерується номер обраної СМО. Усі випадкові величини створюються генераторами згідно з потрібними розподілами.

СМО, які входять у ММО, складаються з **черги** та **каналів обслуговування**.

Черга є вхідним елементом СМО. Це місце очікування вимогою моменту обслуговування, якщо усі канали СМО зайняті. Організуючи роботу черги, важливо чітко описати: обмеженою чи необмеженою є черга (для обмеженої вказати максимальну кількість вимог); правила роботи черги: FIFO (перший прийшов – перший пішов), LIFO (останній прийшов – перший пішов), Priority (за встановленим пріоритетом); подію надходження вимоги до черги у потрібні моменти часу.

Канали обслуговування СМО імітують роботу пристроїв і характеризується станом каналу та часом роботи над вимогою. Для каналу

можливими є три стани: канал вільний, канал зайнятий, канал заблокований. Вільний канал не має моменту виходу з нього вимоги, для зайнятого каналу момент виходу обчислюють як суму часового моменту входу і витраченого часу на роботу над вимогою, а для заблокованого каналу момент виходу вимоги рівний ∞ , оскільки невідомо, коли наступні за ним канали його розблокують.

Канали зв'язку між елементами ММО описують логіку і напрям руху вимоги між СМО. **Канал зв'язку** (як і канал обслуговування) може бути заблокованим або незаблокованим для руху вимог. Часто канали зв'язку мають розгалуження, які ведуть до різних СМО, тому, описуючи їх стан, необхідно вказати, до яких СМО і з якими ймовірностями може потрапити вимога, рухаючись по даному каналу. Вибір гілки, якою рухатиметься вимога, роблять, порівнюючи згенеровану рівномірно розподілену на $(0, 1)$ випадкову величину з ймовірністю руху цією гілкою.

Згідно з подійно-орієнтованим підходом до моделювання час у імітаційній моделі ММО змінюється дискретно від однієї події до іншої (тобто до моменту часу зміни стану системи). У ММО виділяють три базові типи подій.

Події у ММО:

- **надходження вимоги у ММО:** передбачає перевірку стану початкової СМО і направлення вимоги або у чергу, або у канал обслуговування, при цьому обчислюється час прибуття наступної вимоги;
- **вихід вимоги з ММО після завершення обслуговування:** передбачає звільнення каналу обслуговування, переміщення вимоги до наступної СМО (або вихід з ММО), перевірка черги і просування наступної вимоги згідно з логікою роботи черги (при цьому розраховується час на обробку вимоги);
- **перехід вимог:** передбачає опис процесу переходу вимоги каналами зв'язку та передачі вимоги від однієї СМО до іншої. При цьому відбувається вибір подальшого маршруту вимоги, а якщо він неможливий, то відбувається блокування цього каналу зв'язку.

Події впорядковуються за моментами їх настання. Для цього використовується список (календар) майбутніх подій.

Загальна схема алгоритму імітації ММО:

1. Ініціалізація моделі:
 - задання початкового стану;
 - встановлення початкового модельного часу $t = 0$;
 - формування початкового списку подій.
2. Вибір події – визначення найближчої події зі списку.
3. Просування часу – модельний час встановлюється рівним моменту обраної події.
4. Оновлення стану системи:
 - виконання дій, пов'язаних із подією;
 - зміна стану СМО, черг та каналів.
5. Формування нових подій:
 - обчислення моментів наступних подій;
 - оновлення календаря подій.
6. Збір статистики – накопичення показників функціонування системи.
7. Перевірка умови завершення:
 - якщо умова виконана – завершення моделювання;
 - інакше – перехід до кроку 2.

Об'єктно-орієнтований підхід до побудови імітаційних моделей ММО

Об'єктно-орієнтований підхід широко використовується при побудові імітаційних моделей ММО. Він дозволяє відійти від формул і будувати модель як набір об'єктів, що взаємодіють між собою, як у реальній системі.

Основні об'єкти моделі [4]:

- 1) “Вхідний потік” – генерує вимоги відповідно до заданого закону розподілу;
- 2) “СМО” – реалізує процес обслуговування;
- 3) “Маршрут” – визначає переміщення вимог між СМО;

4) “Маршрут входу” та “маршрут виходу” – забезпечують взаємодію моделі із вхідним та вихідним потоками відповідно.

Кожен об’єкт має інтерфейси входу та виходу, через які здійснюється передача вимог.

Методи об’єктів

Об’єкт “**Вхідний потік**” реалізує такі методи:

- генерування моменту надходження наступної вимоги;
- формування нової вимоги;
- передавання вимоги у відповідний об’єкт “Маршрут входу”;
- встановлення параметрів закону розподілу інтервалів надходження;
- ведення статистики надходжень (кількість вимог, інтенсивність).

Об’єкт “**СМО**” реалізує:

- початок обслуговування;
- завершення обслуговування;
- визначення стану черги;
- обчислення статистичних характеристик.

Об’єкт “**Маршрут**” реалізує:

- передачу вимоги;
- вибір наступного вузла маршруту;
- облік відмов.

Об’єкт “**Маршрут входу**” реалізує:

- передачу вимоги до першої СМО мережі;
- перевірку доступності СМО (наявність вільного місця в черзі);
- облік відмов на вході (у разі переповнення);
- фіксацію моменту входу вимоги в систему.

Об’єкт “**Маршрут виходу**” реалізує:

- видалення вимоги із системи;
- фіксацію моменту виходу вимоги;
- обчислення часу перебування вимоги в системі;

- накопичення статистики вихідного потоку (кількість опрацьованих вимог, інтенсивність виходу).

У процесі моделювання оцінюються основні характеристики системи згідно з алгоритмом збору статистичної інформації.

Верифікація та валідація моделі полягає у перевірці правильності її функціонування та адекватності результатів. Можна виділити такі основні підходи:

- аналіз граничних випадків;
- порівняння з аналітичними моделями (при їх наявності);
- дослідження чутливості результатів до параметрів;
- перевірка узгодженості роботи імітаційної моделі з функціонуванням реальної системи.

Наприклад, збільшення інтервалів між надходженнями вимог повинно призводити до зменшення довжини черг і завантаження каналів.

7.4. Основи імітаційного моделювання мереж Петрі

Імітаційне моделювання мереж Петрі є ефективним засобом дослідження дискретно-подійних систем, динаміка яких визначається моментами спрацювання переходів та затримками між ними. Такий підхід дозволяє враховувати як структурні, так і часові характеристики системи.

Процес імітації передбачає формалізований опис структури мережі, її початкового стану та правил зміни маркування в часі.

Мережа Петрі задається такими множинами:

- 1) множина позицій – характеризується вектором маркування;
- 2) множина переходів – визначається множиною вхідних і вихідних позицій та часовою затримкою спрацювання;
- 3) множина дуг – задають зв'язки між позиціями та переходами.

Імітаційну модель мережі Петрі можна будувати за двома принципами [4]:

1. Матрично-векторний підхід: структура мережі Петрі описується матрицею входу, матрицею виходу та вектором маркування.
2. Об'єктно-орієнтований підхід.

7.4.1. Матрично-векторний підхід до опису мережі Петрі

Мережа Петрі задається матрицею входів D^- , матрицею виходів D^+ і вектором маркувань M .

Умова запуску переходу T_j : $M \geq e_j D^-$, де e_j – одиничний вектор, j -а компонента якого рівна 1, $j = \overline{1, n}$, n – кількість переходів.

Умова запуску переходу T_j з часовою затримкою:

- 1) Вхід маркерів у T_j : $M' = M - e_j D^-$.
- 2) Вихід маркерів у момент $t_{out}^{(j)}$: $M'' = M' + e_j D^+$.

Алгоритм імітації звичайної мережі Петрі

Імітація звичайної мережі Петрі з часовими затримками виконується за принципом найближчої події.

Основні кроки алгоритму [4]:

1. Ініціалізація:

- задати M, D^-, D^+, T_{mod} ;
- встановити початковий модельний час $t = 0$;
- сформувати порожній список майбутніх подій.

2. Визначення дозволених переходів:

- знайти всі T_j , для яких виконується умова запуску переходу;
- внести дозвалені переходи у список майбутніх подій.

3. Запуск кожного з дозволених переходів:

- вилучити маркери з вхідних позицій;
- запланувати момент $t_{out}^{(j)}$ виходу з переходу.

4. Вибір події з найменшим часом її настання:

$$t_{min} = \min_j t_{out}^{(j)}$$

5. Просування модельного часу:

$$t = t_{min}$$

6. Завершення роботи переходу:

- змінити вектор маркування згідно з D^+ :

$$M = M + e_j D^+,$$

де j – номер переходу, якому відповідає час t_{min} ;

- вилучити подію зі списку майбутніх подій.

7. Збір статистики.

8. Завершення моделювання:

- якщо $t \geq T_{mod}$ – завершити;

- інакше – перейти до кроку 2.

Мережі Петрі з конфліктними переходами

У випадку наявності конфлікту переходів у мережі Петрі в алгоритмі імітації спочатку перевіряється умова запуску переходів, потім розв'язується конфлікт між переходами і виконується запуск переходу [4].

При розв'язанні конфлікту використовують пріоритетний спосіб або ймовірнісний спосіб визначення послідовності запуску переходів.

Нехай є множина конфліктних переходів $T_j, j = \overline{1, n}$ з ймовірностями вибору маршруту $p_j, j = \overline{1, n}$.

Алгоритм розв'язання конфлікту:

- згенерувати рівномірно розподілену на $(0, 1)$ випадкову величину r ;

- знайти номер переходу k , для якого

$$\sum_{j=1}^{k-1} p_j < r \leq \sum_{j=1}^k p_j.$$

Після цього виконується запуск обраного переходу k .

Описаний алгоритм розв'язання конфлікту потрібно включити в алгоритм імітації звичайної мережі Петрі (див. пункт 7.4.2) між пунктами 2 і 3.

Мережі Петрі з багатоканальними переходами

Багатоканальні переходи в мережах Петрі використовуються для моделювання роботи багатопотокових систем (наприклад, багатоядерних процесорів, систем управління даними, логістичних систем тощо).

Особливості імітаційного моделювання мереж Петрі з багатоканальними переходами [4]:

- для кожного багатоканального переходу зберігається масив моментів завершення $\{t_{out}^{(j,k)}\}$, де k – кількість каналів переходу T_j ;

- можливий одномоментний m -кратний запуск багатоканального переходу, де m – кількість маркерів у передумові переходу або кількість каналів, якщо маркерів більше ніж каналів.

Суть роботи багатоканального переходу:

1. Поки виконується умова переходу:

- виконувати запуск переходу;

- додавати новий часовий момент завершення роботи каналу переходу у масив моментів завершення $\{t_{out}^{(j,k)}\}$.

2. Вибір найближчої події “завершення роботи каналу” за часом її настання:

$$t_{min} = \min_{j,k} t_{out}^{(j,k)}.$$

3. Після настання події “завершення роботи каналу”:

- змінити вектор маркування;

- видалити час настання події t_{min} з масиву моментів завершення $\{t_{out}^{(j,k)}\}$.

7.4.2. Об’єктно-орієнтований підхід до моделювання мереж Петрі

Об’єктно-орієнтований підхід дозволяє структурні зв’язки задавати об’єктами типу “зв’язок”. Перевірка умов запуску переходів здійснюється лише для позицій, що є вхідними для переходу [4].

Суть об’єктно-орієнтованого підходу до побудови імітаційних моделей полягає в тому, що модельована система подається як сукупність окремих, взаємодіючих між собою, об’єктів. Кожен з цих об’єктів відповідає певному елементу системи, має власний стан (властивості) та виконує визначені дії (методи).

У випадку мереж Петрі основними елементами моделі є позиції, переходи та зв’язки (дуги), і кожен з цих елементів розглядається як **окремий об’єкт**:

- позиція зберігає кількість маркерів (методи: додавання та вилучення маркерів);
- перехід перевіряє виконання умови і змінює маркування;
- дуги задають зв'язки між елементами.

Об'єкти можуть взаємодіяти між собою лише через чітко визначені дії. Це дозволяє змінювати один елемент моделі без впливу на інші.

Процес імітації функціонування системи відбувається як послідовність подій, а об'єкти реагують на події за вказаними правилами. Основною подією є спрацьовування переходу (виконання умови), яка змінює розподіл маркерів у позиціях.

Таким чином, об'єктно-орієнтований підхід дозволяє будувати імітаційні моделі як систему взаємопов'язаних елементів, кожен з яких описується окремо. Це значно спрощує розробку імітаційної моделі, і дозволяє удосконалювати її, прикладаючи менше зусиль.

Питання для самоконтролю

1. Яку модель функціонування системи називають імітаційною?
2. Які вимоги ставляться до генераторів випадкових величин в імітаційних моделях?
3. В чому суть конгруентного методу генерування рівномірно розподілених випадкових величин?
4. Перерахуйте та опишіть методи тестування генераторів рівномірно розподілених випадкових величин.
5. Що передбачає реалізація алгоритму імітації?
6. В чому суть принципу Δt просування модельного часу?
7. В чому суть принципу найближчої події просування модельного часу?
8. В чому суть принципу послідовного проведення об'єктів уздовж моделі?
9. Які ви знаєте способи просування стану моделі в залежності від часу?
10. Які елементи ММО виділяють і описують у її імітаційній моделі?

11. Які об'єкти ММО виділяють і описують при побудові об'єктно-орієнтованої імітаційної моделі?

12. Які елементи мережі Петрі виділяють при побудові її імітаційної моделі?

Задачі для самостійного розв'язування

1. Задано лінійний конгруентний генератор:

$$z_{i+1} = (5z_i + 3) \bmod 16, \quad z_0 = 1.$$

Побудувати послідовність значень z_i до першого повторення. Визначити період генератора.

2. Згенерувати 5 значень випадкової величини, розподіленої за експоненціальним законом:

$$F_r(x) = 1 - e^{-2x}.$$

Використати метод оберненої функції та задані значення рівномірної випадкової величини:

$$\zeta = \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}.$$

3. Задано функцію розподілу у табличному вигляді:

№	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3
$F(x_i)$	0	0,2	0,7	1

Згенерувати значення випадкової величини r , якщо $\zeta = 0,5$.

4. Нехай згенеровані дві випадкові величини:

$$\zeta_1 = 0,6, \quad \zeta_2 = 0,8.$$

Знайти стандартні нормально розподілені величини γ_1, γ_2 і, використовуючи їх, отримати випадкові величини r_1, r_2 з математичним сподіванням $a = 5$ і дисперсією $\sigma^2 = 4$. Використати метод функціональних властивостей закону розподілу.

5. Для послідовності ζ_i задано

$$\sum_{i=1}^{100} \zeta_i \zeta_{i+1} = 28.$$

Обчислити оцінку кореляції ρ_1 . Перевірити гіпотезу незалежності (використати $M = 1/2, D = 1/12$).

6. Згенеровано три незалежні значення:

$$\zeta_1 = 0,5, \quad \zeta_2 = 0,2, \quad \zeta_3 = 0,8.$$

Знайти значення випадкової величини за розподілом Ерланга порядку $k = 3$ з математичним сподіванням $\mu = 2$. Використати метод функціональних властивостей закону розподілу.

7. Розглядається одноканальна СМО без черги з інтенсивністю обслуговування $\mu = 3$. Інтенсивність вхідного потоку – $\lambda = 3$. Описати події системи, побудувати алгоритм імітації за принципом найближчої події та вказати, які змінні потрібно зберігати під час моделювання.

8. У результаті імітації отримано дані:

Інтервал часу Δt_i спостереження за довжиною черги L_i	2	3	5
Кількість вимог L_i в черзі	1	2	0

Загальний час моделювання $T_{mod} = 10$. Знайти середню довжину черги L_{aver} , інтенсивність виходу вимог λ_{exit} , якщо оброблено 8 вимог, та середню кількість вимог у системі Q_{aver} .

9. Задано мережу Петрі з двома позиціями P_1, P_2 та двома переходами T_1, T_2 .

Матриці входів та виходів:

$$D^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Початкове маркування: $M = (1 \ 0)$. Часові затримки переходів: $t_1 = 2, t_2 = 3$.

Перевірити умови запуску переходів, визначити послідовність змін маркування до $T_{mod} = 10$.

8. Лабораторні роботи

8.1. Лабораторна робота № 1. Ідентифікація закону розподілу

Теоретичні питання:

- 1) Як проводиться ідентифікація закону розподілу випадкових чисел?
- 2) Побудова гістограми частот.
- 3) Означення щільності розподілу та функції розподілу.
- 4) Основні закони розподілу неперервних та дискретних випадкових величин.
- 5) Оцінка значень параметрів закону розподілу.
- 6) Перевірка відповідності закону розподілу за критерієм згоди χ^2 .
- 7) Умови застосування критерію χ^2 .

Завдання:

1. Згенерувати 3000 випадкових чисел способом, вказаним у варіанті.
2. Побудувати гістограму частот.
3. Знайти середнє та дисперсію згенерованих випадкових чисел.
4. Зробити припущення щодо виду закону розподілу (експоненційний, нормальний, рівномірний, трикутний, логнормальний, Ерланга, Вейбулла, Парето, бета-розподіл). Вказати: теоретичну функцію щільності ймовірностей, математичне сподівання, стандартне відхилення та зазначити параметри обраного розподілу.
5. Перевірити припущення за допомогою критерію згоди χ^2 .
6. Проаналізувати отримані результати та зробити висновки.

Варіанти:

В усіх варіантах ξ_i – випадкова величина, рівномірно розподілена на $(0, 1)$.

1. $x_i = -\ln(\xi_i) / \lambda$. Параметр λ обрати самостійно.
2. $x_i = \sigma\mu_i + a$, $\mu_i = \xi_i + \xi_{i+1} + \xi_{i+2} - 1$. Параметри σ і a обрати самостійно.
3. $x_i = 2^{\frac{-(2\xi_i-2)}{3}}$.

4. $x_i = -\ln(\xi_i^2)/\lambda$. Параметр λ обрати самостійно.
5. $x_i = \sigma\mu_i + a$, $\mu_i = \xi_i + \xi_{i+1}$. Параметри σ і a обрати самостійно.
6. $x_i = e^{\frac{-(\xi_i-1)}{2}}$.
7. $x_i = \ln(10 \xi_i) / \lambda$. Параметр λ обрати самостійно.
8. $x_i = \lambda/\xi_i$. Параметр λ обрати самостійно.
9. $x_i = -\ln(1 - \xi_i)/\lambda$. Параметр λ обрати самостійно.
10. $x_i = \sigma\mu_i + a$, $\mu_i = \xi_i + \xi_i^2$. Параметри σ і a обрати самостійно.
11. $x_i = \lambda/|1 - \sin(\xi_i)|$. Параметр λ обрати самостійно.
12. $x_i = -\ln(1 - \xi_i^2)/\lambda$. Параметр λ обрати самостійно.

Приклад виконання:

1. Формування масиву значень випадкової величини

Згенеруємо 3000 випадкових чисел ξ_i у проміжку (0, 1). Після цього визначимо значення випадкової величини відповідно до варіанту:

$$x_i = 10 \xi_i.$$

2. Побудова гістограми частот

Обчислимо мінімальне та максимальне значення вибірки

$$\min = \min_i x_i \approx 5,74267 \cdot 10^{-3},$$

$$\max = \max_i x_i \approx 9,99948.$$

Інтервал розподілу $[\min, \max]$ розбиваємо на $k = 30$ інтервалів довжиною

$$h = \frac{\max - \min}{k} \approx 0,33312.$$

Підраховуємо частоту (кількість) влучань n_i випадкової величини в кожен інтервал. У даній реалізації не виявилось інтервалів, куди потрапило менше ніж 5 значень, тому їх не потрібно об'єднувати із сусідніми.

Побудуємо гістограму на основі отриманих даних (рис. 8.1).

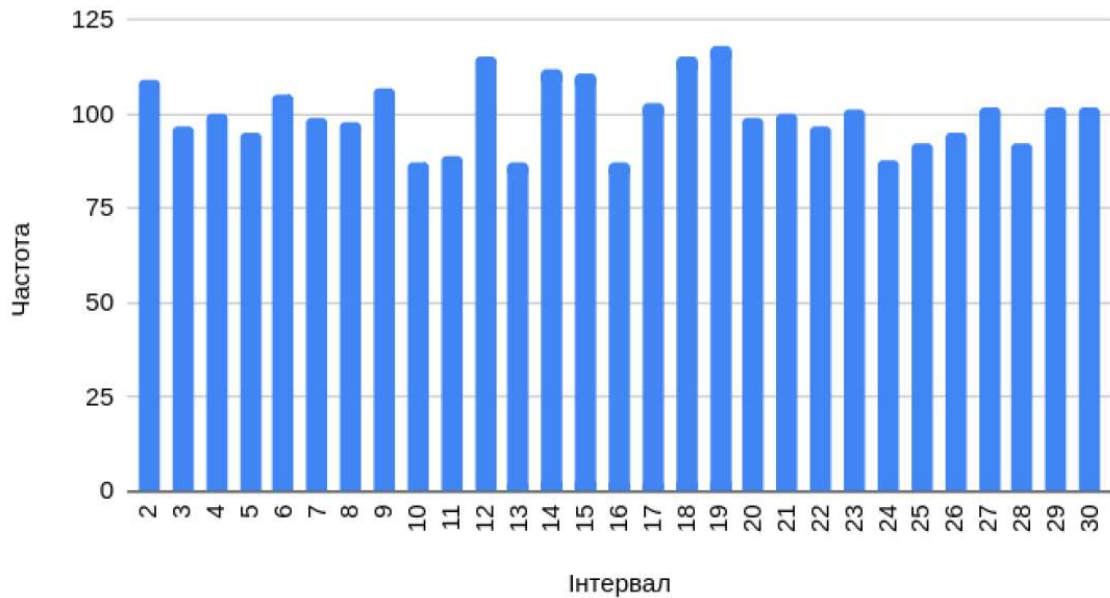


Рис. 8.1. Гістограма частот

3. Оцінка середнього та дисперсії випадкової величини

Оцінка математичного сподівання (середнього значення):

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \approx 4,99165.$$

Оцінка дисперсії:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \approx 4,18536 \cdot 10^{-5}.$$

Оцінка стандартного відхилення:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \approx 6,46943 \cdot 10^{-3}.$$

4. Формування гіпотези про вид закону розподілу

З вигляду гістограми частот можна припустити, що випадкова величина має рівномірний закон розподілу.

Функція щільності, математичне сподівання та стандартне відхилення рівномірного розподілу мають вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2}, \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

За параметри розподілу обираємо величини

$$a = \min = 5,74267 \cdot 10^{-3},$$

$$b = \max = 9,99948.$$

Теоретична частота влучань значень випадкової величини в i -й інтервал:

$$p_i^T = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = F(x_i) - F(x_{i-1}) = \frac{x_i - x_{i-1}}{b - a}.$$

5. Перевірка відповідності за критерієм згоди χ^2

Обчислюємо

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i^T)^2}{np_i^T},$$

та порівнюємо з табличним значенням $\chi_{кр}^2 = \chi^2(\alpha, k - 1 - q)$, де:

$\alpha = 0,05$ – рівень статистичної значущості;

$k = 30$ – кількість інтервалів;

$q = 2$ – кількість параметрів закону розподілу.

Маємо

$$\chi^2 \approx 22,15,$$

$$\chi_{кр}^2 = 40,11327.$$

Оскільки $\chi^2 < \chi_{кр}^2$, то гіпотеза про те, що даний розподіл рівномірний, приймається.

8.2. Лабораторна робота № 2. Апроксимація функціональної залежності

Теоретичні питання:

- 1) У чому полягає задача апроксимації?
- 2) Суть методу найменших квадратів (МНК).
- 3) Алгоритм апроксимації функціональної залежності.
- 4) Мультиколінеарність. Алгоритм Фаррара-Глаубера.
- 5) Оцінка параметрів функціональної залежності.
- 6) Кореляційно-регресійний аналіз.

Завдання:

Задано спостереження за деякою системою у вигляді таблиці (x – вхідні (незалежні) змінні, y – вихідна (залежна змінна)).

1. Перевірити вхідні змінні на наявність мультиколінеарності за алгоритмом Фаррара-Глаубера.
2. Використовуючи МНК, провести ідентифікацію об'єкта, визначивши невідомі параметри заданої у варіанті функції.
3. Вивести таблицю заданих даних спостережень за вихідною змінною та відповідних значень, обчислених за отриманою функцією.
4. Порівняти на графіку розраховані значення функції зі спостережуваними даними.
5. Для отриманої апроксимаційної функції (моделі об'єкта спостереження) виконати кореляційно-регресійний аналіз.
6. Проаналізувати отримані результати та зробити висновки.

Варіанти:

1. $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_1x_2 + b_3x_3$

№	x_1	x_2	x_3	y
1	2	3	4	1
2	5	7	9	88
3	7	9	11	130
4	9	6	10	123
5	8	11	9	150
6	11	12	13	219
7	15	16	15	347
8	19	19	17	488
9	22	20	23	550
10	24	20	25	654
11	19	15	17	412
12	21	19	18	536
13	17	19	21	460
14	17	22	23	519
15	20	24	25	700
16	22	25	26	722
17	29	29	27	1038
18	31	32	29	1203
19	32	33	30	1274
20	36	34	34	1500

2. $y = b_0 + b_1\sqrt{x_1} + b_2\frac{1}{x_2} + b_3x_3^2$

№	x_1	x_2	x_3	y
1	3	5	3	20
2	8	8	8	70
3	10	10	10	110
4	10	9	11	140
5	11	12	6	50
6	14	13	10	119
7	12	11	14	211
8	16	14	16	275
9	21	15	20	419
10	23	11	22	500
11	12	1	2	18
12	14	5	3	27
13	1	1	5	32
14	3	4	9	89
15	6	6	11	132
16	8	7	12	156
17	11	11	2	18
18	13	14	4	32
19	14	15	5	40
20	18	16	9	100

3. $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3^2$

№	x_1	x_2	x_3	y
1	6	5	3	50
2	11	8	5	95
3	13	10	7	120
4	10	12	11	199
5	14	12	0	110
6	17	13	4	125
7	6	2	11	153
8	10	5	13	226
9	18	6	14	288
10	20	4	16	350
11	8	8	10	130
12	10	12	11	199
13	10	15	17	376
14	13	18	19	469
15	16	20	21	567
16	18	21	22	650
17	25	25	19	538
18	27	28	21	635
19	28	29	22	685
20	32	30	26	896

4. $y = b_0 + b_1x_1^3 + b_2x_2 + b_3\ln(x_3)$

№	x_1	x_2	x_3	y
1	4	3	4	70
2	7	7	7	370
3	9	9	9	755
4	9	8	10	753
5	10	11	5	1028
6	13	12	9	2229
7	11	10	13	1360
8	15	13	15	3411
9	20	14	19	8050
10	22	10	21	10600
11	11	2	1	1330
12	13	6	2	2220
13	2	2	6	15
14	2	5	10	30
15	5	7	12	100
16	7	8	13	368
17	14	14	3	2770
18	16	17	5	4136
19	17	18	6	4990
20	21	19	10	9310

$$5. y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2^2 + b_3x_3^2$$

№	x_1	x_2	x_3	y
1	6	2	3	40
2	8	5	4	70
3	10	7	6	140
4	9	9	8	240
5	11	11	1	150
6	14	12	5	220
7	5	3	10	225
8	9	6	12	340
9	17	9	13	460
10	17	1	13	360
11	5	12	11	410
12	7	16	12	555
13	8	13	21	1100
14	5	16	29	1200
15	8	18	31	2265
16	10	19	32	2432
17	41	41	16	2278
18	43	44	18	2673
19	44	45	19	2838
20	48	46	23	3273

$$6. y = b_0 + b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3x_3^2$$

№	x_1	x_2	x_3	y
1	3	2	6	200
2	5	8	11	650
3	7	10	13	1075
4	10	6	11	793
5	8	12	12	1137
6	11	13	16	1774
7	18	20	17	3005
8	22	23	19	4000
9	24	24	26	5585
10	26	26	28	6517
11	24	25	26	5732
12	26	29	27	6792
13	25	28	32	7699
14	24	31	36	9220
15	27	33	38	10502
16	29	34	39	11235
17	44	44	33	13000
18	46	47	35	15760
19	47	48	36	16515
20	51	49	40	19000

$$7. y = b_0 + b_1x_1x_2 + b_2x_1x_3 + b_3\frac{1}{x_3}$$

№	x_1	x_2	x_3	y
1	7	1	2	2
2	8	3	6	218
3	10	5	8	392
4	13	9	6	587
5	11	15	7	728
6	14	16	11	1136
7	5	7	12	287
8	9	10	14	450
9	19	19	13	1826
10	13	13	7	782
11	19	20	13	2000
12	21	24	14	2396
13	4	1	19	242
14	17	4	37	2093
15	20	6	39	2702
16	22	7	40	3104
17	25	25	22	3527
18	27	28	24	4214
19	28	29	25	4538
20	32	30	29	6000

$$8. y = b_0 + b_1\sqrt{x_1^3} + b_2e^{1/x_2} + b_3x_3$$

№	x_1	x_2	x_3	y
1	4	3	2	20
2	7	5	3	83
3	9	7	5	119
4	7	8	8	108
5	10	9	1	102
6	13	10	5	168
7	7	4	9	113
8	11	7	11	177
9	16	8	15	270
10	18	2	17	317
11	3	14	11	150
12	5	18	12	116
13	6	8	20	177
14	4	11	32	217
15	7	13	34	258
16	9	14	35	289
17	40	40	11	826
18	42	43	13	894
19	43	44	14	900
20	47	45	18	1069

$$9. y = b_0 + b_1 x_1^2 + b_2 \sqrt{(x_2 + 2)^3} + b_3 x_3 \quad 10. y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 x_3$$

№	x_1	x_2	x_3	y
1	3	4	6	1
2	7	10	13	96
3	9	12	15	155
4	12	8	13	296
5	10	14	14	179
6	13	15	18	322
7	20	22	19	780
8	24	25	21	1075
9	26	26	28	1288
10	28	28	30	1494
11	26	27	28	1280
12	28	31	29	1466
13	27	30	34	1379
14	26	33	38	1259
15	29	35	40	1700
16	31	36	41	1811
17	46	46	35	3950
18	48	49	37	4300
19	49	50	38	4542
20	53	51	42	5500

№	x_1	x_2	x_3	y
1	2	4	3	1
2	5	9	7	88
3	7	11	9	130
4	9	10	6	123
5	8	9	11	150
6	11	13	12	219
7	15	15	16	347
8	19	17	19	488
9	22	23	20	550
10	24	25	20	654
11	19	17	15	412
12	21	18	19	536
13	17	21	19	460
14	17	23	22	519
15	20	25	24	700
16	22	26	25	722
17	29	27	29	1038
18	31	29	32	1203
19	32	30	33	1274
20	36	34	34	1500

$$11. y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_1^2 + b_3 x_2 x_3$$

№	x_1	x_2	x_3	y
1	2	1	6	3
2	3	7	11	198
3	5	9	13	300
4	9	4	10	470
5	6	11	13	450
6	9	12	17	746
7	19	22	17	2216
8	23	25	19	3094
9	24	26	27	3737
10	26	30	29	4550
11	27	32	33	5000
12	29	36	34	5846
13	32	36	40	6700
14	32	39	44	7565
15	35	41	46	8712
16	37	42	47	9466
17	52	52	37	14721
18	54	55	39	16013
19	55	56	40	16000
20	59	57	44	18800

$$12. y = b_0 + b_1 \frac{1}{x_1} + b_2 (x_2 + 1)^2 + b_3 x_3$$

№	x_1	x_2	x_3	y
1	3	5	5	40
2	8	8	8	100
3	10	10	10	134
4	9	10	11	140
5	12	11	6	145
6	13	14	10	250
7	11	12	14	170
8	14	16	16	320
9	15	21	20	507
10	11	23	22	601
11	1	12	2	200
12	5	14	3	220
13	1	1	5	14
14	4	3	9	28
15	6	6	11	63
16	7	8	12	96
17	11	11	2	149
18	14	13	4	203
19	15	14	5	233
20	16	18	9	373

Приклад виконання:

$$y = b_0 + b_1(x_1 + 1)^2 + b_2 \frac{1}{x_2} + b_3 x_3$$

№	x_1	x_2	x_3	y	№	x_1	x_2	x_3	y
1	5	3	5	40	11	12	1	2	200
2	8	8	8	100	12	14	5	3	220
3	10	10	10	134	13	1	1	5	14
4	10	9	11	140	14	3	4	9	28
5	11	12	6	145	15	6	6	11	63
6	14	13	10	250	16	8	7	12	96
7	12	11	14	170	17	11	11	2	149
8	16	14	16	320	18	13	14	4	203
9	21	15	20	507	19	14	15	5	233
10	23	11	22	601	20	18	16	9	373

1. Перевірка вхідних змінних на мультиколінеарність за алгоритмом Фаррара-Глаубера

1) Проводимо стандартизацію (нормалізацію) вхідних змінних за формулою:

$$x_{ik}^* = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{\sqrt{n\sigma_{x_k}^2}}, k = \overline{1, m}, i = \overline{1, n},$$

де $\sigma_{x_k}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_k)^2}{n}$ – дисперсія змінної x_k ;

\bar{x}_k – середнє значення змінної x_k ;

m – кількість вхідних змінних;

n – кількість спостережень.

2) Знаходимо кореляційну матрицю: $r = X^{*T} X^*$, яка складається з коефіцієнтів кореляції між x_i та x_j , взятих попарно; X^* – стандартизована матриця, отримана у пункті 1, на її діагоналі – одиниці.

3) Визначаємо наявність мультиколінеарності за критерієм Пірсона χ^2 :

$$\chi^2 = - \left(n - 1 - \frac{2m + 5}{6} \right) \ln |r|, |r| = \det r,$$

$$\chi_{кр}^2 = \chi^2 \left(\alpha, \frac{m(m-1)}{2} \right),$$

$$\chi^2 \approx 17,25767,$$

$$\chi_{кр}^2 = 7.81473.$$

Оскільки $\chi^2 > \chi_{кр}^2$, то серед змінних x_1, x_2, x_3 існує мультиколінеарність.

4) Визначимо матрицю $C = r^{-1} = (X^{*T} X^*)^{-1}$.

5) Визначимо наявність мультиколінеарності між кожною зі змінних x_i та рештою змінних за критерієм Фішера:

$$F_i = |c_{ii} - 1| \frac{n - m}{m - 1}, i = \overline{1, m},$$

де c_{ii} – діагональний елемент матриці C , обчисленої в пункті 4.

$$F_{кр} = F(\alpha, n - m, m - 1),$$

$$F_{кр} = 19,437,$$

$$F_1 \approx 11,31205,$$

$$F_2 \approx 8,62643,$$

$$F_3 \approx 3,04089.$$

Оскільки $F_1 < F_{кр}$, $F_2 < F_{кр}$, $F_3 < F_{кр}$, то жодна зі змінних не є мультиколінеарною з рештою.

6) Знаходимо частинні коефіцієнти кореляції для кожної пари змінних $x_i, x_j, i \neq j; i, j = \overline{1, m}$:

$$r(x_i, x_j) = \frac{-c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}},$$

де c_{ij}, c_{ii}, c_{jj} – елементи матриці C , обчисленої в пункті 4.

7) Перевіряємо наявність мультиколінеарності між парами змінних $x_i, x_j, i \neq j$ за критерієм Стюдента:

$$t(x_i, x_j) = \left| \frac{r(x_i, x_j) \sqrt{n - m}}{\sqrt{1 - r^2(x_i, x_j)}} \right|,$$

$$t_{кр} = t\left(\frac{\alpha}{2}, n - m\right),$$

$$t_{кр} = 2,1098,$$

$$t(x_1, x_2) \approx 3,49504,$$

$$t(x_1, x_3) \approx 1,63926,$$

$$t(x_2, x_3) \approx 0,13592.$$

Оскільки $t(x_1, x_2) > t_{кр}$, то змінні x_1, x_2 є попарно мультиколінеарними.

Оскільки $t(x_1, x_3) < t_{кр}$, $t(x_2, x_3) < t_{кр}$, то змінні x_1, x_3 та x_2, x_3 не є попарно мультиколінеарними.

2. Формування гіпотези про вид функціональної залежності

Критерій МНК:

$$\Phi(b) = \sum_{i=1}^n (f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}, b) - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

Необхідні умови екстремуму критерію:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial b_0} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b_m} = 0. \end{cases}$$

Цю систему нормальних рівнянь зручно подати у матричній формі:

$$\mathcal{X}^T \mathcal{X} b = \mathcal{X}^T Y,$$

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 & f_1(x_1) & \dots & f_m(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & \dots & f_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & \dots & f_m(x_n) \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тут x_i позначає i -те спостереження над вектором $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Тоді розв'язком цієї системи відносно невідомих b буде:

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = (\mathcal{X}^T \mathcal{X})^{-1} \mathcal{X}^T Y,$$

$$b_0 \approx -1,27363, \quad b_1 \approx 1,01119,$$

$$b_2 \approx 15,90761, \quad b_3 \approx 1,01668.$$

Підставивши визначені коефіцієнти, отримаємо:

$$f(x_1, x_2, x_3) = -1,27363 + 1,01119(x_1 + 1)^2 + \\ + 15,90761(1/x_2) + 1,01668x_3$$

3. Значення відгуку моделі та значення відгуку моделі, розраховані за функцією (таблиця 8.1)

Таблиця 8.1. Таблиця значень відгуку моделі

№	y	y^*	№	y	y^*
1	40	45.51	11	200	187.55
2	100	90.75	12	220	232.47
3	134	132.83	13	14	23.76
4	140	134.03	14	28	28.03
5	145	151.76	15	63	62.1
6	250	237.63	16	96	95.1
7	170	185.29	17	149	147.81
8	320	308.36	18	203	202.12
9	507	509.53	19	233	232.38
10	601	604.98	20	373	373.91

4. Порівняння розрахованих значень функції зі спостережуваними даними (рис. 8.2)

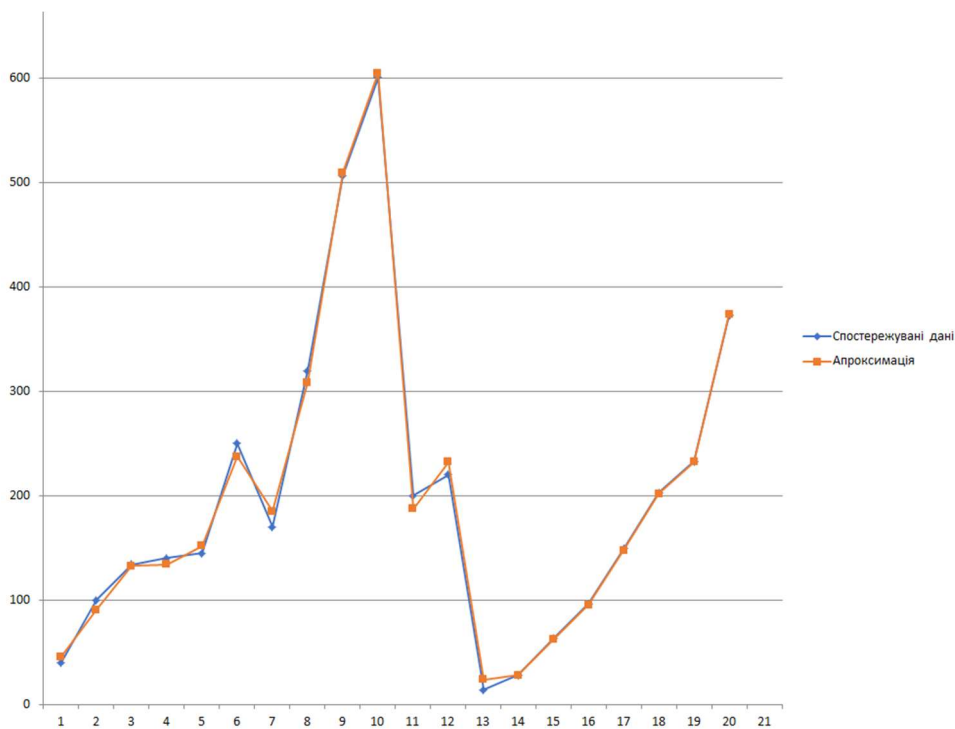


Рис. 8.2. Графіки функції та спостережуваних даних

Графік функції за апроксимацією візуально близький до графіку функції за спостережуваними даними.

5. Кореляційно-регресійний аналіз

1) Коефіцієнт детермінації: $R^2 \approx 0,99742$ – дуже близький до 1, отже побудована залежність є якісною.

2) Коефіцієнт кореляції: $r \approx 0,99871$ – згідно зі шкалою Чеддока маємо дуже сильний зв'язок $y = f(x)$.

3) F -статистика:

$$F = \frac{R^2/m}{(1-R^2)/(n-m-1)} \approx 2061,61734,$$

$$F_{кр} = F(\alpha, m, n-m-1) = 2,2756.$$

Оскільки $F > F_{кр}$, то значення коефіцієнта кореляції істотне, модель адекватна.

4) Стандартні похибки параметрів b_i :

$$S_{b_0} \approx 4,88676, \quad S_{b_1} \approx 0,01665,$$

$$S_{b_2} \approx 7,70796, \quad S_{b_3} \approx 0,4539.$$

Статистичну значущість коефіцієнтів b_0, b_1, \dots, b_m перевіримо за критерієм Стьюдента:

$$t(b_i) = \left| \frac{b_i}{S_{b_i}} \right|, i = \overline{0, m},$$

$$t_{кр} = t\left(\frac{\alpha}{2}, n-m-1\right).$$

$$t_{кр} = 2.1199,$$

$$t(b_0) \approx 0,26063, \quad t(b_1) \approx 60,71672,$$

$$t(b_2) \approx 2,06379, \quad t(b_3) \approx 2,23989.$$

Оскільки $t(b_0) < t_{кр}$, $t(b_2) < t_{кр}$, то b_0 і b_2 – статистично незначущі.

Оскільки $t(b_1) > t_{кр}$, $t(b_3) > t_{кр}$ то b_1, b_3 – статистично значущі.

5) Довірчі інтервали для коефіцієнтів b_i :

$$b_i \in [b_i - t_{кр}S_{b_i}; b_i + t_{кр}S_{b_i}],$$

$$b_0 \in [-11,63; 9,08], \quad b_1 \in [0,97; 1,04],$$

$$b_2 \in [-0,43; 32,24], \quad b_3 \in [0,05; 1,97].$$

8.3. Лабораторна робота № 3. Аналітичне моделювання мережі масового обслуговування

Теоретичні питання:

- 1) Поняття, правила функціонування та елементи мережі масового обслуговування (ММО).
- 2) Що необхідно визначити для представлення системи за допомогою ММО?
- 3) За яких припущень проводиться аналітичне моделювання ММО?
- 4) Параметри, що задають розімкнену/замкнену ММО.
- 5) Знаходження коефіцієнтів передачі у випадку розімкненої/замкненої ММО.
- 6) Обчислення нормувальних множників у випадку розімкненої/замкненої ММО. Перевірка правильності розрахунку нормувальних множників.
- 7) Ймовірності станів розімкненої/замкненої ММО.
- 8) Основні показники ефективності розімкненої/замкненої ММО.
- 9) Послідовність розрахунку розімкненої/замкненої ММО.

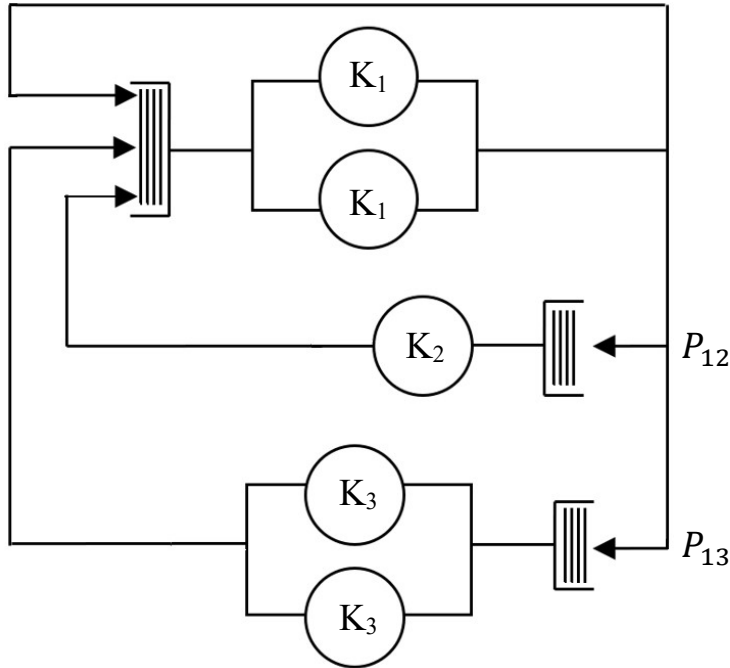
Завдання:

Дослідити обраний варіант ММО аналітичними методами:

1. Обчислити коефіцієнти передачі e_i . Для розімкнених мереж перевірити умови сталого режиму.
2. Розрахувати нормувальні множники C_i для кожної СМО_i в розімкненій мережі або нормувальний множник $C(N)$ для замкненої мережі.
3. Визначити ймовірності $p_i(k)$ знаходження k вимог в СМО_i для розімкненої мережі або допоміжні функції $p_i(k)$ для кожної СМО_i та функції $P_{\text{СМО}_i}(j)$, що задають ймовірності знаходження j вимог в СМО_i, для замкненої мережі.
4. Розрахувати показники ефективності функціонування ММО.
5. Проаналізувати отримані результати та зробити висновки.

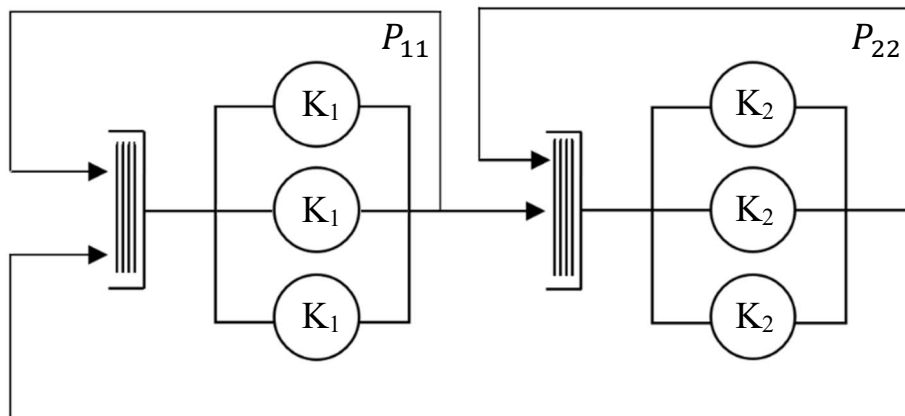
Варіанти:

1)



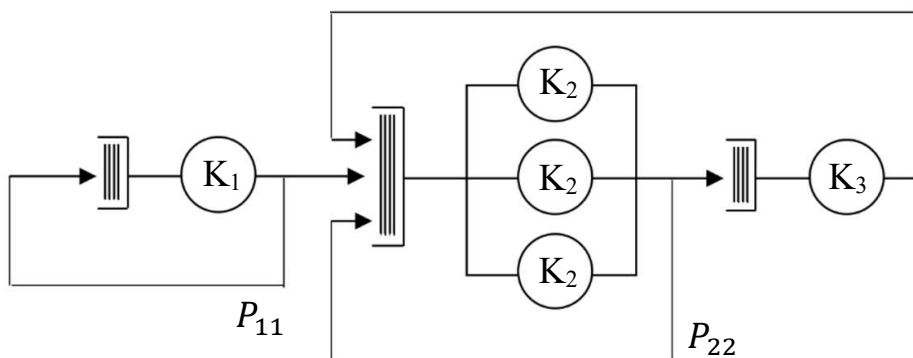
$N = 25;$
 $P_{12} = 0,4;$
 $P_{13} = 0,3;$
 СМО₁ обслуговує
 25 вимог за 4 год;
 СМО₂ обслуговує
 20 вимог за 4 год;
 СМО₃ обслуговує
 60 вимог за 8 год.

2)



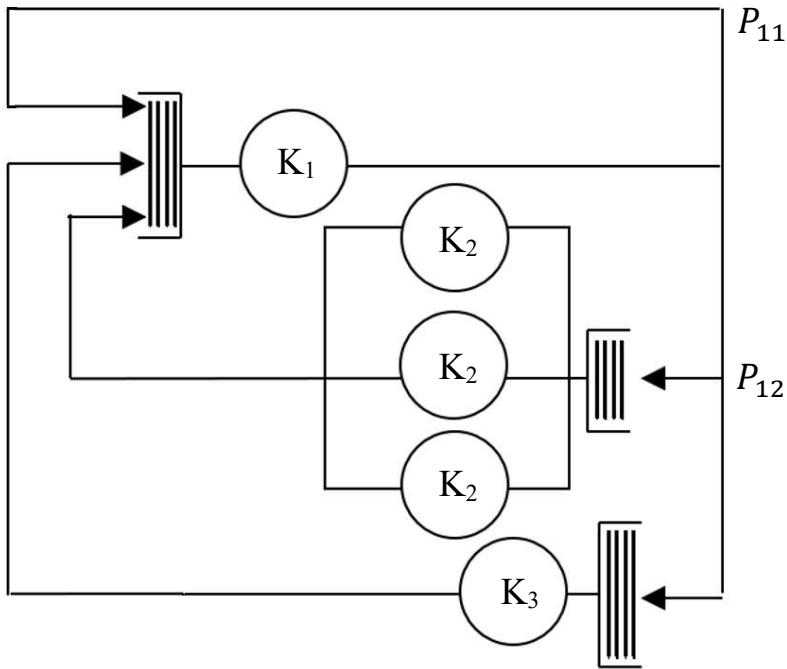
$N = 30;$
 $P_{11} = 0,2;$
 $P_{22} = 0,3;$
 СМО₁ обслуговує
 50 вимог за 8 год;
 СМО₂ обслуговує
 20 вимог за 3 год.

3)



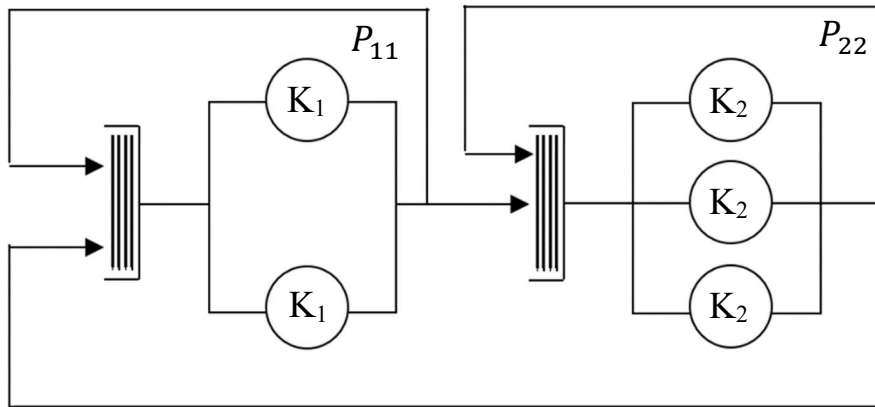
$N = 100;$
 $P_{11} = 0,6;$
 $P_{22} = 0,25;$
 СМО₁ обслуговує
 100 вимог за 2 год;
 СМО₂ обслуговує
 100 вимог за 8 год;
 СМО₃ обслуговує
 100 вимог за 8 год.

4)



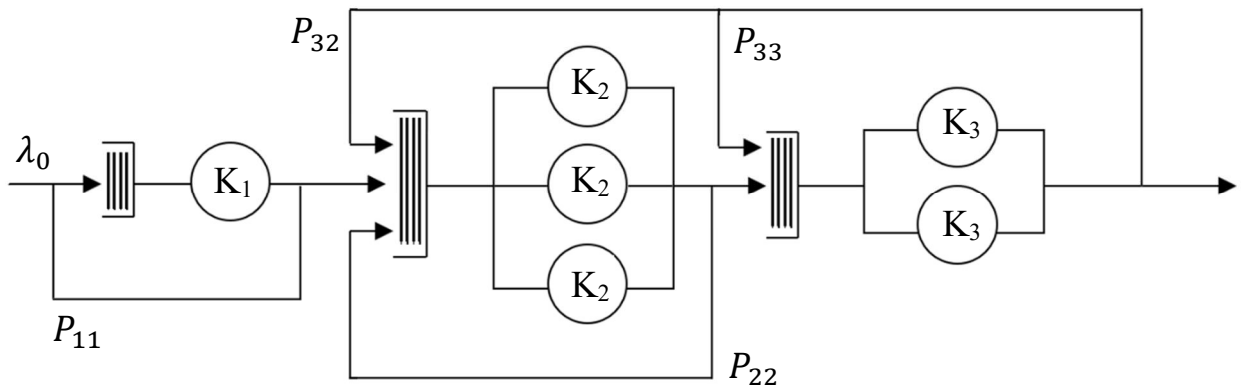
$N = 50;$
 $P_{11} = 0,1;$
 $P_{12} = 0,5;$
 СМО₁ обслуговує
 10 вимог за 1 год;
 СМО₂ обслуговує
 40 вимог за 8 год;
 СМО₃ обслуговує
 20 вимог за 6 год.

5)



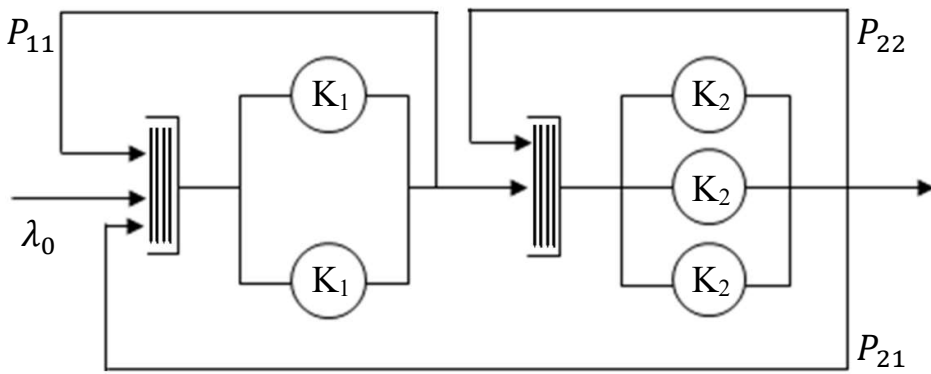
$N = 40;$
 $P_{11} = 0,5;$
 $P_{22} = 0,5;$
 СМО₁ обслуговує
 40 вимог за 8 год;
 СМО₂ обслуговує
 10 вимог за 3 год.

6)



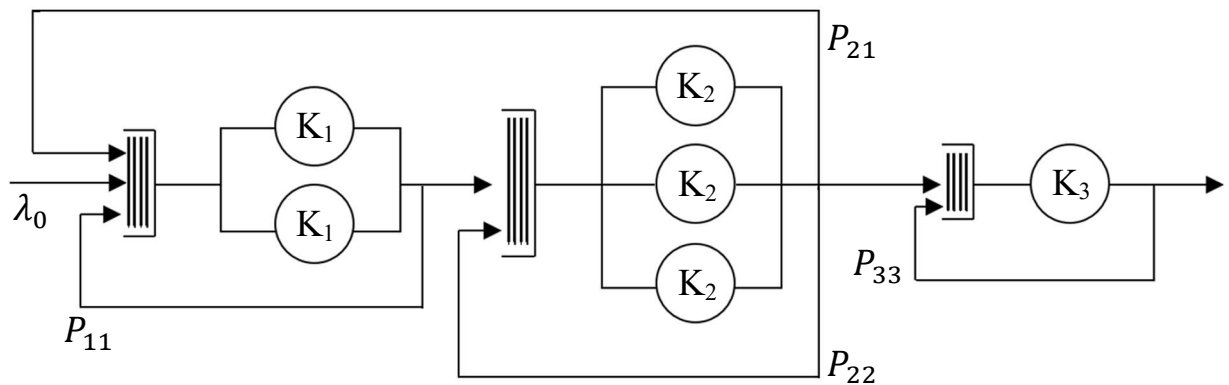
$\lambda_0 = 10$ од/год;
 $P_{11} = 0,2;$ $P_{22} = 0,1;$ $P_{33} = 0,25;$ $P_{32} = 0,3;$
 СМО₁ обслуговує 15 вимог за 1 год;
 СМО₂ обслуговує 30 вимог за 2 год;
 СМО₃ обслуговує 24 вимог за 2 год.

7)



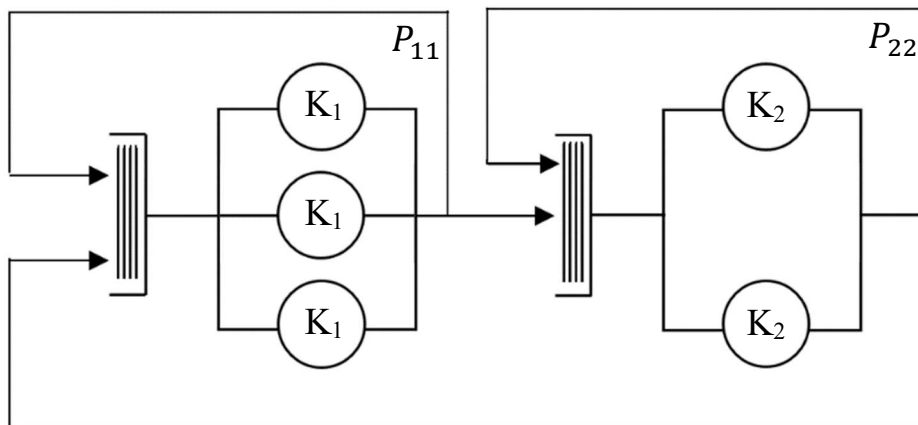
$\lambda_0 = 20$ од/год;
 $P_{11} = 0,4$;
 $P_{22} = 0,1$;
 $P_{21} = 0,2$;
 СМО₁ обслуговує
 90 вимог за 4 год;
 СМО₂ обслуговує
 90 вимог за 5 год.

8)



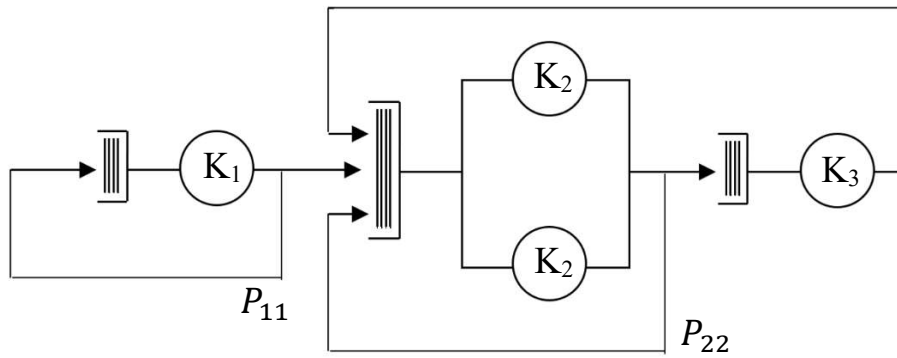
$\lambda_0 = 25$ од/год;
 $P_{11} = 0,25$; $P_{22} = 0,2$; $P_{21} = 0,2$; $P_{33} = 0,05$;
 СМО₁ обслуговує 120 вимог за 2 год;
 СМО₂ обслуговує 100 вимог за 2 год;
 СМО₃ обслуговує 80 вимог за 2 год.

9)



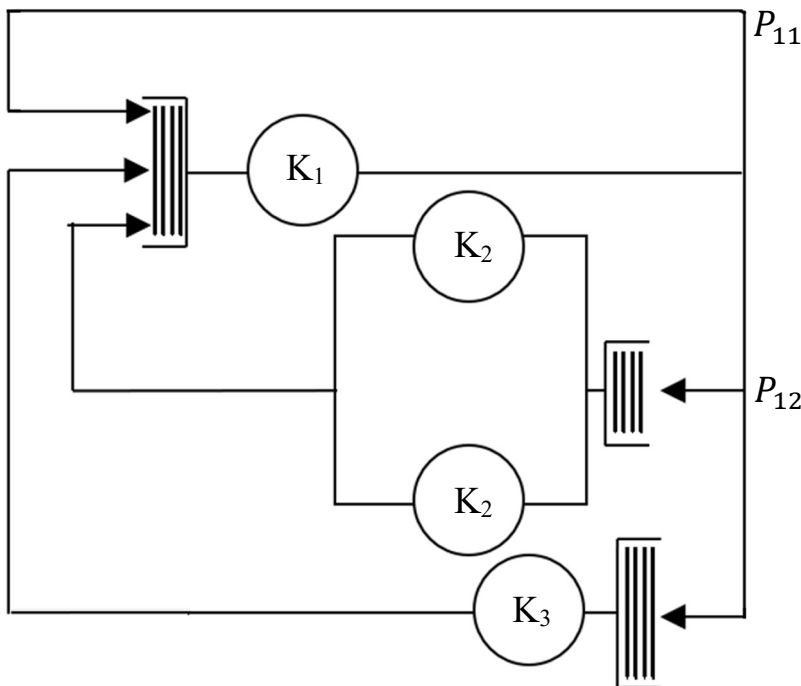
$N = 40$;
 $P_{11} = 0,3$;
 $P_{22} = 0,2$;
 СМО₁ обслуговує
 60 вимог за 8 год;
 СМО₂ обслуговує
 45 вимог за 3 год.

10)



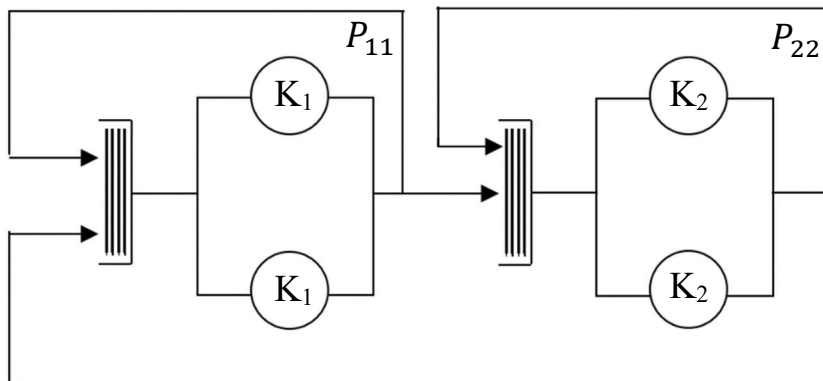
$N = 100;$
 $P_{11} = 0,5;$
 $P_{22} = 0,2;$
 СМО₁ обслуговує
 100 вимог за 2 год;
 СМО₂ обслуговує
 100 вимог за 8 год;
 СМО₃ обслуговує
 100 вимог за 8 год.

11)



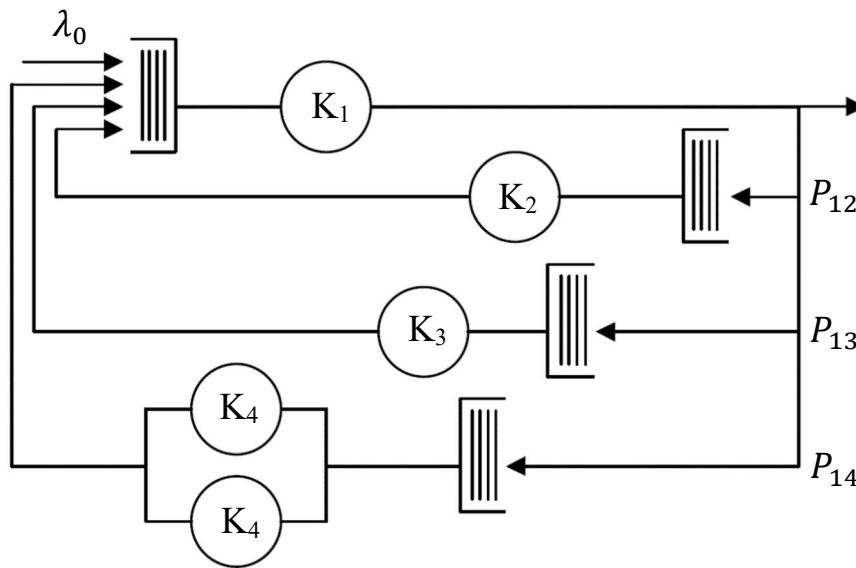
$N = 80;$
 $P_{11} = 0,2;$
 $P_{12} = 0,4;$
 СМО₁ обслуговує
 20 вимог за 1 год;
 СМО₂ обслуговує
 75 вимог за 8 год;
 СМО₃ обслуговує
 40 вимог за 6 год.

12)



$N = 50;$
 $P_{11} = 0,4;$
 $P_{22} = 0,4;$
 СМО₁ обслуговує
 50 вимог за 8 год;
 СМО₂ обслуговує
 20 вимог за 3 год.

Приклад виконання:



$$\begin{aligned}
 P_{12} &= 0,15; & P_{13} &= 0,13; \\
 P_{14} &= 0,3; & \lambda_0 &= 0,6; \\
 \frac{1}{\mu_1} &= 0,6; & \frac{1}{\mu_2} &= 0,3; \\
 \frac{1}{\mu_3} &= 0,4; & \frac{1}{\mu_4} &= 0,1.
 \end{aligned}$$

1. Коефіцієнти передачі. Перевірка сталого режиму.

Для СМО₁:

$$e_1 = p_{01} + p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + p_{31}e_3 + p_{41}e_4 = 1 + 0 + e_2 + e_3 + e_4.$$

Для СМО₂:

$$e_2 = p_{02} + p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + p_{32}e_3 + p_{42}e_4 = 0 + 0,15e_1 + 0 + 0 + 0.$$

Для СМО₃:

$$e_3 = p_{03} + p_{13}e_1 + p_{23}e_2 + p_{33}e_3 + p_{43}e_4 = 0 + 0,13e_1 + 0 + 0 + 0.$$

Для СМО₄:

$$e_4 = p_{04} + p_{14}e_1 + p_{24}e_2 + p_{34}e_3 + p_{44}e_4 = 0 + 0,3e_1 + 0 + 0 + 0.$$

Отримали СЛАР:

$$\begin{cases}
 e_1 = 1 + e_2 + e_3 + e_4, \\
 e_2 = 0,15e_1, \\
 e_3 = 0,13e_1, \\
 e_4 = 0,3e_1.
 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему методом Гаусса, отримаємо:

$$\begin{aligned}
 e_1 &\approx 2,38, & e_2 &\approx 0,36, \\
 e_3 &\approx 0,31, & e_4 &\approx 0,71.
 \end{aligned}$$

Розрахуємо інтенсивності надходження до СМО_i за формулою:

$$\lambda_i = e_i \lambda_0, i = \overline{1, n}.$$

Маємо:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\approx 1,428, & \lambda_2 &\approx 0,216, \\ \lambda_3 &\approx 0,186, & \lambda_4 &\approx 0,426.\end{aligned}$$

Умова сталого режиму роботи СМО_i:

$$\lambda_0 < \frac{\mu_i r_i}{e_i}, i = \overline{1, n}.$$

Тут r_i – кількість каналів у СМО_i. Відповідно

$$\begin{aligned}r_1 &= 1, & r_2 &= 1, \\ r_3 &= 1, & r_4 &= 2.\end{aligned}$$

Маємо:

$$\begin{aligned}\frac{\mu_1 r_1}{e_1} &\approx 0,7 > 0,6, \\ \frac{\mu_2 r_2}{e_2} &\approx 9,26 > 0,6, \\ \frac{\mu_3 r_3}{e_3} &\approx 8,06 > 0,6, \\ \frac{\mu_4 r_4}{e_4} &\approx 28,17 > 0,6.\end{aligned}$$

Отже, всі три СМО працюють у сталому режимі, можемо продовжувати дослідження.

2. Нормувальні множники

$$C_i = \left(\left(\frac{e_i \lambda_0}{\mu_i} \right)^{r_i} \cdot \frac{1}{r_i! \left(1 - \frac{e_i \lambda_0}{\mu_i r_i} \right)} + \sum_{k=0}^{r_i-1} \left(\frac{e_i \lambda_0}{\mu_i} \right)^k \cdot \frac{1}{k!} \right)^{-1},$$

$$\begin{aligned}C_1 &\approx 0,1432, & C_2 &\approx 0,93524, \\ C_3 &\approx 0,9256, & C_4 &\approx 0,9582.\end{aligned}$$

3. Ймовірності знаходження вимог в СМО_i

При підрахунку функцій $p_i(k)$ нас цікавить тільки той випадок, коли $k > r_i$, тому що при розрахунку середньої кількості вимог у СМО_i у формулі суми підрахунок починається з $k = r_i + 1$.

$$p_i(k) = \left(\frac{e_i \lambda_0}{\mu_i}\right)^{k_i} \cdot C_i \cdot \begin{cases} \frac{1}{k!}, k \leq r_i, \\ \frac{1}{r_i! r_i^{k-r_i}}, k > r_i. \end{cases}$$

$$p_1(k) = 0,8568^k \cdot 0,1432 \cdot \frac{1}{1! 1^{k-1}},$$

$$p_2(k) = 0,0648^k \cdot 0,93524 \cdot \frac{1}{1! 1^{k-1}},$$

$$p_3(k) = 0,0744^k \cdot 0,9256 \cdot \frac{1}{1! 1^{k-1}},$$

$$p_4(k) = 0,0426^k \cdot 0,9582 \cdot \frac{1}{2! 2^{k-2}}.$$

4. Основні показники ефективності функціонування розімкненої ММО

1) Середня кількість вимог у СМО_i:

$$L_i = \sum_{j=r_i+1}^{\infty} (j - r_i) p_i(j), i = \overline{1, n},$$

$$L_1 \approx 5,1264, \quad L_2 \approx 0,0045,$$

$$L_3 \approx 0,006, \quad L_4 \approx 0,00004.$$

2) Середня кількість зайнятих пристроїв у СМО_i:

$$R_i = \frac{e_i \lambda_0}{\mu_i}, i = \overline{1, n},$$

$$R_1 \approx 0,8568, \quad R_2 \approx 0,0648,$$

$$R_3 \approx 0,0744, \quad R_4 \approx 0,0426.$$

3) Середня кількість вимог, які перебувають у СМО_i:

$$M_i = L_i + R_i, i = \overline{1, n},$$

$$M_1 \approx 5,9832, \quad M_2 \approx 0,0693,$$

$$M_3 \approx 0,0804, \quad M_4 \approx 0,04264.$$

4) Середній час очікування в СМО_i:

$$Q_i = \frac{L_i}{e_i \lambda_0} = \frac{L_i}{\lambda_i}, i = \overline{1, n},$$

$$Q_1 \approx 3,59, \quad Q_2 \approx 0,02, \\ Q_3 \approx 0,03, \quad Q_4 \approx 0,0000939.$$

5) Середній час перебування вимог у СМО_i:

$$T_i = \frac{M_i}{e_i \lambda_0} = \frac{M_i}{\lambda_i}, i = \overline{1, n},$$

$$T_1 \approx 4,19, \quad T_2 \approx 0,32, \\ T_3 \approx 0,43, \quad T_4 \approx 0,1.$$

6) Середній час перебування вимог у ММО:

$$T = \sum_{i=1}^n e_i T_i \approx 10,2917.$$

8.4. Лабораторна робота № 4. Імітаційне моделювання мережі масового обслуговування

Теоретичні питання:

- 1) Причини використання імітаційних моделей.
- 2) Поняття алгоритму імітації та його складові.
- 3) Способи побудови алгоритму просування модельного часу.
- 4) Способи побудови алгоритму просування стану моделі в часі.
- 5) Способи побудови алгоритму збору інформації.
- 6) Складові алгоритму імітації ММО.
- 7) Об'єктно-орієнтований підхід до побудови імітаційних моделей ММО.

Завдання:

Дослідити обраний варіант ММО імітаційними методами та побудувати алгоритм імітації:

1. Виділити елементи та параметри системи.
2. Описати стан каналів обслуговування та стан черги.
3. Ввести змінні для збору інформації.
4. Виділити події, які виникають в системі.
5. Описати дії, що складають кожну подію.
6. Описати процедуру визначення моменту найближчої події.
7. Описати алгоритм програми імітації.
8. Реалізувати алгоритм імітації на відомій алгоритмічній мові програмування.
9. Проаналізувати отримані результати та зробити висновки.

Показниками ефективності ММО при моделюванні вважаються:

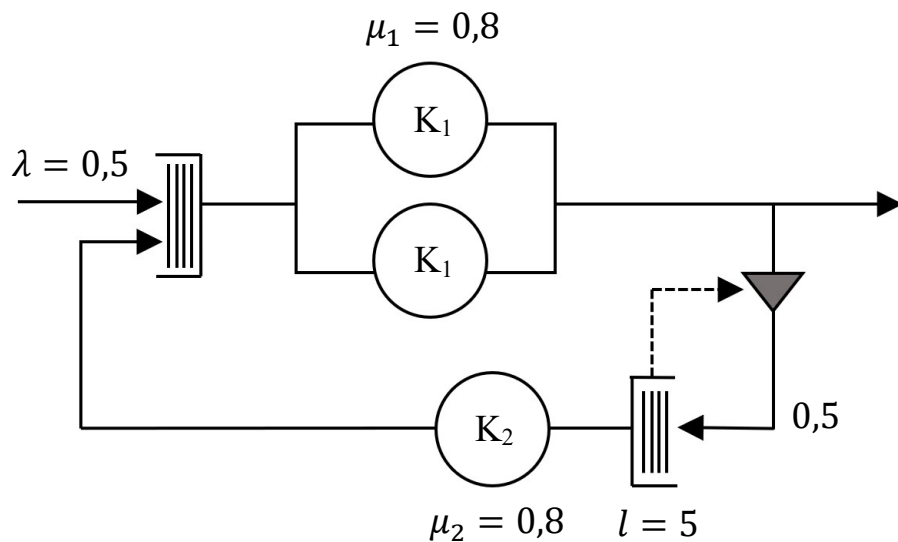
- 1) ймовірність відмови в обслуговуванні;
- 2) середні довжини черг;
- 3) середній час очікування в чергах.

Результати імітаційного моделювання мають містити дані прогонів програми при:

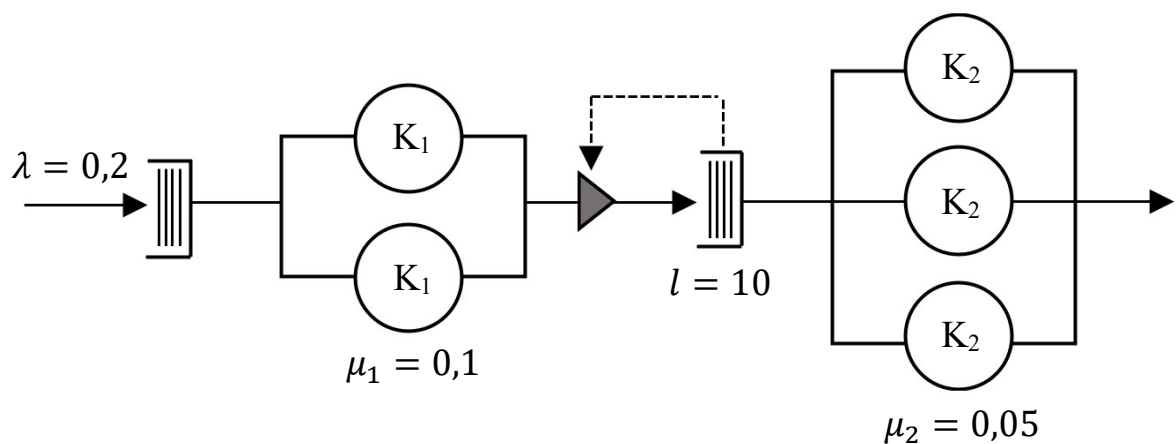
- а) вхідних значеннях параметрів λ, μ_i, l ;
- б) збільшеному значенні параметра λ ;
- в) змінених значеннях параметрів μ_i ;
- г) зміненому параметрі l ;
- г) збільшеному часу моделювання.

Варіанти:

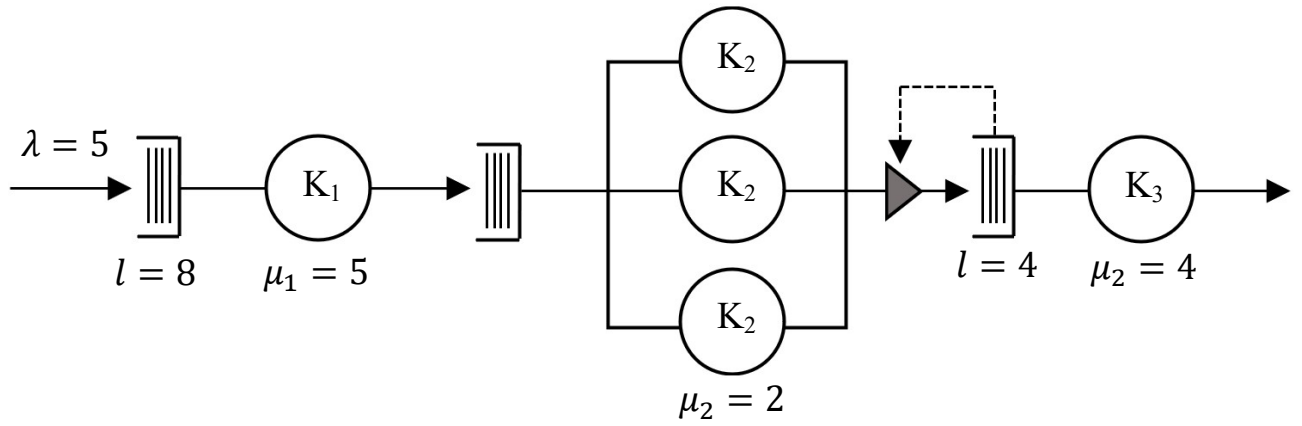
1)



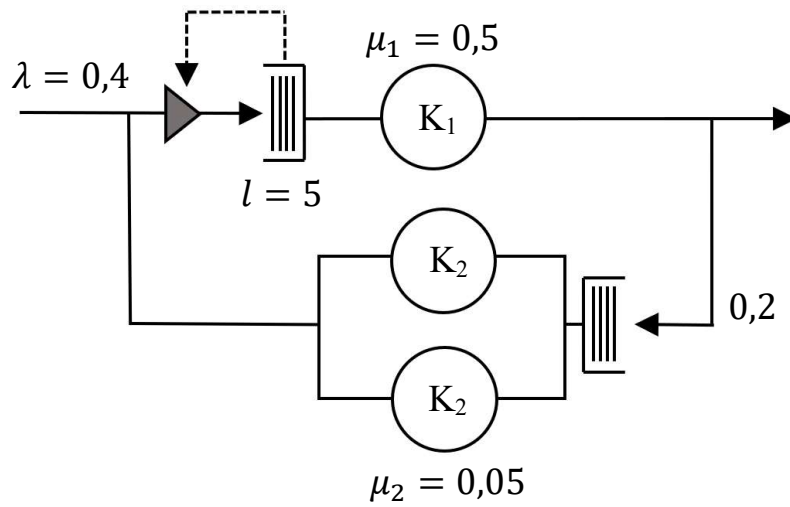
2)



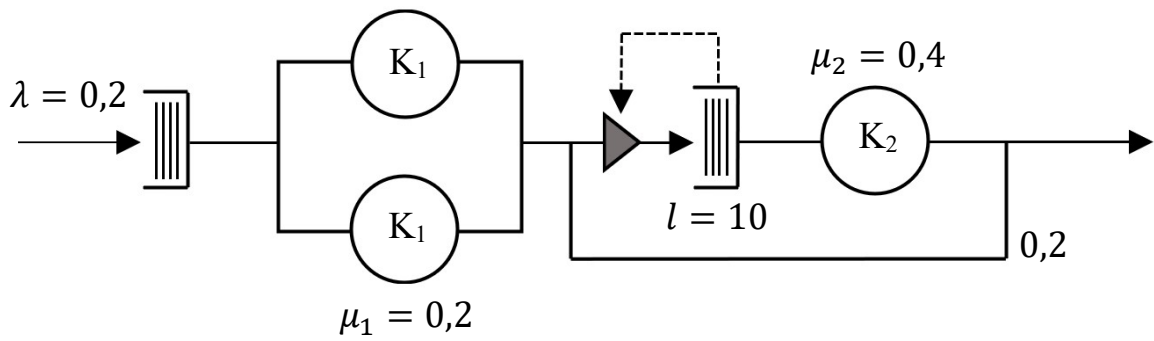
3)



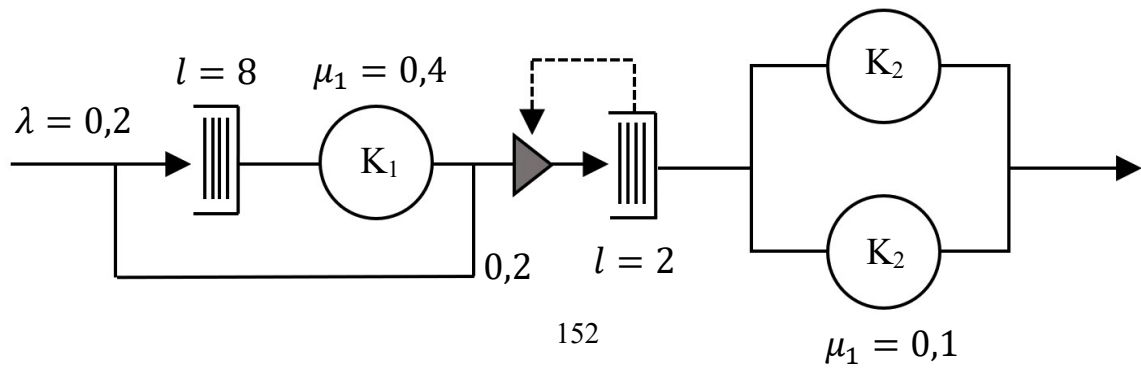
4)



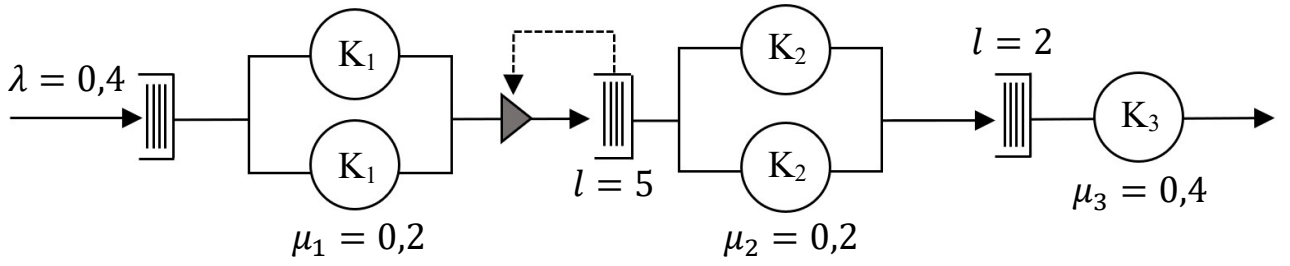
5)



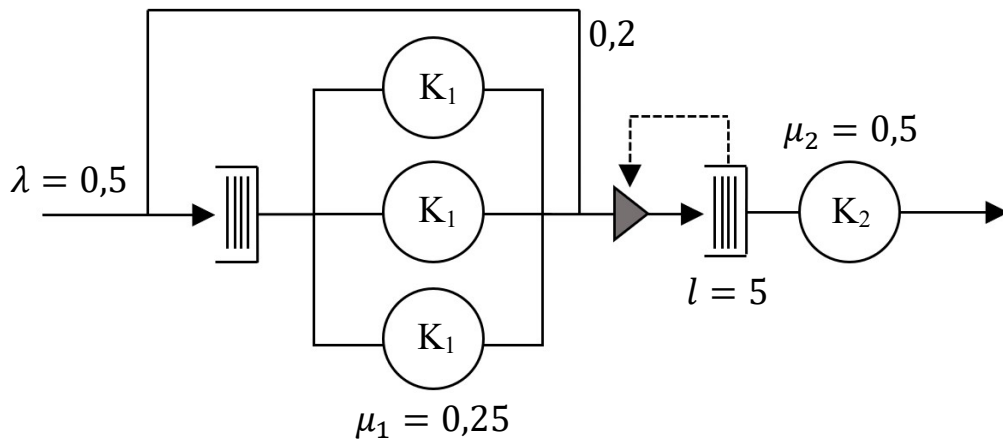
6)



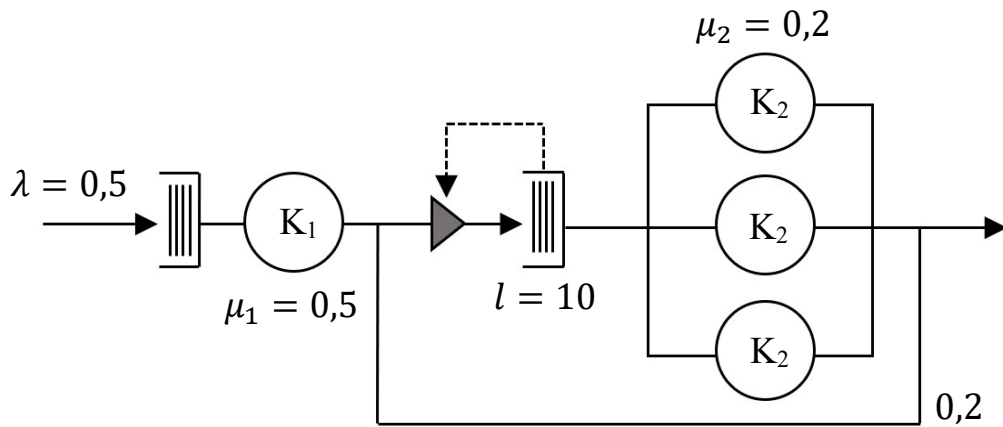
7)



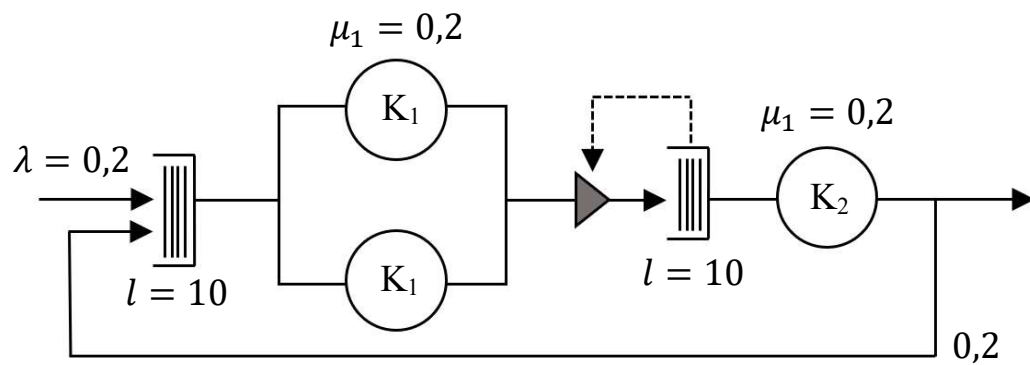
8)



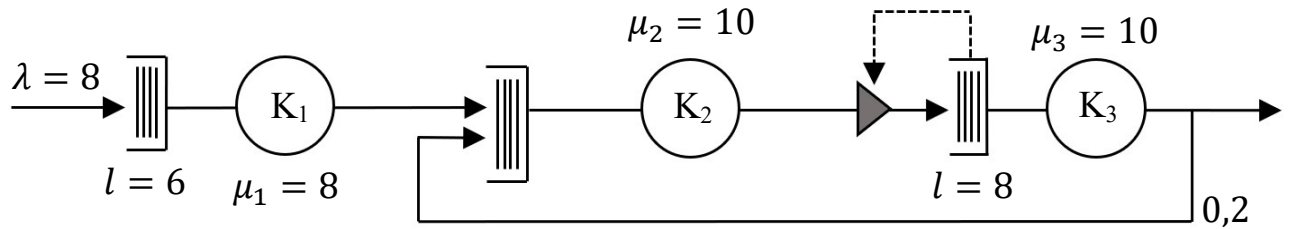
9)



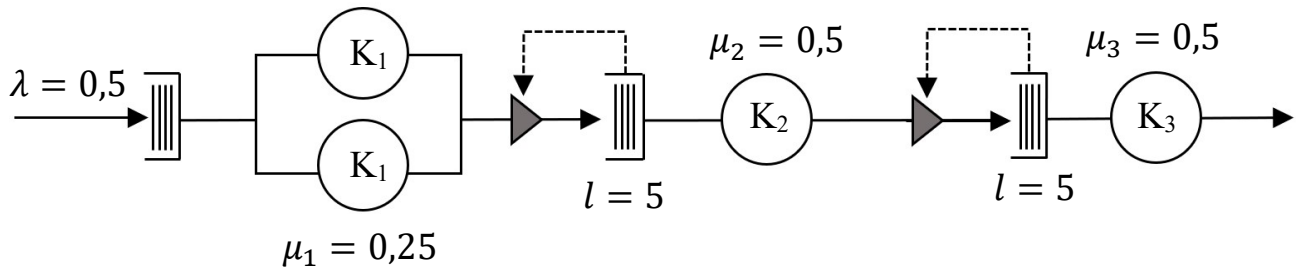
10)



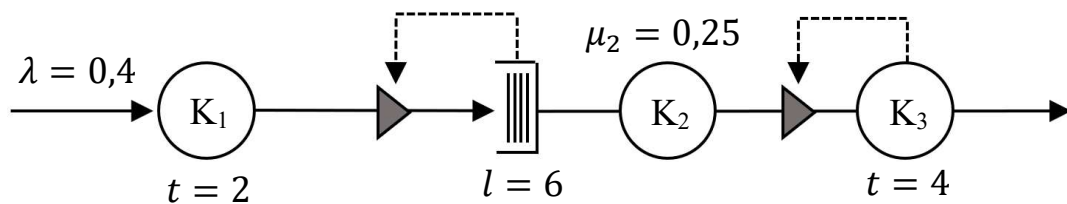
11)



12)



Приклад виконання:



Згідно зі схемою маємо систему з трьома каналами обслуговування, однією чергою та блокуванням маршрутів, якщо наступний елемент системи переповнений або зайнятий.

1. Елементи та параметри системи

Вхідний потік:

- генерує вимоги з інтенсивністю $\lambda = 0,4$;
- середній інтервал надходження: $1/\lambda = 2,5$ одиниць часу;
- заявки надходять до першої СМО (K_1).

СМО₁ (K_1):

- 1 канал обслуговування;
- час обслуговування: детермінований $t_1 = 2$:

- черги перед K_1 немає, тому якщо K_1 зайнятий – заявка отримує відмову.

Черга (між K_1 і K_2):

- максимальна кількість місць: $l = 6$;

- порядок обслуговування: FIFO (first in – first out);

- якщо черга повна і K_2 зайнятий – канал K_1 переходить у стан “заблокований”: вимога залишається в ньому і передача призупиняється до моменту звільнення місця в черзі.

СМО₂ (K_2):

- 1 канал обслуговування;

- час обслуговування: експоненційний розподіл, $\mu_2 = 0,25$ (середній час $t_2 = 4$).

СМО₃ (K_3):

- 1 канал обслуговування;

- час обслуговування: детермінований $t_3 = 4$;

- черги перед K_3 немає, тому якщо K_3 зайнятий – K_2 блокується.

Зв'язки: вхід $\rightarrow K_1 \rightarrow$ черга $\rightarrow K_2 \rightarrow K_3 \rightarrow$ вихід.

2. Стан каналів обслуговування та стан черги

Канал K_1 може перебувати у трьох станах: вільному, зайнятому або заблокованому. Він переходить у стан блокування тоді, коли завершив опрацювання вимоги, але черга вже заповнена до максимуму і K_2 зайнятий (тобто передати вимогу нікуди).

Канал K_2 також може бути вільним, зайнятим або заблокованим. Блокування K_2 відбувається у тому випадку, коли він завершив опрацювання вимоги, але K_3 перебуває у стані “зайнятий”, і передача вимоги далі по маршруту неможлива.

Канал K_3 може перебувати лише у двох станах: вільному або зайнятому. Блокування для нього неможливе, оскільки після K_3 вимога безпосередньо покидає систему (наступного пристрою, який міг би заблокувати передачу, не існує).

Стан черги між K_1 та K_2 описується поточною кількістю вимог L , де L може набувати значень від 0 до 6 включно, а також моментами часу надходження кожної вимоги у чергу (ці дані необхідні для подальшого розрахунку середнього часу очікування). Порядок обслуговування вимог у черзі – FIFO, тобто першою обслуговується вимога, яка найдовше перебуває в очікуванні.

Зв'язки між пристроями $K_1 \rightarrow$ Черга, Черга $\rightarrow K_2$ та $K_2 \rightarrow K_3$ можуть бути незаблокованими, коли передача вимоги можлива, або заблокованими, коли передача неможлива. Зокрема, зв'язок між чергою та K_2 є заблокованим, якщо K_2 зайнятий. Зв'язок між K_2 та K_3 є заблокованим, якщо K_3 зайнятий, що одночасно спричиняє перехід K_2 у стан блокування.

3. Змінні для збору інформації

$Nall$ – загальна кількість вимог, що надійшли до системи.

$Nref$ – кількість вимог, яким відмовлено в обслуговуванні. Відмова настає у двох випадках: якщо вимога прибула, а K_1 має стан “зайнятий”, або якщо K_1 завершив обслуговування, але черга повністю заповнена ($L = 6$) і K_2 зайнятий.

$Nserv$ – кількість успішно обслугованих вимог, що вийшли з K_3 .

$SumL$ – інтегральна сума довжини черги відносно часу ($\sum_i L_i \Delta t_i$), використовується для розрахунку середньої довжини черги за формулою $L_{aver} = SumL / T_{mod}$.

$SumW$ – сумарний час очікування всіх вимог у черзі, використовується для розрахунку середнього часу очікування за формулою $Q_{aver} = SumW / Nserv$.

$M [1..6]$ – масив для зберігання моментів надходження кожної вимоги у чергу. Розмір масиву дорівнює максимальній кількості вимог у черзі ($l = 6$). При постановці вимоги у чергу поточний час фіксується у $M [num]$, де num – поточна кількість вимог у черзі. При виході вимоги з черги виконується

$$SumW = SumW + (t - M [1]),$$

після чого масив зсувається: $M [i] = M [i+1]$ для всіх i , а $num = num - 1$.

4. Події, які виникають в системі

Подія 0 – надходження нової вимоги до мережі. Настає у момент часу t_{arrive} .

Подія 1 – завершення обслуговування вимоги у каналі K_1 . Настає у момент часу t_{out_K1} .

Подія 2 – завершення обслуговування вимоги у каналі K_2 . Настає у момент часу t_{out_K2} .

Подія 3 – завершення обслуговування вимоги у каналі K_3 . Настає у момент часу t_{out_K3} .

Події упорядковуються за принципом найближчої події, тобто модельний час просувається від моменту виникнення однієї події до моменту виникнення найближчої наступної:

$$t_{min} = \min(t_{arrive}, t_{out_K1}, t_{out_K2}, t_{out_K3}).$$

5. Дії, що складають кожну подію

Подія 0 “Надходження вимоги до мережі”

Лічильник загальної кількості вимог збільшується: $N_{all} = N_{all} + 1$. Після цього планується момент надходження наступної вимоги шляхом додавання до поточного часу випадкового інтервалу, згенерованого за експоненційним законом розподілу з інтенсивністю $\lambda = 0,4$. Далі перевіряється стан каналу K_1 :

- Якщо K_1 вільний – він переводиться у стан “зайнятий” і встановлюється детермінований момент завершення його обслуговування: $t_{out_K1} = t + 2$.

- Якщо K_1 зайнятий або заблокований – вимога отримує відмову і залишає систему: $N_{ref} = N_{ref} + 1$.

Подія 1 “Завершення обслуговування вимоги у каналі K_1 ”

Оновлюється інтегральна сума довжини черги $SumL$. Після цього перевіряється можливість передати вимогу далі:

- Якщо K_2 вільний – вимога передається безпосередньо до нього. K_1 стає “вільним”. K_2 переводиться у стан “зайнятий” і для нього генерується час обслуговування за експоненційним законом з $\mu_2 = 0,25$.

- Якщо K_2 не вільний, але у черзі є місце ($num < 6$) – вимога ставиться у чергу, поточний час фіксується у $M[num]$, $num = num + 1$. K_1 стає “вільним”.
- Якщо K_2 не вільний і черга повністю заповнена ($num = 6$) – канал K_1 переводиться у стан “заблокований”. Вимога залишається в ньому, а момент його виходу встановлюється у нескінченність ∞ .

Подія 2 “Завершення обслуговування вимоги у каналі K_2 ”

Оновлюється інтегральна сума довжини черги $SumL$. Перевіряється стан каналу K_3 :

- Якщо K_3 вільний – вимога передається до нього, K_3 переводиться у стан “зайнятий” і встановлюється $t_{out_K3} = t + 4$. Канал K_2 звільняється.
- Якщо K_3 зайнятий – K_2 переводиться у стан “заблокований”, а момент його виходу встановлюється у нескінченність.
- Робота з чергою: якщо K_2 звільнився, перевіряється черга. Якщо $num > 0$ – перша вимога вилучається з черги (оновлюється $SumW = SumW + (t - M[1])$, масив зсувається: $M[i] = M[i+1]$ для всіх i , $num = num - 1$), K_2 стає “зайнятим” і генерується новий час обслуговування.
- Розблокування K_1 : оскільки з черги було забрано вимогу і звільнилося місце, перевіряється стан K_1 . Якщо він був “заблокований” – він розблоковується: його вимога переміщується у звільнене місце в черзі, а сам K_1 стає “вільним”.

Подія 3 “Завершення обслуговування вимоги у каналі K_3 ”

Лічильник успішно обслугованих вимог збільшується: $Nserv = Nserv + 1$. Канал K_3 переводиться у стан “вільний” ($t_{out_K3} = \infty$). Після цього перевіряється стан K_2 :

- Якщо K_2 перебував у стані “заблокований” – він розблоковується. Його вимога передається до K_3 (K_3 знову стає “зайнятим” на час $t + 4$), а K_2 звільняється.
- Якщо K_2 звільнився, він одразу перевіряє чергу і затулює наступну вимогу за тією самою схемою, що описана у події 2. Якщо вимога з черги забирається, це автоматично викликає перевірку на розблокування каналу K_1 .

Варто зазначити ланцюгову реакцію розблокування: звільнення K_3 тягне за собою розблокування K_2 , тоді у K_2 надходить вимога з черги, а звільнене місце у черзі дозволяє розблокувати K_1 .

6. Процедура визначення моменту найближчої події

Алгоритм постійно відстежує масив запланованих моментів часу:

- t_arrive – час надходження наступної вимоги;
- $t_out_K1, t_out_K2, t_out_K3$ – часові моменти завершення обслуговування у відповідних каналах.

Важлива умова: якщо будь-який з каналів перебуває у стані “вільний” або “заблокований”, його час завершення обслуговування встановлюється рівним нескінченності, щоб виключити його з пошуку мінімуму.

Процедура складається з таких кроків:

1. З усіх запланованих моментів вибирається найменший:

$$t_min = \min(t_arrive, t_out_K1, t_out_K2, t_out_K3).$$

2. Оновлюється статистика черги та завантаженості каналів за пройдений інтервал часу від t_prev до t_min . Наприклад:

$$SumL = SumL + num \cdot (t_min - t_prev).$$

3. Попередній час оновлюється для наступного кроку: $t_prev = t_min$.
4. Відбувається просування системного часу: $t = t_min$.
5. Визначається, якій саме події відповідає знайдений t_min , після чого керування передається відповідному блоку логіки (Подія 0, 1, 2 або 3).

7. Алгоритм програми імітації

1. Ввести початкові дані: $\lambda = 0,4$; $t_1 = 2$; $\mu_2 = 0,25$; $t_3 = 4$; $l = 6$; $Tmod$.
2. Ініціалізувати змінні: $t = 0$; $t_prev = 0$; $Nall = 0$; $Nref = 0$; $Nserv = 0$; $SumL = 0$; $SumW = 0$; $num = 0$; стани K_1, K_2, K_3 – “вільний”.
3. Встановити початкові моменти подій: t_arrive – генерується випадковий інтервал за експоненціальним законом з інтенсивністю λ ;

$$t_out_K1 = t_out_K2 = t_out_K3 = \infty \text{ (канали вільні)}.$$

4. Поки $t < T_{mod}$ виконувати:

- визначити $t_{min} = \min(t_{arrive}, t_{out_K1}, t_{out_K2}, t_{out_K3})$;
- оновити статистику за інтервал від t_{prev} до t_{min} :

$$SumL = SumL + num \cdot (t_{min} - t_{prev});$$

- встановити $t_{prev} = t_{min}$ та просунути час: $t = t_{min}$.
- визначити, яка подія настала, та виконати відповідні дії:
 - якщо $t_{min} = t_{arrive}$ – виконати дії події 0;
 - якщо $t_{min} = t_{out_K1}$ – виконати дії події 1. Якщо черга повна і K_2 не вільний – K_1 переводиться у стан “заблокований”, $t_{out_K1} = \infty$;
 - якщо $t_{min} = t_{out_K2}$ – виконати дії події 2. Якщо K_3 зайнятий – K_2 переводиться у стан “заблокований”, $t_{out_K2} = \infty$. Якщо K_2 звільнився і черга не порожня – вилучити вимогу з черги, оновити $SumW$, перевірити стан K_1 і розблокувати його, якщо потрібно;
 - якщо $t_{min} = t_{out_K3}$ – виконати дії події 3. $Nserv = Nserv + 1$. Якщо K_2 був заблокований – розблокувати його, передати вимогу до K_3 . Якщо після цього черга не порожня – K_2 забирає наступну вимогу і автоматично перевіряється розблокування K_1 .

5. Після завершення моделювання вивести результати:

- Ймовірність відмови: $P = N_{ref} / N_{all}$.
- Середня довжина черги: $L_{aver} = SumL / T_{mod}$.
- Середній час очікування у черзі: $Q_{aver} = SumW / N_{serv}$.

8. Результати моделювання при початкових параметрах

Час моделювання: 100000.

Згенеровано заявок: 40180.

Кількість відмов: 21954.

Обслужено заявок системою: 18219.

Ймовірність відмови: 0.5464 (54.64%).

Середня довжина черги: 5.1392.

Середній час очікування: 28.1957.

Список використаних джерел

Основні джерела:

1. Великодний С. С. Моделювання систем: конспект лекцій. – Одеса : Одеський державний екологічний університет, 2018. – 186 с.
2. Економіко-математичне моделювання. Навчальний посібник / за ред. В.В. Вітлінського. – Київ : КНЕУ, 2008. – 537 с.
3. Виклюк Я. І., Камінський Р. М., Пасічник В. В. Моделювання складних систем. Посібник. – Львів : Видавництво “Новий Світ – 2000”, 2017. – 404 с.
4. Стеценко І. В. Моделювання систем: навч. посіб. [Електронний ресурс, текст]. – Черкаси : ЧДТУ, 2010. – 399 с.
5. Томашевський В. М. Моделювання систем. – Київ : Видавнича група ВНУ, 2005. – 352 с.

Додаткові джерела:

6. Kelton W. D., Zupick N. B., Ivey N. J. Simulation with Arena, Seventh Edition. – New York, NY : McGraw Hill LLC, 2024. – 689 p.
7. Knuth D. E. The Art of Computer Programming. Volume 2. Seminumerical Algorithms, Third Edition. – Reading, Massachusetts : Addison-Wesley, 1997. – 784 p.
8. Law A. M. Simulation Modeling and Analysis, Fifth Edition. – New York, NY : McGraw Hill Education, 2014. – 800 p.
9. Peterson J. L. Petri Net Theory and the Modeling of Systems. – Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, 1981. – 290 p.
10. Pritsker A. Alan B. Introduction to Simulation and Slam II, Third Edition. – New York, NY : John Wiley & Sons, 1986. – 839 p.
11. Shannon R. E. Systems Simulation: The Art and Science. – Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, 1975. – 387 p.

12. Trotsenko Ya., Vovk I. Numerical simulation of the 3-D flow in a cylindrical duct with two diaphragms at low Mach numbers // Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Bulgaria). – 2020. – Vol. 50, No. 2. – P. 190–201.
13. Волощук С. Д., Стоян В. А. Моделювання щільності розподілу акцій з дискретними спостереженнями // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2018. – № 2. – С. 63–66.
14. Гнеденко Б. В. Курс теорії ймовірностей. – Київ : ВПЦ Київський університет, 2010. – 464 с.
15. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика. – Київ : ВПЦ Київський університет, 2007. – 504 с.
16. Стеценко І. В., Дифучина О. Ю., Дифучин А. Ю. Моделювання систем. Курсова робота [Електронний ресурс] : рек. до виконання курсов. роботи : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Інженерія програмного забезпечення інформаційних систем» спец. 121 Інженерія програмного забезпечення. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 109 с.
17. Тимченко А. А. Основи системного проектування та системного аналізу складних об'єктів: Підручник для студентів вищих закладів освіти / за ред. В.І. Бикова. – Київ : Либідь, 2000. – 270 с.

Предметний покажчик

автокореляція 42, 47, 48, 49, 50, 51, 52

авторегресійна схема 51

активність 90, 94, 95, 98

алгоритм

– імітації 109, 110, 118, 122, 123, 159

– Фаррара-Глаубера 30, 31, 136

аналітична функція 13

апроксимація 29, 37, 140

блокування маршруту 56, 57, 58, 59, 60, 75, 154

вектор

– запусків переходів 89

– маркувань 63, 64, 65, 71, 87, 88, 89, 90, 93, 121, 122, 124

генератор випадкових величин 20, 102, 103, 104, 105, 107, 109

гетероскедастичність 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49

гістограма частот 20, 21, 129, 130

гомоскедастичність 42, 43, 45, 46

дерево досяжності 95, 96, 97, 98

деталізація 17

дисперсія 24, 31, 37, 45, 103, 104, 107, 108, 109, 130, 136

– випадкових відхилень 42, 43

– загальна 35

– залишків 37, 45, 48, 49, 50

– коефіцієнта 37, 44, 50

– факторна 35

довірча ймовірність 25, 38,

довірчий інтервал 37, 45, 140

досяжність 90, 91, 98

залишок 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52

збережуваність 90, 92, 93, 97, 98

збирання 66

інформаційний зв'язок 70, 71, 72

ймовірність

– перебування у СМО 77

– стану ММО 84

коефіцієнт

- детермінації 35, 140
- кореляції 35, 36, 140
- передачі 76, 77, 79, 80, 82, 85, 146
- рангової кореляції 46

конгруентний генератор 104

конфліктний перехід 67, 68, 72, 123

кореляційна матриця 31, 136

кореляційно-регресійний аналіз 30, 35, 140

критерій

- Дарбіна-Уотсона 50, 51
- Пірсона 31, 32, 135
- серій 106
- Стьюдента 33, 36, 45, 47, 137, 140
- Фішера 32, 36, 45, 137
- фон Неймана 51, 52,
- χ^2 25, 31, 32, 37, 38, 105, 131, 136

k-обмеженість 90, 98

λ -критерій 25, 26

локалізація 17

маркування 63, 87, 89, 90, 91, 92, 94, 95, 96, 97, 98, 121, 124

- дублююче 95, 96, 97
- термінальне маркування 95, 96, 97

математичне сподівання 21, 24, 42, 49, 78, 84, 103, 104, 107, 108, 109, 130

матриця

- виходів 86, 87, 88, 120, 121
- входів 86, 87, 88, 120, 121
- змінювань 88, 89, 91

метод

- Ейткена 52
- найменших квадратів 29, 30, 33, 34, 48
- оберненої функції 107, 109
- перетворення вихідної інформації 52
- полярних координат 108
- функціональних властивостей 107, 108
- χ^2 37

мультиколінеарність 30, 31, 32, 33, 42, 136, 137

нормувальний множник 77, 79, 83, 84, 85, 147

орієнтація 17

оцінка залишків моделі 42

період генератора 104, 105
періодичність 51, 105, 109
похибка коефіцієнта 37

рівень статистичної значущості 25, 26, 32, 33, 36, 37, 51, 106, 131
рівномірність 103, 105, 107

середньоквадратичне відхилення 21, 37
система нормальних рівнянь 34, 138
системний підхід 15, 16, 17
специфікація 15, 30, 34, 45, 49, 50, 52
сталий режим 76, 77, 79, 81, 82, 146, 147
стандартизована матриця 31, 136
стандартне відхилення 21, 24, 47, 130
статистична значущість коефіцієнтів 36, 37, 140
стратифікація 17
структуризація 17

табличний метод 107, 108, 109

тест

- Голдфельда-Квандта 47
- рангової кореляції 46, 47
- Спірмена 46, 47

t-критерій 33, 36, 50

умови Гаусса-Маркова 42

F-критерій 32, 36, 48

частота влучань 20, 24, 129, 131

шкала Чеддока 36, 140

щільність

- зв'язку 36
- розподілу 21, 23, 43, 103

Іменний покажчик

Вейбулл Валодді 22, 107, 108

Гаусс Карл Фрідріх 21, 42, 146

Глаубер Роберт 30, 31, 136

Голдфельд Соломон 47

Дарбін Джеймс 50, 51

Ейткен Алек 52

Ерланг Агнер 22, 108, 109

Квандт Річард 47

Колмогоров А.М. 25

Літл Джон 78, 85

Марков А.А. 42, 43

Парето Вільфредо 23

Петрі Карл 55, 60

Пірсон Карл 31, 32, 136

Пуассон Сімеон-Дені 24

Смірнов В.І. 25

Спірмен Чарльз 46, 47

Стюдент (Госсет Уільям) 33, 36, 37, 45, 47, 137, 140

Уотсон Джеффри 50, 51

Фаррар Дональд 30, 31, 136

Фішер Рональд 32, 36, 45, 137

Нейман Джон фон 51, 52

Чеддок Роберт 36, 140