

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка

О. М. Башняков, В. Т. Матвієнко, В. В. Пічкур

**Методичні вказівки та завдання
для самостійної роботи з навчальної
дисципліни
„Диференціальні рівняння”**

**Частина II. Розв'язування диференціальних
рівнянь першого порядку: лінійні
диференціальні рівняння, диференціальні
рівняння Бернуллі і Ріккати**

УДК 517.91

Рецензенти:

Черній Дмитро Іванович, доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри моделювання складних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Лебідь Олексій Григорович, доктор технічних наук, заступник директора з наукової роботи Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України

Рекомендовано до друку/розміщення на сайті вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол №13 від 21 квітня 2026 р.)

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол №10 від 20 квітня 2026 р.)

Башняков О. М., Матвієнко В. Т., Пічкур В. В.

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з навчальної дисципліни „Диференціальні рівняння”. Частина II. Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку: лінійні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння Бернуллі і Ріккаті. – 2026. – 46 с.

Наведено відомості про методику розв'язування лінійного диференціального рівняння першого порядку, рівняння Бернуллі, рівняння Ріккаті. Теоретичні положення ілюструються прикладами розв'язання. В кінці теми запропоновано завдання для самостійного розв'язування.

Для студентів математичних спеціальностей університетів.

© Башняков О. М., Матвієнко В. Т., Пічкур В. В., 2026

Зміст

1	Лінійне диференціальне рівняння першого порядку	3
1.1	Лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку	3
1.2	Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку	5
1.2.1	Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа) . .	6
1.2.2	Метод Коші	14
1.2.3	Метод Бернуллі	17
1.2.4	Метод Ейлера	22
1.3	Метод невизначених коефіцієнтів	27
1.4	Випадок лінійного відносно функції диференціального рівняння	34
1.5	Питання, тести для самоконтролю	36
1.6	Задачі для самостійної роботи	36
2	Диференціальні рівняння Бернуллі і Ріккаті	38
2.1	Диференціальне рівняння Бернуллі	38
2.2	Диференціальне рівняння Ріккаті	43
2.3	Питання, тести для самоконтролю	44
2.4	Задачі для самостійної роботи	45
	Література	46

Тема 1

Лінійне диференціальне рівняння першого порядку

1.1 Лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку

Розглянемо такі означення [1, 2, 4, 6, 10].

Означення 1.1. Диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + g(t) \quad (1.1)$$

називається *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*.

Тут $a(t)$, $g(t)$ – неперервні функції, $t \in \mathbb{R}$.

Означення 1.2. Якщо функція $g(t)$ тотожно рівна нулеві, то рівняння (1.1) називається *однорідним*. в іншому випадку рівняння (1.1) називається *неоднорідним*.

Однорідне лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x \quad (1.2)$$

є рівнянням з відокремлюваними змінними. Враховуючи означення диференціала функції

$$dx = x'dt,$$

запишемо рівняння в диференціальній формі

$$dx = a(t)xdt.$$

Відокремлюючи змінні, одержимо

$$\frac{dx}{x} = a(t)dt.$$

Інтегруємо ліву і праву частини

$$\int \frac{dx}{x} = \int a(t)dt + C_1,$$

де C_1 – довільна константа, невизначені інтеграли розуміємо як первісні підінтегральних функцій. Враховуючи, що

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|,$$

одержуємо

$$\ln|x| = \int a(t)dt + C_1.$$

Для того, щоб позбутись логарифмічної функції в правій частині рівності, покладемо

$$C_1 = \ln|C|,$$

де C – довільна константа. Така заміна є коректною, оскільки для будь-якого C_1 можна підібрати C так, що $C_1 = \ln|C|$ і навпаки. Тоді

$$\ln|x| = \int a(t)dt + \ln|C|.$$

З останньої рівності одержуємо

$$\ln \frac{|x|}{|C|} = \int a(t)dt, \quad \left| \frac{x}{C} \right| = e^{\int a(t)dt}.$$

Враховуючи, що C – довільна константа, записуємо загальний розв'язок однорідного рівняння (1.2) так

$$x(t) = Ce^{\int a(t)dt}, \quad (1.3)$$

де C – довільна константа.

Зауважимо, що загальний розв'язок (1.3) можна подати у формі Коші. А саме, якщо шукаємо розв'язок рівняння (1.2) з початковою умовою $x(t_0) = x_0$, то

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(t)dt}$$

є розв'язком цієї задачі Коші.

Приклад 1.1. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x' - x = 0.$$

Розв'язання. Пропоноване рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні

$$\frac{dx}{x} = dt$$

та інтегруємо

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt + C_1,$$

де C_1 – довільна константа. Покладемо

$$C_1 = \ln |C|,$$

де C – довільна константа. Тоді

$$\ln |x| = t + \ln |C|,$$

звідки

$$\ln \left| \frac{x}{C} \right| = t.$$

Записуємо загальний розв'язок

$$x(t) = Ce^t,$$

де C – довільна константа.

Відповідь:

$$x(t) = Ce^t$$

– загальний розв'язок, де C – довільна константа.

1.2 Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (1.1) і відповідне йому однорідне рівняння (1.2). Має місце теорема.

Теорема 1.1 (про структуру загального розв'язку). *Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1) дорівнює сумі загального розв'язку відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння (1.2) та частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1).*

Теорема вказує методику знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1).

На першому кроці записуємо відповідне однорідне диференціальне рівняння (1.2) і знаходимо його загальний розв'язок

$$x(t) = Ce^{\int a(t)dt}$$

так як це було зроблено у попередньому пункті. Тут C – довільна константа.

На другому кроці потрібно знайти будь-який частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1). Розглянемо такі методи знаходження частинного розв'язку:

- метод Лагранжа (метод варіації довільної сталої);
- метод Коші;
- метод Бернуллі;
- метод Ейлера;
- метод невизначених коефіцієнтів.

Метод невизначених коефіцієнтів застосовується у випадку коли функція $a(t)$ є постійною, а функція $g(t)$ має спеціальний вигляд. Решта методів є універсальними.

1.2.1 Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Ідея використання цього методу закладена у його назві [1,2,4,6,10]. Спочатку, застосовуючи теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, записуємо відповідне однорідне рівняння (1.2) і знаходимо його загальний розв'язок

$$x(t) = Ce^{\int a(t)dt},$$

де C – довільна константа. Далі, для того, щоб знайти частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1), ми **варіюємо довільну константу** C , а саме, ми в загальному розв'язку однорідного рівняння заміняємо C на невідому функцію, яку прийнято позначати $C(t)$

$$x = C(t)e^{\int a(t)dt}. \quad (1.4)$$

Можна використати і інше позначення. Після цього підбираємо функцію $C(t)$ так, щоб (1.4) була частинним розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1).

Отже, знайдемо частинний розв'язок (1.1). Для цього підставимо (1.4) в (1.1) і отримаємо

$$C'(t)e^{\int a(t)dt} + C(t)e^{\int a(t)dt}a(t) = a(t)C(t)e^{\int a(t)dt} + g(t).$$

Скорочуючи подібні, одержуємо

$$C'(t)e^{\int a(t)dt} = g(t).$$

Знаходимо

$$C'(t) = e^{-\int a(t)dt}g(t),$$

звідки

$$C(t) = \int e^{-\int a(t)dt}g(t)dt.$$

Отже, ми знайшли „проварійовану константу”. Підставляємо її в (1.4) і одержуємо частинний розв'язок (1.1)

$$x = e^{\int a(t)dt} \int e^{-\int a(t)dt}g(t)dt.$$

Тоді загальний розв'язок (1.1), за теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, має вигляд

$$x = e^{\int a(t)dt}C + e^{\int a(t)dt} \int e^{-\int a(t)dt}g(t)dt.$$

Якщо в останній рівності винести за спільну дужку множник $e^{\int a(t)dt}$, то ми одержимо формулу Коші

$$x = e^{\int a(t)dt} \left(C + \int g(t)e^{-\int a(t)dt}dt \right). \quad (1.5)$$

Тут C – довільна константа.

Якщо необхідно розв'язати задачу Коші

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + g(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

то застосовують формулу Коші у такому вигляді

$$x = e^{\int_{t_0}^t a(t)dt}x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\tau)d\tau}g(s)ds. \quad (1.6)$$

Отже, запишемо алгоритм методу Лагранжа:

- на першому кроці для лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1) ми записуємо відповідне однорідне рівняння і знаходимо його загальний розв'язок;



Рис. 1.1: Жозеф-Луї Лагранж (1736 – 1813), Огюстен Луї Коші (1789 – 1857), Якоб Бернуллі (1655 – 1748), Леонард Ейлер (1707 – 1783). *Всі зображення: Вікіпедія / суспільне надбання; автори Е. Гандманн (Ейлер), інші – невідомі.*

- на другому кроці в загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння підставляємо замість довільної сталої деяку невідому функцію і одержуємо рівність вигляду (1.4);
- на третьому кроці підставляємо (1.4) в рівняння (1.1) і скорочуємо подібні доданки. В результаті одержуємо рівняння для знаходження похідної від невідомої функції $C(t)$, яке розв'язуємо. Знаходимо $C'(t)$ і шляхом інтегрування знаходимо $C(t)$;
- на четвертому кроці підставляємо знайдену функцію $C(t)$ в рівність (1.4) і знаходимо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1);
- на останньому кроці додаємо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння, який знайшли на першому кроці, до частинного розв'язку, який визначили на четвертому кроці. У такий спосіб знаходимо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1).

Приклад 1.2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x' = 2x + e^{3t}.$$

Розв'язання. Записуємо відповідне до заданого однорідне рівняння

$$x' = 2x.$$

З $dx = x'dt$, підстановкою правої частини однорідного рівняння, отримуємо

$$dx = 2xdt.$$

Маємо рівняння з відокремленими змінними. Відокремивши змінні, одержуємо

$$\frac{dx}{x} = 2dt.$$

Інтегруємо ліву і праву частини

$$\int \frac{dx}{x} = 2 \int dt + C_1,$$

де C_1 – довільна константа. Звідси

$$\ln |x| = 2t + \ln |C|,$$

де $C_1 = \ln |C|$, – довільна константа. Далі

$$\ln \left| \frac{x}{C} \right| = 2t.$$

Отже,

$$x_0(t) = Ce^{2t}$$

– загальний розв'язок однорідного рівняння.

За методом варіації довільної сталої, шукаємо частинний розв'язок заданого рівняння як

$$x(t) = C(t)e^{2t},$$

де $C(t)$ – невідома неперервно диференційована функція, яку потрібно визначити шляхом підстановки

$$x(t) = C(t)e^{2t}$$

в задане рівняння. Знайшовши похідну

$$x'(t) = C'(t)e^{2t} + 2C(t)e^{2t},$$

отримаємо

$$C'(t)e^{2t} + 2C(t)e^{2t} = 2C(t)e^{2t} + e^{3t}.$$

Скорочуючи подібні доданки, отримаємо рівність

$$C'(t)e^{2t} = e^{3t},$$

звідки

$$C'(t) = e^t, \quad C(t) = e^t.$$

Отже,

$$x_1(t) = C(t)e^{2t} = e^{3t}$$

є частинним розв'язком заданого рівняння. За теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку одержуємо

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) = Ce^{2t} + e^{3t}.$$

Відповідь:

$$x = Ce^{2t} + e^{3t}$$

–загальний розв'язок рівняння, де C – довільна константа.

Приклад 1.3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$tx' = x + 2t^3.$$

Розв'язання. Знаходимо розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$tx' = x,$$

або, що те саме,

$$t \frac{dx}{dt} = x.$$

Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні і одержуємо

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t}.$$

Інтегруємо ліву і праву частини

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{t} + C_1,$$

де C_1 – довільна константа. Перепишемо останню рівність так

$$\ln |x| = \ln |t| + \ln |C|,$$

де $C_1 = \ln |C|$, – довільна константа. Далі використовуємо правила логарифмування

$$\ln |x| = \ln |Ct|.$$

Отже,

$$|x| = |Ct|.$$

Так як C – довільна константа, то це еквівалентно рівності

$$x_0(t) = Ct.$$

Отже, ми знайшли загальний розв'язок однорідного рівняння.

Для знаходження загального розв'язку неоднорідного рівняння застосуємо метод варіації довільної сталої, а саме шукаємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$x = C(t)t,$$

де $C(t)$ – невідома функція.

Знаходимо похідну

$$x' = (C(t)t)' = C'(t)t + C(t)$$

і підставляємо у рівняння

$$t(C'(t)t + C(t)) = C(t)t + 2t^3.$$

В останній рівності розкриваємо дужку і скорочуємо подібні доданки

$$C'(t)t^2 + C(t)t = C(t)t + 2t^3, \quad C'(t) = 2t.$$

Звідси знаходимо

$$C(t) = \int 2t dt = t^2.$$

Маючи $C(t)$, записуємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$x_1(t) = C(t)t = t^3.$$

Додаємо до нього загальний розв'язок однорідного рівняння і одержуємо шуканий загальний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) = Ct + t^3.$$

Відповідь:

$$x = Ct + t^3$$

– загальний розв'язок рівняння, де C – довільна константа.

Приклад 1.4. Розв'язати рівняння

$$\frac{dx}{dt} + x \cos t = \sin t \cos t.$$

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку. Записуємо відповідне однорідне рівняння

$$\frac{dx}{dt} + x \cos t = 0.$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dx}{x} + \cos t dt = 0, \quad \int \frac{dx}{x} + \int \cos t dt = \ln |C|.$$

Звідси

$$\ln |x| = -\sin t + \ln |C|, \quad \ln \left| \frac{x}{C} \right| = -\sin t.$$

Таким чином знайшли загальний розв'язок однорідного рівняння

$$x_0(t) = Ce^{-\sin t}.$$

Шукаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа) у вигляді

$$x(t) = C(t)e^{-\sin t},$$

де $C(t)$ – невідома функція. Підставляємо цю функцію в неоднорідне рівняння. Для цього спочатку знаходимо

$$x'(t) = C'(t)e^{-\sin t} - C(t)e^{-\sin t} \cos t$$

і далі підстановка дає

$$C'(t)e^{-\sin t} - C(t)e^{-\sin t} \cos t + C(t)e^{-\sin t} \cos t = \sin t \cos t.$$

Скорочуємо подібні і знаходимо

$$C'(t) = e^{\sin t} \sin t \cos t.$$

Шляхом інтегрування одержуємо

$$\begin{aligned} C(t) &= \int e^{\sin t} \sin t \cos t dt = \int e^{\sin t} \sin t d \sin t = \left| s = \sin t \right| = \\ &= \int e^s ds = se^s - \int e^s ds = (s - 1)e^s = (\sin t - 1)e^{\sin t}. \end{aligned}$$

Записуємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$x_1(t) = C(t)e^{-\sin t} = \sin t - 1.$$

Враховуючи теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку, записуємо шуканий розв'язок

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) = Ce^{-\sin t} + \sin t - 1.$$

Відповідь:

$$x(t) = Ce^{-\sin t} + \sin t - 1$$

–загальний розв'язок рівняння, де C – довільна константа.

Приклад 1.5. Розв'язати рівняння

$$(t \cos x + \sin 2x)x' = 1.$$

Розв'язання. З означення диференціала функції

$$dx = x' dt$$

маємо

$$(t \cos x + \sin 2x) dx = (t \cos x + \sin 2x) x' dt.$$

Звідси

$$dt = (t \cos x + \sin 2x) dx.$$

Отже, якщо розглядати змінну t як функцію від x , то маємо лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dt}{dx} = t \cos x + \sin 2x. \quad (1.7)$$

Застосовуємо метод варіації довільної сталої. Спочатку знаходимо розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\frac{dt}{dx} = t \cos x,$$

яке є рівнянням із відокремлюваними змінними. Його загальний розв'язок має вигляд

$$t = C e^{\sin x},$$

де C – довільна константа. Частинний розв'язок рівняння (1.7) шукаємо у вигляді

$$t = C(x) e^{\sin x}, \quad (1.8)$$

де $C(x)$ – невідома функція від x . Підставляючи (1.8) в (1.7), отримуємо

$$C'(x) e^{\sin x} + C(x) e^{\sin x} \cos x - C(x) e^{\sin x} \cos x = \sin 2x,$$

або

$$C'(x) = e^{-\sin x} \sin 2x.$$

Звідси, інтегруючи за частинами, матимемо

$$\begin{aligned} C(x) &= \int e^{-\sin x} \sin 2x dx = 2 \int e^{-\sin x} \cos x \sin x dx = \\ &= 2 \int e^{-\sin x} \sin x d \sin x = |t = \sin x| = 2 \int t e^{-t} dt = 2 \int t d(-e^{-t}) = \\ &= 2 \left(-t e^{-t} + \int e^{-t} dt \right) = -2e^{-t}(t + 1) = -2e^{-\sin x}(\sin x + 1). \end{aligned}$$

Отже,

$$C(x) = -2e^{-\sin x}(1 + \sin x). \quad (1.9)$$

Підставляючи (1.9) в (1.8), отримуємо загальний розв'язок рівняння (1.7).

Відповідь:

$$t = Ce^{\sin x} - 2(1 + \sin x).$$

—загальний інтеграл рівняння.

1.2.2 Метод Коші

Метод Коші застосовується для знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1) на основі формули Коші (1.5). Для цього:

- знаходимо первісну

$$\int a(t)dt;$$

- далі визначаємо

$$\int e^{-\int a(t)dt} g(t)dt;$$

- записуємо загальний розв'язок за формулою Коші

$$x = e^{\int a(t)dt} \left(C + \int e^{-\int a(t)dt} g(t)dt \right),$$

де C — довільна константа.

Можна застосовувати також формулу Коші (1.6), оскільки вона дає загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1) у формі Коші. Формулу (1.6) доцільно застосовувати також для знаходження розв'язку початкової задачі.

Приклад 1.6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x' = 2x + e^{3t}.$$

Розв'язання. В запропонованому рівнянні

$$a(t) = 2, \quad g(t) = e^{3t}.$$

Знаходимо первісну

$$\int a(t)dt = 2t,$$

визначаємо

$$\int e^{-\int a(t)dt} g(t)dt = \int e^t dt = e^t.$$

Записуємо загальний розв'язок за формулою Коші

$$x = e^{\int a(t)dt} \left(C + \int e^{-\int a(t)dt} g(t)dt \right) = e^{2t} (C + e^t),$$

де C – довільна константа (порівняйте з результатом прикладу 1.2).

Відповідь:

$$x = e^{2t} (C + e^t)$$

– загальний розв'язок рівняння, де C – довільна константа.

Приклад 1.7. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x' + tx = t.$$

Розв'язання. Для запропонованого рівняння відповідні до (1.1) позначення такі

$$a(t) = -t, \quad g(t) = t.$$

Тоді

$$\int a(t)dt = - \int t dt = -\frac{t^2}{2},$$

$$\int g(t)e^{-\int a(t)dt} dt = \int te^{\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \int e^{\frac{t^2}{2}} dt^2 = \left| s = \frac{t^2}{2} \right| = \int e^s ds = e^s = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Використовуючи формулу Коші (1.5), записуємо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$x = e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\int te^{\frac{t^2}{2}} dt + C \right] = e^{-\frac{t^2}{2}} \left[e^{\frac{t^2}{2}} + C \right] = 1 + Ce^{-\frac{t^2}{2}},$$

де C – довільна константа.

Відповідь: загальним розв'язком рівняння є функція

$$x = 1 + Ce^{-\frac{t^2}{2}},$$

де C – довільна константа.

Приклад 1.8. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x' - x \operatorname{tg} t = \cos t.$$

Розв'язання. Для запропонованого рівняння

$$a(t) = \operatorname{tg} t, \quad g(t) = \cos t.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\int a(t)dt &= \int \operatorname{tg} t dt = -\ln |\cos t|, \\ \int g(t)e^{-\int a(t)dt} dt &= \int \cos t e^{\ln |\cos t|} dt = \int \cos^2 t dt = \\ &= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}.\end{aligned}$$

Використовуючи формулу Коші (1.5), запишемо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$\begin{aligned}x &= e^{\int \operatorname{tg} t dt} \left(\int e^{-\int \operatorname{tg} t dt} \cos t dt + C \right) = \\ &= e^{-\ln |\cos t|} \left(\int e^{\ln |\cos t|} \cos t dt + C \right) = \frac{1}{\cos t} \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C \right).\end{aligned}$$

Тут C – довільна константа.

Відповідь: Загальним розв'язком рівняння є функція

$$x = \frac{C}{\cos t} + \frac{t}{2 \cos t} + \frac{\sin t}{2},$$

де C – довільна константа.

Приклад 1.9. Розв'язати задачу Коші

$$x' - \frac{x}{t} = t^2, \quad x(2) = -2.$$

Розв'язання. Для запропонованого рівняння

$$a(t) = \frac{1}{t}, \quad g(t) = t^2.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\int a(t)dt &= \int \frac{1}{t} dt = \ln |t|, \\ \int g(t)e^{-\int a(t)dt} dt &= \int e^{-\int \frac{1}{t} dt} t^2 dt = \int t dt = \frac{t^2}{2}.\end{aligned}$$

Використовуючи формулу Коші (1.5), запишемо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$\begin{aligned}x &= e^{\int \frac{1}{t} dt} \left(\int e^{-\int \frac{1}{t} dt} t^2 dt + C \right) = \\ &= e^{\ln |t|} \left(\int e^{-\ln |t|} t^2 dt + C \right) = t \left(\frac{t^2}{2} + C \right) = Ct + \frac{t^3}{2}.\end{aligned}$$

Тут C – довільна константа.

Підставимо початкові умови $x(2) = -2$ у загальний розв'язок і одержимо

$$2C + 4 = -2.$$

Звідси $C = -3$ і

$$x(t) = \frac{t^3}{2} - 3t.$$

Покажемо, як розв'язати цю задачу за допомогою формули Коші (1.6). Для цієї задачі

$$t_0 = 2, \quad x_0 = -2.$$

Тоді

$$\int_{t_0}^t a(t) dt = \int_2^t \frac{1}{t} dt = \ln |t| \Big|_2^t = \ln |t| - \ln |2| = \ln \left| \frac{t}{2} \right|,$$

$$\int_s^t a(t) dt = \ln |t| \Big|_s^t = \ln |t| - \ln |s|,$$

$$\int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(t) dt} g(s) ds = \int_2^t e^{\ln |t| - \ln |s|} s^2 ds = t \int_2^t s ds = t \frac{s^2}{2} \Big|_2^t = \frac{t^3}{2} - 2t.$$

За формулою Коші (1.6)

$$x = \frac{t}{2} x_0 + \frac{t^3}{2} - 2t = \frac{t^3}{2} - 3t.$$

Відповідь: Розв'язком задачі Коші є

$$x(t) = \frac{t^3}{2} - 3t.$$

1.2.3 Метод Бернуллі

Метод Бернуллі полягає у тому, що ми знаходимо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1) у вигляді

$$x(t) = u(t)v(t),$$

де $u(t)$, $v(t)$ – деякі гладкі невідомі функції [1, 7]. Знаходимо похідну

$$x'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$$

і підставляємо $x(t) = u(t)v(t)$ в рівняння (1.1). Одержуємо

$$u'(t)v(t) + u(t)v'(t) = a(t)u(t)v(t) + g(t).$$

Далі групуємо доданки, які містять $u(t)$, але не містять $u'(t)$

$$u'(t)v(t) + (u(t)v'(t) - a(t)u(t)v(t)) = g(t)$$

і виносимо за спільні дужки функцію $u(t)$

$$\frac{du(t)}{dt}v(t) + \left(\frac{dv(t)}{dt} - a(t)v(t) \right) u(t) = g(t). \quad (1.10)$$

Функцію $v(t)$ знаходимо з умови рівності нулеві співвідношення в дужках

$$\frac{dv(t)}{dt} - a(t)v(t) = 0$$

так, що функція $v(t)$ є частинним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння, яке відповідає рівнянню (1.1). Наприклад,

$$v(t) = e^{\int a(t)dt}.$$

Підставляємо цю функцію в (1.10) і одержуємо

$$\frac{du(t)}{dt}e^{\int a(t)dt} = g(t).$$

Звідси

$$\frac{du(t)}{dt} = e^{-\int a(t)dt}g(t).$$

Шляхом інтегрування знаходимо

$$u(t) = \int e^{-\int a(t)dt}g(t)dt + C,$$

де C – довільна константа. Так методом Бернуллі одержуємо формулу Коші (1.5)

$$x(t) = v(t)u(t) = e^{\int a(t)dt} \left(C + \int e^{-\int a(t)dt}g(t)dt \right).$$

Запишемо алгоритм методу Бернуллі:

- на першому кроці підставляємо $x(t) = u(t)v(t)$ в рівняння (1.1), де $u(t)$, $v(t)$ – деякі невідомі функції;
- на другому кроці групуємо в спільні дужки доданки, які містять $u(t)$, але не містять $u'(t)$, виносимо за дужки функцію $u(t)$ (рівність (1.10)), співвідношення в дужках прирівнюємо до нуля. Одержуємо рівняння для знаходження $v(t)$;
- на третьому кроці розв'язуємо диференціальне рівняння, знайдене на другому кроці і знаходимо $v(t)$;



Рис. 1.2: Сім'я видатних математиків: Якоб Бернуллі (1655 – 1748), Йоганн Бернуллі (1667 – 1748), Даніель Бернуллі (1700 – 1782). *Всі зображення: Вікіпедія / суспільне надбання; автори: Е. Гандманн (Якоб Бернуллі), Ж. Ж. Найд (Йоганн Бернуллі, Даніель Бернуллі)*

- на четвертому кроці підставляємо знайдену функцію $v(t)$ в рівняння (1.10), записуємо диференціальне рівняння для знаходження функції $u(t)$, визначаємо його загальний розв'язок;
- на останньому кроці в рівність $x(t) = u(t)v(t)$ підставляємо функцію $u(t)$, яку ми знайшли на четвертому кроці, а також функцію $v(t)$, яку ми знайшли на другому кроці і таким способом записуємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1).

Приклад 1.10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x' = 2x + e^{3t}.$$

Розв'язання. За методом Бернуллі шукаємо загальний розв'язок рівняння у вигляді

$$x = u(t)v(t),$$

де $u(t)$, $v(t)$ – гладкі функції. Знаходимо похідну

$$x'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$$

і підставляємо $x(t) = u(t)v(t)$ в задане рівняння. Маємо

$$u'(t)v(t) + u(t)v'(t) = 2u(t)v(t) + e^{3t}.$$

Групуємо доданки, які містять $u(t)$, але не містять $u'(t)$

$$u'(t)v(t) + (v'(t) - 2v(t))u(t) = e^{3t}. \quad (1.11)$$

Функцію $v(t)$ шукаємо з умови рівності нулевій виразу в дужках в (1.11)

$$v' = 2v.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є

$$v(t) = C_0 e^{2t},$$

де C_0 – довільна константа (приклад 1.2). Підставляємо $C_0 = 1$ і одержуємо

$$v(t) = e^{2t}.$$

Тоді з (1.11) маємо

$$u'(t)e^{2t} = e^{3t}.$$

Звідси

$$u'(t) = e^t, \quad u(t) = e^t + C,$$

де C – довільна константа. Звідси

$$x(t) = u(t)v(t) = e^{2t}(e^t + C).$$

Порівняйте результат з прикладом 1.2.

Відповідь:

$$x = e^{2t}(e^t + C)$$

– загальний розв'язок рівняння, де C – довільна константа.

Приклад 1.11. Знайти розв'язок задачі Коші

$$t(t-1)x' + x = t^2(2t-1), \quad x(2) = 4. \quad (1.12)$$

Розв'язання. Згідно методу Бернуллі шукаємо загальний розв'язок (1.12) у вигляді

$$x = u(t)v(t),$$

де $u(t)$, $v(t)$ – деякі гладкі невідомі функції. Знаходимо похідну

$$x'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$$

і підставляємо $x(t) = u(t)v(t)$ в рівняння (1.12). Маємо

$$t(t-1)(u'(t)v(t) + u(t)v'(t)) + u(t)v(t) = t^2(2t-1).$$

Далі групуємо доданки, які містять $u(t)$, але не містять $u'(t)$. В дужках виносимо $u(t)$ за дужки і отримуємо

$$t(t-1)v(t)u'(t) + [t(t-1)v'(t) + v(t)]u(t) = t^2(2t-1). \quad (1.13)$$

Функцію $v(t)$ знаходимо з умови

$$t(t-1)v'(t) + v(t) = 0.$$

Маємо рівняння з відокремленими змінними. Запишемо його у вигляді

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{1}{t(t-1)},$$

інтегруємо ліву і праву частини, знаходимо інтеграли

$$\int \frac{v'(t)}{v(t)} dt = \int \frac{1}{v(t)} dv(t) = \ln |v(t)|,$$

$$\int \frac{1}{t(t-1)} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} \right) dt = \ln |t| - \ln |t-1|,$$

одержуємо

$$\ln |v(t)| = \ln |t| - \ln |t-1| + \ln |C_0|,$$

де C_0 – довільна константа. Звідси

$$|v(t)| = \left| \frac{C_0 t}{t-1} \right|.$$

Враховуємо те, що C_0 – довільна константа і одержуємо загальний розв'язок

$$v(t) = \frac{C_0 t}{t-1}.$$

Вибираємо будь-який частинний розв'язок. Для цього в останньому співвідношенні виберемо $C_0 = 1$ і одержимо

$$v(t) = \frac{t}{t-1}.$$

Знайдену функцію підставляємо в (1.13). Маємо рівняння

$$u'(t) = 2t - 1,$$

з якого знаходимо функцію

$$u(t) = t^2 - t + C,$$

де C – довільна константа. Отже, загальний розв'язок рівняння (1.12) має вигляд

$$x(t) = u(t)v(t) = (t^2 - t + C) \frac{t}{t-1}.$$

Розкриваючи дужки, його можна записати так

$$x(t) = \frac{Ct}{t-1} + t^2.$$

Використовуючи початкову умову $x(2) = 4$, отримуємо

$$4 = 2C + 4,$$

звідки $C = 0$. Отже, розв'язком задачі Коші є функція

$$x = t^2.$$

Відповідь:

$$x = t^2.$$

1.2.4 Метод Ейлера

Метод Ейлера дозволяє звести лінійне диференціальне рівняння (1.1) до рівняння першого порядку в нормальній формі найпростішого вигляду, а саме, до рівняння, в правій частині якого маємо відому функцію тільки від незалежної змінної [1, 7]. Як відомо, диференціальне рівняння першого порядку в нормальній формі, права частина якого залежить лише від незалежної змінної, розв'язується за означенням первісної і неозначений інтеграл від правої частини визначає загальний розв'язок такого рівняння. Для реалізації такого підходу слід знайти спеціальну функцію, яка називається **інтегрувальним множником**, домножити на неї ліву і праву частини рівняння (1.1). Далі, використовуючи теорему про похідну від добутку двох функцій, одержати диференціальне рівняння найпростішого вигляду. Тому метод Ейлера також називають методом інтегрувального множника.

Розглянемо спочатку рівняння (1.1) за умови, що функція $a(t)$ є постійною, тобто $a(t) = a$, де a – константа. Помітимо, що

$$\frac{d}{dt} (e^{-at}x) = e^{-at} \frac{dx}{dt} - e^{-at}ax. \quad (1.14)$$

Тому, якщо записати рівняння (1.1) як

$$\frac{dx}{dt} - ax = g(t),$$

домножити його на e^{-at} і застосувати (1.14), то одержимо

$$\frac{d}{dt} (e^{-at}x) = e^{-at}g(t).$$

Звідси за означенням первісної

$$e^{-at}x(t) = C + \int e^{-at}g(t)dt.$$

Отже, e^{-at} є інтегрувальним множником і загальний розв'язок рівняння (1.1) за умови, що $a(t) = a$, має вигляд

$$x(t) = e^{at} \left(C + \int e^{-\int a(t)dt} g(t) dt \right).$$

Приклад 1.12. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x' = -2x + e^t.$$

Розв'язання. Помітимо, що

$$(e^{2t}x)' = e^{2t}x' + 2e^{2t}x.$$

Запишемо запропоноване рівняння як

$$x' + 2x = e^t,$$

домножимо його на e^{2t} і одержимо диференціальне рівняння

$$(e^{2t}x)' = e^{3t}.$$

За означенням первісної

$$e^{2t}x = C + \int e^{3t} dt,$$

де C – довільна константа. Звідси

$$e^{2t}x = C + \frac{1}{3}e^{3t}.$$

Записуємо загальний розв'язок рівняння

$$x = e^{-2t}C + \frac{1}{3}e^t.$$

Відповідь:

$$x = e^{-2t}C + \frac{1}{3}e^t$$

– загальний розв'язок рівняння, де C – довільна константа.

Розглянемо тепер загальний випадок. Домножимо ліву і праву частину рівняння (1.1) на деяку функцію $\mu(t)$, яка називається **інтегрувальним множником**

$$\mu(t) \frac{dx}{dt} = \mu(t)a(t)x + \mu(t)g(t).$$

Перенесемо доданки, які містять шукану функцію x і її похідну в ліву частину рівності

$$\mu(t) \frac{dx}{dt} - \mu(t)a(t)x = \mu(t)g(t). \quad (1.15)$$

Підберемо інтегрувальний множник $\mu(t)$ так, щоб ліва частина рівності (1.15) була похідною функції $\mu(t)x$, тобто щоб виконувалась умова

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)x) = \mu(t)\frac{dx}{dt} - \mu(t)a(t)x. \quad (1.16)$$

Тоді з (1.15) маємо

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)x) = \mu(t)g(t). \quad (1.17)$$

Ідея методу полягає у тому, що якщо вдається підібрати функцію $\mu(t)$, для якої справджується рівність (1.16), то з рівняння (1.17) за означенням первісної можемо знайти загальний розв'язок диференціального рівняння (1.1).

Шукаємо інтегрувальний множник $\mu(t)$ з (1.16). В лівій частині рівності (1.16) розкриваємо похідну від добутку функцій

$$\mu'(t)x + \mu(t)x' = \mu(t)x' - \mu(t)a(t)x.$$

Далі скорочуємо подібні доданки

$$\mu'(t)x = -\mu(t)a(t)x$$

і ділимо ліву і праву частини рівності на x . Одержуємо рівняння для знаходження інтегрувального множника

$$\mu'(t) = -\mu(t)a(t).$$

Це рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням. Знаходимо його ненульовий частинний розв'язок

$$\mu(t) = e^{-\int a(t)dt}. \quad (1.18)$$

Для цього можемо застосувати формулу (1.3), в якій $C = 1$ і функцію $a(t)$ замінюємо на $-a(t)$.

Далі інтегруємо рівність (1.17) і одержуємо

$$\mu(t)x = \int \mu(t)g(t)dt + C. \quad (1.19)$$

Тут C – довільна константа. Підставляємо в (1.19) знайдений інтегрувальний множник (1.18)

$$e^{-\int a(t)dt}x = \int e^{-\int a(t)dt}g(t)dt + C.$$

Звідси одержуємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1) у вигляді формули Коші

$$x(t) = e^{\int a(t)dt} \left(C + \int e^{-\int a(t)dt}g(t)dt \right).$$

Запишемо алгоритм методу Ейлера:

- на першому кроці домножимо ліву і праву частину рівняння (1.1) на деяку функцію $\mu(t)$, перенесемо доданки, які містять шукану функцію x і її похідну в ліву частину рівності і одержуємо рівність (1.15);
- на другому кроці накладаємо умову на знаходження функції $\mu(t)$: ліва частина рівності (1.15) співпадає з похідною функції $\mu(t)x$. Так одержуємо рівності (1.16), (1.17);
- на третьому кроці в лівій частині (1.16) розкриваємо похідну від добутку функцій $\mu(t)x$, скорочуємо подібні доданки, ділимо ліву і праву частину рівності на x . Так одержуємо диференціальне рівняння для знаходження інтегрувального множника $\mu(t)$. Розв'язуємо його і знаходимо частинний розв'язок (1.18);
- на четвертому кроці шляхом інтегрування з рівняння (1.17) обчислюємо $\mu(t)x$ (формула (1.19)), підставляємо в $\mu(t)x$ знайдену на попередньому кроці функцію $\mu(t)$ і визначаємо $x(t)$. Таким способом одержуємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1).

Можемо зробити висновок, що розглянуті вище методи Лагранжа, Коші, Бернуллі, Ейлера знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1) є еквівалентними, оскільки приводять до формули Коші (1.5).

Приклад 1.13. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x' + tx = t.$$

Розв'язання. Застосуємо метод Ейлера. Домножимо ліву і праву частини рівняння на функцію $\mu(t)$

$$\mu(t)x' + \mu(t)tx = \mu(t)t.$$

Накладемо умову

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)x) = \mu(t)x' + \mu(t)tx.$$

Цю умову можна записати так

$$\mu'(t)x + \mu(t)x' = \mu(t)x' + \mu(t)tx.$$

Звідси одержуємо

$$\mu'(t)x = \mu(t)tx.$$

Маємо диференціальне рівняння для знаходження інтегрувального множника

$$\mu'(t) = \mu(t)t.$$

Це рівняння є рівнянням з відокремленими змінними. Його розв'язком є функція

$$\mu(t) = e^{\int t dt} = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Отже, диференціальне рівняння має вигляд

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)x) = \mu(t)t.$$

Підставляємо інтегрувальний множник

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{t^2}{2}}x) = e^{\frac{t^2}{2}}t,$$

інтегруємо ліву і праву частини

$$e^{\frac{t^2}{2}}x = \int e^{\frac{t^2}{2}}t dt + C.$$

Тут C – довільна константа. Помічаємо, що

$$\int e^{\frac{t^2}{2}}t dt = \int e^{\frac{t^2}{2}}d\frac{t^2}{2} = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Тому

$$e^{\frac{t^2}{2}}x = e^{\frac{t^2}{2}} + C.$$

У такий спосіб знаходимо загальний розв'язок

$$x = 1 + Ce^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Відповідь:

Загальний розв'язок

$$x = 1 + Ce^{-\frac{t^2}{2}},$$

де C – довільна константа

Приклад 1.14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x' = 2x + e^{3t}.$$

Розв'язання. За методом Ейлера, домножимо ліву і праву частини рівняння на функцію $\mu(t)$

$$\mu(t)x' = 2\mu(t)x + \mu(t)e^{3t}.$$

Накладемо умову

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)x) = \mu(t)x' - 2\mu(t)x.$$

Цю умову запишемо так

$$\mu'(t)x + \mu(t)x' = \mu(t)x' - 2\mu(t)x.$$

Звідси маємо

$$\mu'(t)x = -2\mu(t)x.$$

Поділивши на x праву і ліву частини останнього рівняння, отримуємо диференціальне рівняння для знаходження інтегрувального множника

$$\mu'(t) = -2\mu(t).$$

Його частинним розв'язком є функція

$$\mu(t) = e^{-2t}.$$

Отже, задане диференціальне рівняння має вигляд

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)x) = \mu(t)e^{3t}.$$

Підставляємо інтегрувальний множник

$$\frac{d}{dt}(e^{-2t}x) = e^t.$$

Інтегруємо останній вираз і отримуємо

$$e^{-2t}x = e^t + C.$$

Тут C – довільна константа. Звідси

$$x(t) = e^{2t}(e^t + C).$$

Порівняйте результат розв'язування з результатом прикладу 1.2.

Відповідь:

$$x = e^{2t}(e^t + C)$$

–загальний розв'язок рівняння, де C – довільна константа.

1.3 Метод невизначених коефіцієнтів

Метод невизначених коефіцієнтів застосовується для знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.1) у випадку, коли функція $a(t)$ є постійною, а функція $g(t)$ є неперервною функцією спеціального вигляду, $t \in \mathbb{R}$. Отже, розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dx}{dt} = ax + g(t), \tag{1.20}$$

де $a \in \mathbb{R}$ – постійна, $g(t)$ – неперервна функція, $t \in \mathbb{R}$.

Спочатку запишемо відповідне до (1.20) однорідне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

і знаходимо його загальний розв'язок

$$x_0(t) = Ce^{at}, \quad (1.21)$$

де C – довільна константа. Далі розглянемо (1.20) у вигляді

$$\frac{dx}{dt} - ax = g(t).$$

За методом Ейлера домножимо ліву і праву частини останньої рівності на e^{-at} . Тоді

$$e^{-at} \frac{dx}{dt} - ae^{-at}x = e^{-at}g(t).$$

Помітимо, що

$$e^{-at} \frac{dx}{dt} - ae^{-at}x = \frac{d}{dt}(e^{-at}x).$$

Тому

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}g(t)) = e^{-at}g(t).$$

Інтегруючи останню рівність, одержуємо

$$e^{-at}x = \int e^{-at}g(t)dt,$$

звідки можемо зробити висновок, що частинний розв'язок рівняння (1.20) має задовольняти рівності

$$x_1(t) = e^{at} \int e^{-at}g(t)dt. \quad (1.22)$$

Випадок 1. Припустимо, що в рівнянні (1.20)

$$g(t) = p_0e^{\gamma t},$$

де p_0, γ – дійсні числа. Підставимо таку функцію в (1.22)

$$x_1(t) = p_0e^{at} \int e^{(\gamma-a)t}dt.$$

Тоді, якщо $\gamma = a$, то частинний розв'язок рівняння (1.20) має вигляд

$$x_1(t) = q_0te^{\gamma t}. \quad (1.23)$$

Тут q_0 – константа. Якщо $\gamma \neq a$, то

$$x_1(t) = \frac{p_0}{\gamma - a} e^{at} e^{(\gamma-a)t} = \frac{p_0}{\gamma - a} e^{\gamma t}.$$

Тоді частинний розв'язок рівняння має вигляд (1.20)

$$x_1(t) = q_0 e^{\gamma t}. \quad (1.24)$$

Коефіцієнт q_0 в виразах (1.23), (1.24) визначаємо підстановкою в рівняння (1.20).

Приклад 1.15. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x' = 2x + e^{3t}.$$

Розв'язання. В прикладі 1.2 ми показали, що

$$x_0(t) = C e^{2t}$$

– загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$x' = 2x,$$

де C – довільна константа. Оскільки для заданого рівняння $a = 2$, $\gamma = 3$, тому, застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів, шукаємо за (1.24) частинний розв'язок як

$$x = Q e^{3t},$$

де Q – невідомий коефіцієнт. Підстановка у задане рівняння дає рівність

$$3Q e^{3t} = 2Q e^{3t} + e^{3t}.$$

Зібравши подібні доданки і поділивши одержаний вираз на e^{3t} , отримаємо $Q = 1$. Отже,

$$x_1(t) = e^{3t}$$

– частинний розв'язок рівняння. За теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку одержуємо

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) = C e^{2t} + e^{3t}.$$

Відповідь:

$$x = C e^{2t} + e^{3t}$$

– загальний розв'язок рівняння, де C – довільна константа.

Випадок 2. Припустимо, що в рівнянні (1.20)

$$g(t) = P_m(t),$$

де

$$P_m(t) = p_0 t^m + p_1 t^{m-1} + \dots + p_{m-1} t + p_m,$$

– многочлен m -го степеня, $m \geq 0$.

Якщо $a = 0$, то (1.22) має вигляд

$$x_1(t) = \int P_m(t) dt,$$

де первісна є многочленом $m + 1$ -го степеня, в якій коефіцієнт при нульовій степені можна взяти рівним нулеві.

У випадку $a \neq 0$ отримаємо (1.22) у вигляді

$$x_1(t) = e^{at} \int e^{-at} P_m(t) dt.$$

Інтегруємо за частинами

$$\begin{aligned} \int e^{-at} P_m(t) dt &= -\frac{1}{a} \int P_m(t) de^{-at} = -\frac{1}{a} \left(e^{-at} P_m(t) - \int P_m(t) de^{-at} \right) = \\ &= -\frac{1}{a} \left(e^{-at} P_m(t) - \int e^{-at} dP_m(t) \right), \end{aligned}$$

диференціюємо $P_m(t)$ і виражаємо $dP_m(t)$ як добуток многочлена $m - 1$ -го степеня на dt , до одержаного інтегралу знову застосовуємо інтегрування за частинами. Продовжуючи інтегрування, пересвідчуємося що частинний розв'язок є многочленом m -го степеня.

Маємо проаналізувати такі варіанти: якщо $a = 0$, то частинний розв'язок рівняння (1.20) шукаємо у вигляді

$$x_1(t) = tQ_m(t),$$

інакше у вигляді

$$x_1(t) = Q_m(t).$$

Тут

$$Q_m(t) = q_0 t^m + q_1 t^{m-1} + \dots + q_{m-1} t + q_m$$

– многочлен m -го степеня, коефіцієнти якого $q_0, q_1, \dots, q_{m-1}, q_m$ слід знайти так, щоб $x_1(t)$ одержати як частинний розв'язок рівняння (1.20).

Приклад 1.16. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x' = x + t^2 + 1.$$

Розв'язання. Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. Спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння

$$x' = x.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$x_0(t) = Ce^t,$$

де C – довільна константа. Так як в цьому рівнянні

$$g(t) = t^2 + 1,$$

то за методом невизначених коефіцієнтів частинний розв'язок

$$x(t) = At^2 + Bt + D.$$

Тут A, B, D – невідомі коефіцієнти. Знаходимо

$$x'(t) = 2At + B$$

і підстановка в рівняння дає

$$2At + B = At^2 + Bt + D + t^2 + 1.$$

Звідси маємо тотожність

$$t^2(A + 1) + t(B - 2A) + 1 - B + D = 0,$$

яка справджується при

$$A + 1 = 0, \quad B - 2A = 0, \quad 1 - B + D = 0.$$

Тому

$$A = -1, \quad B = -2, \quad D = -3.$$

Частинний розв'язок рівняння записується так

$$x_1(t) = -t^2 - 2t - 3.$$

Отже, загальний розв'язок заданого лінійного неоднорідного диференціального рівняння такий

$$x(t) = Ce^t - t^2 - 2t - 3,$$

де C – довільна константа.

Відповідь: Загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x(t) = Ce^t - t^2 - 2t - 3,$$

де C – довільна константа.

Випадок 3. Припустимо, що

$$g(t) = e^{\gamma t} P_m(t),$$

де

$$P_m(t) = p_0 t^m + p_1 t^{m-1} + \dots + p_{m-1} t + p_m,$$

– многочлен m -го степеня, $m \geq 0$, γ – дійсне число. Випадок 3 узагальнює випадки 1 і 2. Підстановка функції $g(t)$ в (1.22) дає

$$x_1(t) = e^{at} \int e^{(\gamma-a)t} P_m(t) dt.$$

Далі, подібно до випадків 1, 2, аналізуємо вигляд частинного розв'язку рівняння.

Якщо $\gamma = a$, то частинний розв'язок рівняння (1.20) шукаємо у вигляді

$$x_1(t) = t e^{\gamma t} Q_m(t),$$

інакше – у вигляді

$$x_1(t) = e^{\gamma t} Q_m(t).$$

Тут

$$Q_m(t) = q_0 t^m + q_1 t^{m-1} + \dots + q_{m-1} t + q_m$$

– многочлен m -го степеня. Невизначені коефіцієнти многочлена $Q_m(t)$ знаходимо шляхом підстановки в рівняння (1.20). Далі отримуємо рівність, в якій скорочуємо e^{at} , збираємо доданки при однакових степенях t^j , $j = 0, 1, \dots, m$ і прирівнюємо їх до нуля. Одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження q_0, q_1, \dots, q_m .

Випадок 4. Нехай

$$g(t) = p_0 \cos \beta t + p_1 \sin \beta t,$$

де $p_0, p_1, \beta \neq 0$ – дійсні числа. У цьому випадку частинний розв'язок рівняння (1.20) шукаємо (1.20)

$$x_1(t) = e^{at} \int e^{-at} (p_0 \cos \beta t + p_1 \sin \beta t) dt.$$

Інтеграл знаходимо за допомогою інтегрування за частинами. Отже, частинний розв'язок рівняння (1.20) шукаємо у вигляді

$$x_1(t) = q_0 \cos \beta t + q_1 \sin \beta t,$$

де q_0, q_1 – невизначені коефіцієнти.

Випадок 5. Припустимо, що

$$g(t) = e^{\gamma t} (P_m(t) \cos \beta t + R_s(t) \sin \beta t),$$

$$P_m(t) = p_0 t^m + p_1 t^{m-1} + \dots + p_{m-1} t + p_m, \quad (m \geq 0),$$

$$R_s(t) = r_0 t^s + r_1 t^{s-1} + \dots + r_{s-1} t + r_s, \quad (s \geq 0),$$

– многочлени m -го степеня і s -го степеня, $m \geq 0$, $s \geq 0$, $\gamma, \beta \neq 0$ – дійсні числа. Знайдемо максимальний степінь многочленів

$$M = \max\{m, s\}$$

і частинний розв’язок рівняння (1.20) шукаємо у вигляді

$$x_1(t) = e^{\gamma t} (Q_M(t) \cos \beta t + N_M(t) \sin \beta t).$$

Тут

$$Q_M(t) = q_0 t^M + q_1 t^{M-1} + \dots + q_{M-1} t + q_M,$$

$$N_M(t) = n_0 t^M + n_1 t^{M-1} + \dots + n_{M-1} t + n_M,$$

– многочлени M -го степеня, коефіцієнти яких $q_0, q_1, \dots, q_{M-1}, q_M, n_0, n_1, \dots, n_{M-1}, n_M$ слід визначити за допомогою підстановки так $x_1(t)$ в рівняння (1.20), щоб одержати частинний розв’язок рівняння (1.20).

Обґрунтування випадку 5 проводиться аналогічно до обґрунтування випадку 3. При цьому припускаємо, без обмежень на загальність міркувань, що $m = s = M$ і застосовуємо інтегрування за частинами для інтегралів вигляду

$$\begin{aligned} & \int t^k e^{\gamma t} (C \cos \beta t + D \sin \beta t) dt = \\ & = t^k e^{\gamma t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t) - \int e^{\gamma t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t) dt^k = \\ & = t^k e^{\gamma t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t) - \frac{1}{k} \int t^{k-1} e^{\gamma t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t) dt, \end{aligned}$$

де C, D – константи,

$$A = \frac{\gamma C - \beta D}{\beta^2 + \gamma^2}, \quad B = \frac{\beta C + \gamma D}{\beta^2 + \gamma^2}, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Випадок 6. Припустимо, що в рівнянні (1.20) функція $g(t)$ не задовольняє жодному з попередніх випадків, але її можемо подати як суму неперервних функцій

$$g(t) = g^{(1)}(t) + g^{(2)}(t) + \dots + g^{(r)}(t),$$

де кожна з функцій $g^{(1)}(t), g^{(2)}(t), \dots, g^{(r)}(t)$ підпадає під один з п’яти випадків, за якого застосовується метод невизначених коефіцієнтів. Тоді

1. для кожної функції $g^{(1)}(t), g^{(2)}(t), \dots, g^{(r)}(t)$ знаходимо методом невизначених коефіцієнтів частинний розв’язок $x^{(i)}(t)$ лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = ax + g^{(i)}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r;$$

2. конструємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = ax + g(t), \quad i = 1, 2, \dots, r;$$

як суму частинних розв'язків, знайдених на попередньому кроці

$$\bar{x}(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t) + \dots + x^{(r)}(t).$$

Викладений тут метод невизначених коефіцієнтів для лінійного неоднорідного рівняння першого порядку є частинним випадком методу невизначених коефіцієнтів для лінійного неоднорідного диференціального рівняння вищих порядків і для систем лінійних диференціальних рівнянь.

1.4 Випадок лінійного відносно функції диференціального рівняння

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду [1, 7]

$$f'(x) \frac{dx}{dt} = a(t)f(x) + g(t).$$

Тут $a(t)$, $g(t)$ – неперервні функції, $g(t)$ – неперервно диференційована функція, $t \in \mathbb{R}$. Заміна

$$z = f(x), \quad \frac{dz}{dt} = f'(x) \frac{dx}{dt}$$

зводить таке рівняння до лінійного

$$\frac{dz}{dt} = a(t)z + g(t).$$

Приклад 1.17. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} + (2 - t) \ln x = t(e^{-2t} - e^{\frac{t^2}{2}}).$$

Розв'язання. Робимо заміну змінних $z = \ln x$. Тоді

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{x} \frac{dx}{dt}.$$

Одержуємо рівняння

$$\frac{dz}{dt} = (t - 2)z + t(e^{-2t} - e^{\frac{t^2}{2}}).$$

Таке рівняння є лінійним.

Розв'язуємо спочатку однорідне рівняння

$$\frac{dz}{dt} = (t - 2)z, \quad \frac{dz}{z} = (t - 2)dt.$$

Звідси

$$\ln |z| = \frac{t^2}{2} - 2t + \ln C, \quad \ln \left| \frac{z}{C} \right| = \frac{t^2}{2} - 2t,$$
$$z_0(t) = Ce^{\frac{t^2}{2} - 2t}.$$

Застосуємо метод Лагранжа для знаходження частинного розв'язку

$$z(t) = C(t)e^{\frac{t^2}{2} - 2t}.$$

$$z'(t) = C'(t)e^{\frac{t^2}{2} - 2t} + C(t)e^{\frac{t^2}{2} - 2t}(t - 2).$$

Підставимо $z(t)$, $z'(t)$ у рівняння. Отримаємо

$$C'(t)e^{\frac{t^2}{2} - 2t} = t(e^{-2t} - e^{\frac{t^2}{2}}),$$

звідки

$$C'(t) = t \left(e^{-\frac{t^2}{2}} - e^{2t} \right).$$

Інтегруємо останню рівність

$$C(t) = \int te^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int te^{2t} dt.$$

Знайдемо перший інтеграл.

$$\int te^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int e^{-\frac{t^2}{2}} d\frac{t^2}{2} = -e^{-\frac{t^2}{2}},$$

$$\int te^{2t} dt = |s = 2t| = \frac{1}{4} \int se^s ds = \frac{1}{4} \int sde^s =$$
$$= \frac{1}{4}(se^s - \int e^s ds) = \frac{1}{4}e^s(s - 1) = \frac{1}{4}e^{2t}(2t - 1).$$

Отже,

$$C(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{1}{4}e^{2t}(2t - 1),$$

$$z_1(t) = C(t)e^{\frac{t^2}{2} - 2t} = -(e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{1}{4}e^{2t}(2t - 1))e^{\frac{t^2}{2} - 2t} = -(e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{\frac{t^2}{2}}(2t - 1)).$$

$$z(t) = z_0(t) + z_1(t) = Ce^{\frac{t^2}{2} - 2t} - e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{\frac{t^2}{2}}(2t - 1).$$

Оскільки $z = \ln x$, то

$$\ln x = Ce^{\frac{t^2}{2}-2t} - e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{\frac{t^2}{2}}(2t - 1)$$

буде загальним інтегралом рівняння.

Відповідь: Загальний інтегралом рівняння

$$\ln x = Ce^{\frac{t^2}{2}-2t} - e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{\frac{t^2}{2}}(2t - 1),$$

C – довільна константа

1.5 Питання, тести для самоконтролю

1. Наведіть означення лінійного диференціального рівняння першого порядку.
2. Сформулюйте основні властивості розв'язків лінійного диференціального рівняння першого порядку.
3. Опишіть методику розв'язування лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку.
4. Сформулюйте основні етапи методу варіації довільної сталої (методу Лагранжа).
5. Наведіть формулу Коші загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку.
6. Запишіть формулу Коші у формі Коші.
7. У чому полягає метод Коші знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку?
8. У чому полягає ідея методу Бернуллі знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку? Як ця ідея відображається при розв'язуванні диференціального рівняння Бернуллі?
9. Сформулюйте основні етапи методу Ейлера знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку.

1.6 Задачі для самостійної роботи

Знайти загальні розв'язки або загальні інтеграли наведених нижче рівнянь. В задачах 6, 9, 10, 13, 22 знайти розв'язок задачі Коші.

1. $x' = t^2x$
2. $x' = (\ln t)x$
3. $\frac{dx}{dt} - e^t x = 0$
4. $x' + x = e^{-2t}$
5. $\frac{dx}{dt} - 2tx = 1$
6. $tx' + x = t \cos t, x(\pi/2) = 1$
7. $x'(t + \ln x) = 1$
8. $t \ln t \frac{dx}{dt} - x = t(\ln t - 1)$
9. $x' + \operatorname{tg} tx = t \cos^2 t, x(0) = 1$
10. $(x^2 - 6t)x' + 2x = 0, x(0) = -1$
11. $(x - x^2)dt + (2tx^2 - t - x^2)dx = 0$
12. $\sec^2 x \frac{dx}{dt} = \operatorname{tg} x + 2e^{3t}, \sec x = \frac{1}{\cos x}$
13. $dt + (t - e^{-x} \sec^2 x)dx = 0, x(2) = 0$
14. $\frac{dx}{dt} - x = 2t - t^2$
15. $x'(t + \operatorname{ctg} x) = 1$
16. $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = \frac{\sin t}{t^2}$
17. $x' \sin t - x = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$
18. $\sec^2 x \frac{dx}{dt} + t \operatorname{tg} x = t$
19. $t \cos t \frac{dx}{dt} + x(t \sin t + \cos t) = 1$
20. $\frac{dx}{dt} = 3x + te^t$
21. $\frac{dx}{dt} = -2x + t^2 - 3t + 4$
22. $\frac{dx}{dt} = x + t - 1, x(0) = 1$
23. $x^2x' + \frac{1}{3}x^3 = te^t$

З метою вдосконалення практичних навичок пропонується виконати додаткові вправи, що містяться у літературі: [3, 8, 9].

Тема 2

Диференціальні рівняння Бернуллі і Ріккати

2.1 Диференціальне рівняння Бернуллі

Наведемо таке означення [1, 7].

Означення 2.1. Диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)x^k \quad (2.1)$$

називається *диференціальним рівнянням Бернуллі*. Тут $a(t)$, $b(t)$ – неперервні функції.

Ділимо ліву і праву частини рівняння на x^k

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)x^k.$$

У цьому випадку одержуємо рівняння вигляду

$$x^{-k} \frac{dx}{dt} = a(t)x^{1-k} + b(t).$$



Рис. 2.1: Якоб Бернуллі (1655 – 1748), Якопо Ріккати (1676 – 1705). *Всі зображення: Вікіпедія / суспільне надбання; автори Ніколаус Бернуллі (Якоб Бернуллі), інший – невідомий.*

Так як

$$\frac{d}{dt}x^{1-k} = (1-k)x^{-k}\frac{dx}{dt},$$

то

$$x^{-k}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1-k}\frac{d}{dt}x^{1-k}.$$

Звідси

$$\frac{1}{1-k}\frac{d}{dt}x^{1-k} = a(t)x^{1-k} + b(t).$$

Робимо заміну змінних $z = x^{1-k}$. Одержали лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dz}{dt} = (1-k)a(t)z + (1-k)b(t).$$

Заміна

$$x = z^m, \quad m = \frac{1}{1-k}$$

дозволяє звести рівняння Бернуллі до лінійного неоднорідного диференціального рівняння. При $0 < k < 1$ рівняння *Бернуллі* має особливий розв'язок $x(t) \equiv 0$.

Приклад 2.1. Розв'язати рівняння

$$x' - tx = -tx^3$$

Розв'язання. Ділимо обидві частини рівняння на x^3 і одержуємо

$$\frac{x'}{x^3} - t\frac{1}{x^2} = -t.$$

Робимо заміну

$$\frac{1}{x^2} = z, \quad -\frac{2x'}{x^3} = z'.$$

Звідси

$$\frac{x'}{x^3} = -\frac{1}{2}z'.$$

Після підстановки одержуємо

$$-\frac{1}{2}z' - tz = -t.$$

У такий спосіб приходимо до лінійного диференціального рівняння

$$z' = -2tz + 2t.$$

Розв'язуємо його одним з методів. Одержуємо загальний розв'язок

$$z = 1 + Ce^{-t^2}.$$

Звідси отримуємо загальний інтеграл рівняння Бернуллі

$$\frac{1}{x^2} = 1 + Ce^{-t^2}.$$

Відповідь: Загальний інтеграл

$$\frac{1}{x^2} = 1 + Ce^{-t^2},$$

де C – довільна константа.

Приклад 2.2. Розв'язати рівняння

$$x' - x = (1 + t)x^2$$

Розв'язання. Аналізуючи запропоноване диференціальне рівняння, можна зробити висновок, що це є рівняння Бернуллі при $n = 2$. Ділимо обидві частини рівняння на x^2 і одержуємо

$$-x^{-2}x' + \frac{1}{x} = -(1 + t).$$

За допомогою заміни змінних одержуємо лінійне рівняння

$$\frac{dz}{dt} + z = -(1 + t), \quad \frac{1}{x} = z.$$

Його розв'язком є

$$z = e^{-t} \left[\int (-1 - t)e^t dt + C \right] = Ce^{-t} - t.$$

Отже,

$$\frac{1}{x} = Ce^{-t} - t$$

є загальним інтегралом заданого рівняння,

$$x = \frac{1}{Ce^{-t} - t}$$

є його загальним розв'язком.

Відповідь: Загальний розв'язок

$$x = \frac{1}{Ce^{-t} - t},$$

C – довільна константа.

Рівняння Бернуллі можна проінтегрувати методом Бернуллі за допомогою підстановки

$$x(t) = u(t)v(t),$$

де $u(t)$, $v(t)$ – неперервно диференційовані функції. Знаходимо похідну

$$x'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t).$$

Підставляємо $x(t) = u(t)v(t)$ в рівняння (2.1). Одержуємо

$$u'(t)v(t) + u(t)v'(t) = a(t)u(t)v(t) + b(t)u^k(t)v^k(t).$$

Далі групуємо другий та третій доданки і виносимо за спільні дужки функцію $u(t)$

$$u'(t)v(t) + (v'(t) - a(t)v(t))u(t) = b(t)u^k(t)v^k(t). \quad (2.2)$$

Функція

$$v(t) = e^{\int a(t)dt}$$

є частинним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння

$$\frac{dv(t)}{dt} - a(t)v(t) = 0.$$

Підставляємо цю функцію в (2.2) і одержуємо

$$u'(t)e^{\int a(t)dt} = b(t)e^{k \int a(t)dt} u^k(t).$$

Звідси

$$u'(t) = b(t)e^{(k-1) \int a(t)dt} u^k(t).$$

Відокремлюючи змінні, одержуємо

$$\frac{du}{u^k} = b(t)e^{(k-1) \int a(t)dt} dt.$$

Інтегруємо останню рівність

$$\frac{u^{1-k}}{1-k} = \int b(t)e^{(k-1) \int a(t)dt} dt + C,$$

де C – довільна константа. Звідси

$$u(t) = \left(\frac{1}{1-k} \int b(t)e^{(k-1) \int a(t)dt} dt + \frac{C}{1-k} \right)^{\frac{1}{1-k}}.$$

Одержуємо формулу для загального розв'язку рівняння Бернуллі

$$x(t) = u(t)v(t) = e^{\int a(t)dt} \left(\frac{1}{1-k} \int b(t)e^{(k-1) \int a(t)dt} dt + \frac{C}{1-k} \right)^{\frac{1}{1-k}}.$$

Приклад 2.3. Розв'язати рівняння

$$x' - \frac{2x}{t} = -t^2 x^2$$

Розв'язання.

Застосуємо метод Бернуллі. Нехай

$$x(t) = u(t)v(t),$$

де $u(t)$, $v(t)$ – невідомі неперервно диференційовані функції. Знаходимо похідну

$$x'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t).$$

Підставляємо $x(t) = u(t)v(t)$ в рівняння

$$u'(t)v(t) + u(t)v'(t) - \frac{2}{t}u(t)v(t) = -t^2 u^2(t)v^2(t).$$

Далі групуємо другий та третій доданки і виносимо за спільні дужки функцію $u(t)$

$$u'(t)v(t) + \left(v'(t) - \frac{2}{t}v(t) \right) u(t) = -t^2 u^2(t)v^2(t).$$

Покладаємо

$$v' - \frac{2}{t}v = 0.$$

Знайдемо функцію $v(t)$. Відокремимо змінні в одержаному рівнянні

$$\frac{dv}{v} - \frac{2}{t} = 0$$

і проінтегруємо

$$\ln |v| = 2 \ln |t| + \ln |C_1|.$$

Тут C_1 – довільна константа. Покладаючи $C_1 = 1$, знаходимо

$$v(t) = t^2.$$

Отже, $u'(t)t^2 = -t^6 u^2(t)$, тому

$$u' = -t^4 u^2.$$

Відокремлюючи змінні, одержуємо

$$\frac{du}{u^2} = -t^4.$$

Інтегруємо

$$-u^{-1} = -\frac{t^5}{5} - C,$$

де C – довільна константа. Отже,

$$u(t) = \frac{5}{t^5 + 5C},$$

$$x(t) = u(t)v(t) = \frac{5t^2}{t^5 + 5C}.$$

Відповідь: Загальний розв'язок

$$x = \frac{5t^2}{t^5 + 5C},$$

де C – довільна константа.

2.2 Диференціальне рівняння Ріккати

Розглянемо означення [1, 6, 7, 10].

Означення 2.2. Диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \quad (2.3)$$

називається **диференціальним рівнянням Ріккати**. Тут $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – неперервні функції.

В загальному випадку рівняння Ріккати (2.3) не інтегрується, лише в окремих випадках. Розглянемо два випадки:

1. Якщо $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ є константами, то одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними.
2. Нехай відомий один частинний розв'язок $x_1(t)$. Робимо заміну

$$x = x_1(t) + z$$

і одержуємо рівняння Бернуллі при $k = 2$.

$$z = \frac{1}{u}.$$

Отже, заміна

$$x = x_1(t) + \frac{1}{u}$$

приводить диференціальне рівняння Ріккати до лінійного неоднорідного диференціального рівняння

Приклад 2.4. Розв'язати рівняння

$$x' = tx^2 + t^2x - 2t^3 + 1,$$

де $x_1(t) = t$ – його частинний розв'язок.

Розв'язання.

Перевіряємо, чи $x_1(t) = t$ – частинний розв'язок цього рівняння

$$1 = t^3 + t^3 - 2t^3 + 1.$$

Зробимо підстановку

$$x = t + \frac{1}{u},$$

отримаємо

$$u' + 3t^2u = -t,$$

звідки

$$u = e^{-t^3} \left(C - \int e^{t^3} t dt \right).$$

Отже,

$$x = t + \frac{e^{t^3}}{C - \int e^{t^3} t dt}.$$

Відповідь: Загальний розв'язок

$$x = t + \frac{e^{t^3}}{C - \int e^{t^3} t dt},$$

де C – довільна константа.

2.3 Питання, тести для самоконтролю

1. Наведіть означення диференціального рівняння Бернуллі.
2. Запишіть підстановку, яка зводить рівняння Бернуллі до лінійного диференціального рівняння.
3. Як пов'язане диференціальне рівняння Бернуллі з диференціальним рівнянням, яке є лінійним відносно функції?
4. Опишіть метод Бернуллі для розв'язування рівняння Бернуллі.
5. Наведіть означення диференціального рівняння Ріккаті.
6. Проаналізуйте, чи виконуються властивості розв'язків лінійного диференціального рівняння першого порядку для диференціальних рівнянь Бернуллі і Ріккаті. Наведіть приклади.

2.4 Задачі для самостійної роботи

Знайти загальні розв'язки або загальні інтеграли таких рівнянь

1. $\frac{dx}{dt} = 2x + tx^3$

4. $tx' + x = tx^2 \ln t$

2. $x' + \frac{tx}{1-t^2} = t\sqrt{x}$

5. $x' + \frac{2x}{t} = \frac{2\sqrt{x}}{\cos^2 t}$

3. $3\frac{dx}{dt} - x \sin t + 3x^4 \sin t = 0$

6. $\cos t \frac{dx}{dt} - x \sin t = x^4$

Знайти загальний розв'язок рівняння, підбравши спочатку частинний розв'язок

6. $t^3 \frac{dx}{dt} - x^2 - t^2 x + t^2 = 0$

8. $t^2 \frac{dx}{dt} - t^2 x^2 + 5tx - 3 = 0$

7. $\frac{dx}{dt} = x^2 - t^2 + 1$

9. $\frac{dx}{dt} + tx^2 + \frac{x}{t} - t^3 - 2 = 0$

Знайти загальний розв'язок рівняння, якщо відомий його частинний розв'язок $x_1(t)$

10. $x' = x^2 + \frac{x}{t} + \frac{1}{t^2}$, $x_1(t) = -\frac{1}{t}$

11. $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{t^2} + \frac{x}{t} - t \sin t - \cos^2 t$, $x_1(t) = t \cos t$

12. $\frac{dx}{dt} = \frac{e^{-t}}{\sin t} x^2 + x + e^t (\cos t - \sin t)$, $x_1(t) = e^t \sin t$

13. $(t - t^4)x' - t^2 - x + 2tx^2 = 0$, $x_1(t) = t^2$

14. $\frac{dx}{dt} = \frac{2x^2}{t^2} + \frac{x}{t} + t \cos t - 1 + \cos 2t$, $x_1(t) = t \sin t$

15. $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{t^2} + \left(2 + \frac{1}{t}\right)x - e^{4t}$, $x_1(t) = te^{2t}$

З метою вдосконалення практичних навичок пропонується виконати додаткові вправи, що містяться у літературі: [3, 8, 9].

Література

- [1] Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Т., Харченко І.І. Диференціальні рівняння для інформатиків. Київ: ВПЦ „Київський університет”, 2008. 352 с.
- [2] Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Т., Пічкур В.В., Харченко І.І. Диференціальні рівняння, варіаційне числення та їх застосування. Київ: ВПЦ „Київський університет”, 2015. 271 с.
- [3] Гудименко Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О. Збірник задач з диференціальних рівнянь. Київ: Вища школа, 1972. 156 с.
- [4] Лопушанська Г.П., Бугрій О.М., Лопушанський А.О. Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики. Львів: Число, 2017. 372 с.
- [5] Матвієнко В.Т., Пічкур В.В., Черній Д.І. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з навчальної дисципліни „Диференціальні рівняння”. Частина І. Розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку: рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні рівняння. Київ, 2023. 29 с. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <https://csc.knu.ua/uk/library>
- [6] Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. Київ: Либідь, 2003. 600 с.
- [7] Гаращенко Ф.Г., Харченко І.І. Збірник задач і вправ з диференціальних рівнянь. Київ: ВПЦ „Київський університет”, 2004. 162 с.
- [8] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. Київ: Вища школа, 1994. 454 с.
- [9] Перестюк М.О., Свіщук М.Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь. Київ: ТВіМС, 2004. 224 с.
- [10] Barbu V. Differential Equations. Springer, 2016. 230 p.