Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

**В. А. Колесников**
**Д. А. Клюшин**

# МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до лабораторних робіт з дисципліни
"Об'єктно-орієнтоване програмування"
для студентів факультету комп'ютерних наук та
кібернетики

Київ — 2026

Наведено умови та рекомендації до виконання лабораторних робіт з дисципліни “Об’єктно-орієнтоване програмування” мовою програмування C++. Розглянуто лабораторні роботи “Генерування псевдовипадкових чисел”, “Арифметика довгих чисел” та “Алгоритми обчислювальної геометрії”.

Для студентів другого курсу освітньо-професійної програми рівня бакалавру “Прикладна математика” факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Методичні рекомендації до лабораторних робіт з дисципліни “Об’єктно-орієнтоване програмування” для студентів факультету комп’ютерних наук та кібернетики / В. А. Колесников, Д. А. Клюшин. — Київ, 2026. — 120 с.

Укладачі:

В. А. Колесников, доктор філософії, асистент кафедри обчислювальної математики факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Д. А. Клюшин, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри обчислювальної математики факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Рецензенти:

В. М. Терещенко, доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри математичної інформатики факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

С. С. Шкільняк, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теорії та технології програмування факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Ухвалено на засіданні науково-методичної комісії факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, протокол № 10 від 20 квітня 2026 р.

Рекомедовано до друку на засіданні вченої ради факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, протокол № 13 від 21 квітня 2026 р.

# ЗМІСТ

# ПОДЯКИ

Автори висловлюють вдячність асистентам кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка Тимошенку Андрію Анатолійовичу та Оноцькому В'ячеславу Валерійовичу за сумлінне виконання обов'язків викладачів занять з дисципліни "Об'єктно-орієнтоване програмування" для студентів другого курсу освітньо-професійної програми "Прикладна математика".

Також автори висловлюють окрему подяку Токарю Костянтину Сергійовичу за допомогу в формулюванні алгоритмів та оформленні коду і прикладів.

# ВСТУП

Ця методична розробка призначена для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики, щоб допомогти їм у написанні лабораторних робіт з курсу "Об'єктно-орієнтоване програмування". Даний курс є складовою освітньо-професійної програми рівня бакалавру "Прикладна математика". Представлені в даному документі лабораторні роботи пропонуються студентам до виконання вже упродовж багатьох років. Різноманітність алгоритмів, як по темам, так і по рівню складності для реалізації, дають можливість студентам перевірити свої навички програмування та розширити свої знання з відповідних напрямків. Лабораторні роботи "Генерування псевдовипадкових чисел", "Арифметика довгих чисел" та "Алгоритми обчислювальної геометрії" містять набори ключових алгоритмів зі своїх напрямків, що дозволяє студенту ознайомитися з основними принципами, ідеями та проблемами під час роботи над програмами відповідної тематики. Частина алгоритмів є тривіальною, проте деякі з них є настільки складними, що процедура їхнього розбору може займати не одне лабораторне заняття. Метою написання даної методичної розробки є висвітлення ключових аспектів кожної з вищезгаданих лабораторних робіт, більш чітке формулювання вимог до здачі лабораторної та опис і пояснення важливих нюансів в алгоритмах, які неодноразово викликали питання з боку студентів.

Алгоритми вищезгаданих лабораторних робіт пропонується реалізовувати мовою програмування C++, тому у тексті документу також будуть присутні блоки коду цією мовою, які можна використовувати в якості бази для написання власного коду. Дані фрагменти, хоч і будуть відображати деякі ключові аспекти тих чи інших алгоритмів, тим не менше, не будуть повними. Це означає, що для того, щоб присутній у документі код компі-

лювався, його необхідно буде доповнити власним кодом. Дана методична розробка не має на своїй меті представлення зразку реалізації всіх алгоритмів вищезгаданих лабораторних робіт. Присутній в документі код також буде слугувати зразком дотримання парадигми об'єктно-орієнтованого програмування. В деяких місцях буде пояснюватися, чому і як використовуються принципи даної парадигми: інкапсуляція, наслідування та поліморфізм.

Також присутні в методичній розробці міркування стосовно реалізації алгоритму та самого коду не будуть спрямовані на оптимізацію обчислень. Головною задачею під час розбору та реалізації алгоритмів, окрім коректності, буде отримання вірної асимптотичної оцінки їхньої роботи. Проте в дяких місцях, де оптимізацію обчислень можна зробити очевидно та просто, ідеї стосовно даної оптимізації будуть також висвітлені.

Значна частина алгоритмів вищезгаданих лабораторних робіт використовує контейнери даних, частина з яких вже реалізована в стандартній бібліотеці мови C++. І хоча автори задля більш глибокого розуміння роботи даних контейнерів наполегливо рекомендують спробувати реалізувати їх самостійно, основна частина рекомендацій буде стосуватися саме роботи з контейнерами зі стандартної бібліотеки мови C++. Такі контейнери як $\mathrm{std::vector}$ або $\mathrm{std::map}$ мають достатньо повний функціонал для використання їх в представлених алгоритмах. Проте під час розбору алгоритмів 2 та 3 лабораторних робіт також будуть описані рекомендації стосовно використання самостійно реалізованих контейнерів, тому студент може сам обрати, як саме йому зручніше працювати зі структурами даних.

Автори сподіваються, що дана методична розробка допоможе студентам якісніше здавати лабораторні роботи та підвищить їхній рівень знань стосовно представлених в даних роботах алгоритмів.

# РОЗДІЛ 1
# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1: ГЕНЕРУВАННЯ ПСЕВДОВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛ

Випадкові величини є важливою частиною програмування. Вони активно використовуються під час тестування програм для генерації вхідних даних. Також вони є невід'ємною складовою програм для моделювання процесів, які мають стохастичну природу, таких як популяційні алгоритми та випадкові блукання. І, наостанок, випадкові величини є ключовою частиною так званих стохастичних алгоритмів, клас яких охоплює майже всі задачі, які можна розв'язати за допомогою програмування. Поняття випадкової величини є доволі складним поняттям теорії ймовірностей, але для подальшого розгляду достатньо розуміти випадкову величину як таку, кожну наступну реалізацію якої неможливо передбачити детермінованими алгоритмами.

Тут виникає певне протиріччя, оскільки щоб використовувати випадкові величини, тобто генерувати конкретні реалізації таких величин, ми маємо використовувати програмне забезпечення обчислювальної машини, де всі програми та операції, навпаки, мають бути передбачуваними та детермінованими. Звісно, можна спробувати вийти за межі програмного забезпечення та використовувати апаратне забезпечення, в якому за рахунок доволі складних фізичних процесів згідно з принципами квантової механіки може виникати справжня випадковість. Ця задача частково вирішена за допомогою $\mathrm{std::random\_device}$.

Проте для того, щоб дати студентам можливість поступово знайомитися з можливостями мови програмування C++ на відносно простих задачах, перш ніж переходити до складних алгоритмів другої та третьої лабора-

торних робіт, у даній лабораторній студентам пропонується реалізувати декілька алгоритмів генерації випадкових величин, які не використовують апаратне забезпечення. Ці алгоритми стосуються генерації так званих псевдовипадкових чисел. Ці числа поєднують в собі дві основні характеристики: вони генеруються за допомогою детермінованого алгоритму та послідовність таких чисел "виглядає" як послідовність реалізацій деякої випадкової величини. В рамках цієї методичної розробки ми не будемо поглиблюватися в тему того, як перевіряти послідовність чисел на випадковість, і будемо оцінювати випадковіть "на око". Для цього нам потрібно буде згенерувати достатню кількість псевдовипадкових чисел та поєднати їх в гістограму частот.

### 1.1. Умова

Написати програму, що реалізує десять методів генерації псевдовипадкових чисел.

1. Лінійний конгруентний метод.
2. Квадратичний конгруентний метод.
3. Метод чисел Фібоначчі.
4. Обернений конгруентний метод.
5. Метод об'єднання.
6. Правило 3-сігма.
7. Метод полярних координат.
8. Метод співвідношень.
9. Метод логарифму.
10. Метод Аренса.

Для кожного методу побудувати гістограму, яка ілюструє розподіл псевдовипадкових чисел.

## 1.2. Види розподілів

Не всі випадкові величини є однаковими. Результат підкидання монетки відрізняється від результату підкидання грального шестигранного кубика як мінімум кількістю можливих результатів. Проте, навіть якщо обмежитися гральним шестигранним кубиком, можна розглядати дві різні випадкові величини, якщо взяти два кубика з різними центрами мас. Частота випадання граней в такому випадку буде неоднаковою. Для того, щоб розрізняти такі випадки, в теорії ймовірностей вводиться поняття розподілу, яке повністю описує поведінку випадкової величини. Взагалі, існує незліченна кількість розподілів, проте в рамках даної лабораторної буде розглядатися лише 4 найбільш розповсюджені: рівномірний, нормальний (він же гаусівський), експоненційний та гама-розподіл. Реалізацією випадкової величини, яка має будь-який з цих розподілів, є дійсне число, проте у кожного з розподілів є своя область дійсних чисел, які потенційно можуть бути реалізацією відповідної випадкової величини.

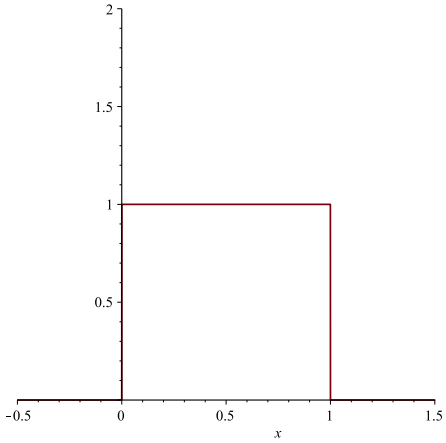
Рівномірний розподіл є найбільш простим та інтуїтивно зрозумілим. Суть цього розподілу полягає в тому, що при реалізації кожен раз вибирається "навмання" точка з проміжку $[0, 1]$. Це означає, що ймовірність обрати число, менше за 0.5, дорівнює ймовірності обрати число, більше за 0.5. В той же час ймовірність обрати число з першої третини проміжку така ж сама, як і ймовірність обрати число з другої або третьої третини, проте менша, ніж з другої половини проміжку. Узагальнюючи, можна сказати, що ймовірність вибрати число з проміжку $[a, b]$ $(0 < a < b < 1)$ пропорційна лише довжині цього проміжку $b - a$. Зрозуміло, що такий розподіл можна "перенести" на будь-який скінченний проміжок $[A, B]$ замість $[0, 1]$. І саме цей розподіл мається на увазі, коли кажуть "візьмемо випадкове дійсне число з проміжку $[A, B]$".

Нормальний, або ж гаусівський (але не "нормальний гаусівський", це

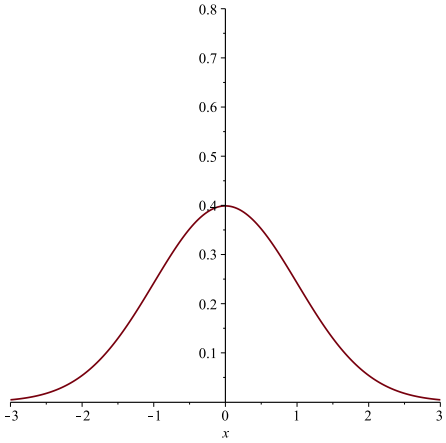
тавтологія), розподіл доволі часто виникає під час збору даних до статистики. Більшість соціальних або біологічних показників підпорядковуються цьому розподілу. Зріст, вага, коефіцієнт інтелекту, температура тіла — всі ці показники, зібрані з великої сукупності людей, кожен по-своєму буде нагадувати певний нормальний розподіл. Особливостями даного розподілу є явно виражене середнє значення та симетричність відносно цього значення. Експоненційний та гама-розподіл також мають свої важливі застосування, з якими можна ознайомитися в літературі з відповідної тематики.

Всі перелічені тут розподіли є неперервними. Точне визначення неперервного розподілу можна знайти в будь-якому підручнику з теорії ймовірностей, проте для наших цілей достатньо знати, що такі розподіли мають щільність, яка їх повністю характеризує. Щільність — це невід'ємна функція дійсної змінної, інтеграл якої по всій дійсній прямій дорівнює 1, така що чим більше значення щільності у точці $x$, тим вища ймовірність при реалізації випадкової величини з відповідним розподілом обрати число з околу $x$. На рис. 1.1. зображені функції щільностей для чотирьох вищезгаданих розподілів.

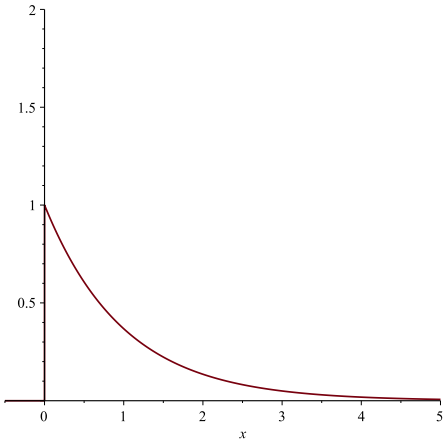
Поруч з неперервними розподілами існують дискретні розподіли. Випадкова величина з дсикретним розподілом (або просто дискретна випадкова величина) характеризується тим, що множина значень, яких вона потенційно може набувати, не більш ніж зліченна. При цьому ймовірність набуття дискретною випадковою величиною кожного такого значення є додатньою, а також загальна сума цих ймовірностей дорівнює 1. Неперервні розподіли в певному сенсі можуть наближатися дискретними розподілами, і ця ідея полягає в основі першої лабораторної роботи. Оскільки в програмуванні ми не можемо оперувати будь-якими дійсними числами, а лише певною множиною таких (лише деякими раціональними), то для генерації випадкової величини з неперервним розподілом буде використовуватися дискретна випадкова величина. Ця дискретна випадкова величина в свою



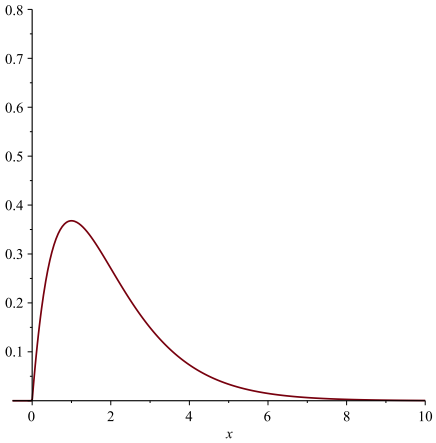

(а) Рівномірний.




(б) Стандартний нормальний.




(в) Експоненційний ($\lambda = 1$).




(г) Гама-розподіл ($a = 2$).

Рис. 1.1: Графіки функцій щільності для розподілів різних типів.

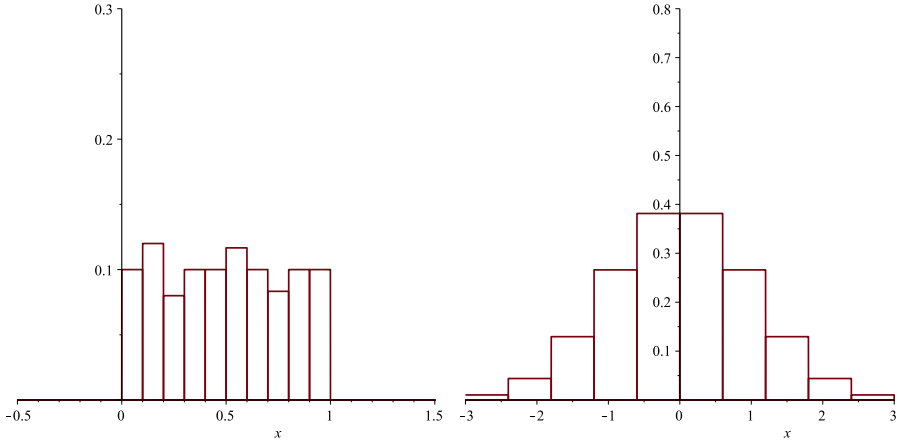
чергу буде моделюватися за допомогою генератора псевдовипадкових чисел.

Таким чином, за допомогою вказаних в першій лабораторній роботі алгоритмів генерації псевдовипадкових чисел для кожного з вищенаведених розподілів буде генеруватися набір реалізацій. Після цього даний набір повинен бути об'єднаним в гістограму частот. Для цього для кожного розподілу спочатку визначається множина $Dom_f = \{x \in \mathbb{R} \| f(x) > 0\}$ ($f$ — щільність), потім за необхідності вона обмежується скінченним проміжком, ділиться на наперед задану кількість однакових підпроміжків і для кожного такого підпроміжку рахується кількість реалізацій з набору, значення яких потрапило в даний підпроміжок. На основі результатів будуться прямокутники, висота яких пропорційна отриманим на попередньому кроці числам. Приклади коректних гістограм для чотирьох розподілів наведено на рис. 1.2. Варто зазначити, що силует гістограми нагадує силует функції щільності, що в межах поточної лабораторної роботи є критерієм коректно запрограмованого алгоритму.

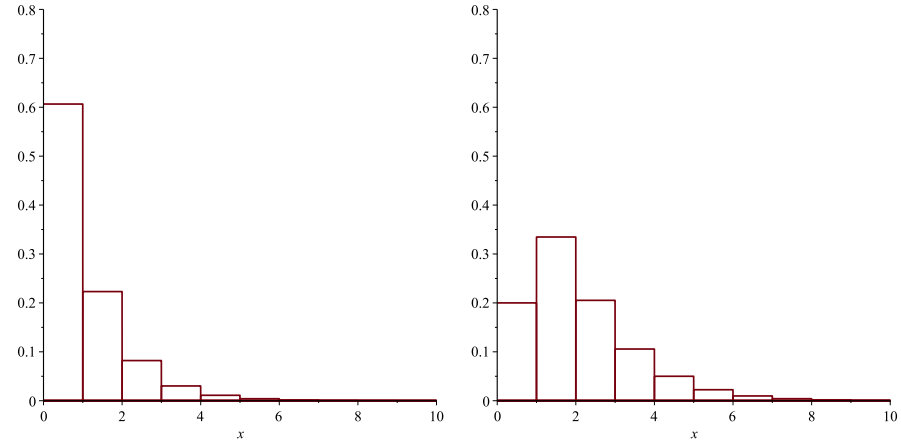
### 1.3. Клас Rand та його нащадки

Перш ніж розглядати конкретні алгоритми генерації псевдовипадкових чисел, звернімося до стратегії їхньої реалізації в коді. Випадкову величину можна розглядати як певний об'єкт, який при зверненні до нього повертає псевдовипадкове число. Очевидним вибором для реалізації такого об'єкту є функціональний об'єкт — клас, що має перевантажений оператор `()`. Причому будь-яка випадкова величина, незалежно від типу розподілу або алгоритму генерації чисел, працюватиме за таким принципом. Це означає, що ми можемо спробувати поєднати всі випадкові величини за допомогою принципу наслідування.

Розглянемо абстрактний клас Rand, єдиним методом якого буде пере-




(а) Рівномірний. (б) Стандартний нормальний.




(в) Експоненційний ($\lambda = 1$). (г) Гама-розподіл ($a = 2$).

Рис. 1.2: Зразки гістограм для розподілів різних типів.

вантажений оператор круглі дужки (). Оскільки даний клас узагальнює всі розподіли, то оператор () ми залишаємо суто віртуальним.

```
class Rand {
    public:
        virtual double operator()() = 0;

    private:
        double Dom_min;
        double Dom_max;
};
```

Тоді класи випадкових генераторів, що відповідають кожному з розподілів, можна зробити нащадками визначеного класу Rand. Для кожного з класів-нащадків оператор () вже повинен бути реалізованим. Оскільки ми розглядаємо лише дійснозначні випадкові величини, то в клас Rand можна винести також і границі множини $Dom_f$, бо ці характеристики присутні в усіх розподілах. Для доступу до них краще реалізувати відповідні методи, що добувають та встановлюють значення.

```
class RandType1 : public Rand {
    public:
        double operator()() override { ... }
};
```

Тоді наш проект буде складатися з одного класу-предка та чотирьох класів-нащадків: по одному для кожного виду розподілу. Проте, як можна побачити з умови лабораторної, для одного типу розподілу може існувати декілька різних алгоритмів генерації цього розподілу. Тоді кожен такий алгоритм може бути реалізований як окремий клас, який може бути переданий як параметр шаблону до відповідного класу розподілу.

```
class RandAlg {
    ...

    private:
    //parameters
```

```
};

template <class T>
class RandType1 : public Rand {
    public:
        double operator()() override { ... }
};
```

Проте в даному випадку виникає проблема, як реалізувати заборону підставляти у клас розподілу в якості шаблонного параметру клас алгоритму, який цьому розподілу не відповідає. При цьому також шаблон класу розподілу стає просто обгорткою для класу алгоритму, не додаючи жодного власного функціоналу. До того ж, з використанням шаблонів код стає більш громіздким.

Для того, щоб одночасно вирішити ці проблеми, можна сприймати клас Rand як абстракцію, що містить саме **метод** генерації випадкової величини з будь-яким розподілом. Тоді кожен нащадок цього класу буде напряму відповідати конкретному алгоритму, а дані про розподіл, який таким чином генерується, можна за потреби зберігати в цьому класі, або ж, якщо такої потреби немає, обмежитися вибором інформативної назви для самого класу-нащадка.

Так, перші 4 алгоритми лабораторної роботи можуть бути названі наступним чином:

```
class RandUniLinear : public Rand {
    ...
};

class RandUniQuadr : public Rand {
    ...
};

class RandUniFib : public Rand {
```

```
    ...
};

class RandUniInverse : public Rand {
    ...
};
```

Якщо переходити ближче до самих алгоритмів, то можна помітити, що кожен з них використовує певний набір параметрів, які можуть обиратися користувачем. Окрім цього, конструктор за замовчуванням може бути написаний для кожного алгоритму. В ньому в якості параметрів алгоритму обираються константи, визначені програмістом. Зрозуміло, що ці константи повинні бути такими, щоб алгоритм генерував якомога якіснішу послідовність псевдовипадкових чисел.

```
class RandUniLinear {
    public:
        Rand();
        Rand(double a, ...);

        double operator()() override;
        ...
};
```

Також варто зазначити, що алгоритми для генерування нормального, експоненційного та гама-розподілу використовують в якості складової частини генератор рівномірного розподілу. Це означає, що насправді дані класи-нащадки можуть бути шаблонами класу, де параметр шаблону U відповідає за клас-алгоритм для генерації рівномірного розподілу.

```
template <class U>
class RandNormal  : public Rand {
    ...
};
```

Те ж саме стосується і алгоритму 5 для генерації рівномірного розподілу, тільки параметрів шаблону в ньому має бути 2.

```
template <class U1, class U2>
class RandUniCombine  : public Rand {
    ...
};
```

## 1.4. Алгоритми генерації псевдовипадкових чисел

Для того, щоб згенерувати рівномірно розподілену випадкову величину, в перших чотирьох алгоритмах ми генеруємо деяку дискретну величину. Оскільки і комп'ютеру, і користувачу зручніше працювати з цілими числами, то дана дискретна випадкова величина буде з множини $\{0, 1, 2, ..., M - 1\}$, де $M$ — достатньо велике натуральне число. Тоді, згенерувавши одне ціле псевдовипадкове число $x$, за допомогою нормування $x/M$ ми отримуємо дійсне число з проміжку $[0, 1]$. Зрозуміло, що чим більше $M$, тим більшу кількість дійсних чисел з проміжку $[0, 1]$ ми можемо потенційно отримати таким способом.

Для генерації цілого числа $x$ використовується рекурсивна формула, яка використовує значення, згенероване на попередньому кроці ($x_{n+1} = g(x_n)$). Початкове значення $x_0$ є одним з параметрів, що задається користувачем та може передаватися в конструктор класу відповідного алгоритму. Для алгоритму 1 функція $g$ є лінійною, для алгоритму 2 — квадратичною. Алгоритм 3 використовує дві попередні згенеровані велични $x_n$ та $x_{n-1}$.

$$x_{n+1} = ax_n + c \,(mod\, M) \text{ (лінійний)},$$

$$x_{n+1} = dx_n^2 + ax_n + c \,(mod\, M) \text{ (квадратичний)},$$

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \,(mod\, M) \text{ (Фібоначчі)}.$$

Алгоритм 4 використовує обернене значення $x_n^{-1}$ в полі цілих чисел за модулем $p$, де $p$ – просте (в даному алгоритмі воно використовується замість $M$). Це обернене значення характеризується формулою

$$x_n \cdot x_n^{-1} \equiv 1 \,(mod\, p).$$

$x_n^{-1}$ також є цілим числом з проміжку $[1, p-1]$ та знаходиться за допомогою розширеного алгоритму Євкліда. Число $M$ рекомендується брати якомога більшим, але при цьому щоб всі операції в формулах можна було виконувати в процесорі без переповення. Сама рекурсивна формула для обернена методу виглядає наступним чином.

$$x_{n+1} = ax_n^{-1} + c \,(mod\, p).$$

Алгоритми 5-10 використовують генератори 1-4 для рівномірного розподілу та фактично є набором арифметичних дій та використанням аналітичних функцій над дійсними числами. Далі наведений опис цих алгоритмів.

5. Метод об'єднання. $z_n = \{x_n - y_n\}$, де $x_n, y_n$ — реалізації рівномірно розподілених на $[0, 1]$ псевдовипадкових величин, отримані за допомогою двох різних алгоритмів, $\{\cdot\}$ — операція взяття дробової частини.

6. Правило 3-сігма. $x_n = m + (\sum_{i=1}^{12} y - 6)\sigma$, де $m, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ — параметри нормального розподілу (математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення), а в дужках знаходиться сума дванадцяти псевдовипадкових чисел, розподілених рівномірно на $[0, 1]$. $Dom\_min$ та $Dom\_max$ для цього розподілу можна вважати числа $m - 3\sigma$ і $m + 3\sigma$ відповідно.

7. Метод полярних координат видає одразу два числа згідно зі стандартним нормальним розподілом. Для цього спочатку генеруються два рівномірно розподілені на $[-1, 1]$ числа $v_1, v_2$. Якщо $S = v_1^2 + v_2^2 < 1$, на вихід

подається два числа $v_1\sqrt{\frac{-2\ln S}{S}}, v_2\sqrt{\frac{-2\ln S}{S}}$, якщо ні — генеруються нові числа $v_1, v_2$ та процедура перевірки повторюється.

8. Метод співвідношень.

1. Згенерувати дві випадкові величини $U \neq 0$ та $V$, рівномірно розподілені на інтервалі $[0, 1]$.
2. Визначити $x = \sqrt{\frac{8}{e}}\frac{V-0.5}{U}$.
3. Якщо $x^2 \leqslant 5 - 4e^{\frac{1}{4}}U$, повернути число $x$.
4. Якщо $x^2 \geqslant \frac{4e^{-1.35}}{U} + 1.4$, повернутися на крок 1.
5. Якщо $x^2 \leqslant -4\ln U$, повернути число $x$, інакше — повернутися на крок 1.

9. Метод логарифму.

$x = -\mu \ln U$, де $U$ — рівномірна розподілена величина на проміжку $[0, 1]$.

10. Метод Аренса.

1. Обрахувати $y = tg(\pi U)$, $x = y\sqrt{2a-1} + a - 1$, де $U$ — рівномірна розподілена величина на проміжку $[0, 1]$.
2. Якщо $x \leqslant 0$, повернутися на крок 1.
3. Згенерувати число $V$, рівномірно розподілене на $[0, 1]$, та перевірити нерівність $V > (1 + y^2)e^{(a-1)\ln\frac{x}{a-1} - y\sqrt{2a-1}}$.
4. Якщо умова з попереднього кроку виконується, повернутися на крок 1, якщо ні — повернути число $x$.

В алгоритмах 6, 9 та 10 параметри $m$, $\sigma$, $\mu$ та $a$ відповідно є параметрами розподілів (не плутати з параметрами алгоритму) та вводяться користувачем. $\sigma$ та $\mu$ мають при цьому завжди бути додатними, $a > 1$.

## 1.5. Генерація вибірки та побудова гістограм

Оскільки ми поєднали всі алгоритми в ієрархію з єдиним абстрактним предком, то для побудови гістограми частот ми можемо написати одни віртуальний метод для цього абстрактного класу. За рахунок поліморфізму для побудови гістограми для кожного конкретного алгоритму нам не треба буде кожен раз реалізовувати цю логіку з нуля.

```
virtual void histogram(unsigned int N, unsigned int buckets) const
{
    ...
}
```

Першиим параметром даного методу є розмір вибірки $N$, на основі якої будується гістограма. Цей метод по суті викликає $N$ разів оператор () для об'єкту класу та групує дані за принципом, описаним в пункті 1.2. Другий параметр відповідає за кількість колонок в гістограмі, тобто на скільки підпроміжків розбивається проміжок $[Dom\_min, Dom\_max]$. При цьому можуть використовуватися дані про межі випадкових чисел, які також зберігаються в об'єкті класу.

Замість того, щоб малювати картинку з гістограмою, використовуючі графічні бібліотеки, можна вивести гістограму в консолі в горизонтальному положенні. Рис. 1.3 містить приклад такої гістограми для нормального розподілу. Рядки в цій консольній гістограмі складаються з символів '*', причому їхня кількість пропорційна відносній частоті потрапляння випадкової величини у відповідний проміжок, зазначений в першій колонці. Друга колонка містить значення відповідних відносних частот.

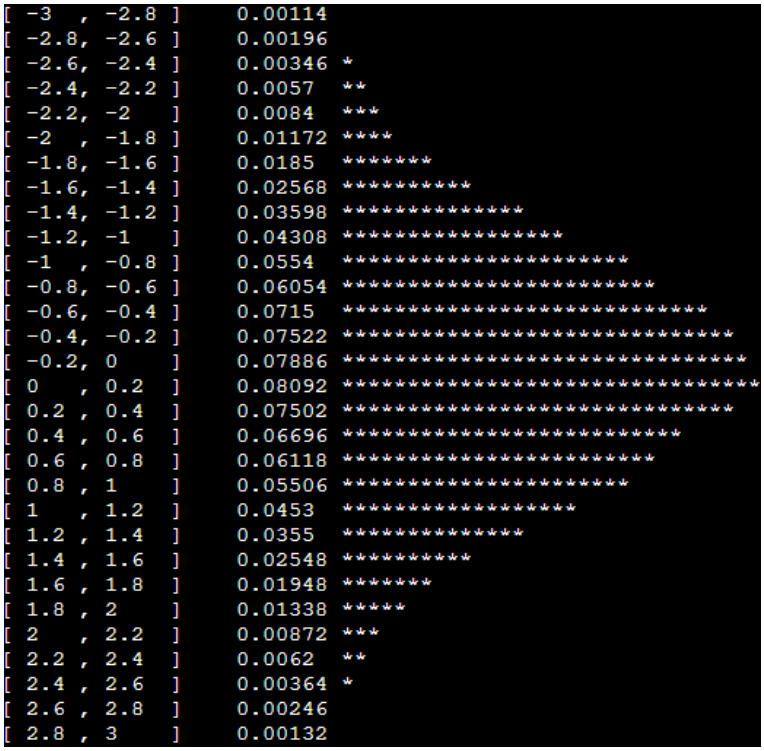



Рис. 1.3: Гістограма для нормального розподілу, виведена в консолі.

# РОЗДІЛ 2
# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2: АРИФМЕТИКА ДОВГИХ ЧИСЕЛ

Арифметика довгих чисел виникає як ключова підзадача в сучасній криптографії. Фактично більша частина сучасної цифрової безпеки тримається на декількох алгоритмах, які використовують довгі числа та арифметичні операції над ними. Для швидкого шифрування та дешифрування повідомлень потрібні швидкі алгоритми арифметики довгих чисел. Основним об'єктом розгляду в даній лабораторній є алгоритми швидкого множення, адже для цієї арифметичної операції було вигадано достатньо ефективних алгоритмів та досягнуті визначні результати. Друга половина лабораторної присвячена перевірці чисел на простоту — іншій важливій задачі в криптографії.

Проте перш ніж переходити до алгоритмів, треба визначитися, як саме ми повинні працювати з довгими числами та реалізувати деякий набір стандартних операцій над ними. За допомогою інкапсуляції ми побудуємо клас невід'ємних довгих цілих чисел (**U**nsigned **L**ong **I**nt) та, використовуючи перевантаження операторів мови C++, отримаємо можливість працювати з довгими числами в тій самій нотації, як і зі змінними типу unsigned int. В межах цієї лабораторної роботи змінні типу int та unsigned int будуть називатися "звичайними" або "короткими" числами, щоб підкреслити відмінність від побудованих довгих чисел там, де це важливо.

## 2.1. Умова

Реалізувати клас невід'ємних довгих цілих чисел та реалізувати для нього стандартні арифметичні та логічні операції. Окрім цього, реалізувати наступні алгоритми:

1. Алгоритм швидкого множення Карацуби.
2. Алгоритм швидкого множення Тоома-Кука.
3. Алгоритм швидкого множення Шенхаге.
4. Алгоритм швидкого множення Штрасена.
5. Алгоритм Кука для знаходження оберненого значення.
6. Алгоритм швидкого ділення.
7. Алгоритм перевірки на простоту Люка-Лемера.
8. Алгоритм перевірки на простоту Рабіна-Міллера.
9. Алгоритм перевірки на простоту Соловєя-Штрасена.
10. Алгоритм перевірки на простоту Фробеніуса.

## 2.2. Зображення невід'ємних довгих цілих чисел за допомогою класу ULI

Існує багато зображень натуральних чисел, проте більшість алгоритмів та операцій над ними сформульовані саме для позиційного запису числа. Тобто натуральне число записується у вигляді рядка, де кожна "цифра" може приймати значення від 0 до $p$, де $p$ — основа системи числення, зазвичай просте, але в загальному випадку будь-яке натуральне число, не менше за 2. Ми будемо представляти числа саме в такому вигляді.

Всі комп'ютери представляють числа в позиційній системі з $p = 2$ і деякі з алгоритмів з даної лабораторної працюють лише для таких чисел. Проте

всі алгоритми шкільної арифметики, а також перші 2 алгоритма швидкого множення і алгоритми перевірки на простоту коректно працюють і для довільних інших значень $p$. Тому в межах даної лабораторної ми будемо вважати $p$ параметром числа і ті методи, які не обмежують значення $p$ для свого застосування, повинні бути реалізовані для всіх можливих значень $p$.

Оскільки невід'ємне ціле число в позиційному записі — це просто набір цифр в певному порядку, то логічно цей набір зберігати за допомогою контейнера std :: vector зі стандартної бібліотеки мови C++. Тоді клас невід'ємних цілих чисел у якості полів буде мати вектор цифр та основу системи числення. Цифри в векторі зберігаються в порядку, зворотньому до запису числа.

```
class ULI {
    ...
    private:
        vector<unsigned int> digits;
        unsigned int p;
};
```

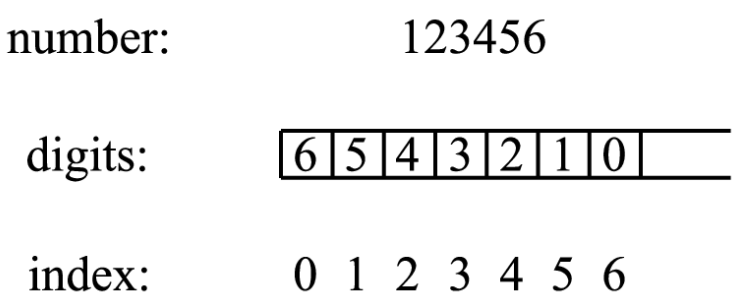



Рис. 2.1: Зображення числа за допомогою масиву цифр.

Серед конструкторів класу ULI можна реалізувати такий, що приймає звичайне число або рядок символів. Обов'язково в даному випадку передавати до конструктора також і основу системи числення окремим параметром. Всередині конструкторів обов'язково треба перевіряти, що основа

системи числення не менша за 2, і що число записано коректно згідно з цим значенням $p$.

Задані таким чином довгі числа можна переводити з однієї системи числення в іншу. Для цього достатньо реалізувати метод класу ULI, що виконує дану процедуру за інтуїтивним алгоритмом.

```
class ULI {
    public:
        void change_p(unsigned int new_p);
    ...
};
```

Тоді в залежності від обмежень на $p$ в певних алгоритмах, можна переводити числа з однієї системи числення в іншу. Функція переведення має асимптотичну складність $O(n)$, тож вона не вплине на асимптотику жодного з представлених в даній лабораторній алгоритмів. Проте виникає певна проблема при перевантаженні бінарних операторів. Що, як ми спробуємо додати два числа, які записані з різними основами? Зрозуміло, що треба робити перетворення та зводити числа до однієї основи, проте до якої саме? До основи першого числа чи до основи другого, чи до якоїсь третьої основи? І з якою основою записувати результат? Звісно, ці питання можна вирішити, запровадивши деяке правило, наприклад, результат та обчислення мають основу першого аргумента. Проте цьому правилу можна знайти купу нічим не гірших альтернатив. До того ж, постійні перевірки та зведення до спільної основи на початку кожної функції нагадують той код, який хотілося б або якось узагальнити та автоматизувати, або якось прибрати.

Як альтернативу, можна запропонувати перенести основу системи числення $p$ в параметри шаблону класу ULI.

```
template <unsigned int p>
class ULI {
    ...
    private:
```

```
        vector<unsigned int> digits;
};
```

Тоді ми можемо реалізуємо бінарні оператори тільки для класів ULI з однаковим параметром $p$ за допомогою наступної сигнатури.

```
template <unsigned int p>
ULI<p> operator+(const ULI<p>& a,const ULI<p>& b);
```

Компілятор буде видавати помилку при спробі виклику функції з двома числами з різними основами системи числення. Така стратегія поведінки може бути доцільною, коли ми не ставимо ціллю одночасно оперувати з числами з різними основами системи числення і коли факт такого оперування свідчить про помилку в логіці програми. Так, наприклад, хоч алгоритм множення Карацуби і коректно працює при будь-якій основі системи числення, проте він не використовує числа з різною основою, а, отже, наявність таких чисел під час виконання методу є чимось підозрілим.

Серед усіх невід'ємних звичайних чисел $p$ за основу не можна брати лише 0 та 1. Тоді для того, щоб уникнути створення таких чисел, можна явно виписати шаблони для $p = 0$ та $p = 1$ та зробити конструктори в них приватними. Тоді спроба ініціалізації змінної з неприйнятною основою системи числення призведе до помилки на етапі компіляції. Таким же чином за допомогою шаблона з $p = 2$ можна вирішити питання більш ефективного зберігання чисел з основою системи числення 2. У такому випадку замість масиву цифр число можна зберігати у вигляді масиву бітів. Альтернативно, щоб уникнути створення невід'ємних довгих цілих чисел з основою системи числення 0 або 1 можна використати "концепти" мови C++, тобто вписати умову на "прийнятні" значення основи системи числення в сам шаблон класу ULI. Концепти є частиною 20-го та подальших стандартів мови C++.

Проте в стратегії використання основи системи числення як шаблону є обмеження, яке полягає в тому, що всі основи $p$, які використовуються в

програмі, повинні бути відомі на момент компіляції. Це означає, що з шаблонним класом реалізувати від довгого числа із заданною користувачем основою системи числення неможливо.

Для визначеності, під час подальшого розгляду ми будемо вважати, що основа $p$ реалізована як поле класу ULI.

## 2.3. Шкільні алгоритми

Перш ніж переходити до складних алгоритмів множення, треба реалізувати так звані "шкільні" алгоритми для деяких інших операторів, які застосовуються до коротких цілих чисел в мові C++. Причому ці оператори мають бути реалізовані з відповідною асимтотичною складністю. Перелік операцій над довгими числами та обмеження на час їхньої роботи наведений в таблиці 2.1. В таблиці та починаючи з цього місця в тексті великими літерами будуть позначатися довгі числа, маленькими — короткі.

$n$ в таблиці — це кількість цифр в числі (або максимальне з двох таких значень у випадку, коли операція застосовується для двох довгих чисел).

До таблиці треба додати декілька пояснень.

По-перше, операція доступу до цифри ULI по розряду повинна давати користувачу змогу змінювати цю цифру за потреби. Складність цієї операції, на відміну від інших операцій, повинна бути константною, проте така складність може забезпечуватися лише в середньому по достатньо великій кількості викликів даної операції. Це тому що для доступу до великих розрядів може знадобитися розширення std :: vector, якщо даний розряд на момент виклику оператора ще не зберігається у векторі. Таке розширення є неконстантним по часу. Проте розширення вектору за "звичайної" роботи з цифрами потрібно далеко не завжди.

По-друге, оскільки ми працюємо з невід'ємними числами, то операція віднімання виконується за наступним правилом: якщо від довгого числа A

*Таблиця* 2.1

**Операції над числами**

| Назва операції | Нотація | Складність |
|---|---|---|
| Присвоювання (копіювання) | $A = B$ | $O(n)$ |
| Доступ до цифри по розряду | $A[i]$ | $O(1)$ |
| Додавання | $A + B$ | $O(n)$ |
| Віднімання | $A - B$ | $O(n)$ |
| Множення (шкільне) | $A * B$ | $O(n^2)$ |
| Додавання (з присвоюванням) | $A+ = B$ | $O(n)$ |
| Віднімання (з присвоюванням) | $A- = B$ | $O(n)$ |
| Множення (шкільне) (з присвоюванням) | $A* = B$ | $O(n^2)$ |
| Інкрементація | $++A$ | $O(n)$ |
| Декрементація | $--A$ | $O(n)$ |
| Порозрядний зсув ліворуч | $A << k$ | $O(n)$ |
| Порозрядний зсув праворуч | $A >> k$ | $O(n)$ |
| Порозрядний зсув ліворуч (з присвоюванням) | $A <<= k$ | $O(n)$ |
| Порозрядний зсув праворуч (з присвоюванням) | $A >>= k$ | $O(n)$ |
| Порівняння (дорівнює) | $A == B$ | $O(n)$ |
| Порівняння (не дорівнює) | $A! = B$ | $O(n)$ |
| Порівняння (менше) | $A < B$ | $O(n)$ |
| Порівняння (менше або дорівнює) | $A <= B$ | $O(n)$ |
| Порівняння (більше) | $A > B$ | $O(n)$ |
| Порівняння (більше або дорівнює) | $A >= B$ | $O(n)$ |
| Перетворення в bool | | $O(n)$ |

віднімається довге число B, то якщо $A \geqslant B$, результатом є математичне значення $A - B$, інакше результатом є довге число 0. Те ж саме стосується операції декрементації.

Операції додавання, віднімання, множення та порозрядного зсуву доцільно зробити зовнішніми по відношенню до класу ULI дружніми функціями. Операції порозрядного зсуву повинні працювати за тими ж правилами, що і звичайний нециклічний побітовий зсув для коротких чисел.

Всі операції порівняння можна виразити через комбінацію операцій порівнянь зі знаком $<$. Це означає, що лише реалізація цього оператору має спиратися на конкретні значення аргмуентів та використовувати доступ до їхніх цифр. Перетворення в bool повинне працювати за тою ж логікою, що і для коротких чисел: якщо число дорівнює 0, то результатом є false, інакше — true.

Також варто зазначити один важливий момент. Уявімо, що ми обчислюємо значення виразу $(A - B) + C$, причому числа $A$ та $B$ мають $n^2$ цифр, а результат їхнього віднімання та число $C$ мають по $n$ цифр. Логічно було б припустити, що операція додавання повинна виконуватися за $O(n)$ кроків. Проте у нашої поточної реалізації класу довгих чисел є одна неприємна особливість: $\mathrm{std}::\mathrm{vector}$ не має гадки про те, що ми намагаємося зберігати і йому абсолютно не важливо, якою є кожна з цифр довгого числа. Це означає, що після віднімання двох чисел він може зберігати велику кількість нулів у вищих розрядах. В даному випадку цу $O(n^2)$ нулів, так що операція додавання буде виконуватися з часом $O(n^2)$. Для того, щоб уникнути такої ситуації, доцільно додати до класу нове поле Length, яке відслідковуватиме номер найбільшого розряду, де записана ненульова цифра. І після виконання кожної операції, яка потенційно може зменшити Length (це операції [], $-$, $--$, $>>$, $-=$, $>>=$), варто видаляти з кінця $\mathrm{std}::\mathrm{vector}$ непотрібні нулі. Асимптотично ця процедура не впливає на жодну з операцій $-$, $--$, $>>$, $-=$, $>>=$. А на складність операції [] вона не

впливає у середньому.

## 2.4. Швидке множення: алгоритм Карацуби

Розібравшись зі шкільними алгоритмами, ми можемо переходити до методів "швидкого" множення. Першим з таких алгоритмів є алгоритм Карацуби, який множить два довгих числа довжиною в $n$ цифр кожне за час $O(n^{log_2 3}) = O(n^{1.58496})$, що є суттєво швидше за шкільне множення. Алгоритм Карацуби застосовний до чисел з будь-якою основою системи числення $p$.

Він є дуже простим та базується на розбитті обох параметрів $A$ та $B$ на вищі на нижчі розряди.

Припустимо, що

$$A = a_{2n-1}a_{2n-2}...a_1a_0,$$

$$B = b_{2n-1}b_{2n-2}...b_1b_0,$$

де $a_i, b_i$ — цифри від 0 до $p-1$. Визначимо числа

$$A_1 = a_{2n-1}a_{2n-2}...a_{n+1}a_n,\ A_0 = a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0,$$

$$B_1 = b_{2n-1}b_{2n-2}...b_{n+1}b_n,\ B_0 = b_{n-1}b_{n-2}...b_1b_0.$$

Кожне з цих чисел має по $n$ цифр. Фактично, оригінальні $A$ та $B$ є простими конкатенаціями даних чисел ($A = \overline{A_1A_0}, B = \overline{B_1B_0}$). Визначити програмно ці числа можна за допомогою наступних формул.

$$A_1 = A >> n,\ A_0 = A - (A_1 << n),$$

$$B_1 = B >> n,\ B_0 = B - (B_1 << n).$$

Тут варто зазначити, що з точки зору швидкодії та економії пам'яті доцільніше було отримувати значення цих чисел, працюючи напряму з масивами цифр чисел $A$ та $B$. Але тут і в подальшому ми будемо використовувати наведений запис, оскільки він підкреслює той факт, що за допомогою реалізованих шкільних операцій ми можемо не "спускатися" до рівня окремих цифр, а використовувати більш абстрактні дії над числами там, де це можливо. До того ж, обчислення результатів згідно з наведеним записом не збільшує асимптотичну складність алгоритму, а це єдина характеристика, на яку ми орієнтуємося в межах даної методичної розробки.

На основі чисел $A_0$, $A_1$, $B_0$ та $B_1$ за допомогою рекурсивного виклику множення за алгоритом Карацуби обчислюємо вирази.

$$C_2 = A_1 \cdot B_1,\ C_0 = A_0 \cdot B_0,$$
$$C_1 = (A_0 + A_1) \cdot (B_0 + B_1) - C_0 - C_2.$$

Будуємо відповідь за формулою

$$C = (C_2 << (2n)) + (C_1 << n) + C_0,\ (C = \overline{C_2 C_1 C_0}).$$

Нескладно побачити, що за наших обчислень насправді $C_1 = A_0B_1 + A_1B_0$. Якби наші числа складалися з двох цифр кожне, то під час шкільного множення ми мали б порахувати чотири добутки: $A_0B_0$, $A_1B_1$, $A_0B_1$ та $A_1B_0$, тобто добуток нижчих розрядів, добуток вищих розрядів та два змішані добутки. Після цього змішані добутки просумовуються та все це поєднується у відповідь за допомогою порозрядного зміщення отриманих величин за формулою, схожу на формулу для $C$.

Так само працює шкільне множення довгих чисел в рекурсивній формі. Нам треба 4 рази помножити удвічі коротші числа для отримання результату. Алгоритм Карацуби дозволяє робити 3 рекурсивних виклики замість чотирьох, за рахунок чого він є асимптотично швидшим.

Оскільки алгоритм є рекурсивним, то для нього має бути визначеним дно рекурсії. В даному випадку це повинні бути настільки малі довжини чисел $A$ та $B$, що рекурсію викликати або неможливо, або доцільніше використати шкільне множення.

Дно рекурсії студент може визначити самостійно. Для коректної роботи алгоритму дном рекурсії треба обирати такі довжини чисел ULI, що їх можна без втрати значень перевести у тип unsigned int та перемножити без переповнення. При цьому конкретна довжина числа ULI, яка визначає дно рекурсії, може залежати від основи системи числення.

Розглянемо процес виконання алгоритму Карацуби на прикладі множення двох чотирьохзначних десяткових чисел за умови, що дно рекурсії — це добуток двозначних чисел.

Нехай $A = 1234$, $B = 0321$. Тоді $n = 2$, $A_1 = 12$, $A_0 = 34$, $B_1 = 03$, $B_0 = 21$. Рахуємо $C_2 = 12 \cdot 3 = 36$, $C_0 = 34 \cdot 21 = 714$, $C_1 = (12+34) \cdot (3+21) - 36 - 714 = 354$. Тоді $C = 36 \cdot 10^4 + 354 \cdot 10^2 + 714 = 396114$, що і є правильним результатом.

Тут варто зазначити, що число $B$ має насправді 3 цифри, проте, оскільки число $A$ є довшим, то ми заповнили вищі розряди $B$ нулями. Це ніяк не вливає на математичне значення числа і не впливає на операції, які використовувалися під час обчислення. Це є нормальною практикою в ситуації, коли числа мають різу довжину: доповнювати коротше нулями у вищих розрядах. Так само, якби наші числа були $A = 234$, $B = 321$, для коректного ділення числа навпіл по розрядам, нам треба обидва числа згори доповнити одним нулем, щоб вийшли числа $A = 0234$, $B = 0321$. При цьому спочатку треба "дотягнути" коротше число до довшого і після цього за потреби додавати до них обох нулі. Довжини блоків $A_0$, $B_0$, $A_1$, $B_1$ мають бути однаковими. Причому на рівні програми не треба додавати нулі до std :: vector в числа. Це "дописування" нулів є лише уявним прийомом, який має ціллю пояснити процедуру коректного визначення довжини чисел

для використання алгоритму Карацуби.

В наступних алгоритмах буде спостерігатися аналогічна ситуація з числами різної довжини або з такими, що не діляться на однакову кількість розрядів. Буде вважатися, що до запуску алгоритму числа зведені до одієї довжини.

## 2.5. Швидке множення: алгоритм Тоома-Кука

Метод Тоома-Кука схожий на метод Карацуби, тільки в ньому ділення чисел відбувається на три блоки $A = \overline{A_2A_1A_0}$ та $B = \overline{B_2B_1B_0}$. Він також застосовний для чисел з будь-якою основою системи числення. Будемо вважати, що довжини чисел дорівнюють $n$, причому $n$ ділиться на 3.

1. Визначити
$$\begin{aligned} A_2 &= A >> (2n/3), \\ A_1 &= (A >> (n/3)) - (A_2 << (n/3)), \\ A_0 &= A - (A_2 << (2n/3) - (A_1 << (n/3))), \\ B_2 &= B >> (2n/3), \\ B_1 &= (B >> (n/3)) - (B_2 << (n/3)), \\ B_0 &= B - (B_2 << (2n/3) - (B_1 << (n/3))). \end{aligned}$$

2. Визначити рекурсивно 5 добутків
$$\begin{aligned} F_{0,0} &= A_0 \cdot B_0, \\ F_{1,0} &= (A_2 + A_1 + A_0) \cdot (B_2 + B_1 + B_0), \\ F_{2,0} &= (4A_2 + 2A_1 + A_0) \cdot (4B_2 + 2B_1 + B_0), \\ F_{3,0} &= (9A_2 + 3A_1 + A_0) \cdot (9B_2 + 3B_1 + B_0), \\ F_{4,0} &= (16A_2 + 4A_1 + A_0) \cdot (16B_2 + 4B_1 + B_0). \end{aligned}$$

   Тут множення на короткі числа реалізуються окремо з асимптотикою $O(n)$ або заміняються на відповідну кількість операцій додавання.

3. Визначити
   $F_{0,1} = F_{1,0} - F_{0,0}$,
   $F_{1,1} = F_{2,0} - F_{1,0}$,
   $F_{2,1} = F_{3,0} - F_{2,0}$,
   $F_{3,1} = F_{4,0} - F_{3,0}$.
4. Визначити
   $F_{0,2} = (F_{1,1} - F_{0,1})/2$,
   $F_{1,2} = (F_{2,1} - F_{1,1})/2$,
   $F_{2,2} = (F_{3,1} - F_{2,1})/2$.

   На цьому та подальших кроках ділення на коротке число має бути визначене як окрема операція з асимптотикою $O(n)$. Всі ділення згідно з теорією повинні виконуватися націло, якщо в результаті якогось ділення залишається ненульова остача, це свідчить про помилку в реалізації алгоритма.
5. Визначити $F_{0,3} = (F_{1,2} - F_{0,2})/3$, $F_{1,3} = (F_{2,2} - F_{1,2})/3$.
6. Визначити $F_{0,4} = (F_{1,3} - F_{0,3})/4$.
7. Визначити поліном
   $$P(x) = F_{0,0} + F_{0,1}x + F_{0,2}x(x-1)+$$
   $$+F_{0,3}x(x-1)(x-2) + F_{0,4}x(x-1)(x-2)(x-3).$$
8. Розкрити дужки в отриманому поліномі та отримати поліном вигляду
   $Q(x) = C_4x^4 + C_3x^3 + C_2x^2 + C_1x + C_0$.
9. Повернути значення
   $C_4 << (4n/3) + C_3 << n + C_2 << (2n/3) + C_1 << (n/3) + C_0$.

Дно рекурсії визначається аналогічно до попереднього методу. Звісно, на кроках 7 та 8 не треба визначати поліном за допомогою нового класу, з ним можна працювати як з набором коефіцієнтів в рамках даного алгоритму. Процедура розкриття дужок — це просто підрахунок комбінацій

коефіцієнтів $F$ для утворення нових коефіцієнтів $C$. Отримання конкретного вигляду цих комбінацій залишається як вправа читачеві.

Суть методу Тоома-Кука полягає в тому, що на основі чисел $A$ і $B$ будуються два квадратичних поліноми $P_1(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0$ та $P_2(x) = B_2x^2 + B_1x + B_0$. Алгоритм Тоома-Кука — це процедура знаходження коефіцієнтів поліному-добутку за допомогою процедури інтерполяції Ньютона по 5 точкам.

$$P_1(x)P_2(x) = P_3(x) = C_4x^4 + C_3x^3 + C_2x^2 + C_1x + C_0.$$

Тоді, оскільки $P_1(p^{n/3}) = A$, $P_2(p^{n/3}) = B$, то $P_3(p^{n/3}) = AB$, що і є шуканим результатом.

Асимптотична складність алгоритму: $O(n^{log_3 5}) = O(n^{1.46497})$.

## 2.6. Швидке множення: алгоритм Шенхаге

Алгоритм Шенхаге використовується тільки для двійкових чисел. Він також є рекурсивним та базується на зображенні числа через сукупність чисел меншої довжини, проте, на відміну від алгоритмів Карацуби і Тоома-Кука, він не проводить розділення чисел за розрядами. Натомість він представляє довге число $A$ через 6 коротших довгих чисел $A_1, ..., A_6$, які є результатами операції $AmodM_i$, $i = \overline{1,6}$, тобто у вигляді залишків від ділення на певним чином визначені числа $M_i$. Оригінальне число $A$ можна відновити за допомогою китайської теореми про залишки. У використанні цієї теореми і полягає основна ідея алгоритму Шенхаге.

Ще однією відмінністю алгоритма Шенхаге є визначення рівня рекурсії відповідно до довжини числа. У попередніх алгоритмах рівень рекурсії визначався тим, скільки разів можна поділити число $n$ на 2 або 3, поки ми не досягнемо достатньо малих довжин чисел. Тоді числа розбивалися на удвічі та втричі коротші. Тут ми введемо зростаючу послідовність чисел $p_n$ та

будемо множити числа довжиною $p_n$ за допомогою рекурсивних викликів алгоритму Шенхаге для множення чисел довжиною $p_{n-1}$.

Також на додачу до стандартних операцій в цьому алгоритмі використовується операція взяття остачі від ділення на числа $M_i$. Кожне таке число є по суті $2^{e_i} - 1$, де $e_i$ — коротке додатне число. Тобто в двійковому записі кожне з чисел $M_i$ є просто набором одиниць довжини $e_i$. У зв'язку з цим самі числа $M_i$ не потрібно зберігати у памяті, а працювати з ними можна, передаючи у відповідні функції короткі числа $e_i$, оскільки кожне $M_i$ повністю визначається своїм $e_i$.

Алгоритм Шенхаге використовує операції модулярної арифметики за модулями $M_i$, такі як додавання та віднімання.

Додавання за модулем — це просто додавання та подальше знаходження остачі від ділення результату на $M_i$. Віднімання за модулем працює трохи інакше (тут $A, B < M_i$):

$$A - B \bmod M_i = \begin{cases} A - B, & \text{if } A \geqslant B, \\ M_i + A - B, & \text{if } A < B. \end{cases}$$

Сама операція взяття числа $A$ по модулю $M_i$ за рахунок спеціального вигляду $M_i$ реалізується наступним чином: якщо $A < M_i$, то результатом є просто число $A$, якщо ні, то число $A$ розбивається на блоки $\overline{A_k A_{k-1} \ldots A_1 A_0}$ порозрядно, так що кожен блок $A_j$ містить $e_i$ цифр. Тоді

$$A \bmod M_i = \sum_{j=0}^{k} A_j \bmod M_i,$$

тобто виконується рекурсивний виклик.

В тексті операцію взяття числа по модулю зазвичай пишуть в самому кінці, як у виразі

$$A + B - C + D \bmod M_i.$$

Дана приписка свідчить, що всі операції насправді є операціями модулярної арифметики і даний вираз насправді є еквівалентним такому.

$$(((((A + B)\ mod\ M_i) - C)\ mod\ M_i) + D)\ mod\ M_i.$$

Саме згідно з останнім виразом рекомендується реалізовувати всі операції в межах цього алгоритму.

Сам алгоритм Шенхаге виглядає наступним чином. Вважається, що числа $A$ і $B$ мають довжину $n$.

1. Рахувати рекурентну числову послідовність $q_0 = 1$, $q_{k+1} = 3q_k - 1$, допоки число $n$ не стане менше за $p_k = 18q_k + 8$. Нехай $q_k$ — найменше число з послідовності, коли ця умова досягнута. Якщо $q_k = 1$, то перемножити два числа у стовпчик, інакше — перейти на крок 2.
2. Визначити $e_1 = 6q_k - 1, e_2 = 6q_k + 1, e_3 = 6q_k + 2, e_4 = 6q_k + 3, e_5 = 6q_k + 5, e_6 = 6q_k + 7$ та відповідні числа $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$.
3. Визначити $A_i = A\ mod\ M_i$, $B_i = B\ mod\ M_i$, $i = \overline{1,6}$. Числа $A_i, B_i$ мають довжину менше за $p_{k-1} = 18q_{k-1} + 8$.
4. Виконати рекурсивно 6 множень та отримати числа $C_i = A_iB_i$, $i = \overline{1,6}$.
5. Знайти $W_i = C_i\ mod\ M_i$, $i = \overline{1,6}$.
6. За допомогою визначеної нижче процедури $C$ виконати кроки 7-12.
7. $W_1^1 = W_1\ mod\ M_1$.
8. $W_2^1 = C(W_2 - W_1^1, M_1, M_2)\ mod\ M_2$.
9. $W_3^1 = C(C(W_3 - W_1^1, M_1, M_3) - W_2^1, M_2, M_3)\ mod\ M_3$.
10. $W_4^1 = C(C(C(W_4 - W_1^1, M_1, M_4) - W_2^1, M_2, M_4) - W_3^1, M_3, M_4) mod M_4$.
11. $W_5^1 = C(C(C(C(W_5 - W_1^1, M_1, M_5) - W_2^1, M_2, M_5) - W_3^1, M_3, M_5) - W_4^1, M_4, M_5)\ mod\ M_5$.
12. $W_6^1 = C(C(C(C(C(W_6 - W_1^1, M_1, M_6) - W_2^1, M_2, M_6) - W_3^1, M_3, M_6) -$

$W_4^1, M_4, M_6) - W_5^1, M_5, M_6) \, mod \, M_6$.

13. Повернути значення
$((((W_6^1 M_5 + W_5^1)M_4 + W_4^1)M_3 + W_3^1)M_2 + W_2^1)M_1 + W_1^1$.

Дном рекурсії в даному випадку є числа довжиною менше за $18q_0 + 8 = 26$ бітів. Такі числа можна множити в 64-розрядному процесорі без втрати точності.

Множення на $M_i$ в останньому кроці алгоритму виконується дуже просто: $AM_i = (A << e_i) - A$.

Процедура $C(U, M_i, M_j)$ виконується наступним чином.

1. За допомогою розширеного алгоритму Євкліда знайти число $b$ таке, що $be_i = 1 \, mod \, e_j$.
2. Нехай бітове зображення короткого числа $b$ наступне: $b_s b_{s-1} ... b_2 b_1 b_0$. Визначити $a_0 = e_i$, $d_0 = b_0 e_i$, $U_0 = U$, $V_0 = b_0 U$, $k = 0$.
3. Інкрементувати значення $k$. Визначити
$$a_k = 2a_{k-1} \, mod \, e_j,$$
$$d_k = (d_{k-1} + b_k a_k) \, mod \, e_j,$$
$$U_k = (U_{k-1} + U_{k-1} << a_{k-1}) \, mod \, M_j,$$
$$V_k = (V_{k-1} + b_k(U_k << d_{k-1})) \, mod \, M_j.$$
4. Якщо $k = s$, повернути значення $V_s$. Інакше повторити крок 3.

Ця процедура фактично дає результат множення за модулем $M_j$ числа $U$ та числа $C_{ij}$, що є оберненим до числа $M_i$ по модулю $M_j$. Саме число $C_{ij}$ при цьому не рахується, оскільки це займає багато часу. Процедура $C$ є доволі креативним способом отримати значення бажаного добутку без знаходження $C_{ij}$. За рахунок цього алгоритм і досягає своєї асимптотичної складності.

Асимптотична складність алгоритму Шенхаге — $O(n^{log_3 6}) = O(n^{1.6309})$.

## 2.7. Швидке множення: алгоритм Штрасена

Алгоритм Штрасена є ускладненням алгоритму Тоома-Кука, оскільки він також використовує зведення множення довгих чисел до множення поліномів, проте поліноми ці набагато складніші. Кількість блоків розрядів, на які розбиваються числа $A$ та $B$ в цьому алгоритмі, тепер визначається динамічно і залежить від довжини чисел. Так само, як і метод Шенхаге, алгоритм Штрасена використовується тільки для чисел з основою системи числення 2.

Як проміжну процедуру, алгоритм Штрасена використовує швидке перетворення Фур'є. Алгоритм цього перетворення буде описаний в наступному пункті.

Як і у випадку алгоритму Шенхаге, всі операції тут будуть виконуватися в модулярній арифметиці, тільки модулі в даному випадку будуть виглядати як $2^N+1$. Додавання та віднімання за цим модулем не відрізняється від аналогічних процедур, описаних в попередньому пункті. Проте саме взяття числа по такому модулю відбувається трохи інакше.

Якщо $A < 2^N+1$, то $A mod (2^N+1) = A$, інакше число $A$ розбивається на блоки $\overline{A_k A_{k-1} ... A_1 A_0}$ порозрядно, так що кожен блок $A_j$ містить $N$ цифр. Тоді

$$A \, mod \, (2^N+1) = (((A_0 + A_2 + A_4 + ...) \, mod \, (2^N+1)) - \\ ((A_1 + A_3 + A_5 + ...) \, mod \, (2^N+1))) \, mod \, (2^N+1),$$

тобто виконується два рекурсивних виклика.

**Алгоритм Штрасена:**

Вхідні дані: двійкові довгі числа $A$ та $B$ довжиною $n$ цифр.

1. Знайти найменше натуральне $m$ таке, що $2n \leqslant 2^m$.
2. Повернути результат виконання процедури **Множення за модулем** з параметрами $A$, $B$ та $m$.

**Множення за модулем**:

Вхідні дані: двійкові довгі числа $U, V < 2^{2^n} + 1$ та число $n$ (це вже не довжина чисел).

Вихідні дані: результат формули $UV \; mod \, (2^{2^n} + 1)$.

1. Якщо $U = 2^{2^n}$, повернути $2^{2^n} + 1 - V$. Якщо $V = 2^{2^n}$, повернути $2^{2^n} + 1 - U$. Інакше виконати кроки 2-16.
2. На цьому кроці виконується $U, V < 2^{2^n}$. Визначити $k = \lceil n/2 \rceil$, $l = \lfloor n/2 \rfloor$. Якщо $k < 6$, виконати множення чисел $U$ і $V$ методом Карацуби та повернути значення $UV \, mod (2^{2^n} + 1)$. Інакше виконати кроки 3-16.
3. Визначити $N = 2^n, K = 2^k, L = 2^l$. Ці числа насправді також є короткими. Запис цих трьох величин через великі літери є винятком із сформульованого нами на початку розділу правила. Такий запис обраний для підкреслення різниці в порядках між даними величинами та величинами $n$, $k$ та $l$.
4. Представити числа $U$ та $V$ як блоки бітів
   $\overline{U_{K-1}U_{K-2}...U_1U_0}$,
   $\overline{V_{K-1}V_{K-2}...V_1V_0}$.
   Кожне $U_i, V_i$ складається з $L$ цифр.
5. Визначити $U_r^1 = U_r \; mod \; 2^k$ та $V_r^1 = V_r \; mod \; 2^k$ для $r = \overline{0, K-1}$ (просте обрізання $\mathrm{std::vector}$).
6. Визначити

$$U^{1,1} = \sum_{r=0}^{K-1}(U_r^1 << 3kr),$$
$$V^{1,1} = \sum_{r=0}^{K-1}(V_r^1 << 3kr),$$
$$U^{1,2} = \sum_{r=0}^{K-1}(U_{K-1-r}^1 << 3kr),$$
$$V^{1,2} = \sum_{r=0}^{K-1}(V_{K-1-r}^1 << 3kr).$$

7. Методом швидкого множення Штрасена знайти добутки $W^{1,1} = U^{1,1}V^{1,1}$ та $W^{1,2} = U^{1,2}V^{1,2}$

8. Визначити
$$W_r^1 = ((W^{1,1} >> (3kr)) \, mod \, 2^k -$$
$$-(W^{1,2} >> (3k(K-r-2))) \, mod \, 2^k) \, mod \, 2^k, \; r = \overline{0, K-2},$$
$$W_{K-1}^1 = (W^{1,1} >> (3k(K-1))) \, mod \, 2^k.$$

9. Визначити $\psi = 2^{2^{l+1-k}}$,
$A_r = U_r << r(2^{l+1-k}) \, mod \, (2^{2L}+1)$,
$B_r = V_r << r(2^{l+1-k}) \, mod \, (2^{2L}+1)$,
$r = \overline{0, K-1}$.

10. Здійснити швидке перетворення Фур'є для масивів $A_r, B_r$ з параметрами $\omega = \psi^2$ та $M = 2^{2L}+1$, отримавши масиви $A_r^1, B_r^1$.

11. Рекурсивно для кожного $r = \overline{0, K-1}$ викликати процедуру **Множення за модулем** з параметрами $A_r^1$, $B_r^1$ та $l+1$. Результати позначити як $C_r^1$ відповідно.

12. Виконати швидке перетворення Фур'є для масиву $C_r^1$ з параметрами $\omega = \psi^2$ та $M = 2^{2L}+1$, отримавши масив $C_r$.

13. Визначити
$W_r^2 = (C_{K-r} << (4L - k - r(2^{l+1-k}))) \, mod \, (2^{2L}+1), \; r = \overline{1, K-1},$
$W_0^2 = (C_0 << (4L-k)) \, mod \, (2^{2L}+1).$

14. Визначити
$$W_r^3 = ((W_r^1 - W_r^2)\, mod\, 2^k) << (2L) + ((W_r^1 - W_r^2)\, mod\, 2^k) + W_r^2,$$
$$r = \overline{0, K-1}.$$

    Віднімання за модулем $2^k$ визначено так само, як і для загального значення модуля $M$.
15. Для кожного $r = \overline{0, K-1}$ визначити $W_r$ наступним чином: якщо $W_r^3 < (r+1)2^{2L}$, то $W_r = W_r^3\, mod\, (2^N + 1)$, інакше $W_r = (W_r^3 - 2^k(2^{2L} + 1))\, mod\, (2^N + 1)$.
16. Повернути значення $(\sum_{r=0}^{K-1}(W_r << rL))\, mod\, (2^N + 1)$.

По суті величини $W_r$ в даній процедурі є так званими "згортками" коефіцієнтів $U_r$ та $V_r$.

$$W_r = (U_rV_0 + U_{r-1}V_1 + ... + U_0V_r) - (U_{K-1}V_{r+1} + ... + U_{r+1}V_{K-1})\, mod\, (2^N + 1).$$

Ці величини є ключовими в обрахунку цифр числа-добутку. Швидке отримання згорток і є суттю більшості алгоритмів швидкого множення. В алгоритмі Штрасена це досягається за рахунок того, що спочатку визначаються більш короткі складові $W_r^1$ та більш довгі складові $W_r^2$, з яких на кроці 14 за формулою, яка нагадує формули методу Шенхаге, збирається число $W_r^3$, яке не дуже сильно відрізняється від потрібного нам значення $W_r$. Фактично, формула з кроку 14 може бути переписана наступним чином.

$$W_r^3 = (2^{2L} + 1)((W_r^1 - W_r^2)\, mod\, 2^k) + W_r^2.$$

Коротші компоненти $W_r^1$ отримуються за рахунок двох рекурсивних викликів алгоритму Штрасена для згрупованих разом компонент $U_r^1$ та $V_r^1$ (крок 7). Для довших компонент згортки обраховуються за допомогою швидкого перетворення Фур'є. Саме розбиття на дві частини (коротшу та

довшу) кожної компоненти обумовлено потребами оптимального зменшення кількості цифр під час виклику рекурсії. Коротша частина в даному випадку просто уточнює довшу. За рахунок цього алгоритм має найкращу асимптотичну швидкість.

Асимптотична складність алгоритму Штрасена — $O(n \ln n \ln \ln n)$.

## 2.8. Швидке перетворення Фур'є

Під час опису алгоритму швидкого перетвоорення Фур'є ми будемо часто записувати короткі числа у двійковому записі $t = (t_{k-1}t_{k-2}...t_1t_0)_2$. Варто памятати, що цей набір цифр є одним числом.

**Алгоритм швидкого перетворення Фур'є.**

Вхідні дані: масив довгих цілих невід'ємних чисел $(A_0, A_1, ...., A_{K-1})$, $K = 2^k$, число $\omega$ та модуль $M$.

Вихідні дані: масив нових довгих цілих невідємних чисел $(A_0^1, A_1^1, ...., A_{K-1}^1)$.

Перед початком виконання зручно порахувати значення $\omega^2, \omega^4, ...., \omega^{2^{k-1}}$. Тоді, коли нам треба буде порахувати степінь $\omega^t = \omega^{(t_{k-1}t_{k-2}...t_1t_0)_2}$, ми можемо формувати цю степінь як добуток обчислених значень $\omega^t = \prod \omega^{2^i}$, де добуток береться по тим степеням, для яких відповідне $t_i \neq 0$.

Спочатку ми визначаємо масив $B^0$ з $K$ довгих чисел, використовуючи вхідні дані:

$$B^0[(t_{k-1}t_{k-2}...t_1t_0)_2] = A_{(t_{k-1}t_{k-2}...t_1t_0)_2},\ t = (t_{k-1}t_{k-2}...t_1t_0)_2,\ 0 \leqslant t < K.$$

На 1 кроці для $t$ від 0 до $K-1$ заповнюємо новий масив довгих чисел

$$B^1[(t_{k-1}t_{k-2}...t_1t_0)_2] = (B^0[(0t_{k-2}...t_1t_0)_2] + \omega^{(t_{k-1}0...0)_2} B^0[(1t_{k-2}...t_1t_0)_2]) mod M.$$

На 2 кроці виконуємо аналогічну процедуру, зміщаючись по розрядам

індексів.

$$B^2[(t_{k-1}t_{k-2}...t_1t_0)_2] = (B^1[(t_{k-1}0t_{k-3}...t_1t_0)_2]+$$
$$+\omega^{(t_{k-2}t_{k-1}0...0)_2}B^1[(t_{k-1}1t_{k-3}...t_1t_0)_2])\ mod\ M.$$

Зверніть увагу, що степінь $\omega$ заповнюється в зворотньому порядку.

Продовжуємо аналогічні дії, поки не досягнемо кроку $k$.

$$B^k[(t_{k-1}t_{k-2}...t_1t_0)_2] = (B^{k-1}[(t_{k-1}t_{k-2}...t_10)_2]+$$
$$+\omega^{(t_0t_1...t_{k-1})_2}B^{k-1}[(t_{k-1}t_{k-2}...t_11)_2])\ mod\ M.$$

Для кожного $t = (t_{k-1}t_{k-2}...t_1t_0)_2$ визначаємо компоненти масиву-відповіді:

$$A^1[(t_{k-1}t_{k-2}...t_1t_0)_2] = B^k[(t_0t_1...t_{k-1})_2].$$

В цій формулі також присутня зміна порядку бітів.

Суть застосування перетворення Фур'є в рамках алгоритму Штрасена полягає в тому, що за допомогою цього перетворення ми можемо швидко перейти від поліномів до їхніх значень на наборі точок. Так, вхідні дані перетворення Фур'є можна інтепретувати як коефіцієнти деякого полінома. Вихідні — як значення цього полінома у точках 1, $\omega$, $\omega^2$, ... Тоді, отримавши набори значень для двох поліномів, ми перемножуємо їх покомпонентно (крок 11 процедури **Множення за модулем**) та повертаємося назад до коефіцієнтів поліному-добутку. Ідея така сама, як і в алгоритмі Тоома-Кука. Проте за рахунок спеціального вибору степені поліномів та значення $\omega$ процедура суттєво спрощується, оскільки, по-перше, степінь поліному-добутка співпадає зі степенями поліномів-множників, і, по-друге, для повернення "назад" від значень до поліномів нам не треба вигадувати нову процедуру оберненого перетворення Фур'є, а достатньо виконати ще одне перетворення "вперед" (крок 12 процедури **Множення за модулем**) і після цього лише змінити порядок отриманих значень та трохи їх змістити (крок 13 процедури **Множення за модулем**). За цими простими діями приховується доволі складна та цікава математика, про яку можна почитати у відповідній літературі.

## 2.9. Швидке множення: алгоритм Штрасена: приклад

В цьому пункті ми покажемо, що алгоритм Штрасена дійсно працює, розглянувши приклад множення двох маленьких чисел. Ми проігноруємо перевірку умови дна рекурсії в процедурі **Множення за модулем** та спробуємо знайти добуток чисел $A = 7$ та $B = 5$. При цьому ми будемо також ігнорувати рекурсивні виклики, вважаючи, що всі допоміжні множення ми можемо зробити руками. Оскільки алгоритм Штрасена працює для двійкових чисел, то в цьому пункті там, де це неочевидно, ми будемо вказувати, що записані нами числа мають основу системи числення 2. Це буде позначатися відповідним індексом внизу біля числа.

Алгоритм Штрасена($A = 7 = 111_2$, $B = 5 = 101_2$).

Крок 1. Обидва числа мають по $n = 3$ цифри, тому мінімальне $m$ дорівнює 3 ($2 \cdot 3 = 6 \leqslant 8 = 2^3$).

Крок 2. Виклик процедури **Множення за модулем** з параметрами $111_2$, $101_2$ та 3.

**Множення за модулем**($U = 00000111_2$, $V = 00000101_2$, $n = 3$).

Крок 1. Жодне з чисел $U$, $V$ не дорівнює $2^{2^3} = 256 = 100000000_2$, тому переходимо до кроку 2.

Крок 2. $k = \lceil 3/2 \rceil = 2$, $l = \lfloor 3/2 \rfloor = 1$. Дно рекурсії ми ігноруємо та переходимо на крок 3.

Крок 3. $N = 2^3 = 8$, $K = 2^2 = 4$, $L = 2^1 = 2$.

Крок 4.

$$U_0 = 11_2,\ V_0 = 01_2,$$

$$U_1 = 01_2,\ V_1 = 01_2,$$

$$U_2 = 00_2,\ V_2 = 00_2,$$

$$U_3 = 00_2,\ V_3 = 00_2.$$

Крок 5.

$$U_0^1 = 11_2 \, mod \, 2^2 = 11_2, \; V_0^1 = 01_2 \, mod \, 2^2 = 01_2,$$
$$U_1^1 = 01_2 \, mod \, 2^2 = 01_2, \; V_1^1 = 01_2 \, mod \, 2^2 = 01_2,$$
$$U_2^1 = 00_2 \, mod \, 2^2 = 00_2, \; V_2^1 = 00_2 \, mod \, 2^2 = 00_2,$$
$$U_3^1 = 00_2 \, mod \, 2^2 = 00_2, \; V_3^1 = 00_2 \, mod \, 2^2 = 00_2.$$

Крок 6.

$$U^{1,1} = 11_2 + 01_2 << (3 \cdot 2 \cdot 1) + 00_2 << (3 \cdot 2 \cdot 2) + 00_2 << (3 \cdot 1 \cdot 3) =$$
$$= 1000011_2 = 67,$$
$$V^{1,1} = 01_2 + 01_2 << (3 \cdot 2 \cdot 1) + 00_2 << (3 \cdot 2 \cdot 2) + 00_2 << (3 \cdot 1 \cdot 3) =$$
$$= 1000001_2 = 65,$$
$$U^{1,2} = 00_2 + 00_2 << (3 \cdot 2 \cdot 1) + 01_2 << (3 \cdot 2 \cdot 2) + 11_2 << (3 \cdot 1 \cdot 3) =$$
$$= 11000001000000000000_2 = 193 \cdot 2^{12},$$
$$V_{1,2} = 00_2 + 00_2 << (3 \cdot 2 \cdot 1) + 01_2 << (3 \cdot 2 \cdot 2) + 01_2 << (3 \cdot 1 \cdot 3) =$$
$$= 10000010000000000000_2 = 65 \cdot 2^{12}.$$

Крок 7.

$$W^{1,1} = 1000100000011_2 = 4355,$$
$$W_{1,2} = 11000100000001000000000000000000000000_2 = 12545 \cdot 2^{24}.$$

Тут ми отримали ситуацію, коли для знаходження добутку трицифрових чисел, нам потрібно помножити набагато довші числа. Зрозуміло, що це викликано тим, що ми проігнорували дно рекурсії кроці 2. Така ж ситуація буде і на кроці 11.

Крок 8.

$$W_0^1 = ((W^{1,1})\ mod : 2^2 - (W^{1,2} >> (3 \cdot 2(4-0-2)))\ mod\, 2^2)\ mod\, 2^2 =$$
$$= ((W^{1,1})\ mod : 2^2 - (W^{1,2} >> 12)\ mod\, 2^2)\ mod\, 2^2 = 11_2 = 3,$$
$$W_1^1 = ((W^{1,1} >> (3 \cdot 2 \cdot 1))\ mod : 2^2 -$$
$$-(W^{1,2} >> (3 \cdot 2(4-1-2)))\ mod\, 2^2)\ mod\, 2^2 =$$
$$= ((W^{1,1} >> 6)\ mod : 2^2 - (W^{1,2} >> 6)\ mod\, 2^2)\ mod\, 2^2 = 00_2 = 0,$$
$$W_2^1 = ((W^{1,1} >> (3 \cdot 2 \cdot 2))\ mod : 2^2 -$$
$$-(W^{1,2} >> (3 \cdot 2(4-2-2)))\ mod\, 2^2)\ mod\, 2^2 =$$
$$= ((W^{1,1} >> 12)\ mod : 2^2 - (W^{1,2})\ mod\, 2^2)\ mod\, 2^2 = 01_2 = 1,$$
$$W_3^1 = ((W^{1,1} >> (3 \cdot 2 \cdot 3)))\ mod\, 2^2 =$$
$$= (W^{1,1} >> 18)\ mod : 2^2 = 00_2 = 0.$$

Крок 9. $2^{1+1-2} = 1$, $\psi = 2^{2^{1+1-2}} = 2^{2^0} = 2$. $2^{2 \cdot 1} + 1 = 5$

$$A_0 = 11_2 << (0 \cdot 1)\ mod\ (5) = 11_2,\ B_0 = 01_2 << (0 \cdot 1)\ mod\, 5 = 01_2,$$
$$A_1 = 01_2 << (1 \cdot 1)\ mod\ (5) = 10_2,\ B_1 = 01_2 << (1 \cdot 1)\ mod\, 5 = 01_2,$$
$$A_2 = 00_2 << (2 \cdot 1)\ mod\ (5) = 00_2,\ B_2 = 00_2 << (2 \cdot 1)\ mod\, 5 = 00_2,$$
$$A_3 = 00_2 << (3 \cdot 1)\ mod\ (5) = 00_2,\ B_3 = 00_2 << (3 \cdot 1)\ mod\, 5 = 00_2.$$

Крок 10. $\omega = 2^2 = 4 = 100_2$, $M = 2^{2 \cdot 2} + 1 = 17$.

Робимо перетворення Фур'є для параметрів $B^0 = [11_2, 10_2, 00_2, 00_2]$, $\omega = 4$ та $M = 17$.

$B^0_{00_2} = 11_2$, $B^0_{01_2} = 10_2$, $B^0_{10_2} = 00_2$, $B^0_{11_2} = 00_2$.

$$B^1_{00_2} = B^0_{00_2} + \omega^{00_2} B^0_{10_2} \mod 17 = 11_2 + 1 \cdot 00_2\ mod\, 17 = 11_2,$$
$$B^1_{01_2} = B^0_{01_2} + \omega^{00_2} B^0_{11_2} \mod 17 = 10_2 + 1 \cdot 00_2\ mod\, 17 = 10_2,$$
$$B^1_{10_2} = B^0_{00_2} + \omega^{10_2} B^0_{10_2} \mod 17 = 11_2 + 16 \cdot 00_2\ mod\, 17 = 11_2,$$
$$B^1_{11_2} = B^0_{01_2} + \omega^{10_2} B^0_{11_2} \mod 17 = 10_2 + 16 \cdot 00_2\ mod\, 17 = 10_2.$$

$$B^2_{00_2} = B^1_{00_2} + \omega^{00_2} B^1_{01_2} \mod 17 = 11_2 + 1 \cdot 10_2 \, mod \, 17 =$$
$$= 5 \, mod \, 17 = 5,$$
$$B^2_{01_2} = B^1_{00_2} + \omega^{10_2} B^1_{01_2} \mod 17 = 11_2 + 16 \cdot 10_2 \, mod \, 17 =$$
$$= 35 \, mod \, 17 = 1,$$
$$B^2_{10_2} = B^1_{10_2} + \omega^{01_2} B^1_{11_2} \mod 17 = 11_2 + 4 \cdot 10_2 \, mod \, 17 =$$
$$= 11 \, mod \, 17 = 11,$$
$$B^2_{11_2} = B^1_{10_2} + \omega^{11_2} B^1_{11_2} \mod 17 = 11_2 + 64 \cdot 10_2 \, mod \, 17 =$$
$$= 131 \, mod \, 17 = 12.$$

Визначаємо $A^1_r$.

$$A^1_{00_2} = B^2_{00_2} = 5, \; A^1_{01_2} = B^2_{10_2} = 11,$$
$$A^1_{10_2} = B^2_{01_2} = 1, \; A^1_{11_2} = B^2_{11_2} = 12.$$

$A^1 = [5, 11, 1, 12]$.

Тепер робимо перетворення Фур'є для параметрів $B^0 = [01_2, 10_2, 00_2, 00_2]$, $\omega = 4$ та $M = 17$.

$B^0_{00_2} = 01_2, \; B^0_{01_2} = 10_2, \; B^0_{10_2} = 00_2, \; B^0_{11_2} = 00_2$.

$$B^1_{00_2} = B^0_{00_2} + \omega^{00_2} B^0_{10_2} \mod 17 = 01_2 + 1 \cdot 00_2 \, mod \, 17 = 01_2,$$
$$B^1_{01_2} = B^0_{01_2} + \omega^{00_2} B^0_{11_2} \mod 17 = 10_2 + 1 \cdot 00_2 \, mod \, 17 = 10_2,$$
$$B^1_{10_2} = B^0_{00_2} + \omega^{10_2} B^0_{10_2} \mod 17 = 01_2 + 16 \cdot 00_2 \, mod \, 17 = 01_2,$$
$$B^1_{11_2} = B^0_{01_2} + \omega^{10_2} B^0_{11_2} \mod 17 = 10_2 + 16 \cdot 00_2 \, mod \, 17 = 10_2.$$

$$B^2_{00_2} = B^1_{00_2} + \omega^{00_2} B^1_{01_2} \mod 17 = 01_2 + 1 \cdot 10_2 \, mod \, 17 =$$
$$= 3 \, mod \, 17 = 3,$$
$$B^2_{01_2} = B^1_{00_2} + \omega^{10_2} B^1_{01_2} \mod 17 = 01_2 + 16 \cdot 10_2 \, mod \, 17 =$$
$$= 33 \, mod \, 17 = 16,$$
$$B^2_{10_2} = B^1_{10_2} + \omega^{01_2} B^1_{11_2} \mod 17 = 01_2 + 4 \cdot 10_2 \, mod \, 17 =$$
$$= 9 \, mod \, 17 = 9,$$
$$B^2_{11_2} = B^1_{10_2} + \omega^{11_2} B^1_{11_2} \mod 17 = 01_2 + 64 \cdot 10_2 \, mod \, 17 =$$
$$= 129 \, mod \, 17 = 10.$$

Визначаємо $B^1_r$.

$$B^1_{00_2} = B^2_{00_2} = 3, \; B^1_{01_2} = B^2_{10_2} = 9,$$
$$B^1_{10_2} = B^2_{01_2} = 16, \; B^1_{11_2} = B^2_{11_2} = 10.$$

$B^1 = [3, 9, 16, 10]$.

Крок 11. $l + 1 = 2$, $2^{2^{l+1}} + 1 = 17$.

$$C^1_0 = 5 \cdot 3 \, mod \, 17 = 15 \, mod \, 17 = 15,$$
$$C^1_1 = 11 \cdot 9 \, mod \, 17 = 99 \, mod \, 17 = 14,$$
$$C^1_2 = 1 \cdot 16 \, mod \, 17 = 16 \, mod \, 17 = 16,$$
$$C^1_3 = 12 \cdot 10 \, mod \, 17 = 120 \, mod \, 17 = 1.$$

Крок 12.

Робимо перетворення Фур'є для параметрів $B^0 = [15, 14, 16, 1]$, $\omega = 4$ та $M = 17$.

$B^0_{00_2} = 15$, $B^0_{01_2} = 14$, $B^0_{10_2} = 16$, $B^0_{11_2} = 1$.

$$B^1_{00_2} = B^0_{00_2} + \omega^{00_2} B^0_{10_2} \mod 17 = 15 + 1 \cdot 16 \, mod \, 17 = 14,$$
$$B^1_{01_2} = B^0_{01_2} + \omega^{00_2} B^0_{11_2} \mod 17 = 14 + 1 \cdot 1 \, mod \, 17 = 15,$$
$$B^1_{10_2} = B^0_{00_2} + \omega^{10_2} B^0_{10_2} \mod 17 = 15 + 16 \cdot 16 \, mod \, 17 = 16,$$
$$B^1_{11_2} = B^0_{01_2} + \omega^{10_2} B^0_{11_2} \mod 17 = 14 + 16 \cdot 1 \, mod \, 17 = 13.$$

$$B^2_{00_2} = B^1_{00_2} + \omega^{00_2} B^1_{01_2} \mod 17 = 14 + 1 \cdot 15 \, mod \, 17 = 12,$$
$$B^2_{01_2} = B^1_{00_2} + \omega^{10_2} B^1_{01_2} \mod 17 = 14 + 16 \cdot 15 \, mod \, 17 = 16,$$
$$B^2_{10_2} = B^1_{10_2} + \omega^{01_2} B^1_{11_2} \mod 17 = 16 + 4 \cdot 13 \, mod \, 17 = 0,$$
$$B^2_{11_2} = B^1_{10_2} + \omega^{11_2} B^1_{11_2} \mod 17 = 16 + 64 \cdot 13 \, mod \, 17 = 15.$$

Визначаємо $C_r$.

$$C_{00_2} = B^2_{00_2} = 12, \; C_{01_2} = B^2_{10_2} = 0,$$
$$C_{10_2} = B^2_{01_2} = 16, \; C_{11_2} = B^2_{11_2} = 15.$$

$C = [12, 0, 16, 15]$.

Крок 13.

$$W^2_0 = (12 << (4 \cdot 2 - 2)) \, mod \, 17 = 12 \cdot 64 \, mod \, 17 = 3,$$
$$W^2_1 = (15 << (4 \cdot 2 - 2 - 1 \cdot 1)) \, mod \, 17 = 15 \cdot 32 \, mod \, 17 = 4,$$
$$W^2_2 = (16 << (4 \cdot 2 - 2 - 2 \cdot 1)) \, mod \, 17 = 16 \cdot 16 \, mod \, 17 = 1,$$
$$W^2_1 = (0 << (4 \cdot 2 - 2 - 3 \cdot 1)) \, mod \, 17 = 0 \cdot 8 \, mod \, 17 = 0.$$

Крок 14.

$$W^3_0 = ((3 - 3) \, mod \, 2^2) << (2 \cdot 2) + (3 - 3) \, mod \, 2^2 + 3 = 3,$$
$$W^3_1 = ((0 - 4) \, mod \, 2^2) << (2 \cdot 2) + (0 - 4) \, mod \, 2^2 + 4 = 4,$$
$$W^3_2 = ((1 - 1) \, mod \, 2^2) << (2 \cdot 2) + (1 - 1) \, mod \, 2^2 + 1 = 1,$$
$$W^3_3 = ((0 - 0) \, mod \, 2^2) << (2 \cdot 2) + (0 - 0) \, mod \, 2^2 + 0 = 0.$$

Крок 15.

$$3 < (0+1)2^{2\cdot 2} \implies W_0 = 3 = 11_2,$$
$$4 < (1+1)2^{2\cdot 2} \implies W_1 = 4 = 100_2,$$
$$1 < (2+1)2^{2\cdot 2} \implies W_2 = 1,$$
$$0 < (3+1)2^{2\cdot 2} \implies W_3 = 0.$$

Крок 16.

$$7 \cdot 5 \, mod \, 257 = 11_2 + 100_2 << (1 \cdot 2) + 1 << (2 \cdot 2) + 0 << (3 \cdot 2) =$$
$$= 11_2 + 10000_2 + 10000_2 + 0 = 100011_2 = 35.$$

Таким чином, ми отримали правильний результат.

### 2.10. Знаходження оберненого числа та швидке ділення

Нехай ми маємо довге ціле невідємне число $A = a_1 a_2 ....$ у двійковому записі. Алгоритм Кука дозволяє для дробового числа $V = 0.a_1 a_2 ...$ знайти число $X$, записане у форматі $xxxx.xxxx$, таке що виконується нерівність

$$|X - 1/V| \leqslant 2^{-n},$$

де $n$ — довільне наперед задане додатне число, $1/V$ — математично точне значення оберненого до $V$ числа.

Перш ніж описувати алгоритм Кука, необхідно зазначити, що для його реалізації необхідно вміти зберігати та обробляти довгі невід'ємні дробові числа. Це можна зробити, утворивши клас-обгортку ULF для класу ULI, який в якості полів буде містити довге ціле число $N$ та ще один параметр point, який вказуватиме на місцезнаходження в масиві цифр точки, що розділяє цілу та дробову частини числа.

```
class ULF {
    ...
```

```
    private:
        ULI N;
        unsigned int point;
};
```

Усі операції, визначені для ULI, доволі простим чином реалізуються для ULF.

**Алгоритм Кука.**

Вхідні дані: двійкове довге невідємне дробове число $V = 0.v_1v_2...$, додатне число $n$.

1. Визначити $X = \frac{1}{4}\lfloor\frac{32}{4v_1+2v_2+v_3}\rfloor$, $k = 0$.
2. За допомогою операції швидкого множення знайти число $U = V_kX^2$, де $V_k = (0.v_1v_2...v_{2^{k+1}+3})$.
3. Оновити $X = 2X - U$ та округлити його вгору до $2^{k+1} + 1$ знака після крапки.
4. Інкрементувати $k$.
5. Якщо $2^k < n$, повернутися на крок 2, інакше — повернути число $X$.

Фактично алгоритм Кука — це ітераційний процес розв'язання рівняння $1/x - V = 0$ методом дотичних (методом Ньютона). Детальніше про цей метод можна дізнатися в літературі з чисельних методів.

Цілочисельне ділення двох довгих невід'ємних цілих чисел відбувається за тим принципом, що поділити на якесь число — це все одно, що помножити на обернене до нього. Таким чином в діленні використовується алгоритм Кука.

**Алгоритм цілочисельного ділення.**

Вхідні дані: довгі числа $U$, $V$ довжиною $n$.

Вихідні дані: Довге число $Q$, таке що $0 \leqslant U - QV < V$.

1. Якщо $U < V$, повернути 0. Інакше виконати кроки 2-4.

2. За допомогою алгоритма Кука знайти число $X$, обернене до $V$ з точністю $n$.
3. За допомогою швидкого множення знайти добуток $Q = XU$.
4. Перевірити, що $0 \leqslant U - QV < V$. Якщо нерівності виконуються, повернути $Q$. Якщо ні, то збільшити або зменшити $Q$ на 1 в залежності від того, яка саме нерівність не виконується. Повторити цей крок.

Якщо в якості алгоритму швидкого множення використовувати алгоритм Штрасена, то асимптотична складність як пошуку оберненого числа, так і ділення складатиме $O(n \ln n \ln \ln n)$.

На основі алгоритму ділення доволі легко написати алгоритм, що реалізує знаходження остачі від ділення. Таким чином, ми можемо доповнити таблицю операцій з пункту 2.3 операціями '/' та '%' з відповідними асимптотиками.

## 2.11. Рекомендації до написання лабораторної роботи без використання стандартної бібліотеки мови C++

Єдиний контейнер зі стандартної бібліотеки, який використовується у цій лабораторній, це std :: vector. Тобто, для того, щоб позбутися залежності від стандартної бібліотеки мови C++, потрібно лише побудувати свій клас-обгортку для динамічного масиву цифр.

Задача це нескладна, єдині дві операції, які потребують обговорення, — це розширення масиву за потреби та перевірка, чи не потрібно масив зменшувати.

Обидві ці операції відбуваються за наступною схемою:

1. Створення нового масиву.
2. Копіювання даних.
3. Видалення старого масиву.

Дані операції мають лінійну асимптотику по кількості елементів масиву цифр і не вливають на асимптотику більшості операцій. Проте як розширення, так і зменшення масиву може бути спричинене операцією над об'єктом класу ULI, яка дає доступ до окремої цифри. Ця операція повинна мати константну асимптотику, але досягти її можливо лише "в середньому".

Так, якщо масив потребує розширення, його варто збільшувати одразу удвічі. Тоді за "нормальної" роботи з цифрами його ще деякий не треба буде збільшувати, а, отже, і викликати відповідну лінійну функцію.

Так само і з процедурою зменшення. Викликається вона, лише якщо верхня половина розрядів у поточному масиві зберігає нулі. І зменшення також відбувається удвічі.

Звісно, замість збільшення та зменшення удвічі, можна реалізувати і зміну втричі розміру масиву, або в чотири рази, або визначити для цього довільну константу. При цьому варто орієнтуватися на те, якої довжини бувають числа в програмі та наскільки сильно ця довжина може змінюватися.

## 2.12. Алгоритми перевірки на простоту

**Алгоритм Люка-Лемера.**

Вхідні дані: число Мерсенна $M_q$ (число вигляду $2^q - 1$).

Вихідні дані: однозначна відповідь "так" або "ні" на питання "чи є число $M_q$ простим?"

1. Обробити випадок $q < 3$ як сукупність часткових випадків.
2. Визначити послідовність довгих чисел $L_0 = 4$, $L_{n+1} = (L_n^2 - 2) mod M_q$.
3. Обчислити $L_{q-2}$. Якщо результатом є 0, повернути відповідь так, інакше — ні.

Зрозуміло, що для використання цього методу зручно зберігати числа в двійковому записі. Тоді операцію взяття залишку можна обчислювати за

алгоритмом з пункту 2.6.

Наступні три алгоритми є ймовірнісними, тобто вони не дають точну відповідь, чи є число простим чи ні, проте відповідь може бути правильною з певною ймовірністю.

Фактично, результати всіх трьох методів можна описати однаково: якщо метод каже, що число складене, то воно точно складене, якщо метод каже, що число просте, то воно може бути як простим, так і складеним з певною ймовірністю. Щоб підвищити ймовірність правильної відповіді, тести Рабіна-Міллера та Соловєя-Штрасена використовують раунди перевірки. Чим більша кількість раундів, тим надійніша відповідь.

В алгоритмах Рабіна-Міллера та Соловєя-Штрасена використовуються випадкові довгі числа. Отримати таке число можна різними способами: або адаптувати алгоритми першої лабораторної роботи так, щоб вони працювали з довгими цілими числами, або генерувати кожну цифру випадкового довгого числа, або генерувати одразу блоки цифр випадкового довгого числа. Конкретна стратегія генерації довгого випадкового числа залишається на розсуд студента.

**Алгоритм Рабіна-Міллера.**

Вхідні дані: довге непарне число $N > 2$, кількість раундів $k$.

Вихідні дані: відповідь з певною ймовірністю.

1. Визначити $s$ та $T$, такі що $2^s T = N - 1$.
2. Повторити кроки 3-10 $k$ разів (раундів). Якщо під час виконання цих раундів алгоритм не зупиниться, перейти на крок 11.
3. Згенерувати довге випадкове ціле число $A$ з проміжку $[2, N - 2]$.
4. Визначити $X = A^T \; mod \; N$.
5. Якщо $X = 1$ або $X = N - 1$, перейти до наступного раунду, інакше — перейти на крок 6.
6. Виконати кроки 7-10 $s - 1$ разів.

7. Оновити $X = X^2 \, mod \, N$.
8. Якщо $X = 1$, перейти на наступну ітерацію циклу по $s$, інакше — перейти на крок 9.
9. Якщо $X = N - 1$, перейти до наступного раунду, інакше — перейти на крок 10.
10. Повернути результат “складене”
11. Повернути результат “ймовірно просте”.

Вираз на кроці 4 обчислюється за допомогою алгоритмів швидкого зведення до степені за модулем. Інакше проміжні обчислення займають дуже багато часу.

**Алгоритм Соловєя-Штрасена.**

Вхідні дані: довге непарне число $N > 2$, кількість раундів $k$.

Вихідні дані: відповідь з певною ймовірністю.

1. Повторити кроки 2-4 $k$ разів (раундів). Якщо під час виконання цих раундів алгоритм не зупиниться, перейти на крок 5.
2. Згенерувати довге випадкове ціле число $A$ з проміжку $[2, N - 2]$.
3. Якщо найбільший спільний дільник чисел $A$ та $N$ більше за 1, повернути результат “складене”.
4. Якщо $A^{\frac{N-1}{2}} \neq Jacobi(A, N) \, mod \, N$, повернути результат “складене”. Тут $Jacobi(A, N)$ — символ Якобі.
5. Повернути результат “ймовірно просте”.

Обчислення НСД двох чисел відбувається за алгоритом Євкліда, обчислення символа Якобі для двох чисел виконується за наступним рекурсивним алгоритмом.

**Символ Якобі** $Jacobi(A, N)$.

Вхідні дані: числа $A$, $N$.

Вихідні дані: одне з чисел -1,0,1.

1. якщо $A = 0$, повернути 0.
2. якщо $A = 1$, повернути 1.
3. Визначити число $e$ та непарне число $A_1$, такі що $A = 2^e A_1$
4. Якщо $e$ — парне, визначити $s = 1$. Інакше, якщо $N = \pm 1 \; mod \; 8$, визначити $s = 1$. Інакше визначити $s = -1$.
5. Якщо $N = 3 \; mod \; 4$ і $A_1 = 3 \; mod \; 4$, змінити знак $s$.
6. Визначити $N_1 = N \; mod \; A_1$.
7. Якщо $A_1 = 1$, повернути $s$. Інакше повернути $s \cdot Jacobi(N_1, A_1)$.

Метод Фробеніуса використовує алгебраїчні операції над виразами типу $A + B\sqrt{c}$, де $A$,$B$,$c$ — деякі цілі числа. Такі вирази називаються квадратичними ірраціональностями. Додавання цих виразів працює за правилом додавання компонент

$$(A_1 + B_1\sqrt{c}) + (A_2 + B_2\sqrt{c}) = (A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)\sqrt{c}.$$

Віднімання працює аналогічно. При множенні використовується величина $c$.

$$(A_1 + B_1\sqrt{c})(A_2 + B_2\sqrt{c}) = (A_1A_2 + B_1B_2c) + (A_2B_1 + A_1B_2)\sqrt{c}.$$

Взяття такого виразу за модулем цілого числа також відбувається покомпонентно.

$$(A + B\sqrt{c}) \; mod \; N = (A \; mod \; N) + (B \; mod \; N)\sqrt{c}.$$

**Алгоритм Фробеніуса.**

Вхідні дані: довге непарне число $N > 2$.

Вихідні дані: відповідь з певною ймовірністю.

1. Визначити число $c$ як найменше число з послідовності -1,2,3,5,7,11,13,..., таке що $Jacobi(c, N) = -1$.
2. Якщо $c \leqslant 2$, то визначити $A = 2$, інакше $A = 1$.
3. Визначити $X = A + \sqrt{c}$.
4. Якщо $X^N \, mod \, N = A + (N - 1)\sqrt{c}$, повернути результат "ймовірно просте", інакше — "складене"

Як видно, даний алгоритм також використовує символ Якобі. В пункті 4 для обчислень знову доцільно використовувати алгоритми швидкого зведення до степені за модулем.

# РОЗДІЛ 3
# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3: АЛГОРИТМИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Алгоритми обчислювальної геометрії стосуються задач, які виникають під час роботи з графікою, оскільки більшість обчислень в ній мають геометричний зміст. Як і в попередній лабораторній, критичним показником є швидкість алгоритмів.

Третя лабораторна складається з двох блоків: перші два — пов'язані між собою алгоритми побудови діаграми Вороного та тріангуляції Делоне, та чотири алгоритми побудови опуклої оболонки. Ці задачі є доволі розповсюдженими в графіці. Вхідними даними в цій лабораторній завжди є масив точок на площині з координатами типу **double**. У якості вихідних даних пропонується використовувати спеціальну структуру подвійно зв'язаного списку ребер ПЗСР (DCEL), яка є доволі зручною для роботи з плоскими графами. Сформований ПЗСР далі передається в допоміжну програму для виведення графіки.

Методичні рекомендації будуть стосуватися саме принципів роботи алгоритмів. Спосіб виведення графіки та бібліотеки, які при цьому використовуються, оглядатися не будуть.

У зв'язку з тим, що в цій лабораторній робота ведеться зі значеннями типу **float** та **double**, рекомендується порівнювати ці числа з деякою точністю $\epsilon$ для уникнення проблем, пов'язаних з втратою точності в малих розрядах. Так, варто визначити глобальну змінну $\epsilon$ з достатньо малим значенням ($\approx 10^{-15}$) та якщо треба виконати, наприклад, перевірку $a < b$, реалізовувати перевірку рівності двох чисел з точністю $\epsilon$ за допомогою формули $|a - b| < \epsilon$ і у випадку, якщо значення цього виразу є False, порів-

нювати числа як зазвичай за допомогою формули $a < b$. Якщо ж результат перевірки на наближену рівність чисел є True, то тоді треба вважати, що два числа є насправді рівними між собою і, відповідно, вираз $a < b$ є хибним. В інших операціях порівняння слід робити аналогічно.

Також варто зазначити, що для лаконічності наведеного коду в цьому розділі ми будемо використовувати структури замість класів. Тим не менше, це рішення має мотивацію виключно методичного характеру і автори наполягають, щоб повноцінна реалізація алгоритмів з цього розділу відповідала принципу інкапсуляції даних. Читачі, які дійшли до цього розділу та успішно виконали методи попередніх лабораторних, повинні мати уявлення про те, які в такому випадку модифікації необхідно зробити до наведеного в цьому розділі коду.

## 3.1. Умова

1. Реалізувати алгоритм Форчуна побудови діаграми Вороного для набору точок на площині.

2. Здійснити тріангуляцію Делоне для набору точок на площині.

Реалізувати наступні алгоритми побудови опуклої оболонки набору точок на площині:

3. Алгоритм Кейла-Кіркпатріка

4. Алгоритм Ендрю-Джарвіса

5. Алгоритм Грехема.

6. Рекурсивний алгоритм.

## 3.2. Подвійно зв'язаний список ребер

Вихідні дані для кожного алгоритму з цієї лабораторної роботи структуровані у так званий подвійно зв'язаний список ребер. По суті це структура, що складається з трьох списків: списку вершин, списку граней та

списку напівребер. Кожне звичайне ребро складється з двох напівребер, що направлені в протилежні сторони по лінії ребра.

Ци списки пов'язані між собою системою вказівників:

— кожна вершина містить свої координати та вказівник на одне з напівребер, яке починаються в цій вершині;

— кожна грань містить координати якоїсь з точок, що належить цій грані, та вказівник на напівребро, для якого дана грань знаходиться зліва;

— кожне напівребро містить вказівник на симесричне напівребро (близнюка), на вершину, з якої воно починається, на грань, яка знаходиться зліва та на напівребро, яке є наступним в обході вказаної грані.

Для прикладу можна розглянути граф на рис. 3.1 та його представлення за допомогою подвійно зв'язаного списку ребер (табл. 3.1, 3.2, 3.3).

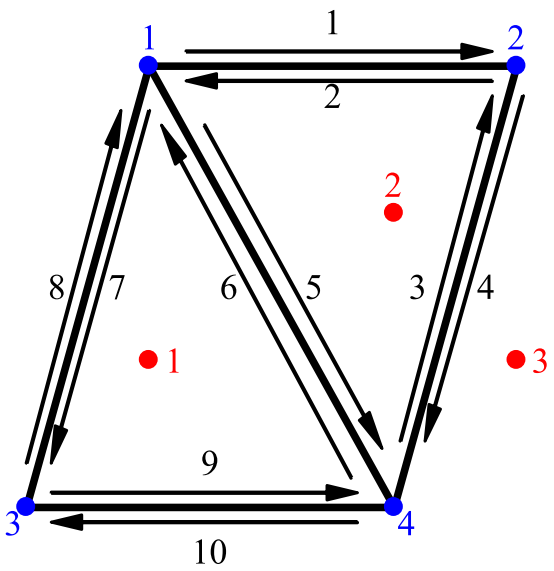



Рис. 3.1: Приклад ПЗСР.

*Таблиця* 3.1

**Структура ПЗСР з рис. 3.1: грані.**

| Номер грані | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| 1 | $(-1.5, 0)$ | 7 |
| 2 | $(1, 1)$ | 2 |
| 3 | $(2, 0)$ | 4 |

*Таблиця* 3.2

**Структура ПЗСР з рис. 3.1: вершини.**

| Номер вершини | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| 1 | $(-1, 2)$ | 1 |
| 2 | $(2, 2)$ | 2 |
| 3 | $(-2, -1)$ | 9 |
| 4 | $(1, -1)$ | 6 |

*Таблиця* 3.3

**Структура ПЗСР з рис. 3.1: напівребра.**

| Номер напівребра | Вершина | Грань | Близнюк | Наступне |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 2 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 5 |
| 3 | 4 | 2 | 4 | 2 |
| 4 | 2 | 3 | 3 | 10 |
| 5 | 1 | 2 | 6 | 3 |
| 6 | 4 | 1 | 5 | 7 |
| 7 | 1 | 1 | 8 | 9 |
| 8 | 3 | 3 | 7 | 1 |
| 9 | 3 | 1 | 10 | 6 |
| 10 | 4 | 3 | 9 | 8 |

Для реалізації даної структури доцільно використовувати std :: list , а в якості вказівників зберігати ітератори на відповідні списки. Тоді структура ПЗСР буде мати наступний вигляд.

```
struct Point {
    double x;
    double y;
};
struct Site {
    Point p;
    std::list<Edge>::iterator e;
};
struct Vertex {
    Point coord;
    std::list<Edge>::iterator e;
};
struct Edge {
    std::list<Site>::iterator site;
    std::list<Vertex>::iterator v;

    std::list<Edge>::iterator twin;
    std::list<Edge>::iterator next;
};
struct DCEL {
    std::list<Site> sites;
    std::list<Vertex> vertices;
    std::list<Edge> edges;
};
```

Сформований ПЗСР можна передавати в функцію для графічного зображення.

## 3.3. Діаграма Вороного, алгоритм Форчуна та тріангуляція Делоне

Нехай на площині обрано $n$ точок $p_1, p_2, ..., p_n$ з різними координатами. Побудова діаграми Вороного — це задача розбиття площини на $n$ підмножин (граней) $A_1, A_2, ..., A_n$, так щоб кожна грань містила одну точку з початкового набору ($p_i \in A_i$). Оскільки працювати з необмеженими гранями не дуже зручно, надалі вважатимемо, що замість площини ми розглядаємо достатньо великий прямокутник, що містить всі точки $p_i$. Тоді всі грані будуть обмеженими.

Проте не будь-яке розбиття прямокутника на грані є діаграмою Вороного. Діаграма Вороного характеризується наступною властивістю: якщо взяти точку $(x, y)$ з грані $A_i$ і порахувати всі відстані від неї до точок $p_1, p_2, ..., p_N$, то відстань до точки $p_i$ з цієї ж грані буде найменшою (рис. 3.2)

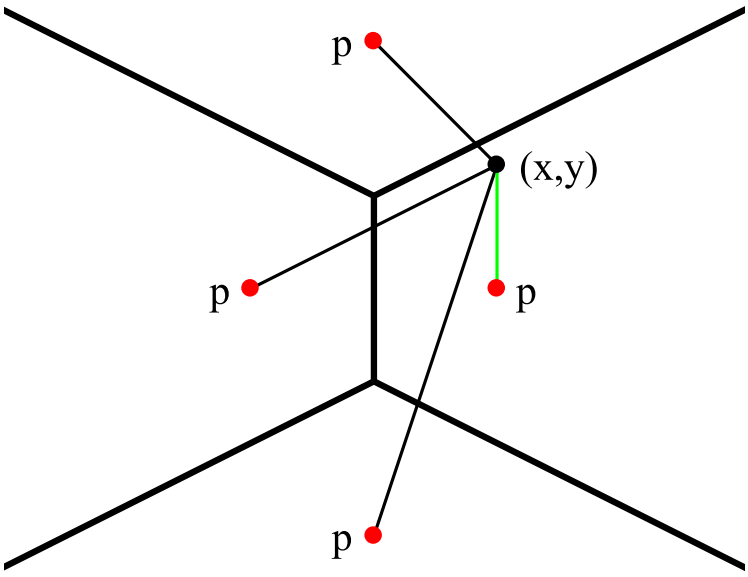



Рис. 3.2: Діаграма Вороного та її основна властивість.

Нескладно довести, що кожна грань в діаграмі Вороного є опуклим багатокутником, причому, якщо дві грані $A_i, A_j$ є суміжними, то сторона,

якою вони дотикаються, лежить на серединному перпендикулярі до відрізка $p_i p_j$. Звідси можна отримати примітивний алгоритм побудови діаграми Вороного: для кожної точки $p_i$ треба побудувати свій опуклий багатокутник, що обмежується серединними перпендикулярами до інших точок. Проте даний алгоритм має асимптотичну складність $O(n^2)$, бо фактично має вкладений цикл по всім точкам $p_i$.

Алгоритм Форчуна для побудови діаграми Вороного має асимптотичну складність $O(n \ln n)$, що є суттєво кращим результатом. Досягається цей результат завдяки оригінальній ідеї побудови діаграми та використанню спеціально визначених та тісно повязаних між собою таких структур даних, як бінарне дерево пошуку, черга з пріоритетами та ПЗСР.

Побудова тріангуляції Делоне є двоїстою задачею до побудови діаграми Вороного. Це означає, що як тільки буде сформована структура ПЗСР, що описує діаграму Вороного для набору точок $p_i$, то шляхом нескладних (як асимптотично, так і алгоритмічно) перетворень можна побудувати тріангуляцію Делоне.

По суті тріангуляція Делоне є розбиттям опуклої оболонки точок $p_i$ на трикутники, вершини яких знаходяться в точках $p_i$. Причому, якщо описати коло навколо будь-якого з цих трикутніків, то всередині нього не буде жодної з точок $p_i$ (рис. 3.3).

## 3.4. Алгоритм Форчуна: Загальний опис

Алогритм Форчуна використовує так звану замітаючу пряму. Принцип роботи цієї прямої полягає в тому, що вона рухається в певному напрямку на площині (згори — донизу) і там, де вона вже пройшла, формується структура діаграми Вороного. Там, куди вона ще не дісталася, жодних відомостей про структуру діаграми немає (рис. 3.4).

Оскільки кожна точка $p_i$ має належати власній грані, то в якості ко-

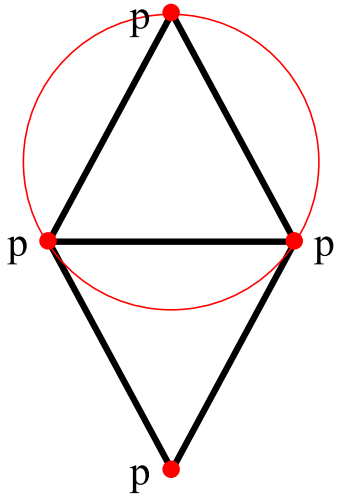
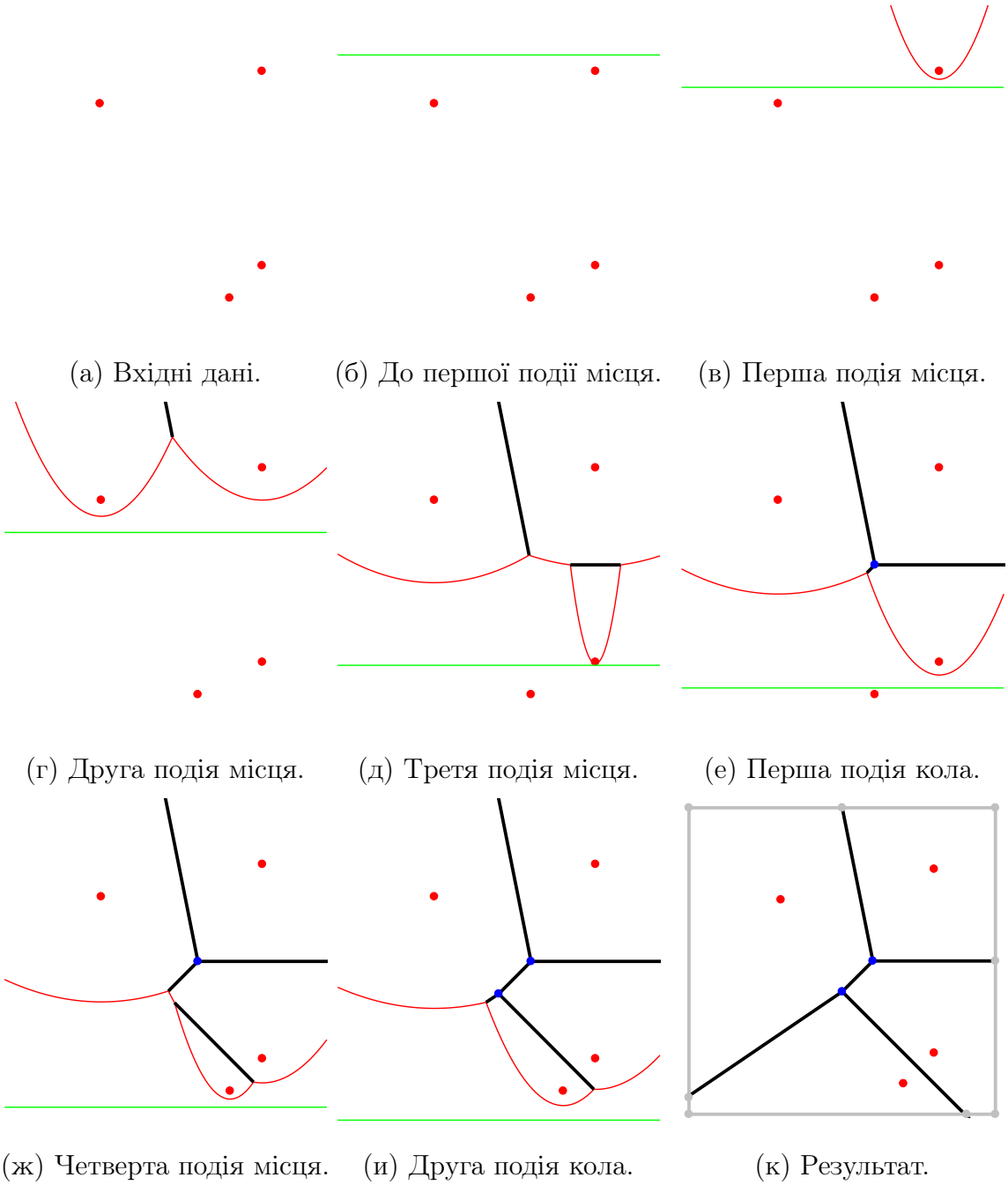



Рис. 3.3: Тріангуляція Делоне та її основна властивість.

ординат грані в ПЗСР можна використовувати координати точки $p_i$. Для побудови діаграми Вороного це є правилом.

Замітаюча пряма працює з певною затримкою, бо насправді структура діаграми Вороного будується лише вище берегової лінії, що є кусково заданою функцією, де кожна з окремих функцій є частиною параболи (дугою). Ці дуги характеризуються точками $p_i$, які вже були пройдені замітаючою прямою, та $y$-координатою самої прямої. Фактично кожна з парабол задається через свої фокус та директрису. Зміна $y$-координати замітаючої прямої спричиняє зміни в береговій лінії: деякі дуги розширюються, інші — стискаються. Місця перетину сусідніх дуг берегової лінії (так звані "точки зустрічі") зміщуються та своїм рухом описують нові ребра діаграми Вороного. Зміни у структурі берегової лінії називаються подіями. Події бувають двох типів: **подія місця** та **подія кола**.

Подія місця настає, коли замітаюча пряма досягає нової точки $p_i$. Тоді "навколо" цієї точки починає зростати нова парабола, яка розриває дугу над $p_i$. Тобто берегова лінія стає складнішою (рис. 3.5).



(а) Вхідні дані. (б) До першої події місця. (в) Перша подія місця.

(г) Друга подія місця. (д) Третя подія місця. (е) Перша подія кола.

(ж) Четверта подія місця. (и) Друга подія кола. (к) Результат.

Рис. 3.4: Побудова діаграми Вороного за допомогою алгоритму Форчуна.

Подія кола стається, коли одна з дуг затискається сусідніми дугами. На місці зникнення дуги утворюється вершина діаграми Вороного, в цій вершині закінчуються ребра, що відповідали старим точкам зустрічі, та починається нове ребро, яке відповідає новій точці зустрічі. Берегова лінія стає меншою на одну дугу (рис. 3.6). Зникнення дуги можна передбачити заздалегідь, оскільки берегова лінія рухається за складними, але відомими законами. Таким чином зникненню дуги, якщо таке планується, ставиться у відповідність певна $y$-координата і ми знаємо, що коли замітаюча пряма досягне цієї координати, дуга зникне, якщо нічого їй до цього не завадить і наше передбачення не зміниться.

Тобто ми маємо 2 типи подій, кожна подія має свою $y$-координату та кожна стається, коли замітаюча пряма досягає цієї координати. При цьому очевидно, що події треба обробляти в тій черзі, в якій їх досягає замітаюча пряма. Це означає, що всі події можна поєднати в чергу з пріоритетами, що є однією з основних струтур алгоритму Форчуна.

Берегова лінія складається з дуг та точок зустрічі і основні дії, які відбуваються над нею, — це додавання нової дуги, видалення дуги та пошук дуги, що має розбитися новою дугою. Очевидно, що для таких цілей в якості структури даних для зберігання берегової лінії підійде бінарне дерево пошуку.

Тобто ми отримали 3 основні структури даних для опису алгоритму Форчуна та геометричну інтерпретацію до них. Бінарне дерево пошуку відповідає за берегову лінію та змінюється відповідно до настання подій місця або подій кола. Черга з пріоритетами зберігає події місця та події кола та впливає на берегову лінію. В той самий час зміни в береговій лінії можуть спричиняти зміни в черзі подій. Зміни в береговій лінії також спричиняють зміни в ПЗСР, яке нам потрібно побудувати.

Тепер залишилося тільки прибрати саму замітаючу пряму. Дійсно, вона нам не потрібна як окрема структура, оскільки між подіями вона ніяк

не впливає на жодну з перелічених структур, а координати всіх подій зберігаються в черзі з пріоритетами як ключі. Таким чином ми отримуємо "стрибкоподібне" замітання, де пряма може розглядатися як певний об'єкт лише під час обробки подій.

Поєднаємо усі наші міркування в один алгоритм.

**Алгоритм Форчуна.**

Вхідні дані: набір точок $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ з різними $y$-координатами.

Вихідні дані: ПЗСР діаграми Вороного.

1. Додати всі точки $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ в чергу подій $Q$ як події місця з ключами, які дорівнюють $y$-координатам точок.
2. Поки черга не порожня, виконувати крок 3. Коли черга $Q$ стане порожньою, перейти до кроку 4.
3. Дістати з черги $Q$ подію з найбільшим пріоритетом. Якщо це подія місця — **Обробити подію місця**, якщо це подія кола — **Обробити подію кола**.
4. Додати до ПЗСР відомості про охоплюючий прямокутник та обробити "напівнескінченні" ребра, які залишилися після виконання попередніх кроків.

**Обробка події місця** $p_i$.

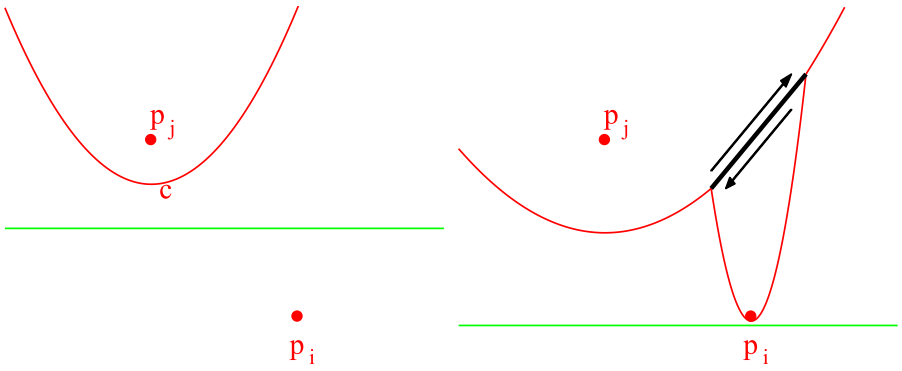
1. Якщо бінарне дерево пошуку $T$ порожнє, вставити в нього дугу, яка відповідає $p_i$, без події кола та вийти з процедури. Інакше виконати кроки 2-6.
2. Знайти дугу $c$ в $T$, яка знаходиться вертикально над точкою $p_i$. Для цього використовувати результати порівняння координати $p_i.x$ з **координатами точок зустрічі** сусідніх з $c$ дуг.
3. Якщо $c$ має вказівник на подію кола, то видалити цю подію з черги $Q$.
4. Замінити вузол $c$ на піддерево з рис. 3.5г. Дане піддерево складає-

ться з трьох дуг та двох точок зустрічі між ними. Пов'язати середню дугу з точкою $p_i$, бокові дуги з точкою $p_j$, до якої була прив'язана дуга $c$ до свого видалення. У ліву та праві точки зустрічі зберегти кортежі $< p_j, p_i >$ та $< p_i, p_j >$ відповідно.

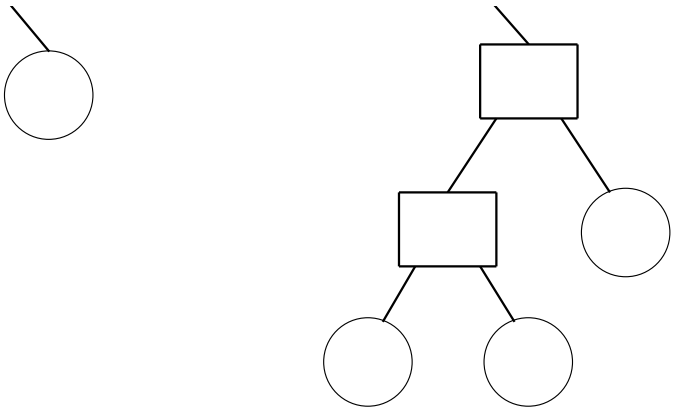
5. Створити дві нові пари близнюків-півребер в ПЗСР $D$, кожна пара півребер відповідає новій точці зустрічі та розділяє точки $p_i$ та $p_j$. Зберегти посилання на ці півребра в нових точках зустрічі.
6. Перевірити **умову зникнення** лівої дуги з щойно доданого піддерева. Якщо умова виконується, то додати до $Q$ подію кола з відповідним пріоритетом та додати в цю подію посилання на дугу, що зникає, та навпаки. Зробити те ж саме для правої дуги з піддерева.

**Обробка події кола.**

1. Перейти по посиланню в події кола до дуги $c_i$ в дереві $T$.
2. Видалити вузол, що відповідає дузі $c_i$ та дві сусідні з ним точки зустрічі. Замість них додати нову точку зустрічі між двома (тепер сусідніми) дугами $c_s$, $c_r$ (див рис. 3.6).
3. Додати до ПЗСР $D$ вершину з координатами в центрі кола, яке проходить через точки $p_s, p_i, p_r$, які відповідають дугам $c_s, c_i, c_r$ відповідно.
4. Додати в ПЗСР $D$ два напівребра-блюзнюка, які розділяють точки $p_s$ та $p_r$ та додати до нової точки зустрічі посилання на ці напівребра.
5. Пов'язати між собою нову вершину ПЗСР, два нові напівребра та чотири старі напівребра, на які посилалися видалені точки зустрічі, згідно з правилами заповнення полів в структурі ПЗСР.
6. Видалити з черги $Q$ можливі події кіл, які відповідають дугам $c_s$ та $c_r$.
7. Перевірити **умову зникнення дуги** $c_s$ в оновленому дереві $T$.



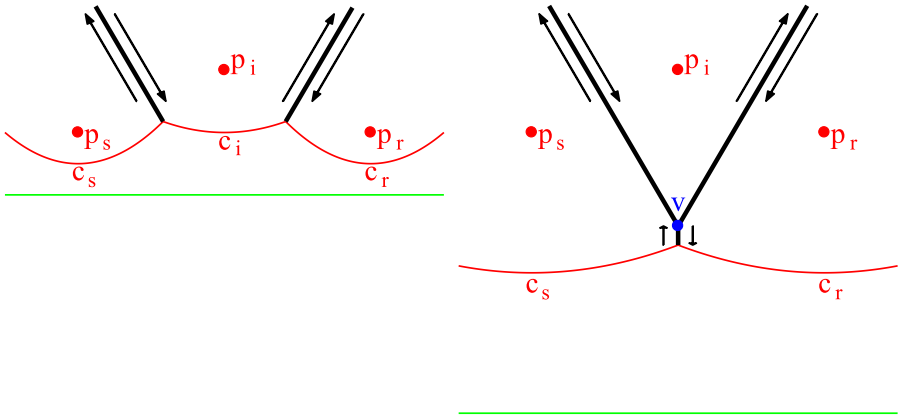

(а) До події місця. (б) Після події місця.



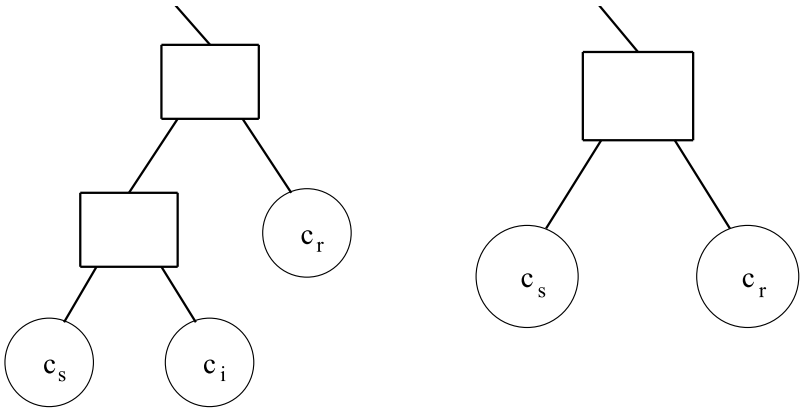
(в) До події місця. (г) Після події місця.

Рис. 3.5: Зміни в береговій лінії та ПЗСР під час обробки події місця.

Якщо умова виконується, то додати до $Q$ подію кола з відповідним пріоритетом та додати в цю подію посилання на дугу, що зникає, та навпаки. Зробити те ж саме для дуги $c_r$.




(а) До події кола. (б) Після події кола.




(в) До події кола. (г) Після події кола.

Рис. 3.6: Зміни в береговій лінії та ПЗСР під час обробки події кола.

З означення ПЗСР можна вивести конкретні дії, необхідні для встановлення всіх коректних вказівників під час обробки події кола в алгоритмі Форчуна.

**Обрахунок координати точки зустрічі.**

Для пошуку дуги, що знаходиться над новою подією місця, нам потрібно порівнювати $x$-координату події місця з $x$-координатами точок зустрічі

на береговій лінії. А для цього треба визначити алгоритм обрахунку координат кожної точки зустрічі. Робиться це тривіальним чином, використовуючи знання про дуги берегової лінії.

Кожна точка зустрічі з'єднує дві сусідні дуги берегової лінії. Ці дуги є параболами і формула однієї такої параболи залежить від координати точки $p_i$, яка цю параболу породила, та $y$-координати замітаючої прямої $L$ ($y$-координата нової події місця) за наступною формулою.

$$y = \frac{(x - p_i.x)^2}{2(p_i.y - L)} + \frac{p_i.y + L}{2}. \tag{3.1}$$

Дві сусідні дуги обовязково породжуються двома різними точками $p_i$ і $p_j$, а оскільки значення $y$-координат цих точок різні, то ці дві параболи мають рівно 2 точки перетину. Одна з цих точок і є необхідною нам точкою зустрічі. Щоб обрати правильний розв'язок рівняння 3.1, нам треба використати знання про те, що для даної точки зустрічі зліва знаходиться дуга, породжена саме $p_i$, а справа — породженна $p_j$. Ця додаткова інформація однозначно визначає координати точки зустрічі, коли замітаюча пряма знаходиться на певному фіксованому рівні.

**Перевірка умови зникнення дуги.**

Для того, щоб перевірити, що в послідовній трійці дуг $c_{k-1}$, $c_k$, $c_{k+1}$ дуги $c_{k-1}$, $c_{k+1}$ збираються затискати дугу $c_k$, нам достатньо знати координати точок $p_s$, $p_i$, $p_r$, які породжують вказані три дуги. Тоді умова зникнення центральної дуги записується наступним чином.

$$\begin{vmatrix} p_i.x - p_s.x & p_r.x - p_s.x \\ p_i.y - p_s.y & p_r.y - p_s.y \end{vmatrix} < 0.$$

Якщо дана умова виконується, то в чергу додається подія кола з пріоритетом, який обчислюється як $y$-координата найнижчої точки кола, яке проходить через точки $p_s, p_i, p_r$.

**Обробка напівнескінченних ребер в ПЗСР та додавання охоплюючого прямокутника.**

Суть кроку 4 полягає в доповненні ПЗСР до завершеної форми, оскільки деякі півребра можуть не мати наступного ребра при обході нескінченної грані, або ж не мати точки початку. Це доповнення відбувається за рахунок додавання "фіктивних" вершин та ребер, які за своїм положенням на площині знаходяться на охоплюючому квадраті. На рис. 3.4к ці ребра та вершини позначені сірим кольором. Кординати цих вершин знаходяться за допомогою інформації про напівнескінченні ребра з побудованої на кроці 3 незавершеної структури ПЗСР. Також додається одна "фіктивна" зовнішня до охоплюючого прямокутника грань.

**Коректність вхідних даних.**

Також наостанок варто зазначити, що якщо початковий набір точок містить дві точки з однаковою $y$-координатою, то для того, щоб забезпечити коректність вхідних даних, можна повернути цей набір точок відносно деякого полюса $P$ на певний кут $\alpha$. При цьому і сам полюс, і кут можна обирати випадковим чином, ймовірність того, що після такого повороту "новий" набір точок також буде мати точки з однаковою $y$-координатою, буде дуже близькою до 0. Тоді після завершення виконання алгоритму Форчуна треба лише повернути всю діаграму Вороного на кут $-\alpha$ відносно того ж самого полюса.

## 3.5. Алгоритм Форчуна: Берегова лінія

Ключовою особливістю реалізації берегової лінії в алгоритмі Форчуна в його класичному вигляді є той факт, що упродовж всього часу роботи алгоритму листи бінарного дерева пошуку відповідають дугам берегової

лінії, а інші вузли дерева — точкам зустрічі. Тоді процедури додавання та видалення формулюються таким чином, щоб ця особливість дерева зберігалася, процедура пошуку дуги в дереві фактично зводиться до спуску від кореня до листа, на проміжних кроках порівнюючи шукане значення з координатами точок зустрічі.

Інтерфейс та функціонал стандартного контейнеру map не дозволяє так строго контролювати структуру дерева. Фактично користувач не знає, як саме зберігаються дані в самому дереві і як це дерево балансується. Отже, нам потрібно вигадати, як ми можемо адекватно виконувати дії над береговою лінією, якщо ми точно не знаємо її структури. Проте ми можемо змусити map зберігати дуги та місця зустрічі у "правильній" послідовності, щоб при прямому обході map ми отримували спочатку найлівішу дугу, потім найлівішу точку зустрічі, потім наступну за нею дугу і так далі і так далі.

Для цього нам достатньо вміти порівнювати точки зустрічі та дуги між собою за розташуванням по координаті $x$. Порівняти дві точки зустрічі між собою не є проблемою: ми знаходимо їхні $x$-координати за допомогою алгоритма з пункту 3.4 та порівнюємо їх. Щоб порівняти дугу та точку зустрічі, ми можемо використати інформацію про крайові точки цієї дуги, тобто про точки зустрічі, де дуга починається та закінчується. Тоді ми порівнюємо ці дві точки зустрічі з координатою початкової точки зустрічі. При цьому, звісно, не кожна дуга має обидві точки зустрічі на кінцях. Крайня зліва та крайня справа дуги на береговій лінії мають лише праву та ліву точки зустрічі відповідно, тому їх варто обробляти окремо. Ну і, звісно, на самому початку алгоритму після обробки першої події місця наше дерево буде складатися з однієї дуги без точок зустрічі взагалі. Про це також варто не забувати. Порівнювати дуги між собою також можна через порівняння їхніх кінців.

Перейти від дуги до сусідніх точок зустрічі в std :: map можна за допо-

могою std :: map::iterator. Оскільки ми забезпечуємо правильну послідовність зберігання елементів берегової лінії, то інкрементація та декрементація ітератора, який посилається на вузол з дугою, буде давати ітератори з посиланням на праву та ліву точки зустрічі відповідно. Проте у функціях find та під час вставки і видалення порівнюються саме ключі елементів мапи, а це означає, що використовувати ітератор мапи для пошуку сусідніх вузлів не вдасться. Проте цю проблему можна обійти, якщо в ключі для дуги просто зберігати ітератори на сусідні точки зустрічі.

Тепер залишилося лише описати процедуру пошуку дуги для певного значення координати $x$ нової події місця. Це означає, що нам треба порівняти дійсне число з дугою або з точкою зустрічі. Це питання вирішується аналогічно: координата $x$ події місця порівнюється або з $x$-координатою точки зустрічі, або з краями дуги. При цьому точка $x$ вважається меншою за дугу, якщо вона менша за її лівий край і більшою за дугу, якщо вона більше за її правий край. Процедуру пошуку в find вважає, що всі ключі формують лінійно упорядковану множину, тому, якщо ми передамо їй в якості ключа значення $x$, яке знаходиться під дугою $c$, то згідно з нашою процедурою порівняння $x$ буде не меншим і не більшим за $c$. Отже, в такому випадку find поверне ітератор дуги $c$.

Підсумуємо наші міркування: структура берегової лінії, реалізована за допомогою std :: map, буде обробляти 3 типи об'єктів: дуги, точки зустрічі та окремі координати $x$. Координати дуги задаються двома своїми сусідніми точками зустрічі, координата точки зустрічі задається упорядкованою парою точок $< p_i, p_j >$ , які породжують дві сусідні параболи. Координата $x$ задається координатою $x$. При цьому нам ще потрібно враховувати поточну висоту замітаючої прямої, оскільки без неї розрахувати координати точки зустрічі неможливо. Оскільки нам потрібно утворити єдиний ключ для всіх об'єктів і ми при цьому знаємо, що інших за своєю природою та структурою об'єктів у нас під час роботи з std :: map не буде, то всі ці па-

раметри ми можемо в єдину структуру-ключ, використавши std :: variable для об'єднання різних типів ключів.

Оскільки таких типів три, то спочатку опишемо структури для збереження даних в кожному з цих типів.

```
struct TKeyLeaf {
    std::map<TKey,TValue>::iterator end_left;
    std::map<TKey,TValue>::iterator end_right;
};
struct TKeyNode {
    std::list<Site>::iterator site_left;
    std::list<Site>::iterator site_right;
};
struct TKeyX {
    double x;
};
```

Тоді структура загального ключа буде виглядати наступним чином.

```
struct TKey {
    std::variant<TkeyLeaf, TKeyNode, TKeyX> key;

    //for all types of key
    double line;
};
```

Для цього ключа нам треба перевантажити оператор менше, щоб цю структуру можна було використовувати як ключ в мапі. Сигнатура оператора буде наступною

```
struct TKey {
    ...
    bool operator<(const TKey& other) const;
};
```

Для реалізації цього методу можна використати шаблон функції std :: visit , який в певній мірі дозволяє уникнути перебору варіантів. При цьому якщо два ключа мають різні значення line , то з них обирається найменше та

саме воно використовується для подальших обчислень. Така логіка вибору спільного line не протирічить логіці порівняння вузлів, оскільки, якщо порівнюється координата $x$ події місця з чимось іншим, то line має бути $x$-координатою цієї події місця, а це найнижче значення замітаючої прямої на момент досягнення нею даної події місця. Якщо ж порівнюються дуги або точки зустрічі, то їхнє взаємне розташування на береговій лінії не залежить від $y$-координати замітаючої прямої, бо воно не змінюється з часом. Тоді реалізація методу порівняння буде виглядати наступним чином.

```
bool operator<(const TKey& other) const
{
    double y = std::min(line, other.line);
    return std::visit([y](auto&& a, auto&& b) -> bool
        { return compare(a, b, y); }, key, other.key );
};
```

Для коректної роботи std :: visit необхідно буде додати реалізації логіки порівняння compare(**const** T1&, **const** T2&, **double** ) для усіх пар типів з набору TKeyLeaf, TKeyNode та TKeyX.

Проте у цього ключа є один суттєвий недолік. Він добре працює, коли дуги мають додатню довжину, проте іноді буває так, що в одній точці площини одночасно зникають дві або більше дуги, а на додачу там ще може виникати нова дуга (рис. 3.7). Обмеження на вхідні дані не гарантує, що такого не станеться. Проте з точки зору алгоритму Форчуна в цьому немає проблеми. В такому випадку неважливо, яка саме дуга знакає першою, або що спочатку утворюється нова дуга, проте видалення та додавання вузлів до дерева спричиняє порівняння дуг нульової або майже нульової довжини (що з точки зору роботи з числами типу **double** одне і те саме). В такому випадку орієнтуватися на результати порівняння крайових точок таких дуг для визначення їхнього взаємного розташування вже не можна.

Для того, щоб вирішити цю проблему, ми додамо фіктивний ключ — дійсне число, не прив'язане до жодних координат, яке підпорядковується

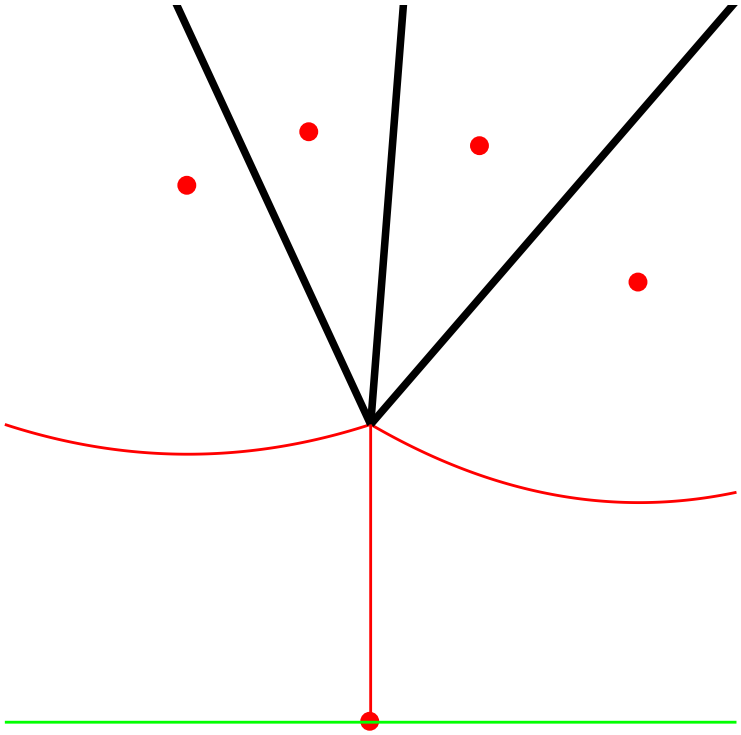


Рис. 3.7: Ситуація “одночасних” подій кола та події місця.

лише одному правилу: якщо вузол B вирішено було вставити між вузлами A та C, то фіктивний ключ B повинен бути більшим за фіктивний ключ A та меншим за фіктивний ключ C. Тоді порівняння дуг та точок зустрічі між собою можна надалі проводити за цим фіктивним ключем. При цьому порівняння дуг та точок зустрічі з $x$-координатою події місця буде відбуватися за старою логікою, а це означає, що нам лише треба додати відповідні поля до структур, що описують листи та внутрішні вузли дерева.

```
struct TKeyLeaf {
    std::map<TKey,TValue>::iterator end_left;
    std::map<TKey,TValue>::iterator end_right;

    double key;
};
struct TKeyNode {
    std::list<Site>::iterator site_left;
    std::list<Site>::iterator site_right;
```

```
    double key;
};
```

Структура ключа TKey при цьому не зміниться. Загальна логіка процедури порівняння двох ключів (operator<) при цьому не зміниться, але доведеться внести зміни в логіку порівняння двох ключів, кожен з яких має тип, відмінний від TKeyX. При цьому очевидно, що відповідні процедури суттєво полегшаться.

Процедура пошуку в такому випадку повністю коректна. Процедура видалення вузла відбувається за його ітератором без зайвих проблем. Для того, щоб коректно додати піддерево до мапи, необхідно спочатку визначити фіктивні ключі для кожного вузла піддерева, так, щоб вони узгоджувалися з порядком берегової лінії, та додати спочатку точки зустрічі, а потім дуги. Не в іншому порядку, бо інакше в ключі до дуг неможливо буде вставити коректні ітератори, що посилаються на сусідні точки зустрічі.

Також не варто забувати, що вузли дерева повинні містити додаткову інформацію, яка пов'язує цю структуру з чергою та ПЗСР. Оскільки ця інформація не впливає на процедури додавання, видалення вузлів та пошук, її можна перенести в значення Value. Для різних типів вузлів знову можна поєднати різні значення Value в одну структуру TValue.

```
struct TValueLeaf {
    std::list<Site>::iterator p;
    ... q; //посилання на можливу подію кола в черзі
};
struct TValueNode {
    std::list<Edge>::iterator e;
};
struct TValue {
    std::variant<TValueLeaf, TValueNode> value;
};
```

Тепер у нас лише 2 варіанти типів даних, які можуть зберігатися, бо

$x$-координата події місця, хоч і фігурує в пошуку, ніколи не зберігається в самому дереві. У вузлі, що відповідає точці зустрічі, зберагаються посилання на ребра ПЗСР, у вузлах-дугах — посилання на можливу подію в черзі.

### 3.6. Алгоритм Форчуна: Черга подій

В стандартній бібліотеці мови C++ є контейнер std :: priority_queue, який дозволяє працювати з чергою з пріоритетами. Проте в алгоритмі Форчуна елементи черги можуть видалятися з неї в довільний момент часу з довільного місця. std :: priority_queue не має інтерфейсу для подібних дій, тому замість цього контейнеру треба використати інший.

На щастя, для сортування подій за пріоритетом у нас завжди є std :: map. Використовуючи пріоритет як ключ, ми можемо додавати нові події, видаляти старі через посилання на відповідний ітератор та знаходити поточну подію за допомогою std :: begin(). І все це за логарифмічний час. Тобто контейнер std :: map виконує всі необхідні процедури з коректною асимптотикою.

Проте він не зовсім підходить для нашої задачі, оскільки у нас можуть траплятися події з однаковим пріоритетом. Це можуть бути або "одночасні" події кола, або подія місця та подія кола (рис. 3.7). Дві події місця не можуть мати один і той самий пріоритет, оскільки всі початкові точки мають різні $y$-координати.

З точки зору алгоритму Форчуна абсолютно неважливо, яка з подій з однаковим пріоритетом буде оброблятися першою, а це означає, що нам треба лише мати можливість зберігати їх в будь-якому порядку. Для цього нам цілком підходить контейнер std :: multimap. Він зберігає асимптотику всіх ключових процедур та дозволяє зберігати події з однаковим пріоритетом. Тоді черга $Q$ буде визначатися як

```
struct QValueSite {
    std::list<Site>::iterator site;
};
struct QValueCircle {
    std::map<TKey,TValue>::iterator tree_node;
};
struct QValue {
    std::variant<QValueSite, QValueCircle> value;
};
std::multimap<double,QValue> Q;
```

## 3.7. Рекомендації до реалізації алгоритма Форчуна без використання стандартної бібліотеки мови C++

У випадку, якщо ми хочемо запрограмувати структури даних самостійно, ми можемо реалізувати чергу з пріоритетами так, як це робиться стандартно: за допомогою купи. При цьому треба явно прописати операцію видалення елемента з черги.

Для представлення берегової лінії ми можемо не вигадувати складні структури ключів та процедури порівняння, а реалізувати бінарне дерево пошуку таким чином, щоб листи завжди відповідали дугам, а внутрішні вузли — точкам зустрічі. Процедура пошуку листа тоді може бути реалізована як окремий метод класу нашого дерева, де ми напряму порівнюємо $x$-координату тільки з внутрішніми вузлами, поки не дістанемося листа.

У якості реалізації бінарного дерева пошуку можна використовувати АВЛ-дерево. Воно відносно легко реалізується та принцип його балансування інтуїтивно зрозумілий.

Залишаються лише питання видалення та додавання вузлів. Видалення листа та двох сусідніх внутрішніх вузлів можна реалізувати окремим методом, який працюватиме за схемою з рис. 3.6 з подальшим балансуванням.

Додавання піддерева реалізується у два кроки з почерговим додаван-

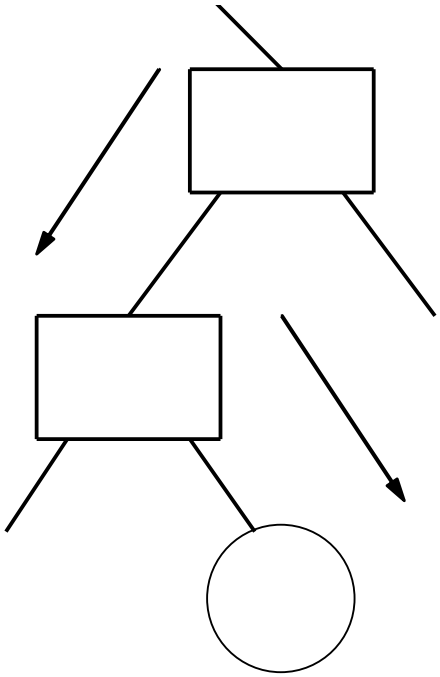


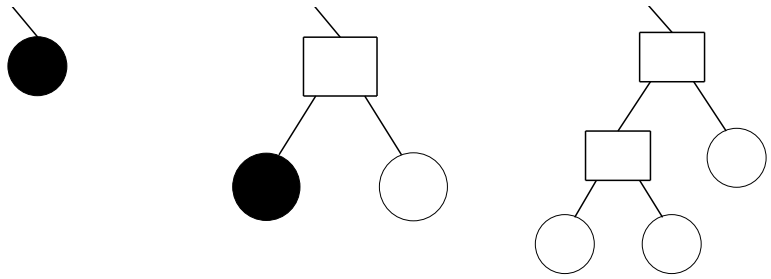
Рис. 3.8: Пошук листа в дереві.

ням піддерев висотою 1. Після кожного додавання відбувається балансування (рис. 3.9).

Тоді з такими допоміжними методами пошуку, додавання та видалення АВЛ-дерево буде завжди зберігати в своїх листах дані про дуги, а у внутрішніх вузлах — дані про точки зустрічі.

### 3.8. Алгоритм Форчуна: приклад

В цьому пункті ми застосуємо алгоритм Форчуна для побудови діаграми Вороного для множини точок $\{p_1 = (3, 3), p_2 = (-2, 2), p_3 = (3, -3), p_4 = (2, -4)\}$. Схематично процес виконання алгоритму зображений на рис. 3.4, проте тут ми відслідкуємо покроково зміни в усіх структурах. Черга подій та ПЗСР будуть зображуватися на кожному кроці у вигляді таблиць, в той час як берегова лінія буде зображена рисунком. Для зручності ми не будемо проводити балансування двійкового дерева та будемо зображувати



(а) Лист,що має зникнути.

(б) Один рівень піддерева доданий.

(в) Все піддерево додане.

Рис. 3.9: Додавання піддерева висотою 2 шляхом почергового додавання дерев висотою 1. Після кожного додавання відбувається перебалансування.

його згідно з принципами оригінального алгоритму (листи відповідають дугам, інші вузли — точкам зустрічі). Також будуть пропущені деякі "технічні" обчислення, як розв'язання квадратичних рівнянь. Проте важливі обчислення будуть присутні в прикладі.

Також в таблицях та на рисунках деякі компоненти структур даних будуть пронумеровані або проіменовані. Ці номери та імена є по суті замінами вказівникам. Тому варто враховувати, що всі імена або номери, які будуть присутні в цьому прикладі, повинні бути перетворені на вказівники або просто прибрані в програмі.

Перед початком роботи алгоритму ми можемо одразу сформувати список граней діаграми Вороного, використавши у якості координат точки $p_i$. Після цього ми додаємо всі точки як події місця в чергу подій Q. Колонка дані зараз для кожної події містить посилання на відповідну грань.

Подальші видалення подій з черги та процеси їхніх обробок ми для зручності будемо називати ітераціями. В таблицях та на рисунках будуть показані результати оброки події, які будуть супроводжуватися коментарями. Також варто зазначити, що рисунки будуть містити конфігурацію замітаючої прямої, берегової лінії та ПЗСР в моментах "між подіями". Тобто коли

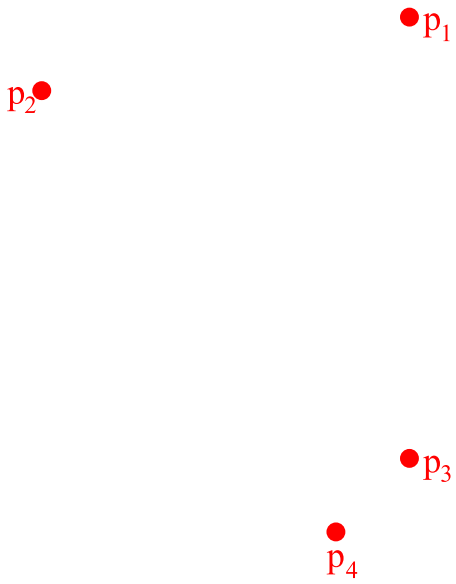



Рис. 3.10: Графічне зображення (до початку).

*Таблиця* 3.4

**Черга подій Q (до початку).**

| Назва події | Пріоритет | Тип події | Дані |
|---|---|---|---|
| $p_1$ | 3 | Місце | 1 |
| $p_2$ | 2 | Місце | 2 |
| $p_3$ | -3 | Місце | 3 |
| $p_4$ | -4 | Місце | 4 |

*Таблиця* 3.5

**ПЗСР: грані (до початку).**

| Номер грані | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| 1 | $(3, 3)$ | |
| 2 | $(-2, 2)$ | |
| 3 | $(3, -3)$ | |
| 4 | $(2, -4)$ | |

*Таблиця* 3.6

**ПЗСР: вершини (до початку).**

| Номер вершини | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| | | |

*Таблиця* 3.7

**ПЗСР: напівребра (до початку).**

| Номер напівребра | Вершина | Грань | Близнюк | Наступне |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

вже замітаюча пряма пройшла певну відстань від останньої обробленої події. В такому випадку рисунки є найбільш інформативними.

**Ітерація 1.**

Перша подія місця обробляється тривіальним чином: до порожнього дерева додається одна дуга $c_1$, прив'язана до точки $p_1$.

*Таблиця* 3.8

**Черга подій Q (ітерація 1).**

| Назва події | Пріоритет | Тип події | Дані |
|---|---|---|---|
| $p_2$ | 2 | Місце | 2 |
| $p_3$ | -3 | Місце | 3 |
| $p_4$ | -4 | Місце | 4 |

**Ітерація 2.**

Перед обробкою другої події місця T складається з одного листа, тому цей лист замінюється на піддерево, що тепер представляє нову дугу $c_3$, яка розбиває параболу, породжену $p_1$, на дві дуги $c_2$ та $c_4$. В листі не було вказівників на події кола, тому з черги нічого не видаляється.

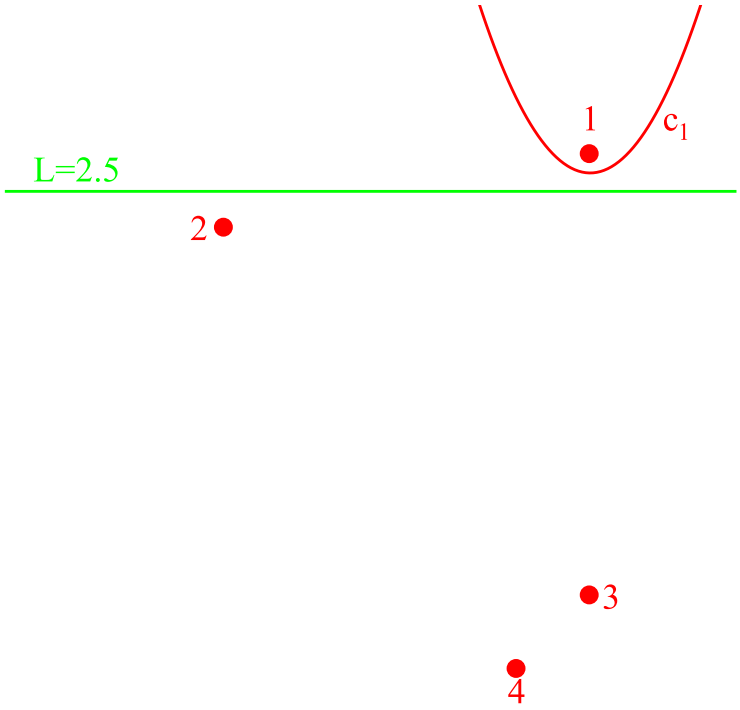



Рис. 3.11: Графічне зображення (ітерація 1).

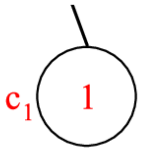



Рис. 3.12: Берегова лінія T (ітерація 1).

*Таблиця* 3.9

**ПЗСР: грані (ітерація 1).**

| Номер грані | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| 1 | $(3, 3)$ | |
| 2 | $(-2, 2)$ | |
| 3 | $(3, -3)$ | |
| 4 | $(2, -4)$ | |

*Таблиця* 3.10

**ПЗСР: вершини (ітерація 1).**

| Номер вершини | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| | | |

*Таблиця* 3.11

**ПЗСР: напівребра (ітерація 1).**

| Номер напівребра | Вершина | Грань | Близнюк | Наступне |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

В точках перетину утворюється пара напівребер-близнюків. Ці напівребра заносяться до ПЗСР. Ребра розділяють грані $p_1$ та $p_2$, тому ми можемо одразу заповнити для цих напівберер поля граней, а для самих граней вказати поля ребер.

Оскільки у дуги $c_2$ немає лівого сусіда, а у $c_4$ — правого, то ці дуги не будуть зникати, тому перевіряти умову зникнення через визначник не потрібно.

*Таблиця* 3.12

**Черга подій Q (ітерація 2).**

| Назва події | Пріоритет | Тип події | Дані |
|---|---|---|---|
| $p_3$ | -3 | Місце | 3 |
| $p_4$ | -4 | Місце | 4 |

**Ітерація 3.**

Нова подія місця має $x$-координату 3. Порівнюючи її з координатами точок зустрічі, ми спускаємося до найправішого листа в T, який визначає дугу $c_4$. Точка $p_3$ лежить прямо під цією дугою, коли замітаюча пряма знаходиться на висоті $-3$. Лист $c_4$ замінюється на піддерево, що тепер представляє нову дугу $c_6$, яка розбиває параболу, породжену $p_1$, на дві дуги $c_5$

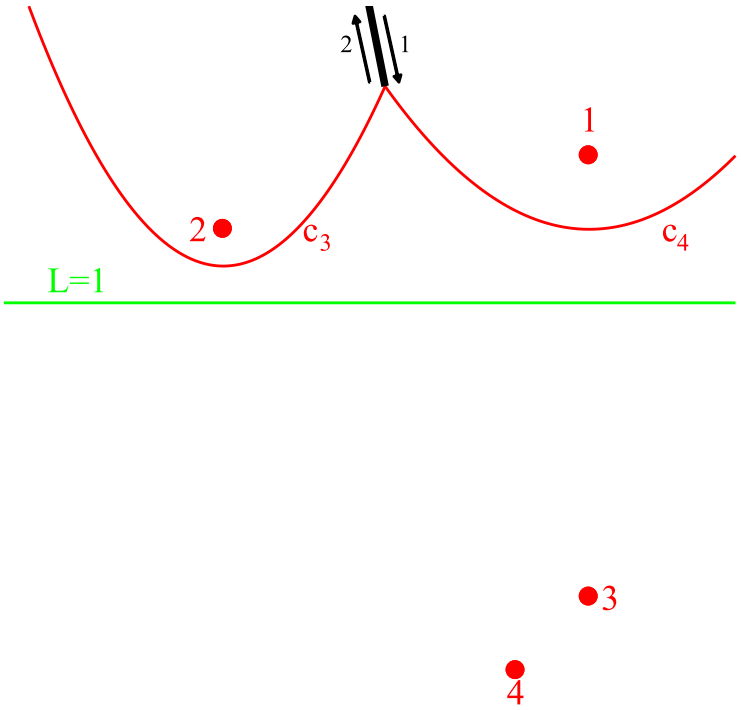



Рис. 3.13: Графічне зображення (ітерація 2).

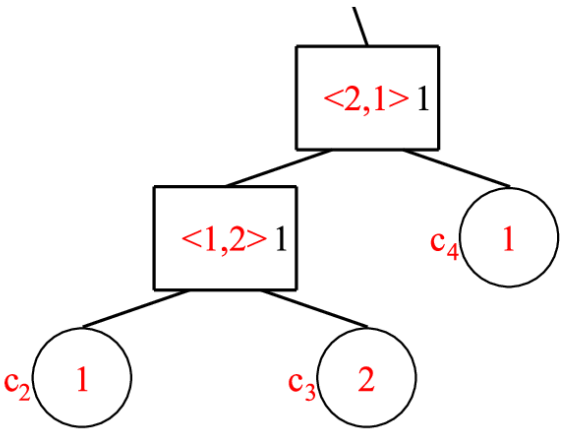



Рис. 3.14: Берегова лінія T (ітерація 2).

*Таблиця* 3.13

**ПЗСР: грані (ітерація 2).**

| Номер грані | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| 1 | $(3, 3)$ | 1 |
| 2 | $(-2, 2)$ | 2 |
| 3 | $(3, -3)$ | |
| 4 | $(2, -4)$ | |

*Таблиця* 3.14

**ПЗСР: вершини (ітерація 2).**

| Номер вершини | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| | | |

*Таблиця* 3.15

**ПЗСР: напівребра (ітерація 2).**

| Номер напівребра | Вершина | Грань | Близнюк | Наступне |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 2 | |
| 2 | | 2 | 1 | |

та $c_7$. В листі не було вказівників на події кола, тому з черги нічого не видаляється.

В точках перетину утворюється пара напівребер-близнюків. Ці напівребра заносяться до ПЗСР. Ребра розділяють грані $p_1$ та $p_3$, тому ми можемо одразу заповнити для цих напівберер поля граней, а для грані 3 вказати поле ребра.

Оскільки у дуги $c_7$ немає правого сусіда, то ця дуга не буде зникати, тому перевіряти умову зникнення через визначник не потрібно.

Проте у дуги $c_5$ є лівий та правий сусіди. Це дуги $c_3$ та $c_6$ відповідно. Три послідовні дуги $c_3$, $c_5$, $c_6$ породжені точками $p_2$, $p_1$ та $p_3$, тому для них перевірка умови зникнення середньої дуги буде виглядати наступним чином:

$$\begin{vmatrix} p_1.x - p_2.x & p_3.x - p_2.x \\ p_1.y - p_2.y & p_3.y - p_2.y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-(-2) & 3-(-2) \\ 3-2 & -3-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -30 < 0.$$

Це означає, що дуга $c_5$ буде зникати. Для того, щоб визначити пріоритет нової події кола, ми повинні знайти $y$-кооринату найнижчої точки кола, що проходить через $p_1$, $p_2$ та $p_3$. Рівняння цього кола наступне.

$$(x-1)^2 + y^2 = 13. \tag{3.2}$$

Найнижча точка кола має координати $(1, -\sqrt{13}) \approx (1, -3.60555)$, тому ми додаємо до черги Q подію кола з пріоритетом $-3.6055$ та додаємо до цього елементу черги посилання на дугу $c_5$. Дана подія одразу стає першою в черзі в силу свого пріоритету. До дуги $c_5$ додається посилання на цю щойно створену подію.

**Ітерація 4.**

На цій ітерації ми обробляємо подію кола.

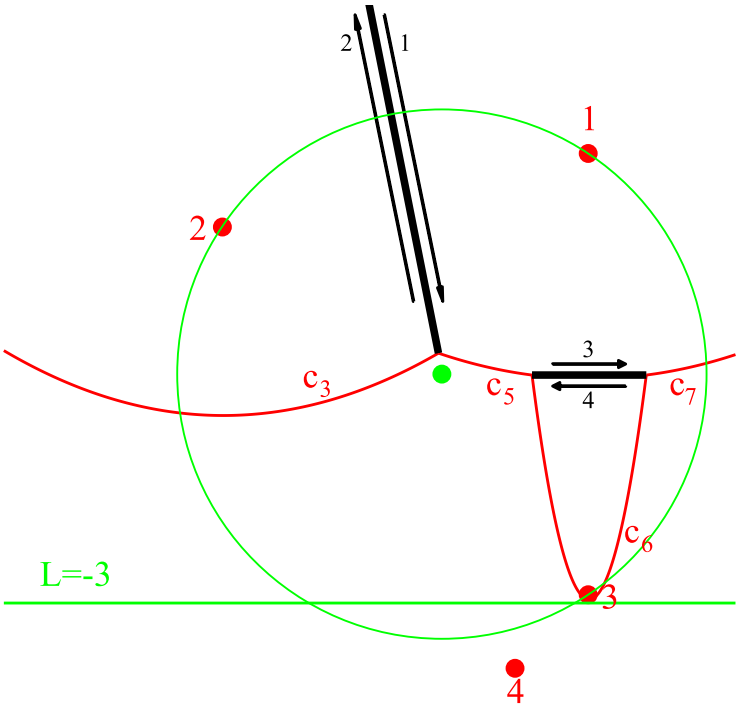



Рис. 3.15: Графічне зображення (ітерація 3).

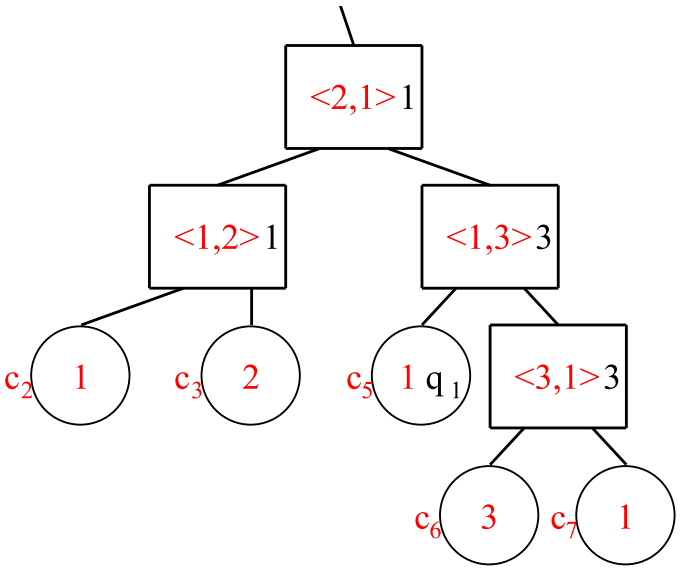



Рис. 3.16: Берегова лінія T (ітерація 3).

*Таблиця* 3.16

**Черга подій Q (ітерація 3).**

| Назва події | Пріоритет | Тип події | Дані |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | -3.60555 | Коло | $c_5$ |
| $p_4$ | -4 | Місце | 4 |

*Таблиця* 3.17

**ПЗСР: грані (ітерація 3).**

| Номер грані | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| 1 | $(3, 3)$ | 1 |
| 2 | $(-2, 2)$ | 2 |
| 3 | $(3, -3)$ | 4 |
| 4 | $(2, -4)$ | |

*Таблиця* 3.18

**ПЗСР: вершини (ітерація 3).**

| Номер вершини | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| | | |

*Таблиця* 3.19

**ПЗСР: напівребра (ітерація 3).**

| Номер напівребра | Вершина | Грань | Близнюк | Наступне |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 2 | |
| 2 | | 2 | 1 | |
| 3 | | 1 | 4 | |
| 4 | | 3 | 3 | |

Зникає дуга $c_5$, разом з нею з берегової лінії видаляються дві сусідні точки зустрічі. На їхнє місце додається новий вузол, який представляє точку зустрічі дуг $c_3$ та $c_6$. Для цієї точки зустрічі створюються нові два напівребра-близнюка, які розділяють грані $p_2$ та $p_3$.

Центр кола, описаного рівнянням (3.2), знаходиться у точці $(1, 0)$. Це будуть координати нової вершини діаграми Вороного. З цієї вершини повинні виходити 3 напівребра: два з вже побудованих до цієї ітерації, посилання на які були у видалених точках зустрічі та одне з двох напівребер, які утворилися разом з новою точкою зустрічі. Для деяких з цих напівребер ми також можемо вказати наступні напівребра при обході відповідних граней.

Жодна з дуг $c_3$ та $c_6$ не мала посилань на події кола, тож видаляти з них нічого не потрібно. Проте для кожної з них треба перевірити умову зникнення дуги.

Перевірка для $c_3$:

Трійка послідовних дуг: $c_2$, $c_3$, $c_6$. Відповідні точки: $p_1$, $p_2$, $p_3$. Умова зникнення:

$$\begin{vmatrix} p_2.x - p_1.x & p_3.x - p_1.x \\ p_2.y - p_1.y & p_3.y - p_1.y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-3 & 3-3 \\ 2-3 & -3-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 30 > 0.$$

Умова не виконується, дуга $c_3$ не зникає, додаткові дії не потрібні.

Перевірка для $c_6$:

Трійка послідовних дуг: $c_3$, $c_6$, $c_7$. Відповідні точки: $p_2$, $p_3$, $p_1$. Умова зникнення:

$$\begin{vmatrix} p_3.x - p_2.x & p_1.x - p_2.x \\ p_3.y - p_2.y & p_1.y - p_2.y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-(-2) & 3-(-2) \\ -3-2 & 3-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 30 > 0.$$

Умова не виконується, дуга $c_6$ не зникає, додаткові дії не потрібні.

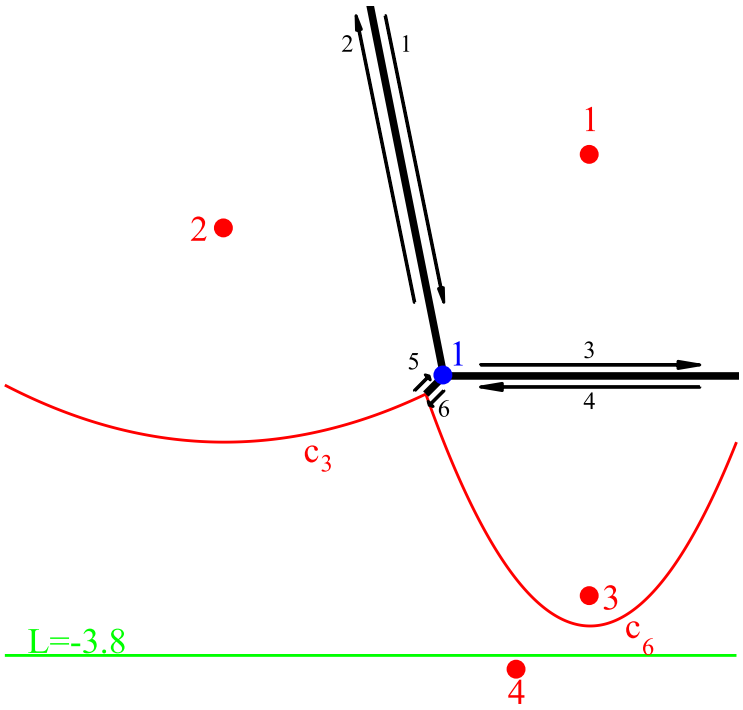



Рис. 3.17: Графічне зображення (ітерація 4).

*Таблиця* 3.20

**Черга подій Q (ітерація 4).**

| Назва події | Пріоритет | Тип події | Дані |
|---|---|---|---|
| $p_4$ | -4 | Місце | 4 |

**Ітерація 5.**

Остання подія місця має $x$-координату 2. Порівнюючи її з координатами точок зустрічі, ми спускаємося до листа в T, який визначає дугу $c_6$. Точка $p_4$ лежить прямо під цією дугою, коли замітаюча пряма знаходиться на висоті $-4$. Лист $c_6$ замінюється на піддерево, що тепер представляє нову дугу $c_9$, яка розбиває параболу, породжену $p_3$, на дві дуги $c_8$ та $c_{10}$. В листі не було вказівників на події кола, тому з черги нічого не видаляється.

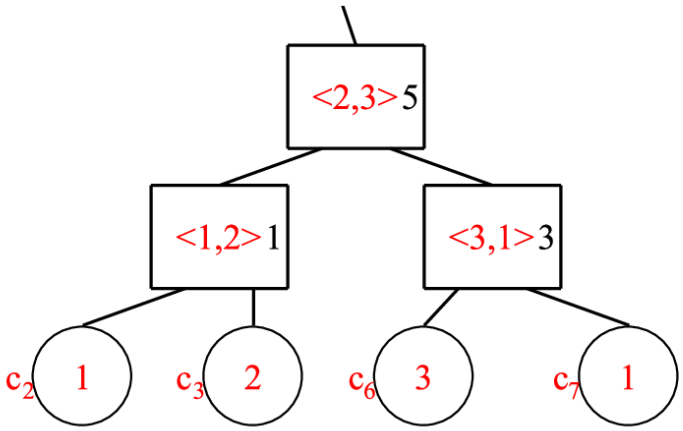



Рис. 3.18: Берегова лінія T (ітерація 4).

*Таблиця* 3.21

**ПЗСР: грані (ітерація 4).**

| Номер грані | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| 1 | $(3, 3)$ | 1 |
| 2 | $(-2, 2)$ | 2 |
| 3 | $(3, -3)$ | 4 |
| 4 | $(2, -4)$ | |

*Таблиця* 3.22

**ПЗСР: вершини (ітерація 4).**

| Номер вершини | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| 1 | $(1, 0)$ | 2 |

*Таблиця* 3.23

**ПЗСР: напівребра (ітерація 4).**

| Номер напівребра | Вершина | Грань | Близнюк | Наступне |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | |
| 3 | 1 | 1 | 4 | |
| 4 | | 3 | 3 | 6 |
| 5 | | 2 | 6 | 2 |
| 6 | 1 | 3 | 5 | |

В точках перетину утворюється пара напівребер-близнюків. Ці напівребра заносяться до ПЗСР. Ребра розділяють грані $p_3$ та $p_4$, тому ми можемо одразу заповнити для цих напівберер поля граней, а для грані 4 вказати поле ребра.

У дуги $c_8$ є лівий та правий сусіди. Це дуги $c_3$ та $c_9$ відповідно. Три послідовні дуги $c_3$, $c_8$, $c_9$ породжені точками $p_2$, $p_3$ та $p_4$, тому для них перевірка умови зникнення середньої дуги буде виглядати наступним чином:

$$\begin{vmatrix} p_3.x - p_2.x & p_4.x - p_2.x \\ p_3.y - p_2.y & p_4.y - p_2.y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-(-2) & 2-(-2) \\ -3-2 & -4-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -10 < 0.$$

Це означає, що дуга $c_8$ буде зникати. Для того, щоб визначити пріоритет нової події кола, ми повинні знайти $y$-кооринату найнижчої точки кола, що проходить через $p_2$, $p_3$ та $p_4$. Рівняння цього кола наступне.

$$x^2 + (y+1)^2 = 13. \tag{3.3}$$

Найнижча точка кола має координати $(0, -1 - \sqrt{13}) \approx (0, -4.60555)$, тому ми додаємо до черги Q подію кола з пріоритетом $-4.6055$ та додаємо до цього елементу черги посилання на дугу $c_8$. До дуги $c_8$ додається

посилання на цю щойно створену подію.

У дуги $c_{10}$ також є лівий та правий сусіди. Це дуги $c_9$ та $c_7$ відповідно. Три послідовні дуги $c_9$, $c_{10}$, $c_7$ породжені точками $p_4$, $p_3$ та $p_1$, тому для них перевірка умови зникнення середньої дуги буде виглядати наступним чином:

$$\begin{vmatrix} p_3.x - p_4.x & p_1.x - p_4.x \\ p_3.y - p_4.y & p_1.y - p_4.y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2 & 3-2 \\ -3-(-4) & 3-(-4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 6 > 0.$$

Це означає, що дуга $c_{10}$ не буде зникати.

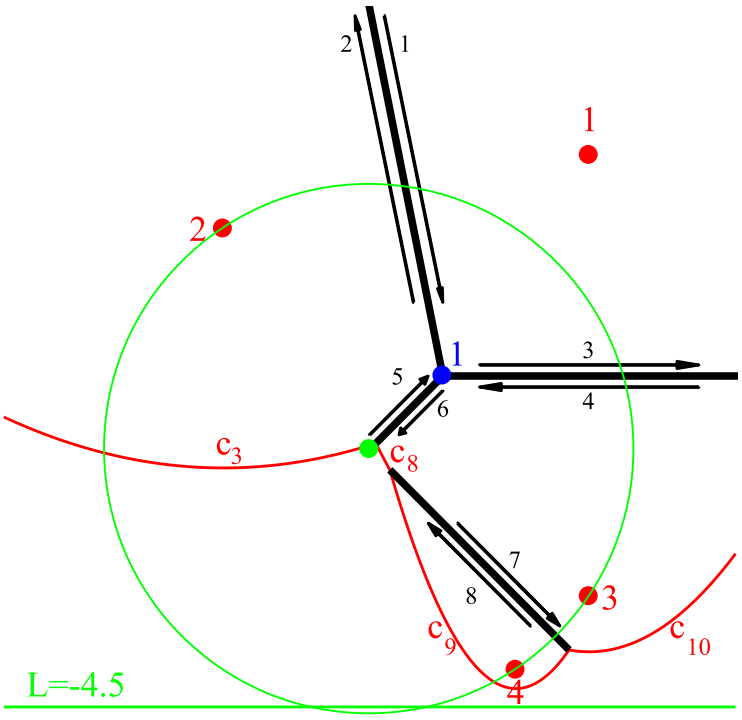



Рис. 3.19: Графічне зображення (ітерація 5).

*Таблиця* 3.24

**Черга подій Q (ітерація 5).**

| Назва події | Пріоритет | Тип події | Дані |
|---|---|---|---|
| $q_2$ | -4.60555 | Коло | $c_8$ |

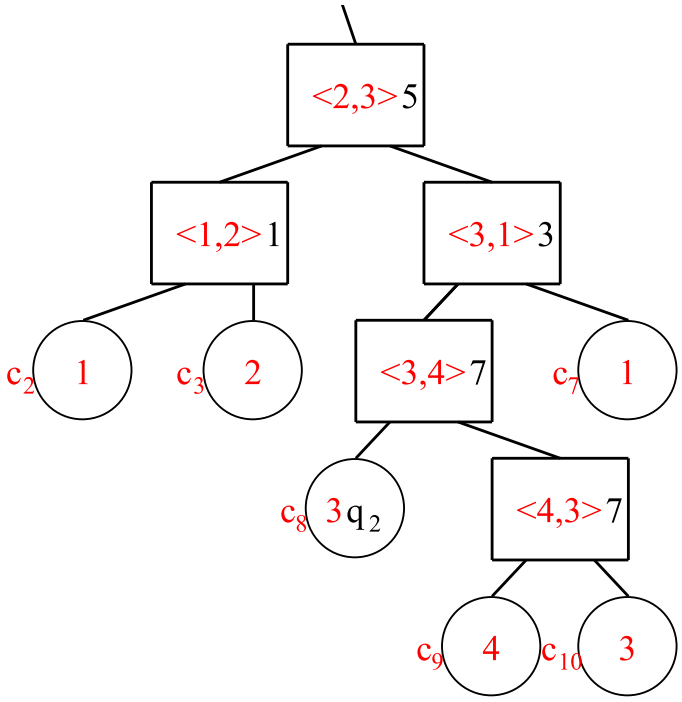



Рис. 3.20: Берегова лінія T (ітерація 5).

*Таблиця* 3.25

**ПЗСР: грані (ітерація 5).**

| Номер грані | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| 1 | $(3, 3)$ | 1 |
| 2 | $(-2, 2)$ | 2 |
| 3 | $(3, -3)$ | 4 |
| 4 | $(2, -4)$ | 8 |

*Таблиця* 3.26

**ПЗСР: вершини (ітерація 5).**

| Номер вершини | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| 1 | $(1, 0)$ | 2 |

*Таблиця* 3.27

**ПЗСР: напівребра (ітерація 5).**

| Номер напівребра | Вершина | Грань | Близнюк | Наступне |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | |
| 3 | 1 | 1 | 4 | |
| 4 | | 3 | 3 | 6 |
| 5 | | 2 | 6 | 2 |
| 6 | 1 | 3 | 5 | |
| 7 | | 3 | 8 | |
| 8 | | 4 | 7 | |

**Ітерація 6.**

На цій ітерації ми знову обробляємо подію кола.

Зникає дуга $c_8$, разом з нею з берегової лінії видаляються дві сусідні точки зустрічі. На їхнє місце додається новий вузол, який представляє точку зустрічі дуг $c_3$ та $c_9$. Для цієї точки зустрічі створюються нові два напівребра-близнюка, які розділяють грані $p_2$ та $p_4$.

Центр кола, описаного рівнянням (3.3), знаходиться у точці $(0, -1)$. Це будуть координати нової вершини діаграми Вороного. З цієї вершини повинні виходити 3 напівребра: два з вже побудованих до цієї ітерації, посилання на які були у видалених точках зустрічі та одне з двох напівребер, які утворилися разом з новою точкою зустрічі. Для деяких з цих напівребер ми також можемо вказати наступні напівребра при обході відповідних граней.

Жодна з дуг $c_3$ та $c_9$ не мала посилань на події кола, тож видаляти з них нічого не потрібно. Проте для кожної з них треба перевірити умову зникнення дуги.

Перевірка для $c_3$:

Трійка послідовних дуг: $c_2$, $c_3$, $c_9$. Відповідні точки: $p_1$, $p_2$, $p_4$. Умова зникнення:

$$\begin{vmatrix} p_2.x - p_1.x & p_4.x - p_1.x \\ p_2.y - p_1.y & p_4.y - p_1.y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-3 & 2-3 \\ 2-3 & -4-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = 34 > 0.$$

Умова не виконується, дуга $c_3$ не зникає, додаткові дії не потрібні.

Перевірка для $c_9$:

Трійка послідовних дуг: $c_3$, $c_9$, $c_{10}$. Відповідні точки: $p_2$, $p_4$, $p_1$. Умова зникнення:

$$\begin{vmatrix} p_4.x - p_2.x & p_1.x - p_2.x \\ p_4.y - p_2.y & p_1.y - p_2.y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-(-2) & 3-(-2) \\ -4-2 & 3-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 34 > 0.$$

Умова не виконується, дуга $c_9$ не зникає, додаткові дії не потрібні.

*Таблиця* 3.28

**Черга подій Q (ітерація 6).**

| Назва події | Пріоритет | Тип події | Дані |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Створення охоплюючого прямокутника.**

Черга подій порожня, а це означає, що нам лишилося тільки зробити крок 4 **алгоритму Форчуна**, тобто створити охоплючий прямокутник та доповнити всі списки ПЗСР фіктивними вершинами, напівребрами та гранню.

Для нашого прикладу нехай у якості охоплюючого прямокутника буде квадрат $max(|x|, |y|) = 5$. Тоді нам треба лише пройтися по незавершеним напівребрам побудованої діаграми Вороного та визначити точки їхніх

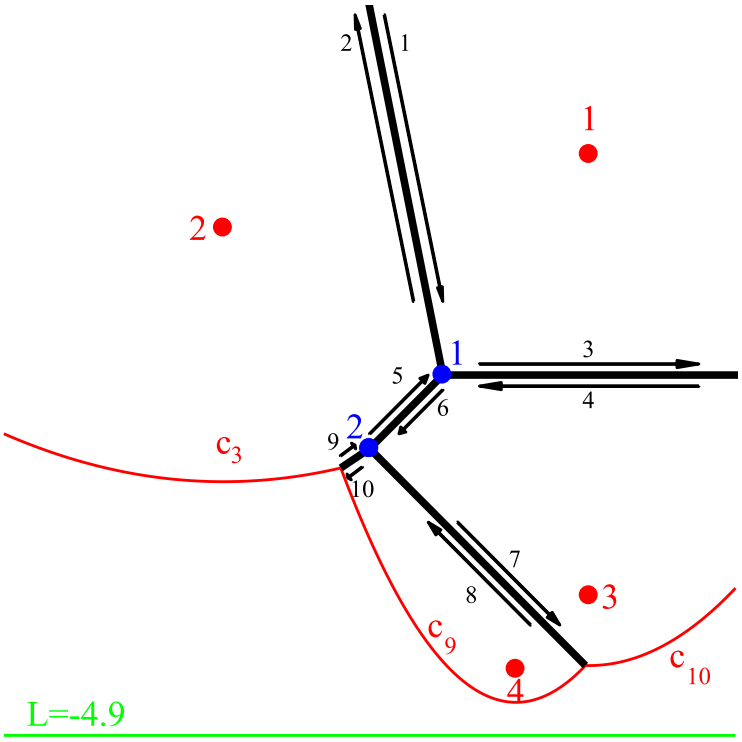



Рис. 3.21: Графічне зображення (ітерація 6).

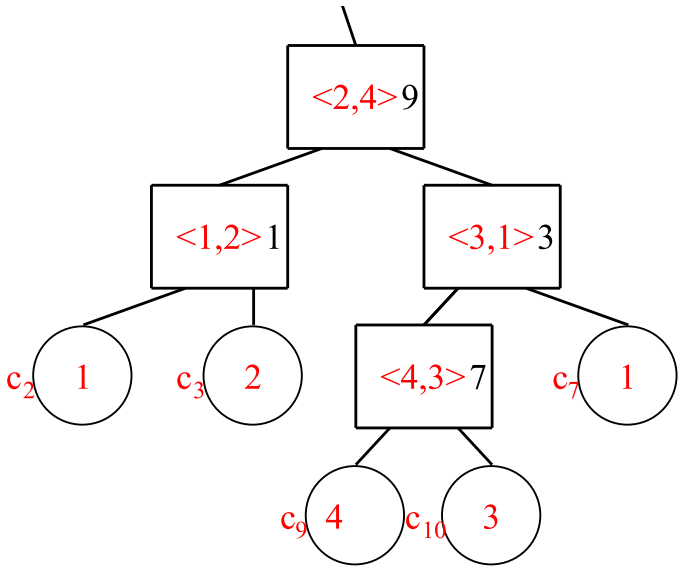



Рис. 3.22: Берегова лінія T (ітерація 6).

*Таблиця* 3.29

**ПЗСР: грані (ітерація 6).**

| Номер грані | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| 1 | $(3, 3)$ | 1 |
| 2 | $(-2, 2)$ | 2 |
| 3 | $(3, -3)$ | 4 |
| 4 | $(2, -4)$ | 8 |

*Таблиця* 3.30

**ПЗСР: вершини (ітерація 6).**

| Номер вершини | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| 1 | $(1, 0)$ | 2 |
| 2 | $(0, -1)$ | 5 |

*Таблиця* 3.31

**ПЗСР: напівребра (ітерація 6).**

| Номер напівребра | Вершина | Грань | Близнюк | Наступне |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | |
| 3 | 1 | 1 | 4 | |
| 4 | | 3 | 3 | 6 |
| 5 | 2 | 5 | 6 | 2 |
| 6 | 1 | 3 | 5 | 7 |
| 7 | 2 | 3 | 8 | |
| 8 | | 4 | 7 | 10 |
| 9 | | 2 | 10 | 5 |
| 10 | 2 | 4 | 9 | |

перетинів з цим квадратом. Ці точки перетину будуть новими фіктивними вершинами. Будь-яка точка поза квадратом буде фіктивною гранню. Напівребра визначаються згідно з логікою ПЗСР.

Читачу пропонується самостійно позначити на рис. 3.23 фіктивні напівребра згідно з даними з табл. 3.34.

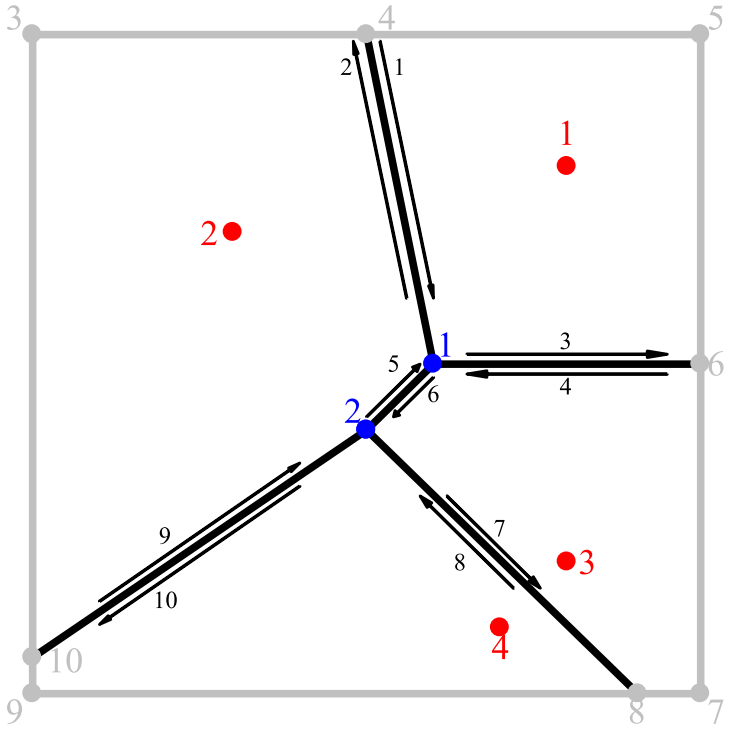



Рис. 3.23: Графічне зображення (кінець).

## 3.9. Побудова тріангуляції Делоне за допомогою діаграми Вороного

Якщо ми маємо ПЗСР $D_1$, який описує діаграму Вороного, то для отримання ПЗСР $D_2$ для тріангуляції Делоне того самого набору точок, достатньо здійснити наступні дії:

1. Визначити координати граней $D_2$ за допомогою координат вершин $D_1$.

*Таблиця* 3.32

**ПЗСР: грані (кінець).**

| Номер грані | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| 1 | $(3, 3)$ | 1 |
| 2 | $(-2, 2)$ | 2 |
| 3 | $(3, -3)$ | 4 |
| 4 | $(2, -4)$ | 8 |
| 5 | $(6, 6)$ | 11 |

*Таблиця* 3.33

**ПЗСР: вершини (кінець).**

| Номер вершини | Координати | Напівребро |
|---|---|---|
| 1 | $(1, 0)$ | 2 |
| 2 | $(0, -1)$ | 5 |
| 3 | $(-5, 5)$ | 12 |
| 4 | $(0, 5)$ | 1 |
| 5 | $(5, 5)$ | 16 |
| 6 | $(5, 0)$ | 4 |
| 7 | $(5, -5)$ | 21 |
| 8 | $(4.06, -5)$ | 8 |
| 9 | $(-5, -5)$ | 25 |
| 10 | $(-5, -4.45)$ | 9 |

*Таблиця* 3.34

**ПЗСР: напівребра (кінець).**

| Номер напівребра | Вершина | Грань | Близнюк | Наступне |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 14 |
| 3 | 1 | 1 | 4 | 18 |
| 4 | 6 | 3 | 3 | 6 |
| 5 | 2 | 2 | 6 | 2 |
| 6 | 1 | 3 | 5 | 7 |
| 7 | 2 | 3 | 8 | 22 |
| 8 | 8 | 4 | 7 | 10 |
| 9 | 10 | 2 | 10 | 5 |
| 10 | 2 | 4 | 9 | 26 |
| 11 | 10 | 5 | 12 | 13 |
| 12 | 3 | 2 | 11 | 9 |
| 13 | 3 | 5 | 14 | 15 |
| 14 | 4 | 2 | 13 | 12 |
| 15 | 4 | 5 | 16 | 17 |
| 16 | 5 | 1 | 15 | 1 |
| 17 | 5 | 5 | 18 | 19 |
| 18 | 6 | 1 | 17 | 16 |
| 19 | 6 | 5 | 20 | 21 |
| 20 | 7 | 3 | 19 | 4 |
| 21 | 7 | 5 | 22 | 23 |
| 22 | 8 | 3 | 21 | 20 |
| 23 | 8 | 5 | 24 | 25 |
| 24 | 9 | 4 | 23 | 8 |
| 25 | 9 | 5 | 26 | 11 |
| 26 | 10 | 4 | 25 | 24 |

2. Визначити координати вершин $D_2$ за допомогою координат граней $D_1$.
3. Замінити кожну пару напівребер, яка з'єднує дві вершини в $D_1$, на пару півребер, яка з'єднує нові вершини в $D_2$. Після цього треба правильно визначити всі вказівники в $D_2$ згідно з правилами заповнення ПЗСР.

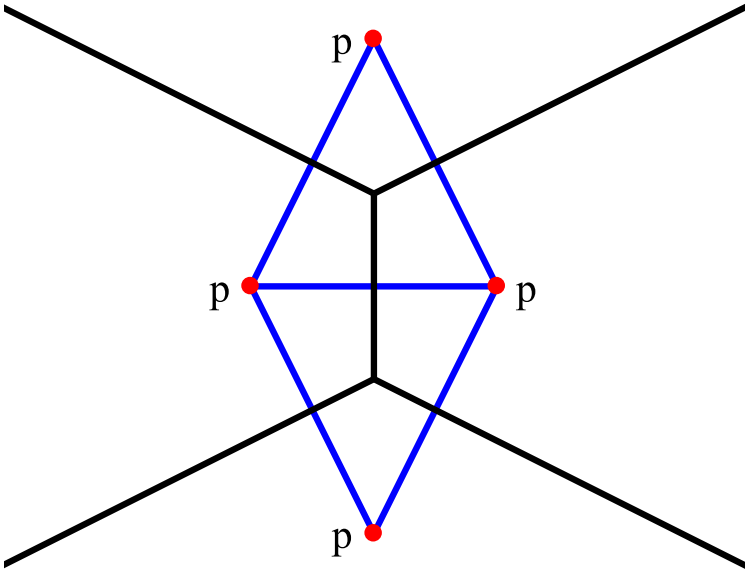
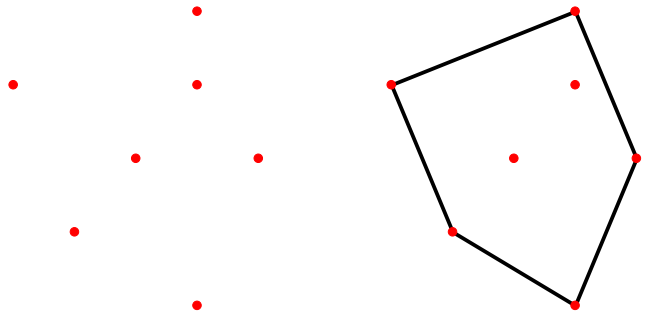



Рис. 3.24: Даграма Вороного (чорна) та тріангуляція Делоне (блакитна).

## 3.10. Алгоритми побудови опуклої оболонки

Алгоритми побудови опуклої оболонки є відносно нескладними в порівнянні з алгоритмом Форчуна. Опукла оболонка множини $A$ — це найменша за включенням опукла множина $C$, для якої $A \subseteq C$. Якщо $A$ є набором точок на площині, то опуклою оболонкою є багатокутник, вершинами якого є деякі точки з множини $A$.

Більшість з методів побудови опуклої оболонки базується на понятті повороту при обході цієї самої оболонки. Так, якщо ми уявимо, що йдемо по ламаній, яка є межею опуклої оболонки деякої множини точок, причому



(а) Вхідні дані. (б) Вихідні дані.

Рис. 3.25: Опукла оболонка множини точок.

йдемо в напрямку проти годинникової стрілки, то ми маємо завжди повертати ліворуч при такому обході. Якщо ж ми будемо йти за годинниковою стрілкою, то, навпаки, повертати будемо лише праворуч.

На цій інтуїтивно зрозумілій закономірності побудовні перші алгоритми Кейла-Кіркпатрика, Ендрю-Джарвіса та Грехема. Для того, щоб перевіряти, чи відбувається поворот "направо" чи "наліво", зручно використовувати формулу для орієнтованої площі паралелограма. Припустимо, що ми йдемо по відрізку від точки $A$ до точки $B$ і в ній маємо повернути до $C$ (рис. 3.27). Тоді для того, щоб визначити, в який бік відбувається поворот, треба порахувати визначник

$$\begin{vmatrix} B.x - A.x & C.x - A.x \\ B.y - A.y & C.y - A.y \end{vmatrix}$$

Якщо визначник більше 0, то поворот відбувається наліво, якщо менше 0 — направо.

**Алгоритм Кейла-Кіркпатрика.**

Для даного алгоритму точки $p_1, p_2, ..., p_N$ повинні мати цілі координати. Для інших алгоритмів обмежень на координати точок немає.

1. Відсортувати точки $p_1, p_2, ..., p_N$ за $y$-координатою кишеньковим сортуванням, при цьому для кожного значення $y$ визначити найлівішу

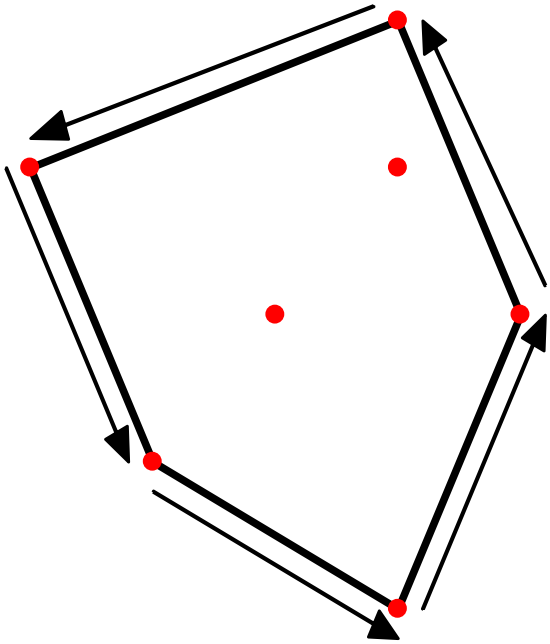
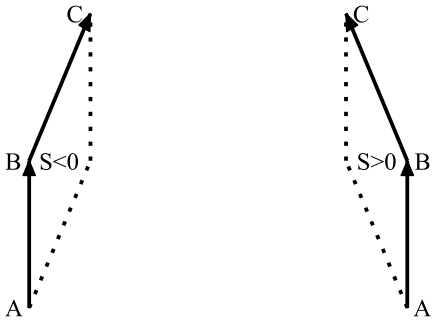


Рис. 3.26: Обхід опуклої оболонки проти годинникової стрілки з поворотами наліво.

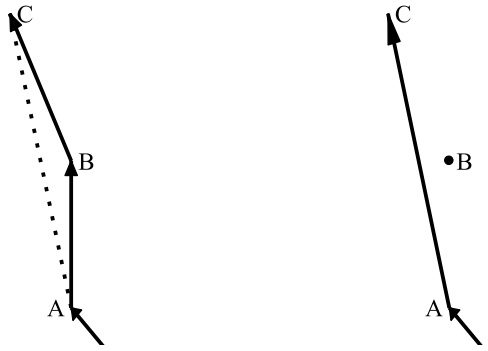



(а) Поворот направо. (б) Поворот наліво.

Рис. 3.27: Зв'язок напрямку повороту та орієнтованої площі.

та найправішу точки. В результаті буде отримано масив “лівих” та “правих” точок. Серед цих точок мають бути вершини опуклої оболонки.

2. Пройти по масиву лівих точок знизу вгору, проводячи відрізки між сусідніми точками. При цьому якщо поворот при побудові нового відрізка відбувається наліво, то дані два відрізка не є частиною опуклої оболонки, і їх треба видалити та замінити на “коротший” шлях (рис. 3.28). Якщо ж поворот відбувається направо, то ніяких проблем немає.
3. Провести аналогічну процедуру для масиву правих точок. Якщо йти по ним знизу вгору, то тепер поворот наліво є правильним поворотом.
4. Побудувати відрізки, що з’єднують найнижчі точки лівого та правого масивів.
5. Побудувати відрізки, що з’єднують найвищі точки лівого та правого масивів.

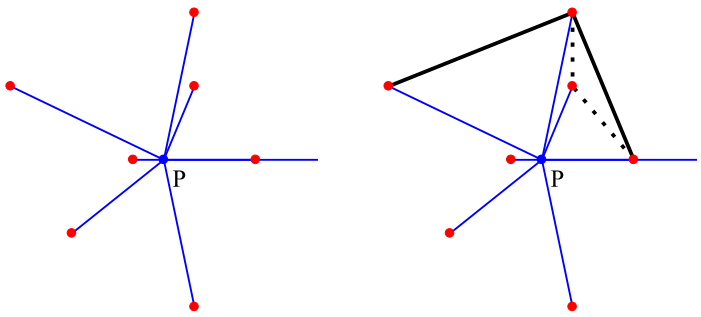



(а) До видалення. (б) Після видалення.

Рис. 3.28: Видалення повороту наліво під час побудови лівої частини опуклої оболонки методом Кейла-Кіркпатрика.

**Алгоритм Грехема.**

1. Обрати полюс $P$: точку, яка знаходиться десь між точками $p_i$. Можна в якості полюсу обрати центр мас точок $p_i$, але не обов'язково саме його.
2. Відсортувати точки $p_i$ за полярним кутом методом сортування з асимптотичною швидкістю $O(n \ln n)$.
3. Пройти по відсортованому набору точок проти годинникової стрілки, видаляючи при цьому повороти направо (аналогічно алгоритму Кейла-Кіркпатрика).
4. Досягнувши кінця відсортованого масиву, з'єднати дві крайні точки та пройти по опуклій оболонці проти годинникової стрілки знову для видалення поворотів направо. Ці повороти можуть залишитися через те, що ми з'єднали останню та першу точки без додаткових перевірок.




(а) Визначення полюсу та полярних кутів.

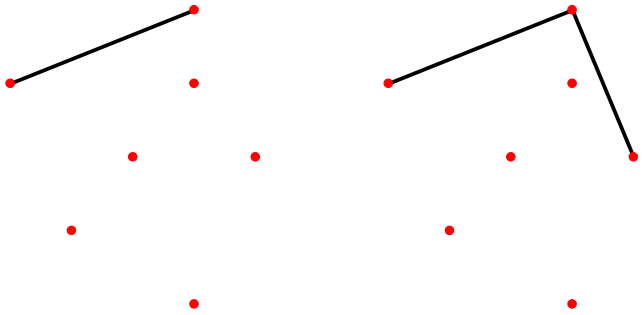
(б) Побудова проти годинникової стрілки.

Рис. 3.29: Побудова опуклої оболонки методом Грехема.

**Алгоритм Ендрю-Джарвіса.**

1. Знайти найлівішу точку $P$ серед набору $p_i$. Якщо таких декілька, обрати серед них найвищу.
2. Знайти точку $Q$ серед набору $p_i$, таку що всі інші точки лежать по правий бік від прямої, що з'єднує $P$ і $Q$ (рис. 3.30).

3. Додати відрізок $PQ$ до опуклої оболонки та встановити $P = Q$.
4. Повторювати кроки 2-3, поки не відбудеться повернення в точку, обрану на кроці 1.



(а) Перше ребро. (б) Друге ребро.

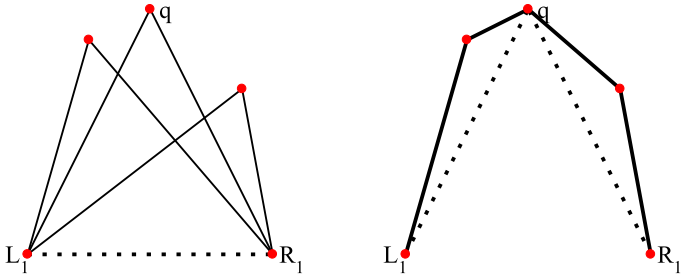
Рис. 3.30: Перші дві складові опуклої оболонки, побудовані алгоритмом Ендрю-Джарвіса.

Останній, рекурсивний алгоритм для побудови опуклої оболонки, не використовує повороти. Натомість він будує опуклу оболонку, максимізуючи площу охопленої нею ділянки.

**Рекурсивний алгоритм.**

1. Знайти найлівіші та найправіші точки з набору $p_i$. Серед найлівіших точок обрати найвищу та найнижчу, позначити їх $L_1$, $L_2$. Аналогічно визначити $R_1$, $R_2$ для масиву правих точок.
2. Зєднати точки $L_1$ та $L_2$ між собою. Додати отриманий відрізок до опуклої оболонки. Аналогічно вчинити з $R_1$ і $R_2$.
3. Визначити множину точок $q_i$ серед множини $p_i$, які лежать вище прямої, що з'єднують $L_1$ та $R_1$. Якщо таких точок немає, додати відрізок $L_1R_1$ до опуклої оболонки.
4. Серед точок $q_i$ обрати таку точку $q$, що площа трикутника $L_1qR_1$ максимальна.

5. (Рекурсія) Повторити кроки 3-5, спочатку обираючи у якості $L_1$ та $R_1$ спочатку точки $L_1$, $q$, а потім — $q$, $R_1$. (ліва та права частини)
6. Провести процедуру, аналогічну крокам 3-5 для нижньої половини опуклої оболонки та точок $L_2$, $R_2$.




(а) Пошук $q$. (б) Рекурсія.

Рис. 3.31: Побудова верхньої частини опуклої оболонки рекурсивним методом.

# ЗАВДАННЯ

1. Якщо генератор випадкових чисел мільярд разів підряд видасть значення 0, чи можна сказати, що він завжди видає 0? А якщо розглядати генератор псевдовипадкових чисел?
2. Узагальнити клас Rand, щоб з його допомогою можна було описувати недійснозначні випадкові величини (векторні). На що тоді мають змінитися поля Dom_min та Dom_max?
3. Реалізацією нормального розподілу може бути довільне дійсне число. Як тоді треба обрати Dom_min та Dom_max для коректного виведення гістограми?
4. Модифікувати алгоритми 7-8 лабораторної роботи №1, так щоб з їхьою допомогою можна було генерувати нормально розподілені випадкові величини із наперед заданим математичним сподіванням $m$ та квадратичним відхиленням $\sigma$.
5. Реалізувати алгоритм шкільного ділення двох довгих цілих чисел. Яка асимптотична складність буде у цієї процедури, якщо ділене має довжину $n$ цифр, а дільник — $n/2$ цифр?
6. Реалізувати алгоритм шкільного множення в рекурсивній формі.
7. Довести асимптотичну оцінку для методу Карацуби, використовуючи теореми про асимптотичні оцінки рекурсивних алгоритмів.
8. Довести, що всі коефіцієнти $F$ в методі Тоома-Кука є невід'ємними.
9. Реалізувати алгоритм швидкого множення Тоом-5, який полягає в модифікуванні алгоритму Тоома-Кука. В Тоом-5 на основі чисел-аргументів будуються поліноми 5 степені.
10. Довести, що описана в пункті 2.6 процедура взяття остачі за модулем $2^a - 1$ є коректною. Довести коректність аналогічної процедури

для знаходження остачі по модулю $2^N + 1$ з пункту 2.7.

11. Що має передаватися в якості першого аргументу в функцію $C$ на кроці 8 алгоритму Шенхаге, якщо $W_2 < W_1$? Дати відповіді на аналогічні питання стосовно кроків 9-12.
12. Чому в пункті 1 алгоритму Штрасена в оцінці для $n$ в лівій частині нерівності присутній коефіцієнт 2?
13. Чи можна зменшити дно рекурсії в процедурі **Множення за модулем** з пункту 2.7? (Підказка: звернути увагу на пункт 7 даної процедури)
14. Знайти асимптотичні оцінки складності алгоритмів перевірки довгого числа на простоту з пункту 2.12, вважаючи, де це потрібно, що кількість раундів є фіксованою константою.
15. Що є діаграмою Вороного для однієї точки? Для двох точок? Дати відповіді на аналогічні питання по відношенню до тріангуляції Делоне та опуклої оболонки?
16. Що є діаграмою Вороного для $n$ точок, розташованих на одній прямій? Чи коректно обробляється такий випадок алгоритмом Форчуна?
17. Чи можна узагальнити алгоритм Форчуна на набір точок, серед яких є точки з однаковими $y$-координатами? Якщо так, то які пункти алгоритму або які допоміжні процедури при цьому зміняться?
18. Як буде виглядати діаграма Вороного для набору точок, що розташовані по колу? Як при цьому буде виглядати тріангуляція Делоне? Пов'язати відповіді на дані питання з міркуваннями, що передують рис. 3.7.
19. Якого типу має бути поле q в структурі TValueLeaf?
20. Де в полях структур лабораторної роботи №3 можна замість ітераторів використовувати константні ітератори?
21. Що є ключем в бінарному дереві пошуку, якщо його реалізовувати

згідно з принципами, описаними в пункті 3.7?

22. Чи може статися так, що в процесі виконання алгоритма Форчуна в чергу $Q$ додається подія з пріоритетом вищим, ніж у щойно обробленої події?
23. Оцінити асимптотичний час виконання процедур **Обробки події місця** та **Обробки події кола**. Оцінити асимптотично кількість подій в черзі $Q$. Поєднати отримані оцінки та довести, що алгоритм Форчуна працює за час $O(n \ln n)$.
24. Показати, що в геометричній інтерпретації алгоритму Форчуна замітаючу пряму можна замінити на замітаюче коло, яке розширюється зі свого центра до нескінченності, причому центр є довільною наперед заданою точкою площини. При цьому діаграма Вороного коректно будується всередині кола по мірі його розширення. Як тоді зміниться структура берегової лінії та якими кривими будуть описуватися дуги берегової лінії?
25. Показати, як з діаграми Вороного та тріангуляції Делоне можна отримати опуклу оболонку заданого набору точок.
26. Отримати асимптотичні оцінки складності алгоритмів 3-6 лабораторної роботи №3 в залежності від кількості точок.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Томас Г. Кормен, Чарлз Е. Лейзерсон, Роналд Л. Рівест, Кліфорд Стайн. Вступ до алгоритмів. — К.І.С., 2019. ISBN 9786176842392.
2. Crandall, Richard; Pomerance, Carl (2001), "Section 4.2.1: The Lucas–Lehmer test Prime Numbers: A Computational Perspective (1st ed.), Berlin: Springer, pp. 167–170, ISBN 0-387-94777-9
3. Deitel, Paul, Deitel, Harvey. (2010). C++ : how to program (7). New Jersey: Pearson.
4. Feller, W. (1968). An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1 (3rd ed.). Wiley.
5. Feller, W. (1971). An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II (2nd ed.). Wiley.
6. Fortune S. A sweepline algorithm for Voronoi diagrams. Proceedings of the second annual symposium on Computational geometry. Yorktown Heights, New York, United States, pp.313–322. 1986. ISBN 0-89791-194-6.
7. Голубєва К.М., Кашпур О.Ф., Клюшин Д.А. Чисельні методи (для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики, ОП «Системний аналіз»): навчальний посібник. Київ: 2022. – 145 с.
8. Karatsuba, A. A.; Ofman, Y. P. (1962). "Multiplication of Many-Digital Numbers by Automatic Computers". Proceedings of the USSR Academy of Sciences (in Russian). 145: 293–294. Translation in the academic journal Physics-Doklady, 7 (1963), pp. 595–596.
9. Knuth, D. E. (1997). The art of computer programming: Vol. 1. Fundamental algorithms (3rd ed.). Addison-Wesley.
10. Knuth, D. E. (1997). The art of computer programming: Vol. 2 Seminumerical Algorithms (3rd ed.). Addison-Wesley.

11. Knuth, D. E. (1997). The art of computer programming: Vol. 3 Sorting and Searching (3rd ed.). Addison-Wesley.
12. Rabin, Michael O. (1980), "Probabilistic algorithm for testing primality Journal of Number Theory, 12 (1): 128–138, doi:10.1016/0022-314X(80)90084-0
13. Schönhage, Arnold; Strassen, Volker (1971). "Schnelle Multiplikation großer Zahlen"[Fast multiplication of large numbers]. Computing (in German). 7 (3–4): 281–292. doi:10.1007/BF02242355
14. Seysen M. A Simplified Quadratic Frobenius Primality Test // Cryptology ePrint Archive. — 2005. — P. 4—13
15. Solovay, Robert M.; Strassen, Volker (1977). "A fast Monte-Carlo test for primality". SIAM Journal on Computing. 6 (1): 84–85. doi:10.1137/0206006
16. Stroustrup, B. (2013). The C++ Programming Language (4th ed.). Addison-Wesley.
17. Tóth, C. D., O'Rourke, J., Goodman, J. E. (Eds.). (2017). Handbook of Discrete and Computational Geometry (3rd ed.). Chapman and Hall/CRC.