ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Андрій Заворотинський
Богдан Довгай
Роман Якимів
Тетяна Шакотько

Алгебра та геометрія
Лінійні простори, перетворення та оператори

Навчальний посібник

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
ОПП "Інформатика" спеціальності F3 "Комп'ютерні науки"

Київ – 2026

УДК 512.64(075.8)

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук, професор Ігор Самойленко;
кандидат фізико-математичних наук, доцент Тарас Панченко, завідувач кафедри теорії та технології програмування факультету комп'ютерних наук та кібернетики.

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 13 від 21 квітня 2026 р.)

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 10 від 20 квітня 2026 р.)

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри дослідження операцій Андрій Володимирович Заворотинський;

кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри дослідження операцій Богдан Валерійович Довгай;

кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри дослідження операцій Роман Ярославович Якимів;

заступник декана факультету комп'ютерних наук та кібернетики, асистент кафедри дослідження операцій Тетяна Іванівна Шакотько.

Алгебра та геометрія. Лінійні простори, перетворення та оператори : навчальний посібник / А. В. Заворотинський, Б. В. Довгай, Р. Я. Якимів, Т. І. Шакотько. — Київ : Факультет комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2026. — 152 с.

Навчальний посібник присвячено теорії лінійних просторів, перетворень та операторів. Він охоплює відповідний розділ матеріалу, передбаченого програмою обов'язкової дисципліни “Алгебра та геометрія” для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня, які навчаються за освітньо-професійною програмою “Інформатика” спеціальності F3 “Комп'ютерні науки”.

Видання призначене для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також для всіх, хто цікавиться методами лінійної алгебри, елементами спектральної теорії та їхнім прикладним застосуванням у сучасних інформаційних технологіях.

Зміст

Передмова

Навчальний посібник *«Алгебра та геометрія. Лінійні простори, перетворення та оператори»* підготовлено для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальності F3 "Комп'ютерні науки", які навчаються на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Видання призначене для методичної підтримки практичних занять, організації самостійної роботи студентів і систематизації основних понять, методів та алгоритмів розв'язування задач із відповідного розділу дисципліни "Алгебра та геометрія".

Посібник створено на основі багаторічного досвіду викладання математичних дисциплін на факультеті, зокрема на кафедрі дослідження операцій. Під час його підготовки враховано особливості сприйняття матеріалу студентами спеціальності "Комп'ютерні науки", типові труднощі в опануванні апарату лінійної алгебри, а також потребу поєднати фундаментальність викладу з його прикладною спрямованістю. Теоретичною основою видання є курс лекцій Б. В. Довгая "Лінійні простори", адаптований до актуальних потреб фахової підготовки.

Цей посібник є складовою запланованої серії навчально-методичних видань з курсу "Алгебра та геометрія". Метою серії є поетапне висвітлення основних розділів дисципліни із забезпеченням змістової узгодженості, єдності методичних підходів і послідовності у формуванні математичної культури майбутніх фахівців.

У цьому виданні розглянуто шість тематичних блоків, присвячених аксіоматиці лінійного простору, лінійній залежності та незалежності, базисам і координатам, підпросторам, сумі та прямій сумі, лінійним перетворенням, проєкціям і розкладу простору, а також лінійним операторам, їх ядру, образу, рангу, дефекту, алгебрі операторів та оборотності. Добір задач і прикладів орієнтовано на формування не лише теоретичного розуміння, а й стійких практичних навичок роботи з координатним, матричним і операторним апаратом.

Структуру посібника підпорядковано завданням практичного навчання. Кожна тема містить вступ, короткі теоретичні відомості, алгоритми розв'язування типових задач, типові задачі з розв'язаннями, завдання для самостійного розв'язування, прикладні задачі та питання для самоконтролю. Така побудова дає змогу поєднати теоретичну системність із покроковим опрацюванням основних методів і забезпечує зручний перехід від означень і тверджень до самостійної роботи над задачами.

Окрему увагу приділено прикладній спрямованості матеріалу. У тексті розглядаються задачі, пов'язані з аналізом даних, комп'ютерною графікою, зміною координат, лінійними моделями, обробкою сигналів та іншими застосуваннями лінійної алгебри в комп'ютерних науках. Це дає змогу показати, що базові поняття алгебри та геометрії є не лише елементами теорії, а й інструментами сучасних обчислювальних підходів.

Для зручності користування матеріал подано за допомогою структурованих оточень, які чітко відокремлюють означення, теореми, зауваження, алгоритми, приклади та задачі. Наприкінці посібника вміщено перелік позначень, символів і скорочень, список використаних та рекомендованих джерел, а також предметний покажчик, що полегшує систематизацію матеріалу й навігацію в тексті.

Під час підготовки рукопису інструменти штучного інтелекту використовувалися виключно як допоміжний засіб для мовного редагування, уточнення стилістики та структурування окремих фрагментів тексту. Усі змістові рішення, формулювання математичних тверджень, добір задач і перевірку коректності матеріалу виконано авторами, які несуть повну відповідальність за якість видання.

Є підстави сподіватися, що цей посібник стане надійним помічником для студентів під час аудиторної роботи та підготовки до контрольних заходів, а викладачам слугуватиме зручною методичною основою для проведення практичних занять.

Вступ

Лінійна алгебра посідає одне з центральних місць у математичній підготовці здобувачів вищої освіти спеціальності F3 "Комп'ютерні науки". Вона формує поняттєвий апарат, мову та методи, без яких неможливе повноцінне опанування як подальших математичних дисциплін, так і значної частини фахових курсів, пов'язаних з аналізом даних, комп'ютерною графікою, моделюванням, чисельними методами, машинним навчанням та алгоритмічними аспектами обробки інформації. Одним із її фундаментальних розділів є теорія лінійних просторів, перетворень та операторів, які становлять змістове ядро цього навчального посібника.

Концепція лінійного простору належить до базових у сучасній математиці. Вона дає змогу розглядати в єдиній теоретичній схемі найрізноманітніші математичні об'єкти, для яких природно означені операції додавання та множення на число. До таких об'єктів належать геометричні вектори, системи чисел, матриці, многочлени, функції, сигнали та інші математичні моделі. У межах цієї теорії вводяться й досліджуються системи векторів, лінійна залежність і незалежність, базис, координати, розмірність, а також підпростори та операції над ними. Саме ці поняття визначають внутрішню структуру лінійного простору і створюють основу для подальшого розгляду лінійних перетворень та операторів.

Особливу роль у лінійній алгебрі відіграє поняття базису. Воно дозволяє перейти від абстрактного опису елементів простору до їх координатного подання, а отже, зробити математичні конструкції придатними для алгоритмічного опрацювання. Координатний підхід лежить в основі більшості обчислювальних процедур, пов'язаних із лінійними моделями, оскільки саме він зводить роботу з векторами та операторами до роботи з наборами чисел і матрицями. Тому теми, пов'язані з базисами, координатами та зміною базису, мають не лише теоретичне, а й безпосереднє практичне значення.

Не менш важливим є вивчення підпросторів, суми та прямої суми. Ці поняття дають змогу описувати внутрішню будову простору, виділяти його змістовно важливі компоненти та будувати розклади, які надалі використовуються в геометричних, аналітичних і прикладних задачах. Саме на цій основі виникає поняття проєкції, яке дозволяє виділяти модельну складову вектора, відокремлювати корисну інформацію від шуму, а також здійснювати узгоджений перехід між різними підпросторами. Для сучасних комп'ютерних наук це має принципове значення, оскільки задачі розкладу, апроксимації та зменшення розмірності є невід'ємною частиною роботи з даними.

Перехід до лінійних перетворень і операторів дає змогу досліджувати не лише самі простори, а й зв'язки між ними. У цьому контексті розглядаються матриці лінійного перетворення, зміна матриці при переході до іншого базису, ядро та образ відображення, ранг і дефект, а також питання оборотності. Такі конструкції мають не лише теоретичне значення, а й безпосередньо пов'язані з практикою розв'язування задач, оскільки дозволяють описувати властивості перетворення, втрату або збереження інформації, структуру множини розв'язків та можливість однозначного відновлення початкових даних.

Для студентів спеціальності "Комп'ютерні науки" цей матеріал має виразний прикладний зміст. Вектори й матриці використовуються як природний спосіб подання даних; перетворення координат лежать в основі геометричних перетворень у комп'ютерній графіці; лінійні оператори застосовуються під час побудови моделей у задачах обробки сигналів, аналізу даних і машинного навчання; ранг і ядро матриці дають змогу виявляти надлишковість ознак, виродженість моделей та приховані залежності між змінними. У цьому сенсі лінійна алгебра постає не лише як фундаментальний розділ математики, а і як необхідний інструмент професійної підготовки майбутнього фахівця з комп'ютерних наук.

Важливою особливістю цього розділу курсу є поєднання теоретичної строгості з алгоритмічністю. Поняття лінійної залежності, базису, координат, підпростору, матриці перетворення, ядра, образу, рангу, дефекту чи оборотності мають бути не лише засвоєні на рівні означень і тверджень, а й включені в практику розв'язування задач. Саме тому в посібнику значну увагу приділено алгоритмам: побудові базису, переходу між базисами, знаходженню матриці лінійного перетворення, обчисленню проєкцій, дослідженню ядра й образу, перевірці оборотності оператора та побудові оберненої матриці. Такий підхід забезпечує зв'язок між теорією і реальною обчислювальною практикою.

Матеріал посібника охоплює розділ дисципліни «Алгебра та геометрія», присвячений лінійним просторам, перетворенням та операторам. Видання побудовано так, щоб послідовно поєднати вступні зауваження, короткі теоретичні відомості, алгоритми розв'язування типових задач, розібрані приклади, завдання для самостійної роботи, прикладні задачі та питання для самоконтролю. Така структура сприяє не лише глибокому засвоєнню основних понять і тверджень, а й формуванню стійких практичних навичок роботи з лінійними об'єктами.

Цей том охоплює шість основних тем: аксіоматику лінійного простору і лінійну залежність та незалежність; базис і координати; лінійні підпростори, суму та пряму суму; лінійні перетворення; проєкції та розклад простору; лінійні оператори, їх ядро, образ, алгебру та оборотність. У сукупності ці теми утворюють завершений і методично цілісний цикл, який підводить студента до подальшого вивчення складніших розділів лінійної алгебри та її застосувань.

Отже, цей навчальний посібник має на меті сформувати цілісне уявлення про лінійні простори, перетворення та оператори як одну з центральних частин курсу "Алгебра та геометрія". Засвоєння наведеного матеріалу створює необхідну основу для подальшого вивчення математичних і фахових дисциплін та для використання методів лінійної алгебри в задачах сучасних комп'ютерних наук.

Тема 1. Аксіоматика лінійного простору. Лінійна залежність і лінійна незалежність

Вступ

Лінійні простори є однією з базових математичних структур, на яких ґрунтуються сучасна прикладна математика та комп'ютерні науки. Їх значення полягає в тому, що вони дають змогу розглядати в єдиній теоретичній схемі найрізноманітніші об'єкти: геометричні вектори, системи чисел, матриці, многочлени, функції, сигнали та інші математичні моделі. Аксіоматичний підхід до побудови лінійного простору дозволяє відокремити суттєві властивості векторних об'єктів від їх конкретної природи. Саме тому аксіоматика виступає універсальною мовою опису, яка поєднує різні математичні конструкції в межах одного підходу і закладає основу для подальшого вивчення всього курсу.

Для галузі комп'ютерних наук теорія лінійних просторів має виразне прикладне значення. У задачах аналізу даних, машинного навчання, комп'ютерної графіки, обробки сигналів, робототехніки та інформаційної безпеки інформаційні об'єкти природно подаються у вигляді векторів, а множини таких об'єктів часто утворюють або наближено описуються лінійними моделями. Простір ознак, простір станів системи, простір параметрів моделі чи простір цифрових зображень природно формулюються саме в термінах лінійної алгебри. Тому розуміння того, які множини справді мають структуру лінійного простору і які операції на них допускаються, є важливою передумовою для коректного математичного опису прикладних задач.

У межах цієї теми вводяться поняття лінійної комбінації, лінійної залежності, лінійної незалежності та лінійної оболонки. Вони лежать в основі подальшої теорії базисів, координат, розмірності, рангів і лінійних перетворень. Особливо важливим є поняття лінійної залежності, оскільки саме воно дає змогу виявляти надлишковість у системах даних. Якщо один вектор виражається через інші, то відповідна система містить повторювану або залежну інформацію; натомість лінійно незалежні системи фіксують мінімально достатній набір елементів для породження потрібного підпростору. У прикладних задачах це означає можливість скорочення кількості параметрів, усунення дублювання ознак і побудови компактніших моделей подання інформації.

Особливістю цієї теми є поєднання абстрактного змісту з алгоритмічним підходом. Лінійну залежність і незалежність систем векторів перевіряють за допомогою розв'язування систем лінійних рівнянь, а опис лінійної оболонки пов'язаний із рангом матриці та еквівалентними перетвореннями Жордана–Гауса. Отже, теоретичні означення не залишаються ізольованими від обчислювальної практики, а безпосередньо переходять у конструктивні процедури. Саме тут студент уперше систематично стикається з тим, що строгі математичні твердження мають алгоритмічну форму і можуть бути реалізовані як послідовність чітких кроків.

Підсумовуючи, аксіоматика лінійного простору, лінійна залежність і лінійна незалежність формують початковий фундамент усього подальшого курсу. Вони дозволяють зрозуміти внутрішню будову векторних систем, відокремити суттєву інформацію від надлишкової та підготувати ґрунт для введення базису, координат і розмірності. Саме тому ця тема є необхідною передумовою для подальшого вивчення підпросторів, лінійних перетворень і операторів, а також для опанування тих математичних методів, які використовуються в сучасних комп'ютерних науках.

Короткі теоретичні відомості

Поняття поля

Означення 1.1: Поле

Непорожня множина F називається *полем*, якщо на ній задано дві бінарні операції, які називаються *додаванням* і *множенням*, причому для довільних $\alpha, \beta, \gamma \in F$ виконуються такі умови:

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
3. існує елемент $0 \in F$ такий, що $\alpha + 0 = \alpha$;
4. для кожного $\alpha \in F$ існує елемент $-\alpha \in F$ такий, що $\alpha + (-\alpha) = 0$;
5. $\alpha\beta = \beta\alpha$;
6. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$;
7. існує елемент $1 \in F$, $1 \neq 0$, такий, що $\alpha \cdot 1 = \alpha$;
8. для кожного $\alpha \in F$, $\alpha \neq 0$, існує елемент $\alpha^{-1} \in F$ такий, що $\alpha\alpha^{-1} = 1$;
9. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Зауваження 1.1

Найважливішими для подальшого викладу є поля $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, тобто поля раціональних, дійсних та комплексних чисел.

Поняття лінійного простору

Означення 1.2: Лінійний простір

Нехай F — поле. Непорожня множина V називається *лінійним простором* або *векторним простором* над полем F, якщо:

- для довільних $a, b \in V$ визначено їх суму $a + b \in V$;
- для довільного $\alpha \in F$ і довільного $a \in V$ визначено добуток $\alpha a \in V$,

і для довільних $a, b, c \in V$ та $\alpha, \beta \in F$ виконуються аксіоми:

1. $a + b = b + a$;
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3. існує елемент $\theta \in V$ такий, що $a + \theta = a$;
4. для кожного $a \in V$ існує елемент $-a \in V$ такий, що $a + (-a) = \theta$;
5. $1 \cdot a = a$;
6. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;

7. $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$;
8. $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$.

Елементи множини V називаються *векторами*, а елементи поля F — *скалярами*.

Твердження 1.1: Наслідки аксіом лінійного простору

У довільному лінійному просторі V над полем F справджуються такі властивості:

1. нульовий вектор θ єдиний;
2. для кожного $a \in V$ протилежний вектор $-a$ єдиний;
3. для кожного $a \in V$ виконується $0 \cdot a = \theta$;
4. для кожного $\alpha \in F$ виконується $\alpha\theta = \theta$;
5. для кожного $a \in V$ виконується $(-1) \cdot a = -a$.

Приклад 1.1: Приклади лінійних просторів

1. Множина $\mathbb{R}^n$ всіх упорядкованих наборів
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad x_i \in \mathbb{R},$$
є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$ відносно покоординатного додавання і множення на число.
2. Множина $M_{m\times n}(F)$ всіх матриць розміру $m \times n$ з елементами з поля F є лінійним простором над F.
3. Множина P_n всіх многочленів степеня не вище n з коефіцієнтами з поля F є лінійним простором над F.
4. Множина $F[a, b]$ всіх функцій, визначених на відрізку $[a, b]$, зі звичайними операціями додавання функцій і множення функції на число є лінійним простором над полем F.
5. Одноелементна множина $\{\theta\}$ є лінійним простором; її називають *нульовим простором*.

Приклад 1.2: Приклад множини, що не є лінійним простором

Множина
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$$
не є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$, оскільки не містить нульового вектора $(0, 0)$ і не є замкненою відносно множення на число.

Лінійна комбінація. Лінійна залежність і лінійна незалежність

Означення 1.3: Система векторів і лінійна комбінація

Скінченна множина векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ називається *системою векторів*. Вираз

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F,$$

називається *лінійною комбінацією* векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Означення 1.4: Лінійна залежність і лінійна незалежність

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ називається

- *лінійно незалежною*, якщо з рівності

  $$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = \theta$$

  випливає, що

  $$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0;$$

- *лінійно залежною*, якщо існують коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$, не всі рівні нулю, такі, що

  $$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = \theta.$$

Теорема 1.1: Критерій лінійної залежності

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли хоча б один із її векторів лінійно виражається через інші.

Твердження 1.2: Властивості лінійно залежних і лінійно незалежних систем

1. Якщо система містить нульовий вектор, то вона лінійно залежна.
2. Якщо деяка підсистема лінійно залежна, то й уся система лінійно залежна.
3. Кожна підсистема лінійно незалежної системи є лінійно незалежною.
4. Порожня система векторів вважається лінійно незалежною.

Приклад 1.3: Приклади лінійної залежності та лінійної незалежності

1. У просторі $\mathbb{R}^2$ система

   $$(1,0)^\mathsf{T}, \quad (0,1)^\mathsf{T}$$

   є лінійно незалежною.
2. У просторі $\mathbb{R}^2$ система

   $$(1,2)^\mathsf{T}, \quad (2,4)^\mathsf{T}$$

   є лінійно залежною, оскільки другий вектор дорівнює подвоєному першому.
3. У просторі $\mathbb{R}^3$ система

   $$(1,0,0)^\mathsf{T}, \quad (0,1,0)^\mathsf{T}, \quad (1,1,0)^\mathsf{T}$$

є лінійно залежною, бо

$$(1,1,0)^\mathsf{T} = (1,0,0)^\mathsf{T} + (0,1,0)^\mathsf{T}.$$

Лінійна оболонка підмножини

Означення 1.5: Лінійна оболонка

Нехай $A \subseteq V$. *Лінійною оболонкою* множини A називається множина всіх лінійних комбінацій скінченних систем векторів із A. Лінійну оболонку множини A позначають через

$$\langle A \rangle.$$

Теорема 1.2: Властивості лінійної оболонки

Для довільної підмножини $A \subseteq V$ справджуються такі твердження:

1. $\langle A \rangle$ є лінійним простором над полем F;
2. $A \subseteq \langle A \rangle$;
3. якщо L — лінійний простір і $A \subseteq L$, то $\langle A \rangle \subseteq L$.

Отже, лінійна оболонка множини A є найменшим лінійним простором, що містить множину A.

Приклад 1.4: Приклади лінійної оболонки

1. У просторі $\mathbb{R}^2$ маємо
$$\left\langle (1,0)^\mathsf{T}, (0,1)^\mathsf{T} \right\rangle = \mathbb{R}^2.$$
2. У просторі $\mathbb{R}^3$ маємо
$$\left\langle (1,0,0)^\mathsf{T}, (0,1,0)^\mathsf{T} \right\rangle = \{(x,y,0)^\mathsf{T} \mid x,y \in \mathbb{R}\},$$
тобто лінійна оболонка цих двох векторів є координатною площиною Oxy.
3. Якщо $a \neq \theta$, то множина
$$\langle a \rangle = \{\alpha a \mid \alpha \in F\}$$
є всіма векторами, колінеарними до a.

Зауваження 1.2

Поняття лінійної залежності, лінійної незалежності та лінійної оболонки є базовими для подальшого введення понять базису і розмірності лінійного простору.

Алгоритми розв'язування типових задач

Алгоритм перевірки аксіом лінійного простору

Нехай на непорожній множині V задано операції додавання та множення на скаляр з поля F.

Крок 1. Замкненість відносно додавання. Перевірити, чи для будь-яких $a, b \in V$ сума $a + b$ знову належить V.

Крок 2. Замкненість відносно множення на скаляр. Перевірити, чи для будь-яких $\alpha \in F$ і $a \in V$ добуток αa належить V.

Крок 3. Перевірка аксіом додавання.

1. комутативність: $a + b = b + a$;
2. асоціативність: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3. існування нуль-вектора $\theta \in V$ такого, що $a + \theta = a$;
4. існування для кожного $a \in V$ протилежного вектора $-a$ такого, що $a+(-a) = \theta$.

Крок 4. Перевірка аксіом множення на скаляр.

1. $1 \cdot a = a$;
2. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;
3. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;
4. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$.

Крок 5. Висновок. Якщо всі перелічені властивості виконуються, то V є лінійним простором над полем F; якщо хоча б одна з них порушується, то V не є лінійним простором.

Алгоритм дослідження системи на лінійну залежність

Нехай задано систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$.

Крок 1. Скласти векторне рівняння

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = \theta,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — невідомі скаляри.

Крок 2. Якщо вектори задано координатами, перейти до відповідної однорідної системи лінійних рівнянь відносно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Крок 3. Розв'язати цю систему.

Крок 4. Висновок.

1. якщо система має лише тривіальний розв'язок

   $$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

   то вектори є лінійно незалежними;
2. якщо існує хоча б один нетривіальний розв'язок, то система є лінійно залежною.

Алгоритм побудови базису лінійної оболонки

Нехай задано систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Крок 1. Скласти матрицю A, стовпцями якої є координати векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Крок 2. За допомогою елементарних перетворень рядків звести матрицю A до східчастого вигляду.

Крок 3. Визначити опорні стовпці отриманої матриці.

Крок 4. Вибрати в *початковій* системі ті вектори, які відповідають опорним стовпцям.

Крок 5. Вибрані вектори утворюють базис лінійної оболонки

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle.$$

Крок 6. Кількість опорних стовпців дорівнює розмірності цієї лінійної оболонки.

Алгоритм перевірки належності вектора лінійній оболонці

Нехай задано вектори $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ і вектор $b \in V$.

Крок 1. Скласти векторне рівняння

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = b.$$

Крок 2. Якщо вектори задано координатами, перейти до відповідної неоднорідної системи лінійних рівнянь відносно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Крок 3. Дослідити сумісність цієї системи, наприклад за теоремою Кронекера–Капеллі.

Крок 4. Висновок.

1. якщо система сумісна, то $b \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$;

2. якщо система несумісна, то $b \notin \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

Алгоритм виявлення лінійної залежності через вираження одного вектора через інші

Нехай задано систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Крок 1. Послідовно перевіряти, чи можна один із векторів системи подати як лінійну комбінацію решти.

Крок 2. Якщо для деякого k встановлено подання

$$a_k = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_{k-1} a_{k-1} + \beta_{k+1} a_{k+1} + \cdots + \beta_n a_n,$$

то система є лінійно залежною.

Крок 3. Якщо жоден із векторів не виражається через інші, то система є лінійно незалежною.

Зауваження. На практиці цей алгоритм зазвичай реалізують через розв'язування систем лінійних рівнянь або через обчислення рангу матриці.

Алгоритм встановлення ізоморфізму лінійних просторів

Нехай задано два лінійні простори V і W над одним і тим самим полем F.

Крок 1. Побудова відображення. Задати відображення

$$\varphi\colon V \to W,$$

яке природно пов'язує елементи простору V з елементами простору W.

Крок 2. Перевірка лінійності. Перевірити, що для довільних $x, y \in V$ і $\alpha \in F$ виконуються рівності

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \qquad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x).$$

Якщо хоча б одна з цих рівностей не виконується, то φ не є лінійним відображенням, а отже, не може бути ізоморфізмом.

Крок 3. Перевірка ін'єктивності. Дослідити, чи є ядро

$$\ker\varphi = \{x \in V \mid \varphi(x) = \theta_W\}$$

тривіальним. Якщо

$$\ker\varphi = \{\theta_V\},$$

то відображення φ є ін'єктивним.

Крок 4. Перевірка сюр'єктивності. Дослідити, чи для кожного $y \in W$ існує $x \in V$ таке, що

$$\varphi(x) = y.$$

Еквівалентно, перевірити, чи

$$\operatorname{Im}\varphi = W,$$

де $\operatorname{Im}\varphi$ — образ відображення φ.

Крок 5. Висновок. Якщо відображення φ є лінійним, ін'єктивним і сюр'єктивним, то воно є ізоморфізмом. Отже, простори V і W ізоморфні.

Зауваження. Якщо V і W — скінченновимірні простори і

$$\dim V = \dim W,$$

то після перевірки лінійності достатньо встановити лише одну з властивостей: або ін'єктивність, або сюр'єктивність. Тоді друга властивість виконується автоматично.

Типові задачі

Задача 1.1: Перевірка аксіом лінійного простору

Дослідити, чи є дійсним лінійним простором множина

$$M = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 0)^{\mathsf{T}} \mid \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n-1\}$$

з операціями додавання та множення на скаляр, визначеними в $\mathbb{R}^n$.

Розв'язання.

Скористаємося алгоритмом перевірки аксіом лінійного простору.

Крок 1. Замкненість відносно додавання. Нехай

$$a = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0)^\mathsf{T}, \qquad b = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, 0)^\mathsf{T} \in M.$$

Тоді

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}, 0)^\mathsf{T} \in M.$$

Отже, множина M замкнена відносно додавання.

Крок 2. Замкненість відносно множення на скаляр. Для довільного $\lambda \in \mathbb{R}$ маємо

$$\lambda a = (\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_{n-1}, 0)^\mathsf{T} \in M.$$

Отже, множина M замкнена відносно множення на скаляр.

Крок 3. Перевірка аксіом додавання. Комутативність і асоціативність додавання успадковуються від простору $\mathbb{R}^n$. Нуль-вектор

$$\theta = (0, 0, \dots, 0)^\mathsf{T}$$

належить множині M, оскільки його остання координата дорівнює нулю. Для кожного

$$a = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0)^\mathsf{T} \in M$$

протилежний вектор

$$-a = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_{n-1}, 0)^\mathsf{T}$$

також належить множині M.

Крок 4. Перевірка аксіом множення на скаляр. Рівності

$$1 \cdot a = a, \qquad (\lambda\mu)a = \lambda(\mu a), \qquad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, \qquad (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

виконуються, оскільки вони справджуються в $\mathbb{R}^n$.

Висновок. Усі аксіоми лінійного простору виконуються. Отже, множина M є дійсним лінійним простором.

Задача 1.2: Лінійна незалежність у комплексному просторі

Дослідити на лінійну незалежність вектори

$$z_1 = -3 + 5i, \qquad z_2 = 4 + 2i$$

з лінійного простору $\mathbb{C}$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Розв'язання.

Скористаємося алгоритмом дослідження системи на лінійну залежність.

Крок 1. Складемо векторне рівняння

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Тобто

$$\alpha_1(-3 + 5i) + \alpha_2(4 + 2i) = 0 + 0i.$$

Крок 2. Прирівняємо дійсну та уявну частини:

$$\begin{cases} -3\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0, \\ 5\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Крок 3. Розв'яжемо систему методом Жордана–Гауса:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Отже,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Крок 4. Висновок. Вектори z_1 і z_2 є лінійно незалежними над полем $\mathbb{R}$.

Задача 1.3: Лінійна залежність векторів у $\mathbb{R}^4$

Дослідити на лінійну залежність вектори

$$a_1 = (1, 2, 3, 4)^\mathsf{T}, \qquad a_2 = (3, -1, 5, -3)^\mathsf{T}, \qquad a_3 = (2, -3, 2, -7)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^4.$$

Розв'язання.

Скористаємося алгоритмом дослідження системи на лінійну залежність.

Крок 1. Складемо векторне рівняння

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \theta.$$

Воно еквівалентне системі

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 - 7\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Крок 2. Розв'яжемо систему методом Жордана–Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -15 & -15 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Крок 3. Звідси

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Нехай $\alpha_3 = t$. Тоді

$$\alpha_2 = -t, \qquad \alpha_1 = t.$$

Отже,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (t, -t, t) = t(1, -1, 1).$$

При $t = 1$ дістаємо нетривіальний розв'язок

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, -1, 1).$$

Крок 4. Висновок. Вектори a_1, a_2, a_3 є лінійно залежними, причому

$$a_1 - a_2 + a_3 = \theta.$$

Отже,

$$a_3 = -a_1 + a_2.$$

Задача 1.4: Лінійна незалежність многочленів

Дослідити на лінійну незалежність многочлени в $\mathbb{R}_2[x]$:

$$f_1(x) = 3x - 2, \qquad f_2(x) = -x^2 + 3x - 4, \qquad f_3(x) = 2x^2 - 2x + 5.$$

Розв'язання.

Скористаємося алгоритмом дослідження системи на лінійну залежність.

Крок 1. Складемо рівність

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0.$$

Тобто

$$\alpha_1(3x - 2) + \alpha_2(-x^2 + 3x - 4) + \alpha_3(2x^2 - 2x + 5) = 0.$$

Крок 2. Згрупуємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$x^2(-\alpha_2 + 2\alpha_3) + x(3\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3) + (-2\alpha_1 - 4\alpha_2 + 5\alpha_3) = 0.$$

Отже, дістаємо систему

$$\begin{cases} -\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0, \\ -2\alpha_1 - 4\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Крок 3. Розв'яжемо систему методом Жордана–Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{11}{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Отже,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Крок 4. Висновок. Многочлени f_1, f_2, f_3 є лінійно незалежними.

Задача 1.5: Параметрична задача на лінійне вираження

Знайти значення параметра λ, при якому вектор

$$c = (10, 1, \lambda, -1)^{\mathsf{T}}$$

лінійно виражається через вектори

$$a_1 = (-3, 2, 4, 1)^\mathsf{T}, \qquad a_2 = (2, 1, -2, 0)^\mathsf{T}, \qquad a_3 = (0, -3, 2, -1)^\mathsf{T}.$$

Розв'язання.

Скористаємося алгоритмом перевірки належності вектора лінійній оболонці.

Крок 1. Складемо векторне рівняння

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = c.$$

У координатному записі воно еквівалентне системі

$$\begin{cases} -3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 10, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 1, \\ 4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = \lambda, \\ \alpha_1 - \alpha_3 = -1. \end{cases}$$

Крок 2. Розглянемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & \lambda \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & \lambda+8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+14 \end{array}\right).$$

Крок 3. Для сумісності системи необхідно й достатньо, щоб

$$\lambda + 14 = 0.$$

Отже,

$$\lambda = -14.$$

Тоді з останньої матриці дістаємо

$$\alpha_1 = -2, \qquad \alpha_2 = 2, \qquad \alpha_3 = -1.$$

Крок 4. Висновок. При

$$\lambda = -14$$

вектор c належить лінійній оболонці векторів a_1, a_2, a_3, причому

$$c = -2a_1 + 2a_2 - a_3.$$

Задача 1.6: Додаткова задача. Ізоморфізм просторів

Довести, що лінійні простори $\mathbb{R}_1[x]$ (многочлени степеня не вище 1) та $\mathbb{R}^2$ є ізоморфними.

Розв'язання.

Будь-який многочлен $f \in \mathbb{R}_1[x]$ має вигляд

$$f(x) = ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Розглянемо відображення

$$\varphi\colon \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(ax+b) = (a, b)^\mathsf{T}.$$

Покажемо, що φ є ізоморфізмом.

1. Лінійність. Для многочленів

$$f(x) = ax + b, \qquad g(x) = cx + d$$

маємо

$$\varphi(f+g) = \varphi\big((a+c)x + (b+d)\big) = (a+c, b+d)^\mathsf{T} = (a,b)^\mathsf{T} + (c,d)^\mathsf{T} = \varphi(f) + \varphi(g).$$

Для довільного $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(\lambda f) = \varphi(\lambda a x + \lambda b) = (\lambda a, \lambda b)^\mathsf{T} = \lambda (a,b)^\mathsf{T} = \lambda \varphi(f).$$

Отже, відображення φ є лінійним.

2. Бієктивність. Кожному вектору $(a,b)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2$ відповідає єдиний многочлен $ax+b$. Отже, відображення φ є взаємно однозначним.

Висновок. Відображення φ є лінійним бієктивним, тобто ізоморфізмом. Отже, простори $\mathbb{R}_1[x]$ і $\mathbb{R}^2$ ізоморфні.

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1.1: Дослідження множин на структуру лінійного простору

Для свого варіанта дослідити, чи є задана множина лінійним простором над указаним полем із природними операціями додавання та множення на скаляр. Якщо множина є лінійним простором, слід коротко обґрунтувати це; якщо не є, вказати, яка з аксіом лінійного простору порушується.

Варіанти 1–5. Дослідити, чи є дійсним лінійним простором над полем $\mathbb{R}$ з операціями, індукованими з $\mathbb{R}^n$, множина всіх векторів

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,$$

які задовольняють відповідну умову.

Варіанти 6–11. Дослідити, чи є дійсним лінійним простором над полем $\mathbb{R}$ з операціями, індукованими з $\mathbb{R}[x]$, множина всіх многочленів

$$f(x) \in \mathbb{R}[x],$$

які задовольняють відповідну умову.

Варіанти 12–15. Дослідити, чи є комплексним лінійним простором над полем $\mathbb{C}$ задана множина матриць.

Варіанти:

1. $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$.
2. $\alpha_1 = 0$.
3. $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$.
4. $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$.
5. $\alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}$.
6. $f(0) = 0$.
7. $2f(0) - 3f(1) = 0$.
8. $f(1) + f(2) + \cdots + f(k) = 0$.
9. $f(0) = 2$.
10. $f(x) = ax^2 + bx + c$.
11. $f(x) = ax + b$.
12. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\}$.
13. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\}$.
14. $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$.
15. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$.

Задача 1.2: Лінійна залежність векторів у $\mathbb{R}^3$

Для кожної трійки векторів $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ з'ясувати, чи є система лінійно незалежною. У разі лінійної залежності знайти нетривіальну комбінацію

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \theta.$$

Варіанти:

1. $a_1 = (-2, 1, 1),\ a_2 = (1, -1, 2),\ a_3 = (0, 2, 1)$
2. $a_1 = (2, 1, -1),\ a_2 = (-1, 3, 1),\ a_3 = (1, -2, 2)$
3. $a_1 = (3, -2, 1),\ a_2 = (1, 1, 4),\ a_3 = (-2, 0, 3)$
4. $a_1 = (-2, 3, 1),\ a_2 = (-1, 2, 2),\ a_3 = (0, 1, -1)$
5. $a_1 = (-4, 1, 2),\ a_2 = (-1, 2, 3),\ a_3 = (-2, -1, -1)$
6. $a_1 = (1, 2, 0),\ a_2 = (2, 0, 1),\ a_3 = (-1, 1, 2)$
7. $a_1 = (2, -1, 1),\ a_2 = (-2, 1, 3),\ a_3 = (1, -1, 2)$
8. $a_1 = (0, -4, 2),\ a_2 = (3, -1, 1),\ a_3 = (2, 2, -1)$
9. $a_1 = (-2, 1, 0),\ a_2 = (4, 1, 1),\ a_3 = (3, 0, 2)$
10. $a_1 = (2, -3, 1),\ a_2 = (-1, -2, 2),\ a_3 = (1, -1, 1)$
11. $a_1 = (-2, 2, 1),\ a_2 = (-1, 1, -3),\ a_3 = (-3, 4, -2)$
12. $a_1 = (1, -2, 2),\ a_2 = (-2, -1, 1),\ a_3 = (0, 1, -1)$
13. $a_1 = (-2, 1, 3),\ a_2 = (1, 3, -1),\ a_3 = (-1, -1, 2)$
14. $a_1 = (3, 1, 1),\ a_2 = (1, -2, 4),\ a_3 = (2, 0, -1)$
15. $a_1 = (-3, 4, 2),\ a_2 = (2, 1, 4),\ a_3 = (-1, 3, -2)$

Задача 1.3: Лінійна залежність у комплексному просторі над $\mathbb{R}$

Чи є числа $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ лінійно залежними над $\mathbb{R}$? Якщо так, знайти

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = 0.$$

Варіанти:

1. $z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = 2 + 4i$
2. $z_1 = 3 - i,\ z_2 = 6 - 2i$
3. $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 2 - i$
4. $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 3 - i$
5. $z_1 = -2 + i,\ z_2 = 4 - 2i$
6. $z_1 = 1 - 3i,\ z_2 = 2 - 6i$
7. $z_1 = 2 + i,\ z_2 = -2 - i$
8. $z_1 = 3 - i,\ z_2 = 1 + 3i$
9. $z_1 = 1 + 4i,\ z_2 = -4 + i$
10. $z_1 = 3 + i,\ z_2 = -1 + 3i$
11. $z_1 = -3 + 6i,\ z_2 = 1 - 2i$
12. $z_1 = 4 + i,\ z_2 = 1 + 4i$
13. $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = -1 + \frac{3}{2}i$
14. $z_1 = 5 + 2i,\ z_2 = 2 + 5i$
15. $z_1 = -2 - 3i,\ z_2 = 4 + 6i$

Задача 1.4: Лінійна залежність многочленів

З'ясувати, чи є многочлени $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}_2[x]$ лінійно залежними.

Варіанти:

1. $f_1 = x - 1,\ f_2 = 2x + 3,\ f_3 = x^2 + x$
2. $f_1 = x^2 - 2,\ f_2 = 3x - 1,\ f_3 = 2x^2 + x + 4$
3. $f_1 = 2x^2 - x + 1,\ f_2 = x^2 + 3x,\ f_3 = x - 2$
4. $f_1 = x^2 + x + 1,\ f_2 = 2x^2 - 3x + 4,\ f_3 = x + 5$
5. $f_1 = 3x^2 + 2x - 1,\ f_2 = x^2 - x + 2,\ f_3 = 2x^2 + x + 1$
6. $f_1 = x^2 - 3x + 2,\ f_2 = 2x^2 + x - 4,\ f_3 = x - 1$
7. $f_1 = 2x^2 + 1,\ f_2 = x^2 + 2x + 3,\ f_3 = 3x - 2$
8. $f_1 = x^2 - 1,\ f_2 = x + 2,\ f_3 = 2x^2 + 3x + 1$
9. $f_1 = x^2 + x,\ f_2 = 2x^2 - x + 3,\ f_3 = 3x - 1$
10. $f_1 = 3x^2 - x,\ f_2 = x^2 + 1,\ f_3 = 2x + 5$
11. $f_1 = x^2 + 2x - 3,\ f_2 = 2x^2 - x + 1,\ f_3 = x - 4$
12. $f_1 = 2x^2 + 3x + 2,\ f_2 = x^2 - 2x + 1,\ f_3 = x + 3$
13. $f_1 = x^2 - 2x,\ f_2 = 2x^2 + 4x,\ f_3 = x^2 + x + 1$
14. $f_1 = x^2 + 3,\ f_2 = 2x^2 - 1,\ f_3 = x^2 + 4x + 2$
15. $f_1 = 3x^2 + 3x + 1,\ f_2 = x^2 + 2x + 2,\ f_3 = 2x^2 - x + 4$

Задача 1.5: Належність вектора лінійній оболонці

Знайти всі $\lambda \in \mathbb{R}$, для яких $c \in \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ у просторі $\mathbb{R}^4$.

Варіанти:

1. $a_1 = (1, -2, 3, 0),\ a_2 = (0, 1, -1, 2),\ a_3 = (2, 0, 1, -1),\ c = (3, 1, \lambda, 2)$
2. $a_1 = (2, 1, 0, -1),\ a_2 = (1, -1, 2, 0),\ a_3 = (0, 2, -1, 1),\ c = (1, 4, \lambda, 0)$
3. $a_1 = (-1, 2, 1, 1),\ a_2 = (2, 0, -1, 3),\ a_3 = (1, 1, 2, -1),\ c = (2, \lambda, 3, 1)$

4. $a_1 = (3, 0, 1, -2),\ a_2 = (1, 2, -1, 0),\ a_3 = (0, 1, 2, 1),\ c = (\lambda, 2, 4, 1)$
5. $a_1 = (1, 1, 1, 0),\ a_2 = (2, -1, 0, 1),\ a_3 = (-1, 2, 1, -1),\ c = (2, 0, \lambda, 1)$
6. $a_1 = (0, 2, 1, -1),\ a_2 = (1, 0, 2, 1),\ a_3 = (2, -1, 0, 2),\ c = (1, 3, \lambda, 2)$
7. $a_1 = (2, -1, 1, 0),\ a_2 = (-1, 2, 0, 1),\ a_3 = (1, 1, 2, -2),\ c = (0, 1, \lambda, -1)$
8. $a_1 = (1, 0, 2, 1),\ a_2 = (2, 1, -1, 0),\ a_3 = (-1, 2, 1, 1),\ c = (2, \lambda, 1, 3)$
9. $a_1 = (0, 1, 1, 2),\ a_2 = (1, -1, 2, 0),\ a_3 = (2, 0, -1, 1),\ c = (3, 0, \lambda, 1)$
10. $a_1 = (1, 2, 0, -1),\ a_2 = (0, 1, 1, 2),\ a_3 = (2, -1, 1, 0),\ c = (\lambda, 3, 2, 1)$
11. $a_1 = (-2, 1, 2, 0),\ a_2 = (1, 1, -1, 2),\ a_3 = (0, 2, 1, -1),\ c = (1, \lambda, 0, 3)$
12. $a_1 = (2, 0, 1, 1),\ a_2 = (1, 2, 0, -1),\ a_3 = (0, 1, 2, 2),\ c = (3, 2, \lambda, 0)$
13. $a_1 = (1, -1, 2, 1),\ a_2 = (2, 1, 1, 0),\ a_3 = (0, 2, -1, 3),\ c = (2, 1, \lambda, 4)$
14. $a_1 = (3, 1, 0, -1),\ a_2 = (1, 0, 2, 1),\ a_3 = (-1, 2, 1, 0),\ c = (1, 2, \lambda, 1)$
15. $a_1 = (0, 2, 1, 1),\ a_2 = (2, -1, 0, 2),\ a_3 = (1, 1, 2, -1),\ c = (\lambda, 1, 3, 2)$

Задача 1.6: Побудова ізоморфізму лінійних просторів

Довести ізоморфність просторів V і W та побудувати ізоморфізм

$$\varphi\colon V \to W.$$

Варіанти:

1. $V = \mathbb{R}_2[x],\ W = \mathbb{R}^3$
2. $V = M_2(\mathbb{R}),\ W = \mathbb{R}^4$
3. $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\},\ W = \mathbb{R}^3$
4. $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\},\ W = \mathbb{R}^2$
5. $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\},\ W = \mathbb{R}^3$
6. $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\},\ W = \mathbb{R}^2$
7. $V = \{f \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(0) = 0\},\ W = \mathbb{R}^3$
8. $V = \{f \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(1) = 0\},\ W = \mathbb{R}^3$
9. $V = \{\text{верхні трикутні матриці } 3 \times 3\},\ W = \mathbb{R}^6$
10. $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\},\ W = \mathbb{R}^3$
11. $V = \mathbb{C}$ над $\mathbb{R},\ W = \mathbb{R}^2$
12. $V = \{\text{діагональні матриці } 2 \times 2,\ a_{11} = a_{22} = 0\},\ W = \mathbb{R}^2$
13. $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = 2x_1 - x_2\},\ W = \mathbb{R}^3$
14. $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 4x_1\},\ W = \mathbb{R}^2$
15. $V = \{f \in \mathbb{R}_4[x] \mid f(0) = f'(0) = 0\},\ W = \mathbb{R}^3$

Прикладні задачі

Задача (IT) 1.1: Вектори ознак і надлишковість ознак

IT-коментар

У машинному навчанні лінійно залежні ознаки (*мультиколінеарність*) можуть призводити до перенавчання моделі та обчислювальної нестабільності. Виявлення таких ознак дає змогу зменшити розмірність даних без втрати інформації, що лежить в основі методів зменшення розмірності, зокрема методу головних компонент.

Нехай об'єкти описуються векторами ознак у просторі $\mathbb{R}^4$. З бази даних отримано три вектори, що відповідають різним ознаковим поданням (наприклад: вік, дохід, стаж, кредитний рейтинг) одного набору клієнтів:

$$s_1 = (1, 2, 0, 1)^\mathsf{T}, \quad s_2 = (0, 1, 1, 2)^\mathsf{T}, \quad s_3 = (2, 5, 1, 4)^\mathsf{T}.$$

1. Дослідіть систему векторів s_1, s_2, s_3 на лінійну залежність за допомогою елементарних перетворень матриці.
2. У разі встановлення лінійної залежності знайдіть нетривіальну лінійну комбінацію, що дорівнює нуль-вектору, та виразіть один вектор через інші. Інтерпретуйте це як наявність надлишкової ознаки.
3. Знайдіть ранг цієї системи і поясніть його зміст як ефективної розмірності простору ознак.

Задача (IT) 1.2: Зображення як елементи лінійного простору

IT-коментар

Будь-яке цифрове зображення можна розглядати як матрицю пікселів, а отже, і як вектор у просторі розмірності $m \times n$. Операції додавання та віднімання таких матриць лежать в основі алгоритмів виявлення змін між кадрами та методів стиснення відеопотоків, де замість повного кадру часто передається лише матриця різниці.

Нехай фрагменти двох послідовних кадрів відеопотоку у градаціях сірого подано матрицями пікселів $A, B \in M_{3,3}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 100 & 200 & 100 \\ 100 & 100 & 100 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 100 & 50 & 100 \\ 100 & 100 & 100 \end{pmatrix}.$$

1. Обчисліть матрицю різниці $D = A - B$.
2. Поясніть, як матриця D інтерпретується в задачах виявлення змін між кадрами.
3. Поясніть, чому множина всіх матриць $M_{3,3}(\mathbb{R})$ зі стандартними операціями додавання та множення на число утворює лінійний простір.

Задача (IT) 1.3: Дискретні сигнали як вектори

IT-коментар

У цифровій обробці сигналів аудіодані, часові ряди або покази сенсорів подаються у вигляді числових масивів. Пошук лінійно незалежних шаблонів дає змогу розкладати складні сигнали на простіші компоненти, що є важливою ідеєю спектрального аналізу та фільтрації шумів.

Нехай цифрові сигнали тривалості $n = 5$ задано векторами в $\mathbb{R}^5$:

$$x^{(1)} = (1, -1, 0, 0, 0)^\mathsf{T}, \quad x^{(2)} = (0, 1, -1, 0, 0)^\mathsf{T},$$
$$x^{(3)} = (0, 0, 1, -1, 0)^\mathsf{T}, \quad x^{(4)} = (1, 0, 0, -1, 0)^\mathsf{T}.$$

1. Обґрунтуйте, що множина всіх можливих сигналів такої тривалості утворює лінійний простір над $\mathbb{R}$.
2. Дослідіть систему сигналів $\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}\}$ на лінійну залежність.
3. Знайдіть ранг цієї системи та поясніть його зміст як кількості дійсно незалежних шаблонів у цих сигнальних даних.

Задача (IT) 1.4: Простір станів системи

IT-коментар

У теорії керування, ігрових рушіях та моделюванні динамічних систем вектор стану містить усю необхідну інформацію для прогнозування поведінки об'єкта. Ранг системи станів визначає фактичну кількість незалежних параметрів, що важливо для побудови компактних і ефективних моделей.

Нехай стан фізичного рушія в комп'ютерній грі описується вектором параметрів $x \in \mathbb{R}^3$. Зафіксовано три стани об'єкта в різні моменти часу:

$$x^{(1)} = (2, 1, 3)^\mathsf{T}, \quad x^{(2)} = (1, 0, -1)^\mathsf{T}, \quad x^{(3)} = (4, 1, 1)^\mathsf{T}.$$

1. Дослідіть систему станів $\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\}$ на лінійну незалежність.
2. У разі лінійної залежності знайдіть відповідні коефіцієнти та запишіть рівність, що виражає один із векторів через інші.
3. Поясніть, як знайдений ранг системи пов'язаний із кількістю незалежних параметрів у цій моделі руху.

Задача (IT) 1.5: Вагові вектори моделі машинного навчання

IT-коментар

Під час навчання ансамблевих моделей різні ініціалізації можуть приводити до різних векторів ваг. Якщо деякі з них виявляються лінійно залежними, це свідчить про те, що моделі засвоїли подібні закономірності. Аналіз такої залежності використовують у задачах дистиляції знань та зменшення розміру моделі.

Нехай після чотирьох різних запусків навчання нейронної мережі для одного з шарів були отримані такі вектори ваг $w \in \mathbb{R}^4$:

$$w^{(1)} = (1, 2, -1, 0)^\mathsf{T}, \quad w^{(2)} = (2, 4, -2, 0)^\mathsf{T},$$
$$w^{(3)} = (0, 1, 1, 1)^\mathsf{T}, \quad w^{(4)} = (1, 3, 0, 1)^\mathsf{T}.$$

1. Складіть матрицю з цих векторів і знайдіть її ранг.
2. Визначте, які саме вектори є лінійно незалежними, а які дублюють інформацію.
3. Поясніть, як наявність пропорційних векторів інтерпретується в контексті надлишковості моделі.

Задача (IT) 1.6: Матриці суміжності графів

IT-коментар

В аналізі соціальних мереж і графових нейронних мережах часто працюють із багатошаровими графами, де один і той самий набір вершин має різні типи зв'язків. Лінійна незалежність матриць суміжності показує, наскільки унікальною є структурна інформація, що міститься в кожному шарі.

Нехай топологію соціальної мережі з трьох користувачів для трьох різних типів взаємодій (наприклад: дружба, спільні проєкти, підписки) подано симетричними матрицями суміжності:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Поясніть, чому множина всіх матриць $M_3(\mathbb{R})$ є лінійним простором, а матриці A_1, A_2, A_3 є його елементами.
2. Перевірте, чи є матриця A_3 лінійною комбінацією матриць A_1 та A_2.
3. Знайдіть ранг системи $\{A_1, A_2, A_3\}$ та інтерпретуйте його як кількість незалежних структурних шаблонів зв'язків у цій мережі.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення поля. Які дві операції є обов'язковими для множини, щоб вона вважалася полем?

2. Чому в полі завжди можливе ділення? Для яких елементів поля воно визначене?
3. Які дві множини взаємодіють у структурі лінійного простору? Сформулюйте вісім аксіом лінійного простору.
4. Доведіть, виходячи з аксіом лінійного простору, що нуль-вектор є єдиним.
5. Поясніть, чому добуток будь-якого вектора на скаляр 0 завжди дорівнює нуль-вектору.
6. Що називається лінійною комбінацією системи векторів? У чому полягає різниця між тривіальною та нетривіальною лінійними комбінаціями?
7. Сформулюйте означення лінійно залежної системи векторів через існування нетривіальної лінійної комбінації, що дорівнює нуль-вектору.
8. Сформулюйте та поясніть твердження: система векторів є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один з її векторів лінійно виражається через інші.
9. Поясніть, чому будь-яка система векторів, що містить нуль-вектор, є лінійно залежною.
10. Як співвідносяться властивості лінійної залежності та лінійної незалежності для системи векторів і її довільної підсистеми?
11. Що називається лінійною оболонкою підмножини векторного простору? Як лінійна оболонка пов'язана з поняттям підпростору?
12. Чи зміниться лінійна оболонка системи векторів, якщо до неї додати вектор, який уже лінійно виражається через цю систему? Обґрунтуйте відповідь.
13. У чому полягає суть леми про дві системи векторів? Який висновок можна зробити щодо кількості векторів у лінійно незалежній системі порівняно з системою, через яку вона лінійно виражається?
14. За яких умов відображення між двома векторними просторами називається ізоморфізмом?
15. Що означає твердження, що ізоморфні векторні простори мають однакову лінійну структуру? Наведіть приклади ізоморфних векторних просторів.

Тема 2. Базис і координати. Заміна базису.

Вступ

Поняття *базису* та *координат* є одним із ключових інструментів, що поєднують абстрактну лінійну алгебру з реальними обчислювальними задачами. У прикладних системах дані майже завжди подаються не "самі по собі", а через набір числових параметрів, тобто через координати у деякому наперед вибраному базисі. Саме вибір базису визначає, які характеристики об'єкта вважаються основними, як зручно записувати його властивості та які обчислення виконуються найефективніше. Тому задача побудови базису, знаходження координат вектора та переходу між різними базисами має не лише теоретичне, а й безпосереднє практичне значення.

У комп'ютерній графіці, геометричному моделюванні та ігрових рушіях будь-який об'єкт описується в деякій локальній системі координат. Наприклад, вершини моделі, напрямки осей, швидкості та переміщення задаються відносно власного базису об'єкта. Для коректного відображення на сцені ці координати потрібно перевести до глобального або екранного базису. Такий перехід реалізується за допомогою матриць, а сам процес є фактично переходом від одного базису до іншого. Як наслідок, матриця переходу виступає математичною основою для трансформацій, поворотів, масштабувань і перенесень, які використовуються під час побудови зображення.

У задачах науки про дані та машинного навчання координатне подання також відіграє фундаментальну роль. Набір ознак об'єкта можна розглядати як вектор у деякому просторі, а кожна ознака відповідає окремій координаті. Проте стандартний базис не завжди є найзручнішим для аналізу: ознаки можуть бути сильно пов'язаними між собою, містити шум або мати надлишкову інформацію. У таких випадках виникає потреба перейти до нового базису, в якому дані набувають простішої структури. Саме на цій ідеї ґрунтуються методи декореляції ознак, побудови головних компонент, виділення прихованих факторів і зменшення розмірності. Таким чином, зміна базису дозволяє перейти від сирого набору чисел до інформативнішого та компактнішого подання даних.

Поняття *розмірності* простору відіграє тут не менш важливу роль. Воно відображає мінімальну кількість незалежних параметрів, потрібних для опису елементів простору. У прикладних задачах це означає кількість ступенів свободи моделі або мінімальний обсяг інформації, який не можна усунути без втрати суттєвих властивостей об'єкта. Уміння визначати розмірність простору, знаходити базис лінійної оболонки системи векторів і встановлювати лінійну залежність або незалежність даних є важливим для аналізу моделей, скорочення надлишкових параметрів та оптимізації обчислювальних процедур.

Ключовим технічним інструментом у всіх цих ситуаціях є *матриця переходу між базисами*. Вона задає координати векторів одного базису через координати іншого і, отже, визначає правило перетворення координат будь-якого вектора при зміні системи опису. У практичному сенсі це означає можливість коректно переносити результати обчислень між різними координатними системами, узгоджувати дані, одержані з різних джерел, і працювати з тим базисом, у якому задача має найпростішу форму.

Підсумовуючи, базиси, координати, розмірність і матриці переходу становлять математичний апарат, без якого неможливо повноцінно описувати сучасні обчислювальні моделі. Вони лежать в основі комп'ютерної графіки, робототехніки, аналізу даних, цифрової обробки сигналів, систем штучного інтелекту та багатьох інших напрямів інформатики. Саме тому опанування цих понять є необхідною передумовою для подальшого вивчення лінійних перетворень, операторів та їх застосувань у високотехнологічних системах.

Короткі теоретичні відомості

Базис і розмірність

Означення 2.1: Базис лінійного простору

Нехай V — *лінійний простір* над полем F. Система векторів $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset V$ називається *базисом* простору V, якщо виконуються дві умови:

1. (*лінійна незалежність*) вектори $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійно незалежні;
2. (*породжуваність*) кожен вектор $x \in V$ лінійно виражається через $a_1, a_2, \ldots, a_n$, тобто
$$x \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle.$$

Лінійний простір V називається *скінченновимірним*, якщо в ньому існує скінченний базис. Якщо скінченного базису не існує, то простір називається *нескінченновимірним*.

Означення 2.2: Розмірність

Розмірністю скінченновимірного простору V називається число векторів у будь-якому його базисі. Це число позначається $\dim V$.

Теорема 2.1: Про лінійну залежність системи з $m > n$ векторів

Нехай $\dim V = n$. Тоді будь-яка система з $m > n$ векторів простору V є *лінійно залежною*.

Наслідок 2.1: Інваріантність розмірності

У скінченновимірному просторі всі базиси складаються з однакового числа векторів.

Теорема 2.2: Доповнення лінійно незалежної системи до базису

У скінченновимірному просторі будь-яку лінійно незалежну систему векторів можна доповнити до базису.

Наслідок 2.2: Критерій базису за числом векторів

Нехай $\dim V = n$. Тоді довільна система n лінійно незалежних векторів утворює базис простору V.

Теорема 2.3: Отримання базису з породжувальної системи

Нехай S — система векторів у скінченновимірному просторі V, причому $\langle S \rangle = V$. Тоді з системи S можна отримати деякий базис простору V, якщо потрібно, викреслюючи лінійно залежні вектори.

Координати вектора в базисі

Нехай $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — зафіксований базис скінченновимірного простору V.

Теорема 2.4: Існування та однозначність координат

Для кожного $x \in V$ існують і притому єдині числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ такі, що

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n.$$

Означення 2.3: Координати та координатний стовпчик

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ з теореми 2.4 називаються *координатами* вектора x в базисі B.

Координатним стовпчиком вектора x в базисі B називається матриця-стовпчик

$$[x]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Заміна базису. Матриця переходу

Розглянемо *зміну базису* в лінійному просторі V.

Нехай у просторі V задано два базиси

$$B_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \qquad B_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}.$$

Оскільки B_1 є базисом, кожен вектор b_j однозначно розкладається за базисом B_1:

$$b_j = \alpha_{1j} a_1 + \alpha_{2j} a_2 + \cdots + \alpha_{nj} a_n, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Числа α_{ij} утворюють матрицю

$$T_{B_1 \leftarrow B_2} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 2.4: Матриця переходу від B_2 до B_1

Матриця $T_{B_1 \leftarrow B_2}$ називається *матрицею переходу* від базису B_2 до базису B_1. Її j-й стовпчик є координатним стовпчиком вектора b_j у базисі B_1.

Теорема 2.5: Невиродженість і оберненість матриці переходу

Матриця переходу $T_{B_1 \leftarrow B_2}$ є *невиродженою*. Крім того,

$$T_{B_2 \leftarrow B_1} = \left(T_{B_1 \leftarrow B_2}\right)^{-1}.$$

Зв'язок координат одного й того самого вектора в різних базисах

Нехай у просторі V задано два базиси

$$B_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \qquad B_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\},$$

а також матрицю переходу

$$T_{B_1 \leftarrow B_2}$$

від базису B_2 до базису B_1.

Нехай $x \in V$ — довільний вектор, причому його координатні стовпчики в базисах B_1 та B_2 мають вигляд

$$[x]_{B_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad [x]_{B_2} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця переходу $T_{B_1 \leftarrow B_2}$ складається з координат векторів базису B_2 у базисі B_1, то координати одного й того самого вектора в різних базисах пов'язані формулою *зв'язку координат*:

$$[x]_{B_1} = T_{B_1 \leftarrow B_2}\,[x]_{B_2}.$$

Оскільки

$$T_{B_2 \leftarrow B_1} = \left(T_{B_1 \leftarrow B_2}\right)^{-1},$$

то формула зворотного переходу має вигляд

$$[x]_{B_2} = T_{B_2 \leftarrow B_1}\,[x]_{B_1} = \left(T_{B_1 \leftarrow B_2}\right)^{-1}[x]_{B_1}.$$

Отже, зміна базису приводить до множення координатного стовпчика вектора на відповідну матрицю переходу.

Обчислення матриці переходу за координатами в третьому базисі

Нехай базиси $B_1 = \{a_1, \ldots, a_n\}$ і $B_2 = \{b_1, \ldots, b_n\}$ задано координатами в деякому фіксованому базисі $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Складемо матриці

$$A = \big([a_1]_E \;\; [a_2]_E \;\; \cdots \;\; [a_n]_E\big), \qquad B = \big([b_1]_E \;\; [b_2]_E \;\; \cdots \;\; [b_n]_E\big),$$

тобто стовпчиками матриць A і B є координатні стовпчики базисних векторів у базисі E.

Тоді матриця переходу від B_2 до B_1 визначається рівністю

$$B = A\,T_{B_1 \leftarrow B_2}, \qquad \text{тобто} \qquad T_{B_1 \leftarrow B_2} = A^{-1}B.$$

Пам'ятка про напрямок переходу

Якщо стовпчики $T_{B_1 \leftarrow B_2}$ є координатами векторів базису B_2 у базисі B_1, то для будь-якого $x \in V$ виконується

$$[x]_{B_1} = T_{B_1 \leftarrow B_2}[x]_{B_2}, \qquad [x]_{B_2} = \left(T_{B_1 \leftarrow B_2}\right)^{-1}[x]_{B_1}.$$

Алгоритми розв'язування типових задач

Алгоритм перевірки, чи утворює система векторів базис

Нехай у n-вимірному просторі V задано систему векторів

$$a_1, a_2, \ldots, a_m.$$

Щоб перевірити, чи є ця система базисом простору V, слід виконати такі дії:

1. Якщо $m \neq n$, то система не може бути базисом усього простору V.

2. Якщо $m = n$, скласти матрицю

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix},$$

записавши координати векторів у стовпці.

3. Дослідити лінійну незалежність векторів, тобто розв'язати однорідну систему

$$A\lambda = 0.$$

Для цього звести розширену матрицю системи до східчастого вигляду за допомогою еквівалентних перетворень Жордана–Гауса:

$$(A \mid 0) \sim \dots \sim (A' \mid 0).$$

4. Якщо система $A\lambda = 0$ має лише тривіальний розв'язок

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0,$$

то вектори лінійно незалежні, а отже, утворюють базис простору V.

5. Якщо існує нетривіальний розв'язок, то система лінійно залежна і базисом не є.

Алгоритм знаходження координат вектора в заданому базисі

Нехай

$$B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

— базис простору V, а $x \in V$ — даний вектор. Щоб знайти координати вектора x в базисі B, слід:

1. Записати розклад

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n.$$

2. Перейти до рівності координат у деякому фіксованому базисі та одержати систему лінійних рівнянь відносно

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

3. Розв'язати цю систему методом еквівалентних перетворень Жордана–Гауса:

$$(A \mid x) \sim \dots \sim (A' \mid x'),$$

де

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

4. Знайдені числа

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

є координатами вектора x в базисі B.

5. Записати відповідь у вигляді координатного стовпчика:

$$[x]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Алгоритм побудови матриці переходу між двома базисами

Нехай у просторі V задано два базиси

$$B_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \qquad B_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}.$$

Щоб побудувати матрицю переходу від базису B_2 до базису B_1, слід:

1. Кожен вектор базису B_2 розкласти за базисом B_1:

$$b_j = \alpha_{1j}a_1 + \alpha_{2j}a_2 + \dots + \alpha_{nj}a_n, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

2. Для кожного j знайти координатний стовпчик

$$[b_j]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}.$$

3. Скласти матрицю з цих стовпчиків:

$$T_{B_1 \leftarrow B_2} = \big([b_1]_{B_1}\ [b_2]_{B_1}\ \dots\ [b_n]_{B_1}\big).$$

4. Перевірити напрямок переходу: стовпчики матриці

$$T_{B_1 \leftarrow B_2}$$

є координатами *нового* базису B_2 у *старому* базисі B_1.

5. За потреби знайти обернену матрицю:

$$T_{B_2 \leftarrow B_1} = \big(T_{B_1 \leftarrow B_2}\big)^{-1}.$$

Алгоритм перерахунку координат вектора при заміні базису

Нехай

$$B_1,\ B_2$$

— два базиси простору V, а

$$T_{B_1 \leftarrow B_2}$$

— матриця переходу від B_2 до B_1. Щоб перейти від координат вектора в одному базисі до координат у другому, слід:

1. Якщо задано координати
$$[x]_{B_2},$$
то координати в базисі B_1 обчислюються за формулою
$$[x]_{B_1} = T_{B_1 \leftarrow B_2}[x]_{B_2}.$$

2. Якщо задано координати
$$[x]_{B_1},$$
то спочатку знайти обернену матрицю
$$T_{B_2 \leftarrow B_1} = \left(T_{B_1 \leftarrow B_2}\right)^{-1},$$
а потім обчислити
$$[x]_{B_2} = T_{B_2 \leftarrow B_1}[x]_{B_1}.$$

3. Виконати множення матриці на координатний стовпчик і записати отриманий результат у вигляді нового координатного стовпчика.

Алгоритм обчислення матриці переходу за координатами двох базисів у третьому базисі

Нехай базиси
$$B_1 = \{a_1, \dots, a_n\}, \qquad B_2 = \{b_1, \dots, b_n\}$$
задані координатами в деякому фіксованому базисі
$$E = \{e_1, \dots, e_n\}.$$

Щоб знайти матрицю переходу від B_2 до B_1, слід:

1. Скласти матриці
$$A = \left([a_1]_E \ [a_2]_E \ \dots \ [a_n]_E\right), \qquad B = \left([b_1]_E \ [b_2]_E \ \dots \ [b_n]_E\right).$$

2. Записати співвідношення
$$B = A\,T_{B_1 \leftarrow B_2}.$$

3. Помножити обидві частини цієї рівності зліва на A^{-1}:
$$T_{B_1 \leftarrow B_2} = A^{-1}B.$$

4. Обчислити матрицю A^{-1} і виконати множення $A^{-1}B$.

5. Отримана матриця і є матрицею переходу від базису B_2 до базису B_1.

Пам'ятка

Для типових задач цієї теми корисно пам'ятати такі правила:
$$[x]_{B_1} = T_{B_1 \leftarrow B_2}[x]_{B_2}, \qquad [x]_{B_2} = \left(T_{B_1 \leftarrow B_2}\right)^{-1}[x]_{B_1},$$

$$T_{B_2 \leftarrow B_1} = \left(T_{B_1 \leftarrow B_2}\right)^{-1}, \qquad T_{B_1 \leftarrow B_2} = A^{-1}B.$$

При цьому стовпчики матриці переходу

$$T_{B_1 \leftarrow B_2}$$

є координатами векторів базису B_2 в базисі B_1.

Типові задачі

Задача 2.1: Базис у $\mathbb{R}^3$ та координати вектора

Довести, що вектори

$$a_1 = (1,\ 1,\ 1), \qquad a_2 = (1,\ 1,\ 2), \qquad a_3 = (1,\ 2,\ 3)$$

утворюють базис у $\mathbb{R}^3$ і знайти координати вектора

$$x = (6,\ 9,\ 14)$$

у цьому базисі.

Розв'язання.

Скористаємося алгоритмом перевірки, чи утворює система векторів базис, і алгоритмом знаходження координат вектора в цьому базисі.

1. Перевірка базисності. Оскільки $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, то досить перевірити лінійну незалежність векторів a_1, a_2, a_3. Складемо матрицю, записавши координати векторів у стовпці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Зведемо її до східчастого вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\operatorname{rank} A = 3.$$

Тому вектори a_1, a_2, a_3 лінійно незалежні, а отже, утворюють базис простору $\mathbb{R}^3$.

2. Знаходження координат вектора x. Шукаємо розклад

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

У координатному записі це дає систему

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Отже,

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 3.$$

Тому

$$[x]_{(a_1,a_2,a_3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x = a_1 + 2a_2 + 3a_3.$$

Відповідь: вектори a_1, a_2, a_3 утворюють базис у $\mathbb{R}^3$,

$$[x]_{(a_1,a_2,a_3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.2: Базис у $\mathbb{R}_4[x]$ та координати многочлена

У просторі $\mathbb{R}_4[x]$ многочлени

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x + 1, \quad p_2(x) = (x+1)^2, \quad p_3(x) = (x+1)^3, \quad p_4(x) = (x+1)^4$$

утворюють базис. Перевірити базисність та знайти координати многочлена

$$f(x) = -2x^4 + 3x^3 - 4x - 6$$

в базисі $B = \big(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\big)$.

Розв'язання.

Скористаємося алгоритмом перевірки базисності та алгоритмом знаходження координат елемента в заданому базисі.

1. Перевірка базисності. Оскільки

$$\dim \mathbb{R}_4[x] = 5,$$

достатньо перевірити лінійну незалежність системи $p_0, \ldots, p_4$. Розглянемо рівність

$$\alpha_0 p_0(x) + \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) + \alpha_4 p_4(x) \equiv 0.$$

Позначимо

$$y = x + 1.$$

Тоді $p_k(x) = y^k$, і маємо

$$\alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \alpha_4 y^4 \equiv 0.$$

Оскільки многочлен тотожно дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі його коефіцієнти рівні нулю, то

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Отже, $p_0, \dots, p_4$ лінійно незалежні і, з огляду на те, що їх п'ять, утворюють базис простору $\mathbb{R}_4[x]$.

2. Знаходження координат многочлена $f(x)$. Шукаємо розклад

$$f(x) = c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + c_2p_2(x) + c_3p_3(x) + c_4p_4(x).$$

Тобто

$$f(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)^2 + c_3(x+1)^3 + c_4(x+1)^4.$$

Розкладаючи $f(x)$ за степенями $x+1$, дістаємо

$$f(x) = -2(x+1)^4 + 11(x+1)^3 - 21(x+1)^2 + 13(x+1) - 7.$$

Тому

$$c_0 = -7, \qquad c_1 = 13, \qquad c_2 = -21, \qquad c_3 = 11, \qquad c_4 = -2.$$

Отже,

$$[f]_B = \begin{pmatrix} -7 \\ 13 \\ -21 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} -7 \\ 13 \\ -21 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.3: Базис у $M_2(\mathbb{R})$ та координати матриці

Нехай

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Перевірити, що B_1, B_2, B_3, B_4 утворюють базис простору $M_2(\mathbb{R})$, і знайти координати матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

в цьому базисі.

Розв'язання.

Застосуємо алгоритм перевірки базисності та алгоритм знаходження координат.

1. Перевірка базисності. Оскільки

$$\dim M_2(\mathbb{R}) = 4,$$

достатньо довести лінійну незалежність матриць B_1, B_2, B_3, B_4.

Розглядатимемо матриці як елементи простору $\mathbb{R}^4$, записуючи їх координати в стандартному базисі

$$E_{11},\ E_{12},\ E_{21},\ E_{22}.$$

Тоді

$$[B_1]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [B_2]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad [B_3]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [B_4]_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Складемо матрицю з цих стовпців:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Зведемо її до східчастого вигляду:

$$C \sim C'.$$

Оскільки в результаті одержуємо чотири опорні елементи, то

$$\operatorname{rank} C = 4.$$

Отже, матриці B_1, B_2, B_3, B_4 лінійно незалежні, а тому утворюють базис простору $M_2(\mathbb{R})$.

2. Знаходження координат матриці A. Шукаємо розклад

$$A = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3 + \beta_4 B_4.$$

Прирівнюючи відповідні елементи матриць, дістаємо систему

$$\begin{cases} \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - 2\beta_4 = 1, \\ -\beta_1 + 3\beta_3 + 5\beta_4 = 4, \\ 2\beta_1 - 2\beta_2 - 3\beta_3 = -2, \\ \beta_1 - 2\beta_2 + 6\beta_4 = 6. \end{cases}$$

Розв'язуючи її методом Жордана–Гауса, одержуємо

$$\beta_1 = 76, \qquad \beta_2 = 47, \qquad \beta_3 = 20, \qquad \beta_4 = 4.$$

Отже,

$$[A]_{(B_1,B_2,B_3,B_4)} = \begin{pmatrix} 76 \\ 47 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad A = 76B_1 + 47B_2 + 20B_3 + 4B_4.$$

Відповідь:

$$[A]_{(B_1,B_2,B_3,B_4)} = \begin{pmatrix} 76 \\ 47 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.4: Розмірність і базис лінійної оболонки

Знайти розмірність і базис лінійної оболонки системи векторів:

$$a_1 = (1,\ 0,\ 0,\ -1),\ a_2 = (2,\ 1,\ 1,\ 0),\ a_3 = (1,\ 1,\ 1,\ 1),\ a_4 = (1,\ 2,\ 3,\ 4),\ a_5 = (0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Розв'язання.

Скористаємося алгоритмом знаходження розмірності та базису лінійної оболонки. Складемо матрицю, записавши дані вектори у стовпці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Зведемо її до східчастого вигляду:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\operatorname{rank} A = 4, \qquad \dim\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle = 4.$$

Опорними є перший, другий, третій і четвертий стовпці. Тому базис лінійної оболонки можна взяти у вигляді

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4.$$

Відповідь:

$$\dim\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle = 4, \qquad \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \text{ — базис.}$$

Задача 2.5: Матриця переходу між базисами в $\mathbb{R}^2$

У просторі $\mathbb{R}^2$ задано базиси

$$B_a = \{a_1, a_2\}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad B_b = \{b_1, b_2\}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. знайти матрицю переходу $T_{B_a \leftarrow B_b}$ від базису B_b до базису B_a;
2. знайти координатний стовпчик вектора $c = 2a_1 - a_2$ у базисі B_b.

Розв'язання.

Скористаємося алгоритмом побудови матриці переходу між двома базисами та алгоритмом перетворення координат вектора при заміні базису.

1. Складемо матриці базисів у стандартному базисі E:

$$[B_a]_E = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad [B_b]_E = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тоді
$$T_{B_a \leftarrow B_b} = [B_a]_E^{-1}[B_b]_E.$$
Обчислимо обернену матрицю:
$$\det[B_a]_E = 3 \cdot 4 - (-1) \cdot (-5) = 7 \neq 0,$$
$$[B_a]_E^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$
Отже,
$$T_{B_a \leftarrow B_b} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 21 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Оскільки
$$c = 2a_1 - a_2,$$
то
$$[c]_{B_a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Тоді
$$[c]_{B_b} = \left(T_{B_a \leftarrow B_b}\right)^{-1}[c]_{B_a}.$$
Оскільки
$$\det T_{B_a \leftarrow B_b} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1,$$
то
$$\left(T_{B_a \leftarrow B_b}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$
Отже,
$$[c]_{B_b} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Відповідь:
$$T_{B_a \leftarrow B_b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad [c]_{B_b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.6: Перетворення координат за відомою матрицею переходу

Нехай вектор c у просторі V має координатний стовпчик у базисі $B_b = \{b_1, b_2, b_3\}$:
$$[c]_{B_b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
Нехай також задано матрицю переходу від базису B_b до базису $B_a = \{a_1, a_2, a_3\}$:
$$T_{B_a \leftarrow B_b} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Знайти розклад вектора c за векторами базису B_a, тобто знайти $[c]_{B_a}$.

Розв'язання.

Скористаємося формулою перетворення координат:

$$[c]_{B_a} = T_{B_a \leftarrow B_b}[c]_{B_b}.$$

Тому

$$[c]_{B_a} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$c = -20\,a_1 - 4\,a_2.$$

Відповідь:

$$[c]_{B_a} = \begin{pmatrix} -20 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c = -20\,a_1 - 4\,a_2.$$

Задача 2.7: Перехід між двома базисами у $\mathbb{R}^3$

Довести, що кожна з двох систем векторів

$$B_a = \{a_1, a_2, a_3\}, \qquad a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$B_b = \{b_1, b_2, b_3\}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

утворює базис простору $\mathbb{R}^3$, та знайти матрицю переходу $T_{B_a \leftarrow B_b}$ від базису B_b до базису B_a і матрицю $T_{B_b \leftarrow B_a}$.

Розв'язання.

Скористаємося алгоритмом побудови матриці переходу між двома базисами.

Нехай $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ — стандартний базис у $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$[B_a]_E = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad [B_b]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Перевірка базисності. Обчислимо визначники:

$$\det[B_a]_E = -1 \neq 0, \qquad \det[B_b]_E = -1 \neq 0.$$

Отже, кожна із систем B_a і B_b утворює базис простору $\mathbb{R}^3$.

2. Обчислення обернених матриць. Знайдемо $[B_a]_E^{-1}$ методом Жордана–Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right).$$

Тому
$$[B_a]_E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right),$$
звідки
$$[B_b]_E^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 12 & -3 & -2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислення матриць переходу. За формулою
$$T_{B_a \leftarrow B_b} = [B_a]_E^{-1}[B_b]_E, \qquad T_{B_b \leftarrow B_a} = [B_b]_E^{-1}[B_a]_E.$$
Обчислюємо:
$$T_{B_a \leftarrow B_b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ -4 & -1 & 4 \\ 11 & 6 & -1 \end{pmatrix},$$
$$T_{B_b \leftarrow B_a} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 12 & -3 & -2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -27 & -16 \\ 40 & 47 & 28 \\ -13 & -15 & -9 \end{pmatrix}.$$
Крім того,
$$T_{B_b \leftarrow B_a} = (T_{B_a \leftarrow B_b})^{-1}.$$

Відповідь:
$$T_{B_a \leftarrow B_b} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ -4 & -1 & 4 \\ 11 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T_{B_b \leftarrow B_a} = \begin{pmatrix} -23 & -27 & -16 \\ 40 & 47 & 28 \\ -13 & -15 & -9 \end{pmatrix}.$$

Задачі для самостійного розв’язування

Задача 2.1: Базис у $\mathbb{R}^3$ та координати вектора

У кожному варіанті задано три вектори $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ та вектор $x \in \mathbb{R}^3$. Потрібно: довести, що a_1, a_2, a_3 утворюють базис у $\mathbb{R}^3$, і знайти координати вектора x у цьому базисі, тобто знайти $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ з рівності
$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3, \qquad [x]_{(a_1,a_2,a_3)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Варіанти:

1. $a_1 = (1, 1, 1),\ a_2 = (1, 1, 2),\ a_3 = (1, 2, 3),\ x = (6, 9, 14).$

2. $a_1 = (1,\ 0,\ 1),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1),\ a_3 = (1,\ 1,\ 0),\ x = (5,\ 4,\ 3).$
3. $a_1 = (2,\ 1,\ 0),\ a_2 = (1,\ 0,\ 1),\ a_3 = (0,\ 1,\ 1),\ x = (7,\ 5,\ 6).$
4. $a_1 = (1,\ 2,\ 0),\ a_2 = (0,\ 1,\ 3),\ a_3 = (1,\ 0,\ 1),\ x = (4,\ 11,\ 5).$
5. $a_1 = (3,\ 0,\ 1),\ a_2 = (1,\ 1,\ 0),\ a_3 = (0,\ 2,\ 1),\ x = (10,\ 7,\ 5).$
6. $a_1 = (1,\ -1,\ 0),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1),\ a_3 = (1,\ 0,\ 1),\ x = (3,\ 2,\ 4).$
7. $a_1 = (2,\ 0,\ 1),\ a_2 = (1,\ 1,\ 1),\ a_3 = (0,\ 1,\ 2),\ x = (7,\ 8,\ 9).$
8. $a_1 = (1,\ 1,\ 0),\ a_2 = (2,\ 1,\ 1),\ a_3 = (1,\ 0,\ 2),\ x = (8,\ 5,\ 11).$
9. $a_1 = (1,\ 0,\ 2),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1),\ a_3 = (2,\ 1,\ 0),\ x = (9,\ 6,\ 7).$
10. $a_1 = (2,\ 1,\ 1),\ a_2 = (1,\ 2,\ 0),\ a_3 = (0,\ 1,\ 2),\ x = (6,\ 9,\ 10).$
11. $a_1 = (1,\ 2,\ 1),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1),\ a_3 = (2,\ 0,\ 1),\ x = (9,\ 7,\ 6).$
12. $a_1 = (1,\ 0,\ 1),\ a_2 = (1,\ 2,\ 1),\ a_3 = (0,\ 1,\ 2),\ x = (7,\ 12,\ 11).$
13. $a_1 = (2,\ -1,\ 0),\ a_2 = (1,\ 1,\ 1),\ a_3 = (0,\ 2,\ 1),\ x = (5,\ 6,\ 4).$
14. $a_1 = (1,\ 1,\ 2),\ a_2 = (2,\ 0,\ 1),\ a_3 = (0,\ 1,\ 1),\ x = (8,\ 5,\ 9).$
15. $a_1 = (3,\ 1,\ 0),\ a_2 = (1,\ 0,\ 2),\ a_3 = (0,\ 2,\ 1),\ x = (11,\ 9,\ 8).$

Задача 2.2: Базис у $\mathbb{R}_n[x]$ та координати многочлена

У кожному варіанті задано $n \in \{3, 4, 5\}$ та базис

$$B = \big(p_0, p_1, \ldots, p_n\big), \qquad p_k(x) = (x+1)^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Потрібно: перевірити, що B є базисом простору $\mathbb{R}_n[x]$, і знайти координати многочлена $f(x)$ у базисі B, тобто подати

$$f(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_n p_n(x), \qquad [f]_B = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Варіанти:

1. $n = 3,\quad f(x) = \ 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7.$
2. $n = 3,\quad f(x) = -3x^3 + 4x^2 - 2x + 9.$
3. $n = 3,\quad f(x) = \ 5x^3 + x^2 - 6x + 1.$
4. $n = 3,\quad f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 7x - 4.$
5. $n = 3,\quad f(x) = \ x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$
6. $n = 4,\quad f(x) = -2x^4 + 3x^3 - 4x - 6.$
7. $n = 4,\quad f(x) = \ x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$
8. $n = 4,\quad f(x) = \ 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 8.$
9. $n = 4,\quad f(x) = -x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x - 3.$
10. $n = 4,\quad f(x) = \ 4x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 6x - 2.$
11. $n = 5,\quad f(x) = \ x^5 - 2x^4 + x^3 - 7x^2 + 12x - 10.$
12. $n = 5,\quad f(x) = -2x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x + 6.$
13. $n = 5,\quad f(x) = \ 5x^5 + x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 2x - 9.$
14. $n = 5,\quad f(x) = -x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 8x + 1.$
15. $n = 5,\quad f(x) = \ 2x^5 - 7x^4 + 9x^3 - 3x^2 + x - 5.$

Задача 2.3: Базис у $M_2(\mathbb{R})$ та координати матриці

Нехай у просторі $M_2(\mathbb{R})$ задано систему матриць

$$B = \big(B_1, B_2, B_3, B_4\big),$$

де

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Потрібно: перевірити, що B_1, B_2, B_3, B_4 утворюють базис простору $M_2(\mathbb{R})$, і для матриці A свого варіанта знайти координати в базисі B, тобто подати

$$A = c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3 + c_4B_4, \qquad [A]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Варіанти:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.
6. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
7. $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
8. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.
9. $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$.
11. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
12. $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.
13. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.
14. $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.
15. $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$.

Задача 2.4: Розмірність і базис лінійної оболонки

Для системи векторів свого варіанта

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}^4$$

потрібно знайти розмірність лінійної оболонки

$$\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle$$

та вказати один з можливих базисів цієї оболонки (вибрати лінійно незалежні вектори з поданої системи).

Варіанти:

1. $a_1 = (1, 0, 0, -1)$, $a_2 = (2, 1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1, 1)$, $a_4 = (1, 2, 3, 4)$, $a_5 = (0, 1, 2, 3)$.
2. $a_1 = (1, 0, 1, -1)$, $a_2 = (2, 1, 0, 1)$, $a_3 = (1, 1, 2, 0)$, $a_4 = (0, 2, 3, 1)$, $a_5 = (1, 1, 1, 1)$.
3. $a_1 = (0, 1, 0, 2)$, $a_2 = (1, 1, -1, 0)$, $a_3 = (2, 0, 1, 1)$, $a_4 = (3, 1, 0, 2)$, $a_5 = (1, -1, 2, 3)$.

4. $a_1 = (1,\ 2,\ 0,\ 0)$, $a_2 = (0,\ 1,\ 1,\ -1)$, $a_3 = (1,\ 3,\ 1,\ -1)$, $a_4 = (2,\ 5,\ 2,\ -2)$, $a_5 = (3,\ 7,\ 3,\ -3)$.
5. $a_1 = (2,\ 0,\ 1,\ -2)$, $a_2 = (1,\ 1,\ 0,\ 1)$, $a_3 = (3,\ 1,\ 1,\ -1)$, $a_4 = (0,\ 2,\ 1,\ 0)$, $a_5 = (4,\ 2,\ 2,\ -3)$.
6. $a_1 = (1,\ -1,\ 0,\ 2)$, $a_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 0)$, $a_3 = (1,\ 0,\ 1,\ 2)$, $a_4 = (2,\ 1,\ 2,\ 2)$, $a_5 = (3,\ 0,\ 3,\ 4)$.
7. $a_1 = (0,\ 0,\ 1,\ 1)$, $a_2 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $a_3 = (2,\ 1,\ 3,\ 1)$, $a_4 = (3,\ 1,\ 4,\ 1)$, $a_5 = (1,\ 1,\ 2,\ 1)$.
8. $a_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $a_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0)$, $a_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 0)$, $a_4 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $a_5 = (2,\ 2,\ 2,\ 2)$.
9. $a_1 = (2,\ 1,\ 0,\ -1)$, $a_2 = (1,\ 0,\ 1,\ 2)$, $a_3 = (3,\ 1,\ 1,\ 1)$, $a_4 = (0,\ 1,\ 2,\ 3)$, $a_5 = (4,\ 2,\ 2,\ 0)$.
10. $a_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 1)$, $a_2 = (2,\ 2,\ 0,\ 2)$, $a_3 = (0,\ 1,\ 1,\ -1)$, $a_4 = (1,\ 2,\ 1,\ 0)$, $a_5 = (2,\ 3,\ 1,\ 1)$.
11. $a_1 = (0,\ 1,\ 2,\ -1)$, $a_2 = (1,\ 0,\ 1,\ 1)$, $a_3 = (2,\ 1,\ 3,\ 0)$, $a_4 = (3,\ 2,\ 5,\ -1)$, $a_5 = (1,\ 1,\ 2,\ 0)$.
12. $a_1 = (1,\ 2,\ 3,\ -1)$, $a_2 = (2,\ 4,\ 6,\ -2)$, $a_3 = (0,\ 1,\ 1,\ 0)$, $a_4 = (1,\ 3,\ 4,\ -1)$, $a_5 = (2,\ 5,\ 7,\ -2)$.
13. $a_1 = (1,\ 0,\ -1,\ 2)$, $a_2 = (0,\ 1,\ 2,\ -1)$, $a_3 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $a_4 = (2,\ 1,\ 0,\ 3)$, $a_5 = (3,\ 2,\ -1,\ 5)$.
14. $a_1 = (0,\ 2,\ 1,\ 1)$, $a_2 = (1,\ 1,\ 0,\ 2)$, $a_3 = (2,\ 3,\ 1,\ 0)$, $a_4 = (3,\ 4,\ 1,\ 2)$, $a_5 = (1,\ 2,\ 0,\ 3)$.
15. $a_1 = (2,\ -1,\ 1,\ 0)$, $a_2 = (1,\ 0,\ 2,\ -1)$, $a_3 = (3,\ -1,\ 3,\ -1)$, $a_4 = (0,\ 1,\ 1,\ 2)$, $a_5 = (4,\ -2,\ 4,\ -2)$.

Задача 2.5: Матриця переходу між базисами в $\mathbb{R}^2$

У просторі $\mathbb{R}^2$ задано два базиси $E = \{e_1, e_2\}$ та $A = \{a_1, a_2\}$. Для кожного варіанта: *(i)* знайти матрицю переходу $T_{E\leftarrow A}$ від базису A до базису E; *(ii)* знайти координатний стовпчик $[c]_A$, якщо вектор c задано у вигляді $c = p\,e_1 + q\,e_2$ (координати записувати стовпчиком).

Варіанти:

1. $e_1 = (3, -5)$, $e_2 = (-1, 4)$; $a_1 = (3, 2)$, $a_2 = (1, 3)$; $c = 2e_1 - e_2$.
2. $e_1 = (2, 1)$, $e_2 = (1, -1)$; $a_1 = (3, 0)$, $a_2 = (1, 2)$; $c = 3e_1 + 2e_2$.
3. $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (3, 1)$; $a_1 = (2, 1)$, $a_2 = (1, -1)$; $c = -e_1 + 4e_2$.
4. $e_1 = (4, -1)$, $e_2 = (1, 2)$; $a_1 = (2, 3)$, $a_2 = (1, -2)$; $c = 5e_1 - e_2$.
5. $e_1 = (1, 3)$, $e_2 = (2, -1)$; $a_1 = (3, 1)$, $a_2 = (-1, 2)$; $c = 2e_1 + 3e_2$.
6. $e_1 = (2, -3)$, $e_2 = (1, 4)$; $a_1 = (3, 2)$, $a_2 = (1, -1)$; $c = -2e_1 + e_2$.
7. $e_1 = (3, 1)$, $e_2 = (-2, 1)$; $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (2, -1)$; $c = 4e_1 + e_2$.
8. $e_1 = (1, -2)$, $e_2 = (2, 3)$; $a_1 = (3, 1)$, $a_2 = (-1, 2)$; $c = e_1 - 3e_2$.
9. $e_1 = (5, 1)$, $e_2 = (2, -3)$; $a_1 = (1, 4)$, $a_2 = (3, -1)$; $c = 2e_1 + e_2$.
10. $e_1 = (2, 5)$, $e_2 = (1, -2)$; $a_1 = (3, 1)$, $a_2 = (2, 0)$; $c = -e_1 + 2e_2$.
11. $e_1 = (3, 2)$, $e_2 = (1, -4)$; $a_1 = (2, 1)$, $a_2 = (-1, 3)$; $c = 3e_1 - 2e_2$.
12. $e_1 = (4, 1)$, $e_2 = (-1, 2)$; $a_1 = (1, 3)$, $a_2 = (2, -1)$; $c = 2e_1 + 5e_2$.
13. $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (2, -1)$; $a_1 = (3, 2)$, $a_2 = (1, 0)$; $c = -3e_1 + e_2$.
14. $e_1 = (2, -1)$, $e_2 = (3, 2)$; $a_1 = (1, 4)$, $a_2 = (2, -3)$; $c = e_1 + e_2$.

15. $e_1 = (3, -2)$, $e_2 = (1, 5)$; $a_1 = (2, 1)$, $a_2 = (-1, 3)$; $c = 5e_1 - 4e_2$.

Задача 2.6: Перетворення координат за відомою матрицею переходу

Нехай у просторі V задано базиси $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ та $E = \{e_1, e_2, e_3\}$. Для кожного варіанта задано координатний стовпчик $[c]_A$ та матрицю переходу $T_{E\leftarrow A}$. Потрібно знайти координатний стовпчик $[c]_E$ за формулою

$$[c]_E = T_{E\leftarrow A}[c]_A,$$

а також записати розклад $c = c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$ (координати записувати **стовпчиком**).

Варіанти:

1. $[c]_A = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T_{E\leftarrow A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $[c]_A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T_{E\leftarrow A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $[c]_A = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad T_{E\leftarrow A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

4. $[c]_A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T_{E\leftarrow A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

5. $[c]_A = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T_{E\leftarrow A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

6. $[c]_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad T_{E\leftarrow A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

7. $[c]_A = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_{E\leftarrow A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

8. $[c]_A = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T_{E\leftarrow A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

9. $[c]_A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad T_{E\leftarrow A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

10. $[c]_A = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T_{E\leftarrow A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

11. $[c]_A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T_{E\leftarrow A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

12. $[c]_A = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad T_{E\leftarrow A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

13. $[c]_A = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T_{E\leftarrow A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

14. $[c]_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad T_{E\leftarrow A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

15. $[c]_A = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T_{E\leftarrow A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Задача 2.7: Перехід між двома базисами у $\mathbb{R}^3$

Нехай у просторі $\mathbb{R}^3$ задано два базиси $B_a = \{a_1, a_2, a_3\}$ та $B_b = \{b_1, b_2, b_3\}$ (координати подано у стандартному базисі). Для кожного варіанта потрібно:

1) перевірити, що B_a і B_b є базисами (наприклад, через невиродженість матриць базисів);

2) знайти матриці переходу $T_{B_a\leftarrow B_b}$ та $T_{B_b\leftarrow B_a}$, причому

$$T_{B_a\leftarrow B_b} = [B_a]_e^{-1}[B_b]_e, \qquad T_{B_b\leftarrow B_a} = [B_b]_e^{-1}[B_a]_e;$$

3) перевірити, що $T_{B_b\leftarrow B_a} = \left(T_{B_a\leftarrow B_b}\right)^{-1}$ (контроль обчислень).

Варіанти:

1. $a_1 = (4,2,1),\ a_2 = (5,3,2),\ a_3 = (3,2,1);\quad b_1 = (1,4,0),\ b_2 = (1,3,1),\ b_3 = (1,2,3).$
2. $a_1 = (2,1,0),\ a_2 = (1,3,1),\ a_3 = (0,2,1);\quad b_1 = (1,0,1),\ b_2 = (2,1,1),\ b_3 = (1,2,3).$
3. $a_1 = (3,1,2),\ a_2 = (1,2,1),\ a_3 = (2,0,1);\quad b_1 = (1,1,0),\ b_2 = (0,1,2),\ b_3 = (2,1,3).$
4. $a_1 = (1,2,0),\ a_2 = (2,1,1),\ a_3 = (1,0,2);\quad b_1 = (3,1,0),\ b_2 = (1,2,1),\ b_3 = (0,1,1).$
5. $a_1 = (2,0,1),\ a_2 = (1,1,2),\ a_3 = (3,1,1);\quad b_1 = (1,2,0),\ b_2 = (2,0,1),\ b_3 = (1,1,1).$
6. $a_1 = (1,1,1),\ a_2 = (2,1,0),\ a_3 = (1,0,2);\quad b_1 = (2,1,1),\ b_2 = (1,3,1),\ b_3 = (0,1,2).$
7. $a_1 = (4,1,0),\ a_2 = (1,2,1),\ a_3 = (0,1,3);\quad b_1 = (1,1,1),\ b_2 = (2,0,1),\ b_3 = (1,2,0).$
8. $a_1 = (3,0,1),\ a_2 = (1,2,0),\ a_3 = (2,1,1);\quad b_1 = (0,1,1),\ b_2 = (1,1,0),\ b_3 = (2,1,3).$
9. $a_1 = (2,1,1),\ a_2 = (1,0,2),\ a_3 = (1,3,1);\quad b_1 = (1,2,1),\ b_2 = (2,1,0),\ b_3 = (1,0,1).$
10. $a_1 = (1,3,0),\ a_2 = (2,1,1),\ a_3 = (0,1,2);\quad b_1 = (2,0,1),\ b_2 = (1,1,2),\ b_3 = (1,2,0).$
11. $a_1 = (2,2,1),\ a_2 = (1,0,1),\ a_3 = (0,1,2);\quad b_1 = (1,3,1),\ b_2 = (2,1,1),\ b_3 = (1,0,2).$
12. $a_1 = (3,1,1),\ a_2 = (1,2,0),\ a_3 = (1,0,1);\quad b_1 = (2,1,0),\ b_2 = (0,1,1),\ b_3 = (1,2,3).$
13. $a_1 = (1,2,1),\ a_2 = (2,0,1),\ a_3 = (1,1,0);\quad b_1 = (3,1,2),\ b_2 = (1,1,1),\ b_3 = (0,2,1).$
14. $a_1 = (4,2,1),\ a_2 = (1,1,2),\ a_3 = (2,1,0);\quad b_1 = (1,4,0),\ b_2 = (0,1,1),\ b_3 = (1,2,3).$
15. $a_1 = (2,1,0),\ a_2 = (0,2,1),\ a_3 = (1,1,2);\quad b_1 = (1,1,0),\ b_2 = (1,3,1),\ b_3 = (2,1,1).$

Прикладні задачі

Задача (IT) 2.1: Трансформація локальних координат об’єкта в ігровому рушії

IT-коментар

У 2D-іграх кожний об’єкт зазвичай має власну локальну систему координат, у якій зручно задавати геометрію моделі, точки кріплення, напрям руху тощо. Для відображення об’єкта на сцені його локальні координати потрібно перевести у світові координати. Саме це і реалізується за допомогою матриці переходу між базисами.

У 2D-грі кожен спрайт має *локальну* систему координат (model space), яка задається базисом

$$A = \{a_1 = (1,1)^T,\ a_2 = (-1,1)^T\}.$$

Світовий простір (world space) описується стандартним базисом

$$E = \{e_1 = (1,0)^T,\ e_2 = (0,1)^T\}.$$

1. Побудувати матрицю переходу $T_{E\leftarrow A}$ від базису A до базису E, тобто таку, що

   $$[x]_E = T_{E\leftarrow A}[x]_A,$$

   де координати подаються *стовпчиком.*

2. Обчислити світові координати снаряда $[c]_E$, якщо в локальній системі задано

   $$[c]_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Пояснити, на рівні формули, чому при рендерингу великої кількості об’єктів достатньо зберігати для кожного об’єкта власну матрицю $T_{E\leftarrow A}$, а обчислення зводяться до повторюваного множення матриці на координатний стовпчик.

Задача (IT) 2.2: Базис Хаара та перетворення дискретного сигналу

IT-коментар

Під час обробки сигналів, аудіо й зображень важливо перейти від безпосередніх значень відліків до компактнішого подання, у якому окремо виділяються середній рівень сигналу та його зміни. Найпростішим прикладом такої ідеї є базис Хаара. У ньому одна координата відповідає тренду, а інша — деталізації.

Розглянути дискретний сигнал з двох відліків як вектор у $\mathbb{R}^2$ у стандартному базисі

$$E = \{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}.$$

Для аналізу використати (ненормований) базис Хаара

$$H = \{h_1 = (1,1),\ h_2 = (1,-1)\},$$

де перший вектор відповідає *сумарному рівню* (тренду), а другий — *контрасту* (деталізації).

1. Побудувати матрицю переходу $T_{E \leftarrow H}$ та матрицю зворотного переходу $T_{H \leftarrow E}$, причому
$$[s]_E = T_{E \leftarrow H}[s]_H, \qquad [s]_H = T_{H \leftarrow E}[s]_E,$$
а координати подаються *стовпчиком*.

2. Для сигналу $s = (100, 104)$ знайти його координатний стовпчик у базисі H:
$$[s]_H = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

3. Пояснити, чому при повільній зміні сигналу величина, що відповідає "деталізації" (друга координата), є малою і може бути наближено занулена без істотної втрати якості.

Задача (IT) 2.3: Зміна колірного простору як зміна базису

IT-коментар

У комп'ютерній графіці та цифровій обробці зображень часто використовують не лише стандартний простір RGB, а й інші колірні подання, у яких окремо виділяються яскравість, кольорові контрасти або інші характеристики. З математичного погляду це означає перехід до нового базису в просторі кольорів.

Колір у моделі RGB розглядається як вектор у $\mathbb{R}^3$ у стандартному базисі
$$E = \{e_1 = (1, 0, 0)^T,\ e_2 = (0, 1, 0)^T,\ e_3 = (0, 0, 1)^T\}.$$

Розглянути систему векторів
$$V = \{v_1 = (1, 1, 1)^T,\ v_2 = (1, -1, 0)^T,\ v_3 = (0, 1, -1)^T\}.$$

1. Довести, що система V є базисом у $\mathbb{R}^3$.

2. Побудувати матрицю $T_{E \leftarrow V}$ та за означенням отримати матрицю $T_{V \leftarrow E} = (T_{E \leftarrow V})^{-1}$.

3. Знайти координати "чистого" червоного кольору
$$[c]_E = \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
у базисі V, тобто обчислити
$$[c]_V = T_{V \leftarrow E}[c]_E.$$

4. Інтерпретувати першу координату (відносно v_1) як величину, пропорційну інтегральній яскравості пікселя, з урахуванням того, що v_1 тут не нормований.

Задача (IT) 2.4: Аналіз ознак у машинному навчанні: поворот простору (ідея PCA)

IT-коментар

У задачах аналізу даних і машинного навчання часто корисно перейти до нового базису, у якому координати краще відображають основні напрями зміни даних. Саме така ідея лежить в основі методу головних компонент. У простішому випадку це можна розглядати як поворот координатної системи.

Нехай у просторі $\mathbb{R}^2$ задано базис

$$B = \{b_1 = (0.8, 0.6)^T,\ b_2 = (-0.6, 0.8)^T\}.$$

1. Перевірити, що B є ортонормованим базисом: обчислити $\|b_1\|$, $\|b_2\|$ та скалярний добуток $\langle b_1, b_2\rangle$.

2. Побудувати матрицю переходу $T_{E\leftarrow B}$ (від базису B до стандартного E) та матрицю $T_{B\leftarrow E} = (T_{E\leftarrow B})^{-1}$.

3. Для вектора даних
$$[x]_E = \begin{pmatrix} 20 \\ 3000 \end{pmatrix}$$
знайти координати у базисі B:
$$[x]_B = T_{B\leftarrow E}[x]_E.$$

4. Пояснити зміст переходу до базису "головних напрямів": чому в нових координатах простіше виділяти домінуючий напрям зміни даних і, за потреби, зменшувати розмірність шляхом відкидання компоненти з малою варіацією.

Задача (IT) 2.5: Робототехніка: перехід між базисами в системі вимірювань сенсора

IT-коментар

У мобільній робототехніці та вбудованих системах дані різних сенсорів часто надходять у власних локальних системах координат, які не збігаються із системою координат робота. Перед подальшими обчисленнями, пов'язаними з навігацією, стабілізацією або керуванням, ці дані потрібно перевести до єдиного базису.

У мобільній робототехніці дані IMU/акселерометра часто надходять у *базисі сенсора* (sensor frame), який не збігається з *базисом робота* (body frame). Нехай у площині $\mathbb{R}^2$ базис сенсора задано векторами

$$B_S = \{s_1 = (2, 1)^T,\ s_2 = (-1, 2)^T\},$$

а базис робота є стандартним

$$B_E = \{e_1 = (1, 0)^T,\ e_2 = (0, 1)^T\}.$$

1. Побудувати матрицю переходу $T_{B_E \leftarrow B_S}$, тобто таку, що
$$[a]_{B_E} = T_{B_E \leftarrow B_S}[a]_{B_S},$$
де координати подаються *стовпчиком*.

2. Нехай сенсор виміряв прискорення у власних координатах:
$$[a]_{B_S} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Знайти прискорення в координатах робота $[a]_{B_E}$.

3. Пояснити, чому для коректного керування (стабілізації, навігації) необхідно приводити всі вектори (прискорення, швидкості, сили) до *єдиного* базису перед подальшими обчисленнями.

Питання для самоконтролю

1. Навести означення лінійної комбінації, лінійної оболонки та лінійної незалежності системи векторів. Пояснити логічну різницю між цими поняттями.

2. Сформулювати означення базису векторного простору. Які дві умови (лінійна незалежність і породжуваність) має задовольняти базис?

3. Що означає твердження $\langle B \rangle = V$ для системи векторів B?

4. Сформулювати означення скінченновимірного та нескінченновимірного векторного простору. Навести приклади (зокрема, $F[x]$ та $F_n[x]$).

5. Навести означення розмірності скінченновимірного простору та пояснити зміст позначення $\dim V$.

6. Сформулювати критерій базису: за яких умов система з n векторів у просторі розмірності n є базисом?

7. Сформулювати теорему про єдиність розкладу вектора за базисом. Який наслідок вона має для означення координат?

8. Дати означення координат вектора x у базисі B та пояснити інтерпретацію запису $[x]_B$ як стовпця координат.

9. Пояснити, як будується матриця переходу $T_{B_1 \leftarrow B_2}$ між базисами $B_1 = (a_1, \ldots, a_n)$ та $B_2 = (b_1, \ldots, b_n)$.

10. Яку інформацію кодують стовпчики матриці переходу $T_{B_1 \leftarrow B_2}$?

11. Пояснити, чому матриця переходу між базисами є невиродженою та має обернену матрицю.

12. Записати та пояснити формули зв'язку координат одного й того самого вектора $x \in V$ у базисах B_1 та B_2:
$$[x]_{B_1} = T_{B_1 \leftarrow B_2}[x]_{B_2}, \qquad [x]_{B_2} = T^{-1}_{B_1 \leftarrow B_2}[x]_{B_1}.$$

13. Як обчислити матрицю переходу, якщо обидва базиси задані своїми координатами у фіксованому базисі $e = (e_1, \ldots, e_n)$? Записати відповідне матричне співвідношення.

14. Пояснити прикладний зміст заміни базису в комп'ютерній графіці (перехід між локальними, світовими та координатами камери/екрана).

15. Довести, що в просторі розмірності n будь-яка система з $m > n$ векторів є лінійно залежною.

16. Пояснити, чому всі базиси скінченновимірного простору містять однакову кількість векторів (інваріантність розмірності).

17. Описати та обґрунтувати процедуру доповнення довільної лінійно незалежної системи векторів до базису простору.

Тема 3. Лінійні підпростори. Сума та пряма сума.

Вступ

Поняття *лінійного підпростору* є одним із ключових інструментів, що дають змогу перейти від загальної аксіоматики лінійного простору до дослідження його внутрішньої будови. У багатьох математичних і прикладних задачах важливо не лише працювати з усім простором, а й виділяти в ньому такі підмножини, які самі зберігають лінійну структуру. Саме підпростори дають можливість описувати окремі класи векторів, що мають спільні властивості, і розглядати їх як самостійні об'єкти дослідження. Тому вміння перевіряти, чи є задана множина підпростором, а також будувати базис і визначати розмірність підпростору має не лише теоретичне, а й безпосереднє практичне значення.

У задачах математичного моделювання підпростори виникають природно. Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює підпростір, так само як і лінійна оболонка заданої системи векторів. У подальших темах саме підпросторову структуру матимуть ядро та образ лінійного перетворення. Отже, підпростір є тією конструкцією, яка дозволяє описувати внутрішні обмеження моделі, виділяти допустимі стани системи та працювати не з усім простором параметрів, а лише з його змістовно важливою частиною.

Особливу роль у цій темі відіграють операції *суми* та *перетину* підпросторів. Перетин описує спільну частину двох підпросторів, тобто ті вектори, які належать їм одночасно. Сума, навпаки, дає змогу об'єднати підпростори в нову лінійну структуру, що містить вектори обох множин і всі їх можливі лінійні комбінації. Такі операції є природним інструментом дослідження того, як різні підпросторові компоненти взаємодіють між собою та наскільки вони перекриваються в межах даного простору.

У прикладних задачах особливо важливим є випадок, коли сума підпросторів є *прямою*. У такій ситуації кожний вектор можна єдиним способом розкласти на суму компонент, що належать різним підпросторам. Це означає, що окремі складові моделі не дублюють одна одну і можуть бути інтерпретовані незалежно. Саме тому пряма сума є математичною основою коректних декомпозицій: складний об'єкт розбивається на простіші частини, кожна з яких відповідає за окремий аспект структури або поведінки системи.

У задачах інформатики ці ідеї мають виразний прикладний зміст. У Data Science та машинному навчанні робота з підпросторами пов'язана зі зменшенням розмірності, виділенням інформативних ознак і відокремленням корисного сигналу від шумової складової. У комп'ютерній графіці та цифровій обробці сигналів підпросторові моделі лежать в основі методів проєкцій, фільтрації та компактного подання даних. У теорії керування, робототехніці та моделюванні динамічних систем підпросторові розклади допомагають відокремлювати різні режими поведінки та будувати ефективніші алгоритми аналізу й керування.

Поняття суми, перетину та прямої суми підпросторів тісно пов'язані також із кількісним описом лінійних структур. Уміння визначати розмірності підпросторів, знаходити базиси їх суми та перетину, встановлювати, чи є сума прямою, дає змогу не лише описувати підпростори якісно, а й оцінювати їхню роль у загальній будові простору. У практичному сенсі це означає можливість встановлювати, скільки незалежної інформації містить модель, які компоненти є спільними, а які — новими, і наскільки ефективним є обраний спосіб декомпозиції.

Підсумовуючи, лінійні підпростори, їх сума, перетин і пряма сума становлять важливий математичний апарат для дослідження внутрішньої структури лінійних просторів. Вони лежать в основі багатьох теоретичних конструкцій і прикладних алгоритмів, пов'язаних із декомпозицією, зменшенням розмірності та аналізом складних моделей. Саме тому опанування цієї теми є необхідною передумовою для подальшого вивчення проєкцій, лінійних перетворень, операторів та їх застосувань у сучасних інформаційних технологіях.

Короткі теоретичні відомості

Поняття підпростору

Нехай V — лінійний простір над полем F.

Означення 3.1: Лінійний підпростір

Непорожня підмножина $L \subseteq V$ називається *лінійним підпростором* простору V, якщо виконуються умови:

1. якщо $a, b \in L$, то $a + b \in L$;
2. якщо $a \in L$, $\alpha \in F$, то $\alpha a \in L$.

Твердження 3.1: Критерій підпростору

Підмножина $L \subseteq V$ є підпростором тоді й лише тоді, коли для всіх $a, b \in L$ та $\alpha, \beta \in F$ виконується умова

$$\alpha a + \beta b \in L.$$

Найпростіші властивості підпросторів

Твердження 3.2: Найпростіші властивості підпросторів

Нехай L — підпростір простору V над полем F. Тоді:

1. для будь-яких $a_1, \ldots, a_k \in L$ та $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$ виконується
$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k \in L;$$
2. підпростір L містить нульовий вектор θ;
3. якщо $x \in L$, то $-x \in L$;
4. підпростір L є лінійним простором над полем F відносно операцій, успадкованих від V.

Зокрема, підпростір має базис і визначену розмірність. Якщо V є скінченновимірним, то будь-який його підпростір також скінченновимірний, і

$$\dim L \leq \dim V,$$

оскільки базис підпростору як лінійно незалежну систему можна доповнити до базису всього простору.

Приклад 3.1: Приклади підпросторів

1. **Тривіальні підпростори.** Для будь-якого простору V підпросторами є $\{\theta\}$ і V. Їх називають *тривіальними*. При цьому
$$\dim\{\theta\} = 0.$$
2. **Простір розв'язків однорідної системи.** Розглянемо систему лінійних одно-

рідних рівнянь у просторі F^n:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = 0, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = 0, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = 0, \end{cases} \qquad \text{де} \qquad \alpha_{ij} \in F.$$

Множина всіх розв'язків такої системи утворює підпростір. Базис цього підпростору називають **фундаментальною системою розв'язків (ФСР)**. Якщо n — кількість невідомих, а $r = \operatorname{rank} A$ — ранг матриці коефіцієнтів, то

$$\dim L = n - r.$$

3. **Лінійна оболонка.** Нехай $S \subseteq V$ — непорожня підмножина. Її *лінійною оболонкою* називається множина

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i \;\middle|\; m \in \mathbb{N},\ s_i \in S,\ \alpha_i \in F \right\}.$$

   Множина $\langle S \rangle$ є підпростором.

   Крім того:

   (а) $\langle S \rangle$ є найменшим підпростором, що містить множину S;

   (б) для непорожньої множини $M \subseteq V$ рівність $M = \langle M \rangle$ виконується тоді й лише тоді, коли M є підпростором.

4. **Функціональні приклади.** У просторі $C[a, b]$ підмножина $\mathbb{R}[x]$ всіх многочленів є підпростором. У просторі $F[x]$ підмножина $F_n[x]$ усіх многочленів степеня не вище n є підпростором.

5. **Геометричні приклади в $\mathbb{R}^3$.** У просторі $\mathbb{R}^3$ підпросторами є $\{\theta\}$, кожна пряма, що проходить через початок координат, кожна площина, що проходить через початок координат, і весь простір $\mathbb{R}^3$.

Операції над підпросторами

Нехай V — лінійний простір над полем F.

Твердження 3.3: Перетин підпросторів

Нехай $\{L_\lambda \mid \lambda \in I\}$ — сім'я підпросторів простору V і

$$L = \bigcap_{\lambda \in I} L_\lambda.$$

Тоді L є підпростором.

Зауваження 3.1: Об'єднання підпросторів

У загальному випадку множина $M_1 \cup M_2$ не є підпростором.

Приклад 3.2: Об'єднання двох підпросторів може не бути підпростором

У просторі $\mathbb{R}^2$ візьмемо два різні одновимірні підпростори

$$L_1 = \langle a \rangle, \qquad L_2 = \langle b \rangle,$$

де a і b неколінеарні. Тоді $a \in L_1 \cup L_2$ і $b \in L_1 \cup L_2$, але

$$a + b \notin L_1 \cup L_2.$$

Отже, $L_1 \cup L_2$ не є підпростором.

Твердження 3.4: Коли об'єднання є підпростором

Нехай M_1, M_2 — підпростори лінійного простору V. Тоді $M_1 \cup M_2$ є підпростором тоді й лише тоді, коли один з них міститься в іншому, тобто

$$M_1 \cup M_2 \text{ є підпростором} \iff (M_1 \subseteq M_2) \text{ або } (M_2 \subseteq M_1).$$

Поняття суми підпросторів

Нехай V — лінійний простір над полем F.

Означення 3.2: Сума підпросторів

Сумою двох підпросторів $L_1, L_2 \subseteq V$ називається множина

$$L_1 + L_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2\}.$$

Твердження 3.5: Найпростіші властивості суми підпросторів

Сума $L_1 + L_2$ є підпростором. Крім того,

$$L_1 \subseteq L_1 + L_2, \qquad L_2 \subseteq L_1 + L_2.$$

Означення 3.3: Сума скінченного числа підпросторів

Сумою підпросторів $L_1, L_2, \dots, L_k \subseteq V$ називається множина

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_k = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_k \mid x_i \in L_i,\ i = \overline{1,k}\}.$$

Поняття прямої суми підпросторів

Нехай V — лінійний простір над полем F.

Означення 3.4: Пряма сума (через єдиність розкладу)

Лінійний простір V називається *прямою сумою* своїх підпросторів $L_1, L_2, \dots, L_k$, якщо кожний вектор $x \in V$ можна подати у вигляді

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k, \qquad x_i \in L_i,\ i = \overline{1,k},$$

і таке подання є єдиним. У цьому разі пишуть

$$V = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k.$$

Приклад 3.3: Пряма сума в $\mathbb{R}^3$ за базисом

У просторі $\mathbb{R}^3$ нехай задано три некомпланарні вектори a_1, a_2, a_3 і

$$L_1 = \langle a_1 \rangle, \quad L_2 = \langle a_2 \rangle, \quad L_3 = \langle a_3 \rangle.$$

Оскільки a_1, a_2, a_3 утворюють базис $\mathbb{R}^3$, то кожний $x \in \mathbb{R}^3$ однозначно подається як

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3,$$

де $\lambda_1 a_1 \in L_1$, $\lambda_2 a_2 \in L_2$, $\lambda_3 a_3 \in L_3$. Отже,

$$\mathbb{R}^3 = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3.$$

Також $L_1 + L_2$ є площиною, натягнутою на a_1, a_2, тому

$$\mathbb{R}^3 = (L_1 + L_2) \oplus L_3, \qquad \mathbb{R}^3 = (L_1 + L_3) \oplus L_2, \qquad \mathbb{R}^3 = (L_2 + L_3) \oplus L_1.$$

Означення 3.5: Пряма сума (через перетини)

Лінійний простір V називається прямою сумою підпросторів $L_1, L_2, \dots, L_k$, якщо виконуються умови:

1. $V = L_1 + L_2 + \dots + L_k$;
2. для кожного $i = \overline{1,k}$ має місце

$$L_i \cap \big(L_1 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_k\big) = \{\theta\}.$$

Твердження 3.6: Критерій прямої суми двох підпросторів

Сума двох підпросторів $L_1 + L_2$ є прямою, тобто $L_1 \oplus L_2$, тоді й лише тоді, коли

$$L_1 \cap L_2 = \{\theta\}. \tag{1}$$

Це еквівалентно умові

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2.$$

Теорема 3.1: Еквівалентність означень прямої суми

Означення 3.4 і 3.5 еквівалентні.

Теорема 3.2: Про базис прямої суми

Нехай скінченновимірний лінійний простір V є прямою сумою своїх підпросторів

$$V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k,$$

і $B_1, B_2, \dots, B_k$ — базиси підпросторів $L_1, L_2, \dots, L_k$ відповідно. Тоді система векторів $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$ утворює базис простору V.

Наслідок 3.1: Розмірність прямої суми

Якщо V — скінченновимірний лінійний простір і

$$V = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k,$$

то

$$\dim V = \dim L_1 + \dim L_2 + \cdots + \dim L_k.$$

Теорема 3.3: Формула Грассмана

Нехай L_1 і L_2 — підпростори скінченновимірного лінійного простору V над полем F. Тоді справджується формула Грассмана[a]:

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2). \tag{2}$$

[a] **Герман Гюнтер Грассман** (1809–1877) — німецький математик, фізик і мовознавець

Алгоритми розв'язування типових задач

Алгоритм побудови базису суми підпросторів

Нехай

$$L_1 = \langle a_1, \ldots, a_p \rangle, \qquad L_2 = \langle b_1, \ldots, b_q \rangle.$$

Щоб знайти базис суми $L_1 + L_2$, слід виконати такі дії:

1. Сформувати матрицю

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_p \mid b_1 & \cdots & b_q \end{bmatrix},$$

записавши координати всіх векторів у *стовпці*.

2. Звести матрицю A до східчастого вигляду методом Гаусса.
3. Визначити номери *опорних стовпців*.
4. Вектори з *початкової* матриці A, що відповідають опорним стовпцям, утворюють базис суми $L_1 + L_2$.

Алгоритм побудови базису перетину підпросторів

Нехай

$$L_1 = \langle a_1, \ldots, a_p \rangle, \qquad L_2 = \langle b_1, \ldots, b_q \rangle.$$

Щоб знайти базис перетину $L_1 \cap L_2$, слід використати той факт, що

$$x \in L_1 \cap L_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i = \sum_{j=1}^{q} \beta_j b_j.$$

Далі виконати такі кроки:

1. Скласти матрицю

$$C = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_p \mid -b_1 & \cdots & -b_q \end{bmatrix}$$

і записати однорідну систему

$$C \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0.$$

2. Знайти фундаментальну систему розв'язків цієї системи. Нехай її вектори мають вигляд

$$X^{(t)} = \left(\alpha_1^{(t)}, \ldots, \alpha_p^{(t)}, \beta_1^{(t)}, \ldots, \beta_q^{(t)}\right)^T.$$

3. Для кожного вектора фундаментальної системи розв'язків обчислити

$$x^{(t)} = \alpha_1^{(t)} a_1 + \cdots + \alpha_p^{(t)} a_p.$$

4. Усі отримані вектори $x^{(t)}$ утворюють базис перетину $L_1 \cap L_2$.

Алгоритм перевірки, чи є сума підпросторів прямою

Нехай задано підпростори L_1 і L_2. Щоб перевірити, чи є сума $L_1 + L_2$ прямою, достатньо виконати один із таких способів:

1. Знайти перетин $L_1 \cap L_2$. Якщо

$$L_1 \cap L_2 = \{\theta\},$$

то

$$L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2.$$

2. Обчислити розмірності $\dim L_1$, $\dim L_2$ і $\dim(L_1 + L_2)$. Якщо

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2,$$

то сума є прямою.

3. Побудувати базиси B_1 і B_2 підпросторів L_1 та L_2. Якщо об'єднання

$$B_1 \cup B_2$$

є лінійно незалежною системою, то

$$L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2.$$

Примітка. Швидка довідка для обчислень

Операція	**Матриця стовпців**	**Що шукаємо**
$L_1 + L_2$	$[L_1 \mid L_2]$	опорні стовпці
$L_1 \cap L_2$	$[L_1 \mid -L_2]$	ФСР, далі лінійна комбінація

Типові задачі

Задача 3.1: Перевірка, що множина є підпростором у $\mathbb{R}[x]$

Розглянемо множину

$$K = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid 2f(1) - f(2) = 0 \,\}.$$

Потрібно з'ясувати, чи є K підпростором простору $\mathbb{R}[x]$.

Розв'язування.

Спершу зауважимо, що $0 \in K$, оскільки $2 \cdot 0 - 0 = 0$, тобто $K \neq \emptyset$.

Нехай $f_1(x), f_2(x) \in K$. Тоді $2f_1(1) - f_1(2) = 0$ і $2f_2(1) - f_2(2) = 0$, отже

$$2(f_1 + f_2)(1) - (f_1 + f_2)(2) = \big(2f_1(1) - f_1(2)\big) + \big(2f_2(1) - f_2(2)\big) = 0,$$

тобто $f_1 + f_2 \in K$.

Нехай $f(x) \in K$ і $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді

$$2(\alpha f)(1) - (\alpha f)(2) = \alpha\big(2f(1) - f(2)\big) = 0,$$

тобто $\alpha f \in K$.

Відповідь: K є підпростором $\mathbb{R}[x]$.

Задача 3.2: Розмірність і базис лінійної оболонки в $\mathbb{R}^4$

Знайти розмірність і базис лінійної оболонки $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4) \subset \mathbb{R}^4$, якщо

$$\bar{a}_1 = (1, -1, 3, -2), \quad \bar{a}_2 = (-2, 1, -4, 1),$$
$$\bar{a}_3 = (-1, 0, -1, -1), \quad \bar{a}_4 = (-3, 1, -5, 0).$$

Розв'язування.

Складемо матрицю зі *стовпців* (вектори записані як стовпці):

$$A = \big[\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3\ \bar{a}_4\big] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зводимо A до східчастого вигляду методом Гаусса. Після редукції отримуємо

$$\operatorname{rank} A = 2.$$

Отже,

$$\dim L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4) = 2.$$

Опорними (pivot) виявляються стовпці, що відповідають $\bar{a}_1$ та $\bar{a}_2$, тому вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ утворюють базис цієї лінійної оболонки.

Відповідь: $\dim L = 2$, базис: $\bar{a}_1, \bar{a}_2$.

Задача 3.3: Базис і розмірність лінійної оболонки у $\mathbb{C}$

Знайти базис і розмірність лінійної оболонки $L(z_1, z_2)$ у дійсному лінійному просторі $\mathbb{C}$, якщо

$$z_1 = 2 - 3i, \qquad z_2 = -1 + 4i.$$

Розв'язування.

Розглянемо ототожнення $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $a + bi \leftrightarrow (a, b)$. Складемо матрицю зі стовпців $(2, -3)$ та $(-1, 4)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot (-3) = 8 - 3 = 5 \neq 0.$$

Отже, стовпці лінійно незалежні, тому

$$\dim L(z_1, z_2) = 2,$$

а вектори z_1, z_2 утворюють базис $L(z_1, z_2)$.
Відповідь: $\dim L = 2$, базис: z_1, z_2.

Задача 3.4: Чи дорівнює лінійна оболонка $\mathbb{R}_2[x]$?

Нехай

$$f_1(x) = -2x^2 + 3x - 1, \qquad f_2(x) = x^2 - 2x + 4, \qquad f_3(x) = -x^2 + 5x - 2.$$

Перевірити, чи виконується $L(f_1, f_2, f_3) = \mathbb{R}_2[x]$.

Розв'язування.

У просторі $\mathbb{R}_2[x]$ працюємо з координатами в базисі $(x^2, x, 1)$:

$$f_1 \leftrightarrow (-2, 3, -1), \quad f_2 \leftrightarrow (1, -2, 4), \quad f_3 \leftrightarrow (-1, 5, -2).$$

Складемо матрицю зі стовпців (коефіцієнтні вектори як стовпці):

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Після зведення A до східчастого вигляду одержуємо

$$\operatorname{rank} A = 3.$$

Отже, f_1, f_2, f_3 лінійно незалежні, а тому

$$\dim L(f_1, f_2, f_3) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[x],$$

і, як наслідок,

$$L(f_1, f_2, f_3) = \mathbb{R}_2[x].$$

Відповідь: так, $L(f_1, f_2, f_3) = \mathbb{R}_2[x]$.

Задача 3.5: Перевірка формули Грассмана на підпросторах у $\mathbb{R}^3$

Нехай у просторі $\mathbb{R}^3$ задано три некомпланарні вектори a_1, a_2, a_3 і

$$L_1 = \langle a_1 \rangle, \qquad L_2 = \langle a_2 \rangle, \qquad L_3 = \langle a_3 \rangle.$$

Позначимо $M_1 = L_1 + L_2$ та $M_2 = L_2 + L_3$. Тоді $M_1 + M_2 = \mathbb{R}^3$, $M_1 \cap M_2 = L_2$,

$$\dim M_1 = 2, \qquad \dim M_2 = 2, \qquad \dim(M_1 + M_2) = 3, \qquad \dim(M_1 \cap M_2) = 1,$$

і формула Грассмана набуває вигляду $2 + 2 = 3 + 1$.

Розв'язування.

Оскільки вектори a_1, a_2, a_3 некомпланарні, вони лінійно незалежні і утворюють базис простору $\mathbb{R}^3$. Тому

$$L_1 = \langle a_1 \rangle, \qquad L_2 = \langle a_2 \rangle, \qquad L_3 = \langle a_3 \rangle$$

є одновимірними підпросторами, а

$$M_1 = L_1 + L_2, \qquad M_2 = L_2 + L_3$$

є двовимірними підпросторами, тобто площинами:

$$\dim M_1 = 2, \qquad \dim M_2 = 2.$$

Далі маємо

$$M_1 + M_2 = (L_1 + L_2) + (L_2 + L_3) = L_1 + L_2 + L_3 = \mathbb{R}^3,$$

тому

$$\dim(M_1 + M_2) = 3.$$

Перетин $M_1 \cap M_2$ містить підпростір L_2, оскільки

$$L_2 \subseteq M_1, \qquad L_2 \subseteq M_2.$$

З іншого боку, підпростори M_1 і M_2 є різними площинами в $\mathbb{R}^3$, які мають спільну пряму, натягнуту на вектор a_2. Отже,

$$M_1 \cap M_2 = L_2, \qquad \dim(M_1 \cap M_2) = 1.$$

Таким чином,

$$\dim M_1 + \dim M_2 = 2 + 2 = 4,$$

а

$$\dim(M_1 + M_2) + \dim(M_1 \cap M_2) = 3 + 1 = 4.$$

Отже, формула Грассмана виконується.

Відповідь:

$$\dim M_1 = 2, \qquad \dim M_2 = 2, \qquad \dim(M_1 + M_2) = 3, \qquad \dim(M_1 \cap M_2) = 1,$$

і формула Грассмана має вигляд

$$2 + 2 = 3 + 1.$$

Задача 3.6: Лінійна оболонка матриць: базис і розмірність

Знайти базис і розмірність $L(A_1, A_2, A_3)$ у просторі матриць $M(2, 2)$, якщо

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Ототожнимо матрицю $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ з вектором $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Тоді

$$A_1 \leftrightarrow (3, -2, 1, 4), \quad A_2 \leftrightarrow (-2, 1, 4, 3), \quad A_3 \leftrightarrow (1, -3, 2, 1).$$

Складемо матрицю зі стовпців (ці вектори як стовпці):

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix}_{\text{vec}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Після зведення до східчастого вигляду маємо

$$\operatorname{rank} A = 3.$$

Отже,

$$\dim L(A_1, A_2, A_3) = 3,$$

і матриці A_1, A_2, A_3 лінійно незалежні; вони утворюють базис $L(A_1, A_2, A_3)$.
Відповідь: $\dim = 3$, базис: A_1, A_2, A_3.

Задача 3.7: Розмірність перетину підпросторів у $\mathbb{R}^3$ і перевірка належності вектора

Нехай у $\mathbb{R}^3$ задано вектори

$$\bar{a}_1 = (1, -2, 3), \quad \bar{a}_2 = (2, -1, 4), \quad \bar{a}_3 = (1, -1, 0),$$

$$\bar{b}_1 = (-2, 1, 3), \quad \bar{b}_2 = (-1, 0, 2), \quad \bar{x} = (1, 4, 1).$$

Нехай

$$U = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3), \qquad W = L(\bar{b}_1, \bar{b}_2).$$

Знайти $\dim(U \cap W)$ та з'ясувати, чи $\bar{x} \in W$.

Розв'язування.

Перевіримо, що $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ лінійно незалежні:

$$\det\left[\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3\right] = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Отже, $\dim U = 3$ і $U = \mathbb{R}^3$.

Оскільки $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ лінійно незалежні, то $\dim W = 2$.

За формулою Грассмана

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W).$$

Але $U = \mathbb{R}^3$, тому $U + W = \mathbb{R}^3$ і $\dim(U + W) = 3$. Отже

$$\dim(U \cap W) = 3 + 2 - 3 = 2,$$

тобто $U \cap W = W$.

Перевіримо, чи $\bar{x} \in W$: потрібно розв'язати

$$\alpha_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \bar{b}_2 = \bar{x}.$$

За другою координатою маємо $\alpha_1 = 4$. Тоді з першої координати:

$$-2 \cdot 4 - \alpha_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_2 = -9.$$

Перевіримо третю координату:

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot (-9) = 12 - 18 = -6 \neq 1.$$

Отже, система несумісна і $\bar{x} \notin W$.
Відповідь: $\dim(U \cap W) = 2$, $\bar{x} \notin W$.

Задача 3.8: Пряма сума підпросторів у $\mathbb{R}^4$ та розклад вектора

Нехай у $\mathbb{R}^4$ задано підпростори

$$A = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2), \qquad B = L(\bar{a}_3, \bar{a}_4),$$

де

$$\bar{a}_1 = (1, 1, -1, -1), \quad \bar{a}_2 = (3, -1, 1, -2), \quad \bar{a}_3 = (2, 1, 2, -3), \quad \bar{a}_4 = (1, 2, 3, -3).$$

Потрібно:

1. довести, що $A + B = \mathbb{R}^4$ і $A \cap B = \{\theta\}$ (тобто $\mathbb{R}^4 = A \oplus B$);
2. подати $\bar{x} = (0, 2, 0, -1)$ у вигляді $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, де $\bar{x}_1 \in A$, $\bar{x}_2 \in B$.

Розв'язування.

Оскільки
$$A + B = L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4),$$
достатньо показати, що $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ лінійно незалежні. Складемо матрицю зі стовпців:
$$M = \left[\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3\ \bar{a}_4\right] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$
Після зведення матриці M до східчастого вигляду методом Гаусса отримуємо
$$\operatorname{rank} M = 4.$$
Отже, $A + B = \mathbb{R}^4$.

Тепер з'ясуємо перетин. Якщо $\bar{x} \in A \cap B$, то існують числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ такі, що
$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 = \alpha_3\bar{a}_3 + \alpha_4\bar{a}_4,$$
тобто
$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 - \alpha_3\bar{a}_3 - \alpha_4\bar{a}_4 = \theta.$$
Але вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ лінійно незалежні, тому
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$
і, отже, $A \cap B = \{\theta\}$. Таким чином, $\mathbb{R}^4 = A \oplus B$.

Для розкладу $\bar{x}$ шукаємо
$$\bar{x}_1 = \beta_1\bar{a}_1 + \beta_2\bar{a}_2 \in A, \qquad \bar{x}_2 = \beta_3\bar{a}_3 + \beta_4\bar{a}_4 \in B,$$
і розв'язуємо систему
$$\beta_1\bar{a}_1 + \beta_2\bar{a}_2 + \beta_3\bar{a}_3 + \beta_4\bar{a}_4 = \bar{x}.$$
Після розв'язування отримуємо
$$\beta_4 = 1, \qquad \beta_3 = -1, \qquad \beta_2 = 0, \qquad \beta_1 = 1.$$
Тому
$$\bar{x}_1 = \bar{a}_1, \qquad \bar{x}_2 = -\bar{a}_3 + \bar{a}_4,$$
і справді $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$.

Відповідь: $\mathbb{R}^4 = A \oplus B$, $\bar{x} = \bar{a}_1 + (-\bar{a}_3 + \bar{a}_4)$, де $\bar{a}_1 \in A$, $-\bar{a}_3 + \bar{a}_4 \in B$.

Задача 3.9: Розмірність і базис лінійної оболонки системи векторів у $\mathbb{R}^4$

Знайти розмірність і базис лінійної оболонки системи векторів:
$$a_1 = (1,\ 0,\ 0,\ -1),\ a_2 = (2,\ 1,\ 1,\ 0),\ a_3 = (1,\ 1,\ 1,\ 1),$$
$$a_4 = (1,\ 2,\ 3,\ 4),\ a_5 = (0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Розв'язування.

Складемо з векторів $a_1, \ldots, a_5$ матрицю, записавши їх у рядки, і за допомогою елементарних перетворень над рядками з'ясуємо кількість лінійно незалежних рядків. Ця кількість дорівнює розмірності лінійної оболонки, а відповідні лінійно незалежні вектори утворюють базис.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, розмірність лінійної оболонки дорівнює 3, а базис можна вибрати, наприклад, з векторів a_1, a_2, a_4 (вибір базису не єдиний).
Відповідь: $\dim\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle = 3$, базис: a_1, a_2, a_4.

Задача 3.10: Система лінійних рівнянь підпростору, натягнутого на задані вектори

Знайти систему лінійних рівнянь, що задає лінійний підпростір, натягнутий на систему векторів:

$$a_1 = (1,\ -1,\ 1,\ 0),\ a_2 = (1,\ 1,\ 0,\ 1),\ a_3 = (2,\ 0,\ 1,\ 1).$$

Розв'язування.

Будь-який вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ з підпростору лінійно виражається через a_1, a_2, a_3, тобто

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Запишемо розширену матрицю та виконаємо перетворення Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & 2 & x_2 + x_1 \\ 0 & -1 & -1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 - x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 + x_1 - 2x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right).$$

Отже, умова існування розв'язку еквівалентна виконанню рівностей

$$\begin{cases} x_2 + x_1 - 2x_4 = 0, \\ x_4 + x_3 - x_1 = 0. \end{cases}$$

Причому для коефіцієнтів маємо співвідношення

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = x_1 - x_4, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = x_4. \end{cases}$$

Відповідь: підпростір задається системою

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Задача 3.11: Розмірності суми та перетину двох підпросторів

Знайти розмірність s суми і розмірність d перетину лінійних підпросторів:

L_1 — лінійна оболонка

$$a_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1),\ a_2 = (1,\ -1,\ 1,\ -1),\ a_3 = (1,\ 3,\ 1,\ 3),$$

L_2 — лінійна оболонка

$$b_1 = (1,\ 2,\ 0,\ 2),\ b_2 = (1,\ 2,\ 1,\ 2),\ b_3 = (3,\ 1,\ 3,\ 1).$$

Розв'язування.

Щоб знайти $\dim(L_1 + L_2)$, складемо з векторів підпросторів L_1 і L_2 матрицю, записавши їх у рядки, і виконаємо елементарні перетворення над рядками:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\dim(L_1 + L_2) = 3$, звідси ж видно, що $\dim L_1 = 2$.
Знайдемо $\dim L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

отже $\dim L_2 = 3$.

З теореми про розмірність суми та перетину маємо:

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 2 + 3 - 3 = 2.$$

Відповідь: $s = \dim(L_1 + L_2) = 3$, $d = \dim(L_1 \cap L_2) = 2$.

Задача 3.12: Базис суми і перетину двох підпросторів у $\mathbb{R}^4$

Знайти базис суми і перетину лінійних підпросторів, натягнутих на системи векторів

$$a_1 = (1,\ 2,\ 1,\ -2),\ a_2 = (2,\ 3,\ 1,\ 0),\ a_3 = (1,\ 2,\ 2,\ -3)$$

і

$$b_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1),\ b_2 = (1,\ 0,\ 1,\ -1),\ b_3 = (1,\ 3,\ 0,\ -4).$$

Розв'язування.

Щоб знайти базис суми підпросторів, складемо з векторів підпросторів L_1 і L_2 матрицю, записавши їх у рядки, і виконаємо елементарні перетворення над рядками:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лінійно незалежні вектори, що залишились, і будуть утворювати базис суми. Отже, базис складають вектори a_1, a_2, a_3, b_2. Базис визначається неоднозначно.

Якщо вектор належить перетину підпросторів, то його можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів з базисів цих підпросторів. Базис L_1 складають вектори a_1, a_2, a_3. Знайдемо базис L_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Отже, базис L_2 складають вектори b_1, b_2, b_3.

Можна скористатись формулою

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2),$$

щоб визначити кількість векторів у базисі перетину:

$$\dim(L_1 \cap L_2) = 3 + 3 - 4 = 2.$$

Далі, якщо $z \in L_1 \cap L_2$, то

$$z = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3.$$

Маємо систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = y_1 + 3y_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1 + y_2 \\ -2x_1 - 3x_3 = y_1 - y_2 - 4y_3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - y_1 - y_2 - y_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - y_1 - 3y_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - y_1 - y_2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_3 - y_1 + y_2 + 4y_3 = 0 \end{cases}.$$

Знайдемо фундаментальну систему розв'язків (ФСР) однорідної системи, записавши рівняння системи в матричному вигляді.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо систему:

$$\begin{cases} x_1 &= -2y_1 + 5y_3 \\ x_2 &= y_1 - y_3 \\ x_3 &= y_1 - 2y_3 \\ y_2 &= 0 \end{cases},$$

де y_1, y_3 — незалежні змінні.

ФСР:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
d_1	-2	1	1	1	0	0
d_2	5	-1	-2	0	0	1

Отже, вектори

$$z_1 = -2a_1 + a_2 + a_3 = b_1, \qquad z_2 = 5a_1 - a_2 - 2a_3 = b_3$$

є шуканими векторами перетину.

Відповідь: базис суми: a_1, a_2, a_3, b_2; базис перетину: $z_1 = b_1$, $z_2 = b_3$.

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 3.1: Підпростори: перевірка означення

У кожному варіанті задано підмножину M деякого векторного простору V над полем F. Потрібно з'ясувати, чи є M *лінійним підпростором* простору V, тобто:

1. перевірити, що $M \neq \emptyset$;
2. перевірити замкненість відносно додавання: якщо $u, v \in M$, то $u + v \in M$;
3. перевірити замкненість відносно множення на скаляр: якщо $u \in M$ і $\alpha \in F$, то $\alpha u \in M$.

(Підказка: за потреби використайте еквівалентну умову — для всіх $u, v \in M$ і $\alpha, \beta \in F$ виконується $\alpha u + \beta v \in M$.)

Варіанти:

1. $V = \mathbb{R}_n[x]$, $\quad M = \{\, f(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid f(-x) = f(x) \,\}$.
2. $V = \mathbb{R}_n[x]$, $\quad M = \{\, f(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid f(-x) = -f(x) \,\}$.

3. $V = \mathbb{R}_n[x]$, $M = \{\, f(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid f(0) - 2f(1) = 0 \,\}$.
4. $V = \mathbb{R}_n[x]$, $M = \{\, f(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid f(1) + f(2) + f(3) = 0 \,\}$.
5. $V = \mathbb{R}_n[x]$, $M = \{\, f(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid f(3) = 1 \,\}$.
6. $V = M_2(\mathbb{C})$, $M = \{\, A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0 \,\}$.
7. $V = M_2(\mathbb{C})$, $M = \{\, X \in M_2(\mathbb{C}) \mid XA = AX \,\}$, де $A \in M_2(\mathbb{C})$ — фіксована матриця.
8. $V = M_2(\mathbb{C})$, $M = \{\, A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 0 \,\}$.
9. $V = M_2(\mathbb{C})$, $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; a + d = 0 \right\}$.
10. $V = M_2(\mathbb{C})$, $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; a + b = 1 \right\}$.
11. $V = \mathbb{R}^n$, $M = \{\, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 = \alpha_n \,\}$.
12. $V = \mathbb{R}^n$, $M = \{\, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n \,\}$.
13. $V = \mathbb{R}^n$, $M = \{\, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \,\}$.
14. $V = \mathbb{R}^n$, $M = \{\, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_n = \alpha_{n-1} = 1 \,\}$.
15. $V = \mathbb{R}^n$, $M = \{\, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0 \,\}$.

Задача 3.2: Лінійна оболонка в $\mathbb{R}^4$: базис і розмірність

У кожному варіанті задано систему векторів $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$. Потрібно: знайти базис і розмірність лінійної оболонки

$$L = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4.$$

(Підказка: скласти матрицю зі стовпців a_i і застосувати метод Гаусса; базис утворюють опорні (pivot) стовпці початкової матриці.)

Варіанти:

1. $a_1 = (1,\ 0,\ 2,\ -1)$, $a_2 = (2,\ 1,\ 4,\ 0)$, $a_3 = (1,\ 1,\ 2,\ 1)$, $a_4 = (3,\ 1,\ 6,\ -1)$.
2. $a_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 2)$, $a_2 = (2,\ 0,\ 1,\ -1)$, $a_3 = (0,\ 1,\ 1,\ 1)$, $a_4 = (3,\ 2,\ 1,\ 3)$.
3. $a_1 = (2,\ -1,\ 1,\ 0)$, $a_2 = (1,\ 1,\ 0,\ 2)$, $a_3 = (0,\ 1,\ 2,\ -1)$, $a_4 = (3,\ 0,\ 3,\ 1)$.
4. $a_1 = (1,\ 2,\ -1,\ 0)$, $a_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 1)$, $a_3 = (2,\ 3,\ 0,\ 1)$, $a_4 = (1,\ 1,\ 2,\ -1)$.
5. $a_1 = (1,\ 0,\ 1,\ 1)$, $a_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 0)$, $a_3 = (2,\ 1,\ 3,\ 1)$, $a_4 = (1,\ 1,\ 2,\ 1)$.
6. $a_1 = (1,\ -1,\ 0,\ 2)$, $a_2 = (2,\ -2,\ 0,\ 4)$, $a_3 = (0,\ 1,\ 1,\ -1)$, $a_4 = (1,\ 0,\ 1,\ 1)$.
7. $a_1 = (0,\ 1,\ 2,\ 1)$, $a_2 = (1,\ 0,\ -1,\ 2)$, $a_3 = (2,\ 1,\ 1,\ 3)$, $a_4 = (3,\ 1,\ 0,\ 5)$.
8. $a_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 0)$, $a_2 = (2,\ 4,\ 2,\ 0)$, $a_3 = (0,\ 1,\ 0,\ 1)$, $a_4 = (1,\ 3,\ 1,\ 1)$.
9. $a_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 1)$, $a_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 1)$, $a_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 1)$, $a_4 = (1,\ 1,\ 1,\ 3)$.
10. $a_1 = (2,\ 1,\ -1,\ 0)$, $a_2 = (1,\ 2,\ 0,\ 1)$, $a_3 = (0,\ 1,\ 1,\ -1)$, $a_4 = (3,\ 3,\ 0,\ 0)$.
11. $a_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $a_2 = (2,\ 1,\ 0,\ 1)$, $a_3 = (0,\ 1,\ 2,\ -1)$, $a_4 = (3,\ 2,\ 1,\ 2)$.
12. $a_1 = (1,\ -2,\ 1,\ 0)$, $a_2 = (2,\ -4,\ 2,\ 0)$, $a_3 = (0,\ 1,\ 1,\ 1)$, $a_4 = (1,\ -1,\ 2,\ 1)$.
13. $a_1 = (0,\ 1,\ 1,\ 0)$, $a_2 = (1,\ 1,\ 0,\ 1)$, $a_3 = (1,\ 2,\ 1,\ 1)$, $a_4 = (2,\ 3,\ 1,\ 2)$.
14. $a_1 = (1,\ 0,\ 2,\ 1)$, $a_2 = (0,\ 1,\ -1,\ 2)$, $a_3 = (2,\ 1,\ 1,\ 3)$, $a_4 = (1,\ 1,\ 1,\ 2)$.
15. $a_1 = (2,\ 0,\ 1,\ -1)$, $a_2 = (1,\ 1,\ 1,\ 0)$, $a_3 = (0,\ 1,\ 2,\ 1)$, $a_4 = (3,\ 2,\ 4,\ 0)$.

Задача 3.3: Лінійна оболонка в $\mathbb{R}_2[x]$: базис, розмірність і належність

У кожному варіанті задано три многочлени $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}_2[x]$ та многочлен $g \in \mathbb{R}_2[x]$. Позначимо

$$L = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}_2[x].$$

Потрібно:

1. знайти базис і розмірність підпростору L;
2. перевірити, чи належить g підпростору L (тобто чи існують $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ такі, що $g = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$).

(Підказка: працювати з координатами многочленів у базисі $(x^2, x, 1)$ та застосувати метод Гаусса.)

Варіанти:

1. $f_1 = x^2 + x + 1,\ f_2 = 2x^2 - x + 3,\ f_3 = x^2 - 2x + 4,\ g = 3x^2 - 2x + 5.$
2. $f_1 = 2x^2 + 3x - 1,\ f_2 = x^2 - x + 2,\ f_3 = -x^2 + 4x + 1,\ g = x^2 + 2x + 3.$
3. $f_1 = -2x^2 + x + 4,\ f_2 = x^2 + 2x - 1,\ f_3 = 3x^2 - x + 2,\ g = 2x^2 + 3.$
4. $f_1 = x^2 - 3x + 2,\ f_2 = 2x^2 + x + 1,\ f_3 = -x^2 + 2x + 4,\ g = x^2 - x + 3.$
5. $f_1 = 3x^2 + x - 2,\ f_2 = x^2 - 2x + 1,\ f_3 = 2x^2 + 3x + 4,\ g = 4x^2 + x + 3.$
6. $f_1 = x^2 + 4x + 1,\ f_2 = 2x^2 + 8x + 2,\ f_3 = x^2 - x + 3,\ g = 3x^2 + 2x + 1.$
7. $f_1 = x^2 + 2x + 2,\ f_2 = -x^2 + x + 1,\ f_3 = 2x^2 + 3x + 3,\ g = x^2 + 4.$
8. $f_1 = 2x^2 - x + 1,\ f_2 = x^2 + 3x + 2,\ f_3 = -x^2 + 2x + 3,\ g = x^2 + x + 1.$
9. $f_1 = x^2 - 2x + 4,\ f_2 = 2x^2 - 4x + 8,\ f_3 = x^2 + x - 1,\ g = 3x^2 - 5x + 7.$
10. $f_1 = x^2 + x + 0,\ f_2 = 2x^2 + 2x + 0,\ f_3 = x^2 - 3,\ g = 3x^2 + x - 3.$
11. $f_1 = x^2 - 1,\ f_2 = x^2 + x,\ f_3 = x^2 - x,\ g = x^2 + 2.$
12. $f_1 = -x^2 + 2x + 5,\ f_2 = 3x^2 - x + 1,\ f_3 = x^2 + 4x - 2,\ g = 2x^2 + 3x + 4.$
13. $f_1 = x^2 + 3x + 1,\ f_2 = 2x^2 + 6x + 2,\ f_3 = x^2 - 2x + 3,\ g = x^2 + x + 1.$
14. $f_1 = 2x^2 + x + 1,\ f_2 = -4x^2 - 2x - 2,\ f_3 = x^2 + 2,\ g = x^2 + 1.$
15. $f_1 = x^2 - 4x + 4,\ f_2 = 2x^2 - 8x + 8,\ f_3 = x^2 + x + 1,\ g = 3x^2 - 7x + 9.$

Задача 3.4: Лінійна оболонка в $M(2, \mathbb{R})$: базис, розмірність і належність

У кожному варіанті задано три матриці $A_1, A_2, A_3 \in M(2, \mathbb{R})$ та матриця $B \in M(2, \mathbb{R})$. Позначимо

$$L = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle \subseteq M(2, \mathbb{R}).$$

Потрібно:

1. знайти базис і розмірність підпростору L;
2. перевірити, чи належить B підпростору L (тобто чи існують $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ такі, що $B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$).

(Підказка: ототожнити $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leftrightarrow (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ і застосувати метод Гаусса.)

Варіанти:

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$

2. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
5. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
6. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
8. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
9. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.
10. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
11. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
12. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
13. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
14. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
15. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 3.5: Перетин і сума підпросторів у $\mathbb{R}^3$

У кожному варіанті задано три вектори $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ та два вектори $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^3$. Позначимо

$$U = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, \qquad W = \langle b_1, b_2 \rangle.$$

Потрібно:

1. знайти $\dim(U \cap W)$;
2. знайти базис перетину $U \cap W$;
3. знайти базис суми $U + W$.

Варіанти:

1. $a_1 = (1,\ 1,\ 0)$, $a_2 = (0,\ 1,\ 1)$, $a_3 = (1,\ 0,\ 1)$, $b_1 = (1,\ 2,\ 1)$, $b_2 = (0,\ 1,\ 2)$.
2. $a_1 = (2,\ -1,\ 1)$, $a_2 = (1,\ 0,\ 1)$, $a_3 = (0,\ 1,\ 1)$, $b_1 = (1,\ 1,\ 0)$, $b_2 = (2,\ 1,\ 1)$.
3. $a_1 = (1,\ -2,\ 3)$, $a_2 = (2,\ -1,\ 4)$, $a_3 = (1,\ -1,\ 0)$, $b_1 = (-2,\ 1,\ 3)$, $b_2 = (-1,\ 0,\ 2)$.

4. $a_1 = (1,\ 0,\ 2),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1),\ a_3 = (2,\ 1,\ 0),\ b_1 = (1,\ 1,\ 1),\ b_2 = (0,\ 2,\ 1).$
5. $a_1 = (3,\ 1,\ 0),\ a_2 = (1,\ 0,\ 2),\ a_3 = (0,\ 2,\ 1),\ b_1 = (1,\ -1,\ 1),\ b_2 = (2,\ 0,\ 1).$
6. $a_1 = (1,\ -1,\ 0),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1),\ a_3 = (1,\ 0,\ 1),\ b_1 = (2,\ 1,\ 1),\ b_2 = (1,\ 2,\ 0).$
7. $a_1 = (2,\ 0,\ 1),\ a_2 = (1,\ 1,\ 1),\ a_3 = (0,\ 1,\ 2),\ b_1 = (1,\ 0,\ 2),\ b_2 = (0,\ 1,\ 1).$
8. $a_1 = (1,\ 2,\ 0),\ a_2 = (0,\ 1,\ 3),\ a_3 = (1,\ 0,\ 1),\ b_1 = (2,\ 1,\ 1),\ b_2 = (1,\ 1,\ 0).$
9. $a_1 = (1,\ 1,\ 2),\ a_2 = (2,\ 0,\ 1),\ a_3 = (0,\ 1,\ 1),\ b_1 = (1,\ 2,\ 1),\ b_2 = (3,\ 1,\ 0).$
10. $a_1 = (2,\ 1,\ 1),\ a_2 = (1,\ 2,\ 0),\ a_3 = (0,\ 1,\ 2),\ b_1 = (1,\ 0,\ 1),\ b_2 = (0,\ 1,\ 2).$
11. $a_1 = (1,\ 0,\ 1),\ a_2 = (1,\ 2,\ 1),\ a_3 = (0,\ 1,\ 2),\ b_1 = (2,\ 1,\ 0),\ b_2 = (1,\ 1,\ 1).$
12. $a_1 = (2,\ -1,\ 0),\ a_2 = (1,\ 1,\ 1),\ a_3 = (0,\ 2,\ 1),\ b_1 = (1,\ 2,\ 1),\ b_2 = (0,\ 1,\ 1).$
13. $a_1 = (1,\ 2,\ 1),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1),\ a_3 = (2,\ 0,\ 1),\ b_1 = (1,\ 0,\ 2),\ b_2 = (0,\ 1,\ 1).$
14. $a_1 = (3,\ 0,\ 1),\ a_2 = (1,\ 1,\ 0),\ a_3 = (0,\ 2,\ 1),\ b_1 = (1,\ 1,\ 2),\ b_2 = (2,\ 0,\ 1).$
15. $a_1 = (1,\ 1,\ 1),\ a_2 = (1,\ 1,\ 2),\ a_3 = (1,\ 2,\ 3),\ b_1 = (1,\ 0,\ 2),\ b_2 = (0,\ 1,\ 1).$

Задача 3.6: Пряма сума в $\mathbb{R}^4$ та розклад вектора

У кожному варіанті задано підпростори

$$A = \langle a_1, a_2 \rangle, \qquad B = \langle b_1, b_2 \rangle \quad \text{в } \mathbb{R}^4,$$

а також вектор $x \in \mathbb{R}^4$. Потрібно:

1. довести, що $\mathbb{R}^4 = A \oplus B$;
2. знайти розклад $x = x_A + x_B$, де $x_A \in A$, $x_B \in B$.

(Підказка: перевірити, що a_1, a_2, b_1, b_2 лінійно незалежні; далі розв'язати систему для коефіцієнтів у поданні $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$.)

Варіанти:

1. $a_1 = (1,\ 1,\ -1,\ -1),\ a_2 = (3,\ -1,\ 1,\ -2),\ b_1 = (2,\ 1,\ 2,\ -3),\ b_2 = (1,\ 2,\ 3,\ -3),\ x = (0,\ 2,\ 0,\ -1).$
2. $a_1 = (1,\ 0,\ 1,\ 0),\ a_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 1),\ b_1 = (1,\ 1,\ -1,\ -1),\ b_2 = (2,\ -1,\ 1,\ -2),\ x = (3,\ 1,\ 0,\ -2).$
3. $a_1 = (1,\ 2,\ 0,\ -1),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 0),\ b_1 = (1,\ 0,\ 1,\ -2),\ b_2 = (2,\ 1,\ 0,\ -1),\ x = (4,\ 3,\ 2,\ -5).$
4. $a_1 = (2,\ 0,\ 1,\ -1),\ a_2 = (1,\ 1,\ 0,\ 1),\ b_1 = (0,\ 1,\ 1,\ -1),\ b_2 = (1,\ 2,\ 1,\ 0),\ x = (3,\ 4,\ 2,\ -1).$
5. $a_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 0),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 0),\ b_1 = (0,\ 0,\ 1,\ 1),\ b_2 = (1,\ 0,\ 0,\ 1),\ x = (2,\ 3,\ 4,\ 5).$
6. $a_1 = (1,\ -1,\ 0,\ 2),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1,\ -1),\ b_1 = (1,\ 0,\ 1,\ 1),\ b_2 = (2,\ 1,\ 1,\ 0),\ x = (3,\ 2,\ 4,\ 1).$
7. $a_1 = (0,\ 1,\ 2,\ 1),\ a_2 = (1,\ 0,\ -1,\ 2),\ b_1 = (2,\ 1,\ 1,\ 3),\ b_2 = (3,\ 1,\ 0,\ 5),\ x = (5,\ 2,\ 1,\ 6).$
8. $a_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 0),\ a_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 1),\ b_1 = (2,\ 4,\ 2,\ 0),\ b_2 = (1,\ 3,\ 1,\ 1),\ x = (3,\ 7,\ 3,\ 2).$
9. $a_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 1),\ a_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 1),\ b_1 = (0,\ 0,\ 1,\ 1),\ b_2 = (1,\ 1,\ 1,\ 3),\ x = (2,\ 2,\ 3,\ 6).$
10. $a_1 = (2,\ 1,\ -1,\ 0),\ a_2 = (1,\ 2,\ 0,\ 1),\ b_1 = (0,\ 1,\ 1,\ -1),\ b_2 = (3,\ 3,\ 0,\ 0),\ x = (1,\ 4,\ 2,\ -1).$
11. $a_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1),\ a_2 = (2,\ 1,\ 0,\ 1),\ b_1 = (0,\ 1,\ 2,\ -1),\ b_2 = (3,\ 2,\ 1,\ 2),\ x = (4,\ 3,\ 5,\ 2).$

12. $a_1 = (1,\ -2,\ 1,\ 0),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 1),\ b_1 = (2,\ -4,\ 2,\ 0),\ b_2 = (1,\ -1,\ 2,\ 1),\ x = (3,\ -1,\ 4,\ 1).$
13. $a_1 = (0,\ 1,\ 1,\ 0),\ a_2 = (1,\ 1,\ 0,\ 1),\ b_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 1),\ b_2 = (2,\ 3,\ 1,\ 2),\ x = (2,\ 5,\ 2,\ 4).$
14. $a_1 = (1,\ 0,\ 2,\ 1),\ a_2 = (0,\ 1,\ -1,\ 2),\ b_1 = (2,\ 1,\ 1,\ 3),\ b_2 = (1,\ 1,\ 1,\ 2),\ x = (3,\ 2,\ 4,\ 3).$
15. $a_1 = (2,\ 0,\ 1,\ -1),\ a_2 = (1,\ 1,\ 1,\ 0),\ b_1 = (0,\ 1,\ 2,\ 1),\ b_2 = (3,\ 2,\ 4,\ 0),\ x = (5,\ 3,\ 7,\ -2).$

Задача 3.7: Рівняння підпростору за породжувачами в $\mathbb{R}^4$

У кожному варіанті задано вектори $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Позначимо

$$L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Потрібно знайти систему лінійних рівнянь, що задає підпростір L, тобто знайти такі лінійні функціонали

$$\ell_1(x) = 0,\ \ell_2(x) = 0,\ \dots,\ \ell_m(x) = 0, \qquad x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,$$

щоб

$$L = \{\, x \in \mathbb{R}^4 \mid \ell_1(x) = \ell_2(x) = \dots = \ell_m(x) = 0 \,\}.$$

(Підказка: записати умову $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$, скласти розширену матрицю та, виконуючи перетворення Гаусса, отримати умови існування розв'язку як лінійні рівняння на x_1, x_2, x_3, x_4.)

Варіанти:

1. $a_1 = (1,\ -1,\ 1,\ 0),\ a_2 = (1,\ 1,\ 0,\ 1),\ a_3 = (2,\ 0,\ 1,\ 1).$
2. $a_1 = (1,\ 0,\ 1,\ 1),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 0),\ a_3 = (1,\ 1,\ 2,\ 1).$
3. $a_1 = (2,\ 1,\ 0,\ -1),\ a_2 = (1,\ 0,\ 1,\ 1),\ a_3 = (0,\ 1,\ 1,\ 0).$
4. $a_1 = (1,\ 2,\ -1,\ 0),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 1),\ a_3 = (2,\ 3,\ 0,\ 1).$
5. $a_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 0),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 0),\ a_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 1).$
6. $a_1 = (1,\ -1,\ 0,\ 2),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1,\ -1),\ a_3 = (1,\ 0,\ 1,\ 1).$
7. $a_1 = (0,\ 1,\ 2,\ 1),\ a_2 = (1,\ 0,\ -1,\ 2),\ a_3 = (2,\ 1,\ 1,\ 3).$
8. $a_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 0),\ a_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 1),\ a_3 = (1,\ 3,\ 1,\ 1).$
9. $a_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 1),\ a_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 1),\ a_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 1).$
10. $a_1 = (2,\ 1,\ -1,\ 0),\ a_2 = (1,\ 2,\ 0,\ 1),\ a_3 = (0,\ 1,\ 1,\ -1).$
11. $a_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1),\ a_2 = (2,\ 1,\ 0,\ 1),\ a_3 = (0,\ 1,\ 2,\ -1).$
12. $a_1 = (1,\ -2,\ 1,\ 0),\ a_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 1),\ a_3 = (1,\ -1,\ 2,\ 1).$
13. $a_1 = (0,\ 1,\ 1,\ 0),\ a_2 = (1,\ 1,\ 0,\ 1),\ a_3 = (1,\ 2,\ 1,\ 1).$
14. $a_1 = (1,\ 0,\ 2,\ 1),\ a_2 = (0,\ 1,\ -1,\ 2),\ a_3 = (2,\ 1,\ 1,\ 3).$
15. $a_1 = (2,\ 0,\ 1,\ -1),\ a_2 = (1,\ 1,\ 1,\ 0),\ a_3 = (0,\ 1,\ 2,\ 1).$

Прикладні задачі

Задача (IT) 3.1: Фільтрація шуму (Signal vs. Noise)

IT-коментар

У задачах обробки сигналів виміряний вектор часто розглядають як суму двох складових: корисного сигналу та шуму. Якщо простір спостережень подано як пряму суму відповідних підпросторів, то кожне вимірювання можна однозначно розкласти на інформативну частину та шумову домішку.

У системі обробки сигналів простір спостережень $\mathbb{R}^3$ моделюється як сума підпростору корисних сигналів S та підпростору шуму N. Нехай

$$S = \langle (1,2,1), (2,1,0) \rangle, \qquad N = \langle (0,0,1) \rangle.$$

Отримано вектор вимірювань $v = (3,3,5)$.

1. Доведіть, що $\mathbb{R}^3 = S \oplus N$.
2. Знайдіть $s \in S$ та $n_{\text{noise}} \in N$ у розкладі $v = s + n_{\text{noise}}$.

Задача (IT) 3.2: Виявлення надмірності ознак (Machine Learning)

IT-коментар

У машинному навчанні різні групи ознак можуть частково дублювати одна одну. Аналіз суми та перетину відповідних підпросторів дозволяє встановити, чи містять ці групи незалежну інформацію, чи між ними існує лінійна надмірність.

Під час навчання моделі розглядаються дві групи ознак, що породжують підпростори U та W у просторі параметрів $\mathbb{R}^4$:

$$U = \langle (1,1,0,0), (1,0,1,0) \rangle, \qquad W = \langle (0,1,-1,0), (0,0,0,1) \rangle.$$

1. Використовуючи формулу Грассмана, обчисліть $\dim(U \cap W)$.
2. Зробіть висновок: чи $U \cap W = \{\theta\}$ (групи ознак лінійно незалежні), чи перетин нетривіальний (є лінійна надмірність ознак).

Задача (IT) 3.3: Декомпозиція простору станів (Control Theory)

IT-коментар

У теорії керування та моделюванні динамічних систем простір станів часто доцільно розкладати на підпростори, що відповідають різним режимам поведінки. Пряма сума підпросторів дає змогу однозначно відокремлювати одну компоненту стану від іншої.

У теорії керування простір станів $V = \mathbb{R}^3$ доцільно подати як пряму суму двох підпросторів

$$V = L_c \oplus L_u,$$

де L_c — підпростір (умовно) "керованих" станів, а L_u — підпростір, який його доповнює. Нехай

$$L_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}.$$

1. Знайдіть базис підпростору L_c.
2. Побудуйте одновимірний підпростір $L_u = \langle u \rangle$ так, щоб виконувалася декомпозиція $V = L_c \oplus L_u$.
3. Чи є вибір L_u єдиним? Обґрунтуйте відповідь.

Задача (IT) 3.4: Кодування та розрізнення повідомлень (Coding Theory)

IT-коментар

У теорії кодування різні лінійні коди можна розглядати як підпростори простору кодових слів. Їхній перетин показує, чи існують ненульові повідомлення, що можуть бути інтерпретовані однаково в різних кодових системах.

Модельне припущення. Надалі коди розглядаються як підпростори простору $\mathbb{F}_2^4$ (арифметика за модулем 2). Нехай два протоколи використовують лінійні коди C_1 та C_2:

$$C_1 = \langle (1,1,0,0), (0,0,1,1) \rangle, \qquad C_2 = \langle (1,0,1,0), (0,1,0,1) \rangle \subseteq \mathbb{F}_2^4.$$

1. Знайдіть базис та розмірність перетину $C_1 \cap C_2$.
2. Інтерпретуйте результат: чи існують ненульові кодові слова, які належать одночасно обом кодам (потенційна неоднозначність між протоколами у цій лінійній моделі)?

Задача (IT) 3.5: Аналіз маршрутів у мережі (лінійна модель)

IT-коментар

У лінійних моделях мережевих систем стани навантаження можна описувати як лінійні комбінації базових маршрутів. Це дозволяє досліджувати, які маршрути є незалежними, чи виникає надлишковість, і чи можна подати заданий стан мережі через обраний набір базових конфігурацій.

Модельне припущення. Розглядається лінійна алгебраїчна модель, у якій "стани мережі" описуються всіма лінійними комбінаціями базових маршрутів (без обмежень невід'ємності). Нехай базові маршрути описуються векторами навантаження на канали:

$$v_1 = (1,2,0,1), \quad v_2 = (0,1,1,2), \quad v_3 = (2,5,1,4).$$

Нехай

$$S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4.$$

1. Знайдіть базис підпростору S та визначте $\dim S$. Чи є v_3 лінійною комбінацією v_1 та v_2?
2. Для $w = (1, 3, 1, 3)$ перевірте, чи належить w підпростору S.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення лінійного підпростору. Які дві умови замкненості є необхідними й достатніми?
2. Яку еквівалентну умову підпростору можна записати через замкненість відносно лінійної комбінації двох векторів?
3. Доведіть, що будь-який підпростір обов'язково містить нульовий вектор. Чи може підмножина, що не містить нульового вектора, бути підпростором?
4. Поясніть, чому підпростір із успадкованими операціями сам є векторним простором.
5. Нехай V — скінченновимірний простір. Обґрунтуйте нерівність $\dim L \leq \dim V$. У якому випадку виконується рівність?
6. Наведіть приклади тривіальних підпросторів. Яку розмірність має підпростір $\{\theta\}$?
7. Чому множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь завжди є підпростором? Як її розмірність пов'язана з кількістю невідомих і рангом матриці коефіцієнтів?
8. Дайте означення лінійної оболонки множини. Чому її називають найменшим підпростором, що містить дану множину?
9. Доведіть, що перетин будь-якої кількості підпросторів знову є підпростором.
10. Наведіть геометричний приклад у $\mathbb{R}^2$, коли об'єднання двох підпросторів не є підпростором. Сформулюйте критерій, за якого об'єднання все ж таки буде підпростором.
11. Дайте означення суми підпросторів. Чим сума відрізняється від об'єднання? Який зв'язок між сумою підпросторів і лінійною оболонкою їх об'єднання?
12. Сформулюйте означення прямої суми через єдиність розкладу кожного вектора.
13. Для випадку двох підпросторів сформулюйте критерій прямої суми через їхній перетин. Як це перевірити практично — через базиси або через розмірності?
14. Сформулюйте формулу Грассмана для двох підпросторів скінченновимірного простору. Поясніть її зміст на прикладі двох площин, що проходять через початок координат, у $\mathbb{R}^3$.
15. Опишіть кроки побудови базису перетину двох підпросторів, якщо вони задані породжувальними системами.

Тема 4. Лінійні перетворення.

Вступ

Поняття *лінійного перетворення* є одним із ключових інструментів, що поєднують абстрактну лінійну алгебру з реальними обчислювальними задачами. Якщо в попередніх темах основна увага зосереджувалася на самих векторних просторах, підпросторах, базисах і координатах, то тепер у центрі розгляду перебувають відображення, які зберігають лінійну структуру. Саме лінійні перетворення дозволяють описувати, як змінюються вектори, координатні подання, геометричні конфігурації та дані при застосуванні певного правила. Тому вивчення лінійних перетворень має не лише теоретичне, а й безпосереднє практичне значення.

У математичному сенсі лінійне перетворення є природним способом переходу від одного векторного простору до іншого без руйнування операцій додавання та множення на скаляр. Саме тому такі відображення відіграють у лінійній алгебрі ту саму роль, яку звичайні функції відіграють у шкільному курсі математики: вони описують допустимі перетворення об'єктів і дозволяють досліджувати не лише самі простори, а й зв'язки між ними. У прикладних моделях лінійні перетворення виникають як зміни координат, повороти, відбиття, розтяги, проєкції, оператори обробки сигналів, а також як елементарні кроки в чисельних та алгоритмічних процедурах.

Особливо важливим є те, що в скінченновимірному випадку лінійне перетворення повністю визначається образами векторів деякого базису. Завдяки цьому абстрактний оператор можна подати у вигляді матриці, а його дію на довільний вектор — звести до стандартних координатних обчислень. Отже, теорія лінійних перетворень у скінченновимірних просторах тісно пов'язана з теорією матриць. Саме цей зв'язок робить тему особливо важливою для студентів спеціальності «Комп'ютерні науки», оскільки матрична форма подання є природною для реалізації алгоритмів у програмних системах.

Не менш важливу роль відіграє *заміна базису*. Один і той самий лінійний оператор може мати різні матриці залежно від того, у якому базисі його розглядати. З математичного погляду це означає, що координатний запис змінюється, але сам оператор як об'єкт залишається тим самим. У прикладному сенсі це дає змогу переходити до такого базису, в якому оператор або перетворення має простішу структуру, а обчислення стають зручнішими. Саме на цій ідеї ґрунтуються задачі приведення матриць до спеціальних форм, аналіз інваріантів і дослідження внутрішньої будови операторів.

У задачах комп'ютерних наук матричне подання лінійних перетворень має виразний алгоритмічний зміст. У комп'ютерній графіці всі базові геометричні перетворення описуються матрицями. У машинному навчанні лінійні відображення лежать в основі перетворення простору ознак, побудови лінійних моделей і роботи окремих шарів нейронних мереж. У чисельних методах та обробці сигналів саме лінійні оператори задають фільтри, ітераційні схеми, правила апроксимації та перетворення даних. Тому вміння будувати матрицю лінійного перетворення, працювати з нею в різних базисах і правильно інтерпретувати її зміст є необхідною складовою математичної підготовки майбутнього фахівця з комп'ютерних наук.

Підсумовуючи, лінійні перетворення та їх матричне подання становлять важливий математичний апарат, без якого неможливо повноцінно описувати сучасні обчислювальні моделі. Вони лежать в основі комп'ютерної графіки, аналізу даних, цифрової обробки сигналів, машинного навчання та багатьох інших напрямів комп'ютерних наук. Саме тому опанування побудови матриці оператора, розуміння ролі базису та вміння виконувати заміну базису є необхідною передумовою для подальшого вивчення лінійних операторів та їх застосувань у високотехнологічних системах.

Короткі теоретичні відомості

Поняття лінійного перетворення

Означення 4.1: Лінійне відображення

Нехай V_1, V_2 — лінійні простори над полем F. Відображення $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ називається *лінійним відображенням*, якщо для будь-яких $a, b \in V_1$ і будь-якого $\alpha \in F$ виконуються умови

1. $\mathcal{A}(a+b) = \mathcal{A}(a) + \mathcal{A}(b)$;
2. $\mathcal{A}(\alpha a) = \alpha\,\mathcal{A}(a)$.

Еквівалентно, для довільних $a, b \in V_1$ та довільних $\alpha, \beta \in F$ має місце рівність

$$\mathcal{A}(\alpha a + \beta b) = \alpha\,\mathcal{A}(a) + \beta\,\mathcal{A}(b).$$

Якщо $V_1 = V_2 = V$, то лінійне відображення $\mathcal{A}\colon V \to V$ називається *лінійним перетворенням* простору V або *лінійним оператором* на V.

Твердження 4.1: Найпростіші властивості лінійного відображення

Нехай $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ — лінійне відображення. Тоді:

1. $\mathcal{A}(\theta_1) = \theta_2$, де θ_1, θ_2 — нульові елементи просторів V_1, V_2;
2. $\mathcal{A}(-a) = -\mathcal{A}(a)$ для будь-якого $a \in V_1$;
3. для будь-яких $a_1, \ldots, a_k \in V_1$ і $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$
$$\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{A}(a_i).$$

Лінійні відображення $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon V_1 \to V_2$ вважаються рівними, якщо $\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)$ для всіх $x \in V_1$.

Приклад 4.1: Найпростіші приклади лінійних перетворень

1. Тотожне перетворення $\mathcal{E}\colon V \to V$, $\mathcal{E}(x) = x$.
2. Нульове перетворення $\mathcal{O}\colon V \to V$, $\mathcal{O}(x) = \theta$.
3. Гомотетія $F_\alpha\colon V \to V$, $F_\alpha(x) = \alpha x$, де $\alpha \in F$.
4. Поворот $\mathcal{A}_\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ на кут φ.
5. Оператор похідної $\mathcal{D}\colon F[x] \to F[x]$, $\mathcal{D}(f) = f'$.

Теорема 4.1: Лінійне перетворення визначається образами базису

Нехай V — скінченновимірний лінійний простір над полем F, $a_1, \ldots, a_n$ — базис простору V, а $b_1, \ldots, b_n \in V$. Тоді існує єдине лінійне перетворення $\mathcal{A}\colon V \to V$ таке, що

$$\mathcal{A}(a_i) = b_i, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Отже, лінійне перетворення скінченновимірного простору однозначно визначається образами векторів деякого базису.

Матриця лінійного перетворення в базисі

Означення 4.2: Матриця лінійного перетворення в базисі

Нехай $\mathcal{A}$ — лінійне перетворення скінченновимірного простору V, а $B = (a_1, \dots, a_n)$ — фіксований базис. Нехай

$$\mathcal{A}(a_j) = \alpha_{1j}a_1 + \dots + \alpha_{nj}a_n, \qquad j = \overline{1, n}.$$

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею лінійного перетворення* $\mathcal{A}$ в базисі B.

Зауваження 4.1: Як будується матриця лінійного перетворення

Для побудови матриці $A = [\mathcal{A}]_B$:

1. обчислюють вектори $\mathcal{A}(a_j)$;
2. їх координати в базисі $B = (a_1, \dots, a_n)$ записують у j-й стовпчик матриці A.

Приклад 4.2: Матриця оператора повороту на площині

У просторі $\mathbb{R}^2$ матриця повороту на кут φ має вигляд

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Приклад 4.3: Матриця оператора диференціювання у просторі многочленів

У просторі $F_n[x]$ з базисом $1, x, \dots, x^n$ матриця оператора похідної має вигляд

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Координати образу вектора

Теорема 4.2: Координатний запис дії лінійного перетворення

Нехай $\mathcal{A}\colon V \to V$ — лінійне перетворення, $B = (a_1, \ldots, a_n)$ — базис, у якому $\mathcal{A}$ відповідає матриця $A = [\mathcal{A}]_B$. Якщо $[x]_B$ — координатний стовпчик вектора x у базисі B, то

$$[\mathcal{A}(x)]_B = A\,[x]_B.$$

Заміна базису

Теорема 4.3: Формула заміни базису для матриці лінійного перетворення

Нехай B і B' — два базиси простору V. Позначимо через

$$C = T_{B \leftarrow B'}$$

матрицю переходу, яка задовольняє рівність

$$[x]_B = C\,[x]_{B'}.$$

Тоді матриці одного й того самого лінійного перетворення $\mathcal{A}$ у базисах B і B' пов'язані співвідношенням

$$[\mathcal{A}]_{B'} = C^{-1}[\mathcal{A}]_B C.$$

Алгоритми розв'язування типових задач

Алгоритм перевірки лінійності відображення за означенням

Нехай задано відображення $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$.

1. Взяти довільні вектори $a, b \in V_1$ і перевірити рівність
$$\mathcal{A}(a+b) = \mathcal{A}(a) + \mathcal{A}(b).$$
2. Взяти довільний вектор $a \in V_1$ та довільний скаляр $\alpha \in F$ і перевірити рівність
$$\mathcal{A}(\alpha a) = \alpha\,\mathcal{A}(a).$$
3. Якщо обидві рівності виконуються для довільних виборів a, b і α, то відображення $\mathcal{A}$ є лінійним.
4. Якщо хоча б для одного вибору a, b або α одна з рівностей не виконується, то відображення $\mathcal{A}$ не є лінійним.

Зауваження. Часто зручніше перевіряти еквівалентну умову

$$\mathcal{A}(\alpha a + \beta b) = \alpha\mathcal{A}(a) + \beta\mathcal{A}(b)$$

для довільних $a, b \in V_1$ і довільних $\alpha, \beta \in F$.

Алгоритм побудови матриці лінійного перетворення за дією на базис

Нехай $B = (a_1, \dots, a_n)$ — базис простору V, а $\mathcal{A}\colon V \to V$ — лінійне перетворення.

1. Для кожного $j = \overline{1, n}$ обчислити вектор $\mathcal{A}(a_j)$.
2. Розкласти $\mathcal{A}(a_j)$ за базисом B:
$$\mathcal{A}(a_j) = \alpha_{1j} a_1 + \alpha_{2j} a_2 + \dots + \alpha_{nj} a_n.$$
3. Координатний стовпчик
$$[\mathcal{A}(a_j)]_B = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}$$
записати в j-й стовпчик матриці $A = [\mathcal{A}]_B$.
4. Повторити цю процедуру для всіх $j = 1, \dots, n$.

Контроль. Перевірити на базисних векторах рівність
$$[\mathcal{A}(a_j)]_B = A[a_j]_B = Ae_j,$$
де e_j — j-й стандартний координатний стовпчик.

Алгоритм побудови матриці переходу до нового базису

Нехай $B = (a_1, \dots, a_n)$ і $B' = (a'_1, \dots, a'_n)$ — два базиси простору V.

1. Для кожного $j = \overline{1, n}$ розкласти вектор a'_j у базисі B:
$$a'_j = c_{1j} a_1 + c_{2j} a_2 + \dots + c_{nj} a_n.$$
2. Координатний стовпчик
$$[a'_j]_B = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$$
записати в j-й стовпчик матриці
$$C = T_{B \leftarrow B'}.$$
3. Повторити цю процедуру для всіх $j = 1, \dots, n$.

Контроль. Для довільного вектора
$$x = \xi_1 a'_1 + \dots + \xi_n a'_n$$
має виконуватися рівність
$$[x]_B = C[x]_{B'}.$$

Алгоритм заміни базису для матриці лінійного перетворення

Нехай задано матрицю
$$A = [\mathcal{A}]_B$$
лінійного перетворення $\mathcal{A}$ у базисі B та матрицю переходу
$$C = T_{B \leftarrow B'}, \qquad [x]_B = C[x]_{B'}.$$

1. Знайти обернену матрицю C^{-1}, наприклад, методом Жордана–Гауса:
$$(C \mid E) \sim (E \mid C^{-1}).$$
2. Обчислити матрицю лінійного перетворення в новому базисі B' за формулою
$$A' = [\mathcal{A}]_{B'} = C^{-1}AC.$$

Контроль. Для кількох векторів x перевірити, що
$$[\mathcal{A}(x)]_{B'} = A'[x]_{B'}, \qquad [x]_B = C[x]_{B'}.$$

Алгоритм обчислення координат образу вектора

Нехай задано матрицю
$$A = [\mathcal{A}]_B$$
лінійного перетворення $\mathcal{A}$ у базисі B та координатний стовпчик $[x]_B$.

1. Записати координатний стовпчик вектора x у базисі B.
2. Обчислити добуток
$$[\mathcal{A}(x)]_B = A[x]_B.$$
3. Якщо потрібно, відновити сам вектор $\mathcal{A}(x)$ за знайденими координатами в базисі B.

Контроль. Якщо лінійне перетворення задано формулою, то можна окремо обчислити вектор $\mathcal{A}(x)$ безпосередньо і порівняти його координати з отриманим результатом.

Типові задачі

Задача 4.1: Ортогональне проєктування на напрямок і матриця оператора

Нехай $a \in \mathbb{R}^3$, $a \neq \theta$ — фіксований вектор. Розглянути відображення проєктування на напрямок a:
$$\mathcal{A}(v) = \frac{(v, a)}{(a, a)}\, a.$$

1. довести, що $\mathcal{A}$ є лінійним оператором;
2. знайти матрицю $[\mathcal{A}]$ у стандартному базисі.

Розв'язування.

1. Перевірка лінійності. Нехай $u, v \in \mathbb{R}^3$ і $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\mathcal{A}(u+v) = \frac{(u+v,a)}{(a,a)}\,a = \frac{(u,a)+(v,a)}{(a,a)}\,a = \frac{(u,a)}{(a,a)}\,a + \frac{(v,a)}{(a,a)}\,a = \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v).$$

Далі,

$$\mathcal{A}(\alpha v) = \frac{(\alpha v,a)}{(a,a)}\,a = \frac{\alpha(v,a)}{(a,a)}\,a = \alpha\mathcal{A}(v).$$

Отже, $\mathcal{A}$ є лінійним оператором.

2. Побудова матриці. Запишемо скалярний добуток у матричній формі:

$$(v,a) = a^{\mathsf{T}} v.$$

Тоді

$$\mathcal{A}(v) = \frac{1}{(a,a)}\,a(a^{\mathsf{T}} v) = \left(\frac{1}{(a,a)}\,aa^{\mathsf{T}}\right) v.$$

Отже, матриця оператора у стандартному базисі має вигляд

$$[\mathcal{A}] = \frac{1}{(a,a)}\,aa^{\mathsf{T}} = \frac{1}{(a,a)}\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\mathcal{A}$ є лінійним оператором,

$$[\mathcal{A}] = \frac{1}{(a,a)}\,aa^{\mathsf{T}}.$$

Задача 4.2: Перевірка, чи є відображення лінійним

Нехай $a \in \mathbb{R}^3$, $a \neq \theta$. Розглянути відображення

$$\Psi(v) = (a,v)\,v.$$

Перевірити, чи є Ψ лінійним.

Розв'язування.

Достатньо перевірити однорідність. Для довільного $\alpha \in \mathbb{R}$ маємо

$$\Psi(\alpha v) = (a,\alpha v)\,(\alpha v) = \alpha(a,v)\cdot\alpha v = \alpha^2(a,v)v = \alpha^2\Psi(v).$$

Для лінійного відображення повинна виконуватися рівність

$$\Psi(\alpha v) = \alpha\Psi(v),$$

але тут маємо множник α^2 замість α. При $\alpha \neq 0, 1$ ці вирази не збігаються. Отже, Ψ не є лінійним відображенням.

Відповідь: Ψ не є лінійним відображенням.

Задача 4.3: Матриця лінійного перетворення за заданим правилом

Лінійне перетворення $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задане формулою

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3,\ x_1 - 2x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - 2x_3).$$

Знайти матрицю $[\varphi]$ у стандартному базисі.

Розв'язування.

Використаємо алгоритм побудови матриці оператора за образами базисних векторів. Нехай

$$e_1 = (1, 0, 0), \qquad e_2 = (0, 1, 0), \qquad e_3 = (0, 0, 1).$$

Тоді

$$\varphi(e_1) = (2, 1, 1), \qquad \varphi(e_2) = (-1, -2, 1), \qquad \varphi(e_3) = (-1, 1, -2).$$

Координати цих образів у стандартному базисі записуємо у стовпчики матриці:

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь:

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.4: Матриця оператора диференціювання у заданому базисі

Нехай

$$V = \langle \cos x, \sin x \rangle$$

— двовимірний підпростір функцій. Розглянути оператор $\mathcal{D}\colon V \to V$, $\mathcal{D}(f) = f'$. Знайти матрицю $[\mathcal{D}]_B$ у базисі

$$B = (\cos x, \sin x).$$

Розв'язування.

Обчислюємо образи базисних векторів:

$$\mathcal{D}(\cos x) = -\sin x = 0 \cdot \cos x + (-1) \cdot \sin x,$$

$$\mathcal{D}(\sin x) = \cos x = 1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x.$$

Отже, координатні стовпчики мають вигляд

$$[\mathcal{D}(\cos x)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad [\mathcal{D}(\sin x)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$[\mathcal{D}]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь:

$$[\mathcal{D}]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.5: Матриця оператора векторного добутку

Нехай $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Розглянути оператор

$$\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathcal{A}(v) = a \times v.$$

Знайти матрицю $[\mathcal{A}]$ у стандартному базисі.

Розв'язування.

Нехай $v = (x, y, z)$. Тоді

$$a \times v = \begin{pmatrix} a_2 z - a_3 y \\ a_3 x - a_1 z \\ a_1 y - a_2 x \end{pmatrix}.$$

Звідси видно, що координати образу $\mathcal{A}(v)$ виражаються через координати v лінійно:

$$\mathcal{A}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь:

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.6: Матриця оператора після заміни базису

Нехай оператор $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ у стандартному базисі

$$B_1 = (e_1, e_2, e_3)$$

має матрицю

$$[\mathcal{A}]_{B_1} = A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю $[\mathcal{A}]_{B_2}$ у базисі

$$B_2 = (f_1, f_2, f_3),$$

де

$$f_1 = (2, 3, 1)^\mathsf{T}, \qquad f_2 = (3, 4, 1)^\mathsf{T}, \qquad f_3 = (1, 2, 2)^\mathsf{T}.$$

Розв'язування.

Матриця переходу

$$T = T_{B_1 \leftarrow B_2}$$

утворюється зі стовпчиків $[f_i]_{B_1}$:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

За формулою заміни базису

$$[\mathcal{A}]_{B_2} = T^{-1}[\mathcal{A}]_{B_1}T = T^{-1}AT.$$

Обернену матрицю можна знайти методом Жордана–Гауса; у результаті маємо

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$[\mathcal{A}]_{B_2} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь:

$$[\mathcal{A}]_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.7: Матриця оператора у просторі матриць

Нехай $M_2(\mathbb{R})$ — простір матриць 2×2. Задано оператор

$$\Phi\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \qquad \Phi(X) = PX + XQ,$$

де

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Побудувати матрицю $[\Phi]$ розміру 4×4 у базисі

$$(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}),$$

де

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Ототожнюємо матрицю

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

з координатним стовпчиком

$$[X] = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$$

у базисі $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. Для побудови матриці $[\Phi]$ обчислюємо образи базисних матриць.

$$\Phi(E_{11}) = PE_{11} + E_{11}Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$[\Phi(E_{11})] = (-1, 1, 1, 0)^{\mathsf{T}}.$$

$$\Phi(E_{12}) = PE_{12} + E_{12}Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$[\Phi(E_{12})] = (-4, 3, 0, 1)^{\mathsf{T}}.$$

$$\Phi(E_{21}) = PE_{21} + E_{21}Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$[\Phi(E_{21})] = (-1, 0, -3, 1)^{\mathsf{T}}.$$

$$\Phi(E_{22}) = PE_{22} + E_{22}Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$[\Phi(E_{22})] = (0, -1, -4, 1)^{\mathsf{T}}.$$

Записуючи знайдені координатні стовпчики у стовпчики матриці оператора, дістаємо

$$[\Phi] = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь:

$$[\Phi] = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 4.1: Перевірка лінійності відображення

Дослідити, чи є задане відображення лінійним. У разі лінійності коротко обґрунтувати адитивність та однорідність, у разі нелінійності — вказати контрприклад.

Варіанти:

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2,\ x_1 + 3x_2)$.
2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2) = (2x_1 + 1,\ x_2)$.
3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ x_2 + x_3,\ x_1 + x_3)$.
4. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2,\ x_2,\ x_3)$.
5. Нехай $a \in \mathbb{R}^3$ — фіксований вектор. $\varphi(v) = (a, v)\, a$.
6. Нехай $a \in \mathbb{R}^3$ — фіксований вектор. $\varphi(v) = (a, v)\, v$.
7. Нехай $a \in \mathbb{R}^3$ — фіксований вектор. $\varphi(v) = a \times v$.
8. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 1,\ x_2,\ x_3)$.
9. $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $\varphi(f) = f'(x)$.
10. $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $\varphi(f) = f(x + 1)$.
11. $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $\varphi(f) = f(x) + 1$.
12. $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $\varphi(X) = AX$, де A — фіксована матриця.
13. $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $\varphi(X) = X^2$.
14. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 - x_2,\ x_1 - x_2)$.
15. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 3x_2 + x_3$.

Задача 4.2: Побудова матриці лінійного оператора

Для кожного варіанта побудувати матрицю лінійного оператора у *вказаному* базисі. Координати образів базисних векторів записувати у *стовпчики* матриці.

Варіанти:

1. Нехай $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ і
$$\mathcal{A}(e_1) = (1, 0, 2), \quad \mathcal{A}(e_2) = (-1, 3, 1), \quad \mathcal{A}(e_3) = (2, -2, 0).$$
Знайти матрицю $[\mathcal{A}]$ у стандартному базисі.
2. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad \mathcal{A}(x_1, x_2) = (3x_1 - 2x_2,\ x_1 + 4x_2)$. Знайти матрицю $[\mathcal{A}]$ у стандартному базисі.
3. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad \mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3,\ -x_1 + 3x_2,\ x_1 + x_2 - 2x_3)$. Знайти матрицю $[\mathcal{A}]$ у стандартному базисі.
4. Нехай $a = (1, 2, -1)$. Оператор $\mathcal{A}(v) = (a, v)\, a$ на $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю $[\mathcal{A}]$ у стандартному базисі.
5. Нехай $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Оператор $\Psi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $\Psi(X) = XB$. Знайти матрицю $[\Psi]$ у базисі $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.
6. Нехай
$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$
Оператор $\Phi(X) = PX + XQ$ на $M_2(\mathbb{R})$. Знайти матрицю $[\Phi]$ у базисі $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

7. Оператор $\mathcal{S} : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$,
$$\mathcal{S}(X) = \frac{X + X^{\mathsf{T}}}{2}.$$
Знайти матрицю $[\mathcal{S}]$ у базисі $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.
8. Оператор $\mathcal{T} : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$,
$$\mathcal{T}(X) = (\operatorname{tr} X)\, I_2.$$
Знайти матрицю $[\mathcal{T}]$ у базисі $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.
9. Оператор $\mathcal{P} : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$,
$$\mathcal{P}\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}.$$
Знайти матрицю $[\mathcal{P}]$ у базисі $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.
10. Нехай $a = (2, -1, 3)$. Оператор $\mathcal{A}(v) = a \times v$ на $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю $[\mathcal{A}]$ у стандартному базисі.
11. $\mathcal{D} : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, $\quad \mathcal{D}(f) = f'$. Знайти матрицю $[\mathcal{D}]$ у базисі $(1, x, x^2, x^3)$.
12. $\mathcal{M} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, $\quad \mathcal{M}(f) = xf(x)$. Знайти матрицю $[\mathcal{M}]$ у базисах домену $(1, x, x^2)$ і кодомену $(1, x, x^2, x^3)$.
13. Нехай $a = 1$, $b = -1$. Оператор $\Delta_{a,b} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$,
$$\Delta_{a,b}(f) = f(x - a) - f(x - b).$$
Знайти матрицю $[\Delta_{a,b}]$ у базисі $(x^2, x, 1)$.
14. Нехай $V = \langle \cos x, \sin x \rangle$. Оператор $\mathcal{D}(f) = f'$ на V. Знайти матрицю $[\mathcal{D}]$ у базисі $(\cos x, \sin x)$.
15. Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Оператор $\Phi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $\Phi(X) = AX$. Знайти матрицю $[\Phi]$ у базисі $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

Задача 4.3: Матриця оператора у заданому базисі

Для кожного варіанта знайти матрицю лінійного оператора у вказаному базисі. Координати образів базисних векторів записувати у *стовпчики* матриці.

Варіанти:

1. У просторі $\mathbb{R}_2[x]$ задано оператор $\mathcal{D}(f) = f'$. Знайти матрицю $[\mathcal{D}]_B$ у базисі
$$B = (1,\ x + 1,\ x^2).$$
2. У просторі $\mathbb{R}_2[x]$ задано оператор $\Delta(f) = f(x + 1) - f(x)$. Знайти матрицю $[\Delta]_B$ у базисі
$$B = (1,\ x,\ x^2).$$
3. У просторі $\mathbb{R}_2[x]$ задано оператор $\mathcal{M}(f) = xf(x)$ як відображення $\mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$. Знайти матрицю у базисах
$$B = (1,\ x,\ x^2) \quad \text{та} \quad C = (1,\ x,\ x^2,\ x^3).$$

4. Нехай $V = \langle \cos x, \sin x\rangle$. Оператор $\mathcal{D}(f) = f'$. Знайти $[\mathcal{D}]_B$ у базисі
$$B = (\cos x + \sin x,\ \cos x - \sin x).$$
5. У просторі $M_2(\mathbb{R})$ задано оператор $\Phi(X) = AX$, де
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Знайти матрицю $[\Phi]_B$ у базисі
$$B = \big(E_{11},\ E_{12},\ E_{11} + E_{22},\ E_{21}\big).$$
6. У просторі $M_2(\mathbb{R})$ задано оператор $\Psi(X) = XB$, де
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Знайти матрицю $[\Psi]_B$ у базисі
$$B = \big(E_{11} + E_{12},\ E_{12},\ E_{21},\ E_{22}\big).$$
7. У просторі $M_2(\mathbb{R})$ задано оператор
$$\mathcal{S}(X) = \frac{X + X^{\mathsf{T}}}{2}.$$
Знайти матрицю $[\mathcal{S}]_B$ у базисі
$$B = \big(E_{11},\ E_{12} + E_{21},\ E_{12} - E_{21},\ E_{22}\big).$$
8. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x) = Ax$, де
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Знайти $[\mathcal{A}]_B$ у базисі $B = (b_1, b_2)$, де
$$b_1 = (1, 1), \qquad b_2 = (2, 1).$$
9. $\mathcal{A}(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \big((1, 0), (1, 2)\big).$
10. $\mathcal{A}(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \big((2, 1), (1, 1)\big).$
11. $\mathcal{A}(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \big((1, -1), (1, 2)\big).$
12. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A}(x) = Ax$, де
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Знайти $[\mathcal{A}]_B$ у базисі $B = (b_1, b_2, b_3)$, де
$$b_1 = (1, 0, 1), \quad b_2 = (0, 1, 1), \quad b_3 = (1, 1, 0).$$

13. $\mathcal{A}(x) = Ax$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big).$$

14. $\mathcal{A}(x) = Ax$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \big((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\big).$$

15. $\mathcal{A}(x) = Ax$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \big((2,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\big).$$

Задача 4.4: Заміна базису для матриці оператора

Знайти матрицю лінійного оператора в базисі B_2, якщо в базисі B_1 його матриця дорівнює A. Використовувати формулу

$$A' = T^{-1}AT,$$

де $T = T_{B_1 \leftarrow B_2}$ — матриця переходу від базису B_2 до базису B_1 (стовпчики T — координати векторів базису B_2 у базисі B_1).

Варіанти:

1. $\mathbb{R}^3$, $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = (f_1, f_2, f_3),$$

$$f_1 = (1,0,1), \qquad f_2 = (0,1,1), \qquad f_3 = (1,1,0).$$

2. $\mathbb{R}^3$, $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = (1,0,0), \quad f_2 = (1,1,0), \quad f_3 = (1,1,1).$$

3. $\mathbb{R}^3$, $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = (1,1,0), \quad f_2 = (0,1,1), \quad f_3 = (1,0,1).$$

4. $\mathbb{R}^2$, $B_1 = (e_1, e_2)$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = (f_1, f_2), \qquad f_1 = (1,1), \quad f_2 = (2,1).$$

5. $\mathbb{R}^2$, $B_1 = (e_1, e_2)$,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = (1,2), \quad f_2 = (1,0).$$

6. $\mathbb{R}^2$, $B_1 = (e_1, e_2)$,
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = (1,-1), \quad f_2 = (2,1).$$

7. $\mathbb{R}^2$, $B_1 = (e_1, e_2)$,
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = (2,1), \quad f_2 = (1,1).$$

8. $\mathbb{R}^2$, $B_1 = (e_1, e_2)$,
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = (1,1), \quad f_2 = (1,3).$$

9. $\mathbb{R}^3$, $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$,
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = (2,1,0), \quad f_2 = (1,0,1), \quad f_3 = (0,1,1).$$

10. $\mathbb{R}^3$, $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = (1,1,0), \quad f_2 = (1,0,1), \quad f_3 = (0,1,1).$$

11. $\mathbb{R}^3$, $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$,
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = (1,0,1), \quad f_2 = (1,1,0), \quad f_3 = (0,1,1).$$

12. $\mathbb{R}^3$, $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$,
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = (1,1,1), \quad f_2 = (1,0,1), \quad f_3 = (0,1,1).$$

13. $\mathbb{R}^2$, $B_1 = (e_1, e_2)$,
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = (1,0), \quad f_2 = (1,2).$$

14. $\mathbb{R}^2$, $B_1 = (e_1, e_2)$,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = (2,1), \quad f_2 = (1,0).$$

15. $\mathbb{R}^2$, $B_1 = (e_1, e_2)$,
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = (1,1), \quad f_2 = (1,-1).$$

Прикладні задачі

Задача (IT) 4.1: Поворот і зміна координат у 2D-графіці

IT-коментар

У двовимірній комп'ютерній графіці геометричні перетворення об'єктів задаються матрицями. Один і той самий поворот може мати різний матричний запис у різних системах координат, тому задача ілюструє зв'язок між матрицею оператора та зміною базису.

У площині $\mathbb{R}^2$ задано лінійне перетворення $\mathcal{A}_\varphi$ — поворот на кут $\varphi = \pi/6$ проти годинникової стрілки. Нехай $B = (e_1, e_2)$ — стандартний базис, а $B' = (u_1, u_2)$, де

$$u_1 = (1, 1), \qquad u_2 = (1, -1).$$

1. Знайти матрицю $A = [\mathcal{A}_\varphi]_B$.
2. Побудувати матрицю переходу $C = T_{B \leftarrow B'}$.
3. Обчислити матрицю $A' = [\mathcal{A}_\varphi]_{B'}$ за формулою $A' = C^{-1}AC$.
4. Для вектора $x = (2, -1)$ знайти $[\mathcal{A}_\varphi(x)]_B$ і $[\mathcal{A}_\varphi(x)]_{B'}$ та перевірити узгодженість результатів.

Задача (IT) 4.2: Дискретна похідна як лінійний оператор у часовому ряді

IT-коментар

У задачах аналізу часових рядів і цифрової обробки сигналів різниця сусідніх значень використовується як дискретний аналог похідної. Такий оператор дозволяє виявляти швидкість зміни сигналу, локальні стрибки та тренди.

Розглянемо простір $V = \mathbb{R}^n$ зі стандартним базисом та оператор дискретної різниці $\mathcal{D} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1,\ x_3 - x_2,\ \ldots,\ x_n - x_{n-1},\ 0).$$

1. Довести, що $\mathcal{D}$ є лінійним перетворенням.
2. Побудувати матрицю $D = [\mathcal{D}]$ у стандартному базисі.
3. Для $n = 6$ та $x = (3, 5, 4, 10, 9, 12)$ обчислити $\mathcal{D}(x)$ напряму та через множення $D[x]$.

Задача (IT) 4.3: Калібрування сенсорів як заміна базису

IT-коментар

У системах сенсорних вимірювань один і той самий фізичний стан може описуватися в різних координатних системах. Перехід між такими системами координат математично реалізується як заміна базису, а матриця оператора змінюється за формулою подібності.

Два датчики вимірюють один і той самий вектор стану $x \in \mathbb{R}^3$, але використовують різні системи координат. Нехай B — «фізичний» базис, B' — «вимірювальний» базис, а матриця переходу $C = T_{B \leftarrow B'}$ від координат у B' до координат у B задана:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У фізичному базисі оператор динаміки має матрицю

$$A = [\mathcal{A}]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Обчислити матрицю оператора в базисі B': $A' = [\mathcal{A}]_{B'}$.
2. Для $[x]_{B'} = (1, -1, 2)^{\mathsf{T}}$ знайти $[\mathcal{A}(x)]_{B'}$.
3. Перевірити результат через перехід у базис B: $[x]_B = C[x]_{B'}$ та $[\mathcal{A}(x)]_B = A[x]_B$.

Задача (IT) 4.4: Лінійне перетворення ознак у Data Science

IT-коментар

У задачах аналізу даних нові ознаки часто будуються як лінійні комбінації початкових. Це дозволяє перейти до іншого координатного опису об'єктів, який може бути зручнішим для класифікації, кластеризації або візуалізації.

Нехай $V = \mathbb{R}^3$, а лінійне перетворення $\mathcal{A}\colon V \to V$ задає нові ознаки як лінійні комбінації старих:

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ x_2 + x_3,\ x_1 - x_3).$$

1. Побудувати матрицю $A = [\mathcal{A}]$ у стандартному базисі.
2. Для векторів $x^{(1)} = (1, 0, 2)$, $x^{(2)} = (0, 3, -1)$, $x^{(3)} = (2, 1, 1)$ обчислити $\mathcal{A}(x^{(i)})$.
3. Для вектора $y = (1, 1, 1)$ з'ясувати, чи існує $x \in \mathbb{R}^3$ таке, що $\mathcal{A}(x) = y$. Якщо існує, знайти всі такі x.

Задача (IT) 4.5: Оператор згладжування сигналу та його матриця

IT-коментар

Згладжування є типовою операцією попередньої обробки сигналів, часових рядів і експериментальних даних. Лінійний оператор згладжування усуває локальні коливання та дозволяє виділити більш стабільну структуру даних.

Розглянемо простір $V = \mathbb{R}^n$ і оператор згладжування $\mathcal{S}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданий формулами

$$(\mathcal{S}x)_1 = x_1, \qquad (\mathcal{S}x)_k = \frac{x_{k-1} + x_k + x_{k+1}}{3} \quad (2 \le k \le n-1), \qquad (\mathcal{S}x)_n = x_n.$$

1. Довести, що $\mathcal{S}$ є лінійним перетворенням.
2. Побудувати матрицю $S = [\mathcal{S}]$ у стандартному базисі.
3. Для $n = 5$ та $x = (6, 0, 3, 9, 12)$ обчислити $\mathcal{S}(x)$.
4. Описати множину всіх $x \in \mathbb{R}^n$, для яких $\mathcal{S}(x) = x$, та знайти розмірність відповідного підпростору.

Питання для самоконтролю

1. Сформулювати означення лінійного відображення $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$.
2. Пояснити, чому дві умови $\mathcal{A}(a + b) = \mathcal{A}(a) + \mathcal{A}(b)$ та $\mathcal{A}(\alpha a) = \alpha\mathcal{A}(a)$ еквівалентні одній умові $\mathcal{A}(\alpha a + \beta b) = \alpha\mathcal{A}(a) + \beta\mathcal{A}(b)$.
3. Довести, що для нульових елементів $\theta_1 \in V_1$, $\theta_2 \in V_2$ виконується $\mathcal{A}(\theta_1) = \theta_2$.
4. Довести, що для будь-якого $a \in V_1$ виконується $\mathcal{A}(-a) = -\mathcal{A}(a)$.
5. Сформулювати і довести твердження про дію лінійного відображення на скінченну лінійну комбінацію $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$.
6. Навести приклади лінійних перетворень і для кожного вказати простір(и) та поле скалярів.
7. Сформулювати лему про існування та єдиність лінійного перетворення за заданими образами базисних векторів.
8. Пояснити, що означає твердження: «лінійне перетворення скінченновимірного простору однозначно визначається значеннями на базисі».
9. Сформулювати означення матриці $A = [\mathcal{A}]_B$ лінійного перетворення $\mathcal{A}$ у базисі $B = (a_1, \ldots, a_n)$.
10. Пояснити, чому координати $\mathcal{A}(a_j)$ в базисі B утворюють саме j-й *стовпчик* матриці A.
11. Сформулювати та довести формулу $[\mathcal{A}(x)]_B = A[x]_B$ для координат образу вектора.
12. Дати означення матриці переходу $C = T_{B \leftarrow B'}$ між базисами B і B' та пояснити зміст рівності $[x]_B = C[x]_{B'}$.

13. Вивести формулу заміни базису для матриці оператора: $[\mathcal{A}]_{B'} = C^{-1}[\mathcal{A}]_B \, C$.

14. Пояснити, чому матриці A і A' одного й того самого оператора в різних базисах є подібними.

15. Навести типові помилки при застосуванні формули $A' = C^{-1}AC$ (плутанина напряму переходу, заміна C на C^{-1}, робота з рядками замість стовпчиків) і вказати спосіб швидкої перевірки правильності обчислень.

Тема 5. Проєкції та розклад простору

Вступ

Поняття *проєкції* є одним із ключових інструментів, що поєднують геометричний зміст лінійної алгебри з практичними обчислювальними задачами. У багатьох ситуаціях вектор або набір даних містить одночасно кілька складових, але для аналізу важливо виділити лише ту частину, яка відповідає певній моделі, заданому напряму або обраному підпростору. Саме проєкція дає змогу формалізувати таке виділення: вона відокремлює потрібну компоненту від інших складових і переводить задачу в рамки чіткої лінійної процедури. Тому поняття проєкції має не лише теоретичне, а й безпосереднє практичне значення.

У геометричному та алгебраїчному сенсі проєкція спирається на ідею розкладу простору на суму підпросторів. Якщо простір подано як пряму суму двох підпросторів, то кожний вектор можна єдиним чином розкласти на дві компоненти, одна з яких належить обраному підпростору, а інша — його доповненню. У такій ситуації проєкція ставить у відповідність вектору саме його "модельну" частину і відкидає іншу компоненту. Отже, проєктування є природним продовженням теми підпросторів, суми та прямої суми і водночас дає конкретний механізм роботи з такими розкладами.

У координатному описі проєкція набуває форми лінійного оператора, який зручно задається матрицею. Якщо підпростори задані своїми базисами, то побудова проєкції зводиться до обчислення матриці оператора у фіксованому базисі простору. Після цього дія проєктора на довільний вектор описується стандартним множенням матриці на координатний стовпчик. Саме тому задача проєктування є важливою не лише з теоретичного погляду, а й як основа алгоритмічно відтворюваних процедур, що можуть бути безпосередньо реалізовані засобами програмування.

Особливе значення має властивість *ідемпотентності*: повторне застосування проєкції не змінює вже отриманого результату. Це означає, що після переходу до модельного підпростору жодне додаткове "проєктування" не створює нової інформації. Така властивість є характерною ознакою операторів проєкції й дозволяє розпізнавати їх серед інших лінійних операторів. Отже, проєкція має одночасно геометричний зміст, алгебраїчну характеристику та чітку операційну інтерпретацію.

У прикладних задачах інформатики та аналізу даних проєкції використовуються дуже широко. У методі найменших квадратів проєкція описує наближення даних елементами модельного підпростору. У задачах фільтрації шумів вона дає змогу відокремити корисний сигнал від небажаних відхилень. У машинному навчанні та Data Science підпросторові проєкції застосовують для зменшення розмірності, побудови компактних подань і виділення інформативної частини даних. У комп'ютерній графіці та геометричному моделюванні проєкції лежать в основі переходів між різними способами представлення об'єктів і координатних перетворень.

Підсумовуючи, проєкції та розклад простору становлять важливий математичний апарат для аналізу, спрощення й структуризації даних та моделей. Вони дають змогу переходити від загального опису простору до виділення його змістовно важливих компонент, а також забезпечують зручний алгоритмічний механізм для реалізації таких переходів. Саме тому опанування техніки розкладу вектора за прямою сумою підпросторів і побудови матриць проєкцій є необхідною передумовою для подальшого вивчення лінійних операторів, методів апроксимації та багатьох застосувань лінійної алгебри в сучасних інформаційних технологіях.

Короткі теоретичні відомості

Проєкції та пряма сума підпросторів

Означення 5.1: Пряма сума підпросторів

Нехай V — лінійний простір над полем F, а $U, W \subset V$ — його підпростори. Говорять, що V є *прямою сумою* підпросторів U і W та пишуть

$$V = U \oplus W,$$

якщо кожний вектор $x \in V$ можна подати у вигляді

$$x = u + w, \qquad u \in U, \quad w \in W,$$

і таке подання є єдиним.

Твердження 5.1: Критерій прямої суми двох підпросторів

Нехай $U, W \subset V$ — підпростори. Тоді наступні умови еквівалентні:

1. $V = U \oplus W$;
2. $V = U + W$ і $U \cap W = \{\theta\}$;
3. кожний $x \in V$ має єдине подання $x = u + w$, де $u \in U$, $w \in W$.

Паралельна проєкція на підпростір

Означення 5.2: Проєкція на підпростір паралельно іншому підпростору

Нехай V — лінійний простір, а $U, W \subset V$ — підпростори такі, що $V = U \oplus W$. Відображення

$$P_{U \| W} \colon V \to V$$

називається *проєкцією на* U *паралельно* W, якщо для кожного $x \in V$ з єдиного розкладу

$$x = u + w, \qquad u \in U, \quad w \in W,$$

виконується

$$P_{U \| W}(x) = u.$$

Лема 5.1: Лінійність паралельної проєкції

Проєкція $P_{U \| W}$ є лінійним оператором на V.

Теорема 5.1: Ознака проєктора

Нехай $P \colon V \to V$ — лінійний оператор. Тоді P є оператором проєктування тоді й лише тоді, коли

$$P^2 = P.$$

ІТ-коментар: проєкція як фільтр ознак у машинному навчанні

У задачах аналізу даних об'єкти зазвичай подаються як вектори ознак $x \in \mathbb{R}^n$. Виділення інформативної складової цих даних у лінійних моделях можна інтерпретувати як проєкцію вектора x на модельний підпростір U (цей підпростір може бути заданий наперед або побудований за даними). Компонента вздовж доповняльного підпростору W відповідає інформації, яку алгоритм відкидає: статистичному шуму, надлишковим або майже лінійно залежним ознакам, нерелевантним вимірюванням. Таке проєктування зменшує розмірність простору ознак, знижує обчислювальне навантаження та може зменшити ризик перенавчання моделі.

Розклад вектора за прямою сумою

Твердження 5.2: Розклад вектора за допомогою проєкції

Нехай $V = U \oplus W$ і $P = P_{U\|W}$. Тоді для кожного $x \in V$ має місце розклад

$$x = P(x) + \big(x - P(x)\big),$$

причому

$$P(x) \in U, \qquad x - P(x) \in W.$$

Зауваження 5.1: Геометричний зміст проєкції

Оператор проєкції, визначений відносно прямої суми $V = U \oplus W$, виконує відокремлення компонент: кожний вектор $x \in V$ єдиним чином подається як $x = u + w$, де $u \in U$ і $w \in W$, після чого

$$P(x) = u.$$

Отже, результат проєкції належить підпростору U, а різниця $x - P(x)$ належить підпростору W і описує відкинуту складову. Повторне проєктування не змінює результату: якщо вектор уже належить U, то $P(x) = x$.

ІТ-коментар: лінійне пригнічення шуму в сигналах і зображеннях

У цифровій обробці сигналів та зображень часто використовується модель «сигнал + шум». Якщо відомий підпростір U, у якому має лежати корисний сигнал (наприклад, простір низькочастотних компонент або простір допустимих шаблонів), то проєкція на U дозволяє пригнічувати шумові компоненти. Алгоритмічно це реалізується множенням на матрицю проєкції, що є простим та відтворюваним лінійним фільтром.

Матриця проєкції в базисі

Означення 5.3: Матриця проєкції

Нехай V — n-вимірний лінійний простір, $B = (a_1, \dots, a_n)$ — фіксований базис, а $P\colon V \to V$ — проєктор. Матрицею проєктора P у базисі B називається матриця $A = [P]_B$, що задовольняє умову

$$[P(x)]_B = A\,[x]_B \qquad \text{для всіх } x \in V.$$

Твердження 5.3: Ідемпотентність матриці проєкції

Якщо $A = [P]_B$ — матриця проєктора P у деякому базисі, то

$$A^2 = A.$$

ІТ-коментар: метод найменших квадратів як проєкційна задача

Побудова лінійної регресії з надлишковими спостереженнями зводиться до задачі мінімізації похибки між вектором вимірювань b та модельним наближенням $X\beta$ (тут X — матриця ознак, β — вектор параметрів). У стандартній евклідовій геометрії розв'язок відповідає ортогональній проєкції b на підпростір, натягнутий на стовпці матриці X. У результаті отримується найкраще в сенсі евклідової норми наближення даних у межах лінійної моделі.
Зауваження: у цьому практикумі розглядається також паралельна проєкція, визначена прямою сумою підпросторів; ортогональна проєкція є її спеціальним випадком, пов'язаним зі скалярним добутком.

Побудова матриці паралельної проєкції за базисами підпросторів

Твердження 5.4: Формула для матриці паралельної проєкції

Нехай $V = \mathbb{R}^n$ у стандартному базисі. Нехай підпростори U і W задані базисами

$$U = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_k), \qquad W = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_{n-k}), \qquad V = U \oplus W.$$

Уведемо матриці, стовпцями яких є базисні вектори:

$$B_U = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_k \end{pmatrix}, \qquad B_W = \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_{n-k} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_U & B_W \end{pmatrix}.$$

Оскільки $V = U \oplus W$, стовпці матриці B утворюють базис $\mathbb{R}^n$, тобто матриця B є оборотною. Тоді матриця паралельної проєкції $P_{U\|W}$ на U паралельно W у стандартному базисі має вигляд

$$P = B \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1}.$$

За цією формулою для будь-якого $x \in \mathbb{R}^n$ вектор $u = Px$ є його проєкцією на U, а вектор $x - u$ належить W.

ІТ-коментар: проєкції у комп'ютерній графіці

У тривимірній графіці та візуалізації застосовуються проєкції для переходу від просторових координат до площини зображення. У лінійній алгебрі це пов'язано з виділенням компонент у певному підпросторі та відкиданням компонент, що не впливають на кінцевий результат. Хоча повна модель візуалізації є афінною та проєктивною, базова ідея «залишити потрібні компоненти й відкинути решту» природно інтерпретується через оператори проєктування.

ІТ-коментар: перевірка коректності реалізації проєктора

Проєктори мають просту перевірку коректності: повторне застосування не змінює результат. Тому при реалізації в коді зручно перевіряти, що для кількох тестових векторів x виконується рівність

$$P(Px) = Px.$$

Це дає швидкий тест на помилки у побудові матриці проєкції або у реалізації множення матриці на вектор.

Алгоритми розв'язування типових задач

Алгоритм перевірки, чи є матриця матрицею проєктора

1. Обчислити матрицю A^2.
2. Порівняти матриці A^2 та A.
3. Якщо виконується рівність
$$A^2 = A,$$
то матриця A є матрицею проєктора; інакше — ні.
4. Для контролю можна перевірити для кількох векторів x, що
$$A(Ax) = Ax.$$

Алгоритм розкладу вектора за прямою сумою підпросторів

Нехай
$$U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle, \qquad W = \langle w_1, \dots, w_{n-k} \rangle, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

1. Скласти матриці
$$B_U = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_k \end{pmatrix}, \qquad B_W = \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_{n-k} \end{pmatrix},$$
а потім матрицю
$$B = \begin{pmatrix} B_U & B_W \end{pmatrix}.$$
2. Перевірити, що стовпці матриці B лінійно незалежні, тобто що
$$\operatorname{rank} B = n.$$
Практично це робиться зведенням матриці B до східчастого вигляду методом Жордана–Гауса.
3. Якщо $\operatorname{rank} B < n$, то подання простору у вигляді прямої суми $U \oplus W$ не виконується, і розклад вектора за такою схемою неможливий.
4. Якщо $\operatorname{rank} B = n$, розв'язати систему
$$B \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = x,$$
де $\alpha \in \mathbb{R}^k$, $\beta \in \mathbb{R}^{n-k}$.

5. Обчислити
$$u = B_U\alpha, \qquad w = B_W\beta.$$
6. Записати розклад
$$x = u + w,$$
де $u \in U$, $w \in W$.
7. Для контролю перевірити рівність
$$x = u + w.$$

Алгоритм побудови матриці паралельної проєкції на підпростір

Нехай
$$U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle, \qquad W = \langle w_1, \dots, w_{n-k} \rangle, \qquad \mathbb{R}^n = U \oplus W.$$

1. Скласти матриці
$$B_U = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_k \end{pmatrix}, \qquad B_W = \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_{n-k} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_U & B_W \end{pmatrix}.$$
2. Перевірити, що матриця B є оборотною, тобто
$$\operatorname{rank} B = n.$$
3. Знайти обернену матрицю B^{-1} методом Жордана–Гауса:
$$(B \mid E_n) \sim \left(E_n \mid B^{-1}\right).$$
4. Обчислити матрицю проєкції за формулою
$$P = B \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1}.$$
5. Для контролю перевірити, що
$$P^2 = P, \qquad Pu_i = u_i \ \ (i = 1, \dots, k), \qquad Pw_j = 0 \ \ (j = 1, \dots, n-k).$$

Алгоритм обчислення проєкції вектора за матрицею проєкції

Нехай задано матрицю проєкції P і вектор $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Обчислити вектор
$$u = Px.$$
2. Обчислити залишок
$$r = x - u.$$
3. Записати розклад
$$x = u + r,$$
де u є проєкцією вектора x на підпростір U, а r є складовою вздовж підпростору W.

4. Для контролю перевірити, що

$$P(u) = u, \qquad P(r) = 0.$$

Типові задачі

Задача 5.1: Перевірка ідемпотентності матриці

Розглянути матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Перевірити, чи виконується рівність $A^2 = A$.
2. Для $x = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ обчислити Ax.

Розв'язання.

Обчислимо квадрат матриці A:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Отже, виконується рівність $A^2 = A$, тобто матриця A задовольняє умову ідемпотентності.
Обчислимо Ax:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Коментар. Матриця A "залишає" перші дві координати та обнуляє третю, тому повторне застосування не змінює результат.

Задача 5.2: Контроль повторного застосування проєктора

Для матриці A із задачі 5.1:

1. перевірити рівність $A(Ax) = Ax$ для $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ та $x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$;
2. пояснити геометричний зміст умови $A^2 = A$ у термінах «повторне проєктування не змінює результату».

Розв'язання.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки в задачі 5.1 встановлено, що $A^2 = A$, то для будь-якого вектора x виконується

$$A(Ax) = A^2x = Ax.$$

Перевіримо це безпосередньо для заданих векторів.

1. Для $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ маємо

$$Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A(Ax^{(1)}) = A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = Ax^{(1)}.$$

2. Для $x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ маємо

$$Ax^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A(Ax^{(2)}) = A \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = Ax^{(2)}.$$

Геометричний зміст. Матриця A здійснює проєкцію на площину $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$, тобто "занулює" третю координату. Після першого застосування Ax уже належить цій площині, тому повторне проєктування нічого не змінює: якщо вектор уже лежить у підпросторі, на який проєктують, то його проєкція збігається з ним самим.

Задача 5.3: Паралельна проєкція в $\mathbb{R}^2$: побудова матриці

Нехай

$$U = \operatorname{span}(u), \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}, \qquad W = \operatorname{span}(w), \quad w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$$

Побудувати матрицю паралельної проєкції $P := P_{U\|W}$ у стандартному базисі, використовуючи формулу

$$P = B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1}, \qquad B = \begin{pmatrix} u & w \end{pmatrix}.$$

Для $x = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ обчислити Px.

Розв'язання.

Складемо матрицю з базисних векторів підпросторів U та W:

$$B = \begin{pmatrix} u & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо обернену матрицю. Маємо

$$\det B = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0,$$

отже B є оборотною, і формула для P застосовна. Далі

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$P = B\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}B^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тепер обчислимо проєкцію заданого вектора $x = \begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}^\mathsf{T}$:

$$Px = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Коментар. Отримана матриця P "витягує" другу координату початкового вектора і формує результат, пропорційний до базового вектора $u = (1,1)^\mathsf{T}$, що гарантує його належність підпростору U. Компонента вздовж $W = \operatorname{span}(1,0)^\mathsf{T}$ відкидається. Дійсно, маємо правильний розклад: $x = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, де $Px \in U$, а залишок $(2,0)^\mathsf{T} \in W$.

Задача 5.4: Розклад вектора за прямою сумою в $\mathbb{R}^2$

Для підпросторів U, W із задачі 5.3 знайти єдиний розклад

$$x = u_0 + w_0, \qquad u_0 \in U, \quad w_0 \in W,$$

де $x = \begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}^\mathsf{T}$. Перевірити, що $u_0 = Px$, де P — матриця проєкції з задачі 5.3.

Розв'язання.

За умовою задачі 5.3 маємо

$$U = \operatorname{span}(u), \quad u = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^\mathsf{T}, \qquad W = \operatorname{span}(w), \quad w = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^\mathsf{T}.$$

Шукаємо розклад $x = u_0 + w_0$ у вигляді

$$u_0 = \alpha u, \qquad w_0 = \beta w,$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тоді

$$x = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha\end{pmatrix}.$$

Прирівнюючи до $x = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, дістаємо систему

$$\begin{cases}\alpha + \beta = 3,\\ \alpha = 1.\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 1, \ \beta = 2.$$

Отже,

$$u_0 = \alpha u = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in U, \qquad w_0 = \beta w = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \in W,$$

і
$$x = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}.$$

Перевіримо, що $u_0 = Px$. Із задачі 5.3 матриця проєкції має вигляд
$$P = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тоді
$$Px = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = u_0.$$

Задача 5.5: Паралельна проєкція в $\mathbb{R}^3$: площина вздовж прямої

Нехай
$$U = \operatorname{span}(u_1, u_2),\ u_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^\mathsf{T},\ u_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}^\mathsf{T},\quad W = \operatorname{span}(w),\ w = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^\mathsf{T}.$$

Побудувати матрицю паралельної проєкції $P := P_{U\|W}$ у стандартному базисі за формулою
$$P = B\begin{pmatrix}I_2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}B^{-1}, \qquad B = \begin{pmatrix}u_1 & u_2 & w\end{pmatrix}.$$

Для $x = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\end{pmatrix}^\mathsf{T}$ обчислити Px.

Розв'язання.

Складемо матрицю
$$B = \begin{pmatrix}u_1 & u_2 & w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник:
$$\det B = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{vmatrix} = 1(0-1) + 1(0-1) = -2 \neq 0,$$

отже B є оборотною.

Знайдемо B^{-1}, розв'язуючи системи $By = e_i$. Отримуємо
$$B^{-1} = \begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & \frac12\\-\frac12 & \frac12 & \frac12\\\frac12 & \frac12 & -\frac12\end{pmatrix}.$$

Позначимо
$$D = \begin{pmatrix}I_2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Тоді
$$BD = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad P = BD\,B^{-1}.$$

Перемножаючи, дістаємо

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер обчислимо проєкцію вектора

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}: \qquad Px = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Коментар (перевірка). Вектор Px справді належить U, бо

$$Px = \frac{3}{2} u_1 - \frac{1}{2} u_2.$$

Задача 5.6: Перевірка властивостей матриці проєкції

Нехай P — матриця з задачі 5.5.

1. Перевірити рівність $P^2 = P$.
2. Для $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ перевірити рівність $P(Py) = Py$.

Розв'язання.

У задачі 5.5 отримано

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Обчислимо $P^2 = P \cdot P$. Перші два рядки зручно перевіряти поелементно:

$$(P^2)_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$(P^2)_{12} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2},$$

$$(P^2)_{13} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отже, перший рядок P^2 збігається з першим рядком P.

Аналогічно:

$$(P^2)_{21} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2},$$

$$(P^2)_{22} = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$(P^2)_{23} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

тобто другий рядок P^2 також збігається з другим рядком P.

Третій рядок матриці P дорівнює $(0,0,1)$, тому третій рядок P^2 дорівнює

$$(0,0,1)\,P=(0,0,1),$$

що збігається з третім рядком P. Отже, $P^2=P$.

2. Для $y=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^\mathsf{T}$ маємо

$$Py=\begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & \frac12\\ -\frac12 & \frac12 & \frac12\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac12\\ \frac12\\ 0\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$P(Py)=P\begin{pmatrix}-\frac12\\ \frac12\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12\cdot\left(-\frac12\right)+\left(-\frac12\right)\cdot\frac12+\frac12\cdot 0\\ -\frac12\cdot\left(-\frac12\right)+\frac12\cdot\frac12+\frac12\cdot 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac14-\frac14\\ \frac14+\frac14\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac12\\ \frac12\\ 0\end{pmatrix}=Py.$$

Коментар. Результат $P(Py)=Py$ є прямим наслідком того, що $P^2=P$. Геометрично вектор $u=Py$ — це проєкція вектора y на підпростір (площину моделі). Оскільки вектор u вже лежить у цій площині, повторне застосування оператора проєктування P залишає його на своєму місці.

Задача 5.7: Геометричний зміст: «модельна складова + залишок»

Нехай $U,W\subset\mathbb{R}^3$ задані як у задачі 5.5, а $P=P_{U\|W}$ — матриця паралельної проєкції на U паралельно W, побудована в задачі 5.5. Для вектора

$$x=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

виконати такі дії:

1. обчислити $u=Px$ та $r=x-u$;
2. перевірити, що $u\in U$ (тобто знайти $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ такі, що $u=\alpha u_1+\beta u_2$) і що $r\in W$ (тобто знайти $\gamma\in\mathbb{R}$ таке, що $r=\gamma w$);
3. інтерпретувати u як *модельну складову* в U, а r як *залишок* уздовж W відносно розкладу $\mathbb{R}^3=U\oplus W$;
4. пояснити, як така декомпозиція використовується в IT для зменшення розмірності та фільтрації шумів.

Розв'язання.

У задачі 5.5 побудовано матрицю проєкції

$$P=\begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & \frac12\\ -\frac12 & \frac12 & \frac12\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

а також задано

$$u_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathsf T}, \quad u_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathsf T}, \quad w = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathsf T}.$$

1. Обчислимо модельну складову $u = Px$ та залишок $r = x - u$ для $x = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathsf T}$.

$$u = Px = \begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & \frac12 \\ -\frac12 & \frac12 & \frac12 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac32\\-\frac12\\1\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$r = x - u = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac32\\-\frac12\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\0\end{pmatrix}.$$

2. Перевіримо належність $u \in U$. Шукаємо α, β з рівності $u = \alpha u_1 + \beta u_2$:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\alpha+\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac32\\-\frac12\\1\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\alpha = \frac{3}{2}, \qquad \beta = -\frac{1}{2}, \qquad \alpha + \beta = 1,$$

що узгоджується. Тому $u \in U$.

Перевіримо, що $r \in W$. Оскільки $W = \operatorname{span}(w)$, досить знайти γ з $r = \gamma w$:

$$\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\0\end{pmatrix}.$$

Звідси $\gamma = \frac12$, тобто $r = \frac12 w$ і справді $r \in W$.

3. Отже, отримано розклад

$$x = u + r, \qquad u \in U, \quad r \in W,$$

який є розкладом вектора x відносно прямої суми $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$. Вектор u є *модельною складовою* (компонентою в заданій площині U), а r є *залишком* уздовж W.

4. **IT-інтерпретація.** У задачах аналізу даних та обробки сигналів підпростір U часто задає «модель» (допустимі або очікувані структури даних), а компонента вздовж W описує відхилення від моделі (шум, завади, надлишкові компоненти). Якщо під час стискання або попередньої обробки даних знехтувати залишком r, то використовується лише $u = Px$, що відповідає зменшенню розмірності та фільтрації шумів відносно обраної моделі.

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 5.1: Перевірка ідемпотентності та дія проєктора

Для свого варіанта задано матрицю A та вектор x. Потрібно:

1. перевірити, чи виконується алгебраїчна умова проєктора $A^2 = A$;
2. обчислити Ax;
3. перевірити рівність $A(Ax) = Ax$ та коротко пояснити її зміст.

Варіанти:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$
4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$
7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$
8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$
9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$
10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$
11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$
12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$

13. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}.$
14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}.$
15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}.$

Задача 5.2: Паралельна проєкція в $\mathbb{R}^2$ та розклад вектора

Для свого варіанта задано вектори $u, w \in \mathbb{R}^2$ та вектор даних $x \in \mathbb{R}^2$. Нехай

$$U = \langle u \rangle, \qquad W = \langle w \rangle.$$

Потрібно:

1. переконатися, що u і w лінійно незалежні (еквівалентно, матриця $B = \begin{pmatrix} u & w \end{pmatrix}$ є оборотною);
2. побудувати матрицю паралельної проєкції $P = P_{U\|W}$ у стандартному базисі за формулою
$$P = B\,\mathrm{diag}(1,0)\,B^{-1}, \qquad B = \begin{pmatrix} u & w \end{pmatrix};$$
3. для заданого x обчислити модельну складову $x_U = Px$;
4. знайти залишок $w_0 = x - x_U$ і перевірити, що $w_0 \in W$ (тобто w_0 пропорційний w).

Варіанти:

1. $u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $w = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $x = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.
2. $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $w = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $x = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.
3. $u = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $x = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.
4. $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $x = \begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.
5. $u = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $x = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.
6. $u = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $w = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $x = \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.
7. $u = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $x = \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.
8. $u = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $w = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.
9. $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $w = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $x = \begin{pmatrix} -3 & 6 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.
10. $u = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $x = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.
11. $u = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $x = \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.
12. $u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $x = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.
13. $u = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $w = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $x = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.
14. $u = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $x = \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.
15. $u = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $w = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.

Задача 5.3: Паралельна проєкція в $\mathbb{R}^3$: виділення сигналу та залишку

Для свого варіанта задано підпростори

$$U = \langle u_1, u_2 \rangle \subset \mathbb{R}^3, \qquad W = \langle w \rangle \subset \mathbb{R}^3,$$

та вектор даних $x \in \mathbb{R}^3$. Потрібно:

1. переконатися, що $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ (наприклад, перевірити лінійну незалежність векторів u_1, u_2, w);
2. побудувати матрицю паралельної проєкції $P = P_{U\|W}$ розміру 3×3 за формулою
$$P = B \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1}, \qquad B = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & w \end{pmatrix};$$
3. обчислити модельну складову $x_U = Px$ та залишок $r = x - x_U$;
4. перевірити правильність побудови матриці, виконавши умову $P^2 = P$;
5. коротко пояснити, як розклад $x = x_U + r$ можна використати для стиснення даних, якщо компонентою r знехтувати.

Варіанти:

1. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $x = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^\top$.
2. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $x = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}^\top$.
3. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^\top$.
4. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $x = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}^\top$.
5. $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $x = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^\top$.
6. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $x = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}^\top$.
7. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^\top$, $x = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}^\top$.
8. $u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $x = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}^\top$.
9. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $x = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}^\top$.
10. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^\top$, $x = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$.
11. $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $x = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}^\top$.
12. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}^\top$.
13. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $x = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^\top$.
14. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $x = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}^\top$.
15. $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $x = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}^\top$.

Прикладні задачі

Зауваження. У задачах 5.1–5.4 використовується *паралельна проєкція*, визначена прямою сумою $\mathbb{R}^n = U \oplus W$. У задачах 5.5–5.8 використовується *ортогональна проєкція* в евклідовій геометрії; вона є спеціальним випадком проєкції, пов'язаним зі скалярним добутком.

Задача (IT) 5.1: Фільтр ознак як паралельна проєкція

IT-коментар

У задачах машинного навчання частину ознак можна розглядати як інформативну модельну складову, а решту — як надлишкові або другорядні компоненти. Паралельна проєкція дозволяє відокремити корисний опис об'єкта від тих компонент, які в даній лінійній моделі відкидаються.

Нехай простір ознак є $\mathbb{R}^4$, а вектор ознак об'єкта має вигляд

$$x = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$$

Нехай «модельний» підпростір (корисних ознак) задано базисом

$$U = \langle u_1, u_2 \rangle, \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T},$$

а підпростір «відкинутих компонент» (надлишкових ознак) задано базисом

$$W = \langle w_1, w_2 \rangle, \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T},\ w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$$

1. Перевірити, що $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ (зокрема, перевірити оборотність матриці $B = (u_1\, u_2\, w_1\, w_2)$).
2. Побудувати матрицю паралельної проєкції $P_{U\|W}$ у стандартному базисі. Надалі позначати $P := P_{U\|W}$.
3. Знайти $u = Px$ та залишок $r = x - u$. Пояснити, які компоненти ознак зберігаються, а які відкидаються.
4. Перевірити ідемпотентність: $P^2 = P$.

Задача (IT) 5.2: Лінійне пригнічення шуму в сигналі

IT-коментар

У цифровій обробці сигналів часто використовують модель «сигнал + шум». Якщо відомо підпростір корисних сигналів, то проєкція на нього дає змогу виділити очищену складову, а різницю інтерпретувати як шумову домішку.

Сигнал задано вектором

$$x = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3.$$

Нехай «корисний сигнал» описується підпростором

$$U = \langle u_1, u_2 \rangle, \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T},$$

а «шумова компонента» задається підпростором

$$W = \langle w \rangle, \qquad w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$$

1. Перевірити, що $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ (наприклад, перевірити лінійну незалежність векторів u_1, u_2, w).

2. Побудувати матрицю паралельної проєкції $P_{U\|W}$ у стандартному базисі. Надалі позначати $P := P_{U\|W}$.

3. Обчислити $u = Px$ (очищений сигнал) та $r = x - u$ (оцінка шуму).

4. Перевірити, що u не змінюється при повторному проєктуванні: $P(u) = u$.

5. Пояснити, як інтерпретується вектор r у моделі «сигнал + адитивний шум».

Задача (IT) 5.3: Проєкції та координатні перетворення в 3D-графіці

IT-коментар

У тривимірній графіці об'єкти задаються точками простору, але на екрані відображаються лише двовимірні координати. Лінійна проєкція моделює відкидання компоненти, пов'язаної з глибиною, і перехід від 3D-опису до 2D-подання.

У задачах 3D-графіки вершини моделі задаються векторами $x \in \mathbb{R}^3$. Нехай площина екрана моделюється підпростором

$$U = \langle e_1, e_2 \rangle,$$

а напрям «відкидання» пов'язаний із віссю глибини:

$$W = \langle e_3 \rangle,$$

де e_1, e_2, e_3 — стандартні базисні вектори в $\mathbb{R}^3$.

1. Перевірити, що $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

2. Побудувати матрицю паралельної проєкції $P_{U\|W}$ у стандартному базисі. Надалі позначати $P := P_{U\|W}$.

3. Для точок
$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}, \qquad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$
обчислити проєкції $Px^{(1)}$, $Px^{(2)}$.

4. Пояснити, які координати зберігаються, а які відкидаються, та як це пов'язано з переходом від 3D-моделі до 2D-подання на екрані.

5. Перевірити ідемпотентність матриці проєкції.

Задача (IT) 5.4: Проєктор як тест коректності обчислювальної реалізації

IT-коментар

Під час програмної реалізації лінійних перетворень важливо мати прості критерії перевірки правильності коду. Для проєктора таким критерієм є ідемпотентність: повторне застосування оператора не повинно змінювати результат.

Нехай задано матрицю P (кандидат на проєктор)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Алгебраїчно перевірити, що P є матрицею проєктора (тобто виконується умова $P^2 = P$).

2. Для векторів
$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^\mathsf{T}, \qquad x^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$
перевірити рівність $P(Px) = Px$.

3. Запропонувати короткий фрагмент перевірки (псевдокод або опис логіки дій), який можна використати у unit-тестах для валідації власної функції множення матриці на вектор.

Задача (IT) 5.5: PCA як проєкція на підпростір головних компонент (DS/ML

IT-коментар

У методі головних компонент дані проєктуються на підпростір меншої розмірності, який зберігає основну частину варіації. Така проєкція дає компактніше подання даних і дозволяє оцінити втрату інформації через норму залишку.

Нехай дані в $\mathbb{R}^3$ після центрування описуються вектором

$$x = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$$

Нехай модельний підпростір головних компонент задано двома ортонормованими векторами
$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}, \qquad q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$$

1. Побудувати матрицю ортогональної проєкції на підпростір $U = \langle q_1, q_2 \rangle$ у вигляді
$$P = QQ^\mathsf{T}, \qquad Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити $u = Px$ та залишок $r = x - u$.

3. Перевірити, що залишок r ортогональний до q_1 і q_2, тобто $q_1^\mathsf{T} r = 0$ та $q_2^\mathsf{T} r = 0$.

4. Пояснити, як інтерпретується норма $\|r\|$ як міра втрати інформації при проєктуванні (частина "енергії" або варіації, що припадає на ортогональне доповнення до U).

Задача (IT) 5.6: Лінійний шар у нейромережі як проєкція на підпростір ознак (ML/AI)

IT-коментар

Лінійний шар нейромережі формує нові ознаки як лінійні комбінації початкових. З погляду лінійної алгебри це пов'язано з проєкцією на підпростір, породжений рядками або стовпцями матриці ваг, а залишок показує частину інформації, яка в цьому шарі не використовується.

Нехай лінійний шар відображає $x \in \mathbb{R}^4$ у простір прихованих ознак $\mathbb{R}^2$ за формулою $h = Wx$. Розглянути матрицю ваг

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Для вектора ознак
$$x = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^\top$$
обчислити $h = Wx$ та інтерпретувати отримані дві приховані ознаки як агреговані компоненти початкових ознак.

2. Побудувати матрицю
$$P = W^\top (WW^\top)^{-1} W$$
та показати, що вона задає ортогональну проєкцію на підпростір $\mathrm{Row}(W) \subset \mathbb{R}^4$, натягнутий на рядки матриці W.

3. Обчислити $u = Px$ та залишок $r = x - u$. Пояснити зміст r як компоненти, що не потрапляє до підпростору $\mathrm{Row}(W)$.

4. Перевірити ідемпотентність: $P^2 = P$.

Задача (IT) 5.7: Проєкційне наближення у лінійній регресії (DS)

IT-коментар

У лінійній регресії вектор спостережень наближається елементами простору моделі, натягнутого на стовпці матриці ознак. Метод найменших квадратів реалізує саме ортогональну проєкцію на цей підпростір, а залишок характеризує похибку моделі.

Нехай матриця ознак (план експерименту) та вектор вимірювань задані як

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^\top.$$

1. Обчислити матрицю ортогональної проєкції на простір стовпців матриці X:
$$P = X(X^\top X)^{-1} X^\top.$$

2. Знайти проєкцію $\widehat{b} = Pb$ та залишок моделі $r = b - \widehat{b}$.

3. Перевірити ортогональність залишку до простору моделі, виконавши умову $X^{\mathsf{T}} r = 0$.

4. Пояснити, чому вектор $\widehat{b}$ вважається найкращим наближенням даних лінійною моделлю у сенсі методу найменших квадратів.

Задача (IT) 5.8: Зменшення розмірності ембедингів у рекомендаційних системах (DS/AI)

IT-коментар

У рекомендаційних системах ембединги користувачів та об'єктів часто стискають до меншої розмірності, щоб спростити обчислення і зменшити обсяг даних. Проєкція на підпростір меншої розмірності дає нове компактне подання, а залишок описує втрату специфічної інформації.

Нехай ембединг користувача задано вектором

$$x = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3.$$

Нехай спрощена двовимірна модель ембедингів задається ортонормованими векторами (наприклад, знайденими через SVD):

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}, \qquad q_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}.$$

1. Побудувати матрицю проєкції $P = QQ^{\mathsf{T}}$ на підпростір $U = \langle q_1, q_2 \rangle$.

2. Обчислити стиснене подання $u = Px$ та залишок $r = x - u$.

3. Інтерпретувати u як нове двовимірне подання ембединга користувача, а r — як втрату специфічної інформації при стисканні.

4. Перевірити, що побудований оператор дійсно є проєктором ($P^2 = P$).

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення прямої суми підпросторів $V = U \oplus W$. Які дві умови є еквівалентними цьому запису?

2. Поясніть, що означає розклад вектора $x = u + w$ відносно прямої суми $V = U \oplus W$. Чому такий розклад є єдиним?

3. Дайте означення проєкції на підпростір U паралельно підпростору W. Який геометричний зміст має така проєкція?

4. Що називається проєктором? Сформулюйте алгебраїчну умову, яка характеризує проєктор.

5. Поясніть зміст ідемпотентності $P^2 = P$ для оператора проєкції: що відбувається при повторному застосуванні проєкції?

6. Як означається матриця лінійного оператора в базисі? Як за матрицею $A = [P]_B$ обчислити координати $[P(x)]_B$?

7. Доведіть (або поясніть), чому для матриці проєктора в будь-якому базисі виконується рівність $A^2 = A$.

8. Нехай $V = \mathbb{R}^n$ і підпростори U, W задані базисами. Як скласти матрицю B зі стовпців базисних векторів? Яку умову треба перевірити перед застосуванням формули для проєкції?

9. Запишіть формулу для матриці паралельної проєкції $P_{U\|W}$ через матрицю B та блок-матрицю з I_k і нулем. Поясніть, чому ця формула має сенс лише за умови оборотності B.

10. Поясніть, як із системи $B\binom{\alpha}{\beta} = x$ отримати розклад $x = u + w$, де $u \in U$, $w \in W$.

11. Нехай P — матриця паралельної проєкції на U паралельно W. Які властивості мають вектори $u = Px$ та $r = x - Px$?

12. Поясніть ідею використання проєкцій у задачах фільтрації шумів та зменшення розмірності (простір ознак).

13. У чому полягає зв'язок методу найменших квадратів з ортогональною проєкцією? Який підпростір є «модельним» у цій інтерпретації?

14. Які прості тести коректності реалізації проєктора можна використати в коді? Поясніть, чому перевірка $P(Px) = Px$ є природною.

Тема 6. Лінійні оператори: ядро, образ, алгебра операторів, оборотність.

Вступ

Поняття *ядра* та *образу* лінійного перетворення є одним із ключових інструментів, що поєднують абстрактну лінійну алгебру з реальними обчислювальними задачами. Якщо в попередній темі основну увагу було зосереджено на самому понятті лінійного перетворення та його матричному поданні, то тепер у центрі розгляду перебувають підпростори, які найточніше описують внутрішню дію оператора. Саме ядро та образ дозволяють зрозуміти, яка частина інформації під час перетворення втрачається, а яка, навпаки, зберігається та переходить у результат. Тому вивчення цих понять має не лише теоретичне, а й безпосереднє практичне значення.

У математичному сенсі ядро лінійного перетворення складається з усіх векторів, які переходять у нульовий вектор, а образ — з усіх векторів, які можуть бути отримані як результат дії оператора. Таким чином, ядро характеризує внутрішню невизначеність або втрату інформації під час перетворення, тоді як образ описує множину всіх досяжних результатів. Ці два підпростори є природними характеристиками лінійного оператора і дозволяють досліджувати його не лише як правило обчислення, а як об'єкт із певною внутрішньою структурою.

У скінченновимірних просторах поняття ядра та образу тісно пов'язані з розв'язуванням систем лінійних рівнянь і матричними обчисленнями. Знаходження ядра оператора фактично зводиться до дослідження однорідної системи лінійних рівнянь, а побудова образу — до аналізу лінійної оболонки стовпців матриці оператора. У цьому контексті природно виникають поняття *рангу* та *дефекту*, які кількісно описують відповідно розмірність образу та розмірність ядра. Особливо важливим є те, що ці характеристики не є незалежними: між ними існує фундаментальний зв'язок, який дозволяє пов'язати структуру оператора з розмірністю початкового простору.

Не менш важливе місце в цій темі посідає поняття *оборотного оператора*. Оборотність означає, що оператор не втрачає інформації: кожний результат має єдиний прообраз, а отже, перетворення можна однозначно «скасувати». У матричному поданні це пов'язано з існуванням оберненої матриці, а в геометричному та алгебраїчному сенсі — з відсутністю нетривіального ядра та з повнотою образу. Саме тому дослідження оборотності дає змогу зрозуміти, коли лінійне перетворення є взаємно однозначним і коли воно може бути використане без втрати інформації.

У задачах комп'ютерних наук ядро, образ, ранг, дефект і оборотність мають виразний прикладний зміст. У машинному навчанні ранг матриці ознак відображає ефективну розмірність даних і дозволяє виявляти надлишковість ознак. У комп'ютерній графіці оборотні оператори відповідають коректним змінам координат і геометричним перетворенням без втрати просторової інформації. У чисельних методах аналіз ядра та рангу дає змогу виявляти виродженість моделей, залежності між змінними та причини нестійкості обчислювальних процедур. Отже, ці поняття є не лише елементами теорії, а й засобами аналізу реальних обчислювальних моделей.

Підсумовуючи, ядро, образ, ранг, дефект і оборотність становлять важливий математичний апарат для дослідження лінійних перетворень. Вони дозволяють описувати, які вектори зникають під дією оператора, які результати можуть бути отримані, наскільки повним є перетворення та чи можна його обернути. Саме тому опанування цих понять є необхідною передумовою для подальшого вивчення лінійних операторів та їх застосувань у сучасних комп'ютерних науках.

Короткі теоретичні відомості

Нехай V, W — лінійні простори над полем F, а

$$T : V \to W$$

— лінійне перетворення.

Ядро та образ лінійного перетворення

Означення 6.1: Ядро лінійного перетворення

Ядром лінійного перетворення T називається множина

$$\ker T = \{x \in V \mid T(x) = \theta\},$$

де θ — нульовий вектор простору W.

Твердження 6.1: Ядро є підпростором

Ядро лінійного перетворення T є підпростором простору V.

Означення 6.2: Образ лінійного перетворення

Образом лінійного перетворення T називається множина

$$\Im T = \{T(x) \mid x \in V\} \subseteq W.$$

Твердження 6.2: Образ є підпростором

Образ лінійного перетворення T є підпростором простору W.

Зауваження 6.1: Координатний зміст ядра та образу

Нехай V і W скінченновимірні, а в деяких фіксованих базисах перетворенню T відповідає матриця A. Тоді:

1. ядро $\ker T$ складається з усіх розв'язків однорідної системи

$$Ax = 0;$$

2. образ $\Im T$ є лінійною оболонкою стовпців матриці A.

Тому знаходження базису ядра зводиться до розв'язування однорідної системи, а знаходження базису образу — до виділення лінійно незалежних стовпців матриці A.

Ранг і дефект лінійного перетворення

Означення 6.3: Ранг і дефект лінійного перетворення

Нехай $T : V \to W$ — лінійне перетворення, де V скінченновимірний.

1. Рангом перетворення T називається число

$$\operatorname{rank} T = \dim \Im T.$$

2. Дефектом перетворення T називається число

$$\operatorname{def} T = \dim \ker T.$$

Теорема 6.1: Теорема про суму розмірностей ядра та образу

Нехай $T\colon V \to W$ — лінійне перетворення, де $\dim V = n$. Тоді

$$\dim \ker T + \dim \Im T = n.$$

Інакше кажучи,

$$\operatorname{def} T + \operatorname{rank} T = \dim V.$$

Зауваження 6.2: Наслідок для матриці

Якщо у фіксованих базисах перетворенню T відповідає матриця A, то

$$\operatorname{rank} T = \operatorname{rank} A.$$

Отже, ранг лінійного перетворення можна обчислювати як ранг його матриці.

Операції над лінійними операторами

Означення 6.4: Операції над лінійними операторами

Нехай $S, T\colon V \to V$ — лінійні оператори, $\lambda \in F$.

1. Сумою операторів $S + T$ називається оператор, заданий правилом

$$(S + T)(x) = S(x) + T(x).$$

2. Добутком оператора T на скаляр λ називається оператор λT, заданий правилом

$$(\lambda T)(x) = \lambda T(x).$$

3. Композицією операторів S і T називається оператор

$$(S \circ T)(x) = S(T(x)).$$

Зауваження 6.3: Матриці операцій над операторами

У фіксованому базисі:

- сумі операторів відповідає сума їхніх матриць;
- множенню оператора на скаляр відповідає множення матриці на цей скаляр;
- композиції операторів відповідає добуток їхніх матриць.

Оборотний оператор

Означення 6.5: Обернений оператор

Нехай $T\colon V \to V$ — лінійний оператор. Оператор $T^{-1}\colon V \to V$ називається оберненим до T, якщо

$$T^{-1}T = TT^{-1} = I,$$

де I — тотожний оператор на V.

Зауваження 6.4: Єдиність оберненого оператора

Якщо для оператора T існує обернений оператор, то він єдиний.

Твердження 6.3: Матриця оберненого оператора

Нехай $T\colon V \to V$ — оборотний лінійний оператор, а в деякому базисі йому відповідає матриця A. Тоді в тому самому базисі оператору T^{-1} відповідає матриця A^{-1}.

Теорема 6.2: Критерії оборотності лінійного оператора

Нехай $T\colon V \to V$ — лінійний оператор на n-вимірному просторі V, а A — його матриця в деякому базисі. Тоді еквівалентні такі умови:

1. оператор T є оборотним;
2. $\ker T = \{\theta\}$;
3. $\Im T = V$;
4. $\operatorname{rank} T = n$;
5. $\operatorname{def} T = 0$;
6. $\det A \neq 0$;
7. матриця A є оборотною.

Що слід пам'ятати

- Ядро описує всі вектори, які оператор переводить у нуль.
- Образ описує всі можливі результати дії оператора.
- Ранг показує "розмір" образу, а дефект — "розмір" ядра.
- Для скінченновимірного простору виконується рівність

$$\operatorname{rank} T + \operatorname{def} T = \dim V.$$

- Оператор оборотний тоді й тільки тоді, коли $\ker T = \{\theta\}$ або $\operatorname{rank} T = \dim V$.

Алгоритми розв'язування типових задач

Алгоритм знаходження базису ядра лінійного перетворення

Нехай лінійному перетворенню $T\colon V \to W$ у фіксованих базисах відповідає матриця A.

1. Записати однорідну систему лінійних рівнянь
$$Ax = 0.$$
2. Звести матрицю системи до східчастого або зведеного східчастого вигляду методом Жордана–Гауса.
3. Виділити базисні та вільні змінні.
4. Виразити базисні змінні через вільні.
5. Записати загальний розв'язок системи у векторній формі.
6. Виділити вектори при незалежних параметрах; вони утворюють фундаментальну систему розв'язків.
7. Зробити висновок, що знайдена система векторів є базисом ядра:
$$\ker T = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle.$$

Алгоритм знаходження базису образу лінійного перетворення

Нехай лінійному перетворенню $T\colon V \to W$ у фіксованих базисах відповідає матриця A.

1. Виписати всі стовпці матриці A:
$$A_1, A_2, \ldots, A_n.$$
2. Звести матрицю A до східчастого вигляду методом Жордана–Гауса.
3. Визначити опорні стовпці.
4. Вибрати стовпці *початкової* матриці A, що відповідають опорним стовпцям.
5. Зробити висновок, що вибрані стовпці утворюють базис образу:
$$\Im T = \langle A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r} \rangle.$$

Зауваження. Якщо перетворення задано не матрицею, а образами базисних векторів $a_1, \ldots, a_n$, то спочатку слід виписати вектори
$$T(a_1), \ldots, T(a_n),$$
а далі виділити з них лінійно незалежну підсистему, яка й утворює базис образу.

Алгоритм обчислення рангу і дефекту

Нехай $T\colon V \to W$, $\dim V = n$.

1. Знайти базис ядра $\ker T$.
2. Обчислити дефект:
$$\operatorname{def} T = \dim \ker T.$$
3. Знайти базис образу $\Im T$.
4. Обчислити ранг:
$$\operatorname{rank} T = \dim \Im T.$$
5. Перевірити теорему про суму розмірностей ядра та образу:
$$\operatorname{def} T + \operatorname{rank} T = n.$$

Практична порада. Після знаходження одного з чисел $\operatorname{rank} T$ або $\operatorname{def} T$ друге можна знайти за формулою

$$\operatorname{def} T = n - \operatorname{rank} T, \qquad \operatorname{rank} T = n - \operatorname{def} T.$$

Алгоритм перевірки оборотності лінійного оператора

Нехай $T\colon V \to V$ — лінійний оператор, $\dim V = n$, а A — його матриця в деякому базисі.

1. Знайти $\ker T$, розв'язавши систему
$$Ax = 0.$$
2. Перевірити, чи виконується умова
$$\ker T = \{\theta\}.$$
3. Або, еквівалентно, знайти ранг матриці A і перевірити, чи
$$\operatorname{rank} A = n.$$
4. Для квадратної матриці можна також перевірити умову
$$\det A \neq 0.$$
5. Якщо виконується хоча б одна з еквівалентних умов
$$\ker T = \{\theta\}, \qquad \Im T = V, \qquad \operatorname{rank} T = n, \qquad \det A \neq 0,$$
то оператор T є оборотним.
6. Якщо ці умови не виконуються, то обернений оператор не існує.

Алгоритм побудови матриці оберненого оператора

Нехай $T\colon V \to V$ — оборотний лінійний оператор, а в деякому базисі йому відповідає матриця A.

1. Перевірити, що матриця A є оборотною:
$$\det A \neq 0 \quad \text{або} \quad \operatorname{rank} A = n.$$
2. Побудувати обернену матрицю A^{-1}, наприклад, методом Жордана–Гауса: до матриці A приписати одиничну матрицю E і скласти розширену матрицю
$$(A\,|\,E)\,.$$
3. Елементарними перетвореннями рядків звести ліву частину до одиничної матриці:
$$(A\,|\,E) \sim \left(E\,\middle|\,A^{-1}\right).$$
4. Зробити висновок, що в тому самому базисі оператору T^{-1} відповідає матриця A^{-1}.

Алгоритм виконання операцій над лінійними операторами

Нехай $S, T\colon V \to V$ — лінійні оператори, а в деякому базисі їм відповідають матриці B і A відповідно.

1. Для знаходження суми операторів $S+T$ обчислити суму матриць:
$$[S+T] = B + A.$$
2. Для знаходження добутку оператора T на скаляр λ обчислити
$$[\lambda T] = \lambda A.$$
3. Для знаходження композиції $S \circ T$ обчислити добуток матриць у правильному порядку:
$$[S \circ T] = [S]\,[T] = BA.$$
4. За потреби, після виконання операцій над матрицями перейти до аналізу ядра, образу, рангу, дефекту або оборотності отриманого оператора.

Зауваження. Порядок множення матриць у композиції істотний:
$$S \circ T \neq T \circ S$$
у загальному випадку.

Практична порада

Під час розв'язування задач доцільно дотримуватися такої загальної схеми: спочатку записати матрицю оператора у фіксованих базисах, далі знайти ядро й образ, після цього — ранг і дефект, а вже потім робити висновок про оборотність і, за потреби, будувати обернену матрицю.

Типові задачі

Задача 6.1: Ядро та образ лінійного оператора

Нехай лінійний оператор $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ заданий матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. знайти базис ядра $\ker T$;
2. знайти базис образу $\Im T$;
3. обчислити ранг і дефект оператора T;
4. перевірити справедливість формули

$$\dim(\ker T) + \dim(\Im T) = 3.$$

Розв'язування.

1. Знайдемо базис ядра $\ker T$.

   За означенням треба розв'язати однорідну систему

$$Ax = 0.$$

   Маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

   Отже,

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

   Нехай $x_3 = t$. Тоді

$$x_1 = t, \qquad x_2 = -t,$$

   тому

$$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Отже,

$$\ker T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

2. Знайдемо базис образу $\Im T$.

   Зведемо матрицю A до східчастого вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Опорними є перший і другий стовпці. Тому базис образу утворюють відповідні стовпці початкової матриці:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Отже,

$$\Im T = \langle a_1, a_2 \rangle.$$

3. Оскільки образ двовимірний, то

$$\operatorname{rank} T = 2.$$

   Оскільки ядро одновимірне, то

$$\operatorname{def} T = 1.$$

4. Маємо

$$\dim(\ker T) = 1, \qquad \dim(\Im T) = 2,$$

   тому

$$\dim(\ker T) + \dim(\Im T) = 1 + 2 = 3.$$

   Отже, формула виконується.

Відповідь:

$$\ker T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \Im T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\operatorname{rank} T = 2, \qquad \operatorname{def} T = 1, \qquad \dim(\ker T) + \dim(\Im T) = 3.$$

Задача 6.2: Геометричний зміст ядра

Нехай лінійний оператор $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ заданий матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. знайти базис ядра $\ker T$;

2. знайти базис образу $\Im T$;

3. обчислити ранг і дефект оператора T;

4. пояснити геометрично, які напрями в $\mathbb{R}^3$ переходять у нуль;
5. з'ясувати, чи можна за вектором $T(x)$ однозначно відновити початковий вектор x.

Розв'язування.

1. Знайдемо базис ядра $\ker T$.

   Розв'язуємо систему
   $$Ax = 0, \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$
   Матриця вже має зведений східчастий вигляд, тому
   $$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$
   Нехай $x_3 = t$. Тоді
   $$x_1 = -t, \qquad x_2 = -t,$$
   отже
   $$x = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Тому
   $$\ker T = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

2. Знайдемо базис образу $\Im T$.

   Стовпці матриці A мають вигляд
   $$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Перші два стовпці лінійно незалежні, а
   $$a_3 = a_1 + a_2.$$
   Отже,
   $$\Im T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2.$$

3. Оскільки $\dim \Im T = 2$, маємо
   $$\operatorname{rank} T = 2.$$
   Оскільки $\dim \ker T = 1$, маємо
   $$\operatorname{def} T = 1.$$

4. Геометрично ядро є прямою в $\mathbb{R}^3$, що проходить через початок координат і натягується на вектор
$$(-1, -1, 1).$$
Отже, у нуль переходять усі вектори вигляду
$$t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

5. Оскільки
$$\ker T \neq \{0\},$$
оператор T не є ін'єктивним. Отже, за вектором $T(x)$ неможливо однозначно відновити початковий вектор x.

Відповідь:
$$\ker T = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \Im T = \mathbb{R}^2,$$
$$\operatorname{rank} T = 2, \qquad \operatorname{def} T = 1.$$
Геометрично в нуль переходять усі вектори напряму $(-1, -1, 1)$. Початковий вектор за образом однозначно відновити не можна.

Задача 6.3: Алгебра лінійних операторів: сума, різниця, композиція

Нехай задано два лінійні оператори $T, S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:
$$T(x) = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$S(x) = Bx, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. знайти матрицю суми операторів $T + S$;
2. знайти матрицю різниці операторів $T - S$;
3. знайти матрицю композиції $S \circ T$;
4. для оператора $S \circ T$ обчислити ранг;
5. знайти базис ядра $\ker(S \circ T)$;
6. пояснити, чому в загальному випадку композиція операторів не є комутативною.

Розв'язування.

1. Маємо
$$[T+S] = A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Маємо
$$[T-S] = A-B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Оскільки
$$(S \circ T)(x) = S(T(x)),$$
то
$$[S \circ T] = BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Позначимо
$$C = BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Тоді
$$C \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Отже,
$$\operatorname{rank}(S \circ T) = 3.$$

5. Оскільки матриця C має повний ранг, однорідна система $Cx = 0$ має лише нульовий розв'язок. Тому
$$\ker(S \circ T) = \{0\}.$$
Отже, ядро є тривіальним і базису не має.

6. Для порівняння обчислимо
$$[T \circ S] = AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Оскільки
$$BA \neq AB,$$
то
$$S \circ T \neq T \circ S.$$
Отже, композиція операторів у загальному випадку не є комутативною.

Відповідь:

$$[T+S]=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&2\\1&0&2\end{pmatrix},\qquad [T-S]=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},$$

$$[S\circ T]=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\1&0&2\end{pmatrix},\qquad \operatorname{rank}(S\circ T)=3,\qquad \ker(S\circ T)=\{0\}.$$

У загальному випадку композиція операторів не є комутативною, бо зазвичай $BA\neq AB$.

Задача 6.4: Оборотний оператор

Нехай лінійний оператор $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ заданий матрицею

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

1. перевірити, чи є оператор T оборотним;
2. якщо оператор оборотний, знайти матрицю оберненого оператора T^{-1};
3. перевірити правильність результату, обчисливши AA^{-1};
4. пояснити, що означає оборотність оператора з точки зору перетворення координат.

Розв'язування.

1. Перевіримо оборотність оператора T.

   Зведемо матрицю A методом Жордана–Гауса:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&-2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

   Отже,

$$\operatorname{rank}A=3,$$

   тому оператор T є оборотним.

2. Побудуємо матрицю A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&-2&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&3&-1&2&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right).$$

Тому
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3. Перевірка:
$$AA^{-1} = E.$$
Отже, знайдена матриця є правильною.

4. Оборотність означає, що перетворення координат є взаємно однозначним: за новими координатами можна однозначно відновити початкові.

Відповідь:
$$T \text{ є оборотним}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad AA^{-1} = E.$$

Задача 6.5: Лінійні перетворення у рекомендаційній системі

IT-коментар

У рекомендаційних системах лінійні перетворення використовують для побудови агрегованих характеристик користувача, скорочення кількості ознак і формування компактного подання профілю для подальшого ранжування. Ядро композиції показує, які зміни в початковому профілі система вже не розрізняє після обробки. Аналіз рангу та образу дозволяє оцінити, скільки незалежної інформації зберігається у фінальному поданні даних.

У рекомендаційній системі профіль користувача описується вектором
$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^4,$$
де

- x_1 — середня кількість переглядів рекомендованого контенту за день;
- x_2 — середня кількість кліків за день;
- x_3 — середній час взаємодії з контентом;
- x_4 — узагальнена оцінка зацікавленості користувача.

Перед побудовою рекомендацій цей профіль проходить два етапи лінійної обробки:
$$T_1(x) = A_1 x, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$T_2(y) = A_2 y, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо композицію операторів

$$T = T_2 \circ T_1.$$

1. знайти матрицю оператора T;
2. знайти базис ядра $\ker T$;
3. знайти базис образу $\Im T$;
4. обчислити ранг і дефект оператора T;
5. з'ясувати, чи можна за результатом $T(x)$ однозначно відновити початковий профіль користувача x;
6. пояснити, на якому етапі обробки потенційно втрачається інформація.

Розв'язування.

1. Знайдемо матрицю композиції:

$$A = A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Знайдемо ядро $\ker T$, розв'язавши систему $Ax = 0$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Отже,

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

   Нехай

$$x_3 = s, \qquad x_4 = t.$$

   Тоді

$$x_1 = -s, \qquad x_2 = -s - t,$$

   і

$$x = s(-1, -1, 1, 0)^\mathsf{T} + t(0, -1, 0, 1)^\mathsf{T}.$$

   Тому

$$\ker T = \left\langle (-1, -1, 1, 0)^\mathsf{T}, (0, -1, 0, 1)^\mathsf{T} \right\rangle.$$

3. Із зведеної матриці видно, що опорними є перший і другий стовпці. Тому базис образу утворюють відповідні стовпці початкової матриці:

$$a_1 = (1, 1, 2)^\mathsf{T}, \qquad a_2 = (1, 2, 1)^\mathsf{T}.$$

   Отже,

$$\Im T = \langle a_1, a_2 \rangle.$$

4. Маємо
$$\operatorname{rank} T = 2, \qquad \operatorname{def} T = 2.$$

5. Оскільки
$$\ker T \neq \{0\},$$
оператор T не є ін'єктивним. Отже, за результатом $T(x)$ початковий профіль користувача однозначно відновити не можна.

6. У матриці
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
третій рядок дорівнює сумі перших двох, тому
$$\operatorname{rank} A_1 = 2.$$
Отже, інформація втрачається вже на першому етапі агрегування характеристик.

Відповідь:
$$T(x) = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\ker T = \left\langle (-1,-1,1,0)^{\mathsf{T}}, (0,-1,0,1)^{\mathsf{T}} \right\rangle, \qquad \Im T = \left\langle (1,1,2)^{\mathsf{T}}, (1,2,1)^{\mathsf{T}} \right\rangle,$$
$$\operatorname{rank} T = 2, \qquad \operatorname{def} T = 2.$$
Початковий профіль однозначно відновити не можна; інформація втрачається вже на етапі T_1.

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 6.1: Ядро, образ, ранг і дефект лінійного оператора

Для свого варіанта задано матрицю лінійного оператора $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = Ax$. Потрібно:

1. знайти базис ядра $\ker T$;
2. знайти базис образу $\Im T$;
3. обчислити ранг і дефект оператора T;
4. перевірити формулу
$$\dim(\ker T) + \dim(\Im T) = 3.$$

Варіанти:

1.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

8.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

10.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

11.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

13.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

14.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

15.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 6.2: Алгебра лінійних операторів: сума, різниця, композиція

Для свого варіанта задано два лінійні оператори $T, S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T(x) = Ax, \qquad S(x) = Bx.$$

Потрібно:

1. знайти матрицю суми операторів $T + S$;
2. знайти матрицю різниці операторів $T - S$;
3. знайти матрицю композиції $S \circ T$;
4. обчислити ранг оператора $S \circ T$;
5. знайти базис ядра $\ker(S \circ T)$;
6. з'ясувати, чи виконується рівність $S \circ T = T \circ S$.

Варіанти:

1.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

13.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

15.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 6.3: Оборотний оператор та матриця оберненого оператора

Для свого варіанта задано лінійний оператор $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T(x) = Ax.$$

Потрібно:

1. перевірити, чи є оператор T оборотним;
2. якщо оператор оборотний, знайти матрицю оберненого оператора T^{-1};
3. перевірити правильність результату, обчисливши AA^{-1};
4. якщо оператор не є оборотним, пояснити, чому обернений оператор не існує.

Варіанти:

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

13.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

14.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

15.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Прикладні задачі

Задача (IT) 6.1: Надлишкові ознаки у наборі даних (IT)

IT-коментар

У задачах формування простору ознак наявність ненульового ядра свідчить про те, що модель є "сліпою" до певних комбінацій даних: різні вхідні вектори після перетворення склеюються в один. Це чіткий індикатор лінійної залежності або надмірності ознак. На практиці такий аналіз застосовують для ефективного відбору ознак (*feature selection*), зниження розмірності та оптимізації конвеєра підготовки даних (*data preprocessing pipeline*).

Під час підготовки даних для моделі кожний об'єкт описується вектором ознак $x \in \mathbb{R}^4$. Попередня лінійна трансформація задається оператором

$$T(x) = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Знайдіть базис ядра $\ker T$.
2. Знайдіть базис образу $\Im T$.
3. Обчисліть $\operatorname{rank} T$ та дефект.
4. Поясніть, які ознаки можуть бути надлишковими.

Задача (IT) 6.2: Оборотність перетворення координат у графічному рушії (Computer Graphics)

IT-коментар

У 3D-графіці оборотність матриці означає можливість виконати коректне обернене перетворення (*inverse transform*) без втрати геометричних даних. Це основа графічного конвеєра: оборотні матриці дозволяють переходити від локальних координат об'єкта до світових і навпаки. Вони є базою для перетворень камери (*camera transforms*), виявлення зіткнень (*collision detection*), а також взаємодії з користувачем, наприклад, трасування променя (*raycasting*) — переведення 2D-кліку екрана у 3D-простір. Необоротне перетворення призводить до зменшення розмірності образу та втрати частини геометричної інформації про об'єкт.

У графічному рушії 3D-об'єкт трансформується матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Обчисліть $\det A$ та $\operatorname{rank} A$.
2. Знайдіть $\ker T$, де $T(x) = Ax$.
3. З'ясуйте, чи є оператор T оборотним.

4. Якщо оператор оборотний, знайдіть A^{-1}.
5. Поясніть, що означає оборотність цього перетворення для задачі відновлення початкової позиції об'єкта.

Задача (IT) 6.3: Композиція перетворень у робототехніці

IT-коментар

У робототехніці композиція операторів моделює послідовність перетворень: перехід між системами координат, корекцію сенсорних даних і перерахунок команд керування. Якщо композиція має ненульове ядро, то різні вхідні конфігурації або керуючі команди можуть давати один і той самий результат. Це означає втрату інформації про стан системи та може спричиняти проблеми під час розв'язування задач оберненої кінематики (*inverse kinematics*) і побудови стабільних алгоритмів керування.

Положення маніпулятора описується вектором $x \in \mathbb{R}^3$. Спочатку застосовується лінійне перетворення

$$T(x) = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а потім перетворення

$$S(y) = By, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо композицію операторів

$$(S \circ T)(x) = S(T(x)).$$

1. Знайдіть матрицю композиції $S \circ T$.
2. Обчисліть ранг оператора $S \circ T$.
3. Знайдіть базис ядра $\ker(S \circ T)$.
4. Знайдіть дефект оператора $S \circ T$.
5. З'ясуйте, чи є оператор $S \circ T$ оборотним.
6. Поясніть, що означає наявність ненульового ядра композиції для задач керування маніпулятором. Чи можна за кінцевим положенням робота однозначно відновити початковий вектор керування?

Задача (IT) 6.4: Лінійне зменшення розмірності (Data Science)

IT-коментар

У Data Science оператор зменшення розмірності стискає дані до компактнішого подання. Ядро показує напрями, які після проєкції втрачаються повністю, тобто стають нерозрізненними для подальшого алгоритму. Це безпосередньо пов'язано зі стисненням ознак, побудовою вкладених подань (*embeddings*) та аналізом того, яка частина інформації зберігається після зменшення розмірності (*dimension reduction*).

Для зменшення розмірності даних використовується лінійне відображення

$$T(x) = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Знайдіть базис ядра $\ker T$.
2. Знайдіть базис образу $\Im T$.
3. Обчисліть ранг і дефект оператора T.
4. З'ясуйте, чи можна за вектором $T(x)$ однозначно відновити початковий вектор $x \in \mathbb{R}^4$.
5. Поясніть, як ядро пов'язане з втратою інформації під час зменшення розмірності.

Задача (IT) 6.5: Лінійне кодування повідомлення: стискаюче та з надмірністю

IT-коментар

Ця задача порівнює дві типові ситуації в IT. У випадку стискаючого кодування відображення йде з простору більшої розмірності в простір меншої розмірності, тому частина інформації неминуче втрачається. У випадку кодування з надмірністю, навпаки, код має більшу розмірність, ніж повідомлення, тому за нульового ядра початкове повідомлення можна однозначно відновити з коду. Саме така ідея лежить в основі побудови завадостійких кодів і схем контролю помилок.

Розглянемо дві моделі лінійного кодування повідомлень.

(а) **Стискаюче кодування.**

Кодер задається оператором

$$T(x) = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^4.$$

(а) Знайдіть ядро $\ker T$.

(б) Обчисліть $\operatorname{rank} T$ і дефект оператора T.

(в) Чи можна однозначно відновити початкове повідомлення $x \in \mathbb{R}^4$ за кодом $T(x) \in \mathbb{R}^3$?

(г) Поясніть відповідь як обчисленнями, так і з міркувань розмірності простору.

(b) **Кодування з надмірністю.**

Кодер задається оператором

$$S(x) = Bx, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^3.$$

(а) Знайдіть ядро $\ker S$.

(б) Обчисліть $\operatorname{rank} S$ і дефект оператора S.

(в) Чи можна однозначно відновити початкове повідомлення $x \in \mathbb{R}^3$ за кодом $S(x) \in \mathbb{R}^4$?

(г) З'ясуйте, чи є оператор S оборотним на свій образ.

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення ядра лінійного перетворення. Який геометричний та інформаційний зміст має ця множина?
2. Доведіть, що ядро лінійного перетворення є підпростором векторного простору.
3. Дайте означення образу лінійного перетворення. Чим відрізняється образ перетворення від його простору прибуття (кодомену)?
4. Доведіть, що образ лінійного перетворення є підпростором відповідного векторного простору.
5. Як алгоритмічно знайти базис ядра лінійного перетворення, якщо воно задане матрицею?
6. Як знайти базис образу лінійного перетворення за його матрицею? Яких типових помилок слід уникати при виборі стовпців?
7. Дайте означення рангу лінійного перетворення. Як він пов'язаний з рангом матриці цього перетворення?
8. Дайте означення дефекту лінійного перетворення.
9. Сформулюйте теорему про суму розмірностей ядра та образу. Як цей зв'язок між рангом, дефектом і розмірністю простору допомагає на практиці?
10. Дайте означення оборотного (оберненого) лінійного оператора.
11. Чи для кожного лінійного оператора існує обернений оператор? Поясніть.
12. Сформулюйте основні еквівалентні критерії оборотності лінійного оператора.

13. Як пов'язана оборотність оператора з його ядром та дефектом?
14. Як пов'язана оборотність оператора з рангом його матриці?
15. Який зв'язок між оборотністю оператора і визначником його матриці?
16. Опишіть алгоритм побудови матриці оберненого оператора за допомогою методу Гауса.
17. Які алгебраїчні операції визначені над лінійними операторами?
18. Як у координатному (матричному) описі виконуються операції додавання, множення на скаляр та композиції лінійних операторів?
19. Чи є операція композиції лінійних операторів комутативною ($S \circ T = T \circ S$)? Поясніть свою відповідь.
20. Наведіть приклади прикладних задач (в IT, Data Science, комп'ютерній графіці), у яких використовуються поняття ядра, образу, рангу або оборотності лінійних перетворень.

Перелік позначень, символів і скорочень

У цьому розділі подано основні позначення, символи, скорочення та назви букв латинського і грецького алфавітів, що використовуються в посібнику. Зазначені позначення вживаються в тексті без додаткових пояснень. Перелік покликаний уніфікувати записи, полегшити читання математичного тексту та забезпечити зручне звернення до вживаної символіки.

Множини чисел:

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

$\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел;

$\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ — поле комплексних чисел;

$\mathbb{R}^n$ — n-вимірний дійсний лінійний простір;

$\Re z$, $\Im z$ — відповідно дійсна та уявна частини комплексного числа z.

Простори, підпростори, базиси:

F — поле скалярів;

V, W, U, L — лінійні простори або підпростори;

θ — нульовий вектор;

$e_1, \dots, e_n$ — стандартний базис простору $\mathbb{R}^n$;

$B = (a_1, \dots, a_n)$ — базис простору;

$[x]_B$ — координатний стовпчик вектора x у базисі B;

$\dim V$ — розмірність простору V;

$\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ — лінійна оболонка векторів $a_1, \dots, a_k$;

$U + W$ — сума підпросторів U і W;

$U \oplus W$ — пряма сума підпросторів U і W.

Лінійні перетворення та оператори:

$T, S, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ — лінійні перетворення або лінійні оператори;

$\ker T$ — ядро лінійного перетворення T;

$\Im T$ — образ лінійного перетворення T;

$\operatorname{rank} T$ — ранг лінійного перетворення T;

$\operatorname{def} T$ — дефект лінійного перетворення T;

$[T]_B$ або $[\mathcal{A}]_B$ — матриця лінійного перетворення в базисі B;

I — тотожний оператор;

T^{-1} — обернений оператор;

$P_{U\|W}$ — проєкція на U паралельно W.

Матриці та пов'язані позначення:

$M_{m\times n}(F)$ — простір матриць розміру $m \times n$ над полем F;

$M_n(F)$ — простір квадратних матриць порядку n;

E_n — одинична матриця порядку n;

A^{T} — транспонована матриця до A;

A^{-1} — обернена матриця до A;

$\det A$ — визначник матриці A;

$\operatorname{rank} A$ — ранг матриці A;

$T_{B_1\leftarrow B_2}$ — матриця переходу від базису B_2 до базису B_1.

Простори многочленів і функцій:

$F[x]$ — простір многочленів над полем F;

$F_n[x]$ — простір многочленів степеня не вище n;

$\mathbb{R}_n[x]$ — простір многочленів степеня не вище n з дійсними коефіцієнтами;

$C([a,b])$ — простір неперервних функцій на відрізку $[a,b]$;

$C^{(m)}([a,b])$ — простір функцій, що мають на $[a,b]$ неперервні похідні до порядку m включно.

Скорочення:

СЛАР — система лінійних алгебраїчних рівнянь;

ФСР — фундаментальна система розв'язків;

IT — інформаційні технології;

DS — Data Science;

ML — Machine Learning;

AI — Artificial Intelligence;

PCA — Principal Component Analysis;

SVD — Singular Value Decomposition.

Логічні та службові позначення:

$:=$ — дорівнює за означенням;

$\Rightarrow$ — логічно випливає;

$\Leftrightarrow$ — еквівалентно;

$\sim$ — пов'язано еквівалентними перетвореннями Жордана–Гауса;

$\forall$ — для всіх;

$\exists$ — існує.

Латинський алфавіт

Букви	Назви букв	Букви	Назви букв	Букви	Назви букв
A a	а	J j	йот	S s	ес
B b	бе	K k	ка	T t	те
C c	це	L l	ель	U u	у
D d	де	M m	ем	V v	ве (фау)
E e	е	N n	ен	W w	дубль-ве
F f	еф	O o	о	X x	ікс
G g	ге	P p	пе	Y y	ігрек
H h	аш	Q q	ку	Z z	зет
I i	і	R r	ер		

Грецький алфавіт

Букви	Назви букв	Букви	Назви букв
$A\ \alpha$	альфа	$N\ \nu$	ню
$B\ \beta$	бета	$\Xi\ \xi$	ксі
$\Gamma\ \gamma$	гамма	$O\ o$	омікрон
$\Delta\ \delta$	дельта	$\Pi\ \pi$	пі
$E\ \epsilon$	епсилон	$P\ \rho$	ро
$Z\ \zeta$	дзета	$\Sigma\ \sigma$	сигма
$H\ \eta$	ета	$T\ \tau$	тау
$\Theta\ \theta$	тета	$\Upsilon\ \upsilon$	іпсилон
$I\ \iota$	йота	$\Phi\ \varphi$	фі
$K\ \kappa$	каппа	$X\ \chi$	хі
$\Lambda\ \lambda$	ламбда	$\Psi\ \psi$	псі
$M\ \mu$	мю	$\Omega\ \omega$	омега

Список використаних джерел

[1] Безущак О. О., Ганюшкін О. Г. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри (векторні простори): для студентів університетів. — К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. — 257 с.

[2] Безущак О. О., Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. А. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри: навч. посіб. — К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016. — 255 с.

[3] Безущак О. О., Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. А. Навчальний посібник з лінійної алгебри для студентів механіко-математичного факультету. — К.: ВПЦ "Київський університет", 2019. — 224 с.

[4] Булдигін В. В., Жук В. А., Рущицька С. О., Ясінський В. В. Збірник задач з аналітичної геометрії та векторної алгебри: навч. посіб. — К.: Вища шк., 1999. — 192 с.

[5] Булдигін В. В., Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посіб. / за ред. проф. В. В. Булдигіна. — К.: ТВіМС, 2011. — 224 с.

[6] Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. А., Овсієнко С. А. Алгоритми лінійної алгебри: для студентів механіко-математичного факультету. — К.: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2015. — 44 с.

[7] Довгай Б. В. Лінійні простори: конспект лекцій. — К.: Факультет комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2025. — 108 с.

[8] Калужнін Л., Вишенський В., Шуб Ц. Лінійні простори. — К.: Вища школа, 1971. — 344 с.

[9] Маринич О. В., Проскурін Д. П. Скінченновимірний лінійний аналіз. Теорія визначників. — К.: Центр навчальної літератури, 2014. — 207 с.

[10] Рудавський Ю. К., Костробій П. П., Луник Х. П., Уханська Д. В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посіб. — Львів: Львівська політехніка, 1999. — 262 с.

[11] Травкін Ю. І. Лінійна алгебра і аналітична геометрія: навч. посіб. — Х.: Майдан, 2009. — 416 с.

[12] Чарін В. С. Лінійна алгебра: підручник. — К.: Техніка, 2004. — 416 с.

[13] Boyd S., Vandenberghe L. Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares. — Cambridge: Cambridge University Press, 2018. — 474 p.

[14] Deisenroth M. P., Faisal A. A., Ong C. S. Mathematics for Machine Learning. — Cambridge: Cambridge University Press, 2020. — 390 p.

[15] Fessler J. A., Nadakuditi R. R. Linear Algebra for Data Science, Machine Learning, and Signal Processing. — New York, NY: Cambridge University Press, 2024. — 452 p.

[16] Lay D. C. Linear Algebra and Its Applications. — 3rd updated ed. — Boston, MA: Addison-Wesley, 2005. — 576 p.

[17] Meyer C. D. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. — Philadelphia, PA: SIAM, 2000. — 718 p.

[18] Strang G. Linear Algebra and Its Applications. — 4th ed. — Cengage Learning, 2006.

[19] Strang G. Linear Algebra and Learning from Data. — Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 2019. — 432 p.

Предметний покажчик