Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

Богдан Довгай

Лінійні простори

Конспект лекцій

Київ
2025

УДК 512.64

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук, професор Ігор Самойленко;
доктор фізико-математичних наук Ірина Розора

Рекомендовано до друку вченою радою
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(протокол № 3 від 14 жовтня 2025 року)
Ухвалено науково-методичною комісією
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(протокол № 3 від 13 жовтня 2025 року)

Довгай Б. В.
Лінійні простори: Конспект лекцій. – 2025. – 108 с.

Розглянуто алгебраїчні структури, зокрема поле, лінійні простори над полями та лінійні перетворення цих просторів. Наведені означення та основні властивості алгебраїчних структур. Вивчаються лінійні простори, підпростори, операції над ними. Досліджуються лінійні оператори на векторних просторах, а також їх будова над алгебраїчно замкненим полем.

Для студентів математичних спеціальностей університетів.

ЗМІСТ

Вступ

Поняття лінійного простору є одним із фундаментальних у сучасній математиці. Воно узагальнює уявлення про вектори, що походять із геометрії та фізики, і переносить їх у абстрактні контексти, де важливими є не конкретні властивості елементів, а структура операцій над ними. Лінійні простори забезпечують універсальний апарат для дослідження об'єктів, що допускають додавання та множення на скаляри, і саме тому відіграють центральну роль у лінійній алгебрі та суміжних галузях математики.

Перший розділ присвячено алгебраїчним структурам, таким як напівгрупа, група, кільце, поле, які формують теоретичне підґрунтя для строгого визначення та дослідження просторових об'єктів. Ці структури дозволяють розглядати лінійні простори не ізольовано, а як частину ширшої системи абстрактної алгебри.

В другому розділі досліджуються лінійні, або векторні, простори, які дозволяють узагальнити й систематизувати знання про вектори, матриці та системи лінійних рівнянь, вийшовши за межі звичного тривимірного простору. Вивчення їхніх властивостей дає можливість зрозуміти глибинні закономірності побудови математичних моделей.

В третьому розділі вивчаються лінійні перетворення, або лінійні оператори, що відкриває шлях до розуміння таких ключових понять, як ядро, образ, власні значення та власні вектори. Дослідження лінійних перетворень приводить до фундаментальних понять діагоналізації та жорданової форми, що мають ключове значення як у теоретичній, так і в прикладній математиці.

Видання адресовано студентам математичних спеціальностей університетів.

Розділ 1

Алгебраїчні структури

Основними алгебраїчними структурами є:

1) напівгрупа; 2) група; 3) кільце; 4) поле.

1. Поняття бінарної операції

Нехай X — деяка непорожня множина. Довільне фіксоване відображення $\tau : X \times X \to X$ називається бінарною алгебраїчною операцією, тобто іншими словами, операція τ кожній упорядкованій парі (a, b) елементів $a, b \in X$ ставить у відповідність елемент $\tau(a, b) \in X$. Алгебраїчну операцію часто записують так $a\tau b$ і для позначення алгебраїчної операції користуються спеціальними символами $+$, $-$, $\cdot$, $\circ$, $*$.

На даній множині X можна ввести різні алгебраїчні операції. Наприклад, на множині $\mathbb{Z}$ вводять операції $+$, $-$, $\cdot$; для $m, n \in \mathbb{Z}$: $m \circ n = m + n - mn$, $m * n = -m - n$.

Множина X з введеною на ній операцією $*$ утворюють пару $(X, *)$, яка називається алгебраїчною системою і при цьому кажуть, що операція $*$ визначає на множині X алгебраїчну структуру.

Нехай на множині X вводиться операція $*$. Елемент $e \in X$ називають одиничним, або нейтральним, якщо для довільного $a \in X$: $a * e = e * a = a$. Припустимо в алгебраїчній системі $(X, *)$ існує e і при цьому для деякого елемента $e' \in X$ також виконується для довільного $a \in X$: $a * e' = e' * a = a$. Тоді $e = e * e' = e'$, тобто $e = e'$. Таким чином, якщо одиничний елемент існує, то він єдиний.

Нехай на множині X вводиться операція $*$. Якщо виконується для довільних $a, b, c \in X$: $(a * b) * c = a * (b * c)$, то $*$ — асоціативна і вся алгебраїчна структура $(X, *)$ також називається асоціативною. Якщо виконується $a * b = b * a$, то $*$ називається комутативною і вся алгебраїчна структура — комутативна. Властивості асоціативності та комутативності незалежні, тобто існують алгебраїчні структури комутативні та не асоціативні, і навпаки. Наприклад, $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць з дійсними коефіцієнтами, на якій введено операцію множення матриць. Зрозуміло, що ця операція асоціативна, але не комутативна. Навпаки, раніше на множині $\mathbb{Z}$ ми ввели операцію $m * n = -m - n$. Зрозуміло, що ця операція комутативна, але $(1 * 2) * 3 = (-1 - 2) * 3 = (-3) * 3 = -3 - 3 = -6$. З іншого боку $1 * (2 * 3) = 1 * (-2 - 3) = 1 * (-5) = -1 - (-5) = -1 + 5 = 4$. Тобто операція $*$ не асоціативна.

2. Поняття напівгрупи і приклади

Означення 1. Напівгрупою називається довільна асоціативна алгебраїчна структура, тобто напівгрупа — це така непорожня множина X, для елементів якої введено операцію, яка задовольняє умові асоціативності.

Будемо позначати операцію в напівгрупі $\cdot$ (множення). Нехай S — напівгрупа. Підмножина S' множини S називається піднапівгрупою, якщо для довільних $a, b \in S' : a{\cdot}b \in S'$. Тобто піднапівгрупа замкнена відносно операції самої напівгрупи і сама піднапівгрупа S' утворює напівгрупу відносно тієї ж операції.

Якщо напівгрупа M містить одиничний елемент e, то вона називається напівгрупою з одиницею або моноїдом.

Підмножина M' моноїда M називається підмоноїдом, якщо:

1) для довільних $a, b \in M' : a \cdot b \in M'$;

2) $e \in M'$.

Нехай M — моноїд, тобто напівгрупа з одиницею e. Припустимо для даного елемента $a \in M$ існує $b \in M : ab = ba = e$. Тоді елемент a називається оборотним. Припустимо для даного елемента a існує ще один елемент $b' \in M$ такий, що $ab' = b'a = e$. Тоді виконується $b = eb = (b'a)b = b'(ab) = b'e = b'$, отже $b = b'$ і такий елемент b єдиний. Елемент

$b \in M$, для якого $ab = ba = e$ називається оберненим для елемента a і позначається $b = a^{-1}$. Як ми з'ясували, якщо обернений елемент існує, то він єдиний, і зрозуміло, що $(a^{-1})^{-1} = a$.

Припустимо для елементів $x,\ y \in M$ існують обернені елементи x^{-1} і y^{-1} і доведемо, що для елемента xy також існує обернений і рівний $y^{-1}x^{-1}$: $(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = xex^{-1} = xx^{-1} = e$, аналогічно $(y^{-1}x^{-1})(xy) = e$.

Таким чином, множина всіх оборотних елементів в напівгрупі з одиницею e утворює напівгрупу з одиницею e.

Елемент a з напівгрупи S називається ідемпотентним, якщо $a^2 = a$.

Приклади напівгруп

1) Припустимо $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел і $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}\backslash\{1\}$, і на цій множині $\mathbb{N}_1$ розглянемо операцію $\cdot$ (множення). Зрозуміло, що множина $\mathbb{N}_1$ з операцією $\cdot$ утворює комутативну напівгрупу, але без одиничного елемента.

2) Беремо множину $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ і операцію $+$. Множина $\mathbb{N}_0$ утворює комутативну напівгрупу, одиничним елементом в якій є число 0.

3) Беремо множину $\mathbb{N}$ і операцію $\cdot$ (множення). Така система утворює комутативну напівгрупу з нейтральним елементом 1.

4) Множина $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць порядку n з дійсними коефіцієнтами з операцією множення матриць. Ця множина є напівгрупою, ця множина некомутативна і одинична матриця E — нейтральний елемент.

5) Припустимо $A = \{a, b, c, d\}$, символи a, b, c, d будемо вважати літерами. Довільну скінченну послідовність цих символів будемо називати словом, наприклад $adc, bbab, \dots$, і позначимо через $S(A)$ множину всіх таких слів. На цій множині введемо операцію $*$, наприклад $(bcdab) * (cdd) = bcdabcdd$. Множина $S(A)$ з цією операцією утворює

напівгрупу, яка не є комутативною, і при цьому, якщо вважати, що множина $S(A)$ містить порожнє слово, то воно є одиничним елементом в цій напівгрупі.

6) Припустимо A — деяка непорожня множина і $P(A)$ — система всіх підмножин множини A. На множині $P(A)$ розглянемо операцію $\cup$, тоді алгебраїчна система $(P(A), \cup)$ є напівгрупою, ця напівгрупа є комутативною і одиничним елементом в ній є порожня множина. Кожний елемент A_1 цієї напівгрупи є ідемпотентним, оскільки $A_1 \cup A_1 = A_1$. Розглянемо на множині $P(A)$ операцію $\cap$. Алгебраїчна система $(P(A), \cap)$ також є комутативною напівгрупою і одиничним елементом у цій напівгрупі є A. Оскільки $A_1 \cap A_1 = A_1$, то всі елементи в цій напівгрупі є ідемпотентними.

3. Група

Означення 2. Непорожня множина G, для елементів якої введена операція $*$, називається групою, якщо виконуються умови:

1) для довільних $a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$;

2) існує $e \in G$ такий, що для довільного $a \in G : a * e = e * a = a$;

3) для довільного $a \in G$ існує $b \in G : a * b = b * a = e$, такий елемент b називається оберненим для a і позначається a^{-1}.

Таким чином група — це моноїд, кожен елемент якого оборотний.

Якщо крім цього виконується умова для довільних $a, b \in G : a * b = b * a$, то група називається комутативною або абелевою. Далі операцією в групі будемо називати $\cdot$ (множенням). Для операції в абелевій групі часто використовують $+$.

З означення групи випливає, що для довільних $a, b \in G$ рівняння $ax = b, ya = b$ мають в групі розв'язки $x = a^{-1}b, y = ba^{-1}$. Цією умовою можна замінити в означенні групи умови 2) і 3). Тобто під групою G розуміти непорожню множину для якої введена операція $\cdot$, для якої:

1) для довільних $a, b, c \in G : (ab)c = a(bc)$;

2) для довільних $a, b \in G : ax = b, ya = b$ мають у групі розв'язок.

Неважко показати, що два означення групи еквівалентні.

За індукцією можна вважати добуток довільного скінченного числа елементів $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \in G$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$. Якщо $a \in G$, то $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$. Покладемо $a^0 = e$, якщо $n \in \mathbb{N}$, то $a^{-n} = (a^{-1})^n$.

Неважко показати також, що для довільних $n, m \in \mathbb{Z} : a^{n+m} = a^n \cdot a^m = a^m \cdot a^n$, $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$.

Непорожня підмножина H групи G називається підгрупою, якщо виконуються умови:

1) для довільних $a, b \in H : ab \in H$;

2) для довільного $a \in H : a^{-1} \in H$.

Якщо $a \in H$, то $aa^{-1} \in H$, тобто $e \in H$.

Таким чином, підмножина H з операцією $\cdot$ утворює групу. З означення підгрупи випливає, що для довільних $a, b \in H : a \cdot b^{-1} \in H$. Цією умовою можна замінити дві умови підгрупи. Дійсно, припустимо H — непорожня підмножина групи G, для якої виконується умова для довільних $a, b \in H : a \cdot b^{-1} \in H$. Перевіримо виконання умов підгрупи. Зафіксуємо елемент $a \in H$. Тоді $aa^{-1} \in H$, тобто $e \in H$. Тоді $ea^{-1} \in H$, $a^{-1} \in H$. Припустимо $a, b \in H$, за доведеним $b^{-1} \in H$, тобто $a(b^{-1})^{-1} \in H$, $ab \in H$. Умови підгрупи виконуються.

У довільній групі існують 2 тривіальні підгрупи $\{e\}$ і вся група G. Підгрупа H групи G така, що $H \neq \{e\}$, $H \neq G$, називається власною підгрупою.

Нехай $\{H_\alpha\}$ — деяка множина підгруп групи G, скінченна або нескінченна, $H = \bigcap\limits_{\alpha} H_\alpha$. Покажемо, що множина H є підгрупою.

Припустимо $x, y \in H$, тоді $x, y \in H_\alpha$ для довільного α, $xy \in H_\alpha$ для довільного α, звідки випливає, що $xy \in \bigcap\limits_{\alpha} H_\alpha = H$.

Аналогічно, якщо $x \in H$, то $x \in H_\alpha$ для довільного α, $x^{-1} \in H_\alpha$ для довільного α, звідки випливає, що $x^{-1} \in \bigcap\limits_{\alpha} H_\alpha = H$.

Таким чином ми показали, що перетин будь-якого числа підгруп є підгрупою.

Нехай S — деяка непорожня підмножина групи G. Позначимо через $\langle S\rangle$ перетин всіх підгруп, які містять множину S, тобто $\langle S\rangle = \bigcap\limits_{S\subseteq H} H$.

За доведеним, множина $\langle S\rangle$ є підгрупою. Це мінімальна підгрупа, яка містить підмножину S і вона називається підгрупою, породженою підмножиною S. Сама підмножина S називається множиною твірних елементів $\langle S\rangle$, а елементи підмножини S — твірними елементами. Кожна підгрупа H групи G має множину твірних елементів. За таку множину можна взяти всю підгрупу H.

Підгрупу, породжену даною підмножиною, можна описати за допомогою наступного твердження.

Нехай S — непорожня підмножина групи G, тоді $\langle S\rangle$ співпадає з множиною T всіх добутків вигляду $t_1t_2\dots t_n$, де для довільного $i \in \overline{1,n}$ або $t_i \in S$, або $t_i^{-1} \in S$. Дійсно, покажемо спочатку, що множина T утворює підгрупу. Беремо $t_1t_2\dots t_n \in T$, $t'_1t'_2\dots t'_k \in T$, тоді $t_1t_2\dots t_n \cdot t'_1t'_2\dots t'_k \in T$. Аналогічно, якщо $t_1t_2\dots t_n \in T$, то $(t_1t_2\dots t_n)^{-1} = t_n^{-1}t_{n-1}^{-1}\dots t_1^{-1} \in T$, тобто T — підгрупа. Кожен елемент $t \in S$ можна вважати аналогічним добутком, що складається лише з одного співмножника, тому $S \subseteq T$, і якщо H — деяка інша підгрупа, що містить S, то всі добутки вигляду $t_1t_2\dots t_n$ містяться в H, і тому $T \subseteq H$, звідки випливає, що $T = \langle S\rangle$.

Окремо треба розглянути підгрупи, які породжуються скінченним числом елементів. Такі підгрупи називаються підгрупами зі скінченним числом елементів.

Припустимо H — підгрупа, що породжується скінченною підмножиною S. Викреслимо з підмножини S всі ті елементи, які можна записати у вигляді добутку інших елементів підмножини S, або їх обернених. Одержимо мінімальну систему твірних M, тобто таку систему твірних, що $\langle M\rangle = H$, а $\langle M'\rangle \neq H$, де підмножина M' одержана з M викреслюванням довільного $a \in M$. Нехай $M = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$, тоді $H = \langle g_1, g_2, \dots, g_m\rangle$. У випадку $m = 1$ підгрупа H називається циклічною, тобто $H = \langle g\rangle$, в цьому випадку $H = \{g^k | k \in \mathbb{Z}\}$. Зрозуміло, що циклічна підгрупа H завжди абелева: для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$, $g^m g^n = g^{m+n} = g^{n+m} = g^n g^m$. Неважко показати, що будь-яка підгрупа циклічної підгрупи є циклічною підгрупою.

Нехай $a \in G$ — деякий елемент, тоді можливі два випадки:

1) для довільних $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n : a^m \neq a^n$, тоді елемент a називається елементом нескінченного порядку;

2) існують $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n : a^m = a^n$. Припустимо для визначеності, що $m > n$, тоді $a^{m-n} = e$. Найменше $q \in \mathbb{N}$: $a^q = e$ будемо називати порядком елемента a, тобто a елемент порядку q. Всі елементи скінченних порядків називають періодичними.

Припустимо a — елемент порядку n, покажемо, що $H = \langle a\rangle$ складається з n елементів. Дійсно $a^0, a^1 \dots a^{n-1} \in H$. Всі ці елементи є різні, в супротивному випадку існують $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$: $0 < n_1 < n$, $0 < n_2 < n$ і $a^{n_1} = a^{n_2}$, якщо $n_2 > n_1$, то $a^{n_2 - n_1} = e$, $0 < n_2 - n_1 < n$, що суперечить припущенню: n — порядок елемента a.

З іншого боку візьмемо довільний елемент $a^m \in H$ і поділимо число m на n з залишком: $m = qn + r$, q, $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < n$. Тоді $a^m = a^{qn+r} = a^{qn}a^r = (a^n)^q a^r = e^q a^r = ea^r = a^r$ і a^r співпадає з одним з елементів $a^0, a^1 \dots a^{n-1}$. Таким чином, $H = \{a^0, a^1 \dots a^{n-1}\}$. У цьому випадку кажуть, що циклічна підгрупа H має порядок n.

Означення 3. Якщо всі нетривіальні елементи групи G є елементами нескінченного порядку, то група G називається групою без скруту.

Якщо всі елементи групи періодичні, група називається періодичною.

Нехай p — фіксоване просте число, якщо всі елементи періодичної групи G є елементами порядку $p^k, k \in \mathbb{N}$, то група G називається примарною (степеня p) або p-групою.

Приклади

1) Нехай $\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел з операцією $+$ зрозуміло, що множина $\mathbb{Q}$ утворює абелеву групу без скруту, одиничним елементом буде 0. Множина $\mathbb{Z}$ з операцією $+$ є підгрупою $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Z}$ — циклічна підгрупа, твірними елементами якої є 1 і -1.

2) $\mathbb{Q}$ і $\cdot$, така система не буде групою, оскільки для елемента 0 немає оберненого, але множина $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ є абелевою групою відносно операції $\cdot$.

3) Нехай $G = \{0, 1\}$, введемо операцію $+$: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$. Така операція називається додаванням по модулю 2. Множина G і операція $+$ утворюють абелеву групу з двох елементів, причому це циклічна група з твірним елементом 1.

4) Нехай $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ і на цій множині введено операцію $+$ по модулю n: для довільних $a, b \in \mathbb{Z}_n : a + b$ — залишок від ділення числа $a + b$ на n. Тоді ця множина з операцією $+$ є абелевою групою, причому ця група циклічна. Твірними елементами є 1, а також всі числа серед $0, 1, \ldots, n - 1$, які взаємно прості з числом n, зокрема, якщо n — просте число, то всі числа з множини $\mathbb{Z}_n$, за винятком 0, є твірними елементами.

5) $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних матриць з дійсними елементами порядку n. Відносно операції $+$ множина $M_n(\mathbb{R})$ утворює абелеву групу. Одиницею тут є нульова матриця, тобто матриця, що складається з 0. Множина $M_n(\mathbb{R})$ з операцією $\cdot$ групу не утворює, але множина $M_n^*(\mathbb{R})$ всіх невироджених матриць утворює відносно операції $\cdot$ групу з одиничним елементом E, але ця група не абелева.

6) Припустимо C_n — множина всіх комплексних коренів з 1 степеня n, $C_n = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\}$, з операцією $\cdot$. Множина C_n є абелевою групою, при цьому це циклічна група, твірним елементом якої є всі примітивні корені.

   Нехай p — фіксоване просте число, C_{p^k} — множина всіх коренів з одиниці степеня p^k. Позначимо $C_{p^\infty} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} C_{p^k}$ — група називається квазіциклічною групою. Зрозуміло, що C_{p^∞} є примарною групою степеня p.

7) Групою рухів прямої або площини Π називаються такі відображення f, які зберігають відстань між точками, тобто якщо $d(x, y)$ — відстань між $x, y \in \Pi$, то $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

   Всі рухи прямої зводяться до двох типів:

   (а) паралельне перенесення;

   (б) дзеркальне відображення відносно деякої прямої.

   Рухами площини є паралельне перенесення на деяку величину, поворот на деякий кут навколо деякої точки, дзеркальне відображення відносно деякої прямої і дзеркальне відображення відносно прямої з наступним перенесенням вздовж цієї прямої. Нехай f_1, f_2 — рухи прямої на площині Π. Під рухом$f_2 f_1$ будемо розуміти рух $f = f_2 f_1$, який полягає в послідовності виконання цих рухів: $f(x) = f_2 f_1(x) = f_2(f_1(x))$.

   Таким чином множина рухів утворює групу, але ця група не абелева.

8) Група підстановок. Нехай $\{1, 2, \ldots, n\}$ — множина з $\mathbb{N}$. Підстановкою цієї множини називається будь-яке взаємнооднозначне відображення цієї множини на себе.

   Підстановку зручно записати у вигляді таблиці з двох рядків: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, тобто ця підстановка переводить $1 \to i_1$, $2 \to i_2$,

$\ldots, n \to i_n$ і $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — деяка перестановка чисел $(1, 2, \ldots, n)$. Отже, кожній підстановці відповідає деяка перестановка чисел $(1, 2, \ldots, n)$. Введемо операцію множення підстановок як композицію цих підстановок: $\delta\tau(i) = \delta(\tau(i))$, наприклад:
$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, тоді

$$\delta\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
$\delta\tau \neq \tau\delta$, тобто у загальному випадку група некомутативна.

4. Поняття кільця

Означення 4. Непорожня множина K називається кільцем, якщо для її елементів введено дві операції $+$, $\cdot$, причому виконуються умови:

I) множина K утворює абелеву групу з $+$:

1) для довільних $a, b \in K : a + b = b + a$;

2) для довільних $a, b, c \in K : (a + b) + c = a + (b + c)$;

3) існує $\theta \in K$ такий, що для довільного $a \in K : a + \theta = \theta + a = a$;

4) для довільного $a \in K$ існує $(-a) \in K : a + (-a) = (-a) + a = \theta$;

II) множина K утворює напівгрупу відносно $\cdot$:

5) для довільних $a, b, c \in K : (ab)c = a(bc)$;

III) виконуються умови дистрибутивності:

6) для довільних $a, b, c \in K : a(b + c) = ab + ac$;

7) для довільних $a, b, c \in K : (a+b)c = ac + bc$.

Якщо крім цього виконується для довільних $a, b \in K : ab = ba$, то кільце називається комутативним.

Якщо K — кільце, то алгебраїчну структуру $(K, +)$ називають адитивною групою кільця K, а $(K, \cdot)$ — мультиплікативною напівгрупою кільця K.

Якщо мультиплікативна напівгрупа $(K, \cdot)$ має одиничний елемент, то K називається кільцем з одиницею і цей елемент позначається 1. Для довільного $a \in K : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

Визначимо деякі найпростіші наслідки аксіом кільця:

1) Для довільного $a \in K : a \cdot \theta = \theta \cdot a = \theta$.
   Дійсно, $a^2 = a \cdot a = a \cdot (a + \theta) = a \cdot a + a \cdot \theta = a^2 + a \cdot \theta$. Додамо до обох частин $-a^2$: $(-a^2) + a^2 = (-a^2) + a^2 + a \cdot \theta$, тобто $\theta = \theta + a \cdot \theta$, $a \cdot \theta = \theta$. Аналогічно $\theta \cdot a = \theta$.

2) Якщо K — нетривіальне кільце з 1, то завжди $\theta \neq 1$.
   Дійсно, припустимо $\theta = 1$, $a \in K$, тоді $a = a \cdot 1 = a \cdot \theta = \theta$, тобто $a = \theta$, $K = \{\theta\}$ — кільце тривіальне.

Припустимо для елементів $a, b \in K : a \cdot b = \theta$. Чи можна сказати, що тоді або $a = \theta$ або $b = \theta$?

Означення 5. Кільце K називається кільцем без дільників θ, якщо із того, що $a, b \in K$, $a \cdot b = \theta$ випливає, що $a = \theta$ або $b = \theta$.

Кільце K є кільцем без дільників θ тоді і тільки тоді, коли для довільного $a \in K$, $a \neq \theta$ з $ab = ac$ випливає, що $b = c$.

Непорожня підмножина S кільця K називається підкільцем, якщо виконуються умови:

1) для довільних $a, b \in S : a + (-b) = a - b \in S$;

2) для довільних $a, b \in S : ab \in S$;

тобто іншими словами підкільце S є підгрупою K відносно $+$ і піднапівгрупою K відносно $\cdot$.

Існують конструкції, які дозволяють за допомогою даного кільця будувати інші кільця. Розглянемо одну.

Припустимо K — деяке фіксоване кільце, x — деякий символ, який не є елементом K. Означимо через $K[x]$ множину всіх скінченних сум вигляду $\sum a_i x^i$, де $a_i \in K$, $i \geq 0$, ціле. Тоді кожна така сума називається многочленом, а x — змінною. Два многочлена будемо вважати рівними, якщо вони складаються з однакових доданків з точністю до доданків з нульовими коефіцієнтами. Вважаємо, що x — переставний, тобто для довільного $a \in K : ax = xa$. На множині $K[x]$ таких многочленів можна ввести операції $+$ і $\cdot$, виконуючи їх як в звичайних алгебраїчних виразах і групуючи доданки з однаковими степенями. Таким чином: $\sum a_i x^i + \sum b_i x^i = \sum c_i x^i$, де $c_i = a_i + b_i$; $\left(\sum a_i x^i\right)\left(\sum b_i x^i\right) = \sum d_j x^j$, де $d_j = \sum\limits_{k+l=j} a_k b_l$, тобто в результаті таких операцій одержимо результат із $K[x]$.

Неважко перевірити, що множина $K[x]$ з операціями $+$ та $\cdot$ задовольняє умовам кільця. Таке кільце називається кільцем многочленів над кільцем K. Нехай $\sum a_i x^i \in K[x]$. Степенем цього многочлена називається максимальне число i, для якого $a_i \neq 0$, тоді a_i називається старшим коефіцієнтом. Многочлен степеня 0 має вигляд $a_0 x^0$, $a_0 \in K$, будемо ототожнювати многочлени степеня 0 з елементами K. Таким чином одержимо $K \subseteq K[x]$, тобто K є підкільцем кільця $K[x]$. Аналогічно ми одержуємо кільця многочленів над полями $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \ldots$

Властивості кільця K визначають властивості $K[x]$. Якщо кільце K комутативне, то і кільце $K[x]$ комутативне. Якщо K без дільників θ, то $K[x]$ також без дільників θ.

Тільки якщо кільце $K[x]$ без дільників θ, то виконується властивість: добуток многочленів степенів m і n є многочленом степеня $m+n$.

Приклади

1) $\mathbb{Z}$ з $+, \cdot$ утворює комутативне кільце з 1 без дільників θ.

2) Довільне числове поле F з $+, \cdot$ утворює комутативне кільце з 1 без дільників θ $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$.

3) Множина $M_n(\mathbb{R})$ всіх квадратних матриць порядку n з дійсними коефіцієнтами відносно $+, \cdot$ утворює кільце з одиницею E, при $n > 1$ це кільце некомутативне і містить дільники нуля.
Наприклад $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ з операціями $+, \cdot$ по модулю n. Тобто під сумою $a, b \in \mathbb{Z}_n$ по модулю n розуміють залишок від ділення $(a+b)$ на n. Аналогічно під добутком $a, b \in Z_n$ по модулю n розуміють залишок від ділення ab на n. Множина $\mathbb{Z}_n$ з операціями $+$ та $\cdot$ по модулю n утворює комутативне кільце з 1. Це приклад скінченного кільця. Якщо n — просте число, то $\mathbb{Z}_n$ без дільників θ, в супротивному випадку існують дільники θ. Наприклад, $2 \cdot 2 = 4 = 0 \pmod 4$.

5) Нехай A — деяка непорожня множина, $P(A)$ — множина всіх підмножин множини A. Тоді множина $P(A)$ з операціями $\cup, \cap$ утворює комутативне кільце з одиницею A. В загальному випадку існують $A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset : A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Це кільце також містить дільники нуля.

5. Поняття поля

Означення 6. Полем називається комутативне кільце з 1, для кожного ненульового елемента якого існує обернений.

Іншими словами, полем називається непорожня множина P, для елементів якої введено дві операції $+$ і $\cdot$, причому виконуються умови:

1) для довільних $a, b \in P : a + b = b + a$;

2) для довільних $a, b, c \in P : (a + b) + c = a + (b + c)$;

3) існує $\theta \in P$ таке, що для довільного $a \in P : a + \theta = \theta + a = a$;

4) для довільного $a \in P$ існує $(-a) \in P : a + (-a) = (-a) + a = \theta$;

5) для довільних $a, b \in P : ab = ba$;

6) для довільних $a, b, c \in P : (ab)c = a(bc)$;

7) існує $1 \in P$ таке, що для довільного$a \in P : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

8) для довільного $a \in P \backslash \{\theta\}$ існує $a^{-1} \in P : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$;

9) для довільних $a, b, c \in P : a(b + c) = ab + ac$.

Аналогічно як для кілець, визначається адитивна група поля $(P, +)$ і мультиплікативна напівгрупа $(P, \cdot)$. Адитивна група $(P, +)$ є абелевою групою, $(P, \cdot)$ є комутативною напівгрупою з одиницею. Множина $(P^* = P \backslash \{\theta\})$ є абелевою групою відносно $\cdot$. Непорожня підмножина $F \subseteq P$ називається підполем, якщо виконується:

1) $\theta, 1 \in F$;

2) для довільних $a, b \in F : a - b \in F$;

3) для довільних $a, b \in F : ab \in F$;

4) для довільного $a \in F \backslash \{\theta\} : a^{-1} \in F$.

Зрозуміло, що перетин будь-якої множини підполів є підполем.

Нехай F — підполе поля P, елемент $a \in P$, $a \notin F$. Означимо через F_1 перетин всіх підполів поля P, які містять підполе F і елемент a. Підполе F_1 — це найменше підполе, яке містить одночасно підполе F і елемент a. Тоді кажуть, що F_1 ми одержали приєднанням до F елемента a і позначають $F_1 = F(a)$. Наприклад, ми одержимо $\mathbb{C}$ з $\mathbb{R}$ приєднанням i. Поле P називається простим, якщо воно не містить інших підполів.

Припустимо P — деяке фіксоване поле, K — кільце, що міститься в полі P. Для елементів $a, b \in K, b \neq \theta$ через $\dfrac{a}{b}$ позначимо елемент

$ab^{-1} = b^{-1}a$. Зрозуміло, що виконується: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ тоді і тільки тоді, коли $ad = bc$; $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$; $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$. Позначимо $P_k = \left\{ \dfrac{a}{b} | a, b \in K, b \neq \theta \right\}$, тоді неважко перевірити, що множина P_k з операціями $+, \ \cdot$ утворює поле. Це поле є найменшим підполем поля P, яке містить кільце K. Таким чином, за допомогою кільця $\mathbb{Z}$ будується поле $\mathbb{Q}$.

Приклади

1) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \ldots$ з операціями $+, \ \cdot$ є очевидними полями.

2) $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ з операціями $+, \ \cdot$ по модулю n. Зрозуміло, якщо n — непросте число, то в кільці $\mathbb{Z}_n$ є дільники θ, а тому це кільце не може бути полем. Якщо $n = p$ — просте число, то множина $\mathbb{Z}_p$ утворює поле.

   Перевіримо існування обернених елементів. $a \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$, тоді числа a і p взаємнопрості, а тому існують $c, d : ac + dp = 1$ або $ac = 1 - dp$. Число c можна підібрати так, що виконувалося $0 < c < p$, тоді $ac \equiv 1 \pmod p$ і $c = a^{-1}$.

Розділ 2

Лінійні або векторні простори

1. Поняття поля

Отже, непорожня множина F називається полем, якщо для її елементів введені дві операції $+, \cdot$, які задовольняють умовам:

1) для довільних $\alpha, \beta \in F : \alpha + \beta = \beta + \alpha$;

2) для довільних $\alpha, \beta, \gamma \in F : (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

3) існує $0 \in F$ такий, що для довільного $\alpha \in F : \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$;

4) для довільного $\alpha \in F$ існує $-\alpha \in F : \alpha + (-\alpha) = 0$;

5) для довільних $\alpha, \beta \in F : \alpha\beta = \beta\alpha$;

6) існує $1 \in F$ такий, що для довільного$\alpha \in F : 1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$;

7) для довільного $\alpha \in F, \alpha \neq 0$ існує $\alpha^{-1} \in F : \alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$;

8) для довільного $\alpha \in F : 0 \cdot \alpha = 0$;

9) для довільних $\alpha, \beta, \gamma \in F : \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Таким чином в полі можна виконувати всі чотири арифметичні дії.

Непорожня підмножина S поля F називається підполем, якщо $1, 0 \in S$; підмножина S замкнена відносно операцій поля.

Наведемо деякі прості приклади полів:

Множина $\mathbb{C}$ всіх комплексних чисел. В цій множині виконуються додавання, множення, віднімання, ділення. Поле $\mathbb{C}$ містить нескінченну кількість підполів. Наприклад: $\mathbb{Q}_2 = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{Q}_3 = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Q}\}$,...

2. Поняття лінійного простору

Означення 7. Нехай F — деяке поле. Непорожня множина V називається векторним (лінійним) простором над полем F, якщо для її елементів введено дві операції: $+$ та $\cdot$ (множення) на елементи з поля F, причому виконуються умови:

1) для довільних $a, b \in V : a + b = b + a$;

2) для довільних $a, b, c \in V : (a + b) + c = a + (b + c)$;

3) існує $\theta \in V$ такий, що для довільного $a \in V : a + \theta = \theta + a = a$, θ — нуль-вектор;

4) для довільного $a \in V$ існує $-a \in V : a + (-a) = \theta$, $-a$ — протилежнний до a;

5) для довільного $a \in V : 1 \cdot a = a$;

6) для довільного $a \in V$, для довільних $\alpha, \beta \in F : \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;

7) для довільних $a, b \in V$, для довільного $\alpha \in F : \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;

8) для довільних $\alpha, \beta \in F$, для довільного $a \in V : (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$.

Якщо V — векторний простір над полем F, то елементи множини V будемо називати векторами, а елементи множини F — скалярами.

3. Наслідки аксіом векторного простору

1. У векторному просторі V елемент θ єдиний.
   Припустимо, існують два нуль-вектори $\theta_1, \theta_2 \in V$, що задовольняють умові 3. Тоді $\theta_1 + \theta_2 = \theta_1, \theta_1 + \theta_2 = \theta_2, \theta_1 = \theta_2$.

2. Для для довільного $a \in V$ елемент $-a$ єдиний.
   Припустимо, для даного a існують два протилежних елементи $(-a)'$ і $(-a)''$. Тоді $(-a)' = (-a)' + \theta = (-a)' + [a + (-a)''] = [(-a)' + a] + (-a)'' = \theta + (-a)'' = (-a)''$.

3. Для для довільного $a \in V : 0 \cdot a = \theta$.

   Дійсно, $0 \cdot a = (0+0)a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$. Додамо до обох частин рівності елемент $-0 \cdot a$, тоді $\theta = 0 \cdot a + (-0 \cdot a) = 0 \cdot a + 0 \cdot a + (-0 \cdot a) = 0 \cdot a + \theta = 0 \cdot a$.

4. Для довільного $a \in V : -a = (-1)a$.

   Дійсно, як вже було доведено, для даного елемента a є єдиний $-a$, але $a + (-1)a = 1 \cdot a + (-1)a = (1-1)a = 0 \cdot a = \theta$. Тому $-a = (-1)a$.

5. Для довільних $a, b \in V$ існує єдиний $x \in V$ такий, що $a = b + x$. Елемент x будемо називати різницею елементів a та b і позначатимемо $a - b = x$.

   Дійсно, припустимо $x = a + (-b)$, тоді $b + x = a + (-b) + b = a$, тобто елемент x існує. З іншого боку, якщо для деякого елемента $c \in V$ також виконується $a = b + c$, то $a + (-b) = b + c + (-b)$, отже $c = a + (-b) = x$, тобто елемент x єдиний.

6. Для довільного $\alpha \in F : \alpha\theta = \theta$.

   Дійсно, $\alpha \cdot \theta = \alpha(\theta + \theta) = \alpha\theta + \alpha\theta$. Додамо до обох частин $-\alpha\theta$ і одержимо $\theta = \alpha\theta$.

7. Для елементів $\alpha \in F, a \in V$ рівність $\alpha a = \theta$ виконується тоді і тільки тоді, коли або $\alpha = 0$ або $a = \theta$.

   Дійсно, припустимо $\alpha \neq 0$, тоді існує $\alpha^{-1} \in F$ і $\alpha^{-1}\alpha a = \alpha^{-1} \cdot \theta$, тобто $1 \cdot a = \theta, a = \theta$.

4. Поняття ізоморфізму

Нехай V_1, V_2 — векторні простори над полем F. Простори V_1, V_2 називаються ізоморфними, якщо існує взаємно однозначне відображення $\varphi : V_1 \to V_2$ таке, що виконуються умови:

1) для довільних $a, b \in V_1 : \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;

2) для довільного $a \in V_1$, для довільного $\alpha \in F : \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$.

Саме відображення φ називається ізоморфізмом векторних просторів. Структура ізоморфних векторних просторів однакова, а тому з точки зору теорії векторних просторів ізоморфні простори тотожні.

5. Приклади векторних просторів

1. Нехай F — поле, n — фіксоване натуральне число. Позначимо через F^n множину всіх векторів довжини n, координатами яких є елементи з F. Уведемо для них стандартні операції:
   якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in F^n, b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in F^n$, то
   $a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$;
   якщо $\lambda \in F$, $a \in F^n$, то $\lambda a = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n)$.
   Неважко перевірити, що такі операції задовольняють умовам векторного простору, тобто F^n є векторним простором над полем F.

2. Позначимо через множину M_n множину всіх квадратних матриць порядку n, елементи яких з F. На цій множині введемо операції $+$ матриць та множення на елементи з поля F. Множина M_n з такими операціями є векторним простором над полем F. Кожній такій матриці можна поставити у відповідність вектор довжини n^2 з елементами з F, наприклад:
   $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \to a = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22})$.
   При цьому операціям над матрицями відповідають операції над векторами, тобто простір M_n є ізоморфним простору F^{n^2}.

3. Припустимо X — деяка фіксована непорожня множина, F — деяке поле. Позначимо через $M(X, F)$ множину всіх відображень з множини X в поле F. Введемо операцію $f_1 + f_2$ над відображеннями $f_1, f_2 \in M(X, F)$, тоді для довільного $x \in X : (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Аналогічно, якщо $f \in M(X, F)$, $\alpha \in F$, то для довільного $x \in X : (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. Множина $M(X, F)$ з такими операціями є векторним простором над полем F. Відзначимо частковий випадок:

$X = \{1, 2, \dots, n\}$, тоді довільному відображенню $f \in M(X, F)$ можна поставити у відповідність вектор $(f(1), f(2), \dots, f(n))$, операції над відображеннями відповідають операціям над векторами, тобто простір $M(X, F)$ ізоморфний простору F^n.

4. $C[a, b]$ — множина всіх функцій, неперервних на сегменті $[a, b]$. Ця множина відносно операцій $+$ функцій та $\cdot$ на дійсні числа утворює векторний простір над полем $\mathbb{R}$.

5. Припустимо F — деяке поле, $F[x]$ — множина всіх многочленів від змінної x з коефіцієнтами з поля F. Ця множина утворює векторний простір над полем F відносно операцій $+$ та $\cdot$ на елемети поля F. Позначимо через $F_n[x]$ множину всіх многочленів з коефіцієнтами з поля F, степені яких не перевищують n. Така множина також утворює векторний простір над полем F. При цьому кожному такому многочлену можна поставити у відповідність вектор. $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ a_0, a_1, \dots, a_n \in F \to (a_0, a_1, \dots, a_n)$. Операції над многочленами відповідають операціям над векторами, а тому простір $F_n[x]$ ізоморфний F^{n+1}.

6. Припустимо, X — деяка фіксована непорожня множина, $P(X)$ — множина всіх підмножин множини X. Введемо на множині $P(X)$ структуру векторного простору: $A_1, A_2 \subseteq X$, під їх сумою будемо розуміти симетричну різницю, тобто $A_1 + A_2 = A_1 \triangle A_2 = (A_1 \cup A_2) \backslash (A_1 \cap A_2)$, під нуль-вектором — $\emptyset$, під протилежною множині A будемо розуміти $X \backslash A$.

   Нехай $F_2 = \{0, 1\}$ — скінченне поле з двох елементів, де операція $+$ введена по модулю 2, тобто 0+0=0, 1+0=0+1=1, 1+1=0, $0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1$. Для підмножин з $P(X)$ будемо вважати $0 \cdot A = \emptyset, 1 \cdot A = A$ і множина $P(X)$ з такими операціями утворює векторний простір над скінченним полем F_2.

   Якщо $X = \{1, 2, \dots, n\}$, тоді кожній підмножині $A \subseteq X$ можна поставити у відповідність вектор довжини n, а саме якщо $a_i = \begin{cases} 1 & i \in A \\ 0 & i \notin A \end{cases}$, то $A \to (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Такий вектор називається характеристичним вектором підмножини A. Операції над елементами множини $P(x)$ відповідають операціям над характеристичними векторами, а тому векторний простір $P(X)$ ізоморфний векторному простору векторів довжини n.

6. Лінійна залежність та лінійна незалежність системи векторів

Системою векторів в просторі V над полем F називається будь-яка скінченна множина векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ — система векторів, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ — деяка система скалярів. Сума $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$ називається лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — коефіцієнтами цієї лінійної комбінації.

Лінійна комбінація називається нетривіальною, якщо серед її коефіцієнтів є принаймні один ненульовий, і тривіальною, якщо всі коефіцієнти нульові. Зрозуміло, що тривіальна лінійна комбінація будь-якої системи векторів дорівнює θ.

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається лінійно незалежною, якщо для неї існує лише тривіальна лінійна комбінація, що рівна θ.

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називаєть лінійно залежною, якщо для неї існує нетривіальна лінійна комбінація, що рівна θ.

Якщо $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$, будемо казати, що вектор x лінійно виражається через вектори $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

7. Властивості лінійно залежних та лінійно незалежних систем векторів

1. Якщо система векторів містить θ, то вона лінійно залежна.

   Нехай $A = \{\theta, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, тоді $1 \cdot \theta + 0 \cdot a_1 + \ldots + 0 \cdot a_n = \theta$. Лінійна комбінація нетривіальна, оскільки є 1.

2. Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли принаймні один з них лінійно виражається через інші.

   Припустимо система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійно залежна. За означенням існує нетривіальна лінійна комбінація $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = \theta$, серед коефіцієнтів є ненульовий, нехай, наприклад, це буде $\alpha_1 \neq 0$, тоді $a_1 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 + \ldots + \dfrac{\alpha_n}{\alpha_1} a_n$.

   Нехай навпаки, один з векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійно виражається через інші, наприклад $a_1 = \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 + \ldots + \beta_n a_n$, тоді $a_1 - \beta_2 a_2 - \beta_3 a_3 - \ldots - \beta_n a_n = \theta$ і лінійна комбінація нетривіальна (бо коефіцієнт при $a_1 = 1$).

3. Система векторів лінійно залежна тоді і лише тоді, коли принаймні один з них лінійно виражається через інші.

   Достатність випливає з попередньої властивості.

   Необхідність. Припустимо, що система векторів $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ лінійно залежна, тоді існує нетривіальна лінійна комбінація $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = \Theta$. Позначимо через k максимальний індекс, для якого $\alpha_k \neq 0$, тобто $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = 0$ і $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \theta$. Якщо $k = 1$, то $a_1 = \theta$, інакше $a_k = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_k} a_1 - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_k} a_2 - \ldots - \dfrac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} a_{k-1}$.

4. Якщо підсистема системи векторів лінійно залежна, то і вся система лінійно залежна.

   Припустимо в системі векторів $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ підсистема векторів $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ лінійно залежна. Тоді існує нетривіальна комбінація $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \theta$, серед коефіцієнтів є ненульовий, тому припустимо, наприклад, що $\alpha_1 \neq 0$. Тоді $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 +$

$\ldots + \alpha_k a_k + 0 \cdot a_{k+1} + \ldots + 0 \cdot a_n = \theta$. Лінійна комбінація нетривіальна, оскільки $\alpha_1 \neq 0$.

5. Довільна підсистема лінійно незалежної системи векторів є лінійно незалежною.
   Наслідок попереднього твердження.

6. Порожня система векторів вважається лінійно незалежною.

8. Лінійна оболонка підмножини

Нехай A — непорожня підмножина векторного простору V.

Означення 8. Лінійною оболонкою підмножини A називається множина всіх лінійних комбінацій всіх можливих систем векторів з підмножини A. Позначається лінійна оболонка як $\langle A \rangle$.

Неважко довести наступні властивості лінійної оболонки:

1. $A \subseteq \langle A \rangle$;

2. якщо $A \subseteq B$, то $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$;

3. $\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$;

4. якщо $a \in \langle A \rangle$, то $\langle A \cup \{a\} \rangle = \langle A \rangle$;

5. якщо b лінійно виражається через інші елементи підмножини A, то $\langle A \backslash \{b\} \rangle = \langle A \rangle$.

9. Лема про дві системи

Лема 1. *I. Нехай у векторному просторі V задано дві системи векторів $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ і $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, причому всі вектори системи A лінійно виражаються через систему B. Якщо $m > n$, то система векторів A лінійно залежна.*

II. Нехай у векторному просторі V задано дві системи векторів $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ і $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, причому всі вектори системи A лінійно виражаються через систему B. Якщо система A лінійно незалежна, то $m \leq n$.

Зміст леми такий: лінійно незалежна система векторів не може лінійно виражатися через систему векторів з меншим числом векторів.

Доведення. Доводити лему будемо в II формулюванні від супротивного.

Припустимо, система векторів A лінійно незалежна, але $m > n$. Складемо систему векторів $A_1 = \{a_1, B\} = \{a_1, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Оскільки $a_1 \in \langle B\rangle$, то $\langle B\rangle = \langle A_1\rangle$ і система векторів A_1 лінійно залежна. В системі A_1 обираємо перший вектор, який лінійно виражається через попередні, і позначимо його через c_1. Оскільки $a_1 \neq \theta$ (бо A — лінійно незалежна), то $c_1 \neq a_1$, а тому $c_1 \in B$. Викреслимо вектор c_1 із системи векторів A_1, одержимо систему векторів $B_1 = A_1 \setminus \{c_1\}$ і при цьому виконується $\langle B_1\rangle = \langle A_1\rangle = \langle B\rangle$ і в системі B_1 залишається n векторів.

Аналогічно, складемо систему векторів $A_2 = \{a_2, B_1\} = \{a_2, a_1, \ldots\}$. Знову, оскільки $a_2 \in< B >=< B_1 >$, то система векторів A_2 лінійно залежна і $\langle A_2\rangle = \langle B_1\rangle = \langle B\rangle$. Знову в системі векторів A_2 виберемо перший вектор, який лінійно виражається через попередні і позначимо його c_2. Оскільки за умовою система векторів A лінійно незалежна, то вектори a_2, a_1 лінійно незалежні, а тому c_2 з ними не співпадає, тобто $c_2 \in B$. Викреслюємо вектор c_2 з системи векторів A_2, одержимо $B_2 = A_2 \setminus \{c_2\}$, яка складається з n векторів і при цьому $\langle B_2\rangle = \langle A_2\rangle = \langle B\rangle$.

Продовжуючи цей процес далі, через n кроків приходимо до системи векторів $B_n = \{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1\}$, причому $\langle B_n\rangle = \langle B\rangle$. Але якщо $m > n$, то існує вектор $a_{n+1} \in A$, причому $a_{n+1} \in \langle B\rangle = \langle B_n\rangle$. Таким чином вектор a_{n+1} лінійно виражається через вектори $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$, що суперечить лінійній незалежності системи векторів A. $\square$

10. Поняття базису простору

Означення 9. Нехай V — векторний простір над полем F. Підмножина B простору V називається базисом простору, якщо виконуються дві умови:

1) кожна скінченна підсистема векторів з множини B лінійно незалежна;

2) кожен вектор простору V лінійно виражається через вектори з множини B.

Виникають запитання:

1) Чи в кожному просторі існує базис?

2) Чи в кожному просторі існує скінченний базис?

Відповідь на ці питання: в кожному просторі існує базис, але не в кожному просторі він скінченний.

Векторний простір, у якому існує скінченний базис, називається скінченновимірним. Якщо в просторі скіченного базису не існує, то такий простір називається нескіченновимірним.

11. Теореми про базис

Теорема 1. *Нехай у векторному просторі V існує базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$, тоді довільна система векторів простору, що складається з m векторів при $m > n$ лінійно залежна.*

Доведення. Нехай $m > n$ і $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = A$ — система векторів. Тоді за означенням базису всі вектори системи A лінійно виражаються через вектори $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Оскільки $m > n$, за лемою про 2 системи система векторів A лінійно залежна. □

Наслідок 1. *У скінченновимірному просторі всі базиси складаються з однакового числа векторів.*

Доведення. Нехай в просторі V задано 2 базиси $B_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, B_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Припустимо спочатку $m > n$. Тоді за теоремою 1 система векторів B_1 лінійно залежна, тобто не може бути базисом, тому $m \leq n$. аналогічно показується $n \leq m$, отже $n = m$. □

Означення 10. Розмірністю скінченновимірного простору V називається число векторів його базису та позначається $\dim V$.

Теорема 2. *У скінченновимірному просторі довільну лінійно незалежну систему векторів можна доповнити до базису простору.*

Доведення. Припустимо у просторі V задано лінійно незалежну систему векторів $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Якщо $\langle A\rangle = V$, то за означенням базису система A утворює базис простору. У супротивному випадку обираємо довільний вектор a_{k+1} з множини $V \backslash \langle A\rangle$ і складаємо систему векторів $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$. Система векторів A_1 лінійно незалежна, оскільки в ній жоден вектор не виражається через попередні. Знову, якщо $\langle A_1\rangle = V$, то A_1 утворює базис. Інакше продовжуємо процес: $a_{k+2} \in V \backslash \langle A_1\rangle, A_2 = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}, a_{k+2}\}$. Якщо $\dim V = n$, то через $n - k$ кроків ми прийдемо до базису простору. □

Наслідок 2. *У просторі розмірності n довільна система n лінійно незалежних векторів утворює базис.*

Доведення. Припустимо $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — лінійно незалежна система векторів. Згідно з теоремою 2 її можна доповнити до базису простору, але якщо ми допишемо до системи принаймні один вектор, згідно з теоремою 1 вона стає лінійно залежною. Звідси випливає, що система A сама утворює базис простору. □

Теорема 3. *Нехай S — деяка система векторів в скінченновимірному просторі V, причому $\langle S\rangle = V$. Тоді з системи S можна одержати деякий базис простору V, якщо потрібно, викреслюючи деякі вектори.*

Доведення. Нехай $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, починаємо перевіряти вектори цієї системи починаючи з кінця: якщо вектор a_m лінійно виражається через попередні, викреслюємо його, інакше залишаємо. Переходимо до вектора a_{m-1}. Аналогічно, якщо він лінійно виражається через попередні, викреслюємо його, якщо ні — залишаємо. Таким чином за скінченне число кроків ми приходимо до системи векторів $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, яка лінійно незалежна і $\langle B \rangle = \langle S \rangle = V$. За означенням, система векторів B утворює базис простору. □

Теорема 4. *У скінченновимірному просторі довільний вектор лінійно виражається через базис, причому однозначно.*

Доведення. Припустимо в просторі V зафіксовано деякий базис $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ і $x \in V$ — довільний вектор. За означенням базису, вектор x лінійно виражається через базис B. Тому залишається довести тільки однозначність. Припустимо $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$; $x = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_n a_n$, тоді $\theta = x - x = (\lambda_1 - \gamma_1)a_1 + (\lambda_2 - \gamma_2)a_2 + \ldots + (\lambda_n - \gamma_n)a_n$. Ми одержали лінійну комбінацію базису рівну θ, тому $(\lambda_1 - \gamma_1) = 0$, $(\lambda_2 - \gamma_2) = 0, \ldots, (\lambda_n - \gamma_n) = 0$, тобто $\lambda_1 = \gamma_1, \lambda_2 = \gamma_2, \ldots, \lambda_n = \gamma_n$. □

З цієї теореми випливає, що при фіксованому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ простору V кожен вектор $x \in V$ можна однозначно розкласти в лінійну комбінацію $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$. Коефіцієнти цієї лінійної комбінації $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ називаються координатами вектора x в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ці координати визначаються однозначно, тому при фіксованому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ вектор $x \in V$ можна задавати в координатній формі $x = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

12. Зв'язок між базисами. Матриця переходу.

У скінченновимірному просторі існують багато базисів. Зв'язок між двома даними базисами визначається матрицею переходу. Припустимо в просторі V задано два базиси $B_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, B_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, тоді всі вектори базису B_2 лінійно виражаються через базис B_1. Запишемо

$$\begin{aligned}
b_1 &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \ldots + \alpha_{n1}a_n;\\
b_2 &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \ldots + \alpha_{n2}a_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_n &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \ldots + \alpha_{nn}a_n.
\end{aligned}$$

Випишемо таку матрицю

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця T називається матрицею переходу від базису B_1 до базису B_2. Таким чином, щоб виписати матрицю переходу, треба в стовпчики послідовно записати координати векторів базису B_2 в базисі B_1. Зрозуміло, що матриця переходу завжди невироджена, оскільки її стовчики лінійно незалежні.

Нехай в просторі V задано два базиси $B_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, B_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, причому вони задані координатами в декому третьому базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\begin{array}{ll}
a_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{21}, \ldots, \lambda_{n1}), & b_1 = (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{n1}),\\
a_2 = (\lambda_{12}, \lambda_{22}, \ldots, \lambda_{n2}), & b_2 = (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{n2}),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_n = (\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \ldots, \lambda_{nn}), & b_n = (\gamma_{1n}, \gamma_{2n}, \ldots, \gamma_{nn}).
\end{array}$$

З координат цих векторів складемо 2 матриці:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \ldots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \ldots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Запишемо матрицю переходу від B_1 до B_2:

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тобто, за означенням:

$$\begin{aligned} &b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \ldots + \alpha_{n1}a_n; \\ &b_2 = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \ldots + \alpha_{n2}a_n; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &b_n = \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \ldots + \alpha_{nn}a_n. \end{aligned}$$

Ці рівності можна переписати так:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \dots \\ \gamma_{n1} \end{pmatrix} = \alpha_{11} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \dots \\ \lambda_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_{21} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \dots \\ \lambda_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{n1} \begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \lambda_{2n} \\ \dots \\ \lambda_{nn} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \dots \\ \gamma_{n2} \end{pmatrix} = \alpha_{12} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \dots \\ \lambda_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_{22} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \dots \\ \lambda_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{n2} \begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \lambda_{2n} \\ \dots \\ \lambda_{nn} \end{pmatrix};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \\ \dots \\ \gamma_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_{1n} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \dots \\ \lambda_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_{2n} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \dots \\ \lambda_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{nn} \begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \lambda_{2n} \\ \dots \\ \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо перейти до матричного рівняння: $B = AT$.

Припустимо, T — матриця переходу $B_1 \to B_2$. Позначимо через T_1 матрицю переходу $B_2 \to B_1$, тоді за доведеним $B = AT$, і по аналогії $A = BT_1$, тобто $A = ATT_1$. Матриця A невироджена, оскільки її стовпчики лінійно незалежні, як стовпчики координат базисних векторів, тому існує матриця A^{-1} і $A^{-1}A = A^{-1}ATT_1$, або $TT_1 = E$, $T_1 = T^{-1}$.

Таким чином, якщо T — матриця переходу $B_1 \to B_2$, то матриця переходу $B_2 \to B_1$ є матрицею T^{-1}.

13. Зв'язок координат вектора в різних базисах.

Припустимо в просторі V задано 2 базиси $B_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, B_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, T — матриця переходу $B_1 \to B_2$:

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

тобто виконується

$$\begin{aligned} b_1 &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \ldots + \alpha_{n1}a_n; \\ b_2 &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \ldots + \alpha_{n2}a_n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \ldots + \alpha_{nn}a_n. \end{aligned}$$

Зафіксуємо деякий вектор $x \in V$, тоді в базисі B_1 він має координати $x = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_{B_1}$, а в базисі B_2 $x = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)_{B_2}$. Це означає, що $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ і $x = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \ldots + \gamma_n b_n$. Перепишемо останні рівності:

$x = \gamma_1(\alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \ldots + \alpha_{n1}a_n) + \gamma_2(\alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \ldots + \alpha_{n2}a_n) + \ldots + \gamma_n(\alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \ldots + \alpha_{nn}a_n) = (\alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \ldots + \alpha_{1n}\gamma_n)a_1 + (\alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \ldots + \alpha_{2n}\gamma_n)a_2 + \ldots + (\alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + \ldots + \alpha_{nn}\gamma_n)a_n$.

Але кожен вектор можна розкласти в лінійну комбінацію базисних векторів однозначно, тому $\lambda_1 = \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \ldots + \alpha_{1n}\gamma_n, \lambda_2 = \alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \ldots + \alpha_{2n}\gamma_n, \ldots, \lambda_n = \alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + \ldots + \alpha_{nn}\gamma_n$. Якщо ці рівності переписати у матричному вигляді, одержимо:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \ldots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Остання рівність дає зв'язок координат та вектора у базисах B_1, B_2, її можна переписати також у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

14. Приклади базису

1. Беремо простір F^n всіх n-вимірних векторів з координатами з поля F. У цьому просторі розглянемо систему векторів

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Покажемо, що ця система векторів утворює базис простору. Для цього перевіримо дві умови базису:

а) Лінійна незалежність. Беремо лінійну комбінацію $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \theta; (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0); \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$.

б) Довільний вектор простору лінійно виражається через $e_1, e_2, \dots, e_n$. Беремо $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in F^n$; $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$.

Таким чином система векторів $e_1, e_2, \dots, e_n$ утворює базис простору F^n, цей базис називається стандартним базисом простору F^n, звідки зокрема випливає, що розмірність $\dim F^n = n$.

2. Простір M_n всіх квадратних матриць порядку n з елементами з поля F. У цьому просторі розглянемо систему матриць $\{E_{ij} | i, j =$

$1, \ldots, n\}, E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \ldots & 1 & \ldots \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ — всі нулі, окрім 1 на місці i, j.

Покажемо, що ця система матриць утворює базис простору:

а) Лінійна незалежність: $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij} = O$;

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$ тобто $\alpha_{ij} = 0$ для довільних $i, j = \overline{1, n}$.

б) Якщо $B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \in M_n$, то $B = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} E_{ij}$.

Таким чином, $\{E_{ij}\}$ утворює базис простору M_n і $\dim M_n = n$.

3. $F[x]$ — простір всіх многочленів над полем F. Покажемо, що у цьому просторі не існує скінченного базису. Припустимо супротивне і многочлени $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ утворють базис простору $F[x]$. Позначимо через k максимальний степінь цих многочленів. Тоді, якщо $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_m f_m(x)$, то степінь многочлена $f(x)$ не більше k, тобто многочлени степеня більше k не можна лінійно виразити через многочлени $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$, отже вони не утворюють базису. Але в просторі $F[x]$ існує нескінченний базис: $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$

4. $F_n[x]$ — простір всіх многочленів степеня не більше n над полем F. У цьому просторі існує стандартний базис $1, x, x^2, \ldots, x^n$, тому

$\dim F_n[x] = n+1$. Зафіксуємо $\alpha \in F$ і покажемо, що система многочленів $1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, \ldots, (x-\alpha)^n$ також утворює базис простору $F_n[x]$. Число цих многочленів дорівнює розмірності простору, тому згідно з теоремою про базис достатньо довести лінійну незалежність цих многочленів. Беремо $\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1(x-\alpha) + \lambda_2(x-\alpha)^2 + \ldots + \lambda_n(x-\alpha)^n = \theta = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^n$. Два многочлени рівні, якщо рівні їхні коефіцієнти при відповідних степенях, тому $\lambda_n = 0, \lambda_{n-1} = 0, \ldots, \lambda_1 = 0, \lambda_0 = 0$.

15. Поняття підпростору

Нехай V — векторний простір над полем F.

Означення 11. Непорожня підмножина L простору V називається підпростором, якщо виконуються дві умови:

1) якщо $a, b \in L$, то $a + b \in L$;

2) якщо $a \in L, \alpha \in F$, то $\alpha a \in L$.

Дві умови підпростору можна замінити однією: якщо $a, b \in L, \alpha, \beta \in F$, то $\alpha a + \beta b \in L$.

16. Найпростіші властивості підпросторів

1) Нехай L — підпростір простору V над полем F, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in L$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in F$, тоді $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k \in L$.

2) У довільному підпросторі міститься нуль-вектор θ.
Дійсно, нехай L — підпростір і $L \neq \emptyset$. Тоді існує $x \in L$ такий, що для довільного $\alpha \in F : \alpha x \in L; \alpha := 0$, тоді $0 \cdot x = \theta \in L$.

3) Якщо $x \in L$, то $-x \in L$.
Дійсно, якщо $x \in L$, то $(-1)x \in L$, звідки $-x \in L$.

4) Підпростір L є векторним простором над полем F.
Дійсно, множина L замкнута відносно операцій простору V, $\theta \in L$,

якщо $x \in L$, то $-x \in L$. Аксіоми векторного простору виконуються в L, оскільки вони виконуються в просторі V. Таким чином, підпростір L векторного простору V над полем F є векторним простором над полем F відносно операцій простору V, а тому підпростір має базис і для підпростору існує поняття розмірності. Якщо V — скінченновимірний простір, то в ньому не може бути лінійно незалежної системи векторів будь-якої довжини. Якщо L підпростір простору V, то базис підпростору L є лінійно незалежною системою векторів в просторі V, а тому підпростір L також скінченновимірний. Оскільки за теоремою 2 про базис, базис L як лінійно незалежну систему можна доповнити до базису V, то обов'язково $\dim L \leq \dim V$.

17. Приклади підпростору

1. Тривіальні підпростори.

   Нехай V векторний простір, тоді його підпросторами є підмножини $\{\theta\}$ і V — ці підпростори називаются тривіальними, при цьому, оскільки θ утворює лінійно залежну систему векторів, то $\dim\{\theta\} = 0$.

2. Система лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = 0, \\ &\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = 0, \end{aligned}$$

   де $\alpha_{ij} \in F$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Множина всіх розв'язків цієї системи утворює підпростір у просторі F^n, базисом цього підпростору є фундаментальна система розв'язків цієї системи, тому якщо r — ранг матриці цієї системи, то $\dim = n - r$.

3. Нехай S — непорожня підмножина векторного простору V над полем F покажемо, що $\langle S \rangle$ є підпростором.

а) Нехай $a, b \in \langle S \rangle$, тоді $a = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i$, $b = \sum_{j=1}^{k} \beta_j b_j$, де $a_i, b_j \in S$, $\alpha_i, \beta_j \in F$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,k}$.

$a+b = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j b_j$, тобто елемент $a+b$ є лінійною комбінацією векторів $\{a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_k\} \subseteq S$, тому за означенням $a + b \in \langle S \rangle$.

б) Нехай $a \in \langle S \rangle$, тоді $a = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i$, де $a_i \in S$, $\alpha_i \in F$, $i = \overline{1,m}$.

Нехай також $\lambda \in F$, тоді

$$\lambda a = \lambda \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i \right) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \alpha_i) a_i,$$

а отже, $\lambda a \in \langle S \rangle$.

Визначимо ще декілька властивостей лінійних оболонок:

1) Лінійна оболонка $\langle S \rangle$ — це найменший підпростір, який містить підмножину S.

Доведення. Дійсно, нехай L — такий підпростір, що $S \subseteq L$. Беремо $a \in \langle S \rangle$, тоді $a = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i$, де $a_i \in S$, $\alpha_i \in F$, $i = \overline{1,m}$. Оскільки $S \subseteq L$, то $a_1, \ldots, a_m \in L$, а отже, за означенням підпростору, лінійна комбінація $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m \in L$ та $a \in L$. Тобто $\langle S \rangle \subseteq L$. $\square$

2) Для непорожньої підмножини M векторного простору V рівність $M = \langle M \rangle$ виконується тоді і тільки тоді, коли M є підпростором.

Доведення. Необхідність випливає з попереднього. Припустимо, що M — підпростір. Покажемо, що $M = \langle M \rangle$. Очевидно, що $M \subseteq \langle M \rangle$, тому достатньо показати, що $\langle M \rangle \subseteq M$.

Нехай $a \in \langle M \rangle$, тоді $a = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i a_i$, де $a_i \in M$, $\alpha_i \in F$, $i = \overline{1,m}$. За означенням підпростору $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m \in M$ та $a \in M$. Отже, $\langle M \rangle \subseteq M$. $\square$

4. В просторі $C[a,b]$є підпростір $\mathbb{R}[x]$ всіх многочленів.

5. В просторі $F[x]$ є підпростір $F_n[x]$.

6. В просторі $\mathbb{R}^3$ всіх векторів з початком в $O(0,0,0)$ над полем дійсних чисел є $\{\theta\}$, кожна пряма, що проходить через O, кожна площина, що проходить через O і весь простір.

18. Операції над підпросторами

Нехай V — векторний простір над полем F.

1) Нехай $\{L_\lambda \mid \lambda \in I\}$ — деяка підмножина підпросторів простору V. Позначимо $L = \bigcap\limits_{\lambda \in I} L_\lambda$. Покажемо, що множина L утворює підпростір.

   За доведеним нульовий вектор θ міститься в довільному підпросторі, тому $\theta \in L_\lambda$ для всіх $\lambda \in I$. Звідси випливає, що $\theta \in \bigcap\limits_{\lambda \in I} L_\lambda = L$, тобто $L \neq \emptyset$.

   Візьмемо $a, b \in L$ та $\alpha, \beta \in F$. Тоді $a, b \in L_\lambda$ для всіх $\lambda \in I$. А отже, $\alpha a + \beta b \in L_\lambda$ для всіх $\lambda \in I$, звідки випливає, що $\alpha a + \beta b \in \bigcap\limits_{\lambda \in I} L_\lambda = L$.

2) Нехай M_1, M_2 — підпростори простору V. У загальному випадку множина $M_1 \cup M_2$ не утворює підпростір.

   Наприклад, розглянемо неколінеарні вектори a і b на площині в $\mathbb{R}^2$. Покладемо

$$L_1 = \langle a \rangle = \{\alpha a \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \qquad L_2 = \langle b \rangle = \{\beta b \mid \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, що $a \in L_1$, $b \in L_2$, отже $a, b \in L_1 \cup L_2$, але $a + b \notin L_1 \cup L_2$ (оскільки $a + b$ не є колінеарним ні з a, ні з b). Таким чином, $L_1 \cup L_2$ не є підпростором.

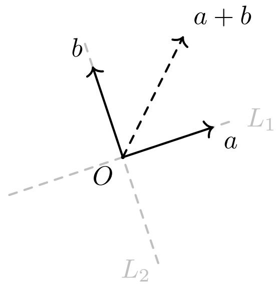

Рис. 2.1. Вектори $a \in L_1$, $b \in L_2$, але $a + b \notin L_1 \cup L_2$.

Твердження 1. *Нехай M_1, M_2 — підпростори векторного простору V. Тоді множина $M_1 \cup M_2$ утворює підпростір тоді і тільки тоді, коли один із них міститься в іншому. Тобто $M_1 \cup M_2$ — підпростір тоді і тільки тоді, коли $M_1 \subseteq M_2$ або $M_2 \subseteq M_1$.*

Доведення. Якщо один підпростір міститься в іншому, то обєднання співпадає з одних з цих підпросторів. Наприклад, $M_1 \subseteq M_2$, тоді $M_1 \cup M_2 = M_2$, а отже, це підпростір.

Припустимо навпаки, що $M_1 \cup M_2$ — підпростір, але жоден з підпросторів не міститься в іншому. Тоді існують елементи $a \in M_1 \setminus M_2$ та $b \in M_2 \setminus M_1$. Оскільки $a, b \in M_1 \cup M_2$, а $M_1 \cup M_2$ — підпростір, то $a + b \in M_1 \cup M_2$. Тобто можливі два варіанти:

- $a + b \in M_1$. Оскільки $a \in M_1$,то $(a + b) - a = b \in M_1$ — суперечить тому, що $b \notin M_1$;

- $a + b \in M_2$. Оскільки $b \in M_2$, то $(a + b) - b = a \in M_2$ — суперечить тому, що $a \notin M_2$.

Отже, обидва випадки призводять до суперечності. Тому, наше припущення хибне, і один з підпросторів міститься в іншому. □

19. Поняття суми підпросторів

Нехай V — векторний простір над полем F.

Означення 12. Сумою двох підпросторів L_1, L_2 простору V називається множина $L_1 + L_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2\}$.

Покажемо, що сума двох підпросторів L_1+L_2 є підпростором. Беремо $a, b \in L_1 + L_2$, $\alpha, \beta \in F$. Тоді існують $a_1, b_1 \in L_1$ і $a_2, b_2 \in L_2$, такі що $a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2$. Тоді $\alpha a + \beta b = \alpha(a_1 + a_2) + \beta(b_1 + b_2) = (\alpha a_1 + \beta b_1) + (\alpha a_2 + \beta b_2)$. Оскільки L_1 і L_2 — підпростори, то $\alpha a_1 + \beta b_1 \in L_1$ і $\alpha a_2 + \beta b_2 \in L_2$, отже $\alpha a + \beta b \in L_1 + L_2$.

Зрозуміло, що $L_1 \subseteq L_1 + L_2$, $L_2 \subseteq L_1 + L_2$.

Аналогічно можна ввести поняття суми скінченного числа підпросторів.

Означення 13. Сумою підпросторів $L_1, L_2, \ldots, L_k$ векторного простору V називається множина $L_1 + L_2 + \cdots + L_k = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_k \mid x_i \in L_i, i = \overline{1, k}\}$.

Сума скінченного числа підпросторів є підпростором. Це доводиться аналогічно, як для випадку $k = 2$.

20. Поняття прямої суми підпросторів

Нехай V — векторний простір над полем F.

Означення 14. Векторний простір V називається прямою сумою своїх підпросторів $L_1, L_2, \ldots, L_k$ якщо довільний вектор $x \in V$ можна розкласти в суму $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, де $x_i \in L_i, i = \overline{1, k}$ і цей розклад єдиний. Позначають

$$V = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k.$$

Приклад 1. Припустимо, що в трьохвимірному просторі векторів $\mathbb{R}^3$ задано три некомпланарні вектори a_1, a_2, a_3. Позначимо $L_1 = \langle a_1 \rangle = \{\alpha a_1 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, $L_2 = \langle a_2 \rangle = \{\beta a_2 \mid \beta \in \mathbb{R}\}$, $L_3 = \langle a_3 \rangle = \{\gamma a_3 \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$. Оскільки вектори a_1, a_2, a_3 — некомпланарні, то вони утворюють базис простору, тобто будь-який вектор x простору $\mathbb{R}^3$ можна однозначно розкласти в лінійну комбінацію $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$, при цьому $\lambda_1 a_1 \in L_1$, $\lambda_2 a_2 \in L_2$, $\lambda_3 a_3 \in L_3$. Цей розклад однозначний, а тому $\mathbb{R}^3 = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$.

Підпростір $L_1 + L_2$ — це площина, в якій лежать вектори a_1, a_2. Тоді $\mathbb{R}^3 = (L_1 + L_2) \oplus L_3$, $\mathbb{R}^3 = (L_1 + L_3) \oplus L_2$, $\mathbb{R}^3 = (L_2 + L_3) \oplus L_1$.

Означення 15. Векторний простір V називається прямою сумою своїх підпросторів $L_1, L_2, \ldots, L_k$ якщо виконуються дві умови:

1) $V = L_1 + L_2 + \cdots + L_k$,

2) Для довільного $i = \overline{1,k}$ виконується $L_i \cap (L_1 + L_2 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k) = \{\theta\}$.

Зауваження 1. У випадку $k = 2$ друга умова має вигляд $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Теорема 5. *Два означення прямої суми еквівалентні.*

Доведення. 1) З означення 14 випливає означення 15.

Нехай $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k$ в розумінні означення 14. Оскільки кожен вектор $x \in V$ можна розкласти в суму $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, де $x_i \in L_i$, $i = \overline{1,k}$, то $V \subseteq L_1 + L_2 + \cdots + L_k$. З іншого боку зрозуміло, що $L_1 + L_2 + \cdots + L_k \subseteq V$. Тому $V = L_1 + L_2 + \cdots + L_k$ — виконується перша умова.

Перевіримо виконання другої умови означення 15. Припустимо, що $z \in L_i \cap (L_1 + \cdots + L_{i-1} + L_{i+1} + \cdots + L_k)$. Тоді $z \in L_i$ і z також можна подати у вигляді $z = z_1 + \cdots + z_{i-1} + z_{i+1} + \cdots + z_k$, де $z_j \in L_j$, $j = \overline{1,k}$, $j \neq i$.

Тоді з одного боку $z = \theta + \dots + \theta + z + \theta + \dots + \theta$, де $\theta \in L_1, \dots, \theta \in L_{i-1}, z \in L_i, \theta \in L_{i+1}, \dots, \theta \in L_k$.

А з іншого боку $z = z_1 + \dots + z_{i-1} + \theta + z_{i+1} + \dots + z_k$, де $z_1 \in L_1, \dots, z_{i-1} \in L_{i-1}, \theta \in L_i, z_{i+1} \in L_{i+1}, \dots, z_k \in L_k,$.

Але вектор z можна розкласти в суму однозначно, а тому $z_j = \theta$, $j = \overline{1,k}$, $j \neq i$ та $z = \theta$. Отже, $L_i \cap (L_1 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_k) = \{\theta\}$, що і треба було довести.

2) З означення 15 випливає означення 14.

Нехай V є прямою сумою підпросторів $L_1, L_2, \dots, L_k$ в розумінні означення 15. Оскільки $V = L_1 + L_2 + \dots + L_k$, то довільний вектор $x \in V$ можна розкласти в суму $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$, $x_i \in L_i$, $i = \overline{1,k}$. Покажемо, що цей розклад єдиний.

Припустимо, що існує інший розклад $x = y_1 + y_2 + \dots + y_k$, $y_j \in L_j$, $j = \overline{1,k}$. Потрібно показати, що $x_i = y_i$ для всіх $i = \overline{1,k}$.

$$\theta = x - x = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \dots + (x_i - y_i) + \dots + (x_k - y_k).$$

Позначимо $z := x_i - y_i = (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) + \dots + (y_{i-1} - x_{i-1}) + (y_{i+1} - x_{i+1}) + \dots + (y_k - x_k)$. Тоді $z \in L_1 + L_2 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_k$ та з іншого боку $z = x_i - y_i \in L_i$. Але за означенням 15 $L_i \cap (L_1 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_k) = \{\theta\}$, тому $z = \theta$. Отже, $x_i = y_i$ для всіх $i = \overline{1,k}$. Таким чином, розклад $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$ є єдиним.

□

Теорема 6 (про базис прямої суми)**.** *Нехай скінченновимірний векторний простір V є прямою сумою своїх підпросторів $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$ і $B_1, B_2, \dots, B_k$ — відповідні базиси підпросторів $L_1, L_2, \dots, L_k$. Тоді система векторів $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$ утворює базис простору V.*

Доведення. Припустимо для визначеості, $B_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ — базис підпростору L_1, $B_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ — базис підпростору L_2, …, $B_k =$

$\{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ — базис підпростору L_k. Покажемо, що система векторів $\{a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_r, \ldots, c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ утворює базис простору V.

Перевіримо лінійну незалежність цієї системи. Беремо лінійну комбінацію $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_r b_r + \cdots + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_s c_s = \theta$. Позначимо

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m \in L_1,\\
x_2 &= \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_r b_r \in L_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_k &= \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_s c_s \in L_k.
\end{aligned}$$

Тоді $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = \theta$. Проте для θ існує інший розклад в суму $\theta = \theta + \theta + \cdots + \theta$, де $\theta \in L_1, \theta \in L_2, \ldots, \theta \in L_k$. Таким чином, за означенням 14 прямої суми $x_1 = \theta, x_2 = \theta, \ldots, x_k = \theta$. Звідси випливає, що $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m = \theta$, $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_r b_r = \theta, \ldots, \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_s c_s = \theta$. Отримали лінійну комбінацію базисних векторів, а тому $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_r = 0, \ldots,$ $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_s = 0$. Отже, лінійну незалежність доведено.

Довільний вектор $x \in V$ можна розкласти в суму $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, де $x_i \in L_i$, $i = \overline{1, k}$. Тоді вектор x_1 є лінійною комбінацією базису L_1, тобто векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$, x_2 є лінійною комбінацією векторів $b_1, b_2, \ldots, b_r, \ldots,$ x_k є лінійною комбінацією векторів $c_1, c_2, \ldots, c_s$. Таким чином, вектор x є лінійною комбінацією системи векторів

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_r, \ldots, c_1, c_2, \ldots, c_s\}.$$

Отже, система векторів $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ — базис простору V. □

Наслідок 3. *Якщо V — скінченновимірний векторний простір та $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k$, то $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2 + \cdots + \dim L_k$.*

Теорема 7 (про розмірності суми та петину підпросторів)**.** *Нехай L_1 і L_2 — підпростори скінченновимірного векторного простору V над полем F. Тоді*

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2).$$

Доведення. Зрозуміло, що $L_1 \cap L_2 \subseteq L_1$, $L_1 \cap L_2 \subseteq L_2$, а тому за теоремою 2 про базис можна доповнити базис підпростору $L_1 \cap L_2$ як до базису підпростору L_1, так і до базису підпростору L_2. Тому припустимо, що

$$B(L_1 \cap L_2) = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\} \text{ — базис підпростору } L_1 \cap L_2,$$

$$B(L_1) = \{c_1, c_2, \ldots, c_k, a_1, a_2, \ldots, a_r\} \text{ — базис підпростору } L_1,$$

$$B(L_2) = \{c_1, c_2, \ldots, c_k, b_1, b_2, \ldots, b_s\} \text{ — базис підпростору } L_2.$$

Тоді $\dim(L_1 \cap L_2) = k$, $\dim L_1 = k + r$, $\dim L_2 = k + s$. Треба показати, що $\dim(L_1 + L_2) + k = k + r + k + s$, або $\dim(L_1 + L_2) = k + r + s$.

Для цього доведемо, що система векторів $\{c_1, c_2, \ldots, c_k, a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_s\}$ утворює базис підпростору $L_1 + L_2$. Зрозуміло, що всі ці вектори належать підпростору $L_1 + L_2$, оскільки вони належать або L_1, або L_2. Доведемо лінійну незалежність.

Беремо лінійну комбінацію $\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_r a_r + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_s b_s = \theta$. Перепишемо це наступним чином $\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_r a_r = -\beta_1 b_1 - \beta_2 b_2 - \cdots - \beta_s b_s =: z$. Ліва частина цієї рівності є лінійною комбінацією базису L_1, тобто $z \in L_1$. В правій частині маємо лінійну комбінацію базисних векторів L_2, тобто $z \in L_2$. Тому $z \in L_1 \cap L_2$. Це означає, що вектор z є лінійною комбінацією базису підпростору $L_1 \cap L_2$: $z = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_k c_k$. Таким чином, $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_k c_k = -\beta_1 b_1 - \beta_2 b_2 - \cdots - \beta_s b_s$, або $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_k c_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_s b_s = \theta$. Отримали лінійну комбінацію базису L_2, тому $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_s = 0$, тобто $z = \theta$. Звідси випливає, що $\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_r a_r = \theta$, а це лінійна комбінація базису L_1. Таким чином, $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_k = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$. Отже, лінійну незалежність доведено.

Припустимо, що вектор $x \in L_1 + L_2$, тоді $x = x_1 + x_2$, де $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. Вектор x_1 є лінійною комбінацією базису L_1, тобто векторів $c_1, c_2, \ldots, c_k, a_1, a_2, \ldots, a_r$. Аналогічно вектор x_2 є лінійною комбінацією базису L_2, тобто векторів $c_1, c_2, \ldots, c_k, b_1, b_2, \ldots, b_s$. Тоді вектор x є лінійною комбінацією векторів $c_1, c_2, \ldots, c_k, a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_s$, тобто ці вектори утворюють базис підпростору $L_1 + L_2$ і $\dim(L_1 + L_2) = k + r + s$. $\square$

Приклад 2. Нехай у просторі $\mathbb{R}^3$ задано три некомпланарні вектори a_1, a_2, a_3. Розглянемо такі підпростори:

$$L_1 = \langle a_1 \rangle = \{\alpha a_1 \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$
$$L_2 = \langle a_2 \rangle = \{\beta a_2 \mid \beta \in \mathbb{R}\},$$
$$L_3 = \langle a_3 \rangle = \{\gamma a_3 \mid \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Позначимо $M_1 = L_1 + L_2,\ M_2 = L_2 + L_3$, Тоді $M_1 + M_2 = \mathbb{R}^3$, $M_1 \cap M_2 = L_2,\ \dim M_1 = 2,\ \dim M_2 = 2,\ \dim(M_1 + M_2) = 3,\ \dim(M_1 \cap M_2) = 1.$ Таким чином, $\dim M_1 + \dim M_2 = \dim(M_1 + M_2) + \dim(M_1 \cap M_2),\ 2 + 2 = 3 + 1.$

Розділ 3

Лінійні перетворення

1. Поняття лінійного перетворення

Означення 16. Нехай V_1, V_2 — векторні простори над полем F. Відображення $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ називається лінійним відображенням, якщо виконуються наступні умови:

1) для будь-яких $a, b \in V_1$ виконується $\mathcal{A}(a + b) = \mathcal{A}(a) + \mathcal{A}(b)$;

2) для будь-яких $a \in V_1$ і $\alpha \in F$ виконується $\mathcal{A}(\alpha a) = \alpha \mathcal{A}(a)$.

Ці дві умови можна замінити однією: для довільних $a, b \in V_1$, для довільних $\alpha, \beta \in F : \quad \mathcal{A}(\alpha a + \beta b) = \alpha \mathcal{A}(a) + \beta \mathcal{A}(b)$.

Якщо простори співпадають, тобто $V_1 = V_2 = V$, то лінійне відображення $\mathcal{A} : V \to V$ називається лінійним перетворенням векторного простору V або лінійним оператором на просторі V.

Визначимо деякі найпростіші властивості лінійних відображень. Припустимо, що V_1, V_2 — векторні простори над полем F, $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ — лінійне відображення.

1) Якщо $\theta_1 \in V_1$, $\theta_2 \in V_2$ — нульові елементи, то $\mathcal{A}(\theta_1) = \theta_2$.
Беремо $a \in V_1$, тоді $\mathcal{A}(\theta_1) = \mathcal{A}(0 \cdot a) = 0 \cdot \mathcal{A}(a) = \theta_2$.

2) Для довільного $a \in V_1 : \mathcal{A}(-a) = -\mathcal{A}(a)$.
$\mathcal{A}(-a) = \mathcal{A}((-1)a) = (-1)\mathcal{A}(a) = -\mathcal{A}(a)$.

3) Якщо $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V_1$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in F$, то $\mathcal{A}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k) = \alpha_1 \mathcal{A}(a_1) + \alpha_2 \mathcal{A}(a_2) + \cdots + \alpha_k \mathcal{A}(a_k)$.

Лінійні відображення $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ і $\mathcal{B} : V_1 \to V_2$ вважаються рівними, якщо $\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)$ для всіх $x \in V_1$.

2. Приклади лінійних перетворень

1. Нехай V — векторний простір над полем F, $\mathcal{E} : V \to V$ таке, що $\mathcal{E}(x) = x$ для всіх $x \in V$. Це відображення є лінійним перетворенням, яке називається тотожним або одиничним.

2. Нехай V векторний простір над полем F, $\mathcal{O} : V \to V$ таке, що $\mathcal{O}(x) = \theta$ для всіх $x \in V$. Це лінійне перетворення називається нульовим.

3. На просторі V над полем F введемо відображення $F_\alpha : V \to V$, де $\alpha \in F$ — фіксований скаляр, та $F_\alpha(x) = \alpha x$ для всіх $x \in V$. Перевіримо лінійність відображення F_α. Нехай $x_1, x_2 \in V$, $\lambda_1, \lambda_2 \in F$, тоді $F_\alpha(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \alpha(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \alpha x_1 + \lambda_2 \alpha x_2 = \lambda_1 F_\alpha(x_1) + \lambda_2 F_\alpha(x_2)$. Лінійне перетворення F_α називається перетворенням гомотетії.

4. На просторі $\mathbb{R}^2$ векторів на площині візьмемо оператор $\mathcal{A}_\varphi$ — поворот вектора на кут φ навколо початку координат проти годинникової стрілки.

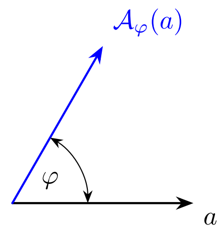

Рис. 3.1. Дія оператора $\mathcal{A}_\varphi$.

Перевіримо лінійність цього перетворення. Оскільки при повороті паралелограм переходить у паралелограм, а довжини векторів зберігаються, то діагональ паралелограма переходить у діагональ паралелограма. Таким чином, $\mathcal{A}_\varphi(a + b) = \mathcal{A}_\varphi(a) + \mathcal{A}_\varphi(b)$.

Якщо $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\mathcal{A}_\varphi(\alpha a) = \alpha \mathcal{A}_\varphi(a)$. Домноження вектора на число

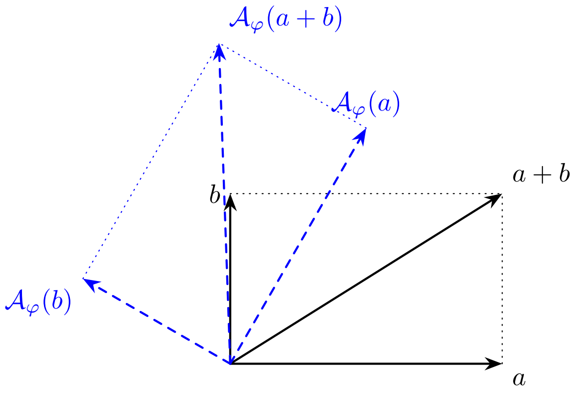

Рис. 3.2. Поворот паралелограма на кут φ.

α змінює його довжину, а при $\alpha < 0$ — ще й напрямок на протилежний. Тому можна спочатку вектор домножити на число α, а потім повернути, або спочатку повернути, а потім домножити на число α. Отже, $\mathcal{A}_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — лінійне перетворення.

5. На просторі $F[x]$ всіх многочленів над полем F введемо оператор $\mathcal{D} : F[x] \to F[x]$ взяття похідної, тобто для довільного $f \in F[x]$: $\mathcal{D}(f) = f'$. Тоді відображення $\mathcal{D}$ є лінійним перетворенням простору $F[x]$.

Лема 2. *Нехай V — скінченновимірний векторний простір над полем F, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий базис простору V, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in V$ — деяка система векторів. Тоді існує єдине лінійне перетворення $\mathcal{A} : V \to V$ таке, що $\mathcal{A}(a_1) = b_1,\ \mathcal{A}(a_2) = b_2,\ \ldots,\ \mathcal{A}(a_n) = b_n$.*

Доведення. Визначимо відображення $\mathcal{A} : V \to V$. Беремо довільний вектор $x \in V$. Цей вектор можна однозначно розкласти в лінійну комбінацію базису $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$. Покладемо $\mathcal{A}(x) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n$.

Перевіримо чи відображення $\mathcal{A}$ є лінійним перетворенням. Для цього візьмемо два довільні вектори $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n \in V$, $y = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n \in V$. Тоді

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \beta_2)a_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)a_n,$$
$$\mathcal{A}(x + y) = (\alpha_1 + \beta_1)b_1 + (\alpha_2 + \beta_2)b_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)b_n =$$
$$= (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n) + (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_n b_n) =$$
$$= \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y).$$

Нехай $\lambda \in F$, $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n \in V$. Тоді

$$\lambda x = \lambda\alpha_1 a_1 + \lambda\alpha_2 a_2 + \dots + \lambda\alpha_n a_n,$$
$$\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda\alpha_1 b_1 + \lambda\alpha_2 b_2 + \dots + \lambda\alpha_n b_n =$$
$$= \lambda(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n) = \lambda\mathcal{A}(x).$$

Тобто $\mathcal{A} : V \to V$ — лінійне перетворення і при цьому очевидно, що $\mathcal{A}(a_1) = b_1$, $\mathcal{A}(a_2) = b_2, \dots, \mathcal{A}(a_n) = b_n$.

Припустимо, що існує ще одне лінійне перетворення $\mathcal{B} : V \to V$ таке, що $\mathcal{B}(a_1) = b_1$, $\mathcal{B}(a_2) = b_2, \dots, \mathcal{B}(a_n) = b_n$. Беремо довільний вектор $x \in V$, $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$, тоді $\mathcal{B}(x) = \alpha_1\mathcal{B}(a_1) + \alpha_2\mathcal{B}(a_2) + \dots + \alpha_n\mathcal{B}(a_n) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n = \mathcal{A}(x)$. Це означає, що для довільного вектора $x \in V : \mathcal{B}(x) = \mathcal{A}(x)$, тобто $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ і $\mathcal{A}$ єдине. $\square$

З останньої леми випливає, що лінійне перетворення скінченновимірного простору цілком визначається своїми значеннями на векторах деякого базису. Таким чином, щоб задати лінійне перетворення скінченновимірного простору, достатньо задати образи векторів деякого базису.

3. Матриця лінійного перетворення базиса

Означення 17. Нехай $\mathcal{A}$ — лінійне перетворення скінченновимірного простору V над полем F, $a_1, a_2, \dots, a_n$ — деякий фіксований базис простору V. Тоді вектори $\mathcal{A}(a_1), \mathcal{A}(a_2), \dots, \mathcal{A}(a_n)$ лінійно виражаються через базис:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(a_1) = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \dots + \alpha_{n1}a_n,\\
&\mathcal{A}(a_2) = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \dots + \alpha_{n2}a_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\mathcal{A}(a_n) = \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \dots + \alpha_{nn}a_n.
\end{aligned}$$

Складемо відповідну матрицю A, яка називається матрицею лінійного перетворення $\mathcal{A}$ в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Таким чином, для того, щоб виписати матрицю лінійного перетворення в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$, виконуємо наступні кроки:

1) знаходимо образи базисних векторів $\mathcal{A}(a_1), \mathcal{A}(a_2), \dots, \mathcal{A}(a_n)$, тобто їх координати в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$;

2) ці координати виписуємо в стовпчики матриці:
   в 1-ий стовпчик — координати образу першого базисного вектора,
   в 2-ий стовпчик — координати образу другого базисного вектора, і т.д.

Визначимо деякі властивості матриці лінійного перетворення.

1) Лінійні перетворення $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ скінченновимірного векторного простору V рівні тоді і тільки тоді, коли в деякому базисі їм відповідають однакові матриці.

   Якщо перетворення рівні, то в будь-якому базисі їх матриці однакові. Тому, нехай в деякому базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ перетворенням $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ відповідають однакові матриці. За означенням матриці лінійного перетворення $\mathcal{A}(a_i) = \mathcal{B}(a_i)$ для всіх $i = \overline{1, n}$. З леми випливає, що лінійне перетворення однозначно визначається образами векторів деякого базису. Тому, якщо образи векторів даного базису при двох лінійних перетвореннях рівні, то й самі перетворення рівні. Отже, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

2) Нехай V — скінченновимірний простір над полем F, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий базис простору V, $C = (\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ — деяка квадратна матриця з елементами з поля F. Тоді існує єдине лінійне перетворення $\mathcal{A}$ векторного простору V, якому в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ відповідає матриця C.

   Беремо систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_n \in V$. Під вектором b_i, $i = \overline{1,n}$ розуміємо вектор, координати якого в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є елементами i-го стовпчика матриці C, тобто $b_i = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \cdots + \alpha_{ni}a_n, i = \overline{1,n}$. За лемою існує єдине лінійне перетворення $\mathcal{A} : V \to V$ таке, що $\mathcal{A}(a_1) = b_1, \mathcal{A}(a_2) = b_2, \ldots, \mathcal{A}(a_n) = b_n$. Зрозуміло, що перетворенню $\mathcal{A}$ в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ відповідає матриця C.

   Зауваження 2. Припустимо, що V — скінченновимірний простір над полем F, a_1, $a_2, \ldots, a_n$ — деякий базис простору V. Позначимо G — множина всіх лінійних перетворень простору V, T — множина всіх квадратних матриць порядку n з елементів з поля F. Тоді при фіксованому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ між множинами G і T існує взаємно однозначна відповідність.

3) Припустимо, що $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — базис векторного простору V над полем F, $\mathcal{A} : V \to V$ — лінійне перетворення, якому в даному базисі відповідає матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

   Нехай вектори $a_1, a_2, \ldots, a_n$ і $\mathcal{A}(a_1), \mathcal{A}(a_2), \ldots, \mathcal{A}(a_n)$ задаються координатами в деякому іншому базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ простору V. Тобто $a_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{21}, \ldots, \lambda_{n1}), a_2 = (\lambda_{12}, \lambda_{22}, \ldots, \lambda_{n2}), \ldots,$
   $a_n = (\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \ldots, \lambda_{nn})$. Аналогічно $\mathcal{A}(a_1) = (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{n1})$,

$\mathcal{A}(a_2) = (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{n2}), \dots, \mathcal{A}(a_n) = (\gamma_{1n}, \gamma_{2n}, \dots, \gamma_{nn})$. Складемо матриці

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} = \left(a_1 \; \middle| \; a_2 \; \middle| \; \cdots \; \middle| \; a_n \right),$$

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} = \left(\mathcal{A}(a_1) \; \middle| \; \mathcal{A}(a_2) \; \middle| \; \cdots \; \middle| \; \mathcal{A}(a_n) \right).$$

Тоді за означенням матриці лінійного перетворення

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(a_1) &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \dots + \alpha_{n1}a_n, \\ \mathcal{A}(a_2) &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \dots + \alpha_{n2}a_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{A}(a_n) &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \dots + \alpha_{nn}a_n; \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \vdots \\ \gamma_{n1} \end{pmatrix} = \alpha_{11} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_{21} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{n1} \begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \lambda_{2n} \\ \vdots \\ \lambda_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \vdots \\ \gamma_{n2} \end{pmatrix} = \alpha_{12} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_{22} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{n2} \begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \lambda_{2n} \\ \vdots \\ \lambda_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \\ \vdots \\ \gamma_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_{1n} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_{2n} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{nn} \begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \lambda_{2n} \\ \vdots \\ \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

Отже, $C = BA$.

4. Координати образу вектора при лінійному перетворенні

Теорема 8. *Нехай $\mathcal{A}$ — лінійне перетворення скінченновимірного простору V над полем F; $a_1, a_2, \dots, a_n$ — деякий фіксований базис простору V, в якому перетворенню $\mathcal{A}$ відповідає матриця $A = (\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $x \in V$ — довільний вектор, координати якого в даному базисі є $x = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, а координати вектора $\mathcal{A}(x) = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$. Тоді виконується рівність*

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Доведення. За умовою $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$, а $\mathcal{A}(x) = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$. За означенням матриці лінійного перетворення

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(a_1) &= \alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + \cdots + \alpha_{n1} a_n, \\ \mathcal{A}(a_2) &= \alpha_{12} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \cdots + \alpha_{n2} a_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{A}(a_n) &= \alpha_{1n} a_1 + \alpha_{2n} a_2 + \cdots + \alpha_{nn} a_n. \end{aligned}$$

Тоді

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n) =$$
$$= \lambda_1 \mathcal{A}(a_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(a_2) + \cdots + \lambda_n \mathcal{A}(a_n) =$$
$$= \lambda_1(\alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + \cdots + \alpha_{n1} a_n) + \lambda_2(\alpha_{12} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \cdots + \alpha_{n2} a_n) +$$
$$+ \cdots + \lambda_n(\alpha_{1n} a_1 + \alpha_{2n} a_2 + \cdots + \alpha_{nn} a_n) =$$
$$= (\alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{1n}\lambda_n) a_1 + (\alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{2n}\lambda_n) a_2 +$$
$$+ \cdots + (\alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{nn}\lambda_n) a_n.$$

Але розклад вектора в в лінійну комбінацію векторів єдиний, тому

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 = \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{1n}\lambda_n, \\
&\gamma_2 = \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{2n}\lambda_n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\gamma_n = \alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{nn}\lambda_n,
\end{aligned}$$

або в матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

□

Таким чином, щоб знайти координати образу вектора в даному базисі, потрібно вектор-стовпчик його координат в даному базисі домножити на матрицю лінійного перетворення в цьому ж базисі.

5. Приклади матриць лінійних перетворень

1. У просторі $\mathbb{R}^2$ векторів на площині в базисі e_1, e_2 знайдемо матрицю лінійного перетворення $\mathcal{A}_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ повороту вектора на кут φ проти годинникової стрілки. Зрозуміло, що

   $$\mathcal{A}_\varphi(e_1) = (\cos\varphi)e_1 + (\sin\varphi)e_2, \quad \mathcal{A}_\varphi(e_2) = (-\sin\varphi)e_1 + (\cos\varphi)e_2.$$

   Тоді матриця

   $$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

2. У просторі $F_n[x]$ задано базис $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Знайдемо матрицю лінійного перетворення $\mathcal{D} : F_n[x] \to F_n[x]$, де $\mathcal{D}$ - похідна, тобто $\mathcal{D}(f) =$

f'.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(1) = (1)' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^n, \\
&\mathcal{D}(x) = (x)' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^n, \\
&\mathcal{D}(x^2) = (x^2)' = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\mathcal{D}(x^n) = (x^n)' = nx^{n-1} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \dots + n \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^n.
\end{aligned}$$

Тоді матриця перетворення $\mathcal{D}$ у базисі $1, x, x^2, \dots, x^n$ має вигляд:

$$D = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

6. Ядро та образ лінійного перетворення

6.1. Ядро лінійного перетворення

Нехай $\mathcal{A}$ — лінійне перетворення векторного простору V над полем F.

Означення 18. Ядром лінійного перетворення $\mathcal{A}$ називається множина $\ker \mathcal{A} = \{x \in V \mid \mathcal{A}(x) = \theta\}$.

Покажемо, що ядро лінійного перетворення є підпростором. Зрозуміло, що $\theta \in \ker \mathcal{A}$. Тому $\ker \mathcal{A} \neq \emptyset$. Оберемо $a, b \in \ker \mathcal{A}$, $\alpha, \beta \in F$. Тоді $\mathcal{A}(\alpha a + \beta b) = \alpha \mathcal{A}(a) + \beta \mathcal{A}(b) = \alpha\theta + \beta\theta = \theta$. Таким чином, $\alpha a + \beta b \in \ker \mathcal{A}$, тобто ядро — підпростір.

6.2. Знаходження базису ядра лінійного перетворення

Припустимо, що $\mathcal{A}$ — лінійне перетворення скінченновимірного векторного простору V над полем F, $a_1, a_2, \dots, a_n$ — деякий фіксований базис простору V, в якому перетворенню $\mathcal{A}$ відповідає матриця

$A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Будемо вважати, що всі вектори простору задано координатами в цьому базисі. Беремо $x \in \ker \mathcal{A}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n, x_i \in F, i = \overline{1, n}$. Вектор $x \in \ker \mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{A}(x) = \theta$, тобто

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Це рівносильно системі рівнянь:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = 0, \\ &\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \cdots + \alpha_{nn}x_n = 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Таким чином, координати вектора x є розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь (6.1). Тобто множина $\ker \mathcal{A}$ є множиною всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь. Тому базисом ядра можна вважати фундаментальну систему розв'язків системи (6.1). Якщо ранг матриці системи однорідних рівнянь дорівнює r, то розмірність ядра $\dim \ker \mathcal{A} = n - r$. Звідси, зокрема, випливає, що ранг матриці лінійного перетворення скінченновимірного простору не залежить від вибору базису.

Означення 19. Дефектом лінійного перетворення $\mathcal{A}$ скінченновимірного простору називається розмірність його ядра, $\operatorname{def} \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A}$.

Означення 20. Лінійний оператор $\mathcal{A}$ простору V називається невиродженим, якщо $\ker \mathcal{A} = \{\theta\}$.

Якщо V — скінченновимірний простір і в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ перетворенню $\mathcal{A}$ відповідає матриця $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$, то ядро $\ker \mathcal{A}$ співпадає з множиною всіх розв'язків системи рівнянь (6.1). Таким чином, перетворення $\mathcal{A}$ невироджене тоді і тільки тоді, коли система однорідних рівнянь (6.1) має лише нульовий розв'язок. Оскільки число рівнянь і число змінних в системі однакові, то $\operatorname{def} \mathcal{A} \neq 0$. Таким чином, лінійне перетворення скінченновимірного простору невироджене тоді і тільки тоді, коли в деякому базисі йому відповідає невироджена матриця.

6.3. Поняття образу лінійного перетворення

Нехай $\mathcal{A}$ — лінійне перетворення векторного простору V над полем F.

Означення 21. Образом лінійного перетворення $\mathcal{A}$ називається множина $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{\mathcal{A}(x) \mid x \in V\}$.

Покажемо, що образ лінійного перетворення є підпростором. Беремо $x_1, x_2 \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$, $\alpha, \beta \in F$. Це означає, що існують $y_1, y_2 \in V$ такі, що $x_1 = \mathcal{A}(y_1)$, $x_2 = \mathcal{A}(y_2)$. Тому $\mathcal{A}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \mathcal{A}(y_1) + \beta \mathcal{A}(y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$.

6.4. Знаходження базису образу лінійного перетворення

Нехай $\mathcal{A}$ — лінійне перетворення скінченновимірного векторного простору V над полем F, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий фіксований базис простору V. Покажемо, що $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \langle \mathcal{A}(a_1), \mathcal{A}(a_2), \ldots, \mathcal{A}(a_n) \rangle$.

Беремо $x \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$, тоді існує $y \in V$ такий, що $x = \mathcal{A}(y)$. Розкладемо вектор y в лінійну комбінацію базису $y = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$. Тоді $x = \mathcal{A}(y) = \alpha_1 \mathcal{A}(a_1) + \alpha_2 \mathcal{A}(a_2) + \ldots + \alpha_n \mathcal{A}(a_n)$, тобто $x \in \langle \mathcal{A}(a_1), \mathcal{A}(a_2), \ldots, \mathcal{A}(a_n) \rangle$. Таким чином, $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subseteq \langle \mathcal{A}(a_1), \mathcal{A}(a_2), \ldots, \mathcal{A}(a_n) \rangle$.

Навпаки, беремо $x \in \langle \mathcal{A}(a_1), \mathcal{A}(a_2), \ldots, \mathcal{A}(a_n) \rangle$. Тоді $x = \beta_1 \mathcal{A}(a_1) + \beta_2 \mathcal{A}(a_2) + \ldots + \beta_n \mathcal{A}(a_n) = \mathcal{A}(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_n a_n) \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$. Отже, $\langle \mathcal{A}(a_1), \mathcal{A}(a_2), \ldots, \mathcal{A}(a_n) \rangle \subseteq \operatorname{Im} \mathcal{A}$.

Звідси випливає, що базисом образу $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ можна вважати, наприклад, деякий базис системи векторів $\{\mathcal{A}(a_1), \mathcal{A}(a_2), \ldots, \mathcal{A}(a_n)\}$.

6.5. Теорема про розмірності ядра та образу лінійного перетворення

Теорема 9. *Нехай* $\mathcal{A}$ *— лінійне перетворення векторного простору* V *над полем* F *і розмірність* V $\dim V = n$*. Тоді*

$$\dim\ker\mathcal{A} + \dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = n.$$

Доведення. Нехай $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ — базис ядра $\ker\mathcal{A}$, доповнимо його до базису простору V векторами $b_1, b_2, \ldots, b_{n-k}$. Покажемо, що система векторів $\{\mathcal{A}(b_1), \mathcal{A}(b_2), \ldots, \mathcal{A}(b_{n-k})\}$ утворює базис образу $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.

Перевіримо лінійну незалежність. Беремо лінійну комбінацію

$$\beta_1\mathcal{A}(b_1) + \beta_2\mathcal{A}(b_2) + \ldots + \beta_{n-k}\mathcal{A}(b_{n-k}) = \theta.$$

Тоді

$$\mathcal{A}(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_{n-k}b_{n-k}) = \theta.$$

Звідси випливає, що $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_{n-k}b_{n-k} \in \ker\mathcal{A}$, тобто цей вектор можна розкласти в лінійну комбінацію базису ядра $\ker\mathcal{A}$:

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_{n-k}b_{n-k} = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k, \text{ або}$$

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k - \beta_1 b_1 - \beta_2 b_2 - \ldots - \beta_{n-k}b_{n-k} = \theta.$$

Одержали лінійну комбінацію базису, а тому $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{n-k} = 0$.

Беремо $x \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$, тоді існує $y \in V$ такий, що $x = \mathcal{A}(y)$. Вектор y розкладемо в лінійну комбінацію базису

$$y = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_{n-k}b_{n-k}.$$

Тоді $x = \mathcal{A}(y) = \alpha_1\mathcal{A}(a_1) + \alpha_2\mathcal{A}(a_2) + \ldots + \alpha_k\mathcal{A}(a_k) + \beta_1\mathcal{A}(b_1) + \beta_2\mathcal{A}(b_2) + \ldots + \beta_{n-k}\mathcal{A}(b_{n-k})$. Оскільки вектори $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \ker\mathcal{A}$, то

$$x = \beta_1\mathcal{A}(b_1) + \beta_2\mathcal{A}(b_2) + \ldots + \beta_{n-k}\mathcal{A}(b_{n-k}).$$

Таким чином, вектори $\{\mathcal{A}(b_1), \mathcal{A}(b_2), \ldots, \mathcal{A}(b_{n-k})\}$ утворюють базис образу $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Отже, $\dim\ker\mathcal{A} = k$, $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = n-k$, $\dim\ker\mathcal{A} + \dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = n$.

$\square$

6.6. Поняття рангу лінійного перетворення

Означення 22. Рангом лінійного перетворення $\mathcal{A} : V \to V$ скінченновимірного векторного простору V над полем F називається розмірність його образу

$$r(\mathcal{A}) = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}.$$

Покажемо, що $r(\mathcal{A})$ співпадає з рангом його матриці. Нехай у даному фіксованому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ перетворенню $\mathcal{A}$ відповідає матриця $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Ядро перетворення $\ker \mathcal{A}$ є множиною всіх розв'язків системи лінійних рівнянь (6.1) з n невідомими. Якщо ранг матриці дорівнює r, то $\dim \ker \mathcal{A} = n - r$. Тоді $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n - (n - r) = r$. Таким чином, $r(\mathcal{A}) = r(A)$ в будь-якому базисі.

7. Алгебра лінійних операторів

Вважатимемо, що всі оператори діють на векторному просторі V над полем F.

1. Нульовий оператор.

   На векторному просторі V введемо оператор $\mathcal{O} : V \to V$ такий, що для всіх $x \in V : \mathcal{O}(x) = \theta$. Такий оператор називається нульовим оператором. Якщо V — скінченновимірний простір, то в будь-якому базисі нульовому оператору відповідає нульова матриця.

2. Одиничний оператор.

   На векторному просторі V введемо оператор $\mathcal{E} : V \to V$ такий, що для всіх $x \in V : \mathcal{E}(x) = x$. Цей оператор називається одиничним і якщо V – скінченновимірний простір, то в будь-якому базисі одиничному оператору відповідає одинична матриця E.

3. Сума операторів.

   Нехай $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — оператори на векторному просторі V. Визначимор відображення $\mathcal{A} + \mathcal{B}$. Для всіх $x \in V : (\mathcal{A} + \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)$.

Покажемо, що відображення $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ — лінійне. Беремо $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Тоді $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\alpha x+\beta y) = \mathcal{A}(\alpha x+\beta y)+\mathcal{B}(\alpha x+\beta y) = \alpha\mathcal{A}(x)+\beta\mathcal{A}(y)+\alpha\mathcal{B}(x) + \beta\mathcal{B}(y) = \alpha(\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)) + \beta(\mathcal{A}(y) + \mathcal{B}(y)) = \alpha(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x) + \beta(\mathcal{A} + \mathcal{B})(y)$. Отже, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ — лінійний оператор.

Припустимо, що V — скінченновимірний простір, $a_1, a_2, \dots, a_n$ — деякий фіксований базис простору V, в якому оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$, оператору $\mathcal{B}$ — матриця $B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^n$, а оператору $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ — матриця $C = (\gamma_{ij})_{i,j=1}^n$. За означенням матриці лінійного оператора для довільного $i = \overline{1,n}$: $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(a_i) = \gamma_{1i}a_1 + \gamma_{2i}a_2 + \dots + \gamma_{ni}a_n$. Але $\mathcal{A}(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \dots + \alpha_{ni}a_n$, $\mathcal{B}(a_i) = \beta_{1i}a_1 + \beta_{2i}a_2 + \dots + \beta_{ni}a_n$. Тому, $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(a_i) = (\alpha_{1i} + \beta_{1i})a_1 + (\alpha_{2i} + \beta_{2i})a_2 + \dots + (\alpha_{ni} + \beta_{ni})a_n$. Звідси випливає, що $\gamma_{1i} = \alpha_{1i} + \beta_{1i}, \gamma_{2i} = \alpha_{2i} + \beta_{2i}, \cdots, \gamma_{ni} = \alpha_{ni} + \beta_{ni}$. Отже, $C = A + B$ і лінійному оператору $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ відповідає матриця $A + B$.

4. Множення оператора на скаляр.

   Припустимо $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на просторі V, $\lambda \in F$ — фіксований скаляр. Визначимо відображення $(\lambda\mathcal{A})$. Для довільного $x \in V$: $(\lambda\mathcal{A})(x) = \lambda\mathcal{A}(x)$. Перевіримо лінійність цього відображення. Беремо $x, y \in V, \alpha, \beta \in F : (\lambda\mathcal{A})(\alpha x + \beta y) = \lambda(\mathcal{A}(\alpha x + \beta y)) = \lambda(\alpha\mathcal{A}(x) + \beta\mathcal{A}(y)) = \alpha\lambda\mathcal{A}(x) + \beta\lambda\mathcal{A}(y) = \alpha(\lambda\mathcal{A})(x) + \beta(\lambda\mathcal{A})(y)$.

   Якщо V — скінченновимірний простір, $a_1, a_2, \dots, a_n$ — деякий базис V, в якому оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$, то в цьому ж базисі оператору $\lambda\mathcal{A}$ відповідає матриця $\lambda A = (\lambda\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$.

5. Протилежний оператор.

   Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на просторі V. Покладемо $(-\mathcal{A}) = (-1)\mathcal{A}$, оператор $-\mathcal{A}$ називається протилежним до оператора $\mathcal{A}$. Беремо $x \in V$, тоді $(\mathcal{A}+(-\mathcal{A}))(x) = \mathcal{A}(x)+(-\mathcal{A})(x) = \mathcal{A}(x)+(-1)\mathcal{A}(x) = (1 - 1)\mathcal{A}(x) = 0\mathcal{A}(x) = \theta$. Таким чином $\mathcal{A} + (-\mathcal{A}) = \mathcal{O}$.

   Позначимо $L(V)$ — множина всіх лінійних операторів на векторному просторі V над полем F. Тоді з доведеного випливає, що сама множина $L(V)$ утворює векторний простір над полем F відносно операцій $+$ та $\cdot$ на скаляри з поля F.

Припустимо V — скінченновимірний простір, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ деякий фіксований базис. Тоді діям над операторами відповідають дії над матрицями цих операцій в цьому базисі. Таким чином, при фіксованому базисі існує ізоморфізм між простором $L(V)$ операторів і простором всіх квадратних матриць порядку n з елементами з поля F.

Звідси, зокрема, випливає що розмірність простору $\dim L(V) = n^2$.

6. Добуток операторів.
Припустимо, що $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — лінійні оператори на просторі V. Визначимо відображенням $(\mathcal{AB})$. Для довільного $x \in V : (\mathcal{AB})(x) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x))$. Перевіримо лінійність цього відображення. Беремо $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in F : (\mathcal{AB})(\alpha x + \beta y) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha x + \beta y)) = \mathcal{A}(\alpha\mathcal{B}(x) + \beta\mathcal{B}(y)) = \alpha\mathcal{A}(\mathcal{B}(x)) + \beta\mathcal{A}(\mathcal{B}(y)) = \alpha(\mathcal{AB})(x) + \beta(\mathcal{AB})(y)$.

Зрозуміло, що для будь-якого оператора $\mathcal{A}$ на просторі V виконується $\mathcal{A} \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{O}$, $\mathcal{A} \cdot \mathcal{E} = \mathcal{E} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Нехай V — скінченновимірний простір, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — фіксований базис у якому оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$, оператору $\mathcal{B}$ — матриця $B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^n$, оператору $\mathcal{AB}$ — матриця $C = (\gamma_{ij})_{i,j=1}^n$. Тоді з одного боку $(\mathcal{AB})(a_i) = \gamma_{1i}a_1 + \gamma_{2i}a_2 + \cdots + \gamma_{ni}a_n$. З іншого боку $(\mathcal{AB})(a_i) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(a_i)) = \mathcal{A}(\beta_{1i}a_1 + \beta_{2i}a_2 + \ldots \beta_{ni}a_n) = \beta_{1i}\mathcal{A}(a_1) + \beta_{2i}\mathcal{A}(a_2) + \ldots + \beta_{ni}\mathcal{A}(a_n) = \beta_{1i}(\alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \ldots + \alpha_{n1}a_n) + \beta_{2i}(\alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \ldots + \alpha_{n2}a_n) + \ldots + \beta_{ni}(\alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \ldots + \alpha_{nn}a_n) = (\alpha_{11}\beta_{1i} + \alpha_{12}\beta_{2i} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{ni})a_1 + (\alpha_{21}\beta_{1i} + \alpha_{22}\beta_{2i} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{ni})a_2 + \ldots + (\alpha_{n1}\beta_{1i} + \alpha_{n2}\beta_{2i} + \ldots + \alpha_{nn}\beta_{ni})a_n$. Але розклад вектора в лінійну комбінацію базису єдиний. Тому

$$\begin{aligned}
\gamma_{1i} &= \alpha_{11}\beta_{1i} + \alpha_{12}\beta_{2i} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{ni},\\
\gamma_{2i} &= \alpha_{21}\beta_{1i} + \alpha_{22}\beta_{2i} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{ni},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\gamma_{1i} &= \alpha_{n1}\beta_{1i} + \alpha_{n2}\beta_{2i} + \ldots + \alpha_{nn}\beta_{ni}.
\end{aligned}$$

Таким чином щоб одержати елементи i-того стовпчика матриці C треба послідовно всі рядки матриці A домножити на i-тий стовпчик матриці B. Це означає що $C = AB$. Отже, при фіксованому базисі добутку операторів відповідає добуток матриць цих операторів.

Означення 23. Лінійні оператори $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ векторного простору V називають переставними, якщо $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$.

Якщо V — скінченновимірний простір, то в будь-якому базисі переставним операторам відповідають переставні матриці.

8. Поняття оберненого оператора

Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на векторному просторі V. Якщо для нього існує лінійний оператор $\mathcal{B}$ на просторі V такий що $\mathcal{AB} = \mathcal{BA} = \mathcal{E}$, то оператор $\mathcal{B}$ називається оберненим для $\mathcal{A}$ і позначається $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$.

Виникають питання:

1) Чи для кожного оператора існує обернений?

2) Скільки для даного оператора може існувати обернених?

3) Як знайти обернений оператор?

1) Нехай $\mathcal{O}$ — нульовий оператор на векторному просторі V. Тоді для будь-якого лінійного опертора $\mathcal{A}$ на $V : \mathcal{OA} = \mathcal{AO} = \mathcal{O}$, тобто для нульового оператора не існує оберненого.

2) Припустимо для даного лінійного оператора $\mathcal{A}$ на просторі V існують оператори $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}$ на просторі V такі, що $\mathcal{AB} = \mathcal{BA} = \mathcal{E}$; $\mathcal{AF} = \mathcal{FA} = \mathcal{E}$.

Розглянемо оператор $\mathcal{BAF}$. З одного боку $\mathcal{BAF} = \mathcal{B}(\mathcal{AF}) = \mathcal{BE} = \mathcal{B}$, з іншого боку $\mathcal{BAF} = (\mathcal{BA})\mathcal{F} = \mathcal{EF} = \mathcal{F}$. Тобо $\mathcal{B} = \mathcal{F}$. Таким чином, якщо існує обернений, то він єдиний.

Існування оберненого оператора

Доведемо спочатку таке твердження. Якщо для даного оператора $\mathcal{A}$ існує $\mathcal{A}^{-1}$, то оператор $\mathcal{A}$ взаємно однозначний.
Нехай $x \in V$, $y = \mathcal{A}(x)$. Тоді $\mathcal{A}^{-1}(y) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(x)) = (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A})(x) = \mathcal{E}(x) = x$. Таким чином, якщо для $x_1, x_2 \in V$ $\mathcal{A}(x_1) = \mathcal{A}(x_2) = y$, то $\mathcal{A}^{-1}(y) = x_1$, $\mathcal{A}^{-1}(y) = x_2$, тобто $x_1 = x_2$.

Теорема 10. *Лінійний оператор на скінченновимірному просторі має обернений тоді й тільки тоді, коли в деякому базисі йому відповідає невироджена матриця.*

Доведення. Припустимо для лінійного оператора $\mathcal{A}$ на векторному просторі існує обернений і $a_1, a_2, \dots a_n$ — декий базис простору V. Припустимо також що в цьому базисі оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця A, а оператору $\mathcal{A}^{-1}$ — матриця B. У будь-якому базисі одиничному оператору $\mathcal{E}$ відповідає одинична матриця E. Оскільки для оператора виконується $\mathcal{AA}^{-1} = \mathcal{E}$, то для матриць $AB = E$, тобто $B = A^{-1}$ і A — невироджена.

Припустимо, в даному базисі $a_1, a_2, \dots a_n$ оператору $\mathcal{A}$ відповідає невироджена матриця A, тобто існує матриця A^{-1}. Позначимо через $\mathcal{B}$ лінійний оператор на просторі V, якому в цьому базисі відповідає матриця A^{-1}. Для матриць виконується $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Тоді для операторів $\mathcal{AB} = \mathcal{BA} = \mathcal{E}$, тобто за означенням $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$. □

Зауваження 3. Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на скінченновимірному просторі V, якому в даному фіксованому базисі $a_1, a_2, \dots a_n$ відповідає матриця A. Якщо для $\mathcal{A}$ існує обернений, то в цьому ж базисі оператору $\mathcal{A}^{-1}$ відповідає обернена матриця A^{-1}.

Еквівалентні умови існування оберненого оператора

Теорема 11. *Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на скінченновимірному просторі V. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1) для $\mathcal{A}$ існує $\mathcal{A}^{-1}$;

2) оператор $\mathcal{A}$ базис простору переводить в базис простору;

3) оператор $\mathcal{A}$ будь-яку лінійно незалежну систему векторів переводить в лінійно незалежну систему;

4) $\ker \mathcal{A} = \{\theta\}$*;*

5) $\operatorname{Im} \mathcal{A} = V$*;*

6) у будь-якому базисі оператору $\mathcal{A}$ відповідає невироджена матриця;

7) оператор $\mathcal{A}$ взаємнооднозначний.

Вправа 1. Довести останню теорему.

9. Зв'язок матриць лінійного оператора в різних базисах

Теорема 12. *Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на скінченновимірному просторі V над полем F. $B_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ — два базиси простору V. $F = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ — матриця переходу від базису B_1 до B_2. Оператору $\mathcal{A}$ в базисі B_1 відповідає матриця $A = (\lambda_{ij})_{i,j=1}^n$, а в базисі B_2 — матриця $B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^n$. Тоді $B = F^{-1}AF$.*

Доведення. За означенням матриці переходу

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \ldots + \alpha_{n1}a_n, \\
b_2 &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \ldots + \alpha_{n2}a_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_n &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \ldots + \alpha_{nn}a_n.
\end{aligned}
$$

Позначимо через $\mathcal{F}$ — лінійний оператор на просторі V такий, що $\mathcal{F}(a_1) = b_1, \mathcal{F}(a_2) = b_2, \ldots, \mathcal{F}(a_n) = b_n$. Оператор $\mathcal{F}$ базис переводить у базис, а тому існує обернений оператор $\mathcal{F}^{-1}$. При цьому $\mathcal{F}^{-1}(b_1) = a_1, \mathcal{F}^{-1}(b_2) = a_2, \ldots, \mathcal{F}^{-1}(b_n) = a_n$.

У базисі B_1 оператору $\mathcal{F}$ відповідає матриця F, а тому оператору $\mathcal{F}^{-1}$ — матриця F^{-1}, а тому оператору $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{F}$ — матриця $F^{-1}AF$.

Для доведення рівності $F^{-1}AF = B$ достатньо показати, що фактично в базисі B_1 оператору $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{F}$ відповідає матриця B. Беремо $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{F}(a_i) = (\mathcal{F}^{-1}\mathcal{A})(\mathcal{F}(a_i)) = (\mathcal{F}^{-1}\mathcal{A})(b_i) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{A}(b_i)) = \mathcal{F}^{-1}(\beta_{1i}b_1 + \beta_{2i}b_2 + \ldots + \beta_{ni}b_n) = \beta_{1i}\mathcal{F}^{-1}(b_1) + \beta_{2i}\mathcal{F}^{-1}(b_2) + \ldots + \beta_{ni}\mathcal{F}^{-1}(b_n) = \beta_{1i}a_1 + \beta_{2i}a_2 + \ldots + \beta_{ni}a_n$.

Таким чином i-тий стовпчик матриці $F^{-1}AF$ співпадає з i-тим стовпчиком матриці B. Тому $F^{-1}AF = B$. $\square$

Означення 24. Дві квадратні матриці A і B з елементами з поля F однакового порядку називаються подібними, якщо існує невироджена квадратна матриця T того ж порядку така, що $B = T^{-1}AT$.

Остання теорема показує, що матриці лінійного оператора в різних базисах подібні.

10. Власні числа та власні ветори

10.1. Характеристичний многочлен лінійного оператора

Нехай $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — деяка квадратна матриця. Візьмемо незалежну змінну t і складемо матрицю

$$A - tE = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - t & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - t & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} - t \end{pmatrix}.$$

Матриця $A - tE$ називається характеристичною матрицею матриці A.

Визначник характеристичної матриці $A-tE$ утворює многочлен степеня n від змінної t. Цей многочлен називається характеристичним многочленом матриці A і позначається $\chi_A(t) = |A - tE|$. Корені характеристичного многочлена $\chi_A(t)$ називають характеристичними числами матриці A.

Теорема 13. *Характеристичні многочлени подібних матриць співпадають.*

Доведення. Нехай матриці A, B — подібні, тобто існує матриця T така, що $B = T^{-1}AT$. Тоді $\chi_B(t) = |B - tE| = |T^{-1}AT - tE| = |T^{-1}AT - T^{-1}(tE)T| = |T^{-1}(A-tE)T| = |T^{-1}|\cdot|A-tE|\cdot|T| = |A-tE| = \chi_A(t)$. □

Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на скінченновимірному просторі V, якому в даному фіксованому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ відповідає матриця A. Оскільки матриці лінійного оператора в різних базисах подібні, то характеристичний многочлен матриці лінійного оператора $\mathcal{A}$ не залежить від вибору базису, а тому його можна називати просто характтреристичним многочленом лінійного оператора $\mathcal{A}$. Таким чином характеристичний многочлен даного лінійного оператора — це характеристичний многочлен його матриці в даному базисі.

10.2. Власні вектори та власні числа

Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор векторного простору V над полем F.

Означення 25. Ненульовий вектор $a \in V, a \neq \theta$ називається власним вектором оператора $\mathcal{A}$, якщо існує $\lambda \in F : \mathcal{A}(a) = \lambda a$. При цьому λ — власне значення (власне число) оператора $\mathcal{A}$. У цьому випадку також кажуть, що a є λ-власним вектором $\mathcal{A}$, або власним вектором, що відповідає власному значенню λ.

За означенням власний вектор завжди ненульовий, але λ може бути $= 0$. Геометрично поняття власного вектора означає, що під дією оператора $\mathcal{A}$ вектор переводиться в кратний собі.

10.3. Поняття власного підпростору

Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на векторному просторі V над полем F, $a \in V$ — λ-власний вектор $\mathcal{A}$. Тоді $\mathcal{A}(a) = \lambda a$; $\mathcal{A}(a) - \lambda a = \theta$. $\mathcal{A}(a) - (\lambda\mathcal{E})(a) = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})(a) = \theta$, тобто $a \in \ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})$. Таким чином, множина всіх λ-власних векторів оператора $\mathcal{A}$ разом з θ утворюють підпростір L_λ, що називається власним підпростором, який відповідає власному значенню λ.

$L_\lambda = \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$, $L_\lambda \neq \{\theta\}$.

10.4. Знаходження власних векторів та власних чисел

Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на векторному просторі V над полем F, $\lambda \in F$ — власне число оператора $\mathcal{A}$, $a \in V$ — власний вектор, що відповідає числу λ. Тоді $a \in \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$.

Припустимо V — скінченновімирний векторний простір, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий фіксований базис простору V, в якому оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$. Тоді в цьому базисі оператору $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ відповідає матриця $A - \lambda E = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$.

Як було показано вище, ядро оператора $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ при фіксованому базисі співпадає з множиною всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь

$$(A - \lambda E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{aligned} &(\alpha_{11}-\lambda)x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=0,\\ &\alpha_{21}x_1+(\alpha_{22}-\lambda)x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ldots+(\alpha_{nn}-\lambda)x_n=0. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Число $\lambda \in F$ є власним числом оператора $\mathcal{A}$ тоді й тільки тоді, коли для нього існує власний вектор, тобто $\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}) \neq \{\theta\}$. Це виконується тоді й тільки тоді, коли система (10.1) має нетривіальні розв'язки.

Система (10.1) квадратна (число змінних = числу рівнянь), а тому вона має нетривіальні розв'язки тоді й тільки тоді, коли її визначник $= 0$. Визначник системи (10.1) співпадає з характеристичним многочленом $\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E|$ матриці A. Таким чином, число $\lambda \in F$ є власним числом оператора $\mathcal{A}$ тоді й тільки тоді, коли воно є коренем його характеристичного многочлена.

Означення 26. Спектром лінійного оператора $\mathcal{A}$ назива'ється сукупність його власних чисел.

Таким чином, для того щоб знайти всі власні числа оператора $\mathcal{A}$ в скінченновимірному просторі, треба знайти всі корені його характеристичного многочлена які належать в основному полю F. Якщо $\lambda_0 \in F$ — власне значення, то щоб знайти базис власного підпростору L_{λ_0}, потрібно підставити λ_0 замість λ в систему (10.1) і взяти фундаментальну систему розв'язків.

Оскільки всі власні числа лінійного оператора на скінченновимірному просторі є коренями його характеристичного многочлена, то кількість власних чисел не перевищує розмірність простору. Але не для будь-якого лінійного оператора існують власні вектори та числа.

Приклад 3. У просторі $\mathbb{R}^2$ беремо оператор $\mathcal{A}\varphi$ повороту вектора на кут φ, причому $0 < \varphi < 2\pi, \varphi \neq \pi$. В базисі e_1, e_2 цьому оператору відповідає матриця $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Беремо характеристичний многочлен $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = \cos^2\varphi - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2 + \sin^2\varphi = \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0$. $D = 4\cos^2\varphi - 4 < 0$. Таким чином многочлен не має дійсних коренів. Це означає, що для оператора $\mathcal{A}\varphi$ не існує власних чисел, а тому й власних векторів.

10.5. Алгоритм знаходження власних чисел та власних векторів лінійного оператора

Вважаємо, що оператор $\mathcal{A}$ діє на скінченновимірному векторному просторі V над полем F, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий фіксований базис простору V, в якому задаються координати всіх векторів.

1) Виписуємо матрицю лінійного оператора $\mathcal{A}$ в цьому базисі: $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$.

2) Виписуємо характеристичний многочлен матриці A

$$X_A(\lambda) = |A - \lambda E|.$$

3) Знаходимо корені характеристичного многочлена які належать F: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$. Всі ці корені є власними числами оператора $\mathcal{A}$.

4) Для кожного кореня $\lambda_i, i = \overline{1, s}$ шукаємо базис власного підпростору L_{λ_i}. Для цього записуємо систему лінійних однорідних рівнянь

$$(A - \lambda_i E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5) Знаходимо фундаментальну систему розв'язків цієї системи лінійних рівнянь. Припустимо одержали вектори $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Ці вектори є базисом власного підпростору L_{λ_i}.

6) Всі власні вектори лінійного оператора $\mathcal{A}$, що відповідають власному числу λ_i є всіма можливими нетривіальними лінійними комбінаціями

вигляду $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_k b_k$.

10.6. Теореми про власні вектори

Теорема 14. *Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на скінченновимірному просторі V над полем F, $\lambda_0 \in F$ — власне число оператора $\mathcal{A}$, тоді розмірність власного підпростору L_{λ_0} не перевищує кратності λ_0 як кореня характеристичного мночлена оператора $\mathcal{A}$.*

Доведення. Припустимо $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — базис власного підпростору L_{λ_0}, тобто $A(a_1) = \lambda_0 a_1, A(a_2) = \lambda_0 a_2, \ldots, A(a_k) = \lambda_0 a_k$. Доповнюємо цей базис до базису простору векторами $b_1, b_2, \ldots, b_{n-k}$ і випишемо матрицю оператора $\mathcal{A}$ в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{n-k}$

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & \\ \hline & & O & & * \end{array}\right).$$

Беремо характеристичний многочлен

$$\chi_A(\lambda) = \left|\begin{array}{cccc|c} \lambda_0-\lambda & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \lambda_0-\lambda & \cdots & 0 & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0-\lambda & \\ \hline & & O & & * \end{array}\right| = (-1)^k(\lambda-\lambda_0)^k g(\lambda),$$

де $g(\lambda)$ — деякий многочлен від змінної λ степеня $n-k$. Кратність кореня λ_0 в цьому многочлені не менше числа $k = \dim L_{\lambda_0}$. □

Теорема 15. *Власні вектори лінійного оператора, що відповідають різним власним числам, лінійно незалежні.*

Доведення. Припустимо $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — власні вектори лінійного оператора $\mathcal{A}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — відповідні власні числа, тобто $\mathcal{A}(a_1) = \lambda_1 a_1, \mathcal{A}(a_2) =$

$\lambda_2 a_2, \dots, \mathcal{A}(a_s) = \lambda_s a_s$. Причому $\lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j,\ i,j = \overline{1,s}$. Лінійну незалежність векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ будемо доводити індукцією по числу векторів.

1) Нехай $s = 1$, тобто маємо один власний вектор a_1. За означенням цей вектор ненульовий, а тому система векторів $\{a_1\}$ лінійно незалежна.

2) Припустимо твердження вірне для систем власних векторів які складаються з не більше ніж $s-1$ векторів і доведемо твердження для системи з s векторів. Беремо лінійну комбінацію $z = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_{s-1} a_{s-1} + \alpha_s a_s = \theta$, тоді $\lambda_s z = \alpha_1 \lambda_s a_1 + \alpha_2 \lambda_s a_2 + \ldots + \alpha_{s-1} \lambda_s a_{s-1} + \alpha_s \lambda_s a_s = \theta$. Подієм на лінійну комбінацію оператором $\mathcal{A}$. $\theta = \mathcal{A}(z) = \alpha_1 \mathcal{A}(a_1) + \alpha_2 \mathcal{A}(a_2) + \ldots + \alpha_{s-1} \mathcal{A}(a_{s-1}) + \alpha_s \mathcal{A}(a_s) = \alpha_1 \lambda_1 a_1 + \alpha_2 \lambda_2 a_2 + \ldots + \alpha_{s-1} \lambda_{s-1} a_{s-1} + \alpha_s \lambda_s a_s$, звідки $A(z) - \lambda_s z = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_s) a_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_s) a_2 + \ldots + \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s) a_{s-1} = \theta$, але за припущенням індукції вектори $a_1, a_2, \dots, a_{s-1}$ лінійно незалежні, тому $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_s) = 0, \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_s) = 0, \dots, \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s) = 0$. Оскільки $\lambda_j \neq \lambda_s$ для довільного $j = \overline{1, s-1}$, то $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_{s-1} = 0$. Залишилась лінійна комбінація $\alpha_s a_s = \theta$, але $a_s \neq \theta$ як власний вектор, тому $\alpha_s = 0$.

$\square$

Теорема 16. *Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на скінченновимірному просторі V над полем F, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in F$ — власні числа оператора $\mathcal{A}$, $a_1, a_2, \dots, a_k \in L_{\lambda_1}, b_1, b_2, \dots, b_l \in L_{\lambda_2}, \dots, c_1, c_2, \dots, c_m \in L_{\lambda_s}$ — лінійно незалежні системи векторів у відповідних власних підпросторах. Тоді система векторів $\{a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_l, \dots, c_1, c_2, \dots, c_m\}$ лінійно незалежна.*

Доведення. Беремо лінійну комбінацію $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \sum\limits_{i=1}^{l} \beta_i b_i + \ldots + \sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i c_i = \theta$. Позначимо $x_1 = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i, x_2 = \sum\limits_{i=1}^{l} \beta_i b_i, \dots, x_s = \sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i c_i$. Тоді $x_1 + x_2 +$

$\ldots + x_s = \theta, x_1 \in L_{\lambda_1}, x_2 \in L_{\lambda_2}, \ldots, x_s \in L_{\lambda_s}$. Припустимо для деякого $j : x_j \neq \theta$. Тоді вектор x_j — власний вектор оператора $\mathcal{A}$ і таким чином ми одержали нетривіальну лінійну комбінацію власних векторів, що відповідають різним власним числам, рівну θ, що суперечить теоремі 15. Тому $x_1 = \theta, x_2 = \theta, \ldots, x_s = \theta$, або $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = \theta, \sum\limits_{i=1}^{l} \beta_i b_i = \theta, \ldots, \sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i c_i = \theta$, але це лінійні комбінації лінійно незалежних векторів. Тому $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0, \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_l = 0, \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_m = 0$. □

11. Інваріантність

Означення 27. Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на векторному просторі V над полем F. Підпростір L простору V називається інваріантним відносно оператора $\mathcal{A}$ якщо для для довільного $x \in L : \mathcal{A}(x) \in L$.

Приклади інваріантних підпросторів

1) У будь-якому просторі V інваріантні відносно будь-якого оператора тривіальні підпростори $\{\theta\}$ і V.

2) У просторі $F[x]$ всіх многочленів над полем F підпростір $F_n[x]$ всі многочленів степеня не більше n буде інваріантним відносно оператора $\mathcal{D}$ взяття похідної.

11.1. Інваріантність та матриця лінійного оператора

Припустимо, що оператор $\mathcal{A}$ діє на скінченновимірний простір V над полем F.

1) Нехай підпростір L простору V інваріантний відносно оператора $\mathcal{A}$, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — базис підпростору L. Доповнюємо його до базису простору векторами $b_1, b_2, \ldots, b_{n-k}$ і визначимо вигляд матриці A в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_{n-k}$. Для цього потрібно знайти образи базисних векторів $\mathcal{A}(a_1), \mathcal{A}(a_2), \ldots, \mathcal{A}(a_k), \mathcal{A}(b_1), \mathcal{A}(b_2), \ldots, \mathcal{A}(b_{n-k})$.

Оскільки $\mathcal{A}(a_i) \in L$ для довільного $i = \overline{1,k}$, то всі ці вектори розкладаються в лінійні комбінації базису L, тобто $\mathcal{A}(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \ldots + \alpha_{ki}a_k = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \ldots + \alpha_{ki}a_k + 0b_1 + 0b_2 + \ldots + 0b_{n-k}$. А тому в базисі $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{n-k}$ оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця вигляду

$$A = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline O & * \end{array}\right).$$

2) Припустимо $V = L_1 \oplus L_2$, підпростори L_1 і L_2 інваріантні відносно оператора $\mathcal{A}$, $\dim L_1 = k, \dim L_2 = n - k$, $B(L_1), B(L_2)$ — базиси підпросторів L_1 і L_2 відповідно. Тоді за теоремою про базис прямої суми система векторів $B(L_1) \cup B(L_2)$ утворює базис простору V і в цьому базисі оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця вигляду

$$A = \left(\begin{array}{c|c} * & O \\ \hline O & * \end{array}\right) \text{ — матриця клітинного вигляду.}$$

3) Простір $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_s$, всі підпростори $L_i, i = \overline{1,s}$ інваріантні відносно оператора $\mathcal{A}$, $\dim L_1 = k_1, \dim L_2 = k_2, \ldots, \dim L_s = k_s, k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$. $B(L_1), B(L_2), \ldots, B(L_s)$ — відповідно базиси підпросторів $L_1, L_2, \ldots, L_s$.

За теоремою про базис прямої суми $B(L_1) \cup B(L_2) \cup \ldots \cup B(L_s)$ утворює базис простору і в цьому базисі оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця клітинного вигляду

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{*} & & & O \\ & \boxed{*} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boxed{*} \end{pmatrix}.$$

11.2. Звуження лінійного оператора на підпростір

Припустимо $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на векторному просторі V над полем F, L — підпростір простору V, інваріантний відносно оператора

$\mathcal{A}$. Тоді підпростір L утворює векторний простір над полем F. Визначимо на просторі L відображення $\mathcal{A}_1$ таким чином, що для довільного $x \in L : \mathcal{A}_1(x) = \mathcal{A}(x)$. З інваріантності випливає, що для довільного $x \in L : \mathcal{A}_1(x) = \mathcal{A}(x) \in L$. Умова лінійності для відображення $\mathcal{A}_1$ виконується, оскільки вона виконується для відображення $\mathcal{A}$. Таким чином $\mathcal{A}_1$ — лінійний оператор, на просторі L. Оператор $\mathcal{A}_1$ називається звуженням оператора $\mathcal{A}$ на інваріантний підпростір L. Таким чином, щоб одержати звуження даного оператора $\mathcal{A}$ на інваріантний підпростір L, потрібно розглядати дії цього оператора лише на векторах цього підпростору L.

Припустимо V — скінченновимірний простір, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — базис підпростору L, $b_1, \ldots, b_{n-k}$ — його доповнення до базису простору V. В базисі $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{n-k}$ оператор $\mathcal{A}$ відповідає матриця

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline O & C_1 \end{array} \right).$$

Визначимо, яка матриця відповідає звуженню $\mathcal{A}_1$ оператора $\mathcal{A}$ на L в базисі $a_1, \ldots, a_k$ підпростору L. Нехай $A_1 = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{k}$, тоді за означенням матриці оператора $\mathcal{A}(a_i) = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \ldots + \alpha_{ki}a_k + 0b_1 + \ldots + 0b_{n-k} = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \ldots + \alpha_{ki}a_k$. Тобто координати вектора $\mathcal{A}_1(a_i)$ в базисі $a_1, \ldots, a_k$ є елементами i-го стовпчика матриці A_1, отже матрицею оператора $\mathcal{A}_1$ в базисі $a_1, \ldots, a_k$ підпростору L є матриця A_1.

11.3. Теореми про інваріантні підпростори

Теорема 17. *Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний операторна векторному просторі V над полем F, L — підпростір простору V, всі ненульові елементи якого є λ-власними векторами оператора $\mathcal{A}$ для деякого власного числа $\lambda \in F$, тоді підпростір L інваріантний відносно $\mathcal{A}$.*

Доведення. Нехай $x \in L$, тоді $\mathcal{A}(x) = \lambda x \in L$, отже, L інваріантний. $\square$

Наслідок 4. *Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на векторному просторі V над полем F, λ_0 — власне число оператора $\mathcal{A}$. Тоді власний підпростір*

L_{λ_0} *інваріантний відносно оператора $\mathcal{A}$.*

Теорема 18. *Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на векторному просторі V над полем F. Тоді підпростір, породжений будь-якою множиною власних векторів оператора $\mathcal{A}$, є інваріантним відносно $\mathcal{A}$.*

Доведення. Нехай $S = \{a_\alpha | \alpha \in I\}$ — деяка множина власних векторів оператора $\mathcal{A}$, $a_\alpha \neq \theta$ для довільного $\alpha \in I$, $\mathcal{A}(a_\alpha) = \lambda_\alpha a_\alpha, \lambda_\alpha \in F$, $L = \langle S \rangle$. Беремо $x \in L$, тоді $x = \sum_{i=1}^{s} \beta_{\alpha_i} a_{\alpha_i}$, отже, $\mathcal{A}(x) = \sum_{i=1}^{s} \beta_{\alpha_i} \mathcal{A}(a_{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^{s} \beta_{\alpha_i} \lambda_{\alpha_i} a_{\alpha_i} \in L$. □

Теорема 19. *Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на просторі V над полем F, L — підпростір простору V розмірності 1. Підпростір L інваріантний відносно оператора $\mathcal{A}$ тоді і лише тоді, коли він породжується власним вектором цього оператора.*

Доведення. (Необхідність) Припустимо, що L інваріантний відносно $\mathcal{A}$ та $\dim(L) = 1$. Беремо в L ненульовий вектор a, тоді $L = \langle a \rangle$, і за інваріантністю $\mathcal{A}(a) = \lambda a$ для деякого $\lambda \in F$. Оскільки $a \neq \theta$, то a — власний вектор оператора $\mathcal{A}$.

(Достатність) Достатність випливає з теореми 18. □

Теорема 20. *Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на скінченновимірному векторному просторі V над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Тоді для оператора $\mathcal{A}$ існує одновимірний інваріантний підпростір.*

Доведення. Характеристичний многочлен $\chi(t)$ оператора $\mathcal{A}$ є многочленом з комплексними коефіцієнтами, а тому за основною теоремою алгебри він має принаймні один комплексний корінь. Беремо один такий корінь $\lambda \in \mathbb{C}$, тоді число λ є власним числом оператора $\mathcal{A}$. Йому відповідає деякий власний вектор $a \in V$. За теоремою 19 підпростір $L = \langle a \rangle$ інваріантний відносно $\mathcal{A}$, причому $\dim(L) = 1$. □

Теорема 21. *Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на векторному просторі V над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ непарної розмірності, тоді для оператора $\mathcal{A}$ в просторі V існує одновимірний інваріантний підпростір.*

Доведення. Характеристичний многочлен $\chi(t)$ оператора $\mathcal{A}$ є многочленом з дійсними коефіцієнтами непарного степеня, тому він має принаймні один дійсний корінь. Беремо один такий корінь $\lambda \in \mathbb{R}$, тоді λ — власне число оператора $\mathcal{A}$, йому відповідає власний вектор $a \in V$ і за теоремою 19 підпростір $L = \langle a \rangle$ інваріантний відносно $\mathcal{A}$ та $\dim(L) = 1$. □

Зауваження 4. Якщо V — векторний простір над полем $\mathbb{R}$ парної розмірності, то для оператора $\mathcal{A}$ на цьому просторі може не існувати інваріантного підпростору розмірності 1.

Приклад 4. На просторі $\mathbb{R}^2$ розглянемо оператор $\mathcal{A}_\varphi$ повороту на кут φ. Як вже доведено, якщо $0 < \varphi < 2\pi, \varphi \neq \pi$, то для оператора $\mathcal{A}_\varphi$ не існує власних векторів, а тому згідно з теоремою 19 для нього не існує інваріантного підпростору розмірності 1. Якщо $\varphi = 0$, то для довільного $x \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{A}_\varphi(x) = x$, всі ненульові вектори простору є власними векторами оператора $\mathcal{A}_\varphi$ з власним числом $\lambda = 1$, тому в цьому випадку всі підпростори розмірності 1 інваріантні відносно оператора $\mathcal{A}_\varphi$. Якщо $\varphi = \pi$, то для довільного $x \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{A}_\varphi(x) = -x$, тобто знову всі ненульові вектори простору є власними векторами оператора $\mathcal{A}_\varphi$ з власним числом $\lambda = -1$, а тому всі підпростори розмірності 1 інваріантні відносно оператора $\mathcal{A}_\varphi$.

Теорема 22 (про інваріантні підпростори дійсного векторного простору)**.** *Для будь-якого лінійного оператора $\mathcal{A}$ на скінченновимірному векторному просторі над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ існує інваріантний підпростір розмірності 1 або 2 (ці можливості не є взаємно виключними).*

Доведення. Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на скінченновимірному векторному просторі V над полем $\mathbb{R}$. Якщо для оператора $\mathcal{A}$ в просторі

V існує інваріантний підпростір розмірності 1, то все виконується, тому припускаємо, що для даного оператора в просторі V не існує одновимірного інваріантного підпростору і покажемо, що в такому випадку існує інваріантний підпростір розмірності 2. Зафіксуємо деякий базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ простору V, в якому будемо визначати координати всіх векторів. Припустимо в цьому базисі оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен $\chi(t) = |A - tE|$ оператора $\mathcal{A}$ є многочленом з дійсними коефіцієнтами. Оскільки за припущенням, для оператора $\mathcal{A}$ не існує інваріантного підпростору розмірності 1, то згідно з теоремою 19 для нього не існує власних векторів, а тому і власних чисел. Це означає, що характеристичний многочлен $\chi(t)$ не має дійсних коренів, а тому він має комплексні корені. Зафіксуємо один комплексний корінь $\lambda = \gamma + \mu i$. Випишемо систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{aligned} &(\alpha_{11} - \lambda)z_1 + \alpha_{12}z_2 + \ldots + \alpha_{1n}z_n = 0, \\ &\alpha_{21}z_1 + (\alpha_{22} - \lambda)z_2 + \ldots + \alpha_{2n}z_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{n1}z_1 + \alpha_{n2}z_2 + \ldots + (\alpha_{nn} - \lambda)z_n = 0. \end{aligned}$$

Ця система є системою лінійних однорідних рівнянь з комплексними коефіцієнтами і комлесними змінними. Число рівнянь дорівнює числу невідомих, визначник системи рівний 0 (оскільки λ — характеристичне число матриці A), а тому система має ненульові розв'язки. Зафіксуємо один такий розв'язок $z^* = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*)$, де $z_j^* = x_j + y_j i,\ x_j, y_j \in \mathbb{R}$

для довільного $j = \overline{1, n}$. Перепишемо систему в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11} z_1 + \alpha_{12} z_2 + \ldots + \alpha_{1n} z_n = \lambda z_1,\\
&\alpha_{21} z_1 + \alpha_{22} z_2 + \ldots + \alpha_{2n} z_n = \lambda z_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{n1} z_1 + \alpha_{n2} z_2 + \ldots + \alpha_{nn} z_n = \lambda z_n.
\end{aligned}$$

Координати вектора z^* задовольняють рівняння цієї системи, а тому підставивши їх у систему одержуємо систему рівностей:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}(x_1 + iy_1) + \alpha_{12}(x_2 + iy_2) + \ldots + \alpha_{1n}(x_n + iy_n) = (\gamma + i\mu)(x_1 + iy_1),\\
&\alpha_{21}(x_1 + iy_1) + \alpha_{22}(x_2 + iy_2) + \ldots + \alpha_{2n}(x_n + iy_n) = (\gamma + i\mu)(x_2 + iy_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{n1}(x_1 + iy_1) + \alpha_{n2}(x_2 + iy_2) + \ldots + \alpha_{nn}(x_1 + iy_n) = (\gamma + i\mu)(x_n + iy_n).
\end{aligned}$$

В цих рівностях, відокремлюємо дійсні та уявні частини і прирівнюємо їх. При цьому одержуємо дві системи рівностей:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n = \gamma x_1 - \mu y_1,\\
&\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2n} x_n = \gamma x_2 - \mu y_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ldots + \alpha_{nn} x_n = \gamma x_n - \mu y_n;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \ldots + \alpha_{1n} y_n = \mu x_1 + \gamma y_1,\\
&\alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \ldots + \alpha_{2n} y_n = \mu x_2 + \gamma y_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{n1} y_1 + \alpha_{n2} y_2 + \ldots + \alpha_{nn} y_n = \mu x_n + \gamma y_n.
\end{aligned}$$

Перепишемо рівності в матричному вигляді:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix};$$

$$A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Означимо через x, y вектори простору V, координати яких в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ є $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Тоді останні рівності переписуються так: $\mathcal{A}(x) = \gamma x - \mu y, \mathcal{A}(y) = \mu x + \gamma y$. Позначимо $M = \langle x, y \rangle$. Оскільки розв'язок $z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)$ ненульовий, то вектори x, y одночасно $\neq \theta$, тобто $M \neq \{\theta\}$. А тому $1 \leq \dim M \leq 2$. Покажемо, що підпростір інваріантний відносно оператора $\mathcal{A}$, беремо якийсь вектор $a \in M$, тоді $a = \beta_1 x + \beta_2 y,\ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R},\ \mathcal{A}(a) = \beta_1 \mathcal{A}(x) + \beta_2 \mathcal{A}(y) = \beta_1(\gamma x - \mu y) + \beta_2(\mu x + \gamma y) \in M$. Таким чином підпростір M інваріантний відносно оператора $\mathcal{A}$. За припущенням для оператора $\mathcal{A}$ не існує інваріантного підпростору розмірності 1, а тому $\dim M = 2$. □

12. Лінійні оператори простої структури

Будемо вважати, що всі оператори діють на скінченновимірному векторному просторі V над полем F і $\dim V = n$.

Означення 28. Лінійний оператор $\mathcal{A}$ на векторному просторі V називається оператором простої структури, якщо простір V є прямою сумою підпросторів розмірності 1 інваріантних відносно оператора $\mathcal{A}$.
$V = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n,\ \dim M_i = 1,\ i = \overline{1, n}$.

Означення 29. Квадратна матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

називається діагональною, якщо $\alpha_{ij} = 0$ при $i \neq j,\ i, j = \overline{1, n}$. Іншими словами, всі ненульові елементи діагоналі матриці стоять на головній діагоналі.

Теорема 23. *Для оператора $\mathcal{A}$ на скінченновимірному просторі V наступні умови еквівалентні:*

1) Оператор $\mathcal{A}$ є оператором простої структури.

2) В просторі існує базис, який складається з власних векторів оператора $\mathcal{A}$.

3) В просторі існує базис в якому оператору $\mathcal{A}$ відповідає діагональна матриця.

Доведення. Покажемо, що з 1) випливає 2). Припустимо, що оператор $\mathcal{A}$ є оператором простої структури, тоді $V = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$, $\dim M_i = 1,\ i = \overline{1,n}$ і всі підпростори M_i інваріантні відносно оператора $\mathcal{A}$. В кожному підпросторі M_i обираємо ненульовий вектор a_i, тоді $M_1 = \langle a_1 \rangle, M_2 = \langle a_2 \rangle, \dots, M_n = \langle a_n \rangle$. За теоремою 19 про інваріантні підпростори вектори $a_1, a_2, \dots, a_n$ є власними векторами оператора $\mathcal{A}$. За теоремою про базис прямої суми система векторів $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ утворює базис простору V.

Покажемо, що з 2) випливає 3). Припустимо базис $a_1, a_2, \dots, a_n$ простору V складається з власних векторів оператора $\mathcal{A}$, тобто $\mathcal{A}(a_1) = \lambda_1 a_1, \mathcal{A}(a_2) = \lambda_2 a_2, \dots, \mathcal{A}(a_n) = \lambda_n a_n,\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$. Випишемо матрицю оператора $\mathcal{A}$ в цьому базисі:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Таким чином матриця діагональна.

Покажемо, що з 3) випливає 1). Припустимо в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$

оператор $\mathcal{A}$ задається діагональною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

За означенням матриці лінійного оператора в базисі: $\mathcal{A}(a_1) = \lambda_1 a_1, \mathcal{A}(a_2) = \lambda_2 a_2, \dots, \mathcal{A}(a_n) = \lambda_n a_n$. Тобто вектори базису $a_1, a_2, \dots, a_n$ є власними векторами оператора $\mathcal{A}$. Позначимо $M_1 = \langle a_1 \rangle, M_2 = \langle a_2 \rangle, \dots M_n = \langle a_n \rangle$. За теоремою 19 всі підпростори $M_i,\ i = \overline{1,n}$ інваріантні відносно оператора $\mathcal{A}$, $\dim M_i = 1,\ i = \overline{1,n}$. Беремо довільний вектор $x \in V$, для нього існує єдиний розклад в лінійну комбінацію базису $x = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$, де $x_1 = \alpha_1 a_1 \in M_1,\ x_2 = \alpha_2 a_2 \in M_2, \dots,\ x_n = \alpha_n a_n \in M_n$. З однозначності розкладу випливає, що $V = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$, тобто $\mathcal{A}$ — оператор простої структури. □

12.1. Достатня умова оператора простої структури

Теорема 24. *Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на скінченновимірному просторі V над полем F, всі корені його характеристичного многочлена $\chi(t)$ різні і належать основному полю F, тоді оператор $\mathcal{A}$ є оператором простої структури.*

Доведення. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$ — корені характеристичного многочлена $\chi(t)$ оператора $\mathcal{A}$, $\lambda_i \neq \lambda j,\ i \neq j,\ i, j = \overline{1,n}$. Тоді всі числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ є власними числами оператора $\mathcal{A}$. Кожному власному числу відповідає власний вектор. Припустимо $a_1, a_2, \dots, a_n$ — відповідні власні вектори, $\mathcal{A}(a_1) = \lambda_1 a_1, \mathcal{A}(a_2) = \lambda_2 a_2, \dots, \mathcal{A}(a_n) = \lambda_n a_n$. За теоремою 15 про власні вектори система векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$ лінійно незалежна, їх кількість рівна розмірності простору. А тому вони утворюють базис простору, таким чином для оператора $\mathcal{A}$ існує базис, який складається з власних векторів цього оператора, тобто $\mathcal{A}$ — оператор простої структури. □

Зауваження 5. Ця теорема дає лише достатню умову оператора простої структури.

Приклад 5. В просторі V над полем F беремо лінійний оператор гомотетії $\mathcal{A}_\alpha, \alpha \in F$, тобто для довільного $x \in V : \mathcal{A}_\alpha(x) = \alpha x$. Всі ненульові вектори простору V є власними векторами цього оператора з власним числом $\lambda = \alpha$, тому для оператора A_α існує базис, який складається з його власних векторів, але характеристичний многочлен цього оператора має єдиний корінь $t = \alpha$.

12.2. Критерії оператора простої структури

Теорема 25 (Критерій 1)**.** *Лінійний оператор $\mathcal{A}$ на векторному просторі V над полем F є оператором простої структури тоді і лише тоді коли:*

1) *всі корені його характеристичного многочлена $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ належать основному полю F.*

2) *розмірність кожного підпростору L_{λ_i}, $i = \overline{1, s}$ рівна кратності відповідного власного числа λ_i як кореня характеристичного многочлена.*

Доведення. (Необхідність) Нехай $\mathcal{A}$ — оператор простої структури, тоді для нього існує базис простору $a_1, a_2, \ldots, a_n$, який складається з власних векторів цього оператора. В цьому базисі оператору $\mathcal{A}$ відповідає діагональна матриця

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \text{\huge$O$} & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_s & \\ & \text{\huge$O$} & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}.$$

В базисі вектори упорядковані так, що спочатку стоять всі власні вектори, що відповідають власному числу λ_1 (їх кількість k_1), потім вектори, що відповідають λ_2 (їх кількість k_2) і т.д. Тоді характеристичний многочлен оператора $\mathcal{A}$ має вигляд $\chi(t) = (-1)^n(t-\lambda_1)^{k_1}(t-\lambda_2)^{k_2}\cdots(t-\lambda_s)^{k_s}$, де $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$. Всі корені характеристичного многочлена відповідають числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, тобто належать F. Залишилось показати, що для довільного $i = \overline{1, s}$: $\dim L_{\lambda_i} = k_i$. За теоремою 14 про власні вектори $\dim L_{\lambda_1} \leq k_1$, базисні вектори $a_1, a_2, \ldots, a_{k_1}$ є власними векторами оператора $\mathcal{A}$, що відповідають власному числу λ_1, а тому $a_1, a_2, \ldots, a_{k_1} \in L_{\lambda_1}$. Ці вектори лінійно незалежні, як частина базису, а тому $k_1 \leq \dim L_{\lambda_1}$, тобто $\dim L_{\lambda_1} = k_1$. Аналогічно $\dim L_{\lambda_2} = k_2, \ldots, \dim L_{\lambda_s} = k_s$.

(Достатність) Припустимо виконуються умови теореми і покажемо, що операор $\mathcal{A}$ є оператором простої структури. Всі корені характеристичного многочлена $\chi(t) = a_0(t-\lambda_1)^{k_1}(t-\lambda_2)^{k_2}\cdots(t-\lambda_s)^{k_s}$ належать основному полю F, тобто всі вони є власними числами оператора $\mathcal{A}$. Для розмірностей власних підпросторів виконується $\dim L_{\lambda_1} + \dim L_{\lambda_2} + \ldots + \dim L_{\lambda_s} = k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$. В кожному власному підпросторі L_{λ_i} беремо базис і об'єднуємо ці базиси в одну систему векторів. За теоремою 16 про власні вектори ця система лінійно незалежна і число векторів в системі дорівнює розмірності простору. Тоді ця система векторів утворює базис простору, який складається з власних векторів оператора $\mathcal{A}$, тобто оператор $\mathcal{A}$ є оператором простої структури. □

Теорема 26 (Критерій 2)**.** *Лінійний оператор $\mathcal{A}$ на векторному просторі V над полем F є оператором простої структури тоді і лише тоді коли:*

1) всі корені його характеристичного многочлена $X(t)$ належать основному полю F;

2) простір V є прямою сумою $V = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_s}$.

Доведення. (Необхідність) Припустимо $\mathcal{A}$ — оператор простої структури, тоді для нього існує базис простору $a_1, a_2, \ldots, a_n$, який складається з власних векторів оператора і в якому оператору відповідає діагональна матриця. Тоді характеристичний многочлен оператора $\mathcal{A}$ має вигляд $\chi(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{k_1} (t-\lambda_2)^{k_2} \cdots (t-\lambda_s)^{k_s}$, тобто всі його корені належать F, а також є власними числами оператора $\mathcal{A}$. Залишилось показати, що $V = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_s}$. Беремо довільний вектор $x \in V$ і розкладаємо його в лінійну комбінацію базису $x = \sum\limits_{i=1}^{k_1} \alpha_i a_i + \sum\limits_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} \beta_i a_i + \ldots + \sum\limits_{i=k_1+\ldots+k_{s-1}+1}^{n} \gamma_i a_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_s$. Оскільки вектори $a_1, \ldots, a_{k_1} \in L_{\lambda_1}$, $a_{k_1+1}, \ldots, a_{k_1+k_2} \in L_{\lambda_2}, \ldots, a_{k_1+\ldots+k_{s-1}+1}, \ldots, a_n \in L_{\lambda_s}$, то $x_1 \in L_{\lambda_1}, x_2 \in L_{\lambda_2}, \ldots, x_s \in L_{\lambda_s}$,, а тому $V = L_{\lambda_1} + L_{\lambda_2} + \ldots + L_{\lambda_s}$. З однозначності розкладу векторів в лінійну комбінацію базису випливає, що $V = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_s}$.

(Достатність) Припустимо виконуються умови теореми. Оскільки всі корені характеристичного многочлена $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in F$, то всі вони є власними числами оператора $\mathcal{A}$. За умовою $V = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_s}$, в кожному власному підпросторі L_{λ_i} беремо базис і ці базиси об'єднуємо в одну систему векторів. За теоремою про базис прямої суми одержимо базис простору, який складається з власних векторів оператора $\mathcal{A}$, а тому $\mathcal{A}$ є оператором простої структури. □

13. Теорема Жордана

13.1. Фактор-простір векторного простору

Нехай V — векторний простір над полем F, M — деякий фіксований підпростір простору V.

Означення 30. Вектори $x, y \in V$ називаються M-еквівалентними, якщо $x - y \in M$ (позначають $x \underset{M}{\sim} y$).

Таким чином, для елементів простору V вводиться бінарне відношення $\underset{M}{\sim}$. Покажемо, що воно є відношенням еквівалентності:
1) Рефлексивність. для довільного $x : x - x = \theta \in M$.
2) Симетричність. Якщо $x, y \in V$, $x \underset{M}{\sim} y$, то $x - y \in M$, отже $y - x = -(x - y) \in M$, звідки $y \underset{M}{\sim} x$.
3) Транзитивність. Якщо $x, y, z \in V$, $x \underset{M}{\sim} y$ і $y \underset{M}{\sim} z$, то $x - y \in M$ і $y - z \in M$, отже $x - z = (x - y) + (y - z) \in M$, звідки $x \underset{M}{\sim} z$.

Таким чином, відношення $\underset{M}{\sim}$ є відношенням еквівалентності на V, а тому це відношення задає розбиття простору на класи M-еквівалентних елементів, які не перетинаються. Кожен елемент простору V належить до одного і тільки одного класу M-еквівалентності.

Нехай $x \in V$ позначимо $[x]$ клас M-еквівалентних елементів, до якого належить елемент x, тобто $[x] = \{y \in V | y \underset{M}{\sim} x\}$. Покажемо, що ця множина $[x] = x + M = \{x + z | z \in M\}$. Нехай $y \in [x]$, тоді $y \underset{M}{\sim} x$, $y - x \in M$, але $y = x + (y - x)$, звідки $y \in x + M$. Беремо $y \in x + M$, тоді існує $z \in M : y = x + z$, а отже $y - x = z \in M$, тому $y \underset{M}{\sim} x$, $y \in [x]$.

Зрозуміло, що $[\theta] = M$.

Означення 31. Множина всіх класів M-еквівалентних елементів називається фактор-простором простору V по підпростору M і позначається

V/M.

Введемо на фактор-просторі операції векторного простору. Для елементів $[x], [y] \in V/M$ під їх сумою будемо вважати клас M-еквівалентних елементів, до якого належить елемент $x + y$, тобто $[x] + [y] = [x + y]$.

Нехай $[x] \in V/M,\ \alpha \in F$. Тоді під добутком $\alpha[x]$ будемо розуміти клас M-еквівалентних елементів, до якого належить вектор αx, тобто $\alpha[x] = [\alpha x]$.

Покажемо коректність цих операцій, тобто доведемо, що операції не залежать від вибору представників класів. Припустимо $x_1 \in [x]$ і $y_1 \in= [y]$, тоді $x_1 \underset{M}{\sim} x,\ y_1 \underset{M}{\sim} y$,тобто $x - x_1 \in M,\ y - y_1 \in M$. А тоді $(x-x_1)+(y-y_1) = (x+y)-(x_1+y_1) \in M$, тобто $x_1+y_1 \underset{M}{\sim} x+y,\ x_1+y_1 \in [x + y],\ [x_1 + y_1] = [x + y]$. Аналогічно, припустимо $x_1 \in [x], \alpha \in F$. Тоді $x_1 \underset{M}{\sim} x$, тобто $x - x_1 \in M$, а тому $\alpha(x - x_1) = \alpha x - \alpha x_1 \in M,\ \alpha x_1 \underset{M}{\sim} \alpha x,\ \alpha x_1 \in [\alpha x],\ [\alpha x_1] = [\alpha x]$.

Фактор-простір V/M з введеними операціями додавання та множення на скаляр утворює векторний простір над полем F. Аксіоми векторного простору виконуються, оскільки вони виконуються в просторі V.

Перевіримо, наприклад, асоціативність додавання. Беремо $[x], [y], [z] \in V/M$. Тоді $([x] + [y]) + [z] = [x + y] + [z] = [(x + y) + z] = [x + (y + z)] = x + [y + z] = [x] + ([y] + [z])$. Виконується.

Вправа 2. Перевірити інші аксіоми самостійно.

Приклад 6. Припустимо $V = \mathbb{R}^2$, M — деяка пряма, яка проходить через початок координат. Для даного вектора $y \in \mathbb{R}^2$ виконується: $y \underset{M}{\sim} x$ тоді і лише тоді, коли кінець вектора y знаходиться на прямій, що проходить через кінець вектора x, паралельного M, а фактор-простір V/M — множина всіх прямих на площині, паралельних прямій M.

Теорема 27. *Нехай V — скінченно-вимірний векторний простір над полем F, M — підпростір простору V, тоді* $\dim V = \dim M + \dim V/M$.

Доведення. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_k$ — базис підпростору M. Доповнюємо його до базису простору V векторами $b_1, b_2, \dots, b_{n-k}$. Покажемо, що система елементів $[b_1], [b_2] \dots, [b_{n-k}]$ утворює базис фактор-простору V/M.

1) Перевіримо лінійну незалежність. Беремо лінійну комбінацію

$$\beta_1[b_1] + \beta_2[b_2] + \dots + \beta_{n-k}[b_{n-k}] = [\theta],$$

$$[\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k}] = [\theta].$$

Це означає, що $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k} \in M$, а тому цей вектор можна розкласти в лінійну комбінацію базису простору M.

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k,$$

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k} - \alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \ldots - \alpha_k a_k = \theta.$$

Одержали лінійну комбінацію базису простору, а тому $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{n-k} = 0$. Тобто лінійна комбінація тривіальна.

2) Беремо $[x] \in V/M$. Елемент $x \in V$ можна розкласти в лінійну комбінацію базису простору, тобто $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k}$. Тому $[x] = [\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k}] = [\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k] + \beta_1[b_1] + \beta_2[b_2] + \dots + \beta_{n-k}[b_{n-k}]$. Але $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k \in M$, а тому $[\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k] = [\theta]$, отже $[x] = \beta_1[b_1] + \beta_2[b_2] + \dots + \beta_{n-k}[b_{n-k}]$. □

13.2. Поняття M-базису

Нехай V — векторний простір над полем F, M — його фіксований підпростір.

Означення 32. Система векторів $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ називається M-лінійно незалежною, або лінійно незалежною відносно підпростору M, якщо з того, що $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k \in M$, випливає, що $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$.

Зрозуміло, що система векторів $a_1, a_2, \dots, a_k$ є M-лінійно незалежною тоді і лише тоді, коли система елементів $[a_1], [a_2], \dots, [a_k] \in V/M$

лінійно незалежна в просторі V/M. Якщо $M = \{\theta\}$, то поняття M-лінійної незалежності співпадає з лінійною незалежністю в просторі V.

Означення 33. Будемо казати, що вектор $x \in V$ M-лінійно виражається через вектори $a_1, a_2, \ldots, a_k$, або лінійно виражається відносно підпростору M, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in F$ і вектор $y \in M$, що $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k + y$.

Вектор $x \in V$ M-лінійно виражається через вектори $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$ тоді і лише тоді, коли в V/M елемент $[x]$ лінійно виражається через елементи $[a_1], [a_2], \ldots, [a_k]$. Якщо $M = \{\theta\}$, то вектор x M-лінійно виражається через вектори $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$ тоді і тільки тоді, коли вектор x лінійно виражається через $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Означення 34. Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$ називається M-базисом, або базисом над підпростором M, якщо:
1) $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — M-лінійно незалежні;
2) довільний вектор $x \in V$ M-лінійно виражається через $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ утворює M-базис в просторі V тоді і лише тоді, коли система елементів $[a_1], [a_2], \ldots, [a_k] \in V/M$ утворює базис V/M. Якщо $M = \{\theta\}$, то поняття M-базису співпадає з поняттям базису. Будь-яку M-лінійно незалежну систему векторів простору можна доповнити до M-базису. Це випливає з того, що в V/M будь-яку лінійно незалежну систему можна доповнити до базису.

13.3. Властивості M-базису

1) Припустимо M_1, M_2 — підпростори простору V, причому $M_2 \subseteq M_1 \subseteq V$; $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$ — M_1-лінійно незалежна система векторів, $b_1, b_2, \ldots, b_m \in M_1$ — M_2-лінійно незалежна система векторів. Тоді $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_m$ — M_2-лінійно незалежна.

Доведення. Беремо лінійну комбінацію $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_m b_m \in M_2$. Оскільки $M_2 \subseteq M_1$, $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_m b_m \in M_1$, то $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_k a_k \in M_1$. За означенням M_1-лінійної незалежності $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0$. Залишилось $\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\ldots+\beta_m b_m \in M_2$. За означенням M_2-лінійної незалежності $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_k=0$. Отже лінійна комбінація тривіальна. $\square$

2) Припустимо, що M_1, M_2 — підпростори простору V, $M_2 \subseteq M_1 \subseteq V$. Вектори $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$ утворюють M_1-базис V, $b_1, b_2, \ldots, b_m \in M_1$ утворюють M_2-базис M_1. Тоді $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_m$ утворюють M_2 базис V.

Доведення. За попередньою властивістю вектори $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_m$ M_2-лінійно незалежні. Беремо довільний $x \in V$ і покажемо, що він M_2-лінійно виражається через ці вектори. За означенням M_1-базису цей вектор M_1-лінійно виражається через $a_1, a_2, \ldots, a_k$, тобто існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in F$ і вектор $y \in M_1$, що $x=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_k a_k+y$. Аналогічно, вектор y M_2-лінійно виражається через $b_1, b_2, \ldots, b_m$, тобто $y=\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\ldots+\beta_m b_m+z$, де $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in F$ і вектор $z \in M_2$. Звідси випливає, що $=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_k a_k+\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\ldots+\beta_m b_m+z$. $\square$

Наслідок 5. *Нехай $M_1, M_2, \ldots, M_k$ — підпростори простору V, причому $V \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_k$, B_1 — базис простору V над підпростором M_1, B_2 — базис M_1 над M_2, $\ldots$, B_k — базис M_{k-1} над M_k. Тоді система векторів $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$ утворює базис простору V над M_k.*

Наслідок 6. *Нехай $M_1, M_2, \ldots, M_k$ — підпростори простору V, причому $V \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_k=\{\theta\}$, B_1 — базис простору V над підпростором M_1, B_2 — базис M_1 над M_2, $\ldots$, B_k — базис M_{k-1} над M_k. Тоді система векторів $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$ утворює базис простору V.*

13.4. Поняття приєднаної матриці

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} -$$

деяка квадратна матриця. Позначимо через $A_{ij},\ i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$ алгебраїчне доповнення елемента α_{ij} в матриці A. Складемо матрицю

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ij})^T.$$

Матриця $\widetilde{A}$ називається приєднаною матрицею для матриці A. Таким чином, щоб виписати приєднану матрицю, ми кожний елемент заміняємо на його алгебраїчне доповнення і отриману матрицю транспонуємо.

Знайдемо добуток матриць $A\widetilde{A}$.

$$A\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A|E.$$

Тоді для визначників виконується $|A||\widetilde{A}| = |A|^n$. Якщо матриця A невироджена, то $|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$.

13.5. Поняття матричного многочлена

Нехай $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, \dots, A_m$ — деякі квадратні матриці порядку n, λ — незалежна змінна. Складемо вираз $A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots +$

$A_1\lambda + A_0$ — матричний многочлен.

Матриці $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_1, A_0$ називаються коефіцієнтами матричного многочлена. Якщо $A_m \neq O$, то A_m — старший коефіцієнт, а число m — степінь многочлена.

Матричні многочлени $F(\lambda)$ і $T(\lambda)$ рівні, якщо їх коефіцієнти при відповідних степенях λ рівні (алегебраїчна рівність матричних многочленів). Матричні многочлени $F(\lambda)$ і $T(\lambda)$ рівні, якщо при однакових значеннях λ вони приймають рівні значення (функціональна рівність матричних многочленів). Для матричних многочленів алгебраїчна та функціональна рівності еквівалентні.

Означення 35. Квадратна матриця називається поліноміальною, або λ-матрицею, якщо всі її елементи є многочленами від деякої фіксованої змінної λ. Кожу поліноміальну матрицю можна подати у вигляді матричного многочлена.

Приклад 7 (матриці 2×2).

$$\begin{pmatrix} 2\lambda^3 - \lambda + 3 & \lambda^2 - 4\lambda - 1 \\ \lambda^3 - 7\lambda^2 + 4\lambda - 2 & 3\lambda^3 + \lambda^2 - 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нехай $f(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ — деякий многочлен з коефіцієнтами з поля F. Квадратна матриця A з елементами з поля F називається матричним коренем цього многочлена, якщо

$$f(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E = O.$$

Теорема 28 (Гамільтона-Келлі). *Кожна квадратна матриця є матричним коренем свого многочлена.*

Доведення. Беремо довільну квадратну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Її характеристичний многочлен

$$\chi(t) = (-1)^n t^n + \gamma_{n-1} t^{n-1} + \gamma_{n-2} t^{n-2} + \ldots + \gamma_1 t + \gamma_0.$$

Позначимо через $B(t)$ матрицю, приєднану для характеристичної матриці $(A - tE)$,

$$B(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{21}(t) & \dots & A_{n1}(t) \\ A_{12}(t) & A_{22}(t) & \dots & A_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}(t) & A_{2n}(t) & \dots & A_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

$A_{ij}(t)$ — алгебраїчне доповнення елемента характеристичної матриці $(A - tE)$, що стоїть в i-ому рядку, j-ому стовпчику. Зрозуміло, що кожне алгебраїчне доповнення $A_{ij}(t)$ є многочленом змінної t степеня не вище $(n-1)$.

$$(A - tE)B(t) = \begin{pmatrix} |A - tE| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A - tE| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A - tE| \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \chi(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \chi(t) \end{pmatrix} = \chi(t)E.$$

Оскільки кожен елемент матриці $B(t)$ є многочленом від змінної t степеня не вище $(n-1)$, то цю матрицю можна записати у вигляді матричного многочлена степеня $(n-1)$.

$$B(t) = C_{n-1}t^{n-1} + C_{n-2}t^{n-2} + \ldots + C_1 t + C_0.$$

Тому виконується

$$|A - tE|(C_{n-1}t^{n-1} + C_{n-2}t^{n-2} + \ldots + C_1 t + C_0) =$$
$$(-1)^n E t^n + \gamma_{n-1} E t^{n-1} + \ldots + \gamma_1 t E + \gamma_0 E.$$

В цій рівності прирівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях змінної t. Одержуємо систему рівностей:

$$\begin{array}{l|l}
C_{n-1} = (-1)^n E, & \times A^n \\
AC_{n-1} - C_{n-2} = \gamma_{n-1} E, & \times A^{n-1} \\
AC_{n-2} - C_{n-3} = \gamma_{n-2} E, & \times A^{n-2} \\
\multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
AC_1 - C_0 = \gamma_1 E, & \times A \\
AC_0 = \gamma_0 E. & \times A^0 = E
\end{array}$$

Ці рівності домножимо зліва відповідно на $A^n, A^{n-1}, \ldots, A, A^0 = E$ і додамо. В лівій частині одержимо нульову матрицю, в правій $\chi(A)$, тобто

$$O = (-1)^n A^n + \gamma_{n-1} A^{n-1} + \ldots + \gamma_1 A + \gamma_0 E = \chi(A).$$

$\square$

13.6. Теорема Жордана

Нехай F — деяке поле, $\lambda \in F$ — деяке число, $k \in \mathbb{N}$.

Означення 36. Жордановою кліткою порядку k з параметром λ називається квадратна матриця

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Зокрема, $I_1(\lambda) = (\lambda)$, $I_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $I_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Означення 37. Жордановою матрицею називається квадратна матриця, яка має таку будову: вздовж головної діагоналі стоять жорданові клітки, решта елементів рівні нулю

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda) & O & \dots & O \\ O & J_{k_2}(\lambda) & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & J_{k_s}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Частковим випадком жорданової матриці є діагональна матриця. Всі її жорданові клітки порядку 1.

Означення 38. Поле F називається алгебраїчно замкненим, якщо кожний многочлен ненульового степеня з коефіцієнтами з цього поля має в цьому полі корінь.

З основної теореми алгебри випливає, що алгебраїчно замкненим полем є поле $\mathbb{C}$ комплексних чисел. В алгебраїчно замкненому полі кожен многочлен ненульового степеня можна розкласти в добуток лінійних множників.

Теорема 29 (Жордана)**.** *Будь-яка квадратна матриця A з елементами з алегбраїчно замкненого поля F подібна до деякої жорданової матриці з елементами з поля F. Тобто існує така невироджена матриця T з елементами з поля F, що матриця $B = T^{-1}AT$ жорданова. Матриця B називається жордановою нормальною формою матриці A.*

Сформулюємо теорему в термінах теорії лінійних операторів.

Для будь-якого лінійного оператора $\mathcal{A}$ на скінченновимірному просторі V над алгебраїчно замкненим полем F існує базис простору V, в якому оператору $\mathcal{A}$ відповідає жорданова матриця. Цей базис називається жордановим базисом оператора $\mathcal{A}$.

13.7. Будова нільпотентного оператора

Означення 39. Лінійний оператор $\mathcal{A}$ на просторі V називається нільпотентним, якщо існує $m \in \mathbb{N} : \mathcal{A}^m = \mathcal{O}$, тобто для довільного $x \in V$: $\mathcal{A}^m(x) = \theta$.

Найменше натуральне число k, для якого $\mathcal{A}^k = \mathcal{O}$ називається показником нільпотентності оператора $\mathcal{A}$.

Приклади нільпотентних операторів:

1. $\mathcal{O} : V \to V, k = 1$;

2. $F_n[x]$ — простір, беремо оператор $\mathcal{D} : \mathcal{D}(f) = f'$ для довільного $f \in F_n[x]$. Оператор нільпотентний, $k = n + 1$.

Означення 40. Квадратна матриця A називається нільпотентною, якщо для неї існує натуральне число $m : A^m = O$.

Найменше натуральне число $k : A^k = O$ називається показником нільпотентності матриці A.

Приклад 8.

$$J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ J_3^2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ J_3^3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, k = 3.$$

Приклад 9. Загальний випадок

$$J_s(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ k = s.$$

Лінійний оператор в скінченновимірному просторі нільпотентний тоді і лише тоді, коли в деякому базисі йому відповідає нільпотентна матриця.

Теорема 30 (про будову нільпотентного оператора). *Для будь-якого лінійного нільпотентного оператора в скінченновимірному просторі існує жорданів базис.*

Доведення. Припустимо, що $\mathcal{A}$ — нільпотентний оператор на скінченновимірному просторі V і m — його показник нільпотентності. Розглянемо систему операторів $\mathcal{O} = \mathcal{A}^m, \mathcal{A}^{m-1}, \mathcal{A}^{m-2}, \ldots, \mathcal{A}, \mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$ і систему підпросторів $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_m$, де $P_i = \ker \mathcal{A}^{m-i}, i = 0, 1, \ldots, m$. При $i = 0 : P_0 = \ker \mathcal{A}^{m-0} = \ker \mathcal{A}^m = V$, при $i = m : P_m = \ker \mathcal{A}^0 = \ker \mathcal{E} = \{\theta\}$.

Покажемо, що виконується включення $V = P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_{m-1} \supset P_m = \{\theta\}$.

Припустимо $0 \leq i < m$ і покажемо, що $P_{i+1} \subset P_i$. Беремо $x \in P_{i+1} = \ker \mathcal{A}^{m-i-1}$, тоді $\mathcal{A}^{m-i-1}(x) = \theta$, тому $\mathcal{A}(\mathcal{A}^{m-i-1}(x)) = \mathcal{A}(\theta) = \theta$, тобто $\mathcal{A}^{m-i}(x) = \theta$, отже $x \in \ker \mathcal{A}^{m-i} = P_i$ і відповідно $P_{i+1} \subseteq P_i$.

Покажемо, що $P_{i+1} \neq P_i$. Припустимо супротивне: $P_{i+1} = P_i$. За означенням показника нільпотентності для довільного $x \in V : \mathcal{A}^m(x) = \theta$, але існує $x_0 \in V : \mathcal{A}^{m-1}(x_0) \neq \theta$. Тоді виконується $\theta = \mathcal{A}^m(x_0) = \mathcal{A}^{m-i}(\mathcal{A}^i(x_0)), \mathcal{A}^i(x_0) \in \ker \mathcal{A}^{m-i} = P_i$, але за припущенням $P_i = P_{i+1}$, тоді $\mathcal{A}^i(x_0) \in P_{i+1} = \ker \mathcal{A}^{m-i-1}$, тобто $\mathcal{A}^{m-i-1}(\mathcal{A}^i(x_0)) = \theta$, або $\mathcal{A}^{m-1}(x_0) = \theta$, що суперечить вибору елемента x_0. Таким чином $P_{i+1} \neq P_i$, отже $P_{i+1} \subset P_i$.

Покажемо, що кожний підпростір P_i інваріантний відносно оператора $\mathcal{A}$. Для $P_m = \{\theta\}$ це очевидно, тому припустимо, що $0 \leq i < m$. Беремо $x \in P_i = \ker \mathcal{A}^{m-i}, \mathcal{A}^{m-i}(x) = \theta$ або $\mathcal{A}^{m-i-1}(\mathcal{A}(x)) = \theta, \mathcal{A}(x) \in \ker \mathcal{A}^{m-i-1} = P_{i+1}$. За доведеним $P_{i+1} \subset P_i$, а тому $\mathcal{A}(x) \in P_i$. Отже, інваріантність виконується. При доведенні інваріантності ми показали, що якщо $x \in P_i, 0 \leq i < m$, то $\mathcal{A}(x) \in P_{i+1}$.

Починаємо будувати жорданів базис. Візьмемо довільний P_1-базис простору $V = P_0$, а саме B_1: $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Тоді за доведеним $\mathcal{A}(a_1)$, $\mathcal{A}(a_2)$,…,$\mathcal{A}(a_k) \in P_1$. Покажемо, що ці вектори є P_2-лінійно незалежні. Беремо лінійну комбінацію $\alpha_1\mathcal{A}(a_1) + \alpha_2\mathcal{A}(a_2) + \ldots + \alpha_k\mathcal{A}(a_k) \in P_2$,

$\mathcal{A}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k) \in P_2 = \ker \mathcal{A}^{m-2}$. Тоді $\mathcal{A}^{m-2}(\mathcal{A}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k)) = \theta$, або $\mathcal{A}^{m-1}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k) = \theta$. Це означає, що $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k \in \ker \mathcal{A}^{m-1} = P_1$ і за означенням P_1-базису $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, тобто лінійна комбінація тривіальна. Доповнюємо вектори $\mathcal{A}(a_1), \mathcal{A}(a_2), \ldots, \mathcal{A}(a_k)$ до P_2-базису підпростору P_1 векторами $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_l$. Тобто одержимо систему векторів
B_2: $\mathcal{A}(a_1), \mathcal{A}(a_2), \ldots, \mathcal{A}(a_k), a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_l$.

Аналогічно $\mathcal{A}^2(a_1), \mathcal{A}^2(a_2), \ldots, \mathcal{A}^2(a_k), \mathcal{A}(a_{k+1}), \ldots, \mathcal{A}(a_l) \in P_2$. Аналогічно попередньому показується, що ці вектори P_3-лінійно незалежні. Тоді ці вектори доповнюємо до P_3-базису підпростору P_2 векторами $a_{l+1}, a_{l+2}, \ldots, a_s$. Одержимо систему векторів
B_3: $\mathcal{A}^2(a_1), \mathcal{A}^2(a_2), \ldots, \mathcal{A}^2(a_k), \mathcal{A}(a_{k+1}), \ldots, \mathcal{A}(a_l), a_{l+1}, a_{l+2}, \ldots, a_s$.

Продовжуючи цей процес далі через m кроків ми одержимо систему з m базисів $B_1, B_2, \ldots, B_m$. За властивостями базису простору над підпростором система векторів $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m$ утворює базис простору V.

Покажемо, що цей базис жорданів для оператора $\mathcal{A}$. Для цього запишемо вектори базису в такому порядку:

$$\begin{array}{l}
\mathcal{A}^{p_1}(a_1), \mathcal{A}^{p_1-1}(a_1), \ldots, \mathcal{A}(a_1), a_1, \\
\mathcal{A}^{p_2}(a_2), \mathcal{A}^{p_2-1}(a_2), \ldots, \mathcal{A}(a_2), a_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathcal{A}^{p_{k+1}}(a_{k+1}), \mathcal{A}^{p_{k+1}-1}(a_{k+1}), \ldots, \mathcal{A}(a_{k+1}), a_{k+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

тут для будь-якого i p_i — таке натуральне число, що, $\mathcal{A}^{p_i}(a_i) \neq \theta$, а $\mathcal{A}^{p_i+1}(a_i) = 0$. Запишемо матрицю лінійного оператора $\mathcal{A}$ в цьому базисі.

Для цього треба визначити образи базисних векторів.

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}^{p_1}(a_1)) = \mathcal{A}^{p_1+1}(a_1) = \theta =$$
$$= 0 \cdot \mathcal{A}^{p_1}(a_1) + 0 \cdot \mathcal{A}^{p_1-1} + \ldots + 0 \cdot \mathcal{A}^2(a_1) + 0 \cdot \mathcal{A}(a_1) + 0 \cdot a_1 + \ldots$$
$$\mathcal{A}(\mathcal{A}^{p_1-1}(a_1)) = \mathcal{A}^{p_1}(a_1) =$$
$$= 1 \cdot \mathcal{A}^{p_1}(a_1) + 0 \cdot \mathcal{A}^{p_1-1} + \ldots + 0 \cdot \mathcal{A}^2(a_1) + 0 \cdot \mathcal{A}(a_1) + 0 \cdot a_1 + \ldots$$
$$\mathcal{A}(\mathcal{A}^{p_1-2}(a_1)) = \mathcal{A}^{p_1-1}(a_1) =$$
$$= 0 \cdot \mathcal{A}^{p_1}(a_1) + 1 \cdot \mathcal{A}^{p_1-1} + \ldots + 0 \cdot \mathcal{A}^2(a_1) + 0 \cdot \mathcal{A}(a_1) + 0 \cdot a_1 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathcal{A}(\mathcal{A}(a_1)) = \mathcal{A}^2(a_1) =$$
$$= 0 \cdot \mathcal{A}^{p_1}(a_1) + 0 \cdot \mathcal{A}^{p_1-1} + \ldots + 1 \cdot \mathcal{A}^2(a_1) + 0 \cdot \mathcal{A}(a_1) + 0 \cdot a_1 + \ldots$$
$$\mathcal{A}(a_1) = 0 \cdot \mathcal{A}^{p_1}(a_1) + 0 \cdot \mathcal{A}^{p_1-1} + \ldots + 1 \cdot \mathcal{A}^2(a_1) + 0 \cdot \mathcal{A}(a_1) + 0 \cdot a_1 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Виписуємо матрицю для оператора $\mathcal{A}$.

$$A = \left(\begin{array}{cccccc|cc}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & J_{p_2+1}(0) & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots
\end{array}\right)$$

Таким чином в матриці першим $p_1 + 1$ базисним векторам відповідає жорданова клітка $J_{p_1+1}(0)$. Аналогічно наступним $p_2 + 1$ відповідає $J_{p_2+1}(0)$ і т д. Тобто матриця A жорданова і побудований базис жорданів. □

13.8. Критерій нільпотентності оператора

Теорема 31. *Лінійний оператор в скінченновимірному просторі нільпотентний тоді і лише тоді, коли його характеристичний многочлен* *має лише один корінь і він рівний 0.*

Доведення. (Необхідність) Припустимо $\mathcal{A}$ — нільпотентний оператор на скінченновимірному просторі V. Тоді для нього існує жорданів базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ простору V, в якому оператору $\mathcal{A}$ відповідає жорданова матриця

$$A = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & O & \ldots & O \\ O & J_{k_2}(0) & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & J_{k_s}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \text{\Large $*$} \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large O} & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Випишемо характеристичний многочлен оператора $\mathcal{A}$:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = |A - tE| = \begin{vmatrix} -t & & & \text{\Large $*$} \\ & -t & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large O} & & & -t \end{vmatrix} = (-1)^n t^n$$

і всі корені многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t) = 0$.

(Достатність) Припустимо $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на просторі V. Характеристичний многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ має єдиний корінь $t = 0$, тобто $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n t^n$. Зафіксуємо деякий базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ простору V, в цьому базисі оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця A. За теоремою Гамільтона-Келлі матриця A є матричним коренем характеристичного многочлена, тобто $(-1)^n A^n = O, A^n = O$. Тоді в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ оператору $\mathcal{A}^n$ відповідає матриця $A^n = O$, а тому для оператора $\mathcal{A}^n = \mathcal{O}$, тобто $\mathcal{A}$ нільпотентний. □

Теорема 32 (будова лінійного оператора з єдиним власним числом)**.** *Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на скінченновимірному просторі V над полем F. Його характеристичний многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ має лише єдиний корінь $\lambda_0 \in F$. Тоді для оператора $\mathcal{A}$ в просторі V існує жордановий базис.*

Доведення. $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ має вигляд $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n(t-\lambda_0)^n$. Зафіксуємо деякий базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ простору V. В цьому базисі оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця A. Розглянемо також оператор $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{E}$. В базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ йому відповідає матриця $B = A - \lambda_0 E$. Випишемо характеристичний многочлен $\chi_{\mathcal{B}}(t)$ оператора $\mathcal{B}$: $\chi_{\mathcal{B}}(t) = |B - tE| = |A - \lambda_0 E - tE| = |A - (t+\lambda_0)E|$, таким чином для довільного $t : \chi_{\mathcal{B}}(t) = \chi_{\mathcal{A}}(t+\lambda_0)$, тобто $\chi_{\mathcal{B}}(t) = (-1)^n(t+\lambda_0-\lambda_0)^n = (-1)^n t^n$. Таким чином многочлен $\chi_{\mathcal{B}}(t)$ має єдиний корінь $t = 0$, а тому за критерієм оператор $\mathcal{B}$ нільпотентний. Тоді для оператора $\mathcal{B}$ існує жорданів базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$, в якому йому відповідає жорданова матриця

$$B_1 = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & O & \ldots & O \\ O & J_{k_2}(0) & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & J_{k_s}(0) \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \lambda_0\mathcal{E}$, то в базисі $b_1, b_2, \ldots, b_n$ оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця

$$A_1 = B_1 + \lambda_0 E = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & O & \ldots & O \\ O & J_{k_2}(0) & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & J_{k_s}(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_0) & O & \ldots & O \\ O & J_{k_2}(\lambda_0) & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & J_{k_s}(\lambda_0) \end{pmatrix}.$$

Тобто матриця A_1 жорданова і $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — жорданів базис для оператора $\mathcal{A}$. □

Зауваження 6. Якщо $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на скінченновимірному просторі V над полем F і $\lambda_0 \in F$ — єдиний корінь його характеристичного многочлена, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — жорданів базис для оператора $\mathcal{A}$, то цей базис буде жордановим і для довільного оператора $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A} + \alpha\mathcal{E}$, де $\alpha \in F$ — деяке фіксоване число.

13.9. Розщеплення лінійного оператора.

Нехай $f(t) = a_k t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ — деякий многочлен від змінної t з коефіцієнтами з поля F. $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на векторному просторі V над полем F, тоді під $f(\mathcal{A})$ будемо розуміти оператор $f(\mathcal{A}) = a_k\mathcal{A}^k + a_{k-1}\mathcal{A}^{k-1} + \ldots + a_1\mathcal{A} + a_0\mathcal{E}$. Зрозуміло, якщо $f_1(t)$, $f_2(t)$ — два многочлени, то $f_1(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A}) = f_2(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})$. Якщо $\mathcal{A}$ — оператор на скінченновимірному просторі V і $\chi(t)$ — його характеристичний многочлен, то з теореми Гамільтона-Келлі випливає, що $\chi(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$.

Теорема 33 (про розщеплення лінійного оператора)**.** *Нехай $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на скінченновимірному просторі V над полем F. Його характеристичний многочлен $\chi(t)$ розкладається в добуток попарно взаємно простих многочленів ненульового степеня $\chi(t) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t) \cdot \ldots \cdot \varphi_k(t)$. Тоді простір V є прямою сумою підпросторів $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$ з властивостями:*

1) всі підпростори $L_i, 1 \le i \le k$, інваріантні відносно оператора $\mathcal{A}$;

2) для довільного $i = \overline{1,k}$: $\varphi_i(\mathcal{A})$ діє на підпросторі L_i як тотожньо нульовий оператор.

Доведення. Достатньо довести теорему для випадку двох множників, а потім скористатися індукцією. Припустимо $\chi(t) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)$. Визначимо підпростори L_1, L_2. $L_1 = \ker\varphi_1(\mathcal{A}), L_2 = \ker\varphi_2(\mathcal{A})$. Зрозуміло, що умова 2) виконується. Покажемо, що $V = L_1 \oplus L_2$. Оскільки $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ взаємно прості многочлени, то існують такі многочлени $f_1(t), f_2(t)$, що $f_1(t)\varphi_1(t) + f_2(t)\varphi_2(t) = 1$. Для оператора це означає $f_1(\mathcal{A})\varphi_1(\mathcal{A}) + f_2(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$. Беремо $x \in V$, тоді $f_1(\mathcal{A})\varphi_1(\mathcal{A})(x) + f_2(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A})(x) = x$.

Позначимо $x_1 = f_2(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A})(x), x_2 = f_1(\mathcal{A})\varphi_1(\mathcal{A})(x)$, тоді $x = x_1 + x_2$. Покажемо, що $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$.

$$\varphi_1(\mathcal{A})(x_1) = \varphi_1(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A})(x) = f_2(\mathcal{A})\varphi_1(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A})(x)$$

$$= f_2(A)\chi(\mathcal{A})(x) = f_2(\mathcal{A})(\theta) = \theta.$$

Тут ми скористались тим, що за теоремою Гамільтона-Келлі $\chi(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, тобто $\chi(\mathcal{A})(x) = \theta$. Таким чином $\varphi_1(\mathcal{A})(x_1) = \theta, x_1 \in \ker\varphi_1(\mathcal{A}) = L_1$. Аналогічно $x_2 \in L_2$ і, отже, $V = L_1 + L_2$.

Покажемо, що $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$. Беремо $x \in L_1 \cap L_2$, тоді $x \in L_1 = \ker\varphi_1(\mathcal{A}), x \in L_2 = \ker\varphi_2(\mathcal{A}), \varphi_1(\mathcal{A})(x) = \theta, \varphi_2(\mathcal{A})(x) = \theta$. Але виконується $f_1(\mathcal{A})\varphi_1(\mathcal{A})(x) + f_2(\mathcal{A})\varphi_2(\mathcal{A})(x) = x$, тобто $f_1(\mathcal{A})(\theta) + f_2(\mathcal{A})(\theta) = x, x = \theta$, тому $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$. Отже, $V = L_1 \oplus L_2$.

Залишається показати інваріантність підпросторів L_1, L_2 відносно оператора $\mathcal{A}$. Беремо $x \in L_1 = \ker\varphi_1(\mathcal{A})$, тоді $\varphi_1(\mathcal{A})(\mathcal{A}(x)) = \mathcal{A}(\varphi_1(\mathcal{A})(x)) = \mathcal{A}(\theta) = \theta$, тобто $\mathcal{A}(x) \in \ker\varphi_1(\mathcal{A}) = L_1$. Аналогічно для L_2. $\square$

13.10. Доведення теореми Жордана

(Для будь-якого лінійного оператора на скінченновимірному просторі над алгебраїчно замкненим полем існує жорданів базис.)

Доведення. Припустимо $\mathcal{A}$ — лінійний оператор на скінченновимірному просторі V над полем F. Оскільки поле алгебраїчно замнене, то характеристичний многочлен $\chi(t)$ оператора $\mathcal{A}$ можна розкласти в добуток лінійних множників $\chi(t) = (-1)^n(t-\lambda_1)^{k_1}(t-\lambda_2)^{k_2}\dots(t-\lambda_s)^{k_s}, \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, k_1+k_2+\dots+k_s = n$. Позначимо $\varphi_1(t) = (-1)^{k_1}(t-\lambda_1)^{k_1}, \varphi_2(t) = (-1)^{k_2}(t-\lambda_2)^{k_2}, \dots, \varphi_s(t) = (-1)^{k_s}(t-\lambda_s)^{k_s}$. Тоді многочлени $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_s(t)$ попарно взаємно прості. Тому за теоремою про розщеплення лінійного оператора $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_s$, причому $L_i, i = \overline{1,s}$ інваріантні відносно $\mathcal{A}$, $L_i = \ker\varphi_i(\mathcal{A})$. Тому, якщо в кожному підпростору $L_i, i = \overline{1,s}$ існує жорданів базис для $\mathcal{A}$, то об'єднання цих базисів дає жорданів базис всього простору. Позначимо через $\mathcal{A}_i$ звуження оператора $\mathcal{A}$ на підпростір $L_i,\ i = \overline{1,s}$. За теоремою про розщеплення $\varphi_i(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Тобто $(-1)^{k_i}(\mathcal{A}_i - \lambda_i\mathcal{E})^{k_i} = \mathcal{O},\ (\mathcal{A}_i - \lambda_i\mathcal{E})^{k_i} = \mathcal{O}$. Це означає, що оператор $\mathcal{A}_i - \lambda_i\mathcal{E}$ — нільпотентний оператор на підпросторі L_i, а тому для нього в підпросторі L_i існує жорданів базис, який буде жордановим і для оператора $\mathcal{A}_i$. Таким чином для звужень оператора $\mathcal{A}$ на підпростори L_i існує жордаові базиси відповідних підпросторів. Об'єднання цих базисів дає жорданів базис простору V для оператора $\mathcal{A}$. $\square$

Література

[1] Чарін В. С. Лінійна алгебра. – К.: Техніка, 2004. – 416 с.

[2] Булдигін В.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навчальний посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. – К.: ТВіМС, 2011. – 224 с.

[3] Безущак О. О., Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. А. Навчальний посібник із лінійної алгебри. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2019. – 224 с.

[4] Маринич О. В., Проскурін Д. П. Скінченновимірний лінійний аналіз. Теорія визначників (Δ). – К: «Центр навчальної літератури», 2014. – 209 с.

[5] В. В. Булдигін, В. А. Жук, С. О. Рущицька, В. В. Ясінський. Збірник задач з аналітичної геометрії та векторної алгебри: навч. посіб. – К.: Вища шк., 1999. – 192 с.

[6] О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкін, Є. А. Кочубінська. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри: навч. посіб. – К.: Видавничо–поліграфічний центр “Київський університет”, 2016. – 255 с.