

**ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**КУРС ЛЕКЦІЙ З КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ.
ЧАСТИНА ДРУГА
Курс лекцій**

**Київ
2021**

Курс лекцій з комплексного аналізу. Частина друга: курс лекцій / О.Ю. Грищенко, С.С. Зуб, Д.А. Ключин, С.І. Ляшко, В.В. Оноцький. — Київ: 2021. — 236 с.

Укладачі:

О.Ю. Грищенко, до 2016 року доктор фізико-математичних наук, професор;
С.С. Зуб, доктор технічних наук, старший науковий співробітник;
Д.А. Ключин, доктор фізико-математичних наук, професор;
С.І. Ляшко, доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАНУ, професор
В.В. Оноцький, кандидат фізико-математичних наук, асистент.

Рецензенти:

Молодцов О.І., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Якимів Р.Я., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Затверджено на засіданні науково-методичної комісії факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені

Тараса Шевченка, протокол № 3 від 13 жовтня 2025 року.

Затверджено на засіданні вченої ради факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, протокол № 3 від 14 жотня 2025 року.

ЗМІСТ

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК (ІНТЕРАКТИВНИЙ)	8
ТЕМА V. ІНТЕГРУВАННЯ В КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ	14
5.1. Криволінійний інтеграл	14
5.1.1. Основні поняття	14
5.1.2. Основні властивості криволінійних інтегралів	17
5.2. Приклади обчислення криволінійних інтегралів	21
5.3. Інтегрування аналітичних функцій	25
5.3.1. Лема Гурса про апроксимацію криволінійного інтеграла	26
5.3.2. Теорема Коші	27
5.4. Інтеграл Коші та інтегральна формула Коші	32
5.4.1. Інтегральна теорема Коші	32
5.4.2. Наслідки з інтегральної теореми Коші	33
5.4.3. Означений і неозначений інтеграл у комплексній площині	37
5.5. Інтеграл типу Коші та його властивості	41
5.5.1. Поняття інтеграла типу Коші	42
5.5.2. Основні властивості інтеграла типу Коші	42
5.5.3. Інтеграл, залежні від параметра	48
5.5.4. Інтеграл Пуассона та Шварца	50
5.5.5. Значення інтегралів Пуассона та Шварца на колі	53
5.6. Головне та граничні значення інтеграла типу Коші	55
5.6.1. Головне значення інтеграла типу Коші	55
5.6.2. Граничні значення інтеграла типу Коші	57
5.7. Приклади застосування властивостей інтегралів Коші та типу Коші при обчисленні інтегралів	58
5.7.1. Інтегрування в комплексній площині	59
5.7.2. Інтегральна формула Коші	61
ТЕМА VI. РЯДИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ	65
6.1. Рівномірно збіжні ряди аналітичних функцій	65
6.1.1. Загальні відомості про функціональні ряди	65
6.1.2. Основні властивості рівномірно збіжних рядів аналітичних функцій	69

6.2. Степеневі ряди	72
6.2.1. Перша теорема Абеля	72
6.2.2. Формула Коші – Адамара для визначення радіуса круга збіжності степеневому ряду	74
6.2.3. Арифметичні дії над степеневими рядами	77
6.2.4. Друга теорема Абеля	80
6.3. Ряди Тейлора	82
6.3.1. Голоморфні функції	82
6.3.2. Нулі аналітичних функцій	83
6.3.3. Єдиність аналітичної функції	86
6.3.4. Оцінка Коші коефіцієнтів ряду Тейлора	87
6.3.5. Теорема про ряд степеневих рядів (композицію рівномірно збіжних рядів аналітичних функцій)	88
6.4. Зразки дослідження функціональних рядів	88
6.5. Аналітичні продовження. Повні аналітичні функції	92
6.5.1. Існування особливої точки на границі круга збіжності	99
6.6. Принцип побудови аналітичного продовження	101
6.6.1. Принцип неперервності	101
6.6.2. Принцип симетрії Рімана – Шварца	103
6.7. Означення елементарних функцій у комплексній площині	104
6.7.1. Показникові та тригонометричні функції	105
6.7.2. Логарифмічна та обернені тригонометричні функції	105
6.7.3. Обернені тригонометричні функції	106
6.7.4. Різні підходи до побудови теорії аналітичних функцій	108
6.8. Ряди Лорана	109
6.8.1. Розвинення аналітичних функцій у ряд Лорана	109
6.8.2. Розвинення аналітичної функції в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої особливої точки	113
6.8.3. Єдиність розвинення аналітичної функції в ряд Лорана	114
6.8.4. Поведінка аналітичної функції в околі ізольованих усувних особливих точок і полюсів	114
6.8.5. Відповідність між нулями та полюсами аналітичної функції	116
6.8.6. Поведінка аналітичної функції в околі істотно особливої точки	117
6.9. Класи простих аналітичних функцій	119
6.10. Приклади дослідження функцій за допомогою рядів Лорана	121
ТЕМА VII. ТЕОРІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ЛИШКІВ	125

7.1. Інтегральні лишки відносно ізольованих особливих точок однозначного характеру	125
7.1.2. Обчислення інтегрального лишку відносно нескінченно віддаленої точки	129
7.2. Теорема про логарифмічний лишок	130
7.2.1. Обчислення інтеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$	130
7.2.2. Теорема про логарифмічний лишок. Принцип аргументу	133
7.3. Застосування теореми про логарифмічний лишок	135
7.4. Типові приклади обчислення інтегральних лишків	138
7.5. Застосування теорії інтегральних лишків до обчислення власних і невластних інтегралів Рімана	141
7.5.1. Обчислення інтегралів вигляду $I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$	142
7.5.2. Обчислення невластних інтегралів типу $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$	142
7.5.3. Обчислення невластних інтегралів вигляду	144
$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{cases} \cos \lambda x \\ \sin \lambda x \end{cases} dx$	144
7.5.4. Обчислення невластних інтегралів, що мають особливі точки на дійсній осі	146
7.5.5. Зразки обчислення інтегралів за допомогою теорії лишків	149
7.6. Розклад мероморфних функцій на простіші дроби	152
7.6.1. Розклад на простіші дроби мероморфних функції зі скінченною кількістю полюсів	153
7.6.2. Теорема Миттаг – Леффлера	155
7.6.3. Побудова розкладу мероморфної функції на простіші дроби на прикладі функції ctgz	158
7.7. Формула Лагранжа обернення степеневих рядів	162
7.8. Застосування теорії лишків до обчислення сум рядів	166
7.9. Нескінченні добутки та їх застосування в теорії цілих і мероморфних функцій	168
7.9.1. Необхідна умова збіжності нескінченного добутку	169
7.9.2. Критерій збіжності нескінченного добутку	170

7.9.3. Абсолютно збіжні добутки	170
7.9.4. Рівномірна збіжність нескінченних добутків	173
7.10. Запис аналітичної функції у вигляді нескінченного добутку	175
7.11. Подання цілих і мероморфних функцій у вигляді нескінченних добутків	176
7.11.1. Теорема Вейерштрасса	177
7.11.2. Розвинення функції $\sin z$ у нескінченний добуток	181
7.11.3. Зображення мероморфних функцій у вигляді відношення цілих функцій	182
7.11.4. Задача Миттаг – Леффлера	183
7.12. Деякі підходи до дослідження нескінченних добутків	183
ТЕМА VIII. ТЕОРІЯ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ	186
8.1. Однолисті та n-листі околи. Принцип збереження області	187
8.1.1. Теорема про збереження однолистого околу	187
8.1.2. Обернене однолисте відображення	190
8.1.3. Теорема про збереження області	191
8.1.4. Образ околу особливої точки відображальної функції	192
8.2. Принципи взаємооднозначної відповідності меж та однолистості	195
8.2.1. Відповідність границі при конформних відображеннях	196
8.2.2. Принцип однолистості	199
8.3. Лема Шварца	201
8.4. Ізоморфізм та автоморфізм конформних відображень	203
8.5. Основна теорема Рімана про конформні відображення однозв'язних областей	205
8.6. Застосування принципів симетрії Рімана – Шварца до конформних відображень	212
8.7. Про відображення багатозв'язних областей	215
8.8. Застосування принципу симетрії до розв'язування задач теорії конформних відображень	216
ТЕМА IX. КОНФОРМНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ БАГАТОКУТНИХ ОБЛАСТЕЙ НА ВЕРХНЮ ПІВПЛОЩИНУ	221

9.1. Формула Христофеля – Шварца першого роду	221
9.2. Формула Христофеля – Шварца другого роду	226
9.3. Відображення верхньої півплощини на прямокутник	228
9.4. Еліптичні функції Якобі	231
СПИСОК ДЖЕРЕЛ	236

Предметний покажчик (інтерактивний)

ТЕМА V. ІНТЕГРУВАННЯ В КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ

[Інтеграл від функції](#)

[Спрямлювана крива](#)

[Довжина кривої](#)

[Рівномірна збіжність функціонального ряду](#)

[Гомотопія \(деформація\)](#)

[Гомотопія з фіксованими початком і кінцем](#)

[Лема Гурса](#)

[Теорема Коші](#)

[Теорема Коші для багатозв'язних областей](#)

[Узагальнена теорема Коші](#)

[Інтегральна теорема Коші](#)

[Інтегральна формула Коші](#)

[Інтеграл Коші](#)

[Теорема про середнє арифметичне](#)

[Принцип максимуму модуля аналітичної функції](#)

[Наслідок 1 принципу максимуму](#)

[Наслідок 2 принципу максимуму](#)

[Наслідок 3 принципу максимуму](#)

[Теорема про максимум та мінімум гармонічної функції](#)

[Наслідок 4 принципу максимуму](#)

[Теорема про незалежність значення інтеграла від шляху інтегрування](#)

[Теорема Коші про інваріантність при гомотопних деформаціях шляху інтегрування](#)

[Наслідок про незалежність значення інтегралу аналітичної функції від шляху інтегрування](#)

[Означений інтеграл](#)

[Інтеграл зі змінною верхньою межею](#)

[Теорема про аналітичність означеного інтегралу як функції змінної верхньої межі](#)

[Теорема про сукупність усіх первісних функцій](#)

[Первісна функції \$f\(z\)\$ уздовж шляху \$\gamma\$](#)

[Неозначений інтеграл](#)

[Формула Ньютона – Лейбниця](#)

[Наслідок справедливості формули Ньютона-Лейбниця](#)

[Інтеграл типу Коші](#)

[Функція, яка неперервно продовжується на точку \$\zeta \in L\$](#)

[Лема про неперервне продовження](#)

[Теорема про аналітичність інтеграла типу Коші](#)

[Наслідок 1](#)

[Наслідок 2](#)

Наслідок 3

Теорема Ліувілля

Теорема Морера

Теорема про диференціювання інтегралу залежного від параметру

Інтеграл Пуассона

Інтеграл Шварца

Теорема про зв'язок між інтегралами Пуассона та Шварца

Наслідок теореми про зв'язок між інтегралами Пуассона та Шварца

Головне значення інтеграла типу Коші

Формули Сохоцького – Племеля

ТЕМА VI. РЯДИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Рівномірно збіжність

Рівномірно фундаментальна послідовність

Теорема про лінійність рівномірної збіжності функціональних послідовностей

Мажорантна ознака Вейерштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду

Нормально збіжний ряд

Теорема про зв'язок між нормальною та рівномірною збіжністю

Тотожність Абеля

Бімонотонна послідовність

Теорема про бімонотонну послідовність

Теорема 1

Теорема 2

Теорема 3 (Абеля)

Теорема Діріхле

Теорема Вейерштрасса

Степеневий ряд

Канонічний вигляд степеневого ряду

Перша теорема Абеля

Радіус збіжності степеневого ряду

Переріз Дедекінда

Формули Коші – Адамара

Теорема про аналітичність степеневого ряду

Теорема про нульовий степеневий ряд

Сума й різниця степеневого ряду

Добуток степеневих рядів

Ділення степеневих рядів

Друга теорема Абеля

Голоморфна функція

Нуль аналітичної функції

Нуль кратності n (порядку n)

Нуль нескінченного порядку

Нуль порядку n у точці $z = \infty$

Ознака (критерій) нуля порядку n

Теорема про властивість нуля нескінченного порядку

Теорема про ізолюваність нулів аналітичної функції

Наслідок 1

Наслідок 2

Наслідок 3

Теорема єдності аналітичної функції

Теорема єдності аналітичної функції (інше формулювання)

Оцінка Коші коефіцієнтів ряду Тейлора

Теорема про ряд степеневих рядів (композицію рівномірно збіжних рядів аналітичних функцій)

Аналітичне продовження

Теорема єдності аналітичного продовження

Теорема про монодромію

Повна аналітична функція у розумінні Вейерштрасса

Природня границя повної аналітичної функції

Особливі точки аналітичної функції

Ізолювана особлива точка

Точки регулярності

Ізолювана особлива точка однозначного характеру

Ізолювана особлива точка неоднозначного характеру

Точка розгалужування порядку n

Особлива точка $z = \infty$

Теорема про існування особливої точки на границі круга збіжності

Принцип неперервності

Принцип симетрії Рімана – Шварца

Показникова та тригонометричні функції

Логарифмічна функція

Функції $\operatorname{arctg} z$ та $\operatorname{arcctg} z$

Функції $\operatorname{arcsin} z$ та $\operatorname{arccos} z$

Ряд Лорана

Теорема про розвинення аналітичної функції в ряд Лорана

Головна та правильна частини ряду Лорана

Усувна особлива точка

Поліус першого порядку (простий поліус)

Поліус порядку P

Істотно особлива точка

Ізолювана особлива точка $z = \infty$

Теорема про усуну ізолювану точку

Теорема про відповідність між нулями та поліусами аналітичної функції

Теорема про інваріантність істотно особливої точки відносно дробово-лінійного відображення

Теорема Сохоцького – Вейерштрасса про істотно особливу точку

Теорема Пікара

Ціла аналітична функція

Теорема про цілу раціональну функцію

Мероморфна функція

Теорема про раціональну мероморфну функцію

ТЕМА VII. ТЕОРІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ЛИШКІВ

Інтегральний лишок аналітичної функції

Основна теорема про інтегральні лишки

Формули обчислення інтегральних лишків

Теорема про суму інтегральних лишків

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Теорема обчислення інтеграла

Теорема про логарифмічний лишок

Наслідок з теореми про логарифмічний лишок

Принцип аргументу

Теорема Руше

Основна теорема алгебри

Теорема Гурвиця

$$I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$$

Обчислення інтегралів вигляду

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

Обчислення невластних інтегралів типу

Лема Жордана

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{cases} \cos \lambda x \\ \sin \lambda x \end{cases} dx$$

Обчислення інтегралів вигляду

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$$

Обчислення невластного інтегралу

Теорема про обчислення невластних інтегралів, що мають особливі точки на дійсній осі

Найпростіший дріб

Теорема про розклад мероморфної раціональної функції на простіші дроби

Теорема Миттаг – Леффлера

Формула розкладу функції $\operatorname{ctg} z$ на простіші дроби

Нескінченний добуток

[Частинний добуток нескінченного добутку](#)
[Збіжність нескінченного добутку](#)
[Розбіжність нескінченного добутку](#)
[Збіжність та розбіжність нескінченного добутку, що містить скінченну кількість рівних нулю множників](#)
[Необхідна умова збіжності нескінченного добутку](#)
[Критерій збіжності нескінченного добутку](#)
[Абсолютна збіжність нескінченного добутку](#)
[Теорема про абсолютну збіжність нескінченного добутку](#)
[Зв'язок збіженості та абсолютної збіжності нескінченного добутку](#)
[Рівномірна збіжність нескінченного добутку](#)
[Теорема про рівномірну збіжність нескінченного добутку](#)
[Лема про зв'язок цілих функцій, що мають одні й ті самі нулі з однакою кратністю](#)
[Теорема Вейерштрасса](#)
[Формула Вейерштрасса, або нескінченний добуток Вейерштрасса](#)
[Розвинення \$\sin z\$ у нескінченний добуток](#)

ТЕМА VIII. ТЕОРІЯ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

[Узагальнений окіл](#)
[Теорема про збереження однолистою околу \(про локальну однолистість\)](#)
[Теорема про обернене однолисте відображення](#)
[Наслідок з теореми про обернене однолисте відображення](#)
[Область в узагальненому сенсі](#)
[Теорема про збереження області](#)
[Теорема про відповідність границі при конформних відображеннях](#)
[Теорема \(принцип однолистості\)](#)
[Лема Шварца](#)
[Конформний ізоморфізм](#)
[Конформний автоморфізм](#)
[Теорема про побудову автоморфізму](#)
[Теорема Рімана](#)
[Узагальнення теореми Рімана для обмежених однозв'язних областей](#)
[Інше формулювання теореми Рімана](#)
[Теорема про існування аналітичного продовження конформного відображення](#)
[Критерій існування конформного відображення кільця на кільце](#)

ТЕМА IX. КОНФОРМНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ БАГАТОКУТНИХ ОБЛАСТЕЙ НА ВЕРХНЮ ПІВПЛОЩИНУ

[Формула Христофеля – Шварца](#)
[Параметри Христофеля – Шварца](#)
[Інтеграл Христофеля – Шварца першого роду](#)

[Інтеграл Христофеля – Шварца другого роду](#)
[Еліптичний інтегралом Лагранжа першого роду](#)
[Повні еліптичні інтеграли першого роду](#)
[Еліптичний синус Якобі](#)
[Подвійна періодичність](#)
[Еліптичні функції Якобі](#)

Інструкція з користуванням гіперпосиланнями

<MouseLeftClick> – перейти за гіперпосиланням;
Комбінація клавіш **Alt+<Стрілка ліворуч>** – повернутися назад.

ТЕМА V. ІНТЕГРУВАННЯ В КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ

5.1. Криволінійний інтеграл

5.1.1. Основні поняття

Традиційно операцію інтегрування в комплексній площині вводять через поняття криволінійного інтеграла. Для цього покладають, що в комплексній площині \mathbb{C} є кусково-гладка крива γ , на якій задано неперервну функцію $f(z) = u + iv$.

Нехай шлях інтегрування визначає крива γ , що записується за допомогою рівняння $\zeta = \alpha(t) + i\beta(t)$, де $t \in [a, b]$, a та b можуть набувати довільних дійсних значень, у тому числі $a = -\infty$ $b = \infty$. Розіб'ємо дугу γ точками $z_0 = A, z_1, z_2, \dots, z_n = B$ на дуги γ_k і позначимо відрізки $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. На дугах γ_k довільно візьмемо точки $\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k \in \gamma_k$ (рис. 5.1).

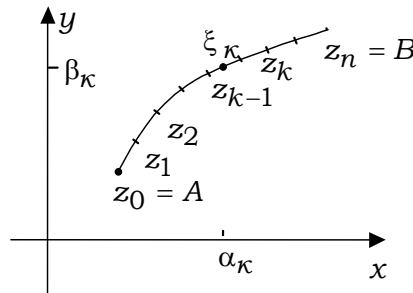


Рис. 5.1

Складемо інтегральну суму

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k &= \sum_{k=1}^n \left[u(\alpha_k, \beta_k) \Delta x_k + iv(\alpha_k, \beta_k) \Delta y_k \right] + \\ &+ i \sum_{k=1}^n \left[v(\alpha_k, \beta_k) \Delta x_k + u(\alpha_k, \beta_k) \Delta y_k \right]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Перейдемо до границі в лівій і правій частинах рівності при $\max_k |\Delta z_k| \rightarrow 0$ ($\Delta x_k \rightarrow 0, \Delta y_k \rightarrow 0$):

$$\lim_k \lim_{\max|\Delta z| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k = \lim_k \lim_{\max|\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [u(\alpha_k, \beta_k) \Delta x_k + i v(\alpha_k, \beta_k) \Delta y_k] +$$

$$+ i \lim_k \lim_{\max|\Delta z| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [v(\alpha_k, \beta_k) \Delta x_k + u(\alpha_k, \beta_k) \Delta y_k] \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

За зроблених припущень щодо гладкості кривої та функції $f(z)$, дійсна та уявна частини цієї інтегральної суми мають границі, які не залежать від вибору точок ξ_k і є криволінійними інтегралами другого роду $\int_{\gamma} u dx - v dy$ та $\int_{\gamma} v dx + u dy$.

Без уведення цих припущень для визначення криволінійного інтеграла в комплексній площині використовують таке означення.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми при $n \rightarrow \infty$ така, що $\forall k \max_k |\Delta z_k| \rightarrow 0$, і вона не залежить від вибору точок

$\xi_k \in \gamma_k$, то цю границю називають *інтегралом від функції $f(z) = u + i v$ у комплексній площині вздовж кривої γ* у вибраному напрямку й позначають

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy. \quad (5.2)$$

Якщо крива γ описується функцією, залежною від параметра t , а саме $z = z(t) = x(t) + i y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, і $z'(t) = x'(t) + i y'(t) \neq 0$, то поняття інтеграла вздовж шляху можна ввести інакше.

Нехай $\gamma : z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ – неперервно диференційовний шлях і на його образі, який також позначатимемо через γ , визначена функція $f(z)$ така, що $f(z(t))$ неперервна на $[\alpha, \beta]$. Тоді інтегралом уздовж кривої γ від функції $f(z)$ назвемо

$$\int_{\gamma} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re}\{f(z(t)) z'(t)\} dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im}\{f(z(t)) z'(t)\} dt. \quad (5.3)$$

Отже, інтеграл уздовж кривої γ в комплексній площині записується як сума двох (дійсної та уявної частин) криволінійних інтегралів від функцій дійсних змінних $u(x, y)$ та $v(x, y)$, або як параметрично заданий означений інтеграл. Поняття інтеграла поширюється на випадок, коли γ є кусково-неперервно диференційовним шляхом. Тоді інтеграл існує також у розумінні Рімана.

У загальному випадку існування такого інтеграла зводиться до існування двох криволінійних інтегралів функцій дійсних змінних, які є дійсною та уявною частинами функції $f(z)$.

Припустимо, що $\gamma: z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$ є неперервною кривою. Кожному розбиттю сегмента $[\alpha, \beta]$ на частинки $[\alpha_k, \beta_k]$ ($k = \overline{0, n-1}$), при умові що $\alpha_0 = \alpha < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = \beta$ відповідає розбиття кривої γ на частини γ_k ($k = \overline{0, n-1}$) з початковими точками $z_k = z(\alpha_k)$ і кінцевим $z_{k+1} = z(\alpha_{k+1})$, так що кінцева точка кожної дуги (крім останньої, якщо крива не замкнена) співпадає з початковою точкою наступної. З'єднуючи послідовно точки $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z(\beta)$ ми одержимо ломану p_n , вписану у криву γ . Кожна ланка цієї ломаної $\Delta z_{k+1} = z_{k+1} - z_k$ є хордою, вписаною у відповідну дугу γ_k ($k = \overline{0, n-1}$). Очевидно, що дов-

жина ломаної p_n рівна $|p_n| = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$. Якщо ця величина, незалежно від вибраного розбиття кривої залишається обмеженою $\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \leq c < \infty$, то крива γ називається *спрямлюваною*, а верхня границя вказаних сум є *довжиною* кривої γ . Інакше кажучи, довжина спрямлюваної кривої є границею довільної послідовності вписаних у γ ломаних, при умові що максимальна довжина сегментів ломаних, які відповідають розбиттю $[\alpha, \beta]$ прямує до нуля.

Якщо ж крива тільки спрямлювана, то навіть для неперервних функцій $f(z)$ потрібно використовувати загальніше визначення інтеграла, оскільки в правій частині множник $z'(z)$ існує майже всюди. У цьому випадку потрібно використовувати інтеграл Лебега й вимагати, щоб функція $f(z(t))z'(t)$ була підсумованою на проміжку $[\alpha, \beta]$.

Використовуючи поняття інтегральної суми, обчислимо простіші інтеграли. Розглянемо гладку криву γ з початком і кінцем у точках $z = a$ та $z = b$.

1) Покладемо $f(z) \equiv 1$. За означенням

$$\int_{\gamma} dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = b - a.$$

2) При обчисленні інтеграла $\int_{\gamma} z dz$ скористаємося тим, що границя інтегральної суми не має залежати від вибору точки ζ_k , і покладемо

$$\zeta_k = \frac{z_{k-1} + z_k}{2}. \text{ Отже,}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \zeta_k (z_k - z_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{z_k + z_{k-1}}{2} (z_k - z_{k-1}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

Установити цю формулу можна інакше, а саме, якщо $f(z) \equiv z$, а контур γ – кусково-гладкий і описується рівнянням $z = z(t)$, то

$$\int_{\gamma} z dz = \int_{\alpha}^{\beta} z(t) z'(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} (z^2(t)) = \frac{1}{2} [z^2(\beta) - z^2(\alpha)].$$

5.1.2. Основні властивості криволінійних інтегралів

Ураховуючи введені означення інтеграла в комплексній площині та зроблені зауваження, легко показати, що правила інтегрування в комплексній площині формально залишаються такими самими, як і в площині дійсних змінних. Нагадаємо основні з них.

1) *Орієнтованість*. Нехай γ – шлях інтегрування, який заданий рівнянням $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ і має з додатний напрямком, інтеграл $\int_{\gamma} f(z) dz$ існує, а $\bar{\gamma} = \gamma_1$ – той самий шлях, що й γ , але пройдений у зворотному напрямку, тобто $\bar{\gamma}: z = z(\beta + \alpha - t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Тоді, виходячи з побудови інтегральної суми, маємо

$$\int_{\bar{\gamma}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

2) *Лінійність*. Якщо $f_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) – деяка множина інтегрованих на контурі γ функцій, а $c_k \in \mathbb{C}$ – сталі, то

$$\int_{\gamma} \sum_{k=1}^n c_k f_k(z) dz = \sum_{k=1}^n c_k \int_{\gamma} f_k(z) dz.$$

Ця властивість перевіряється безпосередньо за означенням.

3) *Адитивність*. Нехай маємо шляхи: $\gamma_1: z = z_1(t)$, $t \in [\alpha, \beta_1]$; $\gamma_2: z = z_2(t)$, $t \in [\beta_1, \beta_2]$, ..., $\gamma_n: z = z_n(t)$, $t \in [\beta_{n-1}, \beta]$, причому $z_k(\beta_k) = z_{k+1}(\beta_k)$, ($k = 1, n-1$). Об'єднанням $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \dots \cup \gamma_n$ цих шляхів

назвемо шлях γ :

$$z = \begin{cases} z_1(t), & t \in [\alpha, \beta_1] \\ z_2(t), & t \in [\beta_1, \beta_2] \\ \dots \\ z_n(t), & t \in [\beta_{n-1}, \beta] \end{cases} \text{ при } t \in [\alpha, \beta].$$

Тоді для будь-якої неперервної на γ функції $f(z)$ маємо

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f_k(z) dz.$$

4) *Оцінка модуля інтеграла.* Для довільної функції $f(z)$, неперервної на гладкій кривій γ , яка описується параметричним рівнянням $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, вірна нерівність

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| = \int_{\gamma} |f(s)| ds,$$

де в правій частині фігурує криволінійний інтеграл першого роду, а ds – довжина елемента дуги γ .

5) Якщо при виконанні умов попереднього пункту $|f(z)| \leq M$ усюди

на кривій γ , то $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq Ml$, де l – довжина кривої γ .

6) *Інваріантність відносно заміни параметра.* Нехай маємо два еквівалентні шляхи γ та γ_1 такі, що $\gamma: z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, $\gamma_1: z = z_1(\tau)$, $\tau \in [\alpha_1, \beta_1]$, а $\tau = \tau(t)$ – неперервна й монотонно зростаюча на $[\alpha, \beta]$ функція, для якої $\tau(\alpha) = \alpha_1$, $\tau(\beta) = \beta_1$ і $z(t) = z_1(\tau(t))$. Тоді

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Іншими словами, значення інтегралів від $f(z)$ уздовж еквівалентних шляхів збігаються.

7) *Перехід до границі параметра під знаком інтеграла.* Якщо $f(z)$ залежить від параметра ζ з деякої множини A , $\zeta \in A \subset \mathbb{C}$ і функція $f(z, \zeta) \rightarrow \varphi(z)$ рівномірно відносно $z \in \gamma$ при $\zeta \rightarrow \zeta_0$, то

$$\int_{\gamma} f(z, \zeta) dz \rightarrow \int_{\gamma} \varphi(z) dz \text{ при } \zeta \rightarrow \zeta_0.$$

8) Суму рівномірно збіжного ряду, складеного з неперервних на кривій γ функцій, можна почленно інтегрувати вздовж γ .

Доведення справедливості перших шести тверджень впливає безпосередньо з побудови інтегральних сум та оцінок модулів комплексних чисел.

Зупинимось детально на доведенні властивостей 7, 8.

Справедливість твердження 7 впливає з того, що для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що при $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ зі збіжності функції $f(z, \zeta) \rightarrow \varphi(z)$ маємо $|f(z, \zeta) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{l}$ (тут $l = \text{const}$ – довжина дуги γ), а отже,

$$\left| \int_{\gamma} f(z, \zeta) dz - \int_{\gamma} \varphi(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} (f(z, \zeta) - \varphi(z)) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z, \zeta) - \varphi(z)| |dz| \leq \frac{\varepsilon}{l} l = \varepsilon.$$

Для доведення властивості 8 нагадаємо потрібне означення.

Означення. Функціональний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z)$ збігається рівномірно в D , якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що $\forall n > N(\varepsilon)$, $\forall z \in D$ вірна оцінка $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$. Тут $S_n(z) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(z)$ – частинна сума ряду.

Доведемо допоміжне твердження.

Лема. Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z)$ збігається рівномірно в D , а його члени

$\varphi_k(z)$ неперервні в точці $z_0 \in D$, то сума ряду $S(z)$ є неперервною функцією в точці z_0 .

◁ Нехай у точці z_0 усі члени ряду неперервні. Оцінимо різницю

$$\begin{aligned} & |S(z_0 + h) - S(z_0)| = \\ & = |S(z_0 + h) - S_n(z_0 + h) + S_n(z_0 + h) - S_n(z_0) + S_n(z_0) - S(z_0)| \leq \\ & \leq |S(z_0 + h) - S_n(z_0 + h)| + |S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)| + |S_n(z_0) - S(z_0)|. \end{aligned}$$

При $n > N(\varepsilon)$ і достатньо малому, прямуючому до нуля $|h|$, перший і третій модулі в правій частині рівності стають менше $\frac{\varepsilon}{3}$ завдяки рівномірній збіжності ряду. Оскільки кожен з доданків скінченної суми $S_n(z)$ неперервний у точці z_0 , то другий модуль стає менше $\frac{\varepsilon}{3}$ при достатньо малому $|h|$. Отже, при $|h| \rightarrow 0$

$$|S(z_0 + h) - S(z_0)| \rightarrow 0 \quad \triangleright$$

Доведемо тепер твердження для властивості 8.

◁ Розглянемо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z)$, у якому всі функції φ_k визначені й не-

перервні в деякій однозв'язній області D . Нехай $S(z)$ – сума цього ряду. Оскільки члени рівномірно збіжного ряду $\varphi_k(z)$ неперервні в кожній точці спрямлюваної кривої $\gamma \subset D$, то, за доведеною лемою, сума цього ряду $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z)$ буде неперервною функцією вздовж γ . З

рівномірної збіжності ряду випливає, що $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ таке, що при $n > N(\varepsilon)$ та $\forall z \in D$ виконується $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$. Величину $S(z) - S_n(z) = r_n(z)$ назвемо *залишковим членом ряду*.

Оскільки $|r_n(z)| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon) \forall z \in D$, то

$$\left| \int_{\gamma} S(z) dz - \int_{\gamma} \varphi_1(z) dz - \int_{\gamma} \varphi_2(z) dz - \dots - \int_{\gamma} \varphi_n(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} r_n(z) dz \right| < \varepsilon \cdot l,$$

де l – довжина дуги γ . Отже,

$$\int_{\gamma} S(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\gamma} \varphi_1(z) dz - \int_{\gamma} \varphi_2(z) dz - \dots - \int_{\gamma} \varphi_n(z) dz \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} \varphi_k(x) dz,$$

Тобто рівномірно збіжний ряд можна почленно інтегрувати ▷

Нехай $\lambda_1(t)$ та $\lambda_2(t)$ – параметричні подання простих неперервних шляхів (кривих) γ_1 та γ_2 ; λ_1 та λ_2 задані на $[a, b]$, а $\gamma_1, \gamma_2 \subset G \subset \mathbb{C}$, де G – деяка відкрита множина.

Означення. Гомотопією (деформацією) кривої γ_1 у γ_2 називається неперервне відображення $[a, b] \times [a, \beta] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$, де відрізок $[a, \beta] \in \mathbb{R}$ такий, що $\forall t \in [a, b]$ маємо $\varphi(t, \alpha) = \lambda_1(t)$, $\varphi(t, \beta) = \lambda_2(t)$.

З означення випливає, що $\forall \theta \in [a, \beta]$ відображення $t \mapsto \varphi(t, \theta)$ є параметричним поданням деякої кривої в області G .

Нехай криві γ_1 та γ_2 мають один і той самий початок $\lambda_1(\alpha) = \lambda_2(\alpha)$ та один і той самий кінець $\lambda_1(\beta) = \lambda_2(\beta)$. Тоді відображення φ називається *гомотопією з фіксованими початком і кінцем*, якщо $\varphi(t, \alpha) = \lambda_1(t)$, $\varphi(t, \beta) = \lambda_2(t)$ і $\varphi(\alpha, \theta) = \lambda_1(\alpha)$, $\varphi(\beta, \theta) = \lambda_1(\beta) \forall \theta \in [a, \beta]$.

Якщо криві γ_1 та γ_2 замкнені, то кажуть про *гомотопію замкненої кривої* γ_1 у замкнену криву γ_2 .

5.2. Приклади обчислення криволінійних інтегралів

Надалі, якщо про це не сказано окремо, при обчисленні інтегралів у комплексній площині орієнтація простих замкнених шляхів інтегрування вибирається проти стрілки годинника.

1) Обчислити інтеграл $\int_C |z| \bar{z} dz$, де C – замкнений контур, складений

з верхнього півкола $|z|=1$ і відрізка $y=0$, $-1 \leq x \leq 1$.

◁ Оскільки на відрізку $[-1,1]$ $z=x$, $dz=dx$, а на півколі $|z|=1$, $z=e^{i\varphi}$, $\bar{z}=e^{-i\varphi}$, $dz=ie^{i\varphi}d\varphi$, то, використовуючи властивість адитивності ін-

теграла, маємо $\int_C |z| \bar{z} dz = \int_{-1}^1 |x| x dx + \int_0^\pi e^{-i\varphi} e^{i\varphi} i d\varphi = i\pi$ ▷

2) Обчислити інтеграл $\int_C \frac{z}{\bar{z}} dz$, де C – границя півкільця, зображеного на рис. 5.2.

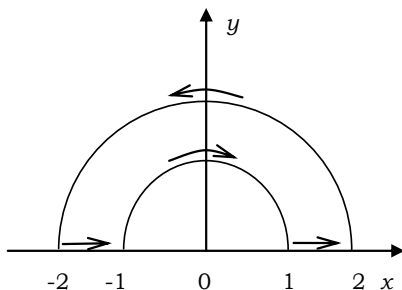


Рис. 5.2

◁ Аналогічно попередньому,

$$\int_C \frac{z}{\bar{z}} dz = \int_1^2 dx + 2i \int_0^\pi e^{3i\varphi} d\varphi + \int_{-2}^{-1} dx + i \int_\pi^0 e^{3i\varphi} d\varphi = 2 + i \int_0^\pi e^{3i\varphi} d\varphi = \frac{4}{3} \triangleright$$

3) Уздовж кола $\gamma = \{z : |z - z_0| = \rho\}$ обчислити інтеграл $\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$.

◁ Скористаємося параметричною формою запису кривої γ , а саме $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$, $\rho = \text{const}$. Тоді $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$, а отже,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} d\varphi = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i \triangleright$$

4) Обчислити інтеграл $\int_{\gamma} (z-a)^n dz$ (n – ціле число), якщо контуром інтегрування є:

а) півколо $|z-a|=R$, $0 \leq \arg(z-a) \leq \pi$ (початок шляху в точці $z = a + R$); б) коло $|z-a|=R$.

а) Зробимо заміну $z-a = R e^{i\varphi}$ (рис. 5.3). Тоді $dz = iR e^{i\varphi} d\varphi$. Отже,

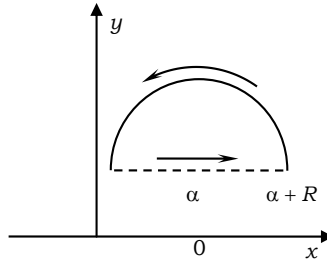


Рис. 5.3

$$\int_{\gamma} (z-a)^n dz = \int_0^{\pi} iR^{n+1} e^{in\varphi} e^{i\varphi} d\varphi = \frac{R^{n+1}((-1)^{n+1} - 1)}{n+1}, n \neq -1.$$

При $n = -1$ маємо $\int_{\gamma} (z-a)^{-1} dz = i \int_0^{\pi} d\varphi = i\pi$.

б) Аналогічно

$$\int_{|z-a|=R} (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} iR^{n+1} e^{in\varphi} e^{i\varphi} d\varphi = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi = 0, n \neq -1,$$

а при $n = -1$

$$\int_{|z-a|=R} (z-a)^n dz = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i \triangleright$$

Якщо підінтегральна функція багатозначна, то при обчисленні інтегралів від такої функції спочатку потрібно виділити її однозначну гілку, а потім проводити інтегрування.

5) Обчислити інтеграл $\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$, узявши гілку, яка визначається своїм

значенням у заданій точці вздовж шляхів: а) по півколу $|z|=1$, $y \geq 0$

при $\sqrt{1} = 1$; б) по півколу $|z| = 1, y \geq 0$, якщо $\sqrt{1} = -1$; в) по півколу $|z| = 1, y \leq 0$, коли $\sqrt{1} = 1$; г) по колу $|z| = 1$, де $\sqrt{1} = 1$; д) по колу $|z| = 1$ для гілки $\sqrt{-1} = i$ (у випадку замкненого контуру початковою точкою шляху інтегрування вважати ту точку, у якій задане значення підінтегральної функції).

а) Виділимо спочатку ту гілку багатозначної функції $f(z) = \sqrt{z}$, яка задається умовою $\sqrt{1} = 1$. Для цього у формулі

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{2} \right), \quad k = 0, 1$$

покладемо $z = 1$: $\sqrt{1} = \cos k\pi + i \sin k\pi = (-1)^k$ ($k = 0, 1$). Очевидно, що для виконання умови задачі потрібно покласти $k = 0$. Шуканою гілкою є

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}. \quad \text{Зробивши заміну } z = e^{i\varphi}, \text{ маємо}$$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}} d\varphi = 2(i-1).$$

б) Аналогічно знаходимо задану в задачі однозначну гілку функції:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot e^{i(\pi+\frac{\varphi}{2})} = -\sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}. \quad \text{Значення інтеграла дорівнюватиме } \int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$= -\int_0^{\pi} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}} d\varphi = 2(1-i).$$

Міркуючи аналогічно, далі одержимо:

$$\text{в) } \int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{-\pi} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}} d\varphi = -2(1+i);$$

$$\text{г) } \int_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = i \int_0^{2\pi} e^{i\frac{\varphi}{2}} d\varphi = -4;$$

$$\text{д) } \sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}} \Rightarrow \int_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = i \int_{\pi}^{3\pi} e^{i\frac{\varphi}{2}} d\varphi = -4i \triangleright$$

б) Обчислити інтеграли $I_1 = \int x dz$, $I_2 = \int y dz$ уздовж радіус-вектора точки $z = 2 + i$.

З умови задачі випливає, що шляхом інтегрування є відрізок прямої $y = \frac{x}{2}$, $x \in [0, 1]$ (рис. 5.4). Отже, $dz = dx + idy = \left(1 + \frac{i}{2}\right) dx$ і

$$I_1 = \int_0^2 x \left(1 + \frac{i}{2}\right) dx = 2 + i, \quad I_2 = \int_0^2 \frac{x}{2} \left(1 + \frac{i}{2}\right) dx = 1 + \frac{i}{2} \triangleright$$

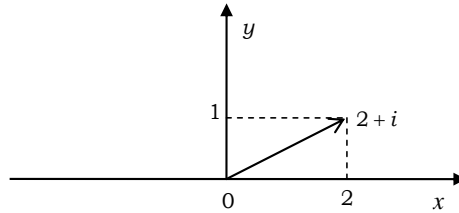


Рис. 5.4

7) Обчислити інтеграл $I = \int |z| dz$: а) від $z = 0$ уздовж радіуса-вектора точки $z = 2 - i$; б) уздовж півкола $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ (початок шляху в точці $z = 1$); в) уздовж півкола $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ (початок шляху в точці $z = -i$); г) по колу $|z| = R$.

◁ а) Оскільки вздовж вказаного шляху $y = -\frac{x}{2}$, $x \in [0, 2]$,

$$dz = \left(1 - \frac{i}{2}\right) dx, \text{ то } I = \int_0^2 \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}} dx = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(1 - \frac{i}{2}\right) \int_0^2 x dx = \sqrt{5} \left(1 - \frac{i}{2}\right).$$

б) На вказаному шляху $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $|z| = 1$ і $I = i \int_0^{\pi} e^{i\varphi} d\varphi = -2$.

в) $I = i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\varphi} d\varphi = 2i$. г) Нехай $z = e^{i\varphi_0}$ – початок обходу кола $|z| = 1$, тоді

$$I = i \int_{\varphi_0}^{2\pi+\varphi_0} e^{i\varphi} d\varphi = e^{i\varphi_0} (e^{2\pi i} - 1) = 0.$$

У прикл. 2, 3 значення інтеграла залежить від початкової точки, а в прикл. 4 воно не залежить від вибору початку обходу шляху інтегрування \triangleright

У задачах 8, 9 вибір гілки багатозначної функції та початку обходу контуру інтегрування визначається аналогічно задачі 5.

8) Обчислити інтеграл $I = \int_C \operatorname{Ln} z dz$, де шляхом C є: а) одиничне коло

$|z|=1$, а $\text{Ln}1 = 0$; б) одиничне коло $|z|=1$ і $\text{Ln}i = \frac{\pi i}{2}$; в) коло $|z|=R$, $\text{Ln}R = \ln R + 2\pi i$.

а) Підставивши у формулу $\text{Ln}z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$ значення $z = 1$ і враховуючи, що $\ln 1 = 0$, отримаємо $\text{Ln}z = i \arg z = i\varphi$ на C . Тоді

$$I = \int_0^{2\pi} i\varphi \cdot e^{i\varphi} i d\varphi = i \int_0^{2\pi} \varphi de^{i\varphi} = i \cdot \left(\varphi e^{i\varphi} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\varphi \right) = 2\pi i.$$

б) Аналогічно попередньому, $\text{Ln}z = i \arg z = i\varphi$ на контурі C , а

$$I = i \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \varphi de^{i\varphi} = 2\pi.$$

в) З умови $\text{Ln}R = \ln R + 2\pi i$ маємо: $\text{Ln}z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi)$ і

$$I = \int_0^{2\pi} [(\ln R + 2\pi i) + i\varphi] e^{i\varphi} i R d\varphi = iR \int_0^{2\pi} (\ln R + 2\pi i) de^{i\varphi} + iR \int_0^{2\pi} \varphi de^{i\varphi} = 2\pi R i.$$

9. Обчислити інтеграл $\int_{|z|=1} z^n \text{Ln}z dz$, де n – ціле число і: а) $\text{Ln}1 = 0$;

б) $\text{Ln}(-1) = \pi i$.

а) Як і в попередньому прикладі, маємо:

$$\int_{|z|=1} z^n \text{Ln}z dz = i \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} \varphi e^{i\varphi} i d\varphi \text{ звідки випливає}$$

$$\int_{|z|=1} z^n \text{Ln}z dz = \frac{i}{n+1} \int_0^{2\pi} \varphi de^{i(n+1)\varphi} = \frac{2\pi i}{n+1}, \text{ при } n \neq -1;$$

$$\text{або } \int_{|z|=1} z^n \text{Ln}z dz = - \int_0^{2\pi} \varphi d\varphi = -2\pi^2, \text{ при } n = -1.$$

б) Аналогічно $\int_{|z|=1} z^n \text{Ln}z dz = \frac{i}{n+1} \int_{\pi}^{3\pi} \varphi de^{i(n+1)\varphi} = \frac{(-1)^n}{n+1} 2\pi i, n \neq -1;$

$$\int_{|z|=1} z^n \text{Ln}z dz = - \int_{\pi}^{3\pi} \varphi d\varphi = -4\pi^2, n = -1 \triangleright$$

5.3. Інтегрування аналітичних функцій

Розглянуті вище приклади показують, що значення інтегралу

$\int_{\gamma} f(z) dz$ залежить як від функції $f(z)$ так і від кривої γ , яка сполучає

кінці шляху інтегрування. Теорема Коші, до доведення якої ми приходимо, є однією з основних теорем теорії аналітичних функцій. Вона з усіх можливих функцій комплексної змінної виділяє клас функцій, інтеграл від яких не залежить від шляху інтегрування, а залежить лише від початкової та кінцевої точок цього шляху. Перед її доведенням сформулюємо і доведемо спочатку важливу саму по собі і необхідну для доведення теореми Коші, лему Гурса.

5.3.1. Лема Гурса про апроксимацію криволінійного інтеграла

Лема. Нехай функція $f(z)$ неперервна в області D , а γ – кусково-гладка крива Жордана, $\gamma \subset D$. Тоді для довільно заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться ламана $p \subset D$, вписана в криву γ така, що

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_p f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

◁ Позначимо через z_0, z_1, \dots, z_n вершини ламаної p (рис. 5.5).

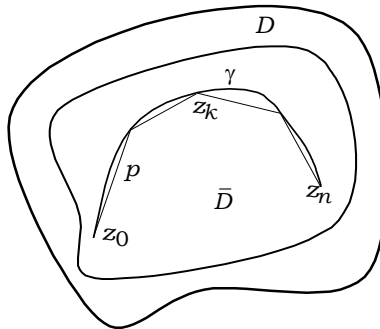


Рис. 5.5

Запишемо інтеграли вздовж γ та p і зробимо оцінку модуля їх різниці:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_p f(z) dz \right| = \\ & = \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) + \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) - \int_p f(z) dz \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right| + \\ + \left| \int_p f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right| = I_1 + I_2.$$

Розглянемо допоміжну замкнену область $\bar{D}_1 \subset D$ таку, що $p \in \bar{D}_1$. В області \bar{D}_1 функція $f(z)$ рівномірно неперервна. Отже, для доданка I_2 маємо

$$\left| \int_p f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right| = \\ = \left| \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (f(z) - f(z_k)) dz \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} |f(z) - f(z_k)| |dz|.$$

Оскільки $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ таке, що $|f(z) - f(z_k)| < \varepsilon$ для довільного z , яке належить відрізку ламаної (z_{k-1}, z_k) при $|z_k - z_{k-1}| < \delta$, то

$$\left| \int_p f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right| < \varepsilon_1 \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} |dz| \leq \varepsilon_1 \cdot |p| = \frac{\varepsilon}{2},$$

де $|p|$ – довжина ламаної.

Оцінимо тепер доданок I_1 . Урахувавши неперервність функції $f(z)$ і кускову гладкість дуги γ , одержимо

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(z_k) \int_{\gamma_k} dz \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} [f(z) - f(z_k)] dz \right| \leq \\ \leq \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} |f(z) - f(z_k)| |dz| \leq \varepsilon_2 l = \frac{\varepsilon}{2},$$

де l – довжина дуги γ .

Отже, існує ламана p така, що $\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_p f(z) dz \right| < \varepsilon$

5.3.2. Теорема Коші

Фундаментальною в теорії аналітичних функцій є теорема.

Теорема Коші. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області $D \subset \mathbb{C}$, то інтеграл від неї вздовж довільного кусково-гладкого замкненого контуру $\gamma \subset D$ дорівнює нулю: $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

◁ Зазначимо, що за додаткової вимоги, щоб похідна функції $f(z)$ була неперервною в усіх внутрішніх точках області $G \subset D$, обмеженої замкненою кусково-гладкою жордановою кривою γ , а криволінійний інтеграл у лівій частині обчислювався вздовж γ за напрямком проти годинникової стрілки, доведення теореми випливає з формули Гріна – Остроградського та умов Коші – Рімана

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy = \\ = \iint_G \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dy + i \iint_G \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy = 0.$$

Далі ми покажемо, що похідна аналітичної функції теж аналітична, а отже, неперервна. Це твердження ми одержимо за допомогою інтегральної теореми Коші, але, щоб уникнути замкненого логічного кола, доведемо цю теорему іншим шляхом, який ґрунтується на лемі Гурса.

За лемою Гурса, інтеграл уздовж замкненої кривої γ можна наблизити із заданою точністю ε інтегралом уздовж ламаної p , вписаної в γ . Замінімо наш інтеграл уздовж дуги γ на інтеграл уздовж замкненої ламаної p . Область, обмежену ламаною p , розіб'ємо діагоналями, проведеними з точки z_0 на трикутники (рис. 5.6). Нехай ми одержали n таких трикутників: $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. Тоді

$$\int_p f(z) dz = \int_{\Delta_1} f(z) dz + \int_{\Delta_2} f(z) dz + \dots + \int_{\Delta_n} f(z) dz.$$

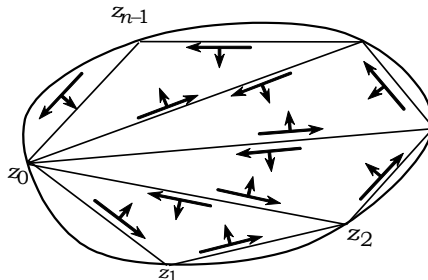


Рис. 5.6

Це вірно тому, що інтегрування вздовж кожної з внутрішніх діагоналей проходить у двох протилежних напрямках, що приводить до нульової суми (рис. 5.6). Теорему достатньо довести для одного з трикутників.

Припустимо від супротивного, що існує трикутник Δ з периметром довжиною L такий, що $\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| = M \neq 0$. Доведемо, що $M = 0$. Розіб'ємо трикутник Δ середніми лініями на чотири трикутники Δ_k ($k = \overline{1,4}$) (рис.5.7). Оскільки $M = \left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{\Delta_k} f(z) dz \right|$, то серед цих чотирьох трикутників існує хоча б один, наприклад Δ^1 з периметром $\frac{L}{2}$, такий, що $\left| \int_{\Delta^1} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}$. Цей трикутник Δ^1 знов розіб'ємо середніми лініями на чотири трикутники та знайдемо серед них Δ^2 такий, що його периметр дорівнюватиме $\frac{L}{2^2}$, а $\left| \int_{\Delta^2} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2}$. Продовжимо процес далі. На m -му кроці знайдемо трикутник Δ^m , для якого периметр дорівнює $\frac{L}{2^m}$, а $\left| \int_{\Delta^m} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^m}$. Кожен з трикутників Δ^{k+1} послідовності $\{\Delta^1, \Delta^2, \dots, \Delta^m\}$ є вкладеним у попередній трикутник Δ^{k-1} ($k = 1, 2, \dots, m$) (рис. 5.7).

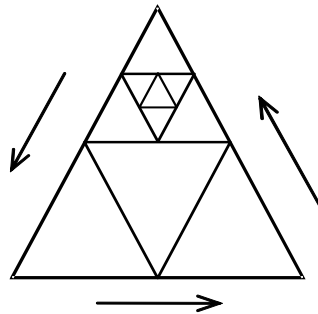


Рис. 5.7

Це означає, що існує точка $a \in D$, спільна для всіх трикутників, а

функція $f(z)$ аналітична в ній (оскільки аналітична в D). Отже, $f(z)$ диференційовна в цій точці, тобто $\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = f'(a) + \eta$, де $\eta \rightarrow 0$ при $z \rightarrow a$ та $|\eta| \leq \varepsilon$. Звідси

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \eta(z-a).$$

Проінтегруємо цю рівність уздовж межі трикутника Δ^m :

$$\int_{\Delta^m} f(z) dz = f(a) \int_{\Delta^m} dz + f'(a) \int_{\Delta^m} z dz - af'(a) \int_{\Delta^m} dz + \int_{\Delta^m} \eta(z-a) dz.$$

Оскільки, як було показано у п.5.2, три перші інтеграли справа дорівнюють нулю, а $|z-a|$ для всіх z , що належать границі Δ^m , не перевищує довжини периметра трикутника $\frac{L}{2^m}$, то

$$\left| \int_{\Delta^m} f(z) dz \right| \leq \int_{\Delta^m} |\eta| |z-a| |dz| < \varepsilon \frac{L}{2^m} \cdot \frac{L}{2^m} = \varepsilon \frac{L^2}{4^m}.$$

Отже, виходячи з припущення, що $M \neq 0$, маємо $\frac{M}{4^m} < \varepsilon \frac{L^2}{4^m}$.

Але, оскільки $\varepsilon \rightarrow 0$ при $z \rightarrow a$, то $M < \varepsilon \cdot L^2 \rightarrow 0$, що суперечить припущенню.

Якщо одержаний результат вірний для всіх трикутників, то, очевидно, вірною буде й рівність $\int_P f(z) dz = 0$ для довільної ламаної P , вписаної у криву γ .

Використовуючи лему Гурса, приходимо до твердження теореми \triangleright

Якщо область аналітичності функції $f(z)$ не однозв'язна, то має місце узагальнення, яке прийнято називати *теоремою Коші для багатозв'язних областей*, або теоремою Коші для складного контуру.

Теорема Коші для багатозв'язних областей. Якщо функція $f(z)$ однозначна й аналітична в неоднотв'язній області D , обмеженій замкненими кусково-гладкими контурами $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$, причому γ_0 охоплює всі інші контури для довільного k_0 ($k_0 = \overline{1, n}$) криві γ_k при $k \neq k_0$ лежить зовні γ_{k_0} , а усі γ_k ($k = 0, 1, \dots, n$) попарно не перетинаються і не дотикаються, то

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

◁ Нехай $D \subset \mathbb{C}$ – неоднозв’язна область, $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ і γ_0 – зовнішня межа D , тобто крива, що відокремлює точки області D від нескінченності. Будемо вважати, що функція $f(z)$ аналітична в D і на границі γ , а орієнтованість γ вибрана так, що на всіх контурах γ_k ($k = \overline{0, n}$) рух відбувається проти стрілки годинника. Для доведення теореми з’єднаємо довільними розрізами всі контури γ_k ($k = \overline{1, n}$) з контуром γ_0 , як це зроблено на рис. 5.8.

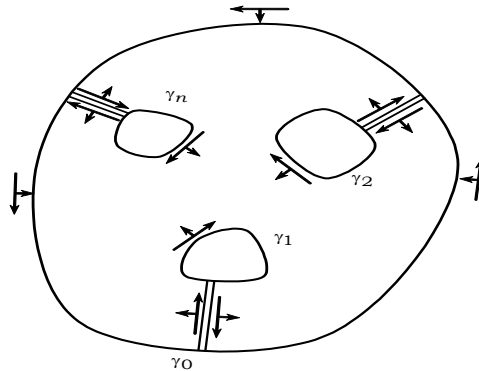


Рис. 5.8

Одержимо однозв’язну область з кусково-гладкою границею $\gamma = \gamma_0 \cup \overline{\gamma_1} \cup \overline{\gamma_2} \cup \dots \cup \overline{\gamma_n} \cup \gamma^*$, де γ^* є сумою пар відрізків берегів розрізів, які сполучають кожен з контурів γ_k з контуром γ_0 , і кожен з яких проходить у двох протилежних напрямках. Відповідно до першої властивості інтеграла в комплексній площині, інтеграл уздовж γ^* дорівнює нулю. Крім того, за теоремою Коші для однозв’язної області

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0, \text{ а тому } \int_{\gamma_0} f(z) dz = - \sum_{k=1}^n \int_{\overline{\gamma_k}} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz \triangleright$$

Обмеження щодо аналітичності функції $f(z)$ в області D і на границі γ може бути послаблено. Це випливає з узагальненої теореми Коші, яку ми наводимо без доведення.

Теорема (узагальнена Коші). Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв’язній області D і неперервна в замкненій області $D \cup \gamma$, де γ – спрямований замкнений контур. Тоді $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Зауваження. Узагальнена теорема Коші має місце й у випадку багатозв'язної області. Якщо функція аналітична в неоднозв'язній області D і неперервна в замкненій області $D \cup \gamma$, де $\gamma = \gamma_0 \cup \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2 \cup \dots \cup \bar{\gamma}_n$, а γ_k ($k = \overline{0, n}$) – спрямлювані замкнені контури, вкладені, як і в теоремі Коші, для багатозв'язних областей, то

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

5.4. Інтеграл Коші та інтегральна формула Коші

5.4.1. Інтегральна теорема Коші

Теорема. Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D і неперервна на границі γ області D , де γ – спрямлювана замкнена крива Жордана. Тоді для довільної точки $z \in D$ справедлива інтегральна формула Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

◁ Зафіксуємо довільну точку $z \in D$ і побудуємо навколо неї круговий окіл $K_{\rho}(z) = \{z : |t-z| < \rho\} \subset D$, межею якого є коло γ_{ρ} з обходом у напрямку проти руху годинникової стрілки. Уведемо функцію $F(t) = \frac{f(t)}{t-z}$.

Вона аналітична в неоднозв'язній області $D' = D \setminus K_{\rho}(z)$, обмеженій кривими γ і γ_{ρ} . За теоремою Коші для неоднозв'язної області маємо

$$\int_{\gamma} F(t) dt = \int_{\gamma_{\rho}} F(t) dt = \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Обчислимо інтеграл

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(t)}{t-z} dt &= \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(t) - f(z) + f(z)}{t-z} dt = \\ &= \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(t) - f(z)}{t-z} dt + f(z) \int_{\gamma_{\rho}} \frac{dt}{t-z} = I + f(z) \int_{\gamma_{\rho}} \frac{dt}{t-z}. \end{aligned}$$

Оскільки $|t-z| = \rho$, то $t-z = \rho e^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Отже, $dt = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ і

$$f(z) \int_{\gamma_{\rho}} \frac{dt}{t-z} = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = i f(z) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i f(z).$$

Далі оцінимо величину першого інтеграла: $|I| \leq \int_{\gamma_\rho} \left| \frac{f(t) - f(z)}{t - z} \right| dt$.

З аналітичності функції $f(z)$ у $K_\rho(z)$ випливає, що $\frac{f(t) - f(z)}{t - z} = f'(z) + \eta$, де $\eta \rightarrow 0$ при $|t - z| \rightarrow 0$. З умови існування по-

хідної $f'(z)$ маємо $\left| \frac{f(t) - f(z)}{t - z} \right| \leq M$ при $t \in \gamma_\rho$ і, отже,

$|I| < M \int_{\gamma_\rho} ds = 2\pi M\rho$, тобто $I = \varepsilon(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Ураховуючи це, мо-

жна записати рівність

$$\int_{\gamma} \frac{f(t)}{t - z} dt = 2\pi i f(z) + \varepsilon(\rho).$$

Інтеграл у правій частині та перший доданок зліва не залежать від ρ . Тому при переході до границі при $\rho \rightarrow 0$ маємо

$$\int_{\gamma} \frac{f(t)}{t - z} dt = 2\pi i f(z)$$

Остання рівність, яка називається *інтегральною формулою Коші*, установлює зв'язок між значеннями функції в довільній точці $z \in D$ та інтеграла від цієї функції вздовж усієї границі області.

Нехай область D обмежена замкненою кривою Жордана γ , а функція $f(z)$ аналітична в D і неперервна на її границі γ . Тоді інтеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t - z} dt$ називається *інтегралом Коші*.

Зауваження. Якщо точка $z \notin D \cup \gamma$, тобто підінтегральна функція аналітична в області D і неперервна на γ , то $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t - z} dt = 0$.

Зауваження. Формула Коші має місце й для областей, обмежених складними контурами $\gamma = \gamma_0 \cup \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2 \cup \dots \cup \bar{\gamma}_n$. Пропонуємо читачам побудувати формулу Коші для цього випадку.

5.4.2. Наслідки з інтегральної теореми Коші

Теорема (*про середнє арифметичне*). Нехай функція $f(z)$ аналітична в крузі $|z - z_0| < R$ і неперервна на колі $|z - z_0| = R$, тоді її значення

в центрі круга дорівнює середньому значенню на границі круга

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\varphi}) d\varphi.$$

◁ За формулою Коші маємо $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t - z_0} dt$. Ураховуючи, що γ

є колом $|z - z_0| = R$, зробимо заміну $t - z_0 = R e^{i\varphi}$, $dt = iR e^{i\varphi} d\varphi$ та одержимо

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + R e^{i\varphi})}{R e^{i\varphi}} iR e^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R e^{i\varphi}) d\varphi \triangleright$$

Принцип максимуму модуля аналітичної функції. Модуль аналітичної функції, відмінної від тотожної константи, не може набувати свого максимального значення всередині області аналітичності.

◁ Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що $f(z)$ аналітична в області D і $|f(z)|$ досягає свого максимуму, рівного M , у деякій внутрішній точці області $z_0 \in D$. Побудуємо відкритий круг $K_{\rho_0}(z_0) = \{z : |z - z_0| < \rho_0\} \subset D$ з межею $\gamma_{\rho_0} = \{z : |z - z_0| = \rho_0\}$. За теоремою про середнє арифметичне у центрі цього круга, маємо

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Оскільки, за прийнятим припущенням, $M = \max_z |f(z)| = |f(z_0)|$, то

$|f(z_0 + \rho_0 e^{i\varphi})| < |f(z_0)| = M$, а отже,

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho_0 e^{i\varphi})| d\varphi < \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = M.$$

Отримали протиріччя $M < M$. Через довільність вибору точки $z_0 \in D$, а також величини радіуса обмежуючого її кола, можна стверджувати, що рівність можлива лише у випадку, коли $|f(t)| = M$ у всіх точках цього кола.

Дійсно, якщо припустити, що існує хоча б одна точка кола $t \in \gamma_{\rho_0}$ така, що $|f(t_0)| < M$, то за неперервністю функції $f(t)$ на контурі, нерівність $|f(t)| < M$ буде вірною й уздовж деякої ділянки дуги кола γ_{ρ_0} , яка описується рівнянням $\gamma_{\rho} = \{z : z(\varphi) = \rho_0 e^{i\varphi}\}$, де $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Ураховуючи це, запишемо

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho_0 e^{i\varphi})| d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha |f(z_0 + \rho_0 e^{i\varphi})| d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta |f(z_0 + \rho_0 e^{i\varphi})| d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_\beta^{2\pi} |f(z_0 + \rho_0 e^{i\varphi})| d\varphi.$$

Оскільки $\frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta |f(z_0 + \rho_0 e^{i\varphi})| d\varphi < \frac{M(\beta - \alpha)}{2\pi}$, то одержимо нерівність

$M \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho \cdot e^{i\varphi})| d\varphi < M$, яка приводить до протиріччя. Враховуючи, що ρ_0 вибрано довільним (за єдиної умови, що $K_{\rho_0}(z_0) \subset D$), маємо $|f(t)| = M \quad \forall t \in \gamma_{\rho_0}$.

Доведемо тепер, що $|f(z)| = M \quad \forall z \in D$. Візьмемо іншу довільну точку z^* , ($z^* \neq z_0$), $z^* \in D \setminus K_{\rho_0}$ і доведемо, що $|f(z^*)| = M$. Для цього сполучимо точки z_0 і z^* довільною кривою $\Gamma \subset D$. Покриємо цю криву системою кругів $K_{\rho_m}(z_m) = \{z : |z - z_m| < \rho_m\}$ ($m = \overline{0, n}$) з границями γ_m , побудованими так, щоб $z_m \in \Gamma$ і $z_m \in \gamma_{\rho_{m-1}}$. Центр кожного наступного околу лежатиме на контурі Γ і на контурі попереднього околу (рис. 5.9), а точка $z^* \in \gamma_n$. Оскільки точка $z_1 \in \gamma_{\rho_0}$, то $|f(z_1)| = M$. Тоді, за доведеним вище, $|f(t)| = M, \forall t \in \gamma_{\rho_1}$. Для кожного з наступних кругів $K_m = K_{\rho_m}(z_m)$ установлюємо, що $|f(t)| = M$ при $t \in \gamma_{\rho_m}$. Провівши скінченну кількість кроків, приходимо до круга $K_n = K_{\rho_n}(z_n)$, границя якого проходить через точку z^* , та одержуємо, що $|f(z^*)| = M$. Оскільки z_0 і z^* – довільні точки області, то $|f(z)| = M \quad \forall z \in D$.

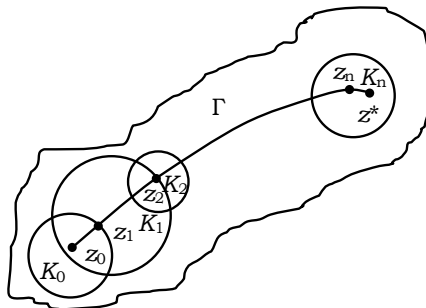


Рис. 5.9

Далі впевнимися, що з рівності $|f(z)| = M \forall z \in D$ випливає, що $f(z) = \text{const}$. Нехай $M \neq 0$, оскільки у випадку $|f(z)| = 0 \quad \arg f(z)$ може набувати довільних значень. Обчислимо

$$\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z) \equiv u + iv.$$

За умовою $f(z)$ аналітична та $f(z) \neq 0$, отже, $\ln f(z)$ аналітична, а для функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$ виконуються умови Коші – Рімана. Однак, оскільки $u = \text{const}$, то $0 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $0 = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Отже, $df(z) = 0$, а $f(z) \equiv \text{const}$ \triangleright

Наслідок 1. Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D і неперервна в $D \cup \gamma$, то максимум її модуля досягається на кривій γ .

Наслідок 2. Якщо функція $f(z)$ аналітична в D і неперервна в $D \cup \gamma$, а $f(z) \neq 0$ в $D \cup \gamma$, то мінімум модуля може досягатися тільки на γ .

\triangleleft Для доведення наслідку 2 достатньо зробити заміну $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ і застосувати до цієї функції принцип максимуму модуля аналітичної функції \triangleright

Наслідок 3. Для дійсної гармонічної функції $u(x, y)$ має місце принцип максимуму, який формулюється так.

Теорема. Якщо функція $u(x, y)$, гармонічна в деякій області D і в ній не є тотожною сталою, то вона не може досягати свого максимуму чи мінімуму у внутрішніх точках цієї області.

\triangleleft Нехай $z_0 = x_0 + iy_0$ деяка точка області D а K – круг з центром у цій точці, який повністю міститься в D . Утворимо функцію $v(x, y)$, яка є гармонічно спряженою до $u(x, y)$. Оскільки круг є однозв'язною областю, то аналітична функція $\varphi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ однозначна в крузі. (Для цього потрібно певним чином вибрати сталу, яка входить до функції $v(x, y)$, наприклад, вимагаючи, щоб $v(x_0, y_0) = 0$). Запишемо функцію $F(z) = e^{\varphi(z)}$. Вона теж однозначна і аналітична в крузі

K . Причому $|F(z)| = e^{|\varphi(z)|} = e^{u(x,y)}$. Якщо зробити припущення, що $u(x,y)$ має максимум у точці (x_0, y_0) , то $|F(z)|$ досягне максимуму у точці $z_0 = x_0 + iy_0$, що в силу принципу максимуму не можливо. Аналогічно переконуємося, що гармонічна функція не може досягти свого мінімуму в точці (x_0, y_0) . ▷

Наслідок 4. Якщо функції $u_1(x,y)$ та $u_2(x,y)$ гармонічні в області D і неперервні в замкненій області \bar{D} , а їх значення співпадають у віх граничних точках, то ці функції співпадають в усіх точках області D .

◁ Оскільки різниця цих функцій є гармонічною функцією, то її максимум та мінімум може досягатися тільки на границі області її гармонічності і бути рівним нулю. Отже їх різниця рівна нулю у всій області D .

5.4.3. Означений і неозначений інтеграл у комплексній площині

З'ясуємо умови, за яких $\int_{\gamma} f(z) dz$ уздовж довільного шляху γ , який лежить усередині області D , не залежить від вигляду γ і цілком визначається початковою та кінцевою точками цього шляху. Для цього доведемо таке твердження.

Теорема (про незалежність значення інтеграла від шляху інтегрування). Для того, щоб значення інтеграла вздовж довільного шляху, який лежить усередині області D , не залежало від форми шляху, а повністю визначалося значеннями в початковій і кінцевій точках, необхідно й достатньо, щоб інтеграл від функції $f(z)$ уздовж довільного замкнутого шляху, який лежить у цій області, дорівнював нулю.

◁ Дійсно, нехай інтеграл не залежить від шляху інтегрування, а залежить тільки від початкової та кінцевої точок. Візьмемо дуги γ_1 і $\bar{\gamma}_2$, які починаються в точці z_0 , закінчуються в точці z_1 і лежать усередині D . За припущенням $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$. Отже,

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz = 0, \text{ де } \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2.$$

Навпаки, якщо в області D має місце рівність $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, де $\gamma \subset D$

– довільний замкнений шлях, який проходить через точки z_0 та z_1 , а γ_1 та γ_2 – дуги, обмежені точками z_0 та z_1 і такі, що $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$,

(рис. 5.10), то

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0,$$

$$\text{або } \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

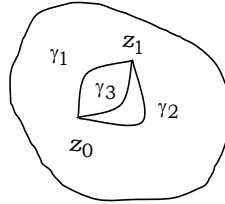


Рис. 5.10

При заміні дуги γ_2 на іншу дугу $\gamma_3 \subset D$ таку, що контур $\tilde{\gamma} = \gamma_1 \cup \gamma_3$ є замкненим шляхом, якій належить D , одержимо

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_3} f(z) dz.$$

Через довільність контурів γ_2 і γ_3 приходимо до висновку, що в області D комплексної площини \mathbb{C} при виконанні умови теореми значення інтеграла не залежить від шляху інтегрування, а залежить лише від початкової та кінцевої точок інтегрування:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}_2} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}_3} f(z) dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz \triangleright$$

Наслідок. Теорема Коші (про інваріантність при гомотопних деформаціях шляху інтегрування). Якщо $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D , а $\gamma_1 \subset D$, $\gamma_2 \subset D$ – два гомотопні шляхи зі спільними кінцями, то $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$.

Наслідок. З доведеної теореми та основної теореми Коші випливає, що для аналітичних функцій значення інтеграла не залежить від шляху інтегрування. Дійсно, якщо $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D , то, за теоремою Коші, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ для довільного спрямлюваного шляху

$\gamma \subset D$. Отже, якщо точки z_0 та z_1 належать області аналітичності функції та є початком і кінцем кривої γ_1 , то

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz.$$

Інтеграл у правій частині останньої рівності називається *означеним інтегралом*.

Якщо в означеному інтегралі стали величину z_1 замінити на змінну Z , то він буде функцією змінної Z

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(t) dt,$$

яку називають *інтегралом зі змінною верхньою межею*.

Теорема. Означений інтеграл як функція змінної верхньої межі є аналітичною функцією, для якої справджується рівність $F'(z) = f(z)$.

◁ Покажемо, що функція $F(z)$ однозначна в D . Розглянемо приріст $F(z)$ при обході вздовж довільного замкненого шляху γ

$$[F(z)]\Big|_{\gamma} = \int_{\gamma} f(t) dt = 0.$$

Інтеграл дорівнює нулю за попередньою теоремою. Згідно з довільністю γ це встановлює однозначність функції $F(z)$.

Доведемо диференційовність функції $F(z)$. Виходячи з означення похідної, маємо

$$\begin{aligned} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \left[\int_{z_0}^{z + \Delta z} f(t) dt - \int_{z_0}^z f(t) dt \right] = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} [f(t) - f(z)] dt + \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(z) dt = A + f(z). \end{aligned}$$

Оцінимо величину $|A|$: $|A| = \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z + \Delta z} |f(t) - f(z)| |dt|$. Оскільки функція

неперервна в розглянутій області, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $|f(t) - f(z)| < \varepsilon$ при $|t - z| < |\Delta z| < \delta$. Отже, $|A| < \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \int_z^{z + \Delta z} |dt|$.

Ураховуючи, що шлях інтегрування в даному випадку може бути довільним, прийнемо його за пряму, що з'єднує точки Z і $z + \Delta z$. Тоді

$|A| < \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} |\Delta z| = \varepsilon$, де $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Звідси випливає, що

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z) \triangleright$$

З доведеної теореми, зокрема, випливає, що означені інтеграли зі змінними верхніми межами первісні відносно підінтегральних функцій.

Теорема. Якщо $F(z)$ – будь-яка первісна функції $f(z)$ в області D , то множина $\{F(z)+c\}$, де $c \in \mathbb{C}$ – довільна стала, зображає сукупність усіх її первісних функцій $f(z)$.

◁ Нехай $F_1(z)$ і $F_2(z)$ – дві різні первісні функції $f(z)$. Тоді $F_1'(z) = f(z)$ і $F_2'(z) = f(z)$ суть аналітичні функції. Позначимо $\varphi(z) = F_1(z) - F_2(z) = u + iv$. Оскільки функція $\varphi(z)$ також аналітична, то $\varphi'(z) = u_x + iv_x = 0$, або $\varphi'(z) = u_y - iv_y = 0$. За умовою Коші – Рімана маємо $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$. Отже, $\varphi(z) = \text{const}$ ▷

Означення. Нехай в області D визначено функцію $f(z)$ і рівняння $z = z(t), t \in J = [\alpha, \beta]$ задає неперервно диференційовний шлях γ . Функцію $\Phi(t) : J \rightarrow \mathbb{C}$ назвемо *первісною функції $f(z)$ уздовж шляху γ* , якщо вона:

а) неперервна на J ;

б) для будь-якої точки $t_0 \in J$ існує окіл $U_{z_0} \subset D$ точки $z_0 = z(t_0)$, у якому $f(z)$ має первісну $F(z)$ таку, що $F(z(t)) = \Phi(t) \forall t \in U_{t_0} \subset J$, де U_{t_0} – деякий окіл точки t_0 у топології J .

Означення. Сукупність усіх первісних називається *неозначеним інтегралом* $\int f(z) dz$.

Установимо зв'язок між означеним і неозначеним інтегралами. Покладемо, що γ – кусково-гладкий шлях, заданий рівнянням $z = z(t), t \in J = [\alpha, \beta]$, а $f(z)$ – неперервна на ньому функція з первісною $F(z)$ уздовж γ . Тоді $\int_{z_0}^z f(t) dt = F(z) + c$.

Якщо покладемо $z = z_0$, то $F(z_0) + c = 0$ і, отже, $c = -F(z_0)$. Звідси випливає відома *формула Ньютона – Лейбніца*

$$\int_{z_0}^z f(t) dt = F(z) - F(z_0).$$

Наслідок. Аналітична в однозв'язній області функція завжди має в ній первісну.

Зауваження. Усі проведені міркування були зроблені для функцій, аналітичних в однозв'язних областях. У неоднотвірній області аналітична функція $f(z)$ не завжди має первісну. Наприклад, функція $f(z) = \frac{1}{z}$ у кільці $0 < |z| < 3$ не може мати первісної. Якби первісна F для функції $f(z) = \frac{1}{z}$ існувала, то для довільного шляху γ , який лежить усередині області D і заданий рівнянням $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, ця первісна визначалася б складною функцією $F(z(t))$, а за формулою Ньютона – Лейбниція

$$\int_{\gamma} f(t) dt = F(z(b)) - F(z(a)).$$

Оскільки шлях може бути довільним, то виберемо за шлях γ одиничне коло. Як було показано раніше, інтеграл $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$. Проте, якщо існує первісна, то за формулою Ньютона – Лейбниція інтеграл уздовж замкненого шляху має дорівнювати нулю. Одержане протиріччя доводить вірність зауваження.

Разом з тим, якщо криві γ_1 та γ_2 , які лежать у багатотвірній області G , мають спільні кінці та їх можна неперервно деформувати до повного збігу не виходячи з області G при нерухомих кінцях, то

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Це твердження ми пропонуємо читачам довести самостійно.

Як вправи читачам також пропонуємо довести вірність таких тверджень:

1. Будь-яка аналітична в точці a функція $f(z)$ має *локальну первісну*, тобто існує функція $F(z)$, первісна для $f(z)$ у деякому околі точки a . З локальних первісних можна склеїти первісну, яка діє вздовж заданого шляху.

2. Для довільної аналітичної функції $f(z)$ в області D і будь-якого неперервно диференційовного шляху γ у цій області первісна функції $f(z)$ уздовж γ існує та визначається з точністю до сталого доданка.

5.5. Інтеграл типу Коші та його властивості

У теорії функцій комплексної змінної побудовано цілу низку узагальнень інтеграла Коші та теоретичних висновків. Ми розглянемо одне з таких узагальнень, яке має назву інтеграла типу Коші.

5.5.1. Поняття інтеграла типу Коші

Нехай D – деяка область у комплексній площині, а L – довільна замкнена (незамкнена) кусково-гладка крива Жордана (або сукупність гладких чи спрямлюваних кривих), яка не лежить у D , і нехай функція $\varphi(t)$ визначена й неперервна на L . Тоді функція (інтеграл)

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt,$$

де $z \notin L$, називається *інтегралом типу Коші*.

Головна відмінність інтеграла типу Коші від інтеграла Коші полягає в тому, що функція $\varphi(t)$ не обов'язково аналітична на L , а контур інтегрування може бути як замкненим, так і незамкненим. В інтегралі Коші $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt$ шлях γ замкнений, кусково-гладкий або спрямований, а функція $f(z)$ аналітична в області D , обмеженій контуром γ , і неперервна на γ .

Отже, інтеграл Коші є частинним випадком інтеграла типу Коші, і всі властивості інтеграла типу Коші притаманні також інтегралу Коші.

5.5.2. Основні властивості інтеграла типу Коші

Визначимо властивості інтеграла типу Коші $\Phi(z)$ при $z \notin L$ та дослідимо його поведінку при $z \rightarrow \zeta \in L$.

Функцію $\Phi(z)$, визначену й неперервну в деякій області D , за винятком, можливо, точок кривої L , у теорії функцій прийнято називати *функцією, яка неперервно продовжується на точку $\zeta \in L$* зліва (справа) відносно деякого вибраного на L напрямку, якщо функція $\Phi(z)$ має границю в цій точці. Цю границю позначатимемо $\Phi^+(\zeta)$, коли $z \rightarrow \zeta$, залишаючись зліва від L , або $\Phi^-(\zeta)$, коли $z \rightarrow \zeta$, залишаючись справа від L .

Лема. Функція $\Phi(z)$ неперервно продовжується на L , якщо вона неперервно продовжується зліва (справа) на кожну точку ζ цієї кривої. У цьому випадку функції $\Phi^+(\zeta)$ або $\Phi^-(\zeta)$ є неперервними на L .

◁ З наведеного вище означення випливає, що $\forall \varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon)$, що $|\Phi(z) - \Phi^+(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{2}$, коли $|z - \zeta| < \delta(\varepsilon)$. Нехай $\zeta_1 \in L$ та $|\zeta - \zeta_1| < \delta(\varepsilon)$. Тоді, якщо і $|z - \zeta| < \delta(\varepsilon)$, то $|\Phi(z) - \Phi^+(\zeta_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отже, $|\Phi^+(\zeta_1) - \Phi^+(\zeta)| < |\Phi^+(\zeta_1) - \Phi(z)| + |\Phi(z) - \Phi^+(\zeta)| \leq \varepsilon$. Аналогічно доводиться неперервність $\Phi^-(\zeta)$ на кривій L ▷

Установимо властивості інтеграла типу Коші при $z \notin L$.

Теорема (про аналітичність інтеграла типу Коші). Інтеграл типу Коші є аналітичною функцією в довільній однозв'язній області D , яка не містить контуру L .

◁ Установимо однозначність функції, записаної у вигляді інтеграла типу Коші – $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$. За умовою теореми відстань від D до

L відмінна від нуля, тобто $\rho(D, L) > 0$. Зафіксуємо точку $z_0 \in D$ і $z_0 \notin L$. Опишемо деякий замкнений контур γ , що виходить з точки z_0

. Позначимо через $\Phi(z_0)$ значення функції при виході з точки z_0 , а через $\Phi_1(z_0)$ – граничне значення функції при підході до z_0 уздовж контуру γ (кінцеве значення). Легко бачити, що підінтегральна функція неперервна в D (точка $t \in L$, а точка $z \notin L$), а це означає, що при прямуванні z до z_0 уздовж контуру γ у додатному напрямку

$$\Phi_1(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z_0} dt = \Phi(z_0).$$

А оскільки γ – довільний замкнений контур, то $\Phi(z)$ – однозначна.

Доведемо диференційовність $\Phi(z)$. Покажемо, що $\Phi(z)$ має похідну в кожній точці $z \in D$, яка визначається формальним диференціюванням під знаком інтеграла підінтегральної функції

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt.$$

Розглянемо вираз

$$\left| \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{\Delta z} \left[\frac{1}{t-(z+\Delta z)} - \frac{1}{t-z} \right] dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt \right| = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_L \varphi(t) \left[\frac{1}{(t-(z+\Delta z))(t-z)} \right] dt - \int_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt \right| = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_L \varphi(t) \left[\frac{1}{(t-z+\Delta z)(t-z)} - \frac{1}{(t-z)^2} \right] dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{|\varphi(t)||\Delta z|}{|t-z+\Delta z||t-z|^2} dt \equiv I.
\end{aligned}$$

Позначимо $M = \max_{t \in L} |\varphi(t)|$, а l – довжину дуги L . Оскільки $z \notin L$ та

$z + \Delta z \notin L$, то існує число $\delta = \min(|t-z|, |t-(z+\Delta z)|) > 0$. Отже,

$$I \leq \frac{M|\Delta z|l}{2\pi\delta^3} \rightarrow 0 \text{ при } |\Delta z| \rightarrow 0 \quad \triangleright$$

Наслідок 1. Довільна функція $\Phi(z)$, визначена інтегралом типу Коші, аналітична в усій комплексній площині з розрізом уздовж кривої L і $\Phi(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$.

Наслідок 2. Довільна функція $\Phi(z)$, визначена інтегралом типу Коші або інтегралом Коші в довільній однозв'язній області D , яка не містить точок контуру інтегрування L , має в цій області похідні до будь-якого порядку. Ці похідні є однозначними функціями в D і визначаються за формулами

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^{n+1}} dt.$$

Отже, похідні довільного порядку від інтеграла типу Коші або інтеграла Коші є аналітичними функціями в D .

◁ Доведення цього твердження аналогічне доведенню попередньої теореми з використанням методу математичної індукції. Дійсно, для $n = 1$ це вже доведено. Будемо вважати, що формула вірна для $n = k$ і доведемо її для $n = k + 1$. За прийнятим у твердженні припущенням, маємо

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi^{(k)}(z+\Delta z) - \Phi^{(k)}(z)}{\Delta z} &= \frac{k!}{2\pi i \Delta z} \int_L \varphi(t) \left(\frac{1}{(t-z-\Delta z)^{k+1}} - \frac{1}{(t-z)^{k+1}} \right) dt = \\
&= \frac{k!}{2\pi i \Delta z} \int_L \varphi(t) \frac{(t-z)^{k+1} - (t-z-\Delta z)^{k+1}}{(t-z-\Delta z)^{k+1} (t-z)^{k+1}} dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k!}{2\pi i \Delta z} \int_L \varphi(t) \frac{(t-z)^{k+1} - \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j C_{k+1}^j (t-z)^{k-j+1} \Delta z^j}{(t-z-\Delta z)^{k+1} (t-z)^{k+1}} dt = \\
&= \frac{k!}{2\pi i} \int_L \varphi(t) \frac{\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} C_{k+1}^j (t-z)^{k+1-j} \Delta z^{j-1}}{(t-z-\Delta z)^{k+1} (t-z)^{k+1}} dt = \\
&= \frac{k!}{2\pi i} \int_L \varphi(t) \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j C_{k+1}^{j+1} (t-z)^{k-j} \Delta z^j}{(t-z-\Delta z)^{k+1} (t-z)^{k+1}} dt.
\end{aligned}$$

Тепер можна зробити оцінку для похідної порядку $k+1$:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\Phi^{(k)}(z+\Delta z) - \Phi^{(k)}(z)}{\Delta z} - \frac{(k+1)!}{2\pi i \Delta z} \int_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^{k+2}} dt \right| = \\
&= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_L \varphi(t) \left(\frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j C_{k+1}^{j+1} (t-z)^{k-j} \Delta z^j}{(t-z-\Delta z)^{k+1} (t-z)^{k+1}} - \frac{k+1}{(t-z)^{k+2}} \right) dt \right| = \\
&= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_L \varphi(t) \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j C_{k+1}^{j+1} (t-z)^{k+1-j} \Delta z^j - (k+1)(t-z-\Delta z)^{k+1}}{(t-z-\Delta z)^{k+1} (t-z)^{k+1}} dt \right| = \\
&= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_L \varphi(t) \left(\frac{(k+1)((t-z)^{k+1} - (t-z-\Delta z)^{k+1})}{(t-z-\Delta z)^{k+1} (t-z)^{k+1}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\sum_{j=1}^k (-1)^j C_{k+1}^{j+1} (t-z)^{k+1-j} \Delta z^j}{(t-z-\Delta z)^{k+1} (t-z)^{k+1}} \right) dt \right| =
\end{aligned}$$

$$= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_L \varphi(t) \left(\frac{(k+1) \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} C_{k+1}^j (t-z)^{k+1-j} \Delta z^j}{(t-z-\Delta z)^{k+1} (t-z)^{k+1}} + \frac{\sum_{j=1}^k (-1)^j C_{k+1}^{j+1} (t-z)^{k+1-j} \Delta z^j}{(t-z-\Delta z)^{k+1} (t-z)^{k+1}} \right) dt \right| \leq \frac{|\Delta z| l \eta M}{2\pi \delta^{2k+1}} = A |\Delta z|.$$

Тут $\delta = \min(|t-z|, |t-(z+\Delta z)|) > 0$, а η – обмежена стала, яка залежить лише від k і δ . Звідки, зробивши граничний перехід при $\Delta z \rightarrow 0$, приходимо до висновку про вірність формули диференціювання аналітичної функції при $n = k+1$ ▸

Наслідок 3. Довільна функція $f(z)$, аналітична в однозв'язній області D , має в ній похідні будь-якого порядку, які є аналітичними функціями в цій області.

◁ Для доведення цього твердження достатньо записати функцію $f(z)$ у вигляді інтеграла Коші $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt$ і врахувати те, що ін-

теграл Коші є частинним випадком інтеграла типу Коші, та використати його властивості ▸

Важливою як у теоретичному, так і у практичному аспектах теорії аналітичних функцій є така теорема.

Теорема Ліувілля. Якщо функція $f(z)$ аналітична в довільній скінченній частині комплексної площини \mathbb{C} і обмежена при прямуванні до нескінченності, то вона є тотожною сталою.

◁ Подамо функцію $f(z)$ у вигляді інтеграла Коші $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt$ і

зафіксуємо точку $z = re^{i\varphi}$, а за контур інтегрування γ виберемо коло $|t| = R$. Тоді $t = Re^{i\theta}$ ($r < R$), $dt = iR e^{i\theta} d\theta$, а отже,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta}) Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - re^{i\varphi})^2} d\theta.$$

Оскільки $f(z)$ обмежена у скінченній частині \mathbb{C} , то існує число

$M = \max_{|z| < R} |f(z)|$. З рис. 5.11 бачимо, що $|OB| = R$, $|Oz| = |OA| = r$, $|AB| = R - r$, $|zB| = |z - t| = |re^{i\varphi} - Re^{i\theta}|$, а $|z - t| \geq |r - R| = |AB|$. З цього випливає, що $|re^{i\varphi} - Re^{i\theta}| \geq |r - R|$ і

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(Re^{i\theta})| R}{(R-r)^2} d\theta \leq \frac{MR2\pi}{2\pi(R-r)^2} \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow \infty$.

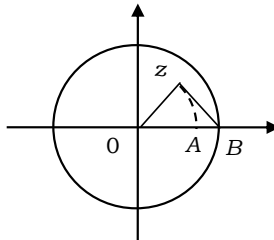


Рис. 5.11

Це свідчить про те, що $|f'(z)| = 0$, а внаслідок довільності вибору точки z приходимо до висновку, що $f'(z) \equiv 0$, тому, $f(z) = \text{const}$ ▸

Теорема Морера (обернена до теореми Коші). Якщо функція $f(z)$ неперервна в деякій однозв'язній області D та інтеграл від неї вздовж довільного замкненого шляху γ , який повністю лежить у D , дорівнює нулю, то функція $f(z)$ аналітична.

▹ Розглянемо функцію $F(z) = \int_{z_0}^z f(t)dt$. Її приріст по довільному контуру визначається як $[F(z)]_{\gamma} = \int_{\gamma} f(t)dt$. За умовою теореми, останній інтеграл дорівнює нулю. Отже, $f(z)$ – однозначна функція.

Доведемо її диференційовність. Виберемо довільну точку $z \in D$. Дослідимо відношення

$$\begin{aligned} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(t)dt - \int_{z_0}^z f(t)dt \right) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(t)dt = \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(t) - f(z))dt + \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z)dt = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Оцінимо кожен з інтегралів. Через неперервність $f(z)$ для оцінки першого інтеграла виберемо $\varepsilon > 0$, для якого існує $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що $|f(t) - f(z)| < \varepsilon$ при $|t - z| < \delta$. Тоді

$$|I_1| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(t) - f(z)) dt \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |f(t) - f(z)| dt \leq \frac{|\Delta z|}{|\Delta z|} \varepsilon = \varepsilon \rightarrow 0$$

при $|\Delta z| \rightarrow 0$.

Другий інтеграл визначимо за правилами інтегрування:

$$I_2 = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) dt = f(z)(z + \Delta z - z) \frac{1}{\Delta z} = f(z).$$

Звідси маємо

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = F'(z) = f(z).$$

Отже, функція $F(z)$ однозначна й диференційовна в довільній точці області D , тобто вона в цій області аналітична \triangleright

5.5.3. Інтеграли, залежні від параметра

Розглядаючи інтеграли Коші та типу Коші, бачимо, що підінтегральна функція залежить від двох змінних: змінної інтегрування t та параметра z . Природно вивчити залежність властивостей інтегралів у комплексній площині від функцій достатньо загального вигляду, які, у свою чергу, залежать від параметра.

Покладемо, що функція $\varphi(z, t) = \alpha(x, y, \lambda, \tau) + i\beta(x, y, \lambda, \tau)$ двох комплексних змінних $z = x + iy$ та $t = \lambda + i\tau$ ставить у відповідність парі значень (z, t) з області їх зміни ($z = x + iy$ з області D , $t = \lambda + i\tau$ належить деякий кусково-гладкій кривій γ) певне комплексне число W , однозначно визначене для цієї пари. Причому взаємне розташування області та кривої може бути довільним. Прийmemo такі припущення:

1) за довільних значень $t \in \gamma$ функція $\varphi(z, t)$ аналітична в D за змінною z ;

2) функція $\varphi(z, t)$ та її похідна $\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z}$ є неперервними функціями за сукупністю змінних (z, t) при зміні z в області D , а t – на кривій γ .

Умова 2) означає, що дійсна та уявна частини $\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z}$ неперервні за

сукупністю чотирьох змінних: x, y, λ, τ .

За зроблених припущень інтеграл від функції $\varphi(z, t)$ уздовж кривої γ існує при довільних $z \in D$ і є функцією комплексної змінної Z :

$$f(z) = \int_{\gamma} \varphi(z, t) dt = u(x, y) + iv(x, y).$$

Дослідимо фундаментальні властивості функції $f(z)$.

Теорема. За зроблених вище допущень 1) та 2) відносно функцій $\varphi(z, t)$ функція $f(z)$ є аналітичною функцією змінної Z у кожній точці області D , а її похідну можна визначити шляхом диференціювання під знаком інтеграла.

◁ Запишемо дійсну та уявну частини інтеграла у вигляді криволінійних інтегралів $u(x, y) = \int_{\gamma} \alpha(x, y, \lambda, \tau) d\lambda - \beta(x, y, \lambda, \tau) d\tau$.

Оскільки за припущенням 2) функції α та β мають частинні похідні, неперервні за сукупністю змінних, то, як відомо з математичного аналізу, частинні похідні функції $u(x, y)$ за своїми змінними існують та їх можна визначити за допомогою диференціювання під знаком інтеграла

$$u_x(x, y) = \int_{\gamma} \alpha_x d\lambda - \beta_x d\tau, \quad u_y(x, y) = \int_{\gamma} \alpha_y d\lambda - \beta_y d\tau,$$

а самі функції $u_x(x, y)$ та $u_y(x, y)$ є неперервними функціями змінних x та y в області D . Аналогічно можна записати

$$v_x(x, y) = \int_{\gamma} \beta_x d\lambda + \alpha_x d\tau, \quad v_y(x, y) = \int_{\gamma} \beta_y d\lambda + \alpha_y d\tau.$$

Урахуємо властивість 1) і скористаємось умовами Коші – Рімана $\alpha_x = \beta_y, \alpha_y = -\beta_x$. Тоді

$$v_x(x, y) = \int_{\gamma} \beta_x d\lambda + \alpha_x d\tau = -\int_{\gamma} \alpha_y d\lambda - \beta_y d\tau = -u_y$$

$$v_y(x, y) = \int_{\gamma} \beta_y d\lambda + \alpha_y d\tau = \int_{\gamma} \alpha_x d\lambda - \beta_x d\tau = u_x.$$

Звідси випливає, що функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ зв'язані між собою умовами Коші – Рімана. Отже, функція $f(z)$ аналітична в області D .

Урахуємо тепер, що

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \int_{\gamma} \frac{\partial \alpha(x, y)}{\partial x} d\lambda - \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial x} d\tau +$$

$$+i \int_{\gamma} \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial x} d\lambda + \frac{\partial \alpha(x, y)}{\partial x} d\tau = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} dt.$$

Отже, похідну від інтеграла можна знаходити безпосереднім диференціюванням під знаком інтеграла \triangleright

5.5.4. Інтеграл Пуассона та Шварца

Важливе значення при застосуванні інтегрального зображення аналітичних функцій мають *інтеграл Пуассона та Шварца*.

Розглянемо круг $|z| < R$, $z = re^{i\theta}$, $r < R$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Нехай $u(R, \varphi)$ є неперервною та періодичною за змінною φ функцією з періодом 2π .

Інтегралом, або інтегральною формулою, Пуассона називається інтеграл $u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} d\varphi$.

Покажемо, що інтеграл Пуассона є наслідком з інтегральної формули Коші. Дійсно, нехай $f(z)$ є аналітичною функцією всередині й на границі круга $K = \{z : |z| \leq R\}$. Тоді для довільної точки $z = re^{i\theta} \in K$ має місце формула Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{f(t) dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi}) Rie^{i\varphi} d\varphi}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}}. \quad (5.4)$$

Розглянемо точку $z^* = \frac{R^2}{r} e^{i\theta}$, симетричну точці z відносно кола $|t| = R$. Оскільки ця точка лежить поза кругом, то за основною теоремою Коші одержимо

$$\begin{aligned} f(z^*) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{f(t) dt}{t - z^*} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi}) Rie^{i\varphi} d\varphi}{Re^{i\varphi} - \frac{R^2}{r} e^{i\theta}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi}) rie^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi} - Re^{i\theta}} = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Від рівності (5.4) віднімемо рівність (5.5):

$$f(z) - f(z^*) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \left(\frac{Rie^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} - \frac{rie^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - Re^{i\theta}} \right) d\varphi. \quad (5.6)$$

Після елементарних перетворень з урахуванням $f(z^*) = 0$ остання рівність набуває вигляду

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} \right) d\varphi. \quad (5.7)$$

Якщо тепер покласти $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, виділити дійсну частину з (5.7) і порівняти її з $u(r, \theta)$, то одержимо рівність

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} \right) d\varphi. \quad (5.8)$$

Оскільки функція $f(z)$ у (5.7) є довільною аналітичною, а отже, її дійсна частина $u(r, \theta)$, а разом з нею й інтеграл Пуассона є довільною гармонічною функцією, то з інтегральної формули Пуассона випливає, що, маючи значення цієї функції на межі круга $|t| = R$, можна відновити її значення в будь-якій його внутрішній точці.

Другою важливою характеристикою інтеграла Пуассона є те, що обчислення частинних похідних у всіх внутрішніх точках круга K від цього інтеграла за змінними r, θ (або x, y) зводиться до диференціювання під знаком інтеграла.

Якщо у формулі (5.8) покласти $z = 0$, то вона набуває найпростішого вигляду: $u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) d\varphi$. Тобто значення гармонічної функції в центрі круга дорівнює середньому арифметичному значенню функції на його границі.

Зауваження. Оскільки, за зробленим вище припущенням, функція $u(R, \theta)$ є тільки неперервною на проміжку $\theta \in [0, 2\pi]$, то у формулі (5.8) її можна замінити довільною неперервною на $\theta \in [0, 2\pi]$, функцією $\phi(\theta)$, а інтеграл Пуассона записати у вигляді

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\varphi) \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} \right) d\varphi.$$

Розглянемо інтеграл по замкненому контуру $|t| = R$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} u(t) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t}.$$

Цей інтеграл називається *інтегралом Шварца*.

Оскільки інтегрування ведеться вздовж кола $t = Re^{i\varphi}$ ($R = \text{const}$), то $dt = iRe^{i\varphi} d\varphi$ і, отже, інтеграл Шварца можна записати так:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R e^{i\varphi}) \frac{R e^{i\varphi} + z}{R e^{i\varphi} - z} d\varphi.$$

Тут $u(R, \varphi)$ – неперервна на $[0, 2\pi]$ за змінною φ функція.

Установимо зв'язок між інтегралами Пуассона та Шварца. Для цього доведемо таке твердження.

Теорема. 1) Інтеграл Шварца є аналітичною функцією. 2) Інтеграл Пуассона є дійсною частиною інтеграла Шварца.

◁ 1) Покажемо, що інтеграл Шварца можна подати у вигляді інтеграла типу Коші. Оскільки $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} u(t) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t}$, то інтеграл Шварца

можна записати так:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} u(t) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} u(t) \frac{2}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} u(t) \frac{dt}{t}.$$

Обидва інтеграли в правій частині є інтегралами Коші. Отже, інтеграл Шварца є аналітичною функцією в крузі $|z| < R$.

2) Доведемо, що

$$\operatorname{Re} F(z) = u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} \right) d\varphi.$$

Покладемо $z = r e^{i\theta}$ ($r < R$). Оскільки $t = R \cdot e^{i\varphi}$, то $dt = R \cdot e^{i\varphi} i d\varphi$; а $d\varphi = \frac{dt}{iR \cdot e^{i\varphi}}$. Ураховуючи, що

$$e^{i(\theta-\varphi)} - e^{-i(\theta-\varphi)} = 2i \sin(\theta - \varphi), \quad e^{i(\theta-\varphi)} + e^{-i(\theta-\varphi)} = 2 \cos(\theta - \varphi),$$

маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(z) &= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \frac{R \cdot e^{i\theta} + r \cdot e^{i\varphi}}{R \cdot e^{i\theta} - r \cdot e^{i\varphi}} d\varphi = \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \frac{(R \cdot e^{i\theta} + r \cdot e^{i\varphi})(R \cdot e^{-i\theta} - r \cdot e^{-i\varphi})}{(R \cdot e^{i\theta} - r \cdot e^{i\varphi})(R \cdot e^{-i\theta} - r \cdot e^{-i\varphi})} d\varphi = \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \frac{R^2 - r^2 + Rr(e^{-i(\theta-\varphi)} - e^{i(\theta-\varphi)})}{R^2 + r^2 - 2Rr(e^{-i(\theta-\varphi)} + e^{i(\theta-\varphi)})} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} d\varphi = u(r, \theta). \end{aligned}$$

Отже, інтеграл Пуассона є дійсною частиною інтеграла Шварца ▷

Наслідок. З одержаного результату випливає, що інтеграл Шварца

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R} u(Re^{i\varphi}) \frac{t+z}{t-z} dt + ic,$$

де $c \in \mathbb{R}$, є розв'язком задачі, у якій потрібно знайти аналітичну в крузі $|z| < R$ функцію, дійсна частина якої на колі $|z| = R$ набуває заданих значень $u(R, \varphi)$, а

$$v = \text{Im} F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) \frac{2Rr \sin(\theta - \varphi)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} d\varphi + c.$$

є гармонічно спряженою функцією до $u = \text{Re} F(z)$.

5.5.5. Значення інтегралів Пуассона та Шварца на колі

Покажемо, що на границі довільного круга $K = \{z : |z| < R\}$ інтеграли Пуассона та Шварца приймають цілком певні значення. Розглянемо коло $\gamma = \{t : |t| = R\}$. Доведемо, що інтеграл Шварца збігається рівномірно до $u(R, \varphi)$ при $z = r \cdot e^{i\theta} \rightarrow t_0 = R \cdot e^{i\varphi}$. Покладемо спочатку $u(R, \varphi) \equiv 1$.

Тоді $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{2}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{dt}{t}$. Після переходу до полярних координат $z = re^{i\theta}$ та $t = Re^{i\varphi}$ і виконання інтегрування одержимо $f(z) = 2 - 1 = 1$. Отже,

$$\text{Re} F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} d\varphi = 1.$$

Помножимо останню рівність на $u(R, \varphi_0) = \text{const}$

$$u(R, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi_0) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} d\varphi$$

Розглянемо далі випадок, коли $u(R, \varphi)$ довільна неперервна функція, а точка z прямує до $t_0 = R \cdot e^{i\varphi_0}$ вздовж радіуса. Тобто $re^{i\theta} \rightarrow R \cdot e^{i\varphi_0}$ ($\theta = \varphi_0$). Побудуємо різницю

$$\begin{aligned} d = u(r, \theta) - u(r, \varphi_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} d\varphi - \\ &- \frac{u(R, \varphi_0)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(R, \varphi) - u(R, \varphi_0)] \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} d\varphi.$$

Доведемо, що $\lim_{r \rightarrow R, \theta \rightarrow \varphi_0} d = \lim_{r \rightarrow R, \theta \rightarrow \varphi_0} (u(r, \theta) - u(r, \varphi_0)) = 0$ Для цього

коло $\gamma = \{t: |t| = R\}$ розіб'ємо на дві дуги γ_δ і $\Gamma = \gamma \setminus \gamma_\delta$, де γ_δ - це частина кола γ , яка обмежена дугою $|t_0 - z| < \delta$. Виберемо δ так, щоб з неперервності функції $u(R, \varphi)$ випливало, що $\forall \varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що $|u(R, \varphi) - u(R, \varphi_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ як тільки $|t_0 - z| < \delta$. Розглянуту різницю подамо як суму двох інтегралів:

$$\begin{aligned} |d| = |u(r, \theta) - u(r, \varphi_0)| &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\delta} |u(R, \varphi) - u(R, \varphi_0)| \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} d\varphi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |u(R, \varphi) - u(R, \varphi_0)| \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} d\varphi = A + B \end{aligned}$$

де A - інтеграл по дузі γ_δ , а B - інтеграл по дузі $\Gamma = \gamma \setminus \gamma_\delta$. Очевидно, що

$$\begin{aligned} |A| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\delta} [u(R, \varphi) - u(R, \varphi_0)] \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi \right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\delta} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi \right| = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Перейдемо до контуру $\Gamma = \gamma \setminus \gamma_\delta$. Нехай $M > |u(R, \varphi) - u(R, \varphi_0)|$, а $|\varphi - \varphi_0| \geq \eta > 0$ (якщо $(R, \varphi) \in \gamma$, то ця оцінка випливає з неперервності функції $u(R, \varphi)$). Тоді

$$\begin{aligned} |B| &< \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi \leq \\ &\leq \frac{M(R^2 - r^2)}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \eta} d\varphi < \frac{M(R^2 - r^2)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \eta}. \end{aligned}$$

Оскільки $\eta > 0$, то $\cos \eta < 1$, отже, $\frac{1}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \eta} < M_1 < \infty$, тобто

$$|B| < \frac{MM_1(R^2 - r^2)}{2\pi} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow R.$$

Ураховуючи, що φ_0 вибрано довільно, можна стверджувати, що $u(r, \varphi_0)$ рівномірно за r прямує до $u(R, \varphi_0)$ при $z = re^{i\varphi_0} \rightarrow t_0$ уздовж радіуса.

Розглянемо тепер загальний випадок прямування z до t_0 . З неперервності випливає, що $|u(r, \theta) - u(R, \theta)| < \varepsilon_1$ при $|R - r| < \delta_1$, а також $\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2)$ таке: якщо $|\theta - \varphi| < \delta_2$, то $|u(\theta) - u(\varphi)| < \varepsilon_2$. Отже, при $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ $|u(r, \theta) - u(R, \varphi)| < 2\varepsilon$, де $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

А оскільки інтеграл Пуассона є неперервною функцією в крузі $|z| < R$ і набуває граничних значень при підході до границі із середини круга, то ці значення дорівнюють $u(R, \varphi)$. Звідси випливає, що дійсна частина інтеграла Шварца при підході до границі круга рівномірно прямує до значення неперервної функції $u(R, \varphi) = w(\varphi)$. Отже, інтеграл Пуассона – гармонічна функція в крузі $|z| < R$, яка на границі круга набуває цілком певних значень. Інакше кажучи, за допомогою інтеграла Пуассона можна виразити значення довільної гармонічної функції у внутрішніх точках круга через її значення на границі круга $|z| = R$.

Таким чином, ми встановили, що інтеграл Пуассона є розв'язком задачі Діріхле, яка формулюється так: усередині круга $|t| < R$ знайти гармонічну функцію $u(r, \theta)$, яка в кожній точці його границі $t = Re^{i\varphi}$ набуває заданих значень $u(R, \varphi)$. Причому, як випливає з наслідку 4 п.5.4.2, такий розв'язок єдиний.

5.6. Головне та граничні значення інтеграла типу Коші

5.6.1. Головне значення інтеграла типу Коші

До цього часу інтеграл типу Коші ми розглядали в областях, які не містять точок контуру інтегрування L , і встановили, що в них функція змінної z , виражена цим інтегралом, аналітична.

Нехай тепер точка $z = t_0 \in L$. У цьому випадку інтеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt$ стає невласним інтегралом і у звичайному розумінні втрачає зміст. Тому ми будемо розглядати його в розумінні головного значення.

Під контуром L будемо розуміти гладкий замкнений контур. Зафіксуємо на ньому точку t_0 та опишемо з неї як з центра коло з довільно малим радіусом ε $|z - t_0| = \varepsilon$ (рис. 5.12). Позначимо через δ найменшу дугу контуру L , яку відтинає це коло. Контур з вилученою дугою δ позначимо L_ε . Тоді вираз $\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt$ має зміст $\forall \varepsilon > 0$. Спрямуємо тепер $\varepsilon \rightarrow 0$ і покажемо, що значення останнього інтеграла прямує до скінченної границі.

Інтеграл

$$F(t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt,$$

якщо він існує, назовемо *головним значенням інтеграла типу Коші*. Покажемо, що якщо функція $\varphi(t)$ аналітична на L , то головне значення інтеграла типу Коші існує в кожній точці контуру L . Для цього замкнемо контур L_ε частиною дуги γ_ε так, щоб точка t_0 лежала зовні замкненого контуру (рис. 5.12). Тоді можна записати

$$F(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{\varphi(t_0)}{t - t_0} dt = I_1 + I_2.$$

Оскільки функція $\frac{1}{t - t_0}$ аналітична в області, обмеженій контуром

$L_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon$, то інтеграл уздовж L_ε можна замінити інтегралом уздовж γ_ε .

Ураховавши, що $t - t_0 = \varepsilon e^{i\theta}$, $dt = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$, маємо

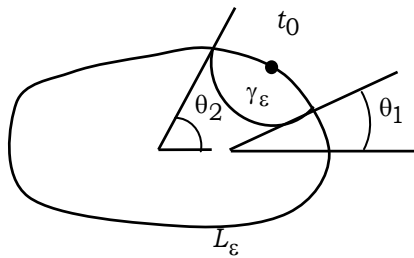


Рис. 5.12

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{\varphi(t_0)}{t - t_0} dt = -\frac{\varphi(t_0)}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dt}{t - t_0} = -\frac{\varphi(t_0)}{2\pi i} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = \frac{\varphi(t_0)}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1).$$

Очевидно, що $\theta_2 - \theta_1 \rightarrow \pi$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отже, при $t \rightarrow t_0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{\varphi(t_0)}{t - t_0} dt = \frac{\varphi(t_0)}{2}.$$

Оцінимо тепер інтеграл I_1 . Оскільки функція $\varphi(t)$ аналітична в точці t_0 , то вона має в ній обмежену похідну, тобто $\left| \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \right| < M$ при $t - t_0 \rightarrow 0$. Отже, при переході до границі маємо

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{2\pi} \left| \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} dt \right| \leq \frac{M}{2\pi} \lim_{t \rightarrow t_0} \int |dt| = \frac{M}{2\pi} |L| = M_1,$$

де $|L|$ – довжина контуру L .

Звідси випливає, що головне значення інтеграла типу Коші існує в кожній точці контуру інтегрування L .

5.6.2. Граничні значення інтеграла типу Коші

Інтеграл типу Коші є аналітичною функцією в усіх точках $z \notin L$. Виникає природне питання, чи існують значення інтеграла типу Коші при прямуванні точки z до контуру інтегрування із середини чи ззовні контуру L . Якщо вони існують, то як вони залежать від головного значення інтеграла типу Коші?

Зафіксуємо точку t_0 на контурі L . Нехай $F(t_0)$ – головне значення інтеграла типу Коші. Позначимо через $F^+(t_0)$ значення інтеграла типу Коші при підході до цієї точки із середини області, а через $F^-(t_0)$ – його значення при підході до точки t_0 ззовні.

Нехай спочатку $z \rightarrow t_0$ із середини області. На кривій L відкладемо від точки t_0 по різні боки відрізки завдовжки ε . Позначимо цю відокремлену частину контуру L через δ_ε . Через кінці відокремленої частини контуру проведемо дугу кола γ_ε , яка лежить зовні області.

Вимагатимемо, щоб $\varphi(t)$ була аналітичною на L , тобто щоб функція була аналітичною в околі кожної точки $t \in L$. Це означає, що існує смуга, яка містить контур L . Оскільки така смуга не є однозв'язною областю, то в ній від аналітичної функції не вимагається однозначність. Тепер

$$F^+(t_0) = \lim_{z \rightarrow t_0} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - z} dt = \lim_{z \rightarrow t_0} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt \right].$$

Накладемо обмеження на вибір величини ε . Виберемо її так, щоб

дужка γ_ε лежала в смузі аналітичності функції $\varphi(t)$. Тоді інтеграл по δ_ε можна замінити інтегралом по γ_ε . Отже,

$$F^+(t_0) = \lim_{z \rightarrow t_0} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt.$$

При прямуванні ε до нуля перший інтеграл праворуч дає головне значення інтеграла типу Коші $F(t_0)$.

Розглянемо другий інтеграл:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(t_0)}{t-t_0} dt.$$

Оскільки $\varphi(t)$ – аналітична функція, то її похідна обмежена $|\varphi'(t)| < M$.

Якщо $\varepsilon \rightarrow 0$, то $\theta_2 - \theta_1 \rightarrow \pi$. При цьому довжина $|\gamma_\varepsilon| \rightarrow 0$. Отже,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{rie^{i\varphi}}{re^{i\varphi}} d\varphi = \lim_{\theta_2 - \theta_1 \rightarrow \pi} \frac{\varphi(t_0)}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) = \frac{\varphi(t_0)}{2}.$$

Звідси випливає, що

$$F^+(t_0) = F(t_0) + \frac{1}{2} \varphi(t_0).$$

Якщо точка z лежить зовні контуру та $z \rightarrow t_0$ зовні контуру L , то, оскільки $(\theta_2 - \theta_1) \rightarrow -\pi$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, аналогічно міркуючи, одержимо

$$F^-(t_0) = F(t_0) - \frac{1}{2} \varphi(t_0).$$

Отже, для граничних значень інтеграла типу Коші виконуються рівності

$$F^+(t_0) = \frac{1}{2} \varphi(t_0) + F(t_0); \quad F^-(t_0) = -\frac{1}{2} \varphi(t_0) + F(t_0).$$

Ці формули називають *формулами Сохоцького – Племеля*. Вони були незалежно одержані цими математиками.

Пізніше Сохоцькому вдалося послабити умови, накладені на функцію $\varphi(t)$. А саме, він установив, що ці формули будуть вірними й тоді, коли функція $\varphi(t)$ на кривій L задовольняє умову Гельдера, тобто якщо функція $\varphi(t)$ визначена на кривій L і $\forall t_1, t_2 \in L$ існують такі сталі $0 < k < \infty$ та $0 < \alpha < 1$, що $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < k|t_1 - t_2|^\alpha$.

5.7. Приклади застосування властивостей інтегралів Коші та типу Коші при обчисленні інтегралів

5.7.1. Інтегрування в комплексній площині

1) Показати, що коли шлях не проходить через початок координат, то $\int_1^z \frac{dt}{t} = \ln r + i\varphi + 2k\pi i$, де k - ціле число, що вказує, скільки разів шлях

інтегрування обходить початок координат, а $z = re^{i\varphi}$.

◁ Нехай спочатку шлях не обходить початок координат. За теоремою Коші про незалежність інтеграла від шляху інтегруємо по відрізку дійсної осі $[1, r]$, а потім - по дузі кола $|z| = r$, $0 \leq \arg z \leq \varphi$. Отримуємо

$$\int_1^z \frac{dt}{t} = \int_1^r \frac{dx}{x} + \int_0^\varphi \frac{re^{i\theta} i d\theta}{re^{i\theta}} = \ln r + i\varphi.$$

Якщо ж шлях інтегрування обходить початок координат один раз, то, завдяки однозначності підінтегральної функції, інтеграл по такому контуру можна замінити інтегралом по контуру, який складається з кола $|z| = 1$, відрізка дійсної осі $[1, r]$ і дуги кола $|z| = r$, $0 \leq \arg z \leq \varphi$. Ураховуючи це, одержимо

$$\int_1^z \frac{dt}{t} = \int_{|z|=1} \frac{dt}{t} + \int_1^r \frac{dx}{x} + i \int_0^\varphi d\theta = i\varphi + 2\pi i + \ln r.$$

У випадку, коли шлях інтегрування обходитиме точку $z = 0$ k разів, то $\int_{|z|=1} \frac{dt}{t} = 2\pi i k$. Рівність доведено ▷

2) Довести: якщо шлях інтегрування γ не проходить через точки $z = \pm i$, у точці $z = 0$ має початок, а у точці $z = 1$ кінець то $\int_\gamma \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, де k - ціле число, $t \in \mathbb{C}$.

◁ Якщо шлях не обходить точки $z = \pm i$, то, вибравши за шлях інтегрування відрізок $[0, 1]$ дійсної осі, отримаємо $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

Якщо шлях обходить тільки один раз точку $z = i$, то, аналогічно попередній задачі, маємо

$$\int_\gamma \frac{dt}{1+t^2} = \int_{|z-i|=1} \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{i}{2} \left(\int_{|z-i|=1} \frac{dt}{t+i} - \int_{|z-i|=1} \frac{dt}{t-i} \right) + \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}.$$

Тут урахована тотожність $\frac{1}{1+t^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{t+i} - \frac{1}{t-i} \right)$, а також те, що в цьому

випадку $\int_{|z-i|=1} \frac{dt}{t+i} = 0$.

Якщо ж шлях обходить точку $z = -i$, то, аналогічно, одержуємо

$$\int_{\gamma} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} - \pi.$$

Загальний випадок і приводить до потрібної рівності \triangleright

3) Показати: якщо γ – довільний простий замкнений контур, який не проходить через точку a та $I = \int_{\gamma} (z-a)^n dz$, де n – ціле число, то:

$I = 0$, якщо $n \neq -1$ або $n = -1$ та точка $Z = a$ знаходиться поза контуром γ ;

$I = 2\pi i$, якщо $n = -1$ та $Z = a$ знаходиться всередині контуру γ .

\triangleleft Якщо $n \neq -1$, то за теоремою Коші інтегрування по контуру γ замінимо інтегруванням по колу $|z-a| = r$, що лежить усередині або поза γ . Зробивши заміну $z-a = t$, отримаємо

$$I = i \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} e^{i\theta} d\theta = ir^n \frac{e^{i(n+2)\theta}}{n+2} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Якщо $n = -1$ і точка a знаходиться поза контуром γ , то, за наслідком з теореми Коші, $I = 0$.

Якщо ж $n = -1$ і точка a знаходиться всередині γ , то

$$I = \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \triangleright$$

4) Довести, що $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bxdx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$.

\triangleleft Проінтегруємо функцію $f(z) = e^{-z^2}$ уздовж границі прямокутника $|x| \leq R, 0 \leq y \leq b$. Оскільки e^{-z^2} – аналітична функція всередині прямокутника, то

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + i \int_0^b e^{-(R+iy)^2} dy + \int_R^{-R} e^{-(x+ib)^2} dx + i \int_b^0 e^{-(-R+iy)^2} dy = \\ &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + i \int_0^b \left[e^{-(R+iy)^2} - e^{-(-R+iy)^2} \right] dy - \int_{-R}^R e^{-(x+ib)^2} dx = \end{aligned}$$

$$= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + i \int_0^b e^{-R^2+y^2} \left[e^{-2iRy} - e^{2iRy} \right] dy - \int_{-R}^R e^{b^2-x^2} e^{-i2bx} dx.$$

Переходячи до границі при $R \rightarrow \infty$ і враховуючи, що

$$\lim_{R \rightarrow \infty} i \int_0^b e^{-R^2+y^2} \left(e^{-2iRy} - e^{2iRy} \right) dy = 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-R^2+y^2} \sin 2Ry dy = 0,$$

маємо

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x^2+b^2} e^{-2ixb} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x^2+b^2} \left(e^{2ixb} + e^{-2ixb} \right) dx = \\ &= 2e^{b^2} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx dx, \end{aligned}$$

А оскільки, як відомо, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (інтеграл Пуассона), то

$$0 = \sqrt{\pi} - 2e^{b^2} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx dx \triangleright$$

5.7.2. Інтегральна формула Коші

1) Обчислити інтеграл $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+9}$, якщо γ – простий замкнений спрям-

люваний контур і:

а) точка $z = 3i$ лежить усередині контуру γ , а точка $z = -3i$ – поза ним;

б) точка $z = -3i$ лежить усередині контуру γ , а точка $z = 3i$ – поза ним;

в) точки $\pm 3i$ лежать усередині контуру γ .

◁ а) Оскільки точка $z = -3i$ лежить поза контуром γ , то, за теоремою

Коші, $\int_{\gamma} \frac{dz}{z+3i} = 0$.

Ураховуємо тотожність (розклад на прості дроби)

$$\frac{1}{z^2+9} = \frac{1}{6i} \left(\frac{1}{z-3i} - \frac{1}{z+3i} \right).$$

Тоді

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+9} = \frac{1}{6i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-3i} - \frac{1}{6i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z+3i}.$$

За інтегральною формулою Коші $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-3i} = 2\pi i$, а отже,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+9} = \frac{1}{6i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-3} = \frac{\pi}{3}.$$

б) У цьому випадку $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-3i} = 0$. Отже, як і в попередньому прикладі,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+9} = -\frac{1}{6i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z+3i} = -\frac{\pi}{3}.$$

в) Обмежимо точки $z = 3i$ та $z = -3i$ колами γ_1 та γ_2 і використаємо теорему Коші для неоднотвірної області (рис. 5.13).

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+9} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2+9} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+9} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0 \triangleright$$

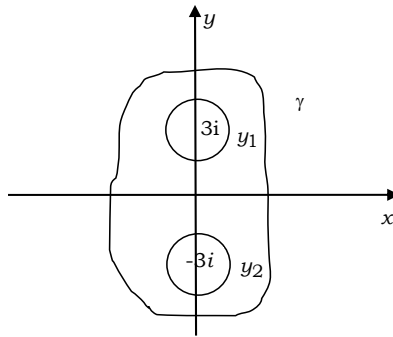


Рис. 5.13

2) Обчислити інтеграл $\int_{|z-a|=a} \frac{zdz}{z^4-1}$ при $a > 1$.

◁ Оскільки особливими точками підінтегральної функції є $z = \pm 1$ та $z = \pm i$, а всередині кола $|z-a|=a$ лежить тільки одна з них, а саме $z = 1$, то перетворимо інтеграл так:

$$\int_{|z-a|=a} \frac{zdz}{z^4-1} = \frac{1}{4} \int_{|z-a|=a} \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{4} \int_{|z-a|=a} \frac{(z^2+2z-1)dz}{(z+1)(z^2+1)}.$$

Ураховуючи, що другий інтеграл у цій рівності за теоремою Коші дорівнює нулю, а перший, за інтегральною формулою Коші, дорівнює $\frac{\pi i}{2}$, маємо

$$\int_{|z-a|=a} \frac{zdz}{z^4-1} = \frac{1}{4} \int_{|z-a|=a} \frac{dz}{z-1} = \frac{\pi i}{2} \triangleright$$

3) Обчислити інтеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2+a^2}$, якщо контур γ містить круг

$$|z| \leq a.$$

◁ Нехай γ_1 – контур, який міститься всередині γ , охоплює точку $z = ai$ та не містить точку $z = -ai$, а γ_2 – контур, що міститься в γ , охоплює $z = -ai$ та не містить точку $z = ai$. Тоді, за інтегральною формулою Коші, маємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2ai} \left(\int_{\gamma_1} \frac{e^z dz}{z-ai} - \int_{\gamma_2} \frac{e^z dz}{z+ai} \right) = \frac{1}{2ai} (e^{ai} - e^{-ai}) = \frac{\sin a}{a} \triangleright$$

4) Обчислити інтеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}$, якщо точка a лежить усередині

контур γ .

◁ Скористаємося формулою для похідних інтеграла Коші

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{te^t dt}{(t-z)^3}, \text{ де } f(z) = ze^z.$$

Оскільки $f''(z) = 2e^z + ze^z$, то, покладаючи в останній рівності $z = a$, отримуємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^3} = \frac{2e^a + ae^a}{2} = e^a \left(1 + \frac{a}{2} \right) \triangleright$$

5) Обчислити інтеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$, якщо:

а) точка $z = 0$ лежить усередині, а точка $z = 1$ – ззовні контуру γ ;

б) точка $z = 1$ лежить усередині, а точка $z = 0$ – ззовні контуру γ .

◁ а) За інтегральною формулою Коші маємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z}{(1-z)^3} \frac{dz}{z} = \frac{e^z}{(1-z)^3} \Bigg|_{z=0} = 1.$$

б) Використовуючи формулу для похідних інтеграла типу Коші, отримуємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3} = -\frac{1}{2} \frac{2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} \frac{dz}{(z-1)^3} = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^z}{z} \right)'' \Bigg|_{z=1} = -\frac{e}{2} \triangleright$$

б) За теоремою Ліувілля, функція $f(z)$, аналітична та обмежена в усій площині, є сталою. Довести цю теорему, обчисливши інтеграл

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} \quad (|a| < R, |b| < R)$$

і оцінивши його при $R \rightarrow \infty$.

◁ Використавши тотожність $\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right)$ і формулу Коші, отримуємо

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\int_{|z|=R} \frac{f(z)dz}{z-a} - \int_{|z|=R} \frac{f(z)dz}{z-b} \right) = 2\pi i \frac{f(a) - f(b)}{a-b}.$$

Оскільки

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})Re^{i\theta}id\theta}{(Re^{i\theta} - a)(Re^{i\theta} - b)} = 0,$$

то $f(a) = f(b)$. Враховуючи довільність вибору a та b , приходимо до висновку, що $f(z) \equiv \text{const}$ ▷

ТЕМА VI. РЯДИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Одним із засобів подання аналітичних функцій є розвинення їх у ряди. У цьому розділі ми ознайомимося з рядами, складеними з аналітичних функцій, дослідимо основні властивості рівномірно збіжних рядів. Зокрема, вивчимо поведінку степеневого ряду на границі круга збіжності. Виходячи з розвинення аналітичних функцій у ряди Тейлора, установемо єдиність подання аналітичних функцій. Уведемо поняття аналітичного продовження функцій і принципи його побудови. Застосовуючи поняття й принципи аналітичного продовження, дамо строгі означення основних елементарних функцій у комплексній площині.

Також дослідимо ряди Лорана, класифікацію особливих точок аналітичних функцій і поведінку аналітичної функції в околі кожного типу таких точок.

6.1. Рівномірно збіжні ряди аналітичних функцій

6.1.1. Загальні відомості про функціональні ряди

Спочатку коротко нагадаємо необхідні означення й теореми з теорії рівномірно збіжних рядів, відомі з математичного аналізу.

Нехай маємо послідовність функцій $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots, f_n(z), \dots \in D \subset \mathbb{C}$. Така послідовність називається *рівномірно збіжною* в області D до $f(z)$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ таке, що $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ при кожному $n > N \forall z \in D$, а функція $f(z)$ – *рівномірною границею* послідовності функцій комплексної змінної $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots, f_n(z), \dots \in D \subset \mathbb{C}$.

Послідовність $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ називається *рівномірно фундаментальною* в області D , якщо для довільно заданого $\varepsilon > 0$ існує число $N = N(\varepsilon)$ таке, що $|f_n(z) - f_{n+m}(z)| < \varepsilon$ при $n > N, m \geq 1 \forall z \in D$.

За критерієм Коші відомо, що для того, щоб $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ рівномірно збігалась до деякої границі $f(z)$ у D , необхідно й достатньо, щоб ця послідовність була рівномірно фундаментальною.

Говорять, що ряд, складений із функцій комплексної змінної, збігається в області D рівномірно, якщо рівномірно збігається послідовність його часткових сум, або, що те саме, якщо послідовність часткових сум рівномірно фундаментальна.

У п'ятій темі було показано: якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ збігається рівномірно в $D \subset \mathbb{C}$ і його члени $f_n \in C(D) \forall n \in \mathbb{N}$, то рівномірна границя

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ є також неперервною в D функцією та існує можливість

почленного інтегрування рівномірно збіжного функціонального ряду вздовж довільного контуру $\gamma \subset D$. Розглянемо інші важливі властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

Теорема (про лінійність рівномірної збіжності функціональних послідовностей). Якщо послідовності $f_n(z)$ та $g_n(z)$ рівномірно збігаються відповідно до $f(z)$ та $g(z)$ в області D , то для довільного $\lambda \in \mathbb{C}$ послідовність $f_n(z) + \lambda g_n(z)$ рівномірно збігається до функцій $f(z) + \lambda g(z)$.

◁ Оскільки

$$\begin{aligned} \sup_{z \in D} |(f_n(z) + \lambda g_n(z)) - (f(z) + \lambda g(z))| &\leq \sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| + \\ &+ |\lambda| \sup_{z \in D} |g_n(z) - g(z)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, то $f_n(z) + \lambda g_n(z) \rightarrow f(z) + \lambda g(z)$ рівномірно ▷

Доцільно також зазначити важливу в практичному застосуванні мажорантну ознаку Вейерштраса рівномірної збіжності функціонального ряду.

Теорема. Нехай $f_n(z) \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N}, z \in D$. Якщо існує такий збіжний числовий ряд $\sum_n a_n$, $a_n > 0$ і $|f_n(z)| \leq a_n$ для всіх $z \in D$, то ряд $\sum_n f_n(z)$ збігається рівномірно.

Доведення цієї теореми очевидне.

Означення. Ряд, у якому $f_n(z) \in \mathbb{C}, z \in D$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, називається нормально збіжним у D , якщо збігається ряд $\sum_n \|f_n\|$, де $\|\varphi\| = \sup_{z \in D} |\varphi(z)|$.

Зрозуміло, що нормальна збіжність функціонального ряду є аналогом абсолютної збіжності числового ряду.

Теорема. Якщо ряд $\sum_n f_n(z)$ ($f_n(z) \in \mathbb{C}$, $z \in D$ для всіх $n \in \mathbb{N}$) збігається нормально, то він збігається рівномірно в D .

◁ Зі збіжності числового ряду $\sum_n \|f_n(z)\|$ випливає виконання критерію Коші. А саме, для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n > N$ та $m \in \mathbb{N}$ має місце нерівність $\sum_{k=n+1}^{n+m} \|f_k(z)\| < \varepsilon$. А оскільки $\left\| \sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(z) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \|f_k(z)\| \leq \varepsilon$, то ряд $\sum_n f_n(z)$ збігається рівномірно ▷

Нехай $f_n(z) \in \mathbb{C}$ і $g_n(z) \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, а $z \in D$. Тоді легко показати, що для всіх $z \in D$ має місце *тотожність Абеля*

$$\sum_{k=1}^n f_k(z)(g_k(z) - g_{k-1}(z)) = f_n(z)g_n(z) - f_1(z)g_0(z) - \sum_{k=1}^{n-1} g_k(z)(f_{k+1}(z) - f_k(z)).$$

Означення. Послідовність комплексних чисел називається *бімонотонною*, якщо $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+m} |z_{k+1} - z_k| \leq 2 \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} (z_{k+1} - z_k) \right|$.

Теорема. Якщо $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = x_n + iy_n$ і послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ монотонні, то послідовність комплексних чисел $\{z_n\}$ бімонотонна.

◁ Дійсно, для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $m \in \mathbb{N}$ маємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+m} |z_{k+1} - z_k| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |x_{k+1} - x_k| + \sum_{k=n+1}^{n+m} |y_{k+1} - y_k| = \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} (x_{k+1} - x_k) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} (y_{k+1} - y_k) \right| \leq 2 \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} (z_{k+1} - z_k) \right| \quad \triangleright \end{aligned}$$

Тотожність Абеля часто використовується для встановлення рівномірної збіжності рядів.

Теорема 1. Нехай послідовність функцій $\{f_n g_n\}$ збігається рівномірно на множині E . Тоді функціональні ряди $\sum f_n (g_n - g_{n-1})$, $g_0 = 0$ та

$\sum g_n(f_{n+1} - f_n)$, які збігаються поточково на множині E , збігаються на ній рівномірно або нерівномірно одночасно.

◁ Нехай ряд $\sum g_n(f_{n+1} - f_n)$ рівномірно збігається на множині E . Відповідно до лінійності рівномірної границі та тотожності Абеля

$$\sum_{n=1}^k f_n(g_n - g_{n-1}) = f_k g_k - \sum_{n=1}^{k-1} g_n(f_{n+1} - f_n), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

ряд $\sum f_n(g_n - g_{n-1})$ збігається рівномірно на E . Якщо ж ряд $\sum g_n(f_{n+1} - f_n)$ не збігається рівномірно, то і ряд $\sum f_n(g_n - g_{n-1})$ також не рівномірно збіжний. Аналогічно ряд $\sum g_n(f_{n+1} - f_n)$ збігається рівномірно, якщо ряд $\sum f_n(g_n - g_{n-1})$ рівномірно збіжний ▷

Теорема 2. Якщо $\forall z \in D$ послідовність комплексних чисел $\{f_n(z)\}$ бімонотонна, а $\left(\sup_{k \geq n} \sup_{z \in D} |g_k(z)| \right) \left(\sup_{k \geq n} \sup_{z \in D} |f_k(z) - f_n(z)| \right) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то ряд $\sum_n g_n(z)(f_{n+1}(z) - f_n(z))$ збігається рівномірно.

◁ Якщо $z \in D$, то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} g_k(z)(f_{k+1}(z) - f_k(z)) \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |g_k(z)| |f_{k+1}(z) - f_k(z)| \leq \\ &\leq \sup_{k \geq n} \sup_{z \in D} |g_k(z)| 2 \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} (f_{k+1}(z) - f_k(z)) \right| \leq \\ &\leq 2 \sup_{k \geq n} \sup_{z \in D} |g_k(z)| |f_{n+m+1}(z) - f_n(z)| \leq \\ &\leq 2 \sup_{k \geq n} \sup_{z \in D} |g_k(z)| \left(\sup_{k \geq n} \sup_{z \in D} |f_k(z) - f_n(z)| \right). \end{aligned}$$

За критерієм Коші для функціонального ряду та з одержаної оцінки випливає рівномірна збіжність ряду $\sum_n g_n(z)(f_{n+1}(z) - f_n(z))$ ▷

Теорема 3 (Абеля). Якщо ряд $\sum_n g_n(z)$ збігається рівномірно на $D \subset \mathbb{C}$, а послідовність $\{f_n(z)\}$ бімонотонна для кожного $z \in D$ і $\|f_n(z)\| < M$ при $n \rightarrow \infty$, то ряд $\sum_n f_n(z)g_n(z)$ збігається рівномірно.

◁ Позначимо $\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ і $\varphi_n(z) = \sum_{k=1}^n g_k(z) - \phi(z)$. Очевидно, що

$$|\varphi_n(z)| = \left| \sum_{k=1}^n g_k(z) - \phi(z) \right| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \text{ Оскільки}$$

$$\sup_{k \geq n} \|\varphi_k(z)\| \sup_{k \geq n} \|f_k(z) - f_n(z)\| < \varepsilon M = \varepsilon_1 \rightarrow 0$$

і для кожного $n > 2$ $g_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$, то виконуються умови теореми 2, а тому ряд $\sum_n \varphi_n(z)(f_k(z) - f_n(z))$ рівномірно збігається. Оскільки

$$\|f_n(z)g_n(z)\| \leq \|f_n(z)\| \|g_n(z)\| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, то за теоремою 1 ряд $\sum_n f_n(z)g_n(z)$ рівномірно збіжний ▷

Аналогічно доводиться й така ознака рівномірної збіжності.

Теорема Діріхле. Нехай $\forall z \in D$ послідовність $\{f_n(z)\}$ бімонотонна.

Якщо $\left\| \sum_{k=1}^n g_k(z) \right\| \leq M$ і $\|f_n(z)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, то ряд $\sum f_n(z)g_n(z)$ збігається рівномірно.

Зауваження. У теоремах Абеля та Діріхле під $\|f\|$ розуміємо рівномірну норму, тобто $\|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)|$.

6.1.2. Основні властивості рівномірно збіжних рядів аналітичних функцій

У теорії рядів аналітичних функцій важливе значення має така теорема.

Теорема Вейерштрасса. Нехай $\{f_n(z)\}$ – послідовність функцій, аналітичних в області D і неперервних в $D \cup \gamma$, де γ – гладкий замкнений контур, границя області D . Тоді, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ збігається рівномірно на контурі γ , то:

а) він збігається рівномірно й у всій замкненій області $D \cup \gamma$;

б) сума ряду $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ є функцією, аналітичною в області D і неперервною в $D \cup \gamma$;

в) такий ряд можна почленно диференціювати довільну кількість разів, а ряди, одержані в результаті диференціювання, будуть рівномірно збіжними в області D .

◁ а) Складемо частинні суми

$$S_{n+p}(z) = f_1(z) + \dots + f_{n+p}(z) \text{ та } S_n(z) = f_1(z) + \dots + f_n(z)$$

і обчислимо різницю

$$S_{n+p}(z) - S_n(z) = f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+p}(z).$$

Оскільки в правій частині маємо скінченну суму аналітичних у D і неперервних у $D \cup \gamma$ функцій, то різниця $S_{n+p}(z) - S_n(z)$ є аналітичною функцією. Оцінимо її модуль.

З рівномірної збіжності ряду на γ , випливає, що $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ таке, що $|S_{n+p}(t) - S_n(t)| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon) \forall t \in \gamma$, а з принципу максимуму модуля аналітичної функції маємо $|S_{n+p}(t) - S_n(t)| \geq |S_{n+p}(z) - S_n(z)| \forall z \in D$. Отже, при $n > N(\varepsilon)$

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon, \forall z \in D.$$

Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ збігається в D рівномірно за критерієм Коші.

б) Неперервність суми ряду $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ випливає з того, що кожен член ряду є неперервною функцією, а ряд рівномірно збіжний у D .

Візьмемо тепер в області D деякий гладкий замкнений контур L' і позначимо змінну на ньому через t' , а через z – значення змінної в частині області D , яка лежить усередині контуру L' . Помножимо кожен член лівої та правої частин рівності $f(t') = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t')$ на $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{t' - z}$.

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ рівномірно збіжний, то й ряд у правій частині рівності $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(t')}{t' - z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(t')}{2\pi i(t' - z)}$ теж рівномірно збіжний, отже, його можна почленно інтегрувати:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{f(t')}{t' - z} dt' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{f_n(t')}{t' - z} dt'.$$

З того, що всі функції $f_n(z)$ аналітичні в області D , випливає, що в лівій і правій частинах записані інтеграли Коші. Звідси маємо рівність

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

Отже, функція $f(z)$, подана у вигляді інтеграла типу Коші, аналітична. Через довільність контуру L' приходимо до висновку, що функція $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ аналітична в кожній точці області D .

в) Побудуємо в області D довільний гладкий замкнений контур L' . Нехай $t' \in L'$, а z належить внутрішній області, обмеженій контуром L' . Помножимо рівномірно збіжний ряд $f(t') = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t')$ на величину

$\frac{k!}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(t' - z)^{k+1}}$, де k – довільне фіксоване натуральне число. При цьому ряд

$$\frac{k!}{2\pi i} \cdot \frac{f(t')}{(t' - z)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \cdot \frac{f_n(t')}{(t' - z)^{k+1}}$$

теж буде рівномірно збіжним. Проінтегрувавши ліву й праву частини вздовж контуру L' , одержимо

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{L'} \frac{f(t')}{(t' - z)^{k+1}} dt' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_{L'} \frac{f_n(t')}{(t' - z)^{k+1}} dt' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

Для доведення рівномірної збіжності цього ряду використаємо критерій Коші. Оцінимо величину

$$\begin{aligned} A &= \left| S_{n+p}^{(k)}(z) - S_n^{(k)}(z) \right| = \left| f_{n+1}^{(k)}(z) + \dots + f_{n+p}^{(k)}(z) \right| = \\ &= \frac{k!}{2\pi} \left| \sum_{m=n}^{n+p} \int_{L'} \frac{f_m(t')}{(t' - z)^{k+1}} dt' \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{L'} \frac{\left| \sum_{m=n}^{n+p} f_m(t') \right|}{|t' - z|^{k+1}} |dt|. \end{aligned}$$

В області аналітичності ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ збігається рівномірно. Отже,

при $n > N(\varepsilon)$ і довільних $p > 1$ $\left| \sum_{m=n}^{n+p} f_m(t') \right| < \varepsilon$, $\forall t' \in L'$, а $|t' - z| = \delta > 0$. Тоді

$$A < \frac{k!}{2\pi} \frac{l\varepsilon}{\delta^{k+1}},$$

де l – довжина контуру L' . Це означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$

рівномірно збігається в області D ▸

6.2. Степеневі ряди

Важливим різновидом функціональних рядів є *степеневі ряди*, які в загальному випадку мають вигляд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

де c_n – деякі комплексні сталі, а a – фіксована точка комплексної площини. Легко бачити, що степеневий ряд є частинним випадком функціонального ряду, складеного з аналітичних функцій, у

$$\text{якому } f_n(z) = c_n (z-a)^n.$$

Не обмежуючи загальності, надалі вважатимемо, що $a = 0$ (це легко одержати за допомогою перенесення), і степеневий ряд, коли це не має принципового значення, будемо записувати в *канонічному вигляді*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Дослідимо, у якій області степеневі ряди рівномірно збігаються, тобто з'ясуємо, у якому випадку сума ряду буде аналітичною функцією.

6.2.1. Перша теорема Абеля

Теорема. Якщо ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ збігається в деякій точці $z_0 \neq 0$

, то він збігається, до того ж абсолютно, у будь-якій точці z такій, що $|z| < |z_0|$.

▹ Зі збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ у точці z_0 випливає, що існує стала

$A > 0$ така, що, починаючи з деякого номера $N \forall n > N$, виконується нерівність $|c_n z_0^n| < A$. Отже,

$$|c_n z^n| = |c_n| \left| \frac{z^n}{z_0^n} z_0^n \right| = |c_n| |z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n < A \left| \frac{z}{z_0} \right|^n = q^n A,$$

де $0 < q < 1$. Тобто степеневий ряд мажорується числовим рядом – нескінченно спадною геометричною прогресією зі знаменником $q < 1$

▷

З першої теореми Абеля випливає, що областю збіжності степеневого ряду є круг із центром у початку координат. Цей круг може стягуватись у точку або вироджуватись у всю комплексну площину.

Означення. Радіус круга, на границі якого існує точка, де ряд розбігається, називається *радіусом збіжності степеневого ряду*, а сам круг – *кругом збіжності*, усередині якого степеневий ряд збіжний.

У деяких випадках ряд збігається в усій комплексній площині або тільки в одній точці $z = 0$.

Побудуємо промінь, що виходить із початку координат під довільним кутом α . Точки, у яких ряд збігається, віднесемо до класу I, а точки, у яких ряд розбіжний, – до класу II. Побудовані множини точок класів I та II на промені матимуть спільну границю. Таке розбиття називається *перерізом Дедекінда* на промені в комплексній площині. Переріз визначає деяку точку c , яка ділить усі точки променя на два класи. Сама ж точка може належати або класу I, або класу II.

Побудуємо круг із центром у початку координат радіусом $|Oc|$. За першою теоремою Абеля, степеневий ряд збігається в довільній точці всередині цього круга. Що ж до точок кола, яке обмежує даний круг, то в кожному конкретному випадку збіжність ряду потрібно досліджувати окремо. Може трапитись, що на границі круга існують точки, у яких ряд збігається, і точки, у яких він розбігається.

Надалі, при вивченні поведінки степеневих рядів, ми широко будемо використовувати ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (геометричну прогресію). Об-

числимо його суму. Оскільки $\forall z_0$ такого, що $|z| < |z_0| = q < 1$, цей ряд мажорується числовим рядом $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, то радіусом збіжності цього ряду

буде $R = 1$. Складемо частинні суми $S_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ і знайдемо

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-|z|^{n+1} e^{i(n+1)\varphi}}{1-|z| e^{i\varphi}} = \frac{1}{1-z}.$$

Якщо $z = z_0$ є точкою збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, то за першою теоремою Абеля він збігається абсолютно і в довільній точці $|z| < |z_0|$. Але чи буде цей ряд рівномірно збіжним у крузі збіжності? Однозначної відповіді на це питання не існує. Так, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ у одиничному крузі не буде рівномірно збіжним. Це випливає з того, що частинні суми $|S_N(z)| = |1 + z + z^2 + \dots + z^N| < N + 1 \quad \forall N \in \mathbb{N}$ незалежно від z , якщо $|z| < 1$. Але коли $z \rightarrow 1$, $|z| < 1$ значення функції $f(z) = \frac{1}{1-z} \rightarrow \infty$. Отже $|f(z) - S_N(z)|$ не отже бути меншою від довільного наперед заданого $\varepsilon > 0 \quad \forall z$ таких, що $|z| < 1$.

Проте, довільний степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ буде рівномірно збіжним у крузі $|z| < r$, $r < R$, де R радіус збіжності цього ряду. Це випливає з такої нерівності $|c_n z^n| = |c_n| |z^n| \leq |c_n| r^n$ та з того, що числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ є збіжним, а отже за ознакою Вейерштрасса рівномірної збіжності функціональних рядів (п.6.1.1), ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ рівномірно збігається у крузі $|z| < r$.

6.2.2. Формула Коші – Адамара для визначення радіуса круга збіжності степеневих рядів

У курсі математичного аналізу було вивчено велику кількість методів установлення умов збіжності степеневих рядів. Деякі з них ми згадували у п.1.12. Усі ці методи дослідження збіжності рядів залишаються вірними й у комплексній площині, якщо виконуються відповідні умови.

Розглянемо ще один метод обчислення радіуса збіжності степеневих рядів – метод Коші – Адамара, що ґрунтується на такій теоремі.

Теорема. Радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ може бути обчислений за формулою $R = \frac{1}{L}$, де $L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Ця формула називається *формулою Коші – Адамара*.

◁ 1. Нехай $L = 0$. Покажемо, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ збіжний у довільній точці $z_0 \in \mathbb{C}$ з скінченним, але довільно великим значенням $|z_0|$. Оскільки, за умовою, послідовність чисел $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ збігається до нуля, то, починаючи з достатньо великого n , маємо $\sqrt[n]{|c_n|} < \varepsilon$, де ε – довільно мале число, вибране, наприклад, у вигляді $\varepsilon = \frac{1}{2|z_0|}$. Тоді

$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|z_0|}$ або $(\sqrt[n]{|c_n|}|z_0|)^n = |c_n z_0^n| \leq \frac{1}{2^n}$. Ця нерівність виконується

для довільного $|z_0| = r < \infty$. Оскільки мажорантний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ збігається, то степеневий ряд також збігається і має радіус збіжності $R = \infty$, а формула Коші – Адамара вірна.

2. Нехай тепер $L = \infty$ і $z \neq 0$. Тоді з означення верхньої границі випливає, що для довільного фіксованого z_0 знайдеться такий номер N , що при $n > N$ буде вірною нерівність $\sqrt[n]{|c_n|}|z_0| > 1$. Оскільки загальний член ряду не прямує до нуля, то не виконується необхідна умова збіжності ряду, отже, ряд розбіжний $\forall z \neq 0$.

3. Якщо $0 < L < \infty$, то покажемо, що наш ряд збігається для всіх z таких, що $|z| < 1/L$, і розбігається при $|z| > 1/L$.

а) Нехай $|z_0| < 1/L$. Тоді $|z_0|L < 1$. З означення L як верхньої границі випливає, що $\forall \varepsilon > 0$ і для всіх достатньо великих значень n маємо

$\sqrt[n]{|c_n|} < L + \varepsilon$. Виберемо ε так: $\varepsilon = \frac{1 - |z_0|L}{2|z_0|}$. Тоді

$$L + \varepsilon = \frac{2|z_0|L + 1 - |z_0|L}{2|z_0|} = \frac{|z_0|L + 1}{2|z_0|} \quad \text{і} \quad \sqrt[n]{|c_n|}|z_0| < \frac{1 + L|z_0|}{2} = q < 1, \quad \text{а}$$

$$|c_n z_0^n| < q^n.$$

Це означає, що степеневий ряд збіжний, тому що він мажорнується нескінченно спадною геометричною прогресією.

б) Покладемо $|z| > 1/L$ і доведемо, що в таких точках степеневий ряд розбіжний. З означення верхньої границі послідовності випливає, що $\forall \varepsilon > 0$ існує нескінченна множина значень послідовності $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$, для

яких $\sqrt[n]{|c_n|} > L - \varepsilon$. Виберемо $\varepsilon = \frac{|z|L - 1}{|z|}$. Тоді $\sqrt[n]{|c_n|} > L - \frac{|z|L - 1}{|z|} = \frac{1}{|z|}$.

Звідси випливає, що $|c_n z^n| > 1$, а отже, ряд розбіжний \triangleright

Використовуючи формулу Коші – Адамара, легко встановити, що:

1) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ збігається в кожній точці круга $|z| < 1$;

2) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ збігається в кожній точці $z \in \mathbb{C}$;

3) ряд $1 + z + 2z^2 + \dots + n!z^n + \dots$ збігається тільки в точці $z = 0$.

Зауваження. З математичного аналізу відомо: якщо $\forall n \in \mathbb{N}$ і $c_n > 0$

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = L \in \mathbb{R}$, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = L$. Отже, радіус збіжності степеневого

ряду можна визначити за формулою $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$, якщо, звісно, ця

границя існує.

Теорема. Сума степеневого ряду в крузі збіжності є аналітичною функцією.

\triangleleft Нехай R – радіус збіжності степеневого ряду. Тоді в кожній точці круга $|z| \leq r < R$ степеневий ряд збігається рівномірно, а його члени є аналітичними функціями в цьому крузі. Отже, за теоремою Вейерштрасса сума цього ряду є аналітичною функцією в крузі $|z| \leq r < R$ \triangleright

Сепеневий ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ є аналітичною функцією в крузі збіжності $R > 0$, отже його можна почленно диференціювати всередині круга збіжності. Визначимо радіус збіжності R_1 похідної

$$f'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \dots + (n+1)c_{n+1} z^n + \dots$$

За формулою Коші – Адамара $R_1 = \frac{1}{L_1}$, де

$$L_1 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)|c_{n+1}|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \left(\sqrt[n+1]{|c_{n+1}|} \right)^{(n+1)/n} = \\ = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|c_{n+1}|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L = \frac{1}{R}.$$

Користуючись методом математичної індукції, легко показати, що степеневий ряд всередині круга збіжності має похідні усіх порядків.

6.2.3. Арифметичні дії над степеневими рядами

Будемо вважати, що радіус збіжності степеневого ряду $R > 0$. Доведемо важливу для подальших досліджень теорему.

Теорема. Якщо сума $S(z)$ степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ дорівнює

нулю всюди в крузі збіжності $|z| < R$, то всі коефіцієнти ряду $c_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

◁ Припустимо, що твердження теореми хибне, тобто існують коефіцієнти, не рівні нулю, і перший з них має номер m . Сума степеневого ряду $S(z)$ є аналітичною функцією в крузі збіжності, її похідні будь-якого порядку існують і розвиваються у тому крузі у степеневі ряди. За умовою теореми, $S(z) \equiv \text{const} = 0$ у крузі збіжності, а отже

$$S^{(m)}(z) = m!c_m + c_{m+1}z + \dots = 0 \quad \forall z \in |z| < R,$$

зокрема $S^{(m)}(0) = 0$. Звідси випливає, що $c_m = 0$. Одержане протиріччя доводить теорему ▷

Додавання та множення рядів. Нехай R_1 і R_2 радіуси збіжності рядів $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ та $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, відповідно, а $\rho = \min(R_1, R_2)$. Оскільки в кожній точці круга $|z| < \rho$ ряди збігаються, то правомірно розглядати їх суму й різницю:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n.$$

Причому радіус збіжності суми (різниці) рядів, згідно з першою теоремою Абеля, не менше ρ .

Оскільки розглянуті ряди в крузі збіжності збігаються абсолютно, їх можна перемножити, причому радіус збіжності ряду, одержаного після перемножування рядів (добуток)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \times \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

де $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, не менший ρ .

Для операцій додавання та множення збіжних степеневих рядів виконуються закони комутативності, асоціативності й дистрибутивності, а операція віднімання є операцією, оберненою до додавання. Отже, множина всіх збіжних степеневих рядів з відмінними від нуля радіусами збіжності утворює кільце над полем комплексних чисел.

Ділення степеневих рядів. Якщо $b_0 \neq 0$, то відношення рядів $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ та $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ з радіусами збіжності $R_1 \neq 0$ та $R_2 \neq 0$ можна розглядати як степеневий ряд

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) : \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n,$$

коефіцієнти якого d_n , згідно з умовою $b_0 \neq 0$, визначаються однозначно з рекурентного співвідношення $\sum_{n=0}^k b_n d_{k-n} = a_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Легко показати, що радіус збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ при $b_0 \neq 0$ відмінний від нуля, якщо $R_1 \neq 0$ та $R_2 \neq 0$.

Розглянемо процес ділення детальніше. Нехай маємо два степеневі ряди $S_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ і $S_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k$, радіуси збіжності яких R_1 і R_2 , а $b_0 \neq 0$. Позначимо $\rho = \min(R_1, R_2)$. Тоді в крузі $|z-a| < \rho$ обидва ряди будуть збіжними. Якщо в цьому крузі функція $S_2(z)$ у якійсь точці $z = z_0$ дорівнює нулю, то величину ρ зменшимо до такої величини ρ_1 , що $\forall z: |z-a| < \rho_1, S_2(z) \neq 0$. У середині цього круга функція

$$f(z) = \frac{S_1(z)}{S_2(z)} = \frac{a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots}{b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots}$$

аналітична. Тому існує степеневий ряд

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots,$$

збіжний у крузі $|z| < \rho_1$. Процес визначення коефіцієнтів c_k , ($k = 0, 1, \dots, n, \dots$) назвемо діленням степеневих рядів $S_1(z)$ та $S_2(z)$.

Цей процес проведемо за методом невизначених коефіцієнтів. Запишемо рівність

$$\left[c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \right] \left[b_0 + b_1(z-a) + \dots + b_n(z-a)^n + \dots \right] = a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_n(z-a)^n + \dots$$

Оскільки всі три ряди збігаються в крузі $|z| < \rho_1$, то, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, маємо систему лінійних рівнянь відносно $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ нескінченного порядку

$$\begin{aligned} c_0 b_0 &= a_0, \\ c_0 b_1 + c_1 b_0 &= a_1, \\ c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 &= a_2, \\ &\dots \dots \dots \\ c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \dots + c_n b_0 &= a_n, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

яка має ту особливість, що для довільного n ($n = 0, 1, \dots$) перші $n+1$ рівнянь містять перші $n+1$ невідомих. Визначивши з першого рівняння $c_0 = \frac{a_0}{b_0}$ ($b_0 \neq 0$) і підставивши в друге, одержимо

$$c_1 = \frac{a_1 - c_0 b_1}{b_0}.$$

Після того, як буде знайдено n перших коефіцієнтів c_0, c_1, \dots, c_{n-1} , легко визначити наступний коефіцієнт:

$$c_n = \frac{a_n - c_0 b_n - c_1 b_{n-1} - \dots - c_{n-1} b_1}{b_0}.$$

Формулу для обчислення коефіцієнтів c_n через a_0, \dots, a_n, \dots , та $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ можна також одержати через визначники. Для цього запишемо визначник системи, утворений першими $n+1$ рівняннями:

$$\begin{vmatrix} b_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & \dots & b_0 \end{vmatrix} = b_0^{n+1} \neq 0.$$

Отже,

$$c_n = \frac{1}{b_0^{n+1}} \begin{vmatrix} b_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \dots & \dots & a_1 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Цей визначник легко обчислюється. Отже, задачу ділення степеневих рядів розв'язано.

6.2.4. Друга теорема Абеля

Ми дослідили степеневі ряди всередині круга збіжності. Однак доведені теореми не дають відповіді на питання про поведінку суми ряду на границі круга збіжності. У загальному випадку це питання достатньо складне та однозначної відповіді не існує. Наступна теорема дає змогу з'ясувати поведінку суми ряду на границі круга збіжності в одному, хоча й частковому, але важливому випадку.

Теорема. Якщо степеневий ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ збігається в точці

$z_0 \in \gamma$ границі круга збіжності й сума ряду в цій точці $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n = S$, то

$f(z) \rightarrow S$ при $z \rightarrow z_0$ уздовж довільного шляху, який лежить усередині кута розхилу, не більшого від π , з вершиною в точці z_0 , бісектриса якого виходить із точки z_0 і проходить через початок координат.

◁ Оскільки перетворення паралельного перенесення, гомотетії та повороту на збіжність степеневому ряду не впливають, то, не звужуючи загальності міркувань, покладемо $S = 0$, $R = 1$, $z_0 = 1$.

Дійсно, після заміни $z = z_0 t$ степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ переходить у

ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ відносно змінної t , круг $|z| = |z_0| |t| < R$ переходить у круг $|t| < 1$, а точка $z = z_0$ — у точку $t = 1$.

Якщо $S \neq 0$, то, розглядаючи ряд $s = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n - S$, будемо мати $s = 0$.

Уведемо функцію

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{1-z} = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots) (1 + z + z^2 + \dots) =$$

$$= c_0 + (c_0 + c_1)z + (c_0 + c_1 + c_2)z^2 + (c_0 + c_1 + c_2 + c_3)z^3 + \dots + \left(\sum_{k=0}^n c_k \right) z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n,$$

де $S_n = \sum_{k=0}^n c_k$ – частинні суми збіжного ряду. Отже, $\forall \varepsilon > 0$ існує

номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|S_n| < \varepsilon$ при $n > N$. Тоді

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n = \sum_{n=0}^N S_n z^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} S_n z^n = A + B.$$

Очевидно, що перша сума обмежена як скінченна сума обмежених функцій: $|A| = \left| \sum_{n=0}^N S_n z^n \right| < M$, а $|B| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} S_n z^n \right| < \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} |z|^n = \frac{\varepsilon |z|^{N+1}}{1-|z|}$.

Отже,

$$|f(z)| < M|1-z| + \frac{\varepsilon|1-z|}{1-|z|}|z|^{N+1}.$$

Якщо точка z прямує до точки 1 уздовж радіуса, тобто $0 < z < 1$, то $\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{1-z}{1-z} = 1$. При прямуванні z до 1 уздовж довільного шляху все-

редині кута, указанного в теоремі, легко показати, що величина $\frac{|1-z|}{1-|z|}$

залишається обмеженою. Дійсно, нехай θ – кут, утворений прямою, яка проходить через точки z і 1, з дотичною до кола, проведеного через кінець радіуса $0z$, а γ – шлях, уздовж якого точка z рухається до точки

1. Покладемо $|z| = r$, $|1-z| = \rho$. Тоді, як видно з рис. 6.1, маємо

$$\frac{1}{1-r} < \frac{1}{\sin \theta}.$$

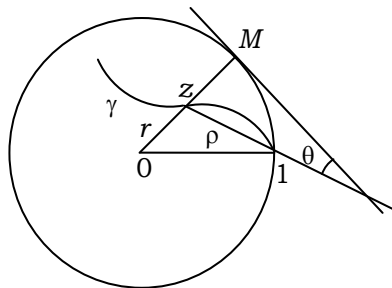


Рис. 6.1

Оскільки Z прямує до точки $z = 1$ уздовж γ , а цей шлях лежить у середині вказаного в теоремі кута, то $\sin \theta$ залишається більше деякої додатної сталої $\frac{1}{M_1}$.

Оскільки M_1 не залежить від прямування Z до 1, то величина $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ обмежена. Зі збіжності степеневого ряду в точці $z = 1$ випливає, що $\varepsilon \rightarrow 0$, отже, $f(z) \rightarrow 0$ ▽

6.3. Ряди Тейлора

6.3.1. Голоморфні функції

Нехай $f(z)$ – аналітична функція в деякій однозв'язній області D , а точка $z = a$ – довільна точка з цієї області $a \in D$. Побудуємо круг $K_\rho(a) = \{z : |z - a| < \rho\}$, який повністю лежить в області D ($K_\rho(a) \subset D$). Тоді для кожної точки $z \in D$ має місце інтегральна рівність Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t - z} dt,$$

де γ – коло, що обмежує круг $K_\rho(a)$. Оскільки Z лежить строго всередині круга $K_\rho(a)$, а $t \in \gamma$, то $\left| \frac{z - a}{t - a} \right| < 1$. Отже, $\left(1 - \frac{z - a}{t - a} \right)^{-1}$ є сумою спадної геометричної прогресії, і можна записати

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t - z + a - a} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t - a)} \left(1 - \frac{z - a}{t - a} \right)^{-1} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t - a)} \left(1 + \frac{z - a}{t - a} + \left(\frac{z - a}{t - a} \right)^2 + \left(\frac{z - a}{t - a} \right)^3 + \dots \right) dt. \end{aligned}$$

Оскільки нескінченно спадна геометрична прогресія є рівномірно збіжним рядом у $K_\rho(a)$, то її можна почленно інтегрувати вздовж границі круга:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t-a} dt + \frac{z-a}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-a)^2} dt + \dots + \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt + \dots$$

Це означає, що

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \text{ де } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt.$$

Ураховуючи формулу для похідних інтеграла Коші, останній ряд запишемо у вигляді звичного ряду Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n.$$

Через довільність точки a робимо висновок, що функція, аналітична в області D , розвивається в ряд Тейлора в кожній точці області аналітичності функції.

Означення. Функцію $f(z)$ називають *голоморфною в точці $z=a$* , якщо вона у деякому околі цієї точки розвивається у степеневий ряд по степеням $z-a$. Функція $f(z)$ є *голоморфною в області D* , якщо вона голоморфна у кожній точці цієї області.

Покажемо, що поняття голоморфності та аналітичності еквівалентні.

«Нехай $f(z)$ є голоморфною у околі точки $z=a$. За введеним означенням існує круг $K = \{z : |z-a| < \rho\}$, $\rho > 0$, всередині якого ця функція розвивається у степеневий ряд. Проте, як відомо, сума степеневого ряду є аналітичною функцією всередині круга збіжності.

Якщо $f(z)$ аналітична функція у околі точки $z=a$, то це означає, що існує круг $K = \{z : |z-a| < \rho\}$, $\rho > 0$, всередині якого її можна розвинути у збіжний степеневий ряд.»

6.3.2. Нулі аналітичних функцій

При дослідженні аналітичних функцій важливим є поняття їх нулів.

Означення. Нехай в області D задано аналітичну функцію $f(z)$. Будемо казати, що ця функція в точці z_0 має *нуль*, якщо $f(z_0) = 0$. Якщо ж $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, а $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, то точку z_0 будемо називати *нулем кратності n (порядку n)*. Якщо в точці z_0 сама

функція й усі її похідні дорівнюють нулю, то кажуть, що ця точка є нулем нескінченного порядку.

Означення. Відповідно до прийнятої в п.1.8.1 домовленості відносно околу точки $Z = \infty$, будемо вважати, що аналітична в околі точки $Z = \infty$ функція $f(z)$ має нуль порядку n у цій точці, якщо функція

$\varphi(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ має нуль того самого порядку в точці $\xi = 0$.

Теорема. Для того, щоб точка $a \in D$ була нулем порядку n аналітичної в області D функції $f(z)$, необхідно й достатньо, щоб у деякому околі точки a мала місце рівність $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$, де $\varphi(z)$ аналітична в цьому околі та $\varphi(a) \neq 0$.

◁ Необхідність випливає з того, що функція аналітична в цьому околі, а отже, розвивається у степеневий ряд $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k (z-a)^k$, у якому перші коефіцієнти $b_k = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) згідно з умовою теореми.

Для доведення достатності покладемо, що в деякому околі точки a справджується рівність $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$.

Розвинемо функцію $\varphi(z)$ у степеневий ряд

$$\varphi(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots,$$

де, за умовою, $c_0 \neq 0$. Тоді

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-a)^n \varphi(z) = (z-a)^n (c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots) = \\ &= c_0(z-a)^n + c_1(z-a)^{n+1} + \dots, \end{aligned}$$

а отже, точка a є нулем порядку n функції $f(z)$ оскільки $f(a) = 0$, $f'(a) = 0, \dots, f^{(n-1)}(a) = 0$, а $f^{(n)}(z) = n!c_0 + (n+1)!c_1(z-a) + \dots \neq 0$ при $z=a$ ▷

Теорема. Якщо точка $z_0 \in D$ є нулем нескінченного порядку аналітичної функції $f(z)$, то $f(z) \equiv 0$ у всій області D .

◁ Доведення випливає з того, що аналітична функція може бути розвинена в ряд Тейлора в околі довільної точки аналітичності

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad z \in D.$$

Сполучимо точку z_0 з довільною точкою $a \in D$ кривою γ , кожна точка якої лежить у D . Оскільки ця крива й границя області аналітичності є компактами, що не перетинаються, то відстань від γ до границі D є величиною $\delta > 0$. Побудуємо круг $\{z : |z - z_0| < \delta\}$ і запишемо розвинення $f(z)$ у цьому крузі. Оскільки $f^{(n)}(z_0) = 0$ для всіх n , то $f(z) = 0$ у всіх точках розглянутого круга. Далі на кривій γ візьмемо точку z_1 , яка розташована на відстані $\delta/2$ від точки z_0 і ближче до точки a . Оскільки в точці z_1 функція дорівнює нулю, тобто $f^{(n)}(z_1) = 0$, то вона в цій точці має нуль нескінченного порядку. Застосувавши до точки z_1 попередні міркування, устанавлюємо, що $f(z) = 0$ у крузі $\{z : |z - z_1| < \delta\}$. Продовжуючи рух уздовж γ у напрямку точки a , на кожному наступному кроці (у кожному новому околі) будемо отримувати аналогічні результати. На якомусь n -му (скінченному) кроці прийдемо в точку z_n , яка є нулем нескінченного порядку ($f^{(n)}(z_n) = 0 \forall n$) і для якої $|z_n - a| < \delta/2$. Оскільки функція $f(z)$ аналітична в околі цієї точки, то $f(a) = 0$ ▸

Теорема. Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D і точка $a \in D$ є нулем цієї функції, то існує окіл точки a , у якому інших нулів немає. Тобто всі нулі аналітичної функції ізольовані.

◁ Якщо точка $z = a$ є нулем функції, то $f(z) = (z - a)^n \varphi(z)$, де $\varphi(z)$ – аналітична функція та $\varphi(a) \neq 0$, тому в деякому околі точки a , за властивістю неперервності, виконується нерівність $\varphi(z) \neq 0$ ▸

З доведених теорем випливають такі наслідки.

Наслідок 1. Множина нулів аналітичної функції всередині області аналітичності не має граничної точки, оскільки у протилежному випадку гранична точка була б множиною нулів нескінченного порядку, а отже, $f(z) \equiv 0$. Проте на границі області аналітичності це можливо.

Наприклад, функція $f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$ аналітична в крузі $|z| < 1$, але множина її нулів $z_n = 1 - \frac{1}{\pi n}$ при $n \rightarrow \infty$ має граничну точку $z = 1$.

Наслідок 2. Якщо функція аналітична в D і $f(z) \neq 0$, то вона має у D не більше ніж зліченну множину нулів.

Або: аналітична в D функція $f(z) \neq 0$ може мати нескінченне число нулів лише у відкритій області, коли точка скупчення нулів належить границі області або у необмеженій області, коли $Z = \infty$ є граничною точкою нулів.

Наслідок 3. Нехай функції $f(z)$ та $\varphi(z)$ аналітичні в області D , існує множина $M \subset D$, яка має принаймні одну граничну точку множини нулів. Тоді, якщо $f(z) = \varphi(z)$ у точках множини M , то $f(z) = \varphi(z)$ для всіх точок D .

◁ Для доведення достатньо розглянути функцію $F(z) = f(z) - \varphi(z)$ і застосувати до неї наслідок 1 ▷

6.3.3. Єдиність аналітичної функції

Теорема. (єдності аналітичної функції) Якщо $f(z)$ і $f_1(z)$ – аналітичні функції в деякій області D і на послідовності точок $\{z_k\}$ цієї множини, яка має граничну точку $a \in D$, їх значення збігаються, то значення цих функцій збігаються в усіх точках $z \in D$. Тобто $f(z) \equiv f_1(z)$, $z \in D$.

◁ В околі точки $Z = a$ подамо функції $f(z)$ і $f_1(z)$ у вигляді рядів Тейлора

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots,$$

$$f_1(z) = c'_0 + c'_1(z-a) + c'_2(z-a)^2 + \dots + c'_n(z-a)^n + \dots$$

За умовою $f(z_k) = f_1(z_k)$ і $z_k \rightarrow a \in D$. Тобто в околі точки a існує нескінченна множина точок така, що

$$c_0 + c_1(z_k - a) + c_2(z_k - a)^2 + \dots = c'_0 + c'_1(z_k - a) + c'_2(z_k - a)^2 + \dots$$

Після переходу в лівій і правій частинах цієї рівності до границі при $z_k \rightarrow a$ одержимо $c_0 = c'_0$.

Обидві частини рівності, яка залишилася

$$c_1(z_k - a) + c_2(z_k - a)^2 + \dots = c'_1(z_k - a) + c'_2(z_k - a)^2 + \dots$$

розділимо на $z_k - a$. Після переходу до границі при $z_k \rightarrow a$ одержимо $c_1 = c'_1$. Продовжуючи цей процес далі, прийдемо до висновку, що $c_k = c'_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Отже, $f(z) \equiv f_1(z) \quad \forall z \in D$ ▷

Доведена теорема має надзвичайно важливе значення у теорії аналітичних функцій. Вона вказує, що в області D може існувати лише одна аналітична функція, яка приймає задані значення на збіжній до $z = a \in D$ послідовності точок. Очевидно, що цю теорему можна сформулювати у іншому виді, а саме.

Теорема. Нехай в області D задано збіжну до точки $z = a \in D$ послідовність $\{z_n\} \in D$. Тоді в цій області може існувати лише одна аналітична функція $f(z)$, яка приймає у точках z_n задані значення.

Зазначимо, що питання існування аналітичної функції такої, що в точках z_n вона приймає певні значення A_n у кожному конкретному випадку вимагає окремого дослідження. Наприклад, якщо $z_n = \frac{1}{n}$, а

$$f(z_n) = \begin{cases} 0, & \text{при } n \text{ непарному,} \\ 1 & \text{при } n \text{ парному,} \end{cases}$$

то у точці $a = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ границя функції $f(z_n)$ взагалі не існує.

6.3.4. Оцінка Коші коефіцієнтів ряду Тейлора

Теорема. Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ і ряд у правій частині цієї рівності збігається в крузі з радіусом R із центром у точці $z = a$. Тоді для коефіцієнтів ряду Тейлора $\forall n \in \mathbb{N}$ вірна оцінка Коші $|c_n| < \frac{M(R)}{R^n}$.

▷ Оскільки функція $f(z)$ аналітична в крузі $|z-a| < R$, то вона й обмежена в ньому, тобто $|f(z)| < M(R)$. Для коефіцієнтів розвинення аналітичної функції в ряд Тейлора справджується формула

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-a|=R} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt.$$

Зробимо заміну змінних $t-a = R e^{i\varphi}$. Тоді $dt = iR e^{i\varphi} d\varphi$. Отже,

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-a|=R} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \right| \leq M(R) \frac{2\pi R}{2\pi R^{n+1}} = \frac{M(R)}{R^n} \triangleright$$

6.3.5. Теорема про ряд степеневих рядів (композицію рівномірно збіжних рядів аналітичних функцій)

Теорема. Якщо ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, складений з аналітичних функцій $f_n(z)$, рівномірно збігається в крузі $|z-a| < R$ і в цьому крузі є збіжними степеневі ряди $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n_k} (z-a)^k$, $\forall n = 0, 1, 2, \dots$, то має місце рівність

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{n_k} (z-a)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (z-a)^k \sum_{n=0}^{\infty} c_{n_k}.$$

◁ За теоремою Вейерштрасса, функція $f(z)$ є аналітичною в крузі збіжності, а отже, її можна розвивати в ряд Тейлора в околі точки $Z = a$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z-a)^k, \quad \text{де}$$

$$A_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^{(k)}(a)}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n_k}.$$

Після підстановки одержаних значень коефіцієнтів у розвинення $f(z)$ у ряд одержимо потрібну формулу \triangleright

6.4. Зразки дослідження функціональних рядів

1. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1) \sum z^{n!}; \quad 2) \sum z^n \cos in, \quad 3) \sum (n + a^n) z^n, \quad 4) \sum \frac{z^n}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

◁ 1) З порівняння загального вигляду степеневому ряду $\sum a_k z^k$ з заданим рядом, маємо

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k = n!, \\ 0, & \text{якщо } k \neq n!, \end{cases} \quad \text{отже, } R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}} = 1.$$

2) Оскільки $a_n = \cos in = \frac{e^n + e^{-n}}{2}$, то, відповідно до формули Коші –

$$\text{Адамара, } R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} e \sqrt[n]{\frac{1+e^{-2n}}{2}}} = \frac{1}{e}.$$

3) Аналогічно попередньому,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+a^n} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |a| \leq 1, \\ |a|, & |a| > 1, \end{cases} \text{ то } R = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |a| \leq 1, \\ \frac{1}{|a|}, & |a| > 1 \end{cases}$$

4) Ряд $\sum \frac{z^n}{n^\alpha}$ збігається у крузі $|z| < 1 \quad \forall |\varepsilon| < K < \infty$. Дійсно, при

$$0 < \alpha < K \text{ за формулою Коші – Адамара } L = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^\alpha} = 1.$$

Якщо $\alpha = -\beta$, $0 < \beta < K$, то ряд набуває вигляду $\sum n^\beta z^n$. Радіус збіжності цього ряду $R=1$. Зокрема, при $\alpha \geq 2$ ряд збігається абсолютно у крузі $|z| \leq 1$. Це випливає з збіжності ряду $\sum \frac{1}{n^2}$. Але незважаючи

на збіжність цього ряду у кожній точці межового кола, збільшити радіус збіжності не можна. Це випливає з того, що $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$ таке,

що при $n > N$ загальний член ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\varepsilon)^n}{n^\alpha}$ не буде прямувати до

нуля. Дійсно, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$ таке, що $\ln(1+\varepsilon)^n = n \ln(1+\varepsilon) > \alpha \ln n$

2. Довести: якщо радіуси збіжності степеневих рядів $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ відповідно дорівнюють R_1 , R_2 , то:

1) радіус збіжності R степеневого ряду $\sum a_n b_n z^n$ задовольняє нерівність $R \geq R_1 R_2$;

2) радіус збіжності R степеневого ряду $\sum \frac{a_n}{b_n} z^n$ ($b_n \neq 0$) задовольняє нерівність $R \leq \frac{R_1}{R_2}$.

◁ 1) Оскільки за умовою $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{R_1}$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{R_2}$,

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|} = \frac{1}{R}$, то з нерівності $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$, яка виконується для верхньої границі добутку при довільних $x_n \geq 0$ та $y_n \geq 0$, маємо

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{|b_n|} \right) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}.$$

Звідси $\frac{1}{R} \leq \frac{1}{R_1 R_2}$, тобто $R \geq R_1 R_2$.

2) Очевидно, що $a_n = \frac{a_n}{b_n} \cdot b_n$, тоді з доведеної в 1) нерівності $R_1 \geq R R_2$ маємо $R \leq \frac{R_1}{R_2}$ ▸

3. Довести, що для коефіцієнтів степеневого ряду $\sum a_n z^n$ з радіусом збіжності R справджується формула

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi = \frac{i}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} v(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi,$$

де $0 < r < R$, $f(z) = u + iv = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – сума ряду.

▹ Нехай $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ ($r < R$). Запишемо коефіцієнти ряду Тейлора функції $f(z)$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \frac{re^{i\varphi} i d\varphi}{r^{n+1} e^{i(n+1)\varphi}} = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

З інтегральної формули Коші при $n \geq 1$ одержимо

$$\int_{\gamma_r} f(\xi) \xi^{n-1} d\xi = \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) r^n e^{in\varphi} i d\varphi = 0, \text{ або}$$

$$\frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) e^{in\varphi} d\varphi = 0.$$

Додамо до формули для коефіцієнтів ряду та віднімемо від неї останній, рівний нулю, інтеграл. Отримаємо

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \cos n\varphi d\varphi = -\frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \sin n\varphi d\varphi.$$

Позначимо $a_n = \alpha_n + i\beta_n$. Тоді

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) \cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} v(r, \varphi) \sin n\varphi d\varphi,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} v(r, \varphi) \cos n\varphi d\varphi = -\frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

$$\text{Звідси } \alpha_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi = \frac{i}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} v(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi \quad \forall n \in \mathbb{N} \triangleright$$

4. Дослідити поведінку рядів на границі круга збіжності:

$$1) \sum \frac{(-1)^n}{n} z^n, \quad 2) \sum \frac{z^{n!}}{n^2}.$$

◁ 1) Очевидно, що $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Отже, на границі круга збіжності

$z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Тому розглянутий ряд на колі $|z|=1$ набуває вигляду

$$\sum \frac{(-1)^n e^{in\theta}}{n} = \sum (-1)^n \frac{\cos n\theta}{n} + i \sum (-1)^n \frac{\sin n\theta}{n}.$$

Якщо $\theta = \pi$, то ряд розбігається. Для всіх інших значень θ ряд збігається за ознакою Діріхле. Оскільки на границі круга збіжності

$$\left| \frac{(-1)^n z^n}{n} \right| = \frac{1}{n}, \text{ то ряд у цих точках не абсолютно збіжний.}$$

2) Записавши ряд у вигляді $\sum a_k z^k$, бачимо, що його коефіцієнти дорівнюють

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{якщо } k = n!, \\ 0, & \text{якщо } k \neq n!, \end{cases} \text{ отже, } R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = 1.$$

На границі круга збіжності $|a_n z^n| = \frac{1}{n^2}$, тому в усіх точках зазначеної границі ряд збігається абсолютно.

5. Знайти суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$ при $|z| < 1$.

◁ Нехай $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$. Розглянемо допоміжну функцію φ , де

$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Оскільки цей степеневий ряд у крузі $|z| < 1$ збіжний, то його можна почленно диференціювати. Отже,

$\varphi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$. Помноживши ліву й праву частини отрима-

ної рівності на z , маємо $f(z) = z\varphi'(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \triangleright$

6.5. Аналітичні продовження. Повні аналітичні функції

Нехай D і D_1 – дві області, які мають непорожній перетин g .

Означення. Пару (D, f) назовемо *функціональним елементом аналітичної функції f* , визначеної в області D . Тоді, якщо $f(z)$ аналітична в D , а $f_1(z)$ аналітична в D_1 , $g = D \cap D_1 \neq \emptyset$ і $f(z) = f_1(z) \quad \forall z \in g$, то кажуть, що функція $f_1(z)$ *аналітично продовжує $f(z)$ із D у D_1* , а $f(z)$ *аналітично продовжує $f_1(z)$ із D_1 у D* . Тобто функціональні елементи (D, f) та (D_1, f_1) є аналітичними продовженнями один одного (рис. 6.2).

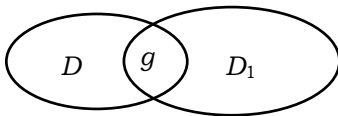


Рис. 6.2

Теорема (єдиності аналітичного продовження). Якщо $g = D \cap D_1 \neq \emptyset$, а (D, f) та (D_1, f_1) – аналітичні продовження, то такі продовження єдині.

◁ Нехай функціональний елемент (D, f) має два аналітичні продовження: (D_1, f_1) та (D_1, f_2) . За умовою теореми $\forall z \in g$ маємо $f(z) = f_1(z)$ і $f(z) = f_2(z)$. Отже, на g маємо рівність аналітичних функцій $f_1(z) = f_2(z)$. З властивості єдиності аналітичних функцій випливає, що вони збігаються: $f_1(z) \equiv f_2(z) \triangleright$

Проілюструємо прикладом найпростіші аналітичні продовження.

Розглянемо функцію $f(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$, аналітичну в крузі $D = \{z : |z| < 1\}$, і функцію $f_1(z) = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n$, аналітичну в $D_1 = \{z : |z-i| < \sqrt{2}\}$. На перетині цих областей $g = D \cap D_1 \neq \emptyset$, значення функцій $f(z)$ і $f_1(z)$ збігаються, оскільки $|z| < 1$ і $\left|\frac{z-i}{1-i}\right| < 1$ на g , а суми їх рядів дорівнюють $f(z) = \frac{1}{1-z}$ та $f_1(z) = \frac{1}{1-i} \frac{1}{1-(z-i)/(1-i)} = \frac{1}{1-z}$.

Отже, $f_1(z)$ аналітично продовжує $f(z)$ із круга $D = \{z : |z| < 1\}$ у круг $D_1 = \{z : |z-i| < \sqrt{2}\}$.

Якщо розглянути область $D_2 = \{z \in \bar{C} \setminus \{1\}\}$ та аналітичну в ній функцію $f_2(z) = \frac{1}{1-z}$, то ця функція буде аналітичним продовженням функціональних пар (D, f) і (D_1, f_1) на $D_2 = \{z : \bar{C} \setminus \{1\}\}$ (рис. 6.3).

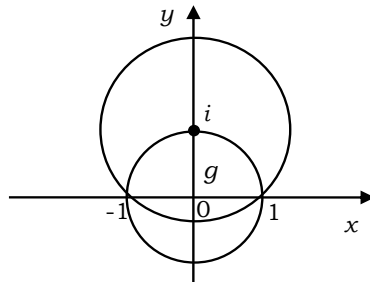


Рис. 6.3

Перетин $D \cap D_1$ не обов'язково має бути областю, як, наприклад, об'єднання двох областей з непорожнім перетином (рис. 6.4).

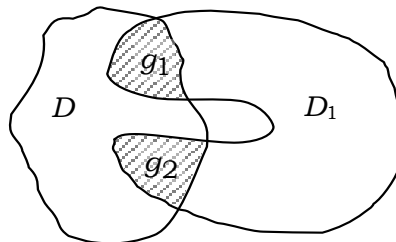


Рис. 6.4

Нехай тепер $f(z)$ – аналітична в деякому крузі $K_\rho(a)$ з центром у точці a та існує скінченна кількість околів D_k , що перетинаються, таких, що можна побудувати низку аналітичних продовжень $f_k(z)$ з околу точки a в окіл точки $z = b$. Продовження функції $f(z)$ з околу точки $z = a$ в окіл точки $z = b$ уздовж побудованого шляху існує та єдине (рис. 6.5.). Однак може виявитися, що аналітичне продовження можна побудувати й уздовж іншого шляху. Виникає питання: чи прийдемо ми до одного й того самого результату, рухаючись уздовж різних шляхів? Тобто чи є єдиним аналітичне продовження з околу однієї точки в окіл іншої при різних шляхах побудови продовжень? Очевидно, що не завжди. Розглянемо, наприклад, функцію $f(z) = \sqrt{z}$ в околі точки нуля. Ця функція має дві гілки: $|z| \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{2} \right)$ ($k = 0, 1$). Вибравши одну з них, наприклад при $k = 0$, рухаючись із точки $z = -1$ до точки $z = 1$ уздовж верхнього шляху ($\arg z$ змінюється від π до нуля), одержимо $f(1) = 1$, а йдучи вздовж нижнього ($\arg z$ змінюється від π до 2π) – $f(1) = -1$ (рис. 6.6).

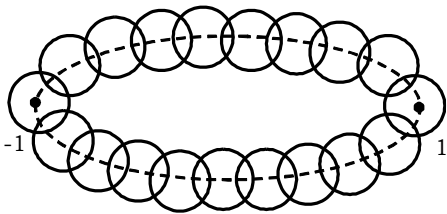


Рис. 6.5

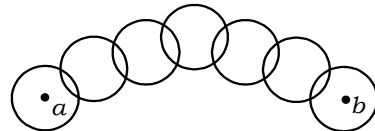


Рис. 6.6

Відповідь на питання єдиності аналітичного продовження вздовж різних шляхів дає така теорема.

Теорема про монодромію. Якщо функція $f(z)$ аналітично продовжується з околу однієї точки в окіл іншої вздовж довільних жорданових кривих, які лежать в однозв'язній області, то результат аналітичного

продовження не залежить від його шляху та способу.

◁ Нехай маємо деякий функціональний елемент (D_0, f_0) , $D_0 \subset D$, де D – така однозв'язна область, що цей елемент аналітично продовжується вздовж довільної жорданової кривої γ , яка лежить у D . Покажемо, що тоді сукупність усіх можливих аналітичних продовжень визначає в області D одну й ту саму аналітичну функцію.

Сполучимо точку A з точкою B двома кривими γ_1 і γ_2 , які лежать в однозв'язній області D , і побудуємо вздовж них два довільні аналітичні продовження (рис. 6.7).

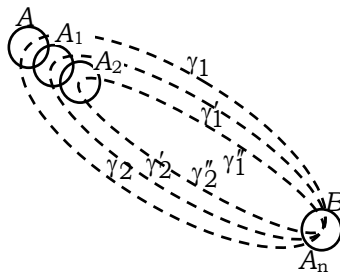


Рис. 6.7

Припустимо від супротивного, що результати продовжень не збіглися. На підставі леми Гейне – Бореля, зі зліченної кількості околів, якими може бути покритий шлях, що сполучає точки A та B уздовж кривої γ_1 , виберемо скінченну їх кількість: D_1, D_2, \dots, D_n . Покриття утворять деяку зв'язну область (криволінійну смугу), що містить криву γ_1 . Аналогічно побудуємо покриття кривої γ_2 околами E_1, E_2, \dots, E_n . В околі D_1 зафіксуємо точку $A_1 \neq A$, що лежить ближче до точки B , і з'єднаємо точки A_1 та B кривими γ'_1 і γ'_2 , які повністю лежать в утворених раніше смугах, але розташовані ближче одна до одної, ніж γ_1 до γ_2 . Очевидно, що аналітичні продовження вздовж γ_1 і γ'_1 та γ_2 і γ'_2 збігаються (за умовою єдиності аналітичної функції).

Покриємо криві γ'_1 і γ'_2 скінченними множинами областей D'_2, D'_3, \dots, D'_n та E'_2, E'_3, \dots, E'_n відповідно, вимагаючи, щоб $D_1 \cap D'_2 \cap E'_2 \neq \emptyset$. Виберемо таку точку A_2 з перетину $D_2 \cap E_2$, щоб

$A_2 \neq A_1$ та A_2 була розташована ближче до B , ніж точка A_1 . Сполучимо точку A_2 з точкою B кривими γ_1' та γ_2'' і встановимо, що продовження вздовж γ_1' збігається з продовженням уздовж γ_1'' , а продовження вздовж γ_2' – із продовженням уздовж γ_2'' . Продовжуючи аналогічні міркування, прийдемо до того, що після деякого n -го кроку точки A_n і B_n будуть лежати в околі точки B (точки аналітичності функції $f_0(z)$). При цьому аналітичні продовження вздовж дуг $\gamma_1, \gamma_1', \dots, \gamma_1^n$ та $\gamma_2, \gamma_2', \dots, \gamma_2^n$ від точки A до точок A_n та B_n єдині і, за припущенням, але не рівні між собою. Однак, оскільки точки A_n та B_n лежать в околі точки B , то всі аналітичні продовження в цьому околі тотожно рівні. Це приводить до протиріччя \triangleright

Друге доведення можна побудувати, використовуючи теорему Коші. Розглянемо замкнену лінію $\gamma = \gamma_1 \cup \overline{\gamma_2}$, покриємо її скінченною кількістю кружечків. У межах кожного кружечка, не змінюючи приросту функції, можна замінити рух по кривій γ рухом по прямолінійному відрізку. Таким чином, приріст $f(z)$ на γ дорівнює приросту $f(z)$ на деякій вписаній ламаній. Він, за допущенням, відмінний від нуля. З'єднаючи попарно вершини ламаної, прийдемо до висновку, що приріст $f(z)$ відмінний від нуля на деякому трикутнику. Розіб'ємо цей трикутник середніми лініями на чотири трикутники, одержимо, що хоч би по одному з них приріст не дорівнює нулю. Це означає, що в області D існує особлива точка z_0 . Проведемо з точки A через точку z_0 лінію у точку B . Уздовж цієї лінії аналітичне продовження неможливе. Одержуємо протиріччя з умовою теореми \triangleright

Означення. Аналітична функція, узята разом з усіма своїми продовженнями, називається *повною аналітичною функцією у розумінні Вейерштрасса*. Область, у якій визначено повну аналітичну функцію, називають *областю існування повної аналітичної функції*, а її границю – *природною границею області існування повної аналітичної функції*.

На відміну від *повної аналітичної функції*, аналітичну функцію, яка визначена тільки в деякій частині (підобласті) області існування ПАФ, називають *елементом повної аналітичної функції*. Знаючи елемент аналітичної функції й побудувавши всі аналітичні продовження (елементи аналітичної функції), ми відновлюємо *повну аналітичну функцію* та її область існування.

Наприклад, нехай функція $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ визначена та аналітична в

крузі $|z| < 1$, а функція $f_1(z) = \frac{1}{1-z}$ аналітична в усій комплексній площині, крім точки $z = 1$. У крузі $|z| < 1$ їх значення збігаються. Отже, $f(z)$ є елементом аналітичної функції $f_1(z)$, а $f_1(z)$ – ПАФ. Точка $z = 1$ – природна границя області існування *повної аналітичної функції*.

Для функції $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ областю визначення є круг $|z| < 1$. Продовжити її за межі круга не можна. Отже, вона є *повною аналітичною функцією*, а коло $|z| = 1$ є її природною границею.

Як це не дивно, але найбільш цікавими при вивченні голоморфних функцій є точки, у яких функція перестає бути голоморфною – це особливі точки функції. Далі ми побачимо, що в особливих точках і головних частинах розвинення функцій у ряди Лорана у околах таких точок прихована основна інформація про голоморфні функції. Зокрема у п.3.5. уже дано фізичну інтерпретацію деяких з них як джерел чи стоків, вихорів потоку тощо.

Означення. Усі точки природної границі називаються *особливими точками аналітичної функції*.

У точках природної границі аналітична функція не визначена.

Легко показати, що множина особливих точок замкнена, а довільна особлива точка є граничною для точок аналітичності функції, хоча сама не є точкою аналітичності.

Означення. Особлива точка, у довільно малих околах якої не міститься інших особливих точок, називається *ізольованою особливою точкою*.

Означення. Точки, у яких функція є аналітичною, називаються *точками регулярності* даної функції.

Ізольовані особливі точки розрізняються за ознаками:

1) *однозначного характеру* – при обході навколо такої точки функція не одержує приросту, тобто ми повертаємося до початкового значення функції;

2) *неоднозначного характеру* – при обході навколо цієї точки функція одержує ненульовий приріст.

Якщо при $n-1$ обході точки неоднозначного характеру функція одержує ненульовий приріст, а після n -го обходу приріст стає нульовим, то кажуть, що ця особлива точка є *точкою розгалужування порядку n* .

Якщо ж при довільній скінченній кількості обходів точки розгалужування ми не повертаємося до початкового значення, то така точка є *точкою розгалужування нескінченного порядку*.

Наприклад, $f(z) = \sqrt{z}$ – двозначна, $z = 0$ – точка розгалужування другого порядку, а для $f(z) = \text{Ln} z$ точка $z = 0$ є точкою розгалужування нескінченного порядку.

Нехай тепер ізольованою особливою точкою є нескінченно віддалена точка $Z = \infty$. За означенням, функція $f(z)$ є аналітичною в точці $Z = \infty$, якщо після заміни змінної $\xi = \frac{1}{z}$ функція, одержана як функція змінної $\xi = \frac{1}{z}$, буде аналітичною в точці 0 . Отже, вивчення характеристик функції в околі точки $Z = \infty$ зводиться до вивчення характеру функції $\varphi(\xi) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ при $\xi = \frac{1}{z}$ в околі точки $\xi = 0$.

Означення. Точка $Z = \infty$ є особливою точкою функції $f(z)$, якщо точка ξ є особливою точкою для функції $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$.

Наприклад, для функції $f(z) = z$ точка $Z = \infty$ є ізольованою особливою точкою, оскільки точка $\xi = 0$ є особливою для функції $\varphi(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{1}{\xi}$. З тієї ж причини точка $Z = \infty$ буде нулем функції $f(z) = z$.

При фіксованих областях D та D_1 і їх перетині g (рис.6.2) аналітичне продовження $f_1(z)$ в область D_1 визначається однозначно. Це безпосередньо випливає з теореми про єдність аналітичної функції. Проте, якщо D і D_1 мають кілька спільних частин, наприклад як на рис.6.4), то розглядаючи продовження $f(z)$ в D_1 через області g_1 і g_2 ми можемо одержати в результаті два різні її продовження $f_1(z)$ та $f_2(z)$. Це випливає з того, що у даному випадку умова теореми про монохромію може не виконуватися. Отже ми одержали дві аналітичні функції

$$F_1(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D, \\ f_1(z) & z \in D_1, \end{cases} \quad \text{і} \quad F_2(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D, \\ f_2(z) & z \in D_1, \end{cases}$$

які співпадають на області D і мають різні значення в D_1 . це приводить до необхідності розглядати на їх об'єднанні $D \cup D_1$ багатозначну

аналітичну функцію $F(z)$, яка в кожній точці області D_1 приймає два різні значення. У цьому разі, щоб позбавитися труднощів з вибором значень аналітичного продовження, доцільно скористатися поняттям гілки двозначної функції, як наприклад, це було зроблено для функції $w = \sqrt{z}$. Значенням кожної гілки функції $F(z)$ повинен відповідати окремий лист поверхні Рімана, побудованої так, що область D_1 , яка відображається різними функціями (гілками) $f_1(z)$ і $f_2(z)$, на цій поверхні мала образи на двох різних листах.

Така побудова може бути узагальненою на довільне n -значне або нескінченно значне аналітичне продовження.

6.5.1. Існування особливої точки на границі круга збіжності

Дуже часто нам буває відома не ПАФ, а лише її елемент, зображений у вигляді суми степеневого ряду. Він визначає аналітичну функцію всередині деякого круга – круга збіжності.

Нехай, наприклад, ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ збігається всередині

круга зі скінченним радіусом $|z - z_0| < R$, ($R < \infty$) і, отже, визначає аналітичну функцію в цьому крузі. Може трапитися, що функція $f(z)$ буде лише елементом аналітичної функції.

Для пояснення цього факту з точки z_0 проведемо довільний промінь і виберемо на ньому точку z_1 таку, що $|z_1 - z_0| < R$. Оскільки z_1 є точкою аналітичності функції $f(z)$, то в її околі існує розвинення функції $f(z)$ у ряд за степенями $(z - z_1)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C'_n (z - z_1)^n.$$

Очевидно, що радіус збіжності цього ряду $R_1 \geq R - |z_0 - z_1|$.

При виконанні рівності $R_1 = R - |z_0 - z_1|$ ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C'_n (z - z_1)^n$ дає нам значення функції лише в точках, у яких вона визначена рядом

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$. Тоді точка дотику кругів збіжності цих двох рядів може бути особливою точкою функції $f(z)$.

Якщо виконується строга нерівність, то $f(z)$ можна аналітично продовжити через точку M (точку перетину кола $|z - z_0| = R$ і заданого променя) (рис. 6.8). Для цього з круга збіжності другого ряду виберемо точку $z = z_2$, яка лежить на тому самому промені, і зробимо розв'язання $f(z)$ в її околі. Якщо для радіуса збіжності $R_2 \geq R_1 - |z_2 - z_0|$ знак рівності не виконується, то можна продовжувати функцію через цю точку.

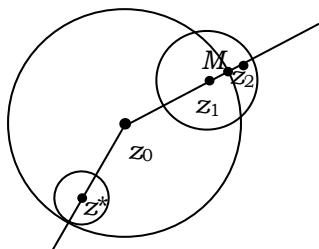


Рис. 6.8

Так можна продовжувати наш початковий елемент за всіма напрямками, наприклад, через точку z^* . У результаті (чисто теоретично) ми одержимо повну аналітичну функцію.

Узагалі можливі такі випадки. Продовження початкового степеневого ряду неможливе через жодну точку. У цьому випадку функція не продовжується, і коло круга збіжності є її природною границею. Другий випадок допускає продовження функції через деяку множину точок границі круга збіжності. Тоді через кожну точку цієї множини функцію можна аналітично продовжити.

Виникає питання: чи може трапитися, що степеневий ряд можна продовжити через кожну точку кола, яка є границею круга збіжності?

На це питання дає відповідь така теорема.

Теорема (про існування особливої точки на границі круга збіжності).

На границі збіжності степеневого ряду $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ лежить принай-

мні одна особлива точка функції $f(z)$.

◁ Якщо на $\gamma = \{z : |z| = R\}$ не лежить жодна з особливих точок функції, то кожна точка $\xi \in \gamma$ є центром деякого відкритого околу, у якому визначено елемент аналітичного продовження. Сукупність цих околів утворює покриття γ . За лемою Гейне – Бореля, з цього покриття можна виділити скінченну множину околів, яка покриває γ та утворює деяку область G , що містить γ . Якщо через r позначити відстань від γ до границі області G , то можна стверджувати, що функція $f(z)$ аналітична в крузі $\{z : |z| < R + r\}$ і ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ має збігатися в ньому, що суперечить умові теореми про те, що R – радіус круга збіжності ▷

З доведеної теореми одержуємо, що границя круга збіжності проходить через найближчу до центра околу розвинення в ряд особливу точку функції, яка є точкою природної границі повної аналітичної функції.

Ще одним прикладом функції, яка не має продовження за межі круга збіжності степеневому ряду, є $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} = z + z^2 + z^6 + \dots$.

Зауваження 1. Серед особливих точок є неізольовані. Наприклад, особливими точками функції $f(z) = \left(e^{\frac{1}{z}} - 1 \right)^{-1}$ є точки $z_k = \frac{1}{2k\pi i}$. Вони ізольовані, але $z = 0$, яка теж є особливою для $f(z)$, не буде ізольованою, оскільки вона є граничною точкою множини точок $\{z_k\}$.

6.6. Принцип побудови аналітичного продовження

6.6.1. Принцип неперервності

Теорема. Нехай області D і D_1 дотикаються одна до одної вздовж деякої спрямованої кривої L (рис. 6.9).

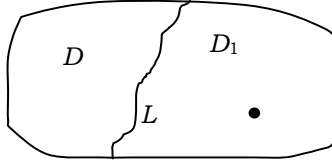


Рис. 6.9

Тоді, якщо $f(z)$ і $f_1(z)$ – аналітичні функції відповідно в D і D_1 , які на L неперервні та збігаються ($f(z) = f_1(z), \forall z \in L$), то вони аналітично продовжують одна одну.

◁ Це твердження очевидне, якщо $f(z)$ і $f_1(z)$ є аналітичними вздовж дуги L , оскільки в цьому разі існує деяка область (смуга), у якій функції $f(z)$ і $f_1(z)$ аналітичні й рівні на контурі L .

У випадку тільки неперервності $f(z)$ на дузі L побудуємо контур $\gamma_0 = \gamma_1 \cup \gamma$ так, щоб γ лежало всередині D , а γ_1 – усередині D_1 і контур γ_0 перетинав у двох точках дугу L . Частина дуги L , яка лежить усередині γ_0 , позначимо L' , а області, обмежені кривими $\gamma \cup L'$ і $\gamma_1 \cup L'$, – g і g_1 , відповідно ($g \subset D, g_1 \subset D_1$), $g_0 = g \cup g_1 \cup L'$ (рис. 6.10). Для простоти доведення будемо вважати контур L кусково-монотонним. На контурі γ_0 уведемо функцію

$$\Phi(t) = \begin{cases} f(t), & \text{якщо } t \in \gamma \\ f_1(t), & \text{якщо } t \in \gamma_1 \end{cases}$$

Оскільки на кінцях контурів значення функцій $f(t)$ і $f_1(t)$ збігаються, а всередині областей D і D_1 вони аналітичні, то функція $\Phi(t)$ неперервна на γ_0 . За допомогою інтеграла типу Коші запишемо аналітичну в g_0 функцію

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\Phi(t)}{t-z} dt.$$

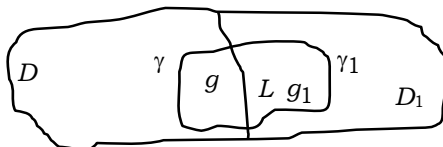


Рис. 6.10.

Якщо точка $z \in g$, то маємо $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma \cup L'} \frac{f(t)}{t-z} dt + \int_{\gamma_1 \cup \bar{L}'} \frac{f_1(t)}{t-z} dt$. Тут

контур \bar{L}' збігається з L' , але має протилежний напрямок обходу.

Оскільки $z \notin g_1$, то в другому інтегралі підінтегральна функція аналітична, і за теоремою Коші цей інтеграл дорівнює нулю. Отже, $F(z) = f(z)$ при $z \in g$. Міркуючи аналогічно, установлюємо: якщо $z \in g_1$, то $F(z) = f_1(z)$.

Отже, за допомогою інтегралу типу Коші, ми побудували аналітичну функцію $F(z)$, яка є аналітичним продовженням функції $f(z)$ з області g в область g_1 або навпаки.

Ураховуючи довільність побудови контуру γ_0 , приходимо до загального твердження теореми \triangleright

Зауваження. Побудоване таким чином аналітичне продовження функції іноді називається *аналітичним продовженням через дугу*.

6.6.2. Принцип симетрії Рімана – Шварца

Теорема. Нехай область D у складі своєї границі має дугу деякого кола γ , а $f(z)$ аналітична в D , неперервна на γ і набуває на ній дійсних значень. Тоді існує аналітичне продовження $f(z)$ з області D в область, симетричну D відносно дуги γ .

\triangleleft Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що γ збігається з відрізком дійсної осі (рис.6.11) (у протилежному випадку за допомогою дробово-лінійного перетворення це можна просто зробити). В області D (рис.6.11) виберемо довільну точку Z . Симетричною їй відносно відрізка γ буде точка $z^* = \bar{Z}$. Уведемо функцію $f^*(z^*) = \overline{f(z)}$. Оскільки $f(z)$ аналітична в D , то вона й однозначна в ній. Отже, за побудовою функція $f^*(z^*)$ теж однозначна в D^* . Покажемо, що функція $f^*(z^*)$ диференційовна в кожній точці $z^* \in D^*$. Для цього розглянемо границю

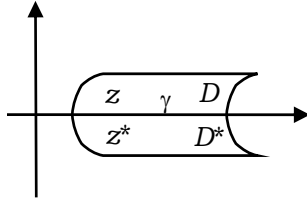


Рис. 6.11

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z^* \rightarrow 0} \frac{f^*(z^* + \Delta z^*) - f^*(z^*)}{\Delta z^*} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{f(z + \Delta z)} - \overline{f(z)}}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \overline{\left(\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right)} = \overline{f'(z)} \end{aligned}$$

Отже, $f'^*(z^*) = \overline{f'(z)}$. Функція $f^*(z^*)$ однозначна й диференційована в D^* , а тому аналітична в кожній точці $z^* \in D^*$. Оскільки функції $f^*(z^*)$ та $f(z)$ на дузі γ набувають дійсних значень, а $f(z) = \overline{f(z)} = \overline{f^*(z^*)}$, то звідси випливає, що вони рівні на γ . Ураховуючи принцип неперервності аналітичного продовження, установлюємо, що $f^*(z^*)$ аналітично продовжує функцію $f(z)$ з області D в область D^* \triangleright

Зазначимо, що принцип симетрії Рімана – Шварца має не тільки важливе теоретичне значення для встановлення існування аналітичного продовження, але й указує конструктивний шлях його побудови.

6.7. Означення елементарних функцій у комплексній площині

Використовуючи принципи аналітичного продовження, можна дати означення елементарних функцій у комплексній площині як розширення відповідних функцій дійсної змінної. Із властивості єдиності аналітичних функцій випливає, що для їх повного однозначного відтворення в деякій області достатньо знати їх значення на скільки завгодно малому відрізку лінії, що належить цій області.

Нехай у деякій області D задано такий відрізок лінії L , а на L задано функцію $\varphi(z)$. Можливі два випадки:

1) не існує в області D аналітичної функції, яка б збіглася з функцією $\varphi(z)$, заданою на L ;

2) існує, причому тільки одна, аналітична в D функція, яка збігається з $\varphi(z)$ на L . У цьому випадку можемо сказати, що ця функція однозначно визначається через своє значення на L . Тоді ми можемо стверджувати, що функція $\varphi(z)$, задана на L , має аналітичне продовження в області D .

Зокрема, якщо L збігається з відрізком дійсної осі, то ми можемо говорити про аналітичне продовження функції дійсної змінної x у комплексну площину \mathbb{C} . Якщо функція дійсної змінної взагалі продовжується в комплексну область, то продовження можна побудувати тільки єдиним чином.

6.7.1. Показникові та тригонометричні функції

Розглянемо *показникова та тригонометричні функції*. Вони при дійсних значеннях x розвиваються у степеневі ряди:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Замінюючи в цих рядах формально змінну x на z , одержимо степеневі ряди з радіусами збіжності $R = \infty$. При $z = x$ ряди визначають функції дійсної змінної e^x , $\sin x$ та $\cos x$, відповідно. Отже, указані степеневі ряди можна продовжити з дійсної осі на всю комплексну площину, причому однозначно. Це дозволяє в комплексній площині ввести функції

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

як аналітичні продовження відповідних функцій дійсної змінної. Легко довести, що всі відомі нам властивості функцій дійсної змінної переносяться на функції комплексної змінної.

Проте потрібно зазначити, що в комплексній площині у функцій з'являються й нові, не притаманні функціям дійсної змінної, властивості. Це, наприклад, періодичність функції e^z по уявній частині змінної z , необмеженість $|\sin z|$ тощо.

6.7.2. Логарифмічна та обернені тригонометричні функції

Логарифмічна функція. Під головним значенням функції $\operatorname{Ln} z$ будемо

розуміти

$$\ln z = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}.$$

За властивістю означеного інтеграла ця функція є аналітичною в усякій області, що не містить початку координат. При $Z = X$ $\ln z = \ln x$, отже, $\ln z$ є аналітичним продовженням $\ln x$ в область комплексної змінної.

При $Z = X$ маємо $e^{\ln x} = x$. Легко переконатися, що ця рівність має місце при комплексному значенні Z , тобто логарифмічна функція $f(z) = \ln z$ є оберненою до показникової функції e^z . Функція $\ln z$ має одну особливу точку $z = 0$, яка є точкою розгалужування нескінченного порядку. Зробимо в площині z розріз так, щоб не існувало замкнених шляхів, які охоплюють початок координат, тобто шляхів, при обході вздовж яких функція $\ln z$ одержує ненульовий приріст. Для цього у площині \mathbb{C} зробимо розріз уздовж від'ємної дійсної півосі від точки $z = 0$ до точки $Z = \infty$.

Під *головною гілкою* $\ln z$ загальної логарифмічної функції $\text{Ln}z$ розумітимемо сукупність його значень у площині z , розрізаній вздовж від'ємної дійсної півосі від 0 до ∞ . У цій площині $\ln z$ є однозначною функцією. Оскільки функція $\ln z$ аналітична, то значення інтеграла не залежить від шляху інтегрування. Нехай $z = R e^{i\varphi}$. Для обчислення ін-

теграла $\ln z = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$ виберемо такий шлях: спочатку вздовж дійсної осі

від точки $x = 1$ до точки $x = R$, а потім – уздовж дуги $z = R e^{i\theta}$ при зміні кута θ від нуля до φ . Тоді

$$\ln z = \int_1^R \frac{dx}{x} + \int_0^\varphi \frac{R e^{i\theta} i d\theta}{R e^{i\theta}} = \ln R + i\varphi = \ln|z| + i \arg z.$$

Інтегрування вздовж іншого шляху приводить до того ж результату.

6.7.3. Обернені тригонометричні функції

Функції $\text{arctg} z$ та $\text{arcsctg} z$. Під функцією $\text{arctg} z$ розуміємо функцію, визначену інтегралом

$$\int_0^z \frac{d\xi}{1 + \xi^2}.$$

Вона є аналітичною всюди в комплексній площині, крім точок $z = \pm i$.

Якщо $Z = X$, то $\operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} x$, тобто $\operatorname{arctg} z$ є аналітичним продовженням функції дійсної змінної $\operatorname{arctg} x$ у комплексну площину. При $Z = X$ $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$. Звідси випливає, що, оскільки функції $\operatorname{arctg} z$ та $\operatorname{tg} z$ є аналітичними, а суперпозиція аналітичних функцій теж є функцією аналітичною, то, за теоремою єдиності аналітичної функції, ця рівність має місце й для довільних Z . Отже, $\operatorname{arctg} z$ є оберненою функцією до $\operatorname{tg} z$.

Точки $\pm i$ для функції $\operatorname{arctg} z$ є точками розгалужування нескінченного порядку. Під головною гілкою $\operatorname{arctg} z$ розуміють сукупність його значень у площині Z , розрізаній уздовж уявної осі від точки $y = 1$ до точки $y = \infty$ та від $y = -\infty$ до $y = -1$.

Під функцією $\operatorname{arccotg} z$ розуміють функцію, визначену рівністю

$$\operatorname{arccotg} z = \frac{\pi}{2} - \int_0^z \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} z.$$

Функції $\operatorname{arcsin} z$ та $\operatorname{arccos} z$. Для визначення функції $\operatorname{arcsin} z$ скористаємося відомою для функцій дійсної змінної інтегральною формулою

$$\operatorname{arcsin} z = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

Особливими точками цієї функції є $z = \pm 1$. Під головною гілкою функції $\operatorname{arcsin} z$ розуміють сукупність її значень у площині \mathbb{C} , з якої виключено промені вздовж дійсної осі від $x = 1$ до $x = \infty$ і від точки $x = -\infty$ до точки $x = -1$.

Міркуючи аналогічно, функцію $\operatorname{arccos} z$ будемо знаходити за формулою

$$\operatorname{arccos} z = \frac{\pi}{2} - \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsin} z.$$

Обґрунтування аналітичності цих функцій та того, що вони є оберненими до відповідних тригонометричних функцій, повністю збігається з розглянутим обґрунтуванням, проведеним для функції $\operatorname{arctg} z$.

Наведемо приклади дослідження та побудови аналітичних продовжень.

1. Доведемо, що елементи аналітичних функцій

$$P_1 = \left(K_1, \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right), \quad K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

$$P_2 = \left(K_2, \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^n \right), \quad K_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < \sqrt{2}\},$$

є безпосереднім аналітичним продовженням один одного.

◁ Обидва ряди є розвиненням функції $f(z) = \frac{1}{1-z}$ у кругах K_1 і K_2 , які мають непорожній перетин ▷

2. Покажемо, що сума степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ є повною аналітичною функцією.

◁ Маємо $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. У точках $z_{km} = e^{2\pi i m 2^{-k}}$, щільно розміщених на колі $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, що є границею круга збіжності ряду, функція f не має скінченної радіальної межі ▷

3. Наведемо приклад повної аналітичної функції f , областю визначення якої є одиничний круг $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, і яку не визначено в замиканні \bar{K} .

◁ Такою функцією є $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^n}$. Якби f аналітично продовжувалася за одиничний круг, то таку саму властивість мала б її похідна f' , що суперечить попередній задачі ▷

6.7.4. Різні підходи до побудови теорії аналітичних функцій

У науковій та навчальній літературі наводяться, на перший погляд, дещо різні означення аналітичних функцій. Коротко проаналізуємо кожне з них.

1. За Коші, аналітичною є однозначна й диференційована в області функція.

2. За означенням, яке дав Вейєрштрасс, функція називається аналітичною в однозв'язній області, якщо вона голоморфна, тобто розвивається в ряд Тейлора. Еквівалентність цих понять нами доведено в п.6.3.1.

3. За означенням Рімана, функція $f(z) = u + iv$, визначена й однозначна в області D , називається аналітичною, якщо $u(x, y)$ та $v(x, y)$ – неперервні в D і задовольняють умови Коші – Рімана. Еквівалентність цього означення з наведеними вище також доведена нами раніше.

4. Означення аналітичної функції за Осгудом полягає в тому, що функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D , якщо $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ для довільного спрямованого замкненого контуру $\gamma \subset D$. Еквівалентність випливає з теореми Морера та інтеграла Коші.

6.8. Ряди Лорана

6.8.1. Розвинення аналітичних функцій у ряд Лорана

Серед різноманітних класів функціональних рядів аналітичних функцій найближчими до степеневих рядів як за формою запису, так і за своїми властивостями є ряди, які містять у розвиненні члени з від'ємними степенями $z - z_0$, а саме

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + \frac{a_1}{z - z_0} + \frac{a_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_n}{(z - z_0)^n} + \dots = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(z - z_0)^m} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^{-m} = \sum_{m=-\infty}^0 a_{-m} (z - z_0)^m. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Ряди вигляду $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ називаються *рядами Лорана*.

Після заміни $\xi = \frac{1}{z - z_0}$ ряд (6.1) набуває вигляду звичайного степеневого ряду

$$F(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \xi^m, \quad (6.2)$$

який визначає деяку функцію $F(\xi)$, аналітичну всередині круга збіжності. За формулою Коші – Адамара такий ряд збігається в крузі радіусом $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|a_n|}}$.

Для степеневого ряду (6.2) можливі три випадки:

- 1) $0 < R < \infty$ – ряд (6.2) збігається в крузі $|\xi| < R$;
- 2) $R = \infty$ – ряд (6.2) збіжний у всій комплексній площині;
- 3) $R = 0$ – ряд збігається тільки в точці $\xi = 0$.

Використавши зв'язок між змінними ξ та z , з'ясуємо, якими є умови

збіжності ряду (6.1).

Оскільки в першому випадку $|\xi| = \frac{1}{|z - z_0|} < R$, то $|z - z_0| > \frac{1}{R} = r$. Це свідчить, що ряд (6.1) збігається в зовнішній відносно кола $|z - z_0| = r$ області, а функція $f(z)$ аналітична в ній. При $R = \infty$, тобто $r = 0$, ряд (6.1) збігається тільки в точці $z = z_0$, а у випадку $R = 0$ він збігається при $|z - z_0| > \frac{1}{R} = r = \infty$, тобто тільки в точці $z = \infty$. У цих двох випадках функція $f(z)$ аналітична тільки в околах точок $z = z_0$ та $z = \infty$.

Отже, ряду Лорана в комплексній площині можна поставити у відповідність аналітичну функцію.

З'ясуємо тепер питання про те, чи можна довільну аналітичну функцію розвинути в ряд Лорана.

Теорема (про розвинення аналітичної функції в ряд Лорана). Нехай функція $f(z)$ – однозначна й аналітична в концентричному кільці $r < |z - a| < R$. Тоді в кожній точці z , яка лежить усередині кільця, функція $f(z)$ допускає розвинення в ряд Лорана

$$\begin{aligned} f(z) &= \dots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \dots = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \end{aligned}$$

де

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

а L – довільний замкнений контур, який лежить усередині кільця та охоплює точку $z = a$ (рис. 6.12).

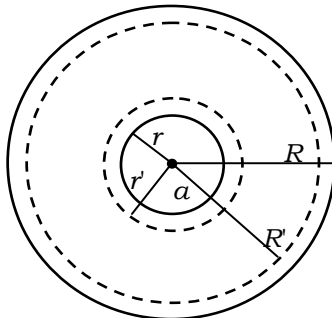


Рис. 6.12.

Цей ряд рівномірно збігається в указаному кільці.

◁ Усередині вказаного кільця побудуємо два кола $|z-a|=r'$ і $|z-a|=R'$, так що $r < r' < R' < R$.

Нехай точка z лежить у кільці $r' < |z-a| < R'$. Тоді, за формулою Коші для складного контуру, маємо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-a|=R'} \frac{f(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-a|=r'} \frac{f(t)}{t-z} dt = I_1(z) + I_2(z).$$

Розглянемо перший інтеграл. Оскільки $|t-a|=R'$, $|z-a| < R'$, тобто $\left|\frac{z-a}{t-a}\right| < 1$, то

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-a|=R'} \frac{f(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-a|=R'} \frac{f(t)}{t-a-z+a} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-a|=R'} \frac{f(t)}{t-a} \left(1 + \frac{z-a}{t-a} + \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n + \dots \right) dt \end{aligned}$$

Ряд, записаний в дужках рівномірно збіжний в крузі $|z-a| < R'$, отже його можна почленно інтегрувати і

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

$$\text{де } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-a|=R'} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

При обчисленні $I_2(z)$ урахуємо, що в даному разі $r' = |t-a| < |z-a|$, а отже, $\left|\frac{t-a}{z-a}\right| < 1$. Тоді

$$\begin{aligned} I_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-a|=r'} \frac{f(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-a|=r'} \frac{f(t)}{(z-a) \left[1 - \left(\frac{t-a}{z-a}\right) \right]} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-a|=r'} \frac{f(t)}{(z-a)} \left[1 + \frac{t-a}{z-a} + \left(\frac{t-a}{z-a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{t-a}{z-a}\right)^n + \dots \right] dt \end{aligned}$$

Оскільки ряд у квадратних дужках рівномірно збіжний при

$\left| \frac{t-a}{z-a} \right| < 1$, то його можна почленно інтегрувати:

$$I_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z-a)} \int_{|t-a|=r'} f(t) dt + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z-a)^2} \int_{|t-a|=r'} \frac{f(t)}{(t-a)^{-1}} dt + \dots +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z-a)^{n'+1}} \int_{|t-a|=r'} \frac{f(t)}{(t-a)^{-n'}} dt + \dots = \sum_{n'=1}^{\infty} c'_{n'} (z-a)^{n'},$$

де

$$c'_{n'} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-a|=r'} \frac{f(t)}{(t-a)^{-n'+1}} dt.$$

Покладемо в останній формулі $n' = -n$ і одержимо

$$I_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-a|=r'} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt.$$

Ряд $I_1(z)$ рівномірно збіжний у крузі $|z-a| < R'$ як ряд Тейлора. Для дослідження ряду $I_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ зробимо заміну $\frac{1}{z-a} = z'$. Тоді

$$I_2(z) = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right) = \varphi(z') = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z')^n.$$

Цей ряд за побудовою збігається при $|z'| < r'$. Отже, ряд $I_2(z)$ збігається при $\frac{1}{|z-a|} < r'$, або $|z-a| > r'$. Звідси випливає, що обидві частини ряду Лорана збігаються в кільці $r' < |z-a| < R'$. Об'єднуючи ці два ряди, у спільній області збіжності $r' < |z-a| < R'$ маємо

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Ураховуючи довільність радіусів r' та R' а також те, що інтегральна формула Коші вірна не тільки для кола, а й для довільної гладкої замкненої кривої, приходимо до твердження теореми. Зазначимо, що твердження теореми залишається вірним і при $r' \rightarrow 0$ та $R' \rightarrow \infty$.

Означення. Частина ряду Лорана, яка містить тільки від'ємні степені, називається *головною частиною ряду Лорана*, а частина, яка не містить від'ємних степенів — *правильною*.

На підставі теореми про існування особливої точки на границі круга

збіжності можна стверджувати, що на границях кільця існує принаймні по одній особливій точці даної аналітичної функції.

На границі кільця збіжності ізольовані особливі точки однозначного характеру класифікуються таким чином.

Якщо ряд Лорана в околі ізольованої особливої точки однозначного характеру $Z = a$ не містить головної частини, то ця точка називається *усувною особливою точкою*.

Якщо головна частина ряду має один член $\frac{c_{-1}}{z-a}$, то точка називається *полюсом першого порядку (простим полюсом)*.

Якщо головна частина має скінченну кількість членів і $-p$ – найвищий показник, то точку називають *полюсом порядку p* .

Якщо ж головна частина містить нескінченну кількість членів, то точка $Z = a$ називається *істотно особливою точкою*.

У випадку, коли головна частина ряду Лорана відсутня

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots,$$

точку $Z = a$ називають *усувною*. Якщо при цьому $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$, то

поклавши $c_0 = f(a)$, приходимо до ряду Тейлора.

Нехай $Z = a$ – ізольована особлива точка функції $f(z)$. Тоді r може бути як завгодно малим, і ряд Лорана буде рівномірно збіжним у крузі $|z-a| < R$ за винятком точки $Z = a$.

Отже, в околі ізольованої особливої точки аналітична функція може бути розвинута в ряд Лорана.

6.8.2. Розвинення аналітичної функції в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої особливої точки

Означення. Точка $Z = \infty$ є *ізольованою особливою точкою* функції $f(z)$, якщо точка $z' = \frac{1}{z} = 0$ є *ізольованою особливою точкою* функції

$$\varphi(z') = f\left(\frac{1}{z'}\right).$$

Запишемо ряд Лорана для функції $\varphi(z')$ в околі точки $z' = 0$:

$$\varphi(z') = \dots + \frac{c_{-n}}{z'^n} + \frac{c_{-n+1}}{z'^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z'} + c_0 + c_1 z' + \dots$$

За означенням ряд Лорана для функції $f(z)$ в околі $Z = \infty$ точки матиме вигляд

$$f(z) = \dots + c_{-n}z^n + \dots + c_{-1}z + c_0 + c_1z^{-1} + \dots + c_nz^{-n} + \dots,$$

де частина до члена c_0 є головною, а далі, починаючи з c_0 – правильною частиною.

Якщо головна частина ряду відсутня, то точка $Z = \infty$ буде усувною.

Якщо головна частина містить скінченну кількість доданків і старший степінь n , то ця точка є полюсом порядку n . Наприклад, для функції $f(z) = z^2 + 1$ точка $Z = \infty$ є полюсом другого порядку.

У випадку, коли головна частина містить нескінченну кількість членів, ми маємо істотно особливу точку $Z = \infty$. Наприклад, точка $Z = \infty$ для функції $f(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$ є істотно особливою.

6.8.3. Єдиність розвинення аналітичної функції в ряд Лорана

Нехай $f(z)$ має два розвинення: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ та $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n(z-a)^n$,

суми яких у кільці збіжності ряду Лорана рівні:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n(z-a)^n. \quad (6.3)$$

Помножимо обидві частини рівності (6.3) на $\frac{1}{(z-a)^{k+1}}$ і візьмемо ін-

теграл від обох частин рівності по замкненому контуру L , який міститься в кільці збіжності ряду Лорана:

$$\int_L \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{(z-a)^n}{(z-a)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_L (z-a)^{n-1-k} dz = 2c_k \pi i.$$

Аналогічно

$$\int_L \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n \frac{(z-a)^n}{(z-a)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n \int_L (z-a)^{n-1-k} dz = 2c'_k \pi i.$$

Звідси випливає, що $c_k = c'_k$ для всіх цілих k .

6.8.4. Поведінка аналітичної функції в околі ізольованих усувних особливих точок і полюсів

Залежно від характеру особливої точки поведінка аналітичної функції має свої особливості. Наведемо теореми, які за поведінкою функції в околі ізольованої особливої точки дозволяють визначити характер її особливості.

Теорема (про усуну ізольовану точку). Нехай точка $Z = a$ є ізольованою особливою точкою однозначного характеру аналітичної функції $f(z)$. Тоді:

1) Якщо при підході до точки $Z = a$ функція $f(z)$ залишається обмеженою або має порядок зростання $\alpha < 1$, то точка $Z = a$ є усунуою.

2) При підході до особливої усунуї точки аналітична функція має скінченну границю, і якщо цю границю прийняти за значення функції в точці a , то функція $f(z)$ буде аналітичною в цій точці.

◁ 1) Нехай $f(z)$ обмежена $|f(z)| < M$ або має скінченний порядок зростання $\alpha < 1$, тобто $|f(z)| < \frac{M}{|z-a|^\alpha}$.

Оцінимо величину модуля коефіцієнтів ряду Лорана

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{|f(t)|}{|t-a|^{n+1}} |dt| \leq \frac{2M\pi r}{2\pi r^{n-1+\alpha}}.$$

При $n \leq -1$

$$|c_n| \leq Mr^{n-\alpha} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0,$$

а отже, головна частина ряду Лорана відсутня, тобто точка $Z = a$ – усунва.

2) При $n = 0$ значення коефіцієнта c_0 ряду Лорана є скінченим, не рівним нулю комплексним числом. Отже, існує $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$. Якщо це

значення покласти рівним $f(a)$, то функція стане визначеною та аналітичною в точці $Z = a$ ▷

Нехай тепер точка $Z = a$ є полюсом порядку n для функції $f(z)$. Тоді ряд Лорана в її околі матиме вигляд

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots = \\ &= \frac{1}{(z-a)^n} \left[c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + \dots \right]. \end{aligned}$$

З цього розвинення функції в ряд Лорана випливає, що в околі полюса значення аналітичної функції прямує до нескінченності при $Z \rightarrow a$.

6.8.5. Відповідність між нулями та полюсами аналітичної функції

Теорема. Якщо точка $Z=a$ є нулем кратністю k для функції $f(z)$, то вона є полюсом того самого порядку для функції $\psi(z) = \frac{1}{f(z)}$. Навпаки, якщо точка $Z=a$ є полюсом порядку k для $\psi(z)$, то вона є нулем тієї самої кратності для функції $f(z) = \frac{1}{\psi(z)}$.

◁ Нехай точка $Z=a$ є нулем кратністю k для функції $f(z)$. Тоді в деякому околі цієї точки маємо розвинення в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} f(z) &= c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots = \\ &= (z-a)^k (c_k + c_{k+1}(z-a) + \dots) = (z-a)^k \varphi(z), \end{aligned}$$

де $\varphi(z)$ – аналітична функція в околі точки $Z=a$ та $\varphi(a) \neq 0$, оскільки $c_k \neq 0$.

Розглянемо функцію

$$\psi(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-a)^k} \frac{1}{(c_k + c_{k+1}(z-a) + \dots)}.$$

Розвинемо у степеневий ряд аналітичну в околі точки $Z=a$ функцію

$$\tilde{\psi}(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = b_0 + b_1(z-a) + \dots.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{1}{(z-a)^k} \tilde{\psi}(z) = \frac{1}{(z-a)^k} (b_0 + b_1(z-a) + \dots) = \\ &= \frac{b_0}{(z-a)^k} + \frac{b_1}{(z-a)^{k-1}} + \dots + b_k + b_{k+1}(z-a) + \dots \end{aligned}$$

Звідси, за означенням полюса, випливає, що точка $Z=a$, яка була нулем кратністю k для функції $f(z)$, є полюсом того самого порядку k для функції $\psi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Обернене твердження доводиться за тією самою схемою ▷

6.8.6. Поведінка аналітичної функції в околі істотно особливої точки

Виділення дослідження істотно особливої точки в окремий підрозділ пов'язано з тим, що поведінка аналітичної функції в околі цієї точки суттєво відрізняється від поведінки функцій у будь-якій іншій точці. Про це говорять наступні теореми.

Теорема (про інваріантність істотно особливої точки відносно дробово-лінійного відображення).

Якщо точка $Z = a$ є істотно особливою точкою функції $f(z)$, то вона буде істотно особливою точкою й для функції

$$\varphi(z) = \frac{\alpha f(z) + \beta}{\gamma f(z) + \delta},$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ та $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$.

◁ Як відомо, дробово-лінійне відображення складається з паралельного перенесення, гомотетії, повороту та інверсії. Для перших трьох відображень твердження теореми очевидне. Доведемо теорему для перетворення інверсії, тобто для перетворення вигляду $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

1. Покладемо від супротивного, що точка $Z = a$ є усувною особливою точкою для функції $\varphi(z)$. Тоді

$$\varphi(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots,$$

а отже,

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots}.$$

Очевидно, що в цьому випадку $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \frac{1}{c_0}$. Можливо, що $c_0 \neq 0$. У такому разі точка $Z = a$ є усувною для $f(z)$, що неможливо за умовою теореми.

Якщо ж $c_0 = 0$, то точка $Z = a$ є полюсом $f(z)$ і $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. Це теж неможливо за умовою теореми.

2. Нехай точка $Z = a$ є полюсом порядку n для функції $\varphi(z)$. Тоді за попередньою теоремою вона є нулем функції $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ кратністю n , а не істотно особливою точкою. Знову одержали протиріччя.

Оскільки інших особливих точок не існує, то з цього випливає, що точка $Z = a$ є істотно особливою точкою функції $\varphi(z)$ \triangleright

Теорема Сохоцького – Вейерштрасса (про істотно особливу точку). Довільна аналітична функція в околі ізольованої істотно особливої точки однозначного характеру може набувати значень, як завгодно близьких до будь-якого наперед заданого значення з розширеної комплексної площини.

Інакше кажучи, яким би не було число $A \in \bar{\mathbb{C}}$, існує послідовність точок $\{z_k\} \rightarrow a$ така, що $\lim_{z_k \rightarrow a} f(z_k) = A$.

\triangleleft 1. Нехай $A = \infty$. Припустимо, що не існує такої послідовності $\{z_k\} \rightarrow a$, що $f(z_k) \rightarrow A$ при $z_k \rightarrow a$, тобто $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k)$ є скінченною величиною. А це означає, що точка $Z = a$ є усувною для $f(z)$. Отримали протиріччя.

2. Нехай $A \neq \infty$. Розглянемо функцію $\varphi(z) = f(z) - A$. Якщо в околі точки $Z = a$ функція $\varphi(z)$ перетворюється на нуль нескінченну кількість разів, то твердження теореми вірне. Якщо ж ні, то скористаємося теоремою про інваріантність істотно особливої точки відносно дробово-лінійного відображення $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$.

За цією теоремою точка $Z = a$ – істотно особлива, а отже, за щойно доведеним пунктом 1 цієї теореми існує послідовність $\{z_n\} \rightarrow a$ така, що $\varphi(z_n) \rightarrow \infty$ при $z_n \rightarrow a$, тобто $\varphi(z_n) = \frac{1}{f(z_n) - A} \rightarrow \infty$ при $z_n \rightarrow a$, а отже, $f(z_n) \rightarrow A$ \triangleright

Уточненням теореми Сохоцького – Вейерштрасса є теорема Пікара, яку ми наведемо без доведення.

Теорема Пікара. Довільна однозначна функція в околі істотно особливої точки може набувати нескінченну кількість разів нескінченної кількості значень, за винятком, можливо, одного.

Наступний приклад ілюструє теорему Сохоцького – Вейерштрасса.

Нехай маємо функцію $f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$, ряд Лорана якої збіга-

ється в кільці $K = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$, точка $z = 0$ – істотно особлива точка функції f . Перевіряємо твердження теореми Сохоцького для довільного комплексного $A \neq \infty$ та $A \neq 0$.

Розв'яжемо рівняння $e^z = A$ відносно z . Оскільки $\frac{1}{z} = \text{Ln } A$, то

$$z = \frac{1}{\text{Ln } A} = \frac{1}{\ln|A| + i \text{Arg } A} = \frac{1}{\ln|A| + i(\arg A + 2n\pi)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Візьмемо послідовність точок

$$z_n = \frac{1}{\ln|A| + i(\arg A + 2n\pi)}.$$

Очевидно, що для всіх точок z_n ($z_n \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$), $e^{z_n} = A$,

отже, існує така послідовність, що $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{z_n} = A$. Очевидно також, що

$$\lim_{\substack{z=x>0 \\ x \rightarrow 0}} e^z = \infty, \quad \lim_{\substack{z=x<0 \\ x \rightarrow 0}} e^z = 0.$$

Характерним у цьому прикладі є те, що за винятком значень 0 та ∞ , усі інші значення A досягаються не як границя послідовності, а на цілій послідовності точок. Виявляється, що це не випадковість, а загальна тенденція. Про це й свідчить теорема Пікара.

6.9. Класи простих аналітичних функцій

Залежно від типу ізольованих особливих точок однозначного характеру дамо означення простих класів аналітичних функцій.

6.9.1. Цілі аналітичні функції

Означення. Аналітична функція, яка не має особливих точок у скінченній частині комплексної площини, називається *цілою аналітичною*.

Якщо при цьому точка $Z = \infty$ є полюсом функції, то функція називається *цілою раціональною*.

Ціла функція, яка на нескінченності має істотно особливу точку, називається *цілою трансцендентною*.

Ціла функція, яка на нескінченності має усувну точку, за теоремою Ліувілля є тотожною сталою.

Очевидно, що довільний багаточлен є цілою раціональною функцією.

Теорема. Довільна ціла раціональна функція є багаточленом.

◁ Нехай $f(z)$ – ціла раціональна функція, яка має в точці $Z = \infty$ полюс порядку n . Тоді її можна розвинути в ряд

$$f(z) = c_{-n}z^n + c_{-n+1}z^{n-1} + \dots + c_{-1}z^1 + c_0 + c_1z^{-1} + \dots + c_nz^{-n} + \dots$$

Побудуємо багаточлен

$$P_n(z) = c_{-n}z^n + c_{-n+1}z^{n-1} + \dots + c_{-1}z + c_0$$

і розглянемо функцію $\varphi(z) = f(z) - P_n(z)$. Вона аналітична в скінченній частині комплексної площини, а точка $Z = \infty$ є усувною для $\varphi(z)$, тобто при підході до нескінченності $\varphi(z)$ обмежена. За теоремою Ліувілля $\varphi(z) \equiv c = \text{const}$. Отже, $f(z) = P_n(z) + c$ ▷

6.9.2. Мероморфні функції

Означення. Довільна аналітична функція, яка не має особливих точок у скінченній частині комплексної площини, за винятком скінченної кількості полюсів, називається *мероморфною*.

Якщо ж мероморфна функція на нескінченності має полюс, то її називають *раціональною мероморфною*.

Теорема. Раціональна мероморфна функція є відношенням двох багаточленів.

◁ Нехай функція $f(z)$ є раціональною мероморфною. Тоді вона не може мати інших особливих точок, крім полюсів, наприклад у точках $z = a_k$, ($k = 1, 2, \dots, n$) вона має полюси порядку n_k . В околі кожного полюса функцію можна подати у вигляді ряду Лорана

$$f(z) = \frac{c_{-n}^k}{(z - a_k)^{n_k}} + \frac{c_{-n+1}^k}{(z - a_k)^{n_k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}^k}{(z - a_k)} + \text{правильна частина.}$$

Розглянемо функцію $\varphi(z) = f(z) - \sum_{k=1}^n \left[\frac{c_{-n}^k}{(z - a_k)^{n_k}} + \dots + \frac{c_{-1}^k}{z - a_k} \right]$. Очеви-

дно, що функція $\varphi(z)$ аналітична в скінченній частині площини, оскільки всі полюси усунено, і вона містить тільки правильну частину $f(z)$. Отже, за теоремою Ліувілля $\varphi(z) \equiv \text{const}$, а

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{c_{-n}^k}{(z-a_k)^{n_k}} + \dots + \frac{c_{-1}^k}{z-a_k} \right] + c$$

є відношенням двох багаточленів.

Якщо ж точка $z = \infty$ є полюсом порядку p для $\varphi(z)$, то

$$\varphi(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_p z^p$$

і

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_p z^p + \sum_{k=1}^n \left[\frac{c_{-n}^k}{(z-a_k)^{n_k}} + \dots + \frac{c_{-1}^k}{z-a_k} \right],$$

а це теж відношення двох багаточленів \triangleright

6.10. Приклади дослідження функцій за допомогою рядів Лорана

1. Визначити характер особливої точки $z = 1$ таких функцій:

а) $\frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 5z + 4}$; б) $\frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 2z + 1}$; в) $(z-1) e^{\frac{1}{z-1}}$.

а) Оскільки $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 5z + 4} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-2}{z-4} = \frac{1}{3}$, то $z = 1$ – усувна особлива точка для функції.

б) У досить малому проколотому околі точки $z = 1$

$$\frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 2z + 1} = \frac{(z-1)(z-2)}{(z-1)^2} = \frac{z-2}{z-1},$$

тому $z = 1$ – полюс заданої функції.

в) Розвинення даної функції в ряд Лорана в околі точки $z = 1$ має вигляд

$$\begin{aligned} (z-1) e^{\frac{1}{z-1}} &= (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! (z-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! (z-1)^{n-1}} = \\ &= 1 + z - 1 + \frac{1}{2! (z-1)} + \dots + \frac{1}{n! (z-1)^{n-1}} + \dots \end{aligned}$$

Головна частина ряду Лорана містить нескінченну множину членів,

тому $z = 1$ – істотно особлива точка функції \triangleright

2. Визначити характер точки $Z = \infty$ для таких функцій:

а) $\frac{z^2 + 2}{z^{10} + 2}$; б) $z^4 \cos \frac{1}{z}$; в) $z^2 e^{-2z}$.

\triangleleft Покладемо $z = \frac{1}{\zeta}$, тоді:

а) $\frac{z^2 + 2}{z^{10} + 2} = \frac{\zeta^8(1 + 2\zeta^2)}{1 + 2\zeta^{10}}$. Точка $\zeta = 0$ є нулем восьмого порядку функції

$\frac{\zeta^8(1 + 2\zeta^2)}{1 + 2\zeta^{10}}$, отже, точка $Z = \infty$ – нуль восьмого порядку заданої функції.

б) $z^4 \cos \frac{1}{z} = \frac{\cos \zeta}{\zeta^4}$. Точка $\zeta = 0$ – полюс четвертого порядку функції

$\frac{\cos \zeta}{\zeta^4}$, тому точка $Z = \infty$ є полюсом четвертого порядку для початкової

функції.

в) Розвиваючи задану функцію в степеневий ряд, одержимо

$$z^2 e^{-2z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{z^{n+2}}{n!}.$$

Отже, $Z = \infty$ – істотно особлива точка функції $f(z) = z^2 e^{-2z}$ \triangleright

3. Знайти особливі точки функції $f(z) = \sin \frac{1}{\cos \frac{1}{z}}$, установити їхній

характер і дослідити поведінку функції f на нескінченності.

\triangleleft Для функції $\varphi(\xi) = \sin \xi$ точка $\zeta = \infty$ у $\bar{\mathbb{C}}$ є єдиною істотно особливою. Отже, усі особливі точки функції f визначаються з рівності $\cos \frac{1}{z} = 0$. Це означає, що функція f має нескінченну множину істотно

особливих точок $\left\{ z_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}; \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$. Точка $z = 0$ – гранична для

зазначеної множини. Оскільки $\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} f(z) = \sin 1$, то $Z = \infty$ – ізольована особлива точка функції f \triangleright

4. Розвинути функцію $f(z) = \frac{1}{z(z-3)^2}$ у ряд Лорана в кільці

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-1| < 2\}.$$

◁ Функцію f можна розкласти на прості дроби

$$\frac{1}{z(z-3)^2} = \frac{1}{9z} - \frac{1}{9(z-3)} + \frac{1}{3(z-3)^2}.$$

Після нескладних перетворень у правій частині рівності кожен дріб запишемо у вигляді суми нескінченно спадних прогресій, а саме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{(z-1)\left(1+\frac{1}{z-1}\right)} = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-n-1} = \sum_{n=0}^{-\infty} (-1)^{n-1} (z-1)^n, \text{ при } |z-1| > 1, \\ \frac{1}{z-3} &= \frac{1}{(z-1)-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (z-1)^n = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}, \text{ при } |z-1| < 2, \end{aligned}$$

Оскільки спадна геометрична прогресія є рівномірно збіжним рядом, то її можна почленно диференціювати в крузі збіжності ряду

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-3)^2} &= -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-3} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} (z-1)^{n-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} (z-1)^n, \text{ при } |z-1| < 2. \end{aligned}$$

Тому, врахувавши радіуси збіжності кожного з рядів, маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-3)^2} &= \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{9} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9 \cdot 2^{n+1}} + 3 \frac{n+1}{9 \cdot 2^{n+2}} \right) (z-1)^n = \\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{9} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+5}{9 \cdot 2^{n+2}} (z-1)^n \quad \forall z \in K \triangleright \end{aligned}$$

5. Побудувати розвинення функції $f(z) = z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z}$ у ряд Лорана в кільці $K = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$.

◁ Очевидно

$$z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z} = z^2 \sin \pi \left(1 + \frac{1}{z}\right) = -z^2 \sin \frac{\pi}{z} =$$

$$= -z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{z}\right)^{2n+1} = -\pi z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{-2n+1} \triangleright$$

6. Знайти множину точок z , у яких ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$ збігається.

◁ Подамо функцію у вигляді двох рядів:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{-n} + 1} \cdot \frac{1}{z^n} = f_1(z) + f_2(z).$$

Очевидно, перший ряд збігається в крузі $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$,

де

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{3^n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 1} = 3.$$

Другий ряд збігається в області, яка лежить зовні кола радіусом r

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{3^{-n} + 1}} = 1.$$

Отже, початковий ряд збігається на перетині цих областей, тобто в кільці $1 < |z| < 3$ ▷

7. Довести, що функція $\operatorname{ch} z$ в околі нескінченності набуває усіх значень із \mathbb{C} .

◁ Нехай $A \in \mathbb{C}$. Розв'яжемо рівняння $\operatorname{ch} z = A$:

$$e^z = A + \sqrt{A^2 - 1} \neq 0, \quad z = \operatorname{Ln} \left(A + \sqrt{A^2 - 1} \right).$$

Нехай $z_{nk} = \ln \left| A + \sqrt{A^2 - 1} \right| + in \left(\arg \left(A + \sqrt{A^2 - 1} \right) + 2k\pi \right), \forall k, n \in \mathbb{Z}$.

Звідси випливає, що при $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, $\operatorname{ch} z_n = A$ ▷

ТЕМА VII. ТЕОРІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ЛИШКІВ

Однією із задач, що спонукали математиків до розробки теорії аналітичних функцій як окремої гілки аналізу, була задача про обчислення інтеграла по замкненому контуру від функцій, голоморфних усюди всередині цього контуру, за винятком скінченної кількості полюсів.

На прикладі цієї задачі повною мірою було виявлено переваги, одержані від уведення голоморфних функцій, за допомогою яких громіздкі обчислення інтегралів уздовж контуру довільної (часом дуже складної) форми зводяться до обчислення інтегральних лишків.

Цю тему присвячено основним поняттям і теоремам теорії лишків та її найважливішим застосуванням.

7.1. Інтегральні лишки відносно ізольованих особливих точок однозначного характеру

Нехай функція $f(z)$ аналітична в околі точки $Z = a$. Тоді за теоремою Коші $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$. Тут шлях інтегрування γ є довільним, замкненим

гладким контуром, який містить точку $Z = a$ та настільки малий, що функція $f(z)$ залишається аналітичною як усередині контуру, так і на ньому. Якщо точка $Z = a$ є ізольованою особливою точкою, а контур γ замкнений і містить усередині тільки цю особливу точку, то значення розглянутого інтеграла в загальному випадку не буде рівним нулю. Це значення не залежить від форми контуру γ і його можна легко обчислити. Дійсно, ураховуючи те, що для довільного замкненого контуру γ , який містить усередині точку $Z = a$,

$$\int_{\gamma} (z - a)^n dz = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ крім } n \neq -1, \text{ а } \int_{\gamma} (z - a)^{-1} dz = 2\pi i,$$

обчислимо інтеграл по цьому контуру від розвинення аналітичної функції в ряд Лорана: $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k$. Очевидно, що

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} c_k (z - a)^k dz = c_{-1}.$$

Означення. Інтегральним лишком аналітичної функції $f(z)$ в околі

ізолюваної особливої точки однозначного характеру називається значення інтегралу від функції $f(z)$, взятого по достатньо малому кругу $\gamma = \{z : |z - a| < r\}$ з центром у ізолюваній особливій точці $z = a$ $f(z)$, поділене на $2\pi i$, або, як ми бачили це є коефіцієнт c_{-1} у розвиненні функції $f(z)$ в околі цієї точки в ряд Лорана. Позначають інтегральний лишок

$$c_{-1} = \operatorname{Res}_{z=a} f(z) \text{ або } \operatorname{Res}_a f(z).$$

Позначення походить від французького слова *residu*.

За теоремою про зміну інтегралу при гомотопній деформації контуру γ лишок не залежить від величини r і визначається локальною поведінкою $f(z)$ в околі особливої точки.

Безпосередньо з означення випливає, що інтегральний лишок може бути відмінним від нуля тільки в тому випадку, коли $z = a$ є полюсом або істотно особливою точкою. Якщо ж вона усувна, то її розвинення у ряд Лорана не має коефіцієнтів з від'ємними номерами.

Основна теорема про інтегральні лишки. Нехай $f(z)$ є однозначною аналітичною функцією в замкненій області $D \cup \gamma$, за винятком скінченної кількості ізолюваних особливих точок однозначного характеру a_1, a_2, \dots, a_n , які лежать строго всередині області D (рис. 7.1). Тоді значення інтеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$ дорівнює сумі інтегральних лишків функції $f(z)$ відносно усіх ізолюваних особливих точок, розміщених усередині контуру γ . Має місце рівність

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z).$$

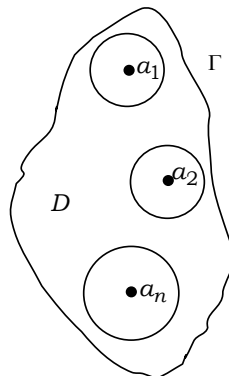


Рис. 7.1

◁ Побудуємо навколо кожної точки $|z| = a_k$ ($k = \overline{1, n}$) кола γ_k настільки малі, що кожне з них охоплює тільки одну точку. Вони не перетинаються й лежать усередині області D (рис. 7.1). З області D вилучимо круги, обмежені цими колами. В одержаній багатозв'язній області функція $f(z)$ буде аналітичною. Вона буде аналітичною й на всіх складових границі такої багатозв'язної області. Тому можна використати формулу Коші для складного контуру:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

Підрахуємо інтеграл $\int_{\gamma_k} f(z) dz$. Очевидно, що всередині контуру γ_k

функція $f(z)$ розвивається в ряд Лорана. Він абсолютно й рівномірно збіжний, тому його можна почленно інтегрувати:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a_k)^n dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\gamma_k} c_n (z - a_k)^n dz. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_{\gamma_k} c_n (z - a_k)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq -1, \\ 2\pi i c_{-1} & \text{при } n = -1, \end{cases}$$

то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(z) dz = c_{-1} = \operatorname{Res}_{z=a_k} f(z).$$

Рівність вірна $\forall k = \overline{1, n}$, отже, твердження теореми вірне ▷

Цю теорему називають ще одним узагальненням теореми Коші. Вона дозволяє в багатьох випадках суттєво спростувати підрахунок значень складних інтегралів.

7.1.1. Формули для обчислення інтегральних лишків

Для ефективного застосування основної теореми про інтегральні лишки ми повинні вміти знаходити їх значення для всіх типів ізольованих особливих точок, розташованих усередині замкненого контуру. Ва-

жливо знайти простий метод обчислення лишків, не розвиваючи функцію в ряд Лорана. Це можна зробити, якщо особлива точка є полюсом. Розглянемо можливі випадки.

1. Нехай точка $Z = a$ є простим полюсом функції $f(z)$. Тоді її розв'язання в ряд Лорана має вигляд

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

Помножимо обидві частини рівності на $(z-a)$ і перейдемо до границі при $Z \rightarrow a$. Одержимо формулу

$$\operatorname{Res} f(z) = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (f(z)(z-a)). \quad (7.1)$$

Якщо функцію $f(z)$ можна записати у вигляді $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, то після множення $f(z)$ на $(z-a)$ і переходу до границі при $Z \rightarrow a$ отримуємо формулу

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z) = c_{-1} &= \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-a) = \\ &= \varphi(a) \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

2. Якщо точка $Z = a$ є полюсом порядку p для функції $f(z)$, то

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \frac{c_{-p+1}}{(z-a)^{p-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

Помножимо обидві частини ряду на $(z-a)^p$. Оскільки ряд Лорана рівномірно збіжний, то його можна диференціювати $p-1$ разів і перейти потім до границі при $Z \rightarrow a$:

$$\begin{aligned} &\lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} [f(z)(z-a)^p] = \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} [c_{-p} + c_{-p+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{p-1} + \\ &\quad + c_0(z-a)^p + \dots] = (p-1)!c_{-1}. \end{aligned}$$

Звідси для обчислення інтегрального лишку в точці $Z = a$, яка є полюсом порядку p , отримуємо формулу

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left[f(z)(z-a)^p \right]. \quad (7.3)$$

Формули (7.1)–(7.3) дозволяють обчислювати інтегральні лишки для полюсів.

Для істотно особливої точки побудувати аналогічну формулу неможливо. Тому інтегральний лишок в істотно особливій точці здебільшого обчислюється як коефіцієнт c_{-1} при безпосередньому розвиненні функції $f(z)$ у ряд Лорана.

7.1.2. Обчислення інтегрального лишку відносно нескінченно віддаленої точки

Нехай функція $f(z)$ аналітична в околі ізольованої особливої точки $Z = \infty$, тобто існує таке число $R > 0$, що в області $|z| > R$ функція $f(z)$ не має інших особливих точок, крім точки $Z = \infty$.

Під інтегральним лишком відносно точки $Z = \infty$ природно розуміти

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\gamma}_R} f(z) dz, \quad (7.4)$$

де $\bar{\gamma}_R = \{z : |z| = R\}$ – коло з настільки великим радіусом, що в області $|z| > R$ знаходиться тільки одна особлива точка $Z = \infty$, а обхід кола здійснюється в напрямку руху годинникової стрілки.

Запишемо розвинення функції $f(z)$ у ряд Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ і проінтегруємо його вздовж контуру $\bar{\gamma}_R$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\gamma}_R} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{2\pi i} \int_{\bar{\gamma}_R} z^n dz = -c_{-1}.$$

У випадку усувної точки, що лежить у скінченній частині площини, її лишок завжди дорівнює нулю. Проте, якщо точка $Z = \infty$ є усувною або навіть має простий нуль, то її лишок може не дорівнювати нулю.

Дійсно, для функцій $f_1(z) = 1 + \frac{2}{z}$ і $f_2(z) = -\frac{4}{z} + \frac{6}{z^2}$ за означенням точка $Z = \infty$ є усувною для $f_1(z)$, а для $f_2(z)$ – простим нулем, оскільки $\lim_{z \rightarrow \infty} f_1(z) = 1$, а $\lim_{z \rightarrow \infty} f_2(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \left(-4 + \frac{6}{z} \right) = 0$, але інтегральні лишки цих функцій дорівнюють -2 та 4 відповідно.

Інтегральний лишок функції $f(z)$, обмеженої за модулем в околі нескінченно віддаленої точки, дорівнює нулю, якщо в цій точці функція має нуль кратністю не менше двох.

Теорема (про суму інтегральних лишків функції в $\overline{\mathbb{C}}$). Якщо функція $f(z)$ однозначна та аналітична в усій комплексній площині за винятком скінченної кількості особливих точок a_k , ($k = \overline{1, n}$), то сума інтегральних лишків цієї функції відносно всіх особливих точок a_k разом з точкою $Z = \infty$ дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z)_{a_k} + \operatorname{Res} f(z)_{z=\infty} = 0.$$

◁ Побудуємо коло $\gamma_R = \{z : |z| = R\}$, вибравши R так, щоб усі особливі точки a_k лежали всередині круга $|z| < R$. Тоді

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z)_{a_k}.$$

Однак за означенням $\operatorname{Res} f(z)_{z=\infty} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\gamma}_R} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z) dz$.

Отже,

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z)_{a_k} + \operatorname{Res} f(z)_{z=\infty} = 0 \quad \triangleright$$

Цю теорему доцільно використовувати при обчисленні інтегралів у випадку, коли всередині деякого контуру γ міститься достатньо велика кількість особливих точок a_k , ($k = \overline{1, n}$), а зовні кількість особливих точок b_k , ($k = \overline{1, m}$) значно менша $n \gg m$. Тоді для обчислення інтеграла $\int_{\gamma} f(z) dz$ використовують формулу

$$\int_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \left[\sum_{k=1}^m \operatorname{Res} f(z)_{b_k} + \operatorname{Res} f(z)_{z=\infty} \right].$$

7.2. Теорема про логарифмічний лишок

7.2.1. Обчислення інтеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$

Інтеграл такого типу має широке застосування в теорії лишків, тому його дослідженню присвяtimo таку теорему.

Теорема. Нехай в області D , обмеженій замкненим кусково-гладким контуром γ , функція $f(z)$ аналітична за винятком скінченної кількості полюсів, розташованих усередині контуру. Нехай також $f(z)$ не має нулів на контурі γ . Позначимо через a_1, a_2, \dots, a_n нулі функції $f(z)$, що лежать в області D , через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – порядки кожного з них, а через b_1, b_2, \dots, b_m – полюси цієї функції, порядки яких відповідно дорівнюють $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ ($b_k \in D, (k = \overline{1, m})$). Тоді для довільної аналітичної в D і на γ функції $\varphi(z)$ справджується формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi(a_j) - \sum_{j=1}^m \beta_j \varphi(b_j). \quad (7.5)$$

Отже, значення такого інтеграла дорівнює різниці між сумою значень функції $\varphi(z)$ у всіх точках, де $f(z)$ дорівнює нулю, і сумою значень $\varphi(z)$ у тих точках, де функція $f(z)$ має полюси. Тут кожен нуль та полюс рахується стільки разів, яку він має кратність чи порядок.

◀ Застосуємо до розглянутого інтеграла основну теорему про лишки.

Особливими точками функції $F(z) = \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$ у $D \cup \gamma$ є нулі a_1, a_2, \dots, a_n та полюси b_1, b_2, \dots, b_m .

Розглянемо спочатку одну довільну точку a_j . Розвинемо функцію $F(z)$ у ряд Лорана в її околі. У цьому околі функції $f(z)$ та $f'(z)$ мають розвинення в ряди Тейлора:

$$\begin{aligned} f(z) &= A_0^j (z - a_j)^{\alpha_j} + A_1^j (z - a_j)^{\alpha_j + 1} + \dots = \\ &= (z - a_j)^{\alpha_j} (A_0^j + A_1^j (z - a_j) + \dots), \quad A_0^j \neq 0; \\ f'(z) &= A_0^j \alpha_j (z - a_j)^{\alpha_j - 1} + A_1^j (\alpha_j + 1) (z - a_j)^{\alpha_j} + \dots = \\ &= (z - a_j)^{\alpha_j - 1} (\alpha_j A_0^j + A_1^j (\alpha_j + 1) (z - a_j) + \dots). \end{aligned}$$

З аналітичності функції $\varphi(z)$ випливає, що

$$\varphi(z) = \varphi(a_j) + \varphi'(a_j)(z - a_j) + \dots$$

Отже, в околі точки $z = a_j$ для функції $F(z)$ має місце рівність

$$\begin{aligned} F(z) &= (\varphi(a_j) + \varphi'(a_j)(z - a_j) + \dots) \times \\ &\quad \times \frac{(z - a_j)^{\alpha_j - 1} (\alpha_j A_0^j + A_1^j (\alpha_j + 1)(z - a_j) + \dots)}{(z - a_j)^{\alpha_j} (A_0^j + A_1^j (z - a_j) + \dots)} = \\ &= \frac{1}{(z - a_j)} \frac{(\varphi(a_j) + \varphi'(a_j)(z - a_j) + \dots) (\alpha_j A_0^j + A_1^j (\alpha_j + 1)(z - a_j) + \dots)}{(A_0^j + A_1^j (z - a_j) + \dots)} = \\ &= \frac{\alpha_j}{(z - a_j)} \varphi(a_j) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - a_j)^k. \end{aligned}$$

Якщо в точці $z = a_j$ $\varphi(a_j) \neq 0$, то функція $F(z)$ має в ній простий полюс з лишком, рівним $\operatorname{Res} F(z) = \alpha_j \varphi(a_j)$.

Коли ж точка $z = a_j$ є нулем функції $\varphi(a_j) = 0$, то функція $F(z)$ аналітична в цій точці, а її лишок дорівнює нулю.

Знайдемо лишок відносно полюса $z = b_j$. Запишемо відповідні розвинення функцій:

$$\begin{aligned} f(z) &= B_0^j (z - b_j)^{-\beta_j} + B_1^j (z - b_j)^{-\beta_j + 1} + \dots, \\ f'(z) &= -\beta_j B_0^j (z - b_j)^{-\beta_j - 1} + (-\beta_j + 1) B_1^j (z - b_j)^{-\beta_j} + \dots, \text{ при } B_0^j \neq 0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що в околі полюса $z = b_j$

$$\begin{aligned} F(z) &= (\varphi(b_j) + \varphi'(b_j)(z - b_j) + \dots) \times \\ &\quad \times \frac{-\beta_j B_0^j (z - b_j)^{-\beta_j - 1} + (-\beta_j + 1) B_1^j (z - b_j)^{-\beta_j} + \dots}{B_0^j (z - b_j)^{-\beta_j} + B_1^j (z - b_j)^{-\beta_j + 1} + \dots}. \end{aligned}$$

Після множення чисельника та знаменника дробу на $(z - b_j)^{\beta_j + 1}$ одержуємо

$$F(z) = \frac{(\varphi(b_j) + \varphi'(b_j)(z - b_j) + \dots) [-\beta_j B_0^j + (-\beta_j + 1) B_1^j (z - b_j) + \dots]}{B_0^j (z - b_j) + B_1^j (z - b_j)^2 + \dots} =$$

$$= \frac{-\beta_j \varphi(b_j)}{z - b_j} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - b_j)^k.$$

При $\varphi(b_j) \neq 0$ $\operatorname{Res} F(z) = -\beta_j \varphi(b_j)$,
 $z=b_j$

У випадку, коли $\varphi(b_j) = 0$, $\operatorname{Res} F(z) = 0$,
 $z=b_j$

Після підсумовування лишків за всіма особливими точками області, приходимо до твердження теореми \triangleright

7.2.2. Теорема про логарифмічний лишок. Принцип аргументу

Розглянемо частинний випадок формули (7.5), коли $\varphi(z) \equiv 1$. Для нього вірною буде теорема про логарифмічний лишок.

Теорема. Нехай $f(z)$ – аналітична функція в замкненій області $D \cup L$, за винятком скінченної кількості полюсів, які лежать усередині області D і $f(z) \neq 0$ на контурі L . Тоді

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

де N – кількість нулів функції $f(z)$, які лежать усередині області D , а P – кількість полюсів $f(z)$. Кількість підрахунків кожного нуля дорівнює його кратності, а полюса – його порядку.

Ліва частина рівності називається *логарифмічним лишком функції* $f(z)$.

\triangleleft Доведення теореми впливає безпосередньо з попередньої. Однак ми наведемо інше доведення, яке пояснює назву теореми. Розглянемо функцію $F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Особливими точками $F(z)$ будуть нулі або полюси

функції $f(z)$. Нехай у точках $z = a_k$, ($k = \overline{1, n}$) розміщено нулі $f(z)$ кратністю α_k , а в точках $z = b_k$, ($k = \overline{1, m}$) – полюси $f(z)$ порядку β_k . В околі точки $z = a_k$ функцію $f(z)$ можна розвинути в степеневий ряд

$$f(z) = (z - a_k)^{\alpha_k} [c_0 + c_1(z - a_k) + \dots], \quad c_0 \neq 0.$$

Запишемо розвинення функції

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = [\ln f(z)]' = [\alpha_k \ln(z - a_k) + \ln(c_0' + c_1'(z - a_k) + \dots)]' =$$

$$= \frac{\alpha_k}{z - a_k} + \text{правильна частина}.$$

Тут точка $z = a_k$ є простим полюсом функції $F(z)$.

Оскільки в околі особливої точки $z = b_k$ маємо полюс порядку β_k функції $f(z)$, то в околі цієї точки

$$f(z) = \frac{1}{(z - b_k)^{\beta_k}} [d_0 + d_1(z - b_k) + d_2(z - b_k)^2 + \dots], \quad d_0 \neq 0.$$

Отже,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = [\ln f(z)]' = -\frac{\beta_k}{z - b_k} + \text{правильна частина}.$$

Використовуючи основну теорему про інтегральні лишки, одержимо $\frac{1}{2\pi i} \int_L F(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a_k, b_k} \text{Res } F(z) = \sum_{k=1}^n \alpha_k - \sum_{k=1}^m \beta_k = N - P$ ▷

Нехай a – довільне комплексне число, $f(z)$ аналітична як усередині замкненого контуру γ , так і на ньому, за винятком скінченної кількості полюсів, які лежать усередині γ , а на самому контурі γ функція не набуває значень, рівних a .

Наслідок. З теореми про логарифмічний лишок випливає, що інтеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z) - a} = N - P$ дорівнює різниці між кількістю коренів N рівняння $f(z) = a$, розміщених усередині контуру γ , і кількістю полюсів P функції $f(z)$, які також лежать усередині контуру (з урахуванням їх кратності та порядку).

З'ясуємо зміст логарифмічного лишку. Для цього перепишемо інтеграл від логарифмічної похідної $f'(z)$ у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d[\text{Ln} f(z)] = \frac{1}{2\pi i} [\text{Ln} f(z)]_{\gamma} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} [\text{Ln} |f(z)|]_{\gamma} + \frac{1}{2\pi i} [\text{Arg} f(z)]_{\gamma}. \end{aligned}$$

Зафіксуємо на контурі інтегрування деяку точку z_0 як початкову. Очевидно, що приріст $\frac{1}{2\pi i} [\text{Ln} |f(z)|]_{\gamma} = 0$. Однак значення $\text{Arg} f(z)$ при повному обході вздовж контуру γ у додатному напрямку може одержати ненульовий приріст. Значення функції $w = f(z)$ зобразимо точками на комплексній площині w . Оскільки $f(z)$ неперервна в області $D \cup L$, то при довільному обході точкою Z контуру γ відповідна їй точка

у площині W опише деякий замкнений контур Γ . При цьому точка $w = 0$ знаходиться всередині або ззовні контуру Γ . У першому випадку приріст аргументу W при довільному обході визначається числом повних обходів навколо точки $w = 0$, які робить точка W при своєму русі вдовж контуру Γ , що відповідає руху точки Z вздовж γ . Зауважимо, що напрямок обходу точки $w = 0$ вдовж Γ може бути як за рухом годинникової стрілки (додатній) так і проти. Отже різниця $N - P$ в області D , обмеженій кривою γ визначається числом обходів точкою $w = f(z)$ навколо точки $w = 0$.

Позначимо початкове значення $\text{Arg}f(z_0) = \varphi_1$, а значення аргументу функції після обходу – через φ_2 ($\varphi_1 = 2\pi k_1, \varphi_2 = 2\pi k_2, k_1 k_2 \in \mathbb{N}$). Отже,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \{ \ln|f(z_0)| + i\varphi_2 - \ln|f(z_0)| - i\varphi_1 \} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi}.$$

Звідси можна зробити такий висновок.

Наслідок. Різниця між кількістю нулів і полюсів функції $f(z)$, розташованих усередині замкненого контуру γ , з урахуванням їх кратності та порядку дорівнює приросту $\text{Arg}f(z)$, поділеному на 2π , при обході контуру в додатному напрямку.

Результат наслідку називається *принципом аргументу*. Зокрема, якщо $f(z)$ аналітична в D , то кількість її нулів, розташованих всередині γ рівна

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} [\arg f(z)]_\gamma = N. \quad (7.6)$$

7.3. Застосування теореми про логарифмічний лишок

З теореми про логарифмічний лишок випливають два важливих як у теоретичному, так і в практичному застосуванні наслідки.

Теорема Руше. Нехай функції $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ аналітичні в замкненій області $D \cup \gamma$, $\varphi(z) \neq 0$ у жодній точці контуру γ , і на цьому контурі $|\varphi(z)| > |\psi(z)|$. Тоді кількість нулів функцій $\varphi(z)$ та $\varphi(z) + \psi(z)$, розташованих усередині області D , однакова.

◁ Кількість нулів функції $\varphi(z) + \psi(z)$ за попередньою теоремою (принципом аргументу аналітичної функції) визначається рівністю

$$N = \frac{1}{2\pi} [\arg(\varphi(z) + \psi(z))] \Big|_{\gamma} = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \left(\varphi(z) \left(1 + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} \right) \right) \right] \Big|_{\gamma} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} [\arg \varphi(z)] \Big|_{\gamma} + \frac{1}{2\pi} \left[\arg \left(1 + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} \right) \right] \Big|_{\gamma}.$$

Розглянемо функцію $w = 1 + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$. Якщо точка z пробігає контур γ , то точка $w = u + iv$ пробігає деякий контур L (рис. 7.2). Урахуємо, що $\left| \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} \right| < 1$, а отже, $\operatorname{Re} \left(1 + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} \right) > 0$. Це означає, що контур L не охоплює точки $w = 0$, тому функція w не одержує приросту при обході точкою z уздовж замкненої кривої γ : $\left[\arg \left(1 + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} \right) \right] \Big|_{\gamma} = 0$, тобто

$$N = \frac{1}{2\pi} [\arg \varphi(z)] \Big|_{\gamma} \triangleright$$

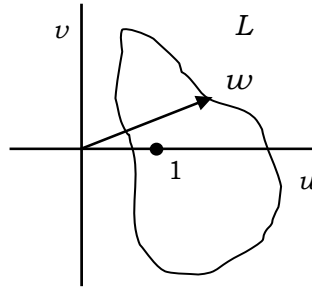


Рис. 7.2

Іншим прикладом використання теорії лишків є *основна теорема алгебри*.

Теорема. Довільний багаточлен степеня n

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

у комплексній площині має рівно n коренів.

◁ Алгебраїчне доведення цієї теореми достатньо складне. За допомогою теореми Руше вона доводиться просто.

Покладемо $\varphi(z) = a_0 z^n$, $\psi(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$. Знайдеться таке число $R > 0$, що на колі $\gamma = \{z : |z| = R\}$ буде виконуватись нерівність $|\varphi(z)|_\gamma > |\psi(z)|_\gamma$, $|\varphi(z)|_\gamma \neq 0$. Отже, кількість нулів функцій $\varphi(z) = a_0 z^n$ та $\varphi(z) + \psi(z) = P_n(z)$ усередині кола однакова й дорівнює n ▷

Користуючись теоремою Руше, у багатьох випадках можна просто визначити кількість нулів у заданій області.

Щоб знайти кількість нулів багаточлена $P(z) = \frac{1}{2}z^3 + z + \frac{1}{4}$, які лежать усередині одиничного кола, покладемо $\psi(z) = \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{4}$, а $\varphi(z) = z$. Оскільки на одиничному колі $|\varphi(z)| = 1$, а $|\psi(z)| \leq \frac{3}{4}$, то, за теоремою Руше, в одиничному колі лежить один нуль $P(z)$.

Знайдемо тепер кількість коренів рівняння $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$, які за модулем менше одиниці. Покладемо $\psi(z) = z^8 + z^2 - 1$, а $\varphi(z) = -4z^5$. Оскільки $|z| < 1$, то на колі $|z| = 1$ маємо $|\varphi(z)| = 4$ і $|\psi(z)| \leq 3$. За теоремою Руше кількість таких коренів дорівнює кількості нулів функції $\varphi(z) = -4z^5$ усередині одиничного круга, а саме 5.

Важливим узагальненням теореми Руше є така відома теорема.

Теорема Гурвиця. Якщо послідовність аналітичних в області D функцій $\{f_n(z)\}$ рівномірно збіжна всередині цієї області до деякої функції $f(z) \not\equiv 0$, то для довільної замкненої кривої γ , яка належить області D разом з точками, що лежать усередині неї, і γ не проходить через нулі функції $f(z)$, можна вказати таке число $\mu = \mu(\gamma)$, що при $n > \mu(\gamma)$ кожна з функцій $f_n(z)$ матиме всередині γ одну й ту саму кількість нулів, рівну кількості нулів функції $f(z)$, що лежать усередині області, обмеженої γ .

◁ Позначимо $\nu = \min|f(z)|$ у точках кривої γ . За умовою теореми

$\nu > 0$. Виходячи з рівномірної збіжності послідовності $\{f_n(z)\}$, на γ можна вказати таке значення $\mu(\gamma)$, що $\forall n > \mu(\gamma)$ у всіх точках кривої γ буде виконуватися нерівність $|f_n(z) - f(z)| < \nu \leq |f(z)|$. Звідси, за теоремою Руше, випливає, що функції $f(z)$ та $f(z) + f_n(z) - f(z) = f_n(z)$, ($n > \mu(\gamma)$) усередині області, обмеженої кривою γ , мають одну й ту саму кількість нулів \triangleright

7.4. Типові приклади обчислення інтегральних лишків

Розглянемо приклади обчислення інтегральних лишків функції $f(z)$ відносно всіх ізольованих особливих точок, які лежать у \mathbb{C} , а також відносно нескінченно віддаленої точки, якщо вона не є граничною для інших особливих точок:

$$1) f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}; 2) f(z) = \frac{1}{\sin z}; 3) f(z) = \cos \frac{1}{z-2};$$

$$4) f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}; 5) f(z) = z^n \sin \frac{1}{z}, \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

\triangleleft 1) Особливими точками функції $f(z)$ є $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$. Оскільки $z_1 = 0$ є полюсом другого порядку, то для обчислення лишку використовуємо формулу (7.3):

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 f(z) \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2 + z - 1}{z - 1} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - 2z}{(z - 1)^2} = 0.$$

Точка $z_2 = 1$ є полюсом першого порядку функції f , тому для обчислення лишку в ній застосуємо формулу (7.1):

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} f(z)(z - 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 + z - 1}{z^2} = 1.$$

Відповідно до теореми про суму лишків у розширеній комплексній площині маємо $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$. Звідси $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

2) Подамо функцію $f(z)$ у вигляді $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\phi(z)}$, де $\varphi(z) \equiv 1$, а $\phi(z) = \sin z$. Оскільки в точках $z_k = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) функція f має прості

полюси, то лишки відносно них обчислимо за формулою

$$\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{\varphi(z_k)}{\phi'(z_k)} = \frac{1}{\cos z_k} = \frac{1}{\cos k\pi} = (-1)^k.$$

Очевидно, що нескінченно віддалена точка є граничною для особливих точок $z_k = k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

3) Точка $z = 2$ істотно особлива для функції f . Запишемо розвинування функції в ряд Лорана в околі точки $z = 2$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{z-2} \right)^{2n} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-2} \right)^2 + \dots$$

Коефіцієнт при $(z-2)^{-1}$ дорівнює нулю, отже, $\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = 0$.

Ураховуючи, що інших особливих точок у \mathbb{C} не існує, маємо

$$\operatorname{Res}_{z=2} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0, \text{ звідки } \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

До цього висновку можна було б прийти, ураховавши, що функція $\cos t$ є парною. Отже, у її розвиненні в ряд непарні степені відсутні.

4) Як і в попередньому прикладі, у \mathbb{C} функція має одну особливу точку $z = 2$, яка є істотно особливою. Оскільки $z^3 = (2 + (z-2))^3 =$

$$= 8 + 12(z-2) + 6(z-2)^2 + (z-2)^3, \quad \text{а} \quad \cos \frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{z-2} \right)^{2n} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{z-2} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{z-2} \right)^4 - \dots, \text{ то}$$

$$z^3 \cos \frac{1}{z-2} =$$

$$= \left(8 + 12(z-2) + 6(z-2)^2 + (z-2)^3 \right) \left(1 - \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{4!(z-2)^4} - \dots \right).$$

Легко підрахувати, що коефіцієнт при $(z-2)^{-1}$ у цьому ряді дорівнює $-6 + \frac{1}{24} = -\frac{143}{24}$, а $\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = -\frac{143}{24}$. Тоді

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = \frac{143}{24} \triangleright$$

5) Залежно від значення параметра n , точка $z = 0$ може бути усувною або істотно особливою точкою функції $f(z)$. Ряд Лорана функції f в околі точки $z = 0$ має вигляд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{z^n}{z^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k-n+1}}.$$

Рівність $2k - n = 0$ неможлива, якщо $n < 0$ або $n \in \mathbb{Z}$ непарне. У зазначених випадках $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

Якщо $n = 2m$ при $m \geq 0$, то головна частина ряду Лорана функції f

міститиме член $\frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{-1} = \frac{(-1)^{n/2}}{(n+1)!} z^{-1}$. Отже, для всіх парних $n \in \mathbb{Z}_0$

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{(-1)^{n/2}}{(n+1)!}. \text{ Зокрема, при } n=0 \quad \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1.$$

Для точки $z = \infty$ одержимо, що для всіх парних $n \in \mathbb{Z}_0$

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{(-1)^{n/2+1}}{(n+1)!}.$$

Зокрема, при $n=0$ $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -1$ ▸

У деяких випадках для обчислення лишків можна скористатися штучними підходами. Наприклад, обчислити лишки функції

$$f(z) = \frac{15z^3 - 11z^2 - 4z + 6}{2z^2(z^2 - 1)}$$

можна, розклавши дріб на суму простих дробів.

Легко переконатися, що такий розклад матиме вигляд

$$f(z) = \frac{2}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{4}{z+1} + \frac{3}{2(z-1)}.$$

Особливими точками функції f є $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$, $z_4 = \infty$.

Оскільки точки z_1 , z_2 і z_3 – прості полюси функції f , то

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 2, \quad \operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = 4, \quad \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \frac{3}{2}.$$

З формули $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$ маємо

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\left(\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=1} f(z) \right) = -7,5.$$

Складнішими є задачі обчислення інтегральних лишків багатозначних функцій. Покажемо загальну схему розв'язання таких задач на прикладі.

Потрібно знайти інтегральні лишки всіх гілок багатозначної функції

$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{z} + \sqrt{z+1}}$ у всіх ізольованих особливих точках однозначного характеру скінченної частини комплексної площини.

◁ Спочатку позбавимося від ірраціональності у знаменнику функції

$$f(z) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{z} - \sqrt{z+1}}{z-1}.$$

Бачимо, що вона чотиризначна, а її скінченною особливою точкою однозначного характеру для кожної з гілок є простий полюс $z_1 = 1$. Точки $z_2 = 0$ і $z_3 = -1$ є точками розгалужування (особливими точками неоднозначного характеру).

Виділимо чотири однозначні гілки функції f в області $D \subset \mathbb{C}$ (площини \mathbb{C} з вилюченою від'ємною дійсною піввіссю), використовуючи їх значення у фіксованій точці, наприклад у точці $z = 2$, маємо:

$$f_1(2) = 2 - \sqrt{3}, \quad f_2(2) = -2 - \sqrt{3}, \quad f_3(2) = 2 + \sqrt{3}, \quad f_4(2) = -2 + \sqrt{3}.$$

Тоді для кожної з гілок одержимо:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{z-1} \left(\sqrt{2|z|} \left(\cos \frac{\arg z}{2} + i \sin \frac{\arg z}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{|z+1|} \left(\cos \frac{\arg(z+1)}{2} + i \sin \frac{\arg(z+1)}{2} \right) \right), \\ f_2(z) &= \frac{1}{z-1} \left(-\sqrt{2|z|} \left(\cos \frac{\arg z}{2} + i \sin \frac{\arg z}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{|z+1|} \left(\cos \frac{\arg(z+1)}{2} + i \sin \frac{\arg(z+1)}{2} \right) \right), \\ f_3(z) &= -f_2(z), \quad f_4(z) = -f_1(z). \end{aligned}$$

Далі за формулою (7.1) обчислимо інтегральні лишки

$$\operatorname{Res}_{z=1} f_1(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) f_1(z) = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0,$$

$$\operatorname{Res}_{z=1} f_2(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) f_2(z) = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2},$$

$$\operatorname{Res}_{z=1} f_3(z) = 2\sqrt{2}, \quad \operatorname{Res}_{z=1} f_4(z) = 0 \quad \triangleright$$

7.5. Застосування теорії інтегральних лишків до обчислення власних і невластних інтегралів Рімана

У п.7.3. ми показали, як можна застосовувати теорію лишків у теоретичних дослідженнях. Зараз ми зупинимось на деяких застосуваннях цієї теорії до обчислення означених інтегралів. Розглянемо три найважливіші випадки.

7.5.1. Обчислення інтегралів вигляду $I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$

Нехай $R(\cos \varphi, \sin \varphi)$ – раціональна функція аргументів $\cos \varphi$ та $\sin \varphi$, що не має особливих точок на проміжку $[0, 2\pi]$. Для обчислення інтеграла

$I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$ покладемо $z = e^{i\varphi}$. Тоді

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \\ \sin \varphi &= \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}), \quad dz = ie^{i\varphi} d\varphi.\end{aligned}$$

Після підстановки значень нової змінної в інтеграл одержимо

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right) \frac{dz}{z} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} R_1(z) dz.\end{aligned}$$

Очевидно, що функція $R_1(z)$ є раціональною. Вона не має особливих точок на контурі $|z|=1$, а всередині круга $|z|<1$ її особливими точками можуть бути тільки полюси. За основною теоремою про інтегральні лишки маємо

$$I_1 = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} R_1(z) dz = 2\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k: |z_k|<1} R_1(z). \quad (7.7)$$

7.5.2. Обчислення невластних інтегралів типу $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Нехай функцію $f(x)$ можна аналітично продовжити у верхню півплощину, і це продовження у верхній півплощині має лише скінченну кількість особливих точок однозначного характеру a_k , ($k = \overline{1, n}$), а на нескінченності воно має нуль не нижче другого порядку. Для достатньо

великих R при $|z| > R$ поведінка функції $f(z)$ еквівалентна поведінці функції $\frac{\varphi(z)}{z^2}$, де $|\varphi(z)| < M$, при $|z| > R$. Вважаємо також, що на дійсній осі особливих точок $f(z)$ немає. Побудуємо контур $L_1 = [-R, R] \cup C_R$ (рис. 7.3) такий, що усі особливі точки $f(z)$ охоплені цим контуром.

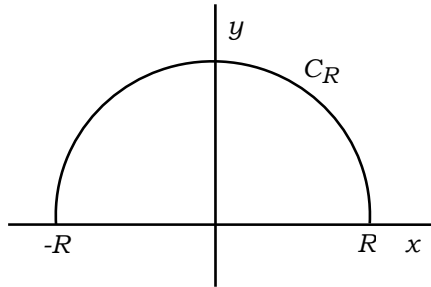


Рис. 7.3

Тут $C_R = \{z : |z| = R, \text{Im } z > 0\}$. Тоді

$$\int_{L_1} f(z) dz \equiv \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z), \quad \text{Im } a_k > 0.$$

Оцінимо інтеграл по контуру C_R при $R \rightarrow \infty$:

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| = \int_{C_R} |f(z)| |dz| \leq \frac{M}{R^2} \int_{C_R} |dz| = \frac{\pi R M}{R^2} \rightarrow 0.$$

Звідси випливає справедливність такого твердження.

Лема. Нехай функція $f(z)$ аналітична у верхній півплощині всюди, за винятком скінченної кількості ізольованих особливих точок $z = z_k$, ($k = \overline{1, n}$), $\text{Im } z_k > 0$ та існують такі додатні числа R_0 , M та δ , що для всіх точок верхньої півплощини, які задовольняють умову $|z| > R_0$, має місце оцінка $|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$. Тоді $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$, де контуром інтегрування C_R є півколо $|z| = R$ у верхній півплощині $\text{Im } z > 0$.

◁ Доведення випливає з попередніх міркувань. Дійсно, при виконанні умови леми маємо

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |dz| \leq \frac{M}{R^{1+\delta}} \int_{C_R} |dz| = \frac{\pi M}{R^\delta} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \triangleright$$

Отже, розглянутий інтеграл, при виконанні умов леми, можна обчислювати за формулою

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z), \quad (7.8)$$

де $\operatorname{Im} z_k > 0$.

7.5.3. Обчислення невластних інтегралів вигляду

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{cases} \cos \lambda x \\ \sin \lambda x \end{cases} dx$$

Розглядуваний інтеграл можна подати в еквівалентному вигляді

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{cases} \cos \lambda x \\ \sin \lambda x \end{cases} dx = \begin{cases} \operatorname{Re} \\ \operatorname{Im} \end{cases} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx \right). \quad (7.9)$$

Це або дійсна, або уявна частина інтеграла від комплекснозначної функції.

Перш ніж розглянути алгоритм обчислення таких інтегралів, доведемо необхідну лему.

Лема Жордана. Нехай $f(z)$ – аналітична функція у верхній півплощині, за винятком скінченної множини особливих точок. Якщо $R_n > 0$ такі, що на послідовності концентричних півкіл $\gamma_n = \{z : |z| = R_n, \operatorname{Im} z > 0\}$, $R_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, функція $f(z)$ аналітична й рівномірно відносно аргументу z прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, то для довільного $\lambda > 0$ має місце рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} e^{i\lambda z} f(z) dz = 0.$$

◁ Покладемо $z = R_n e^{i\varphi}$, $dz = iR_n e^{i\varphi} d\varphi = izd\varphi$ та оцінимо величину значення інтеграла на контурі γ_n . Очевидно, що

$$\left| e^{i\lambda z} \right| = \left| e^{i\lambda R_n (\cos \varphi + i \sin \varphi)} \right| = \left| e^{i\lambda R_n \cos \varphi} \right| \left| e^{-\lambda R_n \sin \varphi} \right| = e^{-\lambda R_n \sin \varphi}.$$

Нехай $\{\varepsilon_n\}$ – послідовність нескінченно малих заданих чисел. Тоді за умовою леми можна вибрати n настільки великим, що $|f(z)| < \varepsilon_n$ при

$|z| = R_n$. Урахуємо, що при $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin \varphi > \frac{2}{\pi} \varphi$. Тоді

$$\left| \int_{\gamma_n} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leq \int_{\gamma_n} |f(z)| |e^{i\lambda z}| |dz| \leq \int_0^\pi e^{-\lambda R_n \sin \varphi} \varepsilon_n R_n d\varphi < \\ < 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_n R_n e^{-\lambda R_n \frac{2\varphi}{\pi}} d\varphi = \frac{2\pi \varepsilon_n R_n e^{-\lambda R_n \frac{2\varphi}{\pi}}}{-2\lambda R_n} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi \varepsilon_n}{\lambda} (1 - e^{-\lambda R_n}) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, оскільки $\varepsilon_n \rightarrow 0$, а $R_n \rightarrow +\infty$

Зауваження. Лема вірна й у таких випадках.

1. Нехай $C_n = \{z : |z| = R_n, \operatorname{Im} z > a\}$, а підінтегральна функція задовольняє умови леми в півплощині $\operatorname{Im} z > a$, де a – фіксоване дійсне число, яке може бути як додатним, так і від'ємним. Тут інтегрування ведеться по дузі півкола $|z - ia| = R_n$. Доведення цього твердження аналогічне попередньому, але для оцінки модуля інтеграла потрібно зробити заміну $z' = R e^{i\varphi} - ia$.

2. Якщо $\gamma_n = \{z : |z| = R_n, \operatorname{Im} z < a\}$, $\lambda > 0$ і виконуються умови леми Жордана в півплощині $\operatorname{Im} z < a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0$.

3. Якщо $\gamma_n = \{z : |z| = R_n, \operatorname{Re} z < a\}$, $\lambda > 0$ і виконуються умови леми Жордана в півплощині $\operatorname{Re} z < a$, то вірною є рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} e^{\lambda z} f(z) dz = 0.$$

4. За умови, що контур інтегрування

$\gamma_n = \{z : |z| = R_n, \operatorname{Re} z > a, R_n \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty, \operatorname{Im} a = 0\}$, $\lambda > 0$ і виконання умов леми Жордана в півплощині $\operatorname{Re} z > a$ очевидно, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} e^{-\lambda z} f(z) dz = 0.$$

Повернемося до обчислення інтеграла I_3 .

Теорема. Нехай $\lambda > 0$, функція $f(x)$ задана на всій дійсній осі, не має на ній особливих точок та її можна аналітично продовжити у верхню півплощину так, щоб це аналітичне продовження задовольняло

умови леми Жордана. Тоді інтеграл $I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx$ для довільних

значень $\lambda > 0$ існує та визначається рівністю

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} e^{i\lambda z} f(z),$$

де z_k – особливі точки функції $f(z)$, які лежать у верхній півплощині.

◁ Уведемо контур $L_n = [-R_n, R_n] \cup C_n$, вибравши R_n настільки великим, щоб усі особливі точки $f(z)$ з верхньої півплощини потрапили всередину цього контуру. Обчислимо інтеграл

$$\int_{L_n} e^{i\lambda z} f(z) dz = \int_{-R_n}^{R_n} e^{i\lambda x} f(x) dx + \int_{C_n} e^{i\lambda z} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} e^{i\lambda z} f(z),$$

$$(\operatorname{Im}(z_k) > 0).$$

Перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$ і врахувавши лему Жордана, одержимо $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} e^{i\lambda z} f(z), (\operatorname{Im}(z_k) > 0)$ ▷

Ураховуючи, що $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx.$$

$$\text{Отже, } I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{Bmatrix} \cos \lambda x \\ \sin \lambda x \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} \\ \operatorname{Im} \end{Bmatrix} \left\{ 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} e^{i\lambda z} f(z) \right\}.$$

7.5.4. Обчислення невластних інтегралів, що мають особливі точки на дійсній осі

При побудові алгоритмів обчислення інтегралів у попередніх розділах ми накладали умову, що функція $f(x)$ не має особливих точок на дійсній осі. Однак цю умову можна послабити, дозволяючи наявність на дійсній осі ізольованих особливих точок з інтегрованою особливістю.

Наприклад, потрібно обчислити невластний інтеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$.

Скористаємося тим, що підінтегральна функція парна та відомою формулою Ейлера $\sin ax = \operatorname{Im} e^{iax}$. Тоді

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx \equiv \frac{1}{2} \operatorname{Im} \tilde{I}.$$

Очевидно, що останній інтеграл має місце лише в розумінні головного значення, а саме

$$\tilde{I} = \lim_{\substack{\rho \rightarrow +0 \\ R \rightarrow +\infty}} \left\{ \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{iax}}{x} dx + \int_{\rho}^R \frac{e^{iax}}{x} dx \right\}.$$

Функцію $\frac{e^{iax}}{x}$ можна аналітично продовжити у верхню півплощину $\text{Im } z > 0$. Розглянемо замкнений контур γ , складений з відрізків дійсної осі $[-R, -\rho]$, $[\rho, R]$ та дуг двох півкіл: $\{|z| = \rho, \text{Im } z > 0\}$ і $\{|z| = R, \text{Im } z > 0\}$. За основною теоремою Коші маємо

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iaz}}{z} dz = \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{iax}}{x} dx - \int_{\substack{|z|=\rho \\ \text{Im } z > 0}} \frac{e^{iaz}}{z} dz + \int_{\rho}^R \frac{e^{iax}}{x} dx + \int_{\substack{|z|=R \\ \text{Im } z > 0}} \frac{e^{iaz}}{z} dz = 0.$$

В останній формулі інтегрування вздовж обох півкіл здійснюється в додатному напрямку. Очевидно, що при $a > 0$ підінтегральна функція задовольняє умови леми Жордана, отже,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\substack{|z|=R \\ \text{Im } z > 0}} \frac{e^{iaz}}{z} dz = 0.$$

Розглянемо інтеграл по півколу з радіусом ρ . Покладемо $z = \rho e^{i\varphi}$, тоді

$$- \int_{\substack{|z|=\rho \\ \text{Im } z > 0}} \frac{e^{iaz}}{z} dz = -i \int_0^{\pi} e^{ia\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} d\varphi.$$

Тут підінтегральна функція є неперервною функцією параметра ρ і при $\rho \rightarrow 0$ має скінченну границю

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(-i \int_0^{\pi} e^{ia\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} d\varphi \right) &= -i \int_0^{\pi} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(e^{ia\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \right) d\varphi = \\ &= -i \int_0^{\pi} d\varphi = -i\pi. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } I = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x} dx = \text{Im} \int_{\gamma} \frac{e^{iaz}}{z} dz = \frac{\pi}{2}.$$

Якщо $a < 0$, то $-a > 0$ і $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-a)x}{x} dx = -\frac{\pi}{2}$. Звідси

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = -\frac{\pi}{2} \text{sign } a.$$

У загальнішому випадку має місце така теорема.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ має аналітичне продовження $f(z)$ у верхню півплощину, причому $f(z)$ аналітична в замкненій півплощині $\text{Im } z \geq 0$, за винятком скінченної кількості ізольованих особливих точок $z_k, (k = \overline{1, n})$, $\text{Im } z_k > 0$ і полюсів першого порядку у токах $x_k, (k = \overline{1, m})$, які лежать на дійсній осі, а $f(z)$ задовольняє умови леми Жордана.

Тоді головне значення інтеграла $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx$ обчислюється за формулою

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(f(z) e^{i\lambda z} \right) + \pi i \sum_{k=1}^m \text{Res} \left(f(z) e^{i\lambda z} \right).$$

◁ Розглянемо у верхній півплощині область, обмежену кривою

$$\gamma_{R\varepsilon} = [-R, x_1 - \varepsilon_1] \cup \left\{ \bigcup_{k=1}^{m-1} (\bar{\gamma}_k \cup [x_k + \varepsilon_k, x_{k+1} - \varepsilon_{k+1}]) \right\} \cup [x_m + \varepsilon_m, R] \cup \gamma_R.$$

Тут $\varepsilon_k > 0$ достатньо малі такі, що $\gamma_k = \{z : |z - x_k| = \varepsilon_k, \text{Im } z \geq 0\}$ (півкола у верхній півплощині) обмежують точки x_k , але між собою не перетинаються, $\gamma_R = \{z : |z| = R, \text{Im } z \geq 0\}$, а $R > 0$ таке, що всі особливі точки $z_k, (k = \overline{1, n})$ лежать усередині круга $|z| < R$. Тоді за основною те-

оремою про лишки $I_{R\varepsilon} = \int_{\gamma_{R\varepsilon}} f(z) e^{i\lambda z} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(f(z) e^{i\lambda z} \right)$.

Якщо перейдемо до границі при $R \rightarrow \infty$, то, за лемою Жордана, інтеграл по контуру γ_R стане рівним нулю.

Для оцінки значення інтеграла $\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\bar{\gamma}_{\varepsilon_k}} f(z) e^{i\lambda z} dz$ зробимо в ньому граничний перехід при $\varepsilon_k \rightarrow 0$.

Оскільки в точці $z = x_k$ функція $f(z)$ має простий полюс, то в околі цієї точки

$$f(z) e^{i\lambda z} = \frac{c_{-1}^{(k)}}{z - x_k} + \varphi_k(z),$$

а $\varphi_k(z)$ – аналітична в точці $z = x_k$ функція. Тому

$$\int_{\bar{\gamma}_k} f(z) e^{i\lambda z} dz = - \int_{\gamma_k} \left\{ \frac{c_{-1}^{(k)}}{z - x_k} + \varphi_k(z) \right\} dz = -c_{-1}^{(k)} \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - x_k} - \int_{\gamma_k} \varphi_k(z) dz.$$

Зробивши заміну $z - x_k = \varepsilon_k e^{i\varphi}$, одержимо $\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - x_k} = \int_0^\pi \frac{i\varepsilon_k e^{i\varphi} d\varphi}{\varepsilon_k e^{i\varphi}} = i\pi$,

а оскільки $\varphi_k(z)$ аналітична в точці $z = x_k$, то вона обмежена в

ε_k -околі цієї точки: $\left| \int_{\gamma_k} \varphi_k(z) dz \right| \leq m\pi\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Отже,

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\bar{\gamma}_{\varepsilon_k}} f(z) e^{i\lambda z} dz = i\pi \operatorname{Res}_{z=x_k} \left(f(z) e^{i\lambda z} \right).$$

Таким чином, головне значення інтеграла I можна обчислити як границю

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\gamma_{R\varepsilon}} f(z) e^{i\lambda z} dz = \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} \left(f(z) e^{i\lambda z} \right) + i\pi \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z=x_k} \left(f(z) e^{i\lambda z} \right) \triangleright \end{aligned}$$

Зауваження. Якщо потрібно обчислити $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, у якому аналі-

тичне продовження $f(z)$ задовольняє умову леми з п. 7.5.2, а на дійсній осі $f(z)$ є скінченна кількість простих полюсів у точках $z = x_k$ ($k = \overline{1, m}$), то

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z) + i\pi \sum_{k=1}^m \operatorname{Res} f(z).$$

7.5.5. Зразки обчислення інтегралів за допомогою теорії лишків

1. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)}$ при $a > b > 0$.

◁ Використаємо алгоритм із п. 7.5.1. Зробивши заміну $z = e^{ix}$, одер-

жимо $dz = ie^{ix} dx$, отже, $I = \frac{4}{i} \int_{|z|=1} \frac{z dz}{(bz^2 + 2az + b)^2}$. Підінтегральна функ-

ція $f(z) = \frac{z}{(bz^2 + 2az + b)^2}$ усередині одиничного кола має полюс дру-

гого порядку $z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$, а полюс $z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ лежить поза колом. Тому

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left(\frac{z(z-z_1)^2}{b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2} \right) = \frac{a}{4} (a^2 - b^2)^{-\frac{3}{2}}. \text{ Отже,}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)} = \frac{4}{i} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \triangleright$$

2. Обчислити інтеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$ ($a > 0, b > 0$).

◁ Оскільки функція $f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}$ має у верхній півпло-

щині два прості полюси $z_1 = ia, z_2 = ib$, а на нескінченності – нуль четвертого порядку, то, застосувавши доведення з п. 7.5.2 і формулу (7.1) для обчислення лишків, одержимо:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{ia} f(z) + \operatorname{Res}_{ib} f(z) \right) = \\ &= 2\pi i \left(\lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{(z+ia)(z^2+b^2)} + \lim_{z \rightarrow ib} \frac{1}{(z^2+a^2)(z+ib)} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2ia(b^2-a^2)} - \frac{1}{2ib(b^2-a^2)} \right) = \frac{\pi}{b^2-a^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{\pi}{ab(a+b)} \triangleright \end{aligned}$$

3. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

◁ Оскільки підінтегральна функція парна, то $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

У верхній півплощині функція $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$ має два прості полюси:

$z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$ і $z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}}$, а на нескінченності – нуль другого порядку, отже, обчислення такого невластного інтеграла проведемо за методикою, описаною в п. 5.7.2:

$$\begin{aligned} I &= \pi i \left(\operatorname{Res}_{z_1} f(z) + \operatorname{Res}_{z_2} f(z) \right) = \pi i \left(\left. \frac{z^2+1}{4z^3} \right|_{z=z_1} + \left. \frac{z^2+1}{4z^3} \right|_{z=z_2} \right) = \\ &= \pi i \left(\frac{1+i}{4e^{\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1-i}{4e^{\frac{9\pi}{4}}} \right) = \frac{\pi i}{4} \left(\frac{1+i}{e^{\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1-i}{e^{\frac{\pi}{4}}} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi i}{4} \left(\frac{1+i}{-1+i} + \frac{1+i}{1+i} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi i}{4} \cdot \frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{-2} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{4} \cdot \frac{4i}{-2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \triangleright \end{aligned}$$

4. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2} dx$, ($a > 0, b > 0$).

◁ Оскільки функції $\varphi(x) = \frac{\cos ax}{x^2+b^2}$, $\psi(x) = \frac{\sin ax}{x^2+b^2}$ з областями визначення $D_\varphi = D_\psi = (-\infty, +\infty)$ відповідно є парною й непарною, а

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x^2+b^2} dx = 0, \text{ то } I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+b^2} dx.$$

Функція $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$ має у верхній півплощині простий полюс $z_1 = bi$ і нуль у нескінченно віддаленій точці, тому

$$I = \pi i \operatorname{Res}_{bi} f(z) = \pi i \lim_{z \rightarrow bi} \frac{e^{iaz}}{z+bi} = \frac{\pi i}{2bi} e^{(ia)(ib)} = \frac{\pi}{2b} e^{-ab} \triangleright$$

5. Знайти значення інтеграла $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)} dx$.

◁ У звичайному розумінні цей інтеграл I розбіжний, оскільки при $x \rightarrow 1$ підінтегральна функція має однаковий порядок зростання з функцією $\frac{1}{x-1}$. Отже, його значення можна шукати тільки в розумінні

головного значення. Оскільки функція $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)}$ має у верхній півплощині простий полюс $z_1 = 2i$, а також простий полюс $z_2 = 1$ на дійсній осі, то, скориставшись теоремою з п. 7.5.4, маємо

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Im} \left(2\pi i \operatorname{Res}_{z_1} f(z) + \pi i \operatorname{Res}_{z=1} f(z) \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left(2\pi i \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{e^{iz}}{(z + 2i)(z - 1)} + \pi i \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^{iz}}{z^2 + 4} \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left(2\pi i \frac{e^{-2}}{4i(2i - 1)} + \pi i \frac{e^i}{5} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{\pi}{2} \frac{e^{-2}}{2i - 1} + \frac{\pi i}{5} (\cos 1 + i \sin 1) \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{\pi}{10} e^{-2} (-1 - 2i) + \frac{\pi i}{5} \cos 1 - \frac{\pi}{5} \sin 1 \right) = \frac{\pi}{5} (\cos 1 - e^{-2}) \triangleright \end{aligned}$$

6. Обчислити інтеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx$.

◁ Використаємо лему Жордана. Тут $\lambda = 1$, а функцію $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ можна продовжити на верхню площину. Легко переконатися, що функція $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ задовольняє умови леми Жордана у верхній півплощині, отже,

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} \right\} = \\ &= \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \frac{ze^{iz}}{(z + i)} \Big|_{z=i} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \frac{e^{-1}}{2} \right\} = \frac{\pi}{e} \triangleright \end{aligned}$$

7.6. Розклад мероморфних функцій на простіші дроби

У п.6.9. було показано, що довільну раціональну функцію $f(z)$ можна подати, причому єдиним чином, у вигляді

$$f(z) = P_n(z) + \sum_{k=1}^m g_k \left(\frac{1}{z - z_k} \right),$$

де $P_n(z)$ та $g_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)$ – деякий багаточлен та головні частини

лоранівських розвинень функції $f(z)$ в околах її полюсів $z = z_k$ ($k = \overline{0, m}$) та точки $z = \infty$, відповідно.

Кожен доданок суми $g_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) = \sum_{j=1}^{p_k} a_j^{(k)}(z-z_k)^{-j}$, де p_k – порядок

полюса z_k , називається *найпростішим дробом*.

Дослідимо можливості розкладу мероморфних функцій на простіші дроби залежно від кількості полюсів функції.

7.6.1. Розклад на простіші дроби мероморфних функцій зі скінченною кількістю полюсів

Нагадаємо, що мероморфною функцією називають однозначну аналітичну функцію, яка у скінченній частині комплексної площини не має інших точок, крім полюсів. З означення мероморфної функції випливають такі властивості цього класу функцій:

- 1) Довільна стала є мероморфною функцією.
- 2) Сума та різниця скінченної кількості мероморфних функцій є мероморфною функцією.
- 3) Добуток і частка мероморфних функцій є мероморфною функцією.
- 4) Раціональна функція від мероморфних функцій теж мероморфна.

Звідси випливає, що довільну мероморфну функцію $f(z)$ можна подати у вигляді відношення мероморфних функцій $\varphi(z)$ та $\phi(z)$

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\phi(z)},$$

де $\phi(z)$ – нерівна тотожно нулю функція. У скінченній частині комплексної площини мероморфна функція не має інших особливих точок, крім полюсів, які є нулями знаменника. Очевидно, що порядок полюса $f(z)$ дорівнює кратності нуля $\phi(z)$, якщо чисельник у цій точці не має нуля, або різниці між кратністю нуля $\phi(z)$ і кратністю нуля функції $\varphi(z)$, якщо в даній особливій точці чисельник теж має нуль.

Якщо в усій скінченній частині площини існує тільки скінченна кількість полюсів, то існує таке число R , що в околі точки $Z = \infty$ ($|z| > R$) не лежить жодна скінченна особлива точка. У цьому випадку точка $Z = \infty$ є ізольованою особливою точкою (усувною, полюсом або істотно особливою). Нехай кожна з точок a_j множини ізольованих особливих точок $\{a_j; j = \overline{1, m}\}$ є полюсом порядку β_j . Оскільки особливі точки мероморфної функції ізольовані, то в довільній обмеженій області $D \subset \mathbb{C}$ їх кількість не може бути більше заіченної. Дійсно, у кожному крузі $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $r = \text{const}$ кількість ізольованих точок може бути тільки скінченною, оскільки в іншому випадку в скінченній частині площини існувала б точка згущення особливих точок, яка була б неізольованою особливою точкою, а не полюсом, що неможливо за означенням мероморфної функції.

Запишемо розвинення функції $f(z)$ в околі полюса a_j :

$$f(z) = g_j(z) + \text{правильна частина ряду Лорана,}$$

а $g_j(z)$ – головна частина ряду Лорана:

$$g_j(z) = \frac{c_{-1}^{(j)}}{z - a_j} + \frac{c_{-2}^{(j)}}{(z - a_j)^2} + \dots + \frac{c_{-\beta_j}^{(j)}}{(z - a_j)^{\beta_j}}.$$

Очевидно, що головна частина ряду Лорана $g_j(z)$ в околі точки $Z = a_j$ є раціональною функцією, яка має в усій комплексній площині тільки одну особливу точку – полюс, а в точці $Z = \infty$ вона перетворюється на нуль. Тому функція $\Phi(z) = f(z) - \sum_{j=1}^m g_j(z)$ є цілою, оскільки всі її особливі точки a_j будуть усувними та їх можна вважати вже усунутими. Крім того,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [f(z) - \Phi(z)] = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m g_j(z) = 0.$$

Отже функції $f(z)$ та $\Phi(z)$ в околі точки $Z = \infty$ поведуться однаково: для них ця точка є або точкою аналітичності, або полюсом, або істотно особливою точкою. Причому їх розвинення в ряд Лорана мають однакові головні частини. Звідси робимо висновок, що мероморфну

функцію можна подати у вигляді сум цілої функції $\Phi(z)$ та раціональної функції $g(z) = \sum_{j=1}^m g_j(z)$.

У випадку, коли функція $f(z)$ у точці $z = \infty$ має полюс порядку k з головною частиною $g_0(z) = \sum_{l=0}^k A_l z^l$ або точку аналітичності, ціла функція $\Phi(z)$ є багаточленом степеня k , або, за теоремою Ліувілля, – сталою, тобто $\Phi(z) = A_0$.

Ми довели таке твердження.

Теорема. Якщо мероморфна функція $f(z)$ має лише скінченну кількість полюсів, а точка $z = \infty$ для неї є точкою аналітичності або полюсом, то $f(z)$ є раціональною функцією. Цю функцію можна подати у вигляді суми всіх головних частин $g_j(z)$ розвинення в ряд Лорана відносно всіх скінченних полюсів ($j = 1, 2, \dots, m$), нескінченно віддаленої точки ($j = 0$) і сталої $A_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[f(z) - \sum_{j=0}^m g_j(z) \right]$.

Значимо, що ця теорема встановлює існування розкладу довільної раціональної функції на простіші дроби.

Дійсно, якщо одержаний результат переписати у вигляді

$$f(z) = \sum_{n=0}^k A_n z^n + \sum_{j=1}^m \left(\frac{c_{-1}^{(j)}}{z - a_j} + \frac{c_{-2}^{(j)}}{(z - a_j)^2} + \dots + \frac{c_{-\beta_j}^{(j)}}{(z - a_j)^{\beta_j}} \right),$$

то такий запис і є розкладом $f(z)$ на простіші дроби.

7.6.2. Теорема Миттаг – Леффлера

Складнішим є випадок, коли множина полюсів мероморфної функції $f(z)$ нескінченна. Оскільки всі особливі точки є полюсами (ізолюваними), то кожен круг $|z| < r$ для довільного скінченного $r < \infty$ може містити тільки скінченну кількість особливих точок, а отже, в околі точки $z = \infty$ з радіусом R , ($|z| > R$) може бути нескінченна кількість по-

люсів $f(z)$. Звідси випливає, що в даному випадку точка $z = \infty$ є граничною точкою полюсів, тобто неізолюваною особливою точкою функції $f(z)$.

Легко переконатися, що всі полюси можна перенумерувати й розмістити в порядку зростання їх модулів. Для цього достатньо розбити всю площину за допомогою концентричних кіл із центром у точці $z = 0$ з радіусами $r_k = k$, ($k = 0, 1, \dots$) на кільця $K_k = \{z : k < |z| < k + 1\}$. Кожне з кілець містить скінченну кількість особливих точок (у деяких кільцях їх може не бути зовсім). Тому після нумерації полюсів, які лежать, наприклад, у крузі $|z| < n$ у порядку неспадання їх модулів $0 \leq |z_0| \leq |z_1| \leq \dots \leq |z_{l_n}|$, нумерацію можна продовжити далі, додаючи полюси, одержані в наступному кільці $n < |z| \leq n + 1$, до полюсів, які були в крузі $|z| \leq n$.

Домовимося полюси мероморфних функцій нумерувати в порядку зростання їх модулів. Якщо a_j ($j = 0, 1, \dots$) – полюси функції $f(z)$, то $|a_0| \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ і, відповідно до зроблених раніше припущень, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$. Очевидно також, що в послідовності $\{a_n\}$ на нуль може перетворитися тільки число $|a_0|$.

Як і в попередньому випадку, через $g_j(z)$ позначимо головні частини розвинення в ряд Лорана функції $f(z)$ в околі полюса $z = a_j$.

Фундаментальною для подальших досліджень можливості розкладу мероморфних функцій на прості дроби є теорема Миттаг – Леффлера, яка базується на такій лемі.

Лема. Нехай $F_0(z), F_1(z), F_2(z), \dots$ – послідовність мероморфних функцій таких, що $F_n(z)$ ($n = 0, 1, \dots$) аналітичні в кругах $|z| < r_n$ відповідно та $r_0 < r_1 < \dots < r_n < \dots$ $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$. Тоді існує така послідовність

$\{h_n(z)\}$ багаточленів від z , що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (F_n(z) - h_n(z))$ рівномірно збіга-

ється в крузі $|z| < R$ при довільному $R < \infty$, якщо відкинути скінченну кількість членів цього ряду, які можуть ставати нескінченно великими.

◁ Очевидно, що ряд $F_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(n)} z^m$ рівномірно збігається в крузі

$|z| < r_n$, оскільки функція $F_n(z)$, за умовою леми, аналітична в ньому. Тому для довільного $\varepsilon_n > 0$ можна вибрати номер m_n так, щоб при всіх $|z| < r_n$ виконувалась нерівність $\left| F_n(z) - \sum_{m=0}^{m_n} c_m^{(n)} z^m \right| < \varepsilon_n$.

Виберемо послідовність чисел $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ ($\varepsilon_k > 0, \forall k$) так, щоб ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k$ був збіжним, і позначимо $h_n(z) = \sum_{m=0}^{m_n} c_m^{(n)} z^m$.

Покажемо, що послідовність багаточленів $h_n(z)$ є такою, про існування якої стверджує лема. Для цього візьмемо довільне число $0 < R < \infty$ і виберемо номер N так, щоб $\forall n \geq N \quad r_n \geq R$. Тоді при всіх

$|z| < R$ функціональний ряд $\sum_{n=N}^{\infty} (F_n(z) - h_n(z))$ буде мажоруватися збіжним числовим рядом $\varepsilon_N + \varepsilon_{N+1} + \dots$, а отже, буде рівномірно збіжним у крузі $|z| < R$ ▷

Теорема Миттаг – Леффлера. Якою б не була послідовність точок $a_0, a_1, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ і послідовність багаточленів $g_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right)$ від аргументу $\frac{1}{z - a_n}$, існує мероморфна функція $f(z)$, яка в точках a_0, a_1, \dots (і тільки в них) має полюси з головними частинами ряду Лорана, рівними $g_0 \left(\frac{1}{z - a_0} \right), g_1 \left(\frac{1}{z - a_1} \right), \dots, g_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right), \dots$ відповідно.

◁ Визначимо члени послідовності $F_n(z)$, розглянутої в лемі, у вигляді $\left\{ g_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right) \right\}$.

Якщо покласти $r_n = \frac{1}{2}|a_n|$, то умови леми виконуються, оскільки функції $g_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right)$ аналітичні в кругах $|z| \leq \frac{1}{2}|a_n| < |a_n|$. Покажемо, що сума ряду

$$F(z) = g_0 \left(\frac{1}{z - a_0} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right) - h_n(z) \right)$$

є мероморфною функцією із заданими полюсами й головними частинами ряду Лорана. За лемою ряд $F(z)$ буде рівномірно збіжним у крузі $|z| < R$ із довільним фіксованим радіусом R , якщо відкинути скінченну кількість його перших членів. За теоремою Вейерштрасса сума рівномірно збіжного ряду аналітичних функцій є аналітичною функцією. Тому особливі точки функції $F(z)$ у цьому крузі збігаються з особливими точками скінченної кількості перших членів цього ряду. Ці особливі точки є полюсами в заданих точках із заданими головними частинами ряду Лорана \triangleright

Доведена теорема вказує шлях побудови мероморфної функції $f(z)$, яка має полюси в заданих точках a_0, a_1, \dots , занумерованих у порядку зростання їх модулів, із заданими головними частинами розвинення в ряду Лорана

$$g_0 \left(\frac{1}{z - a_0} \right), g_1 \left(\frac{1}{z - a_1} \right), \dots, g_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right), \dots$$

Дійсно, за теоремою Миттаг – Леффлера можна побудувати функцію

$$F(z) = g_0 \left(\frac{1}{z - a_0} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right) - h_n(z) \right),$$

яка має ті самі полюси та головні частини рядів Лорана в них, що й функція $f(z)$. Різниця $G(z) = f(z) - F(z)$ буде цілою функцією. Отже,

$$f(z) = G(z) + g_0 \left(\frac{1}{z - a_0} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right) - h_n(z) \right).$$

З цього випливає висновок: довільну мероморфну функцію $f(z)$ можна подати у вигляді суми цілої функції й ряду, членами якого є раціональні функції, причому кожна з них має в площині \mathbb{C} полюсом тільки один з полюсів функції $f(z)$.

7.6.3. Побудова розкладу мероморфної функції на простіші дроби на прикладі функції $\operatorname{ctg} z$

Нехай мероморфна функція $f(z)$ у площині \mathbb{C} має зліченну кількість

полюсів у точках $z = a_j$, а криві Γ_{R_m} утворюють сім'ю замкнених кривих Жордана, кожна з яких охоплює точку $z = 0$, містить усередині криву $\Gamma_{R_{m-1}}$ ($m = 1, 2, \dots$) і деяку частину множини полюсів a_j ($j = \overline{1, n_m}$). Причому на самому контурі Γ_{R_m} полюсів немає, а $R_m \rightarrow \infty$. Покладемо, що точка $z = 0$ є полюсом $f(z)$, тоді функція раціональна в \mathbb{C} , має на нескінченності нуль кратністю не менше другого порядку, а її інтегральний лишок на нескінченності дорівнює нулю.

Якщо ж $z = 0$ не є полюсом $f(z)$, то за допомогою заміни $z' = z - a_1$ переходимо до площини змінної z' , у якій функція $f(z' + a_1)$ матиме полюс у точці $z' = 0$.

Якщо функція $f(t) - \sum_{k=1}^m g_k(t)$ аналітична всередині контуру Γ_{R_m} і точка z лежить усередині Γ_{R_m} , то, за теоремою Коші, для багатозв'язних областей маємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R_m}} \frac{f(t) - \sum_{k=1}^{n_m} g_k(t)}{t - z} dt = f(z) - \sum_{k=1}^{n_m} g_k(z),$$

або

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n_m} g_k(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R_m}} \frac{f(t) - \sum_{k=1}^{n_m} g_k(t)}{t - z} dt.$$

Разом з тим, урахуємо, що інтегральний лишок функції $f(z)$ на нескінченності дорівнює нулю. Отже, $\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{m \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t - z} dt = 0$.

З висновку, зробленого в 7.6.2, маємо, що $f(z) - \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)$ є цілою фу-

нкцією, тобто $\text{Res}_{z=\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n_m} g_k(t)}{t - z} = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{R_m}} \frac{\sum_{k=1}^{n_m} g_k(t)}{t - z} dt = 0$.

З цих міркувань випливає, що після переходу до границі у формулі

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R_m}} \frac{f(t)}{t-z} dt + \sum_{k=1}^{n_m} g_k(z)$$

при $m \rightarrow \infty$ одержимо

$$f(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n_m} g_k(z).$$

Тут через $g_0(z)$ позначено головну частину ряду Лорана в околі точки $z = 0$.

Отже, ми встановили, що для довільної мероморфної функції $f(z)$ існує розклад на прості дроби у вигляді суми головних частин її розвинення в околі кожного з полюсів.

На прикладі функції $f(z) = \operatorname{ctg} z$, проілюструємо побудову такого розвинення.

Розглянемо інтеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{\operatorname{ctg} t}{t-z} dt$, де γ_m – границя квадрата (рис.

7.4) $\{z : -(m+1/2)\pi < \operatorname{Re} z < (m+1/2)\pi; \quad -(m+1/2)\pi < \operatorname{Im} z < (m+1/2)\pi\}$
 $m \in \mathbb{Z}_0$.

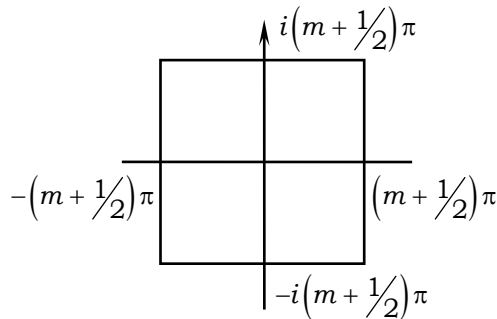


Рис. 7.4

Особливими точками підінтегральної функції є полюси $z_k = \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$) та точка z . Будемо також вважати, що точка z не збігається з жодним полюсом z_k .

За основною теоремою про інтегральні лишки

$$I_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{\operatorname{ctg} t}{t-z} dt = \sum_{k=-m}^m \operatorname{Res}_{t=z_k} \frac{\operatorname{ctg} t}{t-z} + \operatorname{Res}_{t=z} \frac{\operatorname{ctg} t}{t-z}.$$

Оскільки функцію $\operatorname{ctg} t$ можна подати у вигляді відношення

$\operatorname{ctg} t = \frac{\xi(t)}{\psi(t)}$, де $\xi(t) = \cos t$, а $\psi(t) = \sin t$, а $\xi(z_k) = \psi'(z_k) = (-1)^k$, то, за формулою обчислення лишків для простих полюсів (7.2), одержимо

$$\operatorname{Res}_{t=k\pi} \frac{\operatorname{ctg} t}{t-z} = \frac{1}{k\pi-z}; \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\operatorname{Res}_{t=z} \frac{\operatorname{ctg} t}{t-z} = \operatorname{ctg} z;$$

$$\text{а при } z=0 - \operatorname{Res}_{t=0} \frac{\operatorname{ctg} t}{t-z} = -\frac{1}{z}.$$

Обчислимо інтеграл I_0 по контуру γ_0 як границю:

$$I_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\operatorname{ctg} t}{t} dt = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\operatorname{ctg} t}{t-z} dt = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} \right] = 0.$$

Оскільки останній інтеграл дорівнює нулю, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{\operatorname{ctg} t}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \left(\frac{\operatorname{ctg} t}{t-z} - \frac{\operatorname{ctg} t}{t} \right) dt = \frac{z}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{\operatorname{ctg} t}{t(t-z)} dt.$$

Оцінимо модуль функції $\operatorname{ctg} z$ на сторонах квадрата.

Нехай $z = \pm \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi + iy$, $-\left(m + \frac{1}{2} \right) \pi < y < \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi$, тоді

$$|\operatorname{ctg} z| = \left| \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} \right| = \left| \frac{e^{\pm 2i(m+1/2)\pi} e^{-2y} + 1}{e^{\pm 2i(m+1/2)\pi} e^{-2y} - 1} \right| = \left| \frac{1 - e^{-2y}}{1 + e^{-2y}} \right| < 1.$$

На стороні $z = x + \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi i$, $-\left(m + \frac{1}{2} \right) \pi < x < \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi$ при $m \geq 0$

маємо

$$|\operatorname{ctg} z| = \left| \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \right| = \left| \frac{1 + e^{-2m\pi - \pi} e^{-2ix}}{1 - e^{-2m\pi - \pi} e^{-2ix}} \right| < M.$$

Аналогічно показується, що функція $|\operatorname{ctg} z|$ обмежена й на лівій стороні прямокутника $z = x - \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi i$, де $-\left(m + \frac{1}{2} \right) \pi < x < \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi$.

Отже, на довільному контурі γ_m справджується оцінка

$$\left| \frac{\operatorname{ctg} t}{t-z} \right| = \frac{|\operatorname{ctg} t|}{|t^2| \left| \left(1 - \frac{z}{t} \right) \right|} < \frac{M}{|t^2| \left| \left(1 - \frac{z}{t} \right) \right|}.$$

Звідси випливає, що функція $\frac{\operatorname{ctgt}}{t(t-z)}$ на нескінченності має двократний нуль, а це означає, що $\operatorname{Res}_{t=\infty} \frac{\operatorname{ctgt}}{t(t-z)} = 0$.

На множині контурів γ_m перейдемо до границі при $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} I_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{\operatorname{ctgt}}{t-z} dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\substack{k=-m \\ k \neq 0}}^m \operatorname{Res}_{t=z_k} \frac{\operatorname{ctgt}}{t-z} + \operatorname{Res}_{t=z} \frac{\operatorname{ctgt}}{t-z} + \\ &+ \operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{\operatorname{ctgt}}{t-z} + \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Res}_{\substack{t=z \\ t=0}} \frac{\operatorname{ctgt}}{t-z} = 0. \end{aligned}$$

Ураховуючи останню рівність, після підстановки всіх обчислених лишків знаходимо, що

$$\operatorname{ctgz} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi} \right] = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2 \pi^2}.$$

Формула описує розклад функції ctgz на простіші дроби. За цим алгоритмом можна розкласти на простіші дроби довільну мероморфну функцію.

Провівши викладки, аналогічні до зроблених вище, легко перекона-тися, що формули розкладу на простіші дроби тригонометричних функцій $\frac{1}{\sin z}$, $\frac{1}{\cos z}$ та $\operatorname{tgz} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ мають вигляд:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{2z}{z^2 - (j\pi)^2}, \quad \frac{1}{\cos z} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{(2j-1)\pi}{z^2 - \frac{(2j-1)^2 \pi^2}{4}},$$

$$\operatorname{tgz} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \frac{(2j-1)^2 \pi^2}{4}}.$$

7.7. Формула Лагранжа обернення степеневих рядів

Нехай функція $w = \varphi(z)$ аналітична в околі точки $Z = a$ й така, що $\varphi(a) = b$, $\varphi'(a) \neq 0$. У цьому разі окіл точки a однолисто відображається функцією $w = \varphi(z)$ у деякий окіл точки $w = b$ ($\varphi(a) = b$). Дійсно, якщо позначити $w = u + iw$, то відображення функцією $w = \varphi(z)$ рівнозначне

відображенню

$$\begin{cases} u = u(x, y); \\ v = v(x, y). \end{cases}$$

Оскільки для u та v виконуються умови Коші – Рімана, то якобіан цього відображення в околі точки $Z = a$ обчислюється за формулою

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |\varphi'(z)|^2 \neq 0.$$

З того, що $\varphi'(a) \neq 0$, за неперервністю маємо, що якобіан відмінний від нуля також у деякому околі точки a . Звідси випливає однолистість відображення.

Нехай аналітична функція $w = \varphi(z)$ має розвинення в ряд Тейлора

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \quad (7.10)$$

Очевидно, що в околі точки $Z = a$ існує обернена до $\varphi(z)$ функція $z = \varphi^{-1}(w)$, аналітична в околі точки b . Отже, існує розвинення функції $z = \varphi^{-1}(w)$ у ряд:

$$z = \varphi^{-1}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (w-b)^n. \quad (7.11)$$

Формула (7.11) є оберненням степеневому ряду (7.10). Одержати явний вигляд коефіцієнтів ряду (7.11) у більшості випадків практично неможливо, оскільки найчастіше не можна явно виразити функцію $z = \varphi^{-1}(w)$.

Розглянемо задачу, загальнішу ніж обернення вказаного степеневому ряду. Нехай $f(z)$ – аналітична функція в околі точки $Z = a$, $w = \varphi(z)$.

Якщо $z = \varphi^{-1}(w)$ є аналітичною функцією, то очевидно, що функція $f(z) = f(\varphi^{-1}(w)) = F(w)$ також буде аналітичною в околі точки $w = b$

як суперпозиція аналітичних функцій. Це означає, що функція $F(w)$ у цьому околі розвивається в степеневий ряд

$$f(z) = f[\varphi^{-1}(w)] = F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w-b)^n.$$

Побудуємо цей ряд у явному вигляді. В околі точки $w = b$ опишемо коло γ , яке при відображенні $Z = \varphi^{-1}(w)$ перейде у площині змінної Z у деяку замкнену гладку криву Γ . Розглянемо інтеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)\varphi'(t)}{\varphi(t) - w} dt.$$

Підінтегральна функція всередині контуру Γ має єдину особливу точку $t = z$. Оскільки відображення однолисте, то ця точка є полюсом першого порядку. За основною теоремою про інтегральні лишки інтеграл дорівнює

$$I = \operatorname{Res}_{t=z} \frac{f(t)\varphi'(t)}{\varphi(t) - w} = \left. \frac{f(t)\varphi'(t)}{(\varphi(t) - w)'} \right|_{t=z} = f(z).$$

Отже,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)\varphi'(t)}{\varphi(t) - w} dt. \quad (7.12)$$

Побудуємо розвинення функції $f(z)$, вираженої цим інтегралом, у степеневий ряд. Для цього введемо допоміжне розвинення

$$\frac{1}{\varphi(t) - w} = \frac{1}{(\varphi(t) - b) - (w - b)} = \frac{1}{(\varphi(t) - b)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(w - b)}{(\varphi(t) - b)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - b)^n}{(\varphi(t) - b)^{n+1}}. \quad (7.13)$$

Остання рівність вірна в околі точки $w = b$, тому що $|w - b| < |\varphi(t) - b|$, тобто $\left| \frac{w - b}{\varphi(t) - b} \right| < 1$, а отже, указаний ряд є сумою нескінченної спадної геометричної прогресії. Крім того, він рівномірно за змінною t збігається на колі γ .

Підставимо одержану суму ряду (7.13) в інтегральне подання функції $f(z)$ формулою (7.12):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - b)^n}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)\varphi'(t)}{(\varphi(t) - b)^{n+1}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - b)^n, \quad (7.14)$$

$$\text{де } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)\varphi'(t)}{(\varphi(t) - b)^{n+1}} dt.$$

Врахуємо, що $\varphi(a) = b$ і обчислимо коефіцієнти:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)\varphi'(t)}{\varphi(t) - b} dt = f(a),$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)\varphi'(t)}{(\varphi(t) - b)^{n+1}} dt = -\frac{1}{2\pi i n} \int_{\Gamma} f(t) d \left(\frac{1}{(\varphi(t) - b)^n} \right).$$

Поклавши $u = f(t)$, а $v = \frac{1}{(\varphi(t) - b)^n}$, проінтегруємо інтеграл части-

нами:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_{\Gamma} \frac{f'(t) dt}{(\varphi(t) - b)^n} + \left[\frac{f(t)}{(\varphi(t) - b)^n} \right]_{\Gamma}.$$

Оскільки функція, записана у квадратних дужках, однозначна, її приріст по замкненому контуру Γ дорівнює нулю. Нагадаємо, що $\varphi(a) = b$. Очевидно, що

$$\frac{1}{2\pi i n} \int_{\Gamma} \frac{f'(t) dt}{(\varphi(t) - b)^n} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{1}{2\pi i n} \int_{\Gamma} \frac{f'(t) \left(\frac{t-a}{\varphi(t)-b} \right)^n}{(t-\xi)^n} dt.$$

В останньому інтегралі функція, записана в чисельнику, є аналітичною функцією всередині контуру Γ . Отже, цей інтеграл можна обчислити за правилом обчислення похідної від інтеграла типу Коші:

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} \left[f'(\xi) \left(\frac{\xi - a}{\varphi(\xi) - b} \right)^n \right]_{\xi=a}.$$

Тепер запишемо формулу розвинення $f(z)$ у ряд:

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w-b)^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} \left[f'(\xi) \left(\frac{\xi - a}{\varphi(\xi) - b} \right)^n \right]_{\xi=a}.$$

Одержана формула називається *формулою Лагранжа обернення степеневих рядів*.

При $f(z) \equiv z$ формулу Лагранжа можна переписати так:

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w-b)^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} \left[\left(\frac{\xi - a}{\varphi(\xi) - b} \right)^n \right]_{\xi=a}.$$

Далі покладемо, що функцію $z = \varphi^{-1}(w)$ задано неявно, наприклад у вигляді $z - 2 - w \sin z = 0$. Побудуємо її розвинення за степенями w при $a = 2$, $b = 0$. Оскільки $w = \varphi(z) = \frac{z-2}{\sin z}$, то за формулою Лагранжа, ряд, який зображає функцію обернену до заданої неявної функції має вигляд

$$z = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} \sin^n \xi \Big|_{\xi=2}.$$

7.8. Застосування теорії лишків до обчислення сум рядів

У більшості випадків обчислення сум функціональних рядів є складною операцією, але теорії мероморфних функцій і лишків значно її спрощують.

Теорема. Нехай $f(z)$ – мероморфна функція з полюсами в точках z_1, z_2, \dots, z_n , що не збігаються з жодною з точок $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, та існує послідовність γ_m ($m \in \mathbb{N}$) кіл або інших замкнених вкладених контурів, які охоплюють початок координат, не проходять через жодну з цих точок і стягуються до нескінченно віддаленої точки при $m \rightarrow \infty$. Тоді при

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\gamma_m} \operatorname{ctg}(\pi z) f(z) dz = 0 \quad (7.15)$$

або

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\gamma_m} \frac{f(z) dz}{\sin \pi z} = 0 \quad (7.16)$$

для збіжних рядів $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)$ та $\sum_{k=1}^n (-1)^k f(k)$ відповідно мають місце рівності

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = -\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} (\operatorname{ctg}(\pi z) f(z)), \quad (7.17)$$

$$\sum_{k=1}^m (-1)^k f(k) = -\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{f(z)}{\sin \pi z}. \quad (7.18)$$

◁ Доведемо формулу (7.17). Виберемо m так, щоб усі особливі точки z_k ($k = \overline{1, n}$) функції $f(z)$ потрапили всередину контуру γ_m . Очевидно, що всі цілі точки $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ є полюсами функції $\operatorname{ctg}(\pi z)$. Нехай усередину контуру потрапила деяка множина цілих точок m_1, m_{1+1}, \dots, m_2 (рис. 7.5).

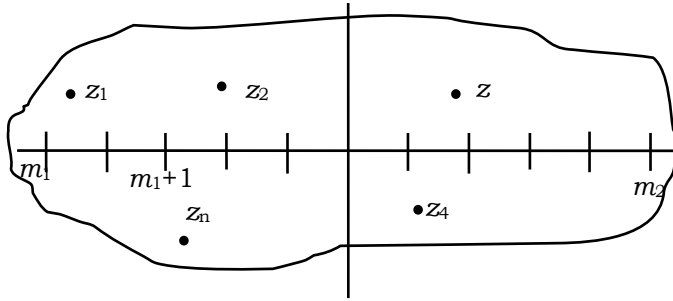


Рис. 7.5

За основною теоремою про інтегральні лишки

$$I_m = \int_{\gamma_m} \operatorname{ctg}(\pi z) f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(\operatorname{ctg}(\pi z) f(z)) + \\ + 2\pi i \sum_{k=m_1}^{m_2} \operatorname{Res}(\operatorname{ctg}(\pi z) f(z)).$$

Обчислимо лишки відносно цілих точок $z = k$:

$$\operatorname{Res}_{z=k} [\operatorname{ctg}(\pi z) f(z)] = \operatorname{Res}_{z=k} \frac{\cos(\pi z) f(z)}{\sin(\pi z)} = \frac{\cos(\pi z) f(z)}{(\sin(\pi z))'} \Big|_{z=k} = \frac{1}{\pi} f(k).$$

Перейдемо в I_m до границі при $m \rightarrow 0$ і врахуємо умову (7.15) теореми. Тоді

$$2\pi i \left\{ \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(\operatorname{ctg}(\pi z) f(z)) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \right\} = 0.$$

Звідси випливає вірність твердження (7.17). Доведення формули (7.18) аналогічне \triangleright

Покажемо на прикладі використання цієї теореми.

Нехай потрібно обчислити суму ряду

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a + bk)^2}; \quad a \neq 0; \quad b \neq 0.$$

Покладемо $f(z) = \frac{1}{(a + bz)^2}$. За контур γ_m виберемо границю квадрата

$$\left\{ z : -\left(m + \frac{1}{2}\right) < \operatorname{Re} z < \left(m + \frac{1}{2}\right); -\left(m + \frac{1}{2}\right) < \operatorname{Im} z < \left(m + \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Як було показано вище, на таких контурах γ_m має місце оцінка $|\operatorname{ctg}(z)| < M < \infty$.

Оскільки $\int_{\gamma_m} |dz| = 4 \left(m + \frac{1}{2} \right) = 2(m+1)$, то очевидно, що

$$\left| \int_{\gamma_m} \operatorname{ctg}(\pi z) \frac{1}{(a+bz)^2} dz \right| < \frac{2(m+1)M}{\left| a + b \left(m + \frac{1}{2} \right) \right|^2} \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Отже, умови теореми виконуються.

Тепер застосуємо формулу (7.17) до нашого ряду. Особливою точкою функції $f(z) \in z = -\frac{a}{b}$. Це полюс другого порядку. Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+kb)^2} &= -\pi \operatorname{Res}_{z=-\frac{a}{b}} \left[\frac{1}{(a+bz)^2} \operatorname{ctg}\pi z \right] = \\ &= -\pi \lim_{z \rightarrow -\frac{a}{b}} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(a+bz)^2} \left(z + \frac{a}{b} \right) \operatorname{ctg}\pi z \right] = \\ &= -\frac{\pi}{b^2} \lim_{z \rightarrow -\frac{a}{b}} \frac{d}{dz} [\operatorname{ctg}\pi z] = \frac{\pi^2}{b^2} \frac{1}{\sin^2 \pi z} \Big|_{z=-\frac{a}{b}} = \frac{\pi^2}{b^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi a}{b}. \end{aligned}$$

7.9. Нескінченні добутки та їх застосування в теорії цілих і мероморфних функцій

Нескінченні добутки, як і нескінченні суми, є потужним аналітичним апаратом для запису цілих і мероморфних функцій. Для того, щоб ефективно його використовувати, вивчимо спочатку властивості нескінченних добутків. Нагадаємо означення.

Нехай $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ – послідовність комплексних чисел.

Означення. Нескінченним добутком називається добуток вигляду

$$(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)\dots = \prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k) = P,$$

$a P_n = \prod_{k=1}^n (1+u_k)$ – частинним добутком нескінченного добутку P

Вважатимемо, що в нескінченному добутку не існує множників, рівних нулю. Тоді має місце таке означення.

Означення: Нескінченний добуток називається збіжним, якщо границя послідовності частинних добутків існує, скінченна й не дорівнює

нулю. При цьому покладають $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$.

У решті випадків, коли границя не існує або дорівнює нулю, або нескінченна, добуток називається *розбіжним*.

Означення. Якщо серед нескінченної кількості множників $(1 + u_k)$ є скінченна кількість множників, рівних нулю, то нескінченний добуток вважається *збіжним* чи *розбіжним* залежно від того, чи буде збіжним або розбіжним добуток, складений з нескінченної частини ненульових множників.

Якщо серед членів нескінченного добутку кількість нульових множників нескінченна, то такий добуток вважається розбіжним.

Наприклад, нескінченний добуток $1 \cdot \frac{2^2}{2^2 - 1} \cdot \frac{3^2}{3^2 - 1} \cdots \frac{n^2}{n^2 - 1} \cdots$ збігається, оскільки

$$P_n = 1 \cdot \frac{2^2}{(2+1)(2-1)} \cdot \frac{3^2}{(3+1)(3-1)} \cdots \frac{(n-1)^2}{n(n-2)} \cdot \frac{n^2}{(n+1)(n-1)} = \frac{2n}{n+1},$$

а $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 2$.

Нескінченні добутки $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \cdots$ та $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdots$ розбіжні, оскільки в першому випадку $P_n = \frac{1}{n!} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а в другому $P_n = 1$, якщо n парне, або $P_n = \frac{n+3}{2}$, якщо n не парне. Отже, границі P_n при $n \rightarrow \infty$ не існує.

7.9.1. Необхідна умова збіжності нескінченного добутку

Теорема. Якщо нескінченний добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$ збігається, то

$$u_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

◁ З умови збіжності випливає, що $P_n \rightarrow P$ при $n \rightarrow \infty$. Це означає, що $\frac{P_{n+1}}{P_n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Однак за означенням частинного добутку

$$P_{n+1} = P_n(1 + u_{n+1}). \text{ Отже, } \frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 + u_{n+1}, \text{ звідки випливає, що у збіжному}$$

нескінченному добутку $u_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ ▷

7.9.2. Критерій збіжності нескінченного добутку

У теорії нескінченних добутків важливим є питання: як, знаючи елементи нескінченного добутку, з'ясувати, буде він збіжним чи ні?

Цьому питанню присвячено велику кількість досліджень. Ми зупинимось тільки на одній загальній теоремі, яка дозволяє вивчення збіжності нескінченного добутку звести до розгляду збіжності відповідного ряду.

Теорема. Для збіжності нескінченного добутку $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ необхідно

й достатньо, щоб збігалися ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \ln |1 + u_n|$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \arg(1 + u_n)$.

◁ *Достатність.* Прологарифмуємо частинний добуток

$$\ln P_n = \ln[(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n)] = \sum_{k=1}^n \ln |1 + u_k| + i \sum_{k=1}^n \arg(1 + u_k).$$

Нехай при $n \rightarrow \infty$ послідовності в правій частині збіжні та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln |1 + u_k| = \rho; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arg(1 + u_k) = \varphi.$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln P_n = \ln P = \rho + i\varphi.$$

Ураховуючи неперервність функції $\ln z$, можна стверджувати, що $\ln P = \rho + i\varphi$. Звідси випливає, що $P = e^{\rho} e^{i\varphi}$ – цілком визначене комплексне число, тобто добуток збіжний.

Необхідність. Нехай $P_n \rightarrow P$ при $n \rightarrow \infty$. Це означає, що $|P_n| \rightarrow |P|$ та

$\arg P_n \rightarrow \arg P$. Отже, $\ln |P_n| \rightarrow \ln |P|$, $\sum_{k=1}^n \arg(1 + u_k) \rightarrow \arg P$ при $n \rightarrow \infty$,

звідки випливає, що ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \ln |1 + u_n|$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \arg(1 + u_n)$ збіжні ▷

7.9.3. Абсолютно збіжні добутки

Серед збіжних нескінченних добутків окремо виділяється клас абсолютно збіжних добутків.

Означення. Добуток $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ називається *абсолютно збіжним*,

якщо збігається добуток $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |u_n|)$.

Теорема про абсолютну збіжність нескінченного добутку. Добуток $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ збігається абсолютно тоді й тільки тоді, коли збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

◁ Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ збігається і його сума дорівнює S . Тоді з нерівності $1 + |u_n| \leq (1 + |u_n|) \leq e^{|u_n|}$ випливає, що $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_n = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| < (1 + |u_1|) + (1 + |u_2|) + \dots + (1 + |u_n|) = P_n \leq e^{|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|}.$$

З монотонності послідовностей $\{P_n\}$ та $\{S_n\}$, маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |u_k| = S \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1 + |u_k|) \leq e^S.$$

Оскільки $1 + |u_k| \geq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, то нескінченний добуток не дорівнює нулю, а отже, він збіжний.

Якщо ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбіжний, то з монотонного зростання послідовностей $\{P_n\}$ та $\{S_n\}$, нерівності $S_n \leq P_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ та умови розбіжності ряду $|S_n| \rightarrow \infty$ випливає, розбіжність послідовності $\{P_n\}$, а отже і добутку P

Нехай тепер нескінченний добуток абсолютно збіжний, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$. Тоді за тією ж самою нерівністю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P.$$

З монотонності послідовності S_n та її обмеженості зверху робимо висновки про абсолютну збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Приймаючи, що нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ розбіжний, з нерівності $S_n \leq P_n \leq e^{S_n}$ випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S < \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P < e^{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n}$. Та оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Отже ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбіжний. Це означає, що нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ та ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є одночасно абсолютно рівнозбіжними \triangleright

Теорема. З абсолютної збіжності нескінченного добутку випливає його збіжність, але не навпаки.

\triangleleft Нехай добуток $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |u_n|)$ збіжний. Покажемо, що збіжний і добуток $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$, тобто ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \ln|1 + u_n|$ та $\sum_{k=1}^{\infty} \arg(1 + u_k)$ збіжні.

Розглянемо комплексні числа $u_n = \alpha_n + i\beta_n$, де $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$. Тоді з того, що $\left(1 + \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\right)^2 = 1 + \alpha_k^2 + \beta_k^2 + 2\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \geq 1 + \alpha_k^2 + \beta_k^2 + 2\alpha_k$, маємо

$$\begin{aligned} \ln|1 + (\alpha_k + i\beta_k)| &= \frac{1}{2} \ln\left[(1 + \alpha_k)^2 + \beta_k^2\right] = \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(1 + \alpha_k^2 + \beta_k^2 + 2\alpha_k\right) \leq \frac{1}{2} \ln\left(1 + \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $\ln|1 + u_k| \leq \ln(1 + |u_k|)$.

Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + |u_k|)$ збіжний, то збіжним буде й ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + u_k)$.

Оцінимо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \arg(1 + u_k)$. Позначимо $\gamma_k = \frac{\beta_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2 + 2\alpha_k + 1}}$ та

$$|\varphi_k| = \left| \arg(1 + u_k) \right| = \left| \arcsin \frac{\beta_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2 + 2\alpha_k + 1}} \right|.$$

Тоді

$$\varphi_k = \arg(1 + u_k) = \arcsin \gamma_k, \text{ або } \gamma_k = \sin \varphi_k.$$

З необхідної умови збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, яка стверджує, що $|u_n| = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, випливає: $\alpha_n \rightarrow 0$ та $\beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тому можна вважати, що при достатньо великому n кут φ_n змінюється в інтервалі $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. У цьому разі має місце нерівність $\sin \varphi_n \geq \frac{2}{\pi} \varphi_n$, або $\varphi_n \leq \frac{\pi}{2} \sin \varphi_n$. Отже,

$$\left| \arcsin \frac{\beta_n}{\sqrt{1 + \alpha_n^2 + \beta_n^2 + 2\alpha_n}} \right| \leq \frac{\pi}{2} |\gamma_n| = \frac{\pi}{2} \frac{|\beta_n|}{\sqrt{1 + \alpha_n^2 + \beta_n^2 + 2\alpha_n}} \leq \frac{|\beta_n| \pi}{2}.$$

Оскільки $|u_n| > |\beta_n| \rightarrow 0$, то зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$, а отже, і ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \arg(1 + u_n)$.

Те, що зі збіжності добутку $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$ не випливає його абсолютна збіжність, ілюструє такий приклад.

Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$ збіжний, оскільки $P_n = \frac{n+1}{n}$ при непарному n та $P_n = 1$ - при парному n , отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 1$. Однак ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ розбіжний, тому розбіжним буде й добуток $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right) \triangleright$

7.9.4. Рівномірна збіжність нескінченних добутків

Нехай функції $u_n(z)$ визначені в області D .

Означення. Нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$ називається *рівномі-*

рно збіжним в області D , якщо рівномірно збігається в цій області послідовність частинних добутків $P_n(z) = \prod_{k=1}^n (1 + u_k(z))$.

Теорема. Нескінченний добуток рівномірно збігається в області D , якщо існують такі числа a_n , що в цій області має місце нерівність

$$|u_n(z)| \leq a_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad \text{і збігається нескінченний добуток}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k).$$

◁ Нехай існує така послідовність чисел $\{a_n\}$, що $|u_n(z)| < a_n \quad \forall z \in D$ і $\forall n \in \mathbb{N}$. Покладемо $n > m$. Оцінимо різницю

$$|P_n(z) - P_m(z)| = \left| \prod_{k=1}^m (1 + u_k) \left[\prod_{k=m+1}^n (1 + u_k(z)) - 1 \right] \right|.$$

Позначимо $\prod_{k=1}^n (1 + a_k) = S_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$|P_n(z) - P_m(z)| \leq \left| S_m \left(\prod_{k=m+1}^n (1 + u_k(z)) - 1 \right) \right|.$$

Оцінимо

$$\begin{aligned} & \left| \prod_{k=m+1}^n (1 + u_k(z)) - 1 \right| = |(1 + u_{m+1}(z))(1 + u_{m+2}(z)) \dots (1 + u_n(z)) - 1| = \\ & = |u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n + u_{m+1}u_{m+2} + u_{m+1}u_{m+3} + \dots + u_{n-1}u_n + \\ & \quad + u_{m+1}u_{m+2}u_{m+3} + \dots + u_{n-2}u_{n-1}u_n + \dots + u_{m+1}u_{m+2} \dots u_n| \leq \\ & \leq |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \dots + |u_n| + |u_{m+1}||u_{m+2}| + |u_{m+1}||u_{m+3}| + \dots + |u_{n-1}||u_n| + \\ & \quad + |u_{m+1}||u_{m+2}||u_{m+3}| + \dots + |u_{n-2}||u_{n-1}||u_n| + \dots + |u_{m+1}||u_{m+2}| \dots |u_n| \leq \\ & \leq a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n + a_{m+1}a_{m+2} + a_{m+1}a_{m+3} + \dots + a_{n-1}a_n + \\ & \quad + a_{m+1}a_{m+2}a_{m+3} + \dots + a_{n-2}a_{n-1}a_n + \dots + a_{m+1}a_{m+2} \dots a_n + 1 - 1 = \\ & = (1 + a_{m+1})(1 + a_{m+2}) \dots (1 + a_n) - 1 = \prod_{k=m+1}^n (1 + a_k) - 1. \end{aligned}$$

Оскільки ця нерівність вірна $\forall n > m \geq 1$, то

$$|P_n(z) - P_m(z)| \leq \left| S_m \left(\prod_{k=m+1}^n (1 + a_k) - 1 \right) \right| = |S_n - S_m|.$$

Зі збіжності добутку $\prod_{k=1}^{\infty} (1+a_k)$ випливає, що $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$ таке, що $|S_n - S_m| < \varepsilon$ при усіх $n, m > N$. За критерієм Коші послідовність $P_n(z)$, а значить, і нескінченний добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k(z))$ збігається в D рівномірно \triangleright

7.10. Запис аналітичної функції у вигляді нескінченного добутку

Нехай усі функції $u_k(z)$ ($k=1,2,\dots$), що входять у нескінченний добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k(z))$, аналітичні в деякій області D і такі, що кожен співмножник добутку відмінний від нуля. Припустимо, що існує множина додатних чисел a_k ($k=1,2,\dots$), яка утворює збіжний числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ і $\forall z \in D$ має місце нерівність $|u_k(z)| < a_k$. Тоді, за теоремою про абсолютну збіжність нескінченного добутку, доведена в п. 7.9.3, добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k(z))$ буде збіжним у кожній точці $z \in D$, а отже, буде утворювати деяку функцію $f(z)$, не рівну нулю в жодній області D . Доведемо, що $f(z)$ є аналітичною функцією в області D .

Для доведення твердження складемо послідовність частинних добутків $f_n(z) = (1+u_1(z))(1+u_2(z))\dots(1+u_n(z))$.

Покажемо, що ця послідовність аналітичних у D функцій рівномірно збігається в області D до $f(z)$. Позначимо

$$S_n = \prod_{k=1}^n (1+a_k), \quad S = \prod_{k=1}^{\infty} (1+a_k).$$

Останній нескінченний добуток збіжний за критерієм збіжності, доведеним у п. 7.9.3.

За критерієм рівномірної збіжності (п. 7.9.4) нескінченного добутку

послідовність функції $f_n(z)$ збігається рівномірно до $f(z)$. Це означає, що послідовність аналітичних в області D функцій $f_n(z)$ рівномірно збіжна, тобто її рівномірна границя $f(z)$ є аналітичною в D функцією.

7.11. Подання цілих і мероморфних функцій у вигляді нескінченних добутоків

Нехай маємо неспадну упорядковану за зростанням модулів послідовність точок $\{a_n\}$, $a_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Якщо серед них виявиться скінченна множина рівних між собою $a_m = a_{m+1} = \dots = a_{m+k}$, то ці числа можна розташувати в довільному порядку.

Побудуємо цілу функцію, що має в точках a_k нулі, причому кратність нуля $z = a_k$ дорівнює кількості елементів a_k у вказаній послідовності.

Лема. Якщо цілі функції $f(z) \not\equiv 0$ і $F(z) \not\equiv 0$ мають одні й ті самі нулі з однаковою кратністю кожного з них, то $f(z) = e^{g(z)}F(z)$, де $g(z)$ – деяка ціла функція (зокрема вона може бути сталою).

◁ Дійсно, відношення $\varphi(z) = \frac{f(z)}{F(z)}$ може мати особливі точки (полюси) тільки в нулях функції $F(z)$. Однак кожен нуль $F(z)$ є нулем функції $f(z)$ тієї самої кратності, тому функція $\varphi(z)$ не має жодного полюса у скінченній частині комплексної площини, а отже, є цілою.

Аналогічно міркуючи, можна стверджувати, що $\varphi(z)$ не має нулів у скінченній частині площини. Тому функція $h(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ теж є цілою.

Проінтегруємо рівність:

$$g_1(z) = \int_0^z h(t) dt = \int_0^z \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \ln \frac{\varphi(z)}{\varphi(0)} + 2k\pi i.$$

Звідси $\varphi(z) = \varphi(0)e^{g_1(z)} = e^{g_1(z) + \ln \varphi(0)} = e^{g(z)}$, де $g(z) = g_1(z) + \ln \varphi(0)$ теж є цілою функцією, тобто

$$f(z) = \varphi(z)F(z) = e^{g(z)}F(z) \triangleright$$

З доведеної леми випливає, що довільну цілу функцію $\varphi(z)$ $z \in D$, яка не має нулів в D , можна у цій області подати у вигляді

$$\varphi(z) = e^{g(z)},$$

де $g(z)$ – також ціла функція.

7.11.1. Теорема Вейерштрасса

Нехай $f(z)$ – ціла функція, яка має скінченну кількість однократних нулів у точках a_1, \dots, a_n і нуль кратністю λ у точці $z = 0$. Тоді багаточлен

$$F(z) = z^\lambda \left(1 - \frac{z}{a_1}\right) \left(1 - \frac{z}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

має ті ж самі нулі, що й $f(z)$. За доведеною лемою

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_k}\right).$$

Якщо функція має нескінченну кількість нулів, то задача виявляється складнішою. Спочатку потрібно побудувати хоча б одну цілу функцію, яка має задані нулі. Доведемо, що така функція існує.

Теорема. Для довільної нескінченної послідовності комплексних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, розташованих у порядку неспадання їх модулів і таких, що $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ та $a_1 \neq 0$, можна побудувати цілу функцію $f(z)$, нулі якої будуть збігатися з числами a_n , причому, якщо $a_{m+1} = a_{m+2} = \dots = a_{m+n} = b$, а всі інші числа не рівні між собою, то число $z = b$ має бути нулем кратністю n для функції $f(z)$.

◁ Нехай $\{k_n\}$ – послідовність невід'ємних цілих чисел таких, що ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{k_n+1}$ збігається при довільному $R \geq 0$. Для довільної послідовності $\{a_n\}$ такими числами k_n можуть бути, наприклад, числа $k_n = [\ln n]$, де $[A]$ є цілою частиною дійсного числа A . Дійсно, якщо

$\frac{|a_n|}{R} > e^2$ при $n > N_0$, то $\left(\frac{|a_n|}{R}\right)^{k_n+1} > e^{2([\ln n]+1)} > e^{2\ln n} = n^2$. Звідси маємо, що $\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{k_n+1} < \frac{1}{n^2}$ і, отже, наш ряд збіжний.

У деяких випадках, зокрема при $|a_n| = k$, k_n можна покласти рівними між собою і зокрема $k_n = 1$, $\forall n$, а якщо $a_n = n^2$, то $k_n = 0$, $\forall n$.

З означення границі та умови $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ зрозуміло, що для довільного як завгодно великого R є скінченна кількість чисел a_k , модулі яких менше R . Однак існує натуральне число $N = N(R)$ таке, що при $n > N(R)$ $|a_n| > 2R$.

Розглянемо нескінченні добутки

$$P(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \exp\left(\frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \dots + \frac{1}{j_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{j_k}\right) \right],$$

де числа $j_k \in \mathbb{Z}_0$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_k}\right)^{j_k+1}$ абсолютно й рівномірно збігається в довільно заданому крузі $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Наприклад, якщо $j_k = k - 1$, то ряд буде збіжним у крузі $R = \frac{1}{L}$, $L = \lim_{k \rightarrow \infty} k \sqrt{\frac{1}{|a_k|}}$.

У добутку $P(z)$ множник $\left(1 - \frac{z}{a_k}\right)$ зустрічається стільки разів, скільки a_k у послідовності $\{a_n\}$. Виберемо j_k так, щоб у крузі $|z| < 2R$ лежали точки a_k , $k = 1 \dots N$, а на границі не було б жодної з них.

Запишемо добуток $P(z)$ у вигляді двох співмножників:

$$P(z) = P_N(z)G_N(z),$$

де

$$P_N(z) = \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \exp\left(\frac{z}{a_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_k}\right)^2 + \dots + \frac{1}{j_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{j_k}\right).$$

Очевидно, що добуток $P_N(z)$ є цілою аналітичною функцією в деякому крузі $|z| < 2R$, де вона має нулі в точках a_1, a_2, \dots, a_N з відповідною кратністю. Добуток G_N запишемо так:

$$G_N = \exp \left\{ \sum_{k=N+1}^{\infty} \left[\ln \left(1 - \frac{z}{a_k} \right) + \frac{z}{a_k} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z}{a_k} \right)^2 + \dots + \frac{1}{j_k} \left(\frac{z}{a_k} \right)^{j_k} \right] \right\}.$$

Ураховуючи, що всі точки a_1, a_2, \dots, a_N ($|a_1| < |a_2| < \dots < |a_N| < |a_{N+1}|$) лежать зовні круга $\left| \frac{z}{a_{N+1}} \right| \leq q < \frac{1}{2}$, для $\ln \left(1 - \frac{z}{a_k} \right)$ (розглядаючи його головне значення) маємо розвинення в ряд

$$\ln \left(1 - \frac{z}{a_k} \right) = -\frac{z}{a_k} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z}{a_k} \right)^2 - \dots$$

Тоді

$$\begin{aligned} \left| \ln \left(1 - \frac{z}{a_k} \right) + \frac{z}{a_k} + \dots + \frac{z^{j_k}}{j_k a_k^{j_k}} \right| &= \left| \frac{z^{j_k+1}}{(j_k+1) a_k^{j_k+1}} + \frac{z^{j_k+2}}{(j_k+2) a_k^{j_k+2}} + \dots \right| \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{|z|}{|a_k|} \right)^{j_k+m} \leq \frac{R^{j_k+1}}{|a_k|^{j_k+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{R}{|a_j|} \right)^m = \frac{R^{j_k+1}}{|a_k|^{j_k+1}} \frac{1}{1 - \frac{R}{|a_k|}} \leq \frac{2R^{j_k+1}}{|a_k|^{j_k+1}}. \end{aligned}$$

Остання нерівність вірна для всіх $k \geq N(R)$. З неї та збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|a_k|} \right)^{j_k+1}$ маємо абсолютну й рівномірну в крузі $|z| < R$ збіжність ряду

$$\varphi_R(z) = \sum_{k=N(R)+1}^{\infty} \left\{ \ln \left(1 - \frac{z}{a_k} \right) + \frac{z}{a_k} + \dots + \frac{z^{j_k}}{j_k a_k^{j_k}} \right\},$$

а отже, його сума однозначна й аналітична в цьому крузі.

Очевидно, що $\forall n > N(R)$ аналітичною в цьому крузі буде й кожна функція $G_N^n = \prod_{k=N(R)+1}^n e^{\varphi_k(z)}$. Причому послідовність G_N^n буде збіжною.

Тому при переході до границі одержуємо функцію

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_N^n = G_N(z) = \prod_{k=N(R)}^{\infty} e^{\varphi_k(z)} =$$

$$= \prod_{k=N(R)}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k} \right) \exp \left(\frac{z}{a_k} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_k} \right)^2 \dots + \frac{1}{j_k} \left(\frac{z}{a_k} \right)^{j_k} \right),$$

яка аналітична всередині заданого круга Врахувуючи, що добуток скінченного числа функцій, які визначають $P_N(z)$ не впливає на збіжність нескінченного добутку $P(z)$, то $P(z) = P_N(z)G_N(z)$, як і функція $G_N(z)$, буде аналітичною всередині заданого круга і матиме нулі тільки в заданих точках $\{a_k\}$. Інших нулів вона не має.

Оскільки цей висновок вірний для круга довільного, з як завгодно великим радіусом R , то нескінченний добуток $P(z)$ збігається в усій скінченній частині комплексної площини до всюди аналітичної в ній функції (тобто до цілої) $f(z)$, яка має нулями точки $\{a_k\}$:

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k} \right) \exp \left(\frac{z}{a_k} + \dots + \frac{z^{j_k}}{j_k a_k^{j_k}} \right).$$

Якщо, крім того, точка $z = 0$ є нулем кратністю λ шуканої функції, то її зображення можна записати так:

$$f(z) = z^\lambda \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k} \right) \exp \left(\frac{z}{a_k} + \dots + \frac{z^{j_k}}{j_k a_k^{j_k}} \right).$$

Очевидно, що ця функція теж є цілою \triangleright

Остання формула називається *формулою Вейерштрасса*, або *нескінченним добутком Вейерштрасса*, а доведена вище теорема – теоремою Вейерштрасса

Уведення множника $e^{g(z)}$, де $g(z) = \left(\frac{z}{a_k} + \dots + \frac{z^{j_k}}{j_k a_k^{j_k}} \right)$, пов'язано з

тим, що у ряді випадків добуток $z^\lambda \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k} \right)$ може бути розбіжним.

Щоб позбутися цього недоліку, Вейерштрасс увів у нескінченний добуток додаткові множники вигляду $\exp \left\{ \frac{z}{a_k} + \frac{z^2}{2a_k^2} + \dots + \frac{z^{j_k}}{j_k a_k^{j_k}} \right\}$, які самі не

дорівнюють нулю в жодній точці площини \mathbb{C} і роблять побудований нескінченний добуток збіжним.

7.11.2. Розвинення функції $\sin z$ у нескінченний добуток

Використовуючи доведені в п.7.11 та 7.11.1 лему й теорему, за заданою множиною нулів цілої функції можемо побудувати її зображення у вигляді нескінченного добутку.

При практичній реалізації цього алгоритму значні труднощі виникають при визначенні функції $g(z)$ за даною функцією $f(z)$ (див. умову леми п.7.11). У деяких випадках для її визначення потрібно використовувати додаткові умови.

Наприклад, нехай $f(z) = \sin z$. Нулями цієї функції будуть точки $a_k = k\pi$, де k – довільне ціле число. За формулою Вейерштрасса можна записати

$$\sin z = e^{g(z)} z \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}}.$$

Тут показник степеня j_k вибрано сталою величиною, рівною 2, оскільки для збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_k} \right|^{j_k} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k\pi} \right|^{j_k}$ достатньо покласти $j_k = 2$.

Ураховуючи, що $\sin z$ є непарною функцією, нескінченний добуток можна згрупувати так:

$$\sin z = e^{g(z)} z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

Для визначення цілої функції $g(z)$ скористаємося логарифмічною похідною від обох частин останньої формули:

$$(\ln \sin z)' = \operatorname{ctg} z = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + k^2 \pi^2}.$$

Порівняємо одержані результати з формулою розкладу функції $\operatorname{ctg} z$ на суму простих дробів (п.7.6.3). Після зіставлення цих формул одержимо $g'(z) \equiv 0$, тобто $g(z) = c = \operatorname{const}$. Отже,

$$\sin z = cz \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

Звідси

$$\frac{\sin z}{z} = c \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right).$$

Після переходу до границі при $z \rightarrow 0$ одержимо $c = 1$. Формула

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right)$$

є остаточною формулою подання функції $\sin z$ у вигляді нескінченного добутку.

7.11.3. Зображення мероморфних функцій у вигляді відношення цілих функцій

Одним з важливих застосувань теореми Вейерштрасса є можливість зображення мероморфних функцій за допомогою відношення цілих функцій.

Нехай $f(z)$ – однозначна функція, яка у скінченній частині не має інших особливих точок, крім полюсів. Тоді можна побудувати деяку цілу функцію $\varphi(z)$, яка має своїми нулями точки, що є полюсами функції $f(z)$, причому порядки кратності нулів $\varphi(z)$ збігаються з порядками полюсів $f(z)$.

Добуток цих функцій $F(z) = f(z)\varphi(z)$ буде цілою функцією, якщо для кожного полюса a_k функції $f(z)$ покласти $F(a_k) = \lim_{z \rightarrow a_k} F(z)$, тобто усунути особливість у кожній усувній особливій точці $F(z)$. Одержимо $f(z) = \frac{F(z)}{\varphi(z)}$. Отже, мероморфну функцію $f(z)$ можна подати у вигляді відношення двох цілих функцій.

Зауважимо, що функції $\varphi(z)$ і $F(z)$ не мають спільних нулів, оскільки в точках, де $\varphi(z)$ дорівнює нулю, добуток $F(z) = f(z)\varphi(z)$ має скінченне, відмінне від нуля, значення.

З доведеного випливає, що мероморфні функції $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ та $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ можуть подаватися у вигляді відношення двох цілих функцій.

7.11.4. Задача Миттаг – Леффлера

Узагальненням попередньої задачі є така. Нехай задано: нескінченну множину особливих точок $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ і

$g_k \left(\frac{1}{z - a_k} \right)$ – головні частини ряду Лорана розвинення деякої (невідомої) функції $f(z)$. Потрібно побудувати однозначну в усій площині \mathbb{C} функцію $f(z)$, яка всі особливості має в точках a_k і таку, що різниця $f(z) - g_k \left(\frac{1}{z - a_k} \right)$ буде аналітичною в кожній точці a_k .

Не розглядаючи задачі в цілому, зупинимось на частинному випадку, коли всі точки a_k є простими полюсами з лишками, рівними одиниці, тобто $g_k \left(\frac{1}{z - a_k} \right) = \frac{1}{z - a_k}$.

Покладемо $j_k = k$ і за формулою Вейерштрасса побудуємо цілу функцію $\varphi(z)$, яка має своїми нулями точки a_k :

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k} \right) \exp \left\{ \frac{z}{a_k} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_k} \right)^2 + \dots + \frac{1}{k-1} \left(\frac{z}{a_k} \right)^{k-1} \right\}.$$

Якщо тепер узяти логарифмічну похідну від обох частин нерівності, то одержимо

$$f(z) = \frac{d}{dz} (\ln \varphi(z)) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} + \frac{z}{a_k^2} + \dots + \frac{z^{k-2}}{a_k^{k-1}} \right].$$

Легко показати, що цей ряд, складений з раціональних функцій, збіжний і зображує мероморфну функцію $f(z)$ із простими полюсами в точках $z = a_k$ та лишками в них, рівними одиниці.

7.12. Деякі підходи до дослідження нескінченних добутків

Розглянемо ідею обчислення та дослідження збіжності нескінченних добутків на таких прикладах.

1. Довести рівності: а) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right) = 2$; б) $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}$.

◁ а) Оскільки

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k(k+2)} \right) = \prod_{k=1}^n \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \frac{((n+1)!)^2 \cdot 2}{n!(n+2)!} = \frac{2(n+1)}{n+2},$$

то $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 2.$

б) Маємо

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)} = \\ &= \frac{2(n-1)!}{(n+1)!} \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k + 1}{(k-1)^2 + (k-1) + 1} = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n^2 + n + 1}{3}, \\ &\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{2}{3} \triangleright \end{aligned}$$

2. Дослідити на збіжність добутки $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{i}{n} \right)$ та $\prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 + \frac{i}{n} \right|$.

◁ Відповідно до критерію збіжності, зазначені нескінченні добутки збігаються чи розбігаються разом з рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{i}{n^2} \right) + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \quad i$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left| 1 + \frac{i}{n} \right| = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$ збігається $\left(\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \sim \frac{1}{n^2} \right)$, а ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$ розбігається $\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \right)$, то перший нескінченний добуток розбігається, а другий – збігається ▷

3. Знайти області збіжності нескінченних добутків:

а) $\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{z^n}{3^n} \right)$; б) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^n}{n^2} \right)$; в) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}}.$

а) Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n \neq 0$ при $|z| \geq 3$, то для цих значень z нескінченний добуток розбігається. Якщо $|z| < 3$, то зазначений нескінченний добуток збігається абсолютно, тому що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{3^n}$ збігається. При цьому збіжність ряду, а отже і добутку, рівномірна в будь-якому крузі $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r < 3\}$. Отже, даний нескінченний добуток визначає в крузі K_r аналітичну функцію $P(z)$.

б) Нескінченний добуток збігається в крузі $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R \leq 1\}$. Це випливає з абсолютної й рівномірної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ у цьому крузі.

в) Даний добуток є нескінченним добутком Вейерштрасса при $a_n = -n$ і $J_n = 1$. Отже, він збігається в \mathbb{C} і є аналітичною функцією в \mathbb{C} .

ТЕМА VIII. ТЕОРІЯ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

У темі 4 ми розглянули приклади відображень найпростіших областей однолистої елементарних аналітичних функцій, увели поняття поверхні Рімана та побудували їх для таких неоднолистих функцій, як степенева z^n , показникова e^z , функція Жуковського, та обернених до них.

Аналіз побудови відображень, обернених до багатолістих функцій, зокрема узагальненої степеневої, показав складність таких досліджень. Крім того, викладені вище методи побудови конформних відображень дозволяють розв'язувати лише прості задачі, для яких відомі елементарні аналітичні відображальні функції.

Узагалі, геометрична задача побудови конформного відображення однієї області D , заданої у площині змінної z , на іншу задану область D_1 , розташовану в площині W , зводиться до побудови аналітичної в D функції $w = f(z)$, яка набуває кожного свого значення $w \in D_1$ тільки один раз.

При розв'язанні цієї задачі у припущенні, що одна з розглянутих областей, наприклад D_1 , обмежена, необхідно виключити випадок, коли область D збігається з розширеною площиною або розширеною площиною з виколотою точкою. У випадку, коли D збігається з розширеною площиною та відображається конформно на D_1 , відображальна функція $w = f(z)$ має бути цілою та обмеженою, оскільки область D_1 обмежена. Однак за теоремою Ліувілля така функція є сталою, тобто $f'(z) = 0$, а отже, ця функція не реалізує конформне відображення.

Якщо ж область D є розширеною комплексною площиною з виколотою точкою $z = z_0$, то за допомогою дробово-лінійного відображення $w = \frac{1}{z - z_0}$ вона переводиться в розширену комплексну площину.

Далі нас цікавитимуть існування функції $w = f(z)$, яка конформно відображає область D на D_1 , коли таке відображення буде однолистим, та відповідність, що встановлюється між точками, які обмежують ці області.

Перш ніж перейти до побудови необхідної теорії, зазначимо, що однією з умов існування відображення області D на D_1 є їх однакова зв'язність. Неможливо відобразити, наприклад, однозв'язну область D на неоднозв'язну область D_1 . Дійсно, припустивши, що обидві області

скінченні, побудуємо в області D_1 замкнену жорданову криву $\Gamma \in D_1$, яка містить усередині один з двох межових континуумів. Прообразом Γ буде замкнена жорданова крива $\gamma \in D$. При неперервному стягуванні γ у деяку точку $\xi \in D$ крива Γ теж неперервно деформується та стягується до деякої точки $\zeta \in D_1$, що очевидно неможливо.

Отже, якщо можливе конформне відображення області D на одностов'язну область D_1 , то область D теж має бути одностов'язною. При цьому, якщо обмежитись випадком одностов'язних областей, то достатньо дослідити відображення D і D_1 на одиничний круг. Це твердження ґрунтується на тому, що при існуванні відображень D і D_1 на одиничний круг загальне відображення D на D_1 можна одержати як суперпозицію відображення D на одиничний круг та оберненого відображення одиничного круга на D_1 .

Основу побудови загальної теорії конформних відображень становлять три принципи: збереження області, взаємно однозначної відповідності границь та симетрії Рімана – Шварца.

Разом з цими принципами далі розглянемо таке базове поняття, як відображення околу довільної точки аналітичності функції, установимо умови локальної однолистості відображення, доведемо теореми про збереження області та обернене однолисте відображення.

8.1. Однолисті та n -листі околи. Принцип збереження області

Нагадаємо, що аналітична функція $f(z)$ однолиста в околі точки z_0 , якщо $\forall z_1, z_2$, які належать цьому околу, з умови $z_1 \neq z_2$ випливає нерівність $f(z_1) \neq f(z_2)$.

8.1.1. Теорема про збереження однолистого околу

Означення. Під *узагальненим окомом точки* w_0 розуміємо сукупність кругів з довільно малим радіусом із центром у точці w_0 , розрізаних уздовж деякої однієї й тієї самої лінії від точки w_0 до границі кожного з кругів, покладених один поверх іншого та склеєних між собою за неперервністю.

Якщо кількість таких кругів дорівнюватиме n , то узагальнений окіл будемо називати n -листим.

З'ясуємо тепер, за яких умов, накладених на функцію $f(z)$, одноли- стий окіл точки z_0 відобразиться на одноли- стий окіл точки $w_0 = f(z_0)$.

Теорема про збереження однолисто- го околу (про локальну одноли- стість). Для того, щоб аналітична функція $w = f(z)$ здійснювала одно- листе відображення околу точки z_0 на окіл точки $w_0 = f(z_0)$, необхі- дно й достатньо, щоб $f'(z_0) \neq 0$.

◁ Нехай околом точки z_0 є круг $|z - z_0| < \rho$, межу якого позначимо через γ , а її образ у площині w – через $\tilde{\gamma}$. Нехай $f'(z_0) \neq 0$. Тоді фун- кцію $f(z)$ в околі точки z_0 можна записати у вигляді степеневого ряду $w = w_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$, $c_1 = f'(z_0) \neq 0$.

Візьмемо довільну точку b , яка лежить в околі точки $w_0 = f(z_0)$. Покажемо, що в околі точки z_0 є тільки одна точка a така, що $f(a) = b$ (рис. 8.1, 8.2).

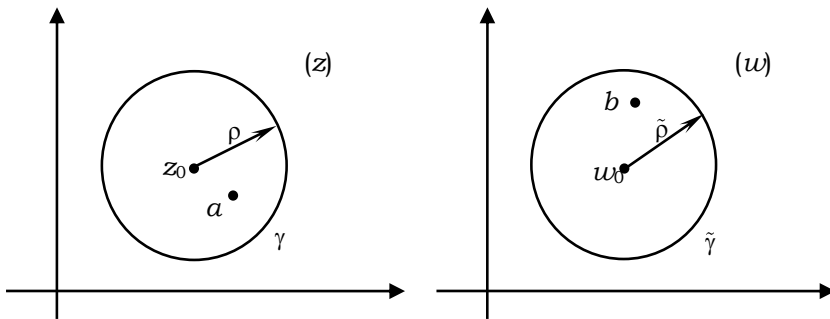


Рис. 8.1

Рис. 8.2

Складемо функцію $\Phi(z) = f(z) - b = w_0 - b + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$

Позначимо $\varphi(z) = w_0 - b + c_1(z - z_0)$ та $\psi(z) = c_2(z - z_0)^2 + \dots$ і за- пишемо суму $\Phi(z) = \varphi(z) + \psi(z)$.

Тоді, згідно зі структурою функцій $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ і достатньо малим

значенням ρ , маємо $|\varphi(z)|_\gamma > |\psi(z)|_\gamma$. За теоремою Руше кількість нулів функцій $\Phi(z)$ і $\varphi(z)$ в околі точки z_0 , обмеженому кривою γ , одна й та сама. Однак рівняння $\varphi(z) = w_0 - b + c_1(z - z_0) = 0$ має один корінь $a = z_0 + (b - w_0)/c_1$, який належить околу точки z_0 . Отже, функція $\Phi(z)$ теж має тільки один нуль в околі $z = z_0$, тобто для довільного b з околу w_0 існує тільки одна точка a , що лежить в околі z_0 така, що $f(a) = b$.

Нехай функція $f(z)$ аналітична в точці z_0 і $f^{(n)}(z_0) = 0$, $(n = \overline{1, k-1})$, а $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Тоді розвинення $f(z)$ у степеневий ряд в околі точки z_0 має вигляд

$$w = f(z) = w_0 + c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots$$

$$\text{Побудуємо функцію } \omega = \sqrt[k]{w - w_0} = c_k^{\frac{1}{k}}(z - z_0) \left[1 + \frac{c_{k+1}}{c_k}(z - z_0) + \dots \right]^{\frac{1}{k}}.$$

Бачимо, що $\omega(z)$ у точці z_0 аналітична й розвивається в ряд

$$\omega(z) = c_k^{\frac{1}{k}}(z - z_0) + c_{k+1}'(z - z_0)^2 + \dots$$

За щойно доведеним, однолистяний окіл точки z_0 переходить в однолистяний окіл (кружечок) із центром у початку координат площини Ω . Однак, оскільки функція $\omega = \sqrt[k]{w - w_0} \in \mathcal{K}$ -значною, то кожному значенню Ω з даного околу відповідає k значень W із різних гілок цієї багатозначної функції. Отже, одержаний у площині Ω окіл матиме k прообразів і в площині W , тобто якщо $f^{(n)}(z_0) = 0$, $(n = \overline{1, k-1})$, $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, то однолистяний окіл точки z_0 відобразиться у k -листяний окіл точки w_0 (рис. 8.3) \triangleright

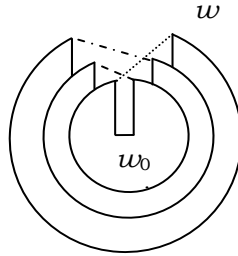


Рис. 8.3

8.1.2. Обернене однолисте відображення

Теорема про обернене однолисте відображення. Функція $z = \varphi(w)$, обернена до однозначної, аналітичної та однолистої в D функції $w = f(z)$, теж є однозначно аналітичною в області $G = f(D)$.

◁ Однозначність $z = \varphi(w)$ випливає з однолистості $w = f(z)$. Дійсно, якщо $z_1 \neq z_2 \in D$ є двома значеннями функції $\varphi(w)$ у точці $w_0 \in G$, то припущення $f(z_1) = f(z_2) = w_0$ суперечить однолистості $f(z)$. Аналогічно показуємо, що однолистість $\varphi(w)$ випливає з однозначності $f(z)$. Якщо покласти $\varphi(w_1) = \varphi(w_2) = z_0 \in D$, де $w_1 \neq w_2 \in G$, то це означає, що $f(z_0) = w_1$, і $f(z_0) = w_2$, а останні рівності суперечать однозначності $f(z)$.

Доведемо далі неперервність $\varphi(w)$. Нехай $w_0 \in G$ і $\varphi(w_0) = z_0 \in D$. Побудуємо для z_0 замкнений окіл $K_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \rho\}$. Тоді кожна точка w' , яка належить кругу $\tilde{K}_0 = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| \leq \mu\}$, де $\mu = \min_{|z - z_0| = \rho} |f(z) - w_0| > 0$, буде значенням $f(z)$ у деякій точці z' , яка лежить усередині круга K_0 . Інакше кажучи, значення $z' = \varphi(w')$ лежить усередині круга K_0 , якщо $w' \in \tilde{K}_0$. Далі $\forall \varepsilon > 0$ виберемо $\rho < \varepsilon$. Тоді можна стверджувати: якщо для значення $\mu = \mu(\rho)$, яке відповідає

цим ε та ρ , виконується нерівність $|w' - w_0| < \mu$, то $|\varphi(w') - \varphi(w_0)| < \rho < \varepsilon$. Отже, неперервність $\varphi(w)$ доведено.

З'ясуємо далі диференційованість функції $\varphi(w)$ у довільній точці $w_0 \in G$. Нехай $\varphi(w_0) = z_0$, тоді за неперервністю для $w \in G$, $w \neq w_0$ при відображенні $\varphi(w) = z$ маємо, що $w \rightarrow w_0$ при $z \rightarrow z_0$ і $\varphi(w_0) = z_0$. Оскільки $f(z)$ аналітична і однолиста в околі точки z_0 , то $f'(z)$ існує, $f'(z_0) \neq 0$, а

$$\varphi'(z) = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Отже, функція $\varphi(w)$ диференційовна \triangleright

Наслідок. З доведеної теореми випливає така топологічна властивість аналітичних функцій: довільна аналітична функція окіл точки аналітичності відображає в деякий узагальнений окіл.

8.1.3. Теорема про збереження області

Означення. Під областю в узагальненому сенсі розуміють деяку множину точок E , що задовольняють такі дві умови:

а) якщо точка z_0 належить E , то разом з нею множині E належить її однолистий або скінченнолистий окіл, тобто області належать точки її узагальненого околу;

б) довільні дві точки множини E можна сполучити ламаною, що складається з точок множини E .

Прикладом області в узагальненому сенсі може бути дволістий круг у площині змінної w , одержаний при відображенні круга $|z| \leq R$ функцією $w = z^2$.

Теорема про збереження області. Довільна аналітична функція, відмінна від сталої, область свого визначення відображає в область в узагальненому сенсі.

\triangleleft Нехай $f(z)$ є аналітичною функцією в області D і $f(z) \neq \text{const}$.

Розглянемо множину нулів похідної $f'(z)$. Із властивості єдиності аналітичних функцій випливає, що множина нулів є скінченною множиною ізольованих точок. Розглянемо в області D довільну точку z_0 . Тут може бути два випадки.

1. У точці $z = z_0$ похідна $f'(z_0) \neq 0$. Тоді однолистяний окіл точки z_0 переходить в однолистяний окіл точки w_0 у площині W .

2. Якщо $f'(z_0) = 0$, то однолистяний окіл точки z_0 переходить у k -листяний окіл у площині W (множина таких точок ізольована).

Отже, кожна точка області D разом зі своїм оточенням переходить в однолистяний або k -листяний окіл у площині W . Пункт а) означення області в узагальненому сенсі виконується. Точкам області D буде відповідати множина точок D_1 площини W , складена з її оточень в узагальненому сенсі. Перевіримо виконання п. б).

Візьмемо дві точки: w_0 і w_1 ($w_0, w_1 \in D_1$). У площині Z їм будуть відповідати точки z_0 і z_1 (рис. 8.4). З'єднаємо точки z_0 і z_1 неперервною кривою L , яка лежить в області D . Неперервній кривій L , заданій у площині Z , у площині W відповідає крива L' , яка сполучає w_0 та w_1 і складається з точок множини D_1 . Оскільки відображення здійснюється аналітичною функцією $w = f(z)$, то крива L' неперервна, отже, за лемою Гурса, її можна апроксимувати ламаною, яка цілком належить D_1 . Це доводить, що множина D_1 задовольняє другу умову означення області в загальному сенсі \triangleright

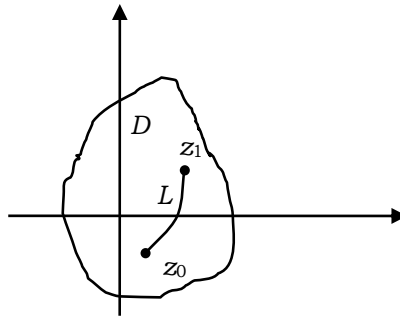


Рис. 8.4

8.1.4. Образ околу особливої точки відображальної функції

Нехай $z = z_0 \in D$ є особливою точкою однозначного характеру функції $w = f(z)$, яка відображає область D . Якщо ця точка усувна для $f(z)$, то функцію $f(z)$ можна довизначити в точці $z = z_0$ та одержати аналітичну функцію.

У випадку, коли точка $z = z_0$ є істотно особливою, за теоремою Сохоцького в її околі функція може набувати довільних значень, крім одного, а тому таке відображення не буде конформним.

При дослідженні характеру конформного відображення околу полюса виникає питання: чи буде впливати порядок полюса відображальної функції на однолистість відображення?

Нехай однозначна та аналітична в обмеженій області D функція $f(z)$ має полюси. З умови однолистісті випливає, що в цій області $f(z)$ може мати тільки один полюс. Інакше для різних полюсів $z_1 \neq z_2$ мала б виконуватися рівність $f(z_1) = f(z_2) = \infty$, що суперечить однолистісті функції.

Покажемо, що в однолистих функціях може бути тільки простий полюс. Припустимо, що однолиста функція $f(z)$ у точці z_0 має полюс порядку p , тобто в околі точки z_0 має місце розвинення в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-z_0)^p} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + \dots \quad (p \geq 1, c_{-p} \neq 0).$$

Оскільки $f(z)$ однолиста в околі точки z_0 , то однолистою буде й функція

$$\frac{1}{f(z)} = a_p(z-z_0)^p + a_{p+1}(z-z_0)^{p+1} + \dots, \text{ де } a_p = \frac{1}{c_{-p}} \neq 0.$$

Однак за теоремою про збереження однолистого околу це можливо лише при $p = 1$, тобто коли полюс простий.

Будемо тепер вважати, що точка z_0 є нескінченно віддаленою.

Розглянемо поведінку відображення в точці z_0 , коли функція $f(z)$ аналітична в ній. В околі такої точки має місце розвинення функції $f(z)$ у степеневий ряд $f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$

У цьому випадку всі похідні в точці $Z = \infty$ дорівнюють нулю:

$$f'(\infty) = f''(\infty) = \dots = f^{(n)}(\infty) = \dots = 0.$$

Однак характер відображення в цьому разі суттєво залежить не від похідних, а від коефіцієнтів розвинення c_1, c_2, \dots . Дійсно, якщо $c_1 = c_2 = \dots = c_{p-1} = 0$, а $c_p \neq 0$, ($p \geq 1$), то в довільному околі точки $Z = \infty$ знайдеться p різних точок, у яких $f(z)$ набуватиме одного й

того самого значення. Отже, для однолистості функції $f(z)$ в області D , яка містить нескінченно віддалену точку та аналітична в ній, необхідно, щоб у цій точці $c_1 = -\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) \neq 0$.

Якщо точка $Z = \infty$ є полюсом порядку p функції $f(z)$, то в околі точки $Z = \infty$ матимемо розвинення

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_p z^p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{z^k}.$$

З цього випливає, що функція буде однолистою, коли $c_1 \neq 0$, а $c_2 = c_3 = \dots = c_p = 0$, тобто $Z = \infty$ є простим полюсом.

Отже, можна стверджувати, що функція $f(z)$ буде однолистою в околі точки z_0 , якщо:

- 1) функція $f(z)$ аналітична в точці z_0 і $f'(z_0) \neq 0$;
- 2) в області однолистості D , яка містить точку $z_0 = \infty$, функція $f(z)$ аналітична та $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) \neq 0$;
- 3) в області D функція $f(z)$ має тільки один полюс першого порядку.

Зауваження. Теорема про обернене однолисте відображення буде вірною й для областей, які містять нескінченно віддалену точку, якщо її формулювання доповнити тим, що функція $Z = \varphi(w)$, обернена однолистій, може мати один простий полюс.

Зауваження. Взаємно однозначне відображення області D на область D_1 , яке реалізується однолистою та аналітичною в області D функцією $w = f(z)$, є конформним відображенням першого роду в усіх точках області D .

◁ Для доведення цього твердження скористаємося теоремою про зв'язок аналітичності відображальної функції з конформністю відображення (п. 3.2.1) і проаналізуємо можливі випадки.

Якщо область D містить точку $z_0 \neq \infty$ і $f(z_0) \neq \infty$, то твердження теореми випливає з того, що $f(z)$ аналітична в D і $f'(z_0) \neq 0$. Коли $z_0 \neq \infty$, а $f(z_0) = \infty$, з однолистості $f(z)$ маємо

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + \dots \quad (c_{-1} \neq 0).$$

Побудуємо відображення

$$\varphi = \frac{1}{w} = \frac{1}{f(z)} = a_1(z - z_0) + \dots,$$

де, за теоремою про обернене відображення, $a_1 = \frac{1}{c_{-1}} = \frac{d\varphi}{dz} \Big|_{z=z_0} \neq 0$

. Оскільки відображення $\varphi = \frac{1}{f(z)}$ є конформним у точці z_0 , то відображення $w = f(z)$ конформне в тій самій точці.

Випадок $z_0 = \infty$ легко звести до вже розглянутого, якщо скористатися перетворенням інверсії $z' = \frac{1}{z}$. Тут знову ж можливі два випадки: або $f(\infty) \neq \infty$, тоді $w = f\left(\frac{1}{z'}\right) = c_0 + c_1 z' + c_2 z'^2 + \dots$ ($c_1 \neq 0$), або $f(\infty) = \infty$, тоді

$$w = f\left(\frac{1}{z'}\right) = \frac{c_{-1}}{z'} + c_0 + c_1 z' + \dots, \quad (c_{-1} \neq 0) \triangleright$$

8.2. Принципи взаємоднозначної відповідності меж та однолистості

Поставимо питання: у яких випадках функція $w = f(z)$ область своєї аналітичності переводить в однолисту область у площині W ?

Спираючись на теорему про локальну однолистість, можна стверджувати: щоб функція $f(z)$ була однолистою в скінченній області D , необхідно, щоб похідна $f'(z_0)$ у цій області не мала нулів. Однак ми можемо навести приклади, коли ця умова не є достатньою.

Візьмемо функцію $w = z^3$, визначену в півкільці $D = \{z : 1 < |z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$ (рис. 8.5). Очевидно, що $w' \neq 0$ у жодній його точці. Однак у точках $z_1 = re^{i\varphi}$ і $z_2 = re^{i\varphi + \frac{2\pi}{3}}$ для довільного значення φ із проміжку $0 \leq \varphi \leq \pi/3$, а $1 < r < 2$, значення $w(z_1)$ та $w(z_2)$ будуть однакові.

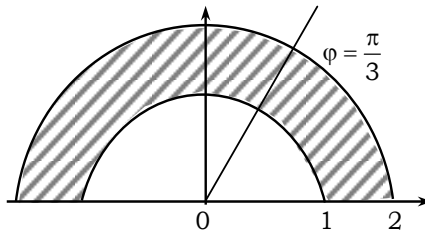


Рис. 8.5

Аналогічно функція $w = e^z$ аналітична в усій комплексній площині та $w' = e^z \neq 0$ у жодній точці, але вона нескінченнолиста.

Теорема про збереження околу має локальний характер, оскільки окіл є локальною однозв'язною множиною. У наведених прикладах ця умова порушується.

Відповідь на питання, у яких випадках при відображенні однолистість області зберігається, розглянемо нижче.

8.2.1. Відповідність границі при конформних відображеннях

Ми проаналізували конформні відображення областей, маючи на увазі взаємно однозначну відповідність між їх внутрішніми точками. Однак часто буває необхідно знати властивості функцій $w = f(z)$, за допомогою яких відбуваються ці відображення, при прямуванні z до межі областей.

Теорема. Нехай D та D_1 – однозв'язні області, кожен з яких обмежено простим замкненим кусково-гладким контуром, які відповідно позначимо γ та γ_1 . Тоді функцію $w = f(z)$, яка конформно відображає область D на D_1 , можна продовжити за неперервністю на замикання області D , і це продовження устанавлює взаємно однозначну та взаємно неперервну відповідність між точками замкнених областей \bar{D} і \bar{D}_1 .

◁ Для доведення теореми достатньо показати, що для довільної точки $z_0 \in \gamma$ існує границя функції $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$ уздовж довільного шляху, який не виходить з області D . Зрозуміло, що ця границя має бути точкою γ_1 . У такому випадку ми можемо довізначити функ-

цію $f(z)$ у точках $z \in \gamma$ її граничними значеннями, і вона буде неперервною в замкненій області \bar{D} . Оскільки в процесі доведення теореми області D і D_1 можна поміняти місцями, то аналогічно можна встановити, що в замкненій області \bar{D}_1 буде неперервною й функція $z = \varphi(w)$, обернена до $w = f(z)$. Це означає, що відображення замкненої області \bar{D} на замкнену область \bar{D}_1 , установлене функцією $w = f(z)$, взаємно однозначне та взаємно неперервне.

Доведемо тепер, що в кожній точці $z_0 \in \gamma$ існує границя функції $f(z)$, якщо точка z прямує до z_0 , залишаючись усередині області D .

Припустимо, що такої границі не існує. Тоді існують дві послідовності точок $\{z_n^{(1)}\}$, $\{z_n^{(2)}\}$, $z_n^{(1)} \in D$, $z_n^{(2)} \in D \quad \forall n = 1, 2, \dots$, які збігаються до $z = z_0$, тобто для цих послідовностей $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n^{(2)} = z_0$, але, за припущенням, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^{(1)}) = w^{(1)}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^{(2)}) = w^{(2)}$, де $w^{(1)} \neq w^{(2)}$.

Позначимо послідовність значень функції в цих точках через $f(z_n^{(1)}) = w_n^{(1)}$ та $f(z_n^{(2)}) = w_n^{(2)}$. Вважатимемо, що $|w_n^{(1)} - w_n^{(2)}| \geq \alpha > 0$, $\forall n = 1, 2, \dots$.

Через точки $w_n^{(1)}$ і $w_n^{(2)}$ можна провести криві Γ_1 і Γ_2 так, щоб відстань між ними була не менше деякої сталої $\beta \geq \alpha$ та вони повністю лежали всередині області D_1 (рис. 8.6).

Нехай $R = \min \left\{ |z_1^{(1)} - z_0|, |z_1^{(2)} - z_0| \right\}$. Прообрази кривих Γ_1 і Γ_2 в області D позначимо $\tilde{\Gamma}_1$ та $\tilde{\Gamma}_2$. Криві $\tilde{\Gamma}_1$ і $\tilde{\Gamma}_2$ проходять через множини точок $\{z_n^{(1)}\}$ та $\{z_n^{(2)}\}$ відповідно, отже, вони перетинають усі можливі кола $|z - z_0| = r$ при довільному $r < R$ (рис. 8.7).

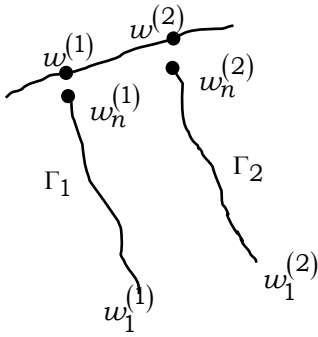


Рис. 8.6

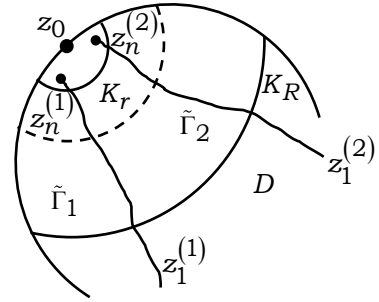


Рис. 8.7

Точку першого перетину кривої $\tilde{\Gamma}_1$ (при русі від точки $z_1^{(1)}$) з колом $|z - z_0| = r$ позначимо через z_r^* , а першу точку перетину кривої $\tilde{\Gamma}_2$ з цим колом – через z_r^{**} . Образи точок z_r^* та z_r^{**} позначимо через w_r^* та w_r^{**} відповідно.

Оскільки точки w_r^* та w_r^{**} лежать на кривих Γ_1 і Γ_2 , то, за припущенням, має місце нерівність

$$\beta \leq |w_r^* - w_r^{**}| = \left| \int_{z_r^*}^{z_r^{**}} f'(z) dz \right| \leq \int_{K_r} |f'(z) dz|,$$

де K_r є дугою кола $|z - z_0| = r$, яка повністю лежить в області D (рис. 8.7). Для оцінки останнього інтеграла скористаємося нерівністю Шварца

$$\left(\int \phi \psi ds \right)^2 \leq \int \phi^2 ds \cdot \int \psi^2 ds,$$

у якій покладемо $\phi = |f'(z)|$, а $\psi \equiv 1$.

Урахуємо також, що $\int_{K_r} |dz| = L$, де L є довжиною дуги K_r , а отже,

$$L \leq 2\pi r. \text{ Тоді попередня оцінка набуде вигляду } \beta^2 \leq 2\pi r \int_{K_r} |f'(z)|^2 |dz|.$$

Позначимо через D_R перетин області D і круга $|z - z_0| < r$ (рис. 8.8). Розділивши обидві частини нерівності на $2\pi r$ і проінтегрувавши їх по r від деякого $\varepsilon > 0$ до R , одержимо

$$\frac{\beta^2}{2\pi} \ln \frac{R}{\varepsilon} \leq \int_{K_r}^R dr \int_{K_r} |f'(z)|^2 |dz| \leq \iint_{D_R} |f'(z_0 + re^{i\theta})|^2 r dr d\theta.$$

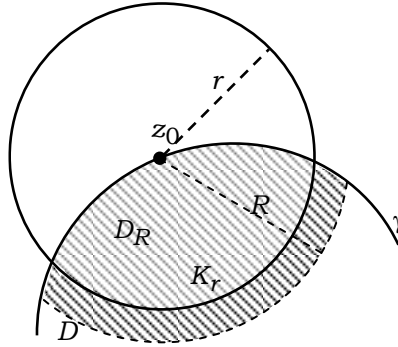


Рис. 8.8

Цей інтеграл дорівнює площі області D_R при конформному відображенні $w = f(z)$. Площа не залежить від числа $\varepsilon > 0$ і не може бути більшою площі області D_1 . Звідси випливає, що величина $\frac{\beta^2}{2\pi} \ln \frac{R}{\varepsilon}$ при довільному значенні $\varepsilon > 0$ обмежена скінченним значенням – площею області D_1 . Однак при $\beta \geq \alpha > 0$ це неможливо. Одержане протиріччя доводить твердження.

Аналогічно досліджуємо обернену функцію $z = \varphi(w)$ ▷

Твердження теореми буде вірним і у випадку скінченнозв'язних областей, обмежених скінченною кількістю замкнених кусково-гладких кривих. Для цього вказані області потрібно розрізати на скінченну кількість однозв'язних областей, до яких можна застосувати доведену вище теорему.

8.2.2. Принцип однолистості

Теорема. Нехай $w = f(z)$ є аналітичною функцією в замкненій однозв'язній області $D \cup \gamma$, обмеженій спрямованим контуром γ . Якщо функція $f(z)$ взаємоднозначно відображає контур γ на деякий замкнений контур γ' , розташований у площині змінної w , і при цьому

зберігається напрямок обходу контуру, то відображення $f(z)$ буде одностороннім в області D , тобто $f(z)$ буде здійснювати взаємоднозначне відображення області D на область D' , обмежену контуром γ' (рис. 8.9, 8.10).

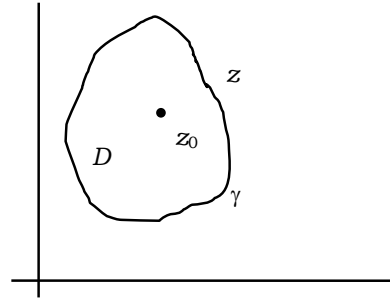


Рис. 8.10

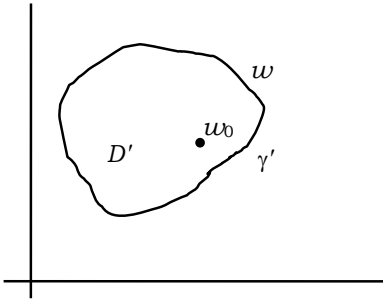


Рис. 8.9

◁ Нехай $w_0 \in D'$. Складемо різницю $w - w_0$. Постає питання: скільки разів $f(z) - w_0$ усередині області, обмеженої кривою γ , перетвориться на нуль? Оскільки функція $f(z) - w_0$ усередині контуру γ полюсів не має, то за теоремою про логарифмічний лишок кількість нулів функції $f(z) - w_0$ усередині γ буде визначатися за формулою

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz .$$

Зробивши заміну $w = f(z)$ і врахувавши, що $f'(z) dz = dw$, а w_0 лежить усередині контуру γ' , за теоремою Коші маємо

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{dw}{w - w_0} = 1.$$

Отже, кожного значення, яке лежить усередині γ' , функція набуває тільки один раз \triangleright

Зауваження. Доведена теорема буде вірною й у випадку, коли область $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ і містить точку $z = \infty$ або $f(z)$ має простий полюс у D .

Щоб переконатися в істинності цього твердження, достатньо виконати допоміжне дробово-лінійне відображення. Зокрема, якщо $z_0 = \infty$ є точкою аналітичності, то використовуємо відображення $z' = \frac{1}{z}$, яке переводить окіл нескінченно віддаленої точки в окіл початку координат. Якщо $w_0 = f(z_0) = \infty$, тобто скінченна чи нескінченна точка z_0 є полюсом $f(z)$, то допоміжне відображення $\varphi = \frac{1}{f(z)}$ переводить функцію $f(z)$ із полюсом у точці $z = z_0$ у функцію $\varphi(z)$ з нулем у тій самій точці. Отже, такі допоміжні відображення зводять задачу до розглянутої вище задачі, коли і значення незалежної змінної, і значення функції скінченні.

Винятком, на який не розповсюджується теорема, є розширена комплексна площина, чи розширена площина з виколотою точкою.

8.3. Лема Шварца

Далі для дослідження властивостей конформних відображень нам буде потрібна така лема.

Лема Шварца. Якщо функція $w = f(z)$ аналітична в крузі $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ і $f(0) = 0$, $|f(z)| < 1$, то вона задовольняє умови $|f(z)| \leq |z|$ у крузі $|z| < 1$ і $|f'(0)| \leq 1$. Причому, якщо рівність $|f'(0)| = 1$ або $|f(z_0)| = |z_0|$ має місце принаймні в одній точці z_0 $|z_0| < 1$, то вона має місце скрізь в області, тобто функція $f(z)$ є лінійною функцією вигляду $f(z) = e^{ia}z$, $a = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Інакше кажучи, лема стверджує, що при відображенні за допомогою такої функції $w = f(z)$ кожна точка або наближається до початку координат, або наше відображення є обертанням навколо початку координат.

◁ При виконанні умов леми функцію $f(z)$ в одиничному колі можна подати у вигляді степеневого ряду $f(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots$.

Функція $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z} = a_1 + a_2z + a_2z^2 + \dots$ буде аналітичною в крузі $|z| < 1$ і задовольнятиме умови $\varphi(0) = |f'(0)| = a_1$.

Побудуємо допоміжний круг $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r < 1\}$ і візьмемо точку $z' \in K_r$. Оскільки максимум модуля аналітичної функції досягається на границі області, то для всіх точок z' , які лежать у замкненому крузі $|z| \leq r$, буде мати місце нерівність $|\varphi(z)| \leq \max_{|z|=r} |\varphi(z)|$. Однак

$$\max_{|z|=r} |\varphi(z)| = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r},$$

оскільки $|f(z)| \leq 1$. Спрямовуємо $r \rightarrow 1$. Тоді $|\varphi(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$, тобто

для всіх z таких, що $|z| < 1$, маємо $|f(z)| \leq |z|$. Оскільки $\lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = f'(0)$, то $|\varphi(0)| = |f'(0)| \leq 1$. Першу частину леми доведено.

Нехай тепер знак рівності досягається в деякій внутрішній точці z_0 , тобто $|f(z_0)| = |z_0|$. Розглянемо функцію $\varphi(z) = f(z)/z$, аналітичну в околі z_0 . За припущенням у самій точці z_0 виконується рівність $\left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right| = 1$.

Якщо $\varphi(z)$ не є тотожною сталою, то окіл точки z_0 функцією $\varphi(z)$ відображається в окіл, і за принципом максимуму на межі околу обов'язково знайдуться такі точки z , що $\left| \frac{f(z)}{z} \right| > 1$. Однак це

неможливо внаслідок доведеної першої частини леми. Звідси випливає, що $\varphi(z) = f(z)/z = \text{const}$ скрізь усередині круга $|z| < 1$. З того, що модуль $\left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right| = 1$, випливає рівність $\frac{f(z)}{z} = e^{i\alpha}$, $\alpha = \text{const}$, або $f(z) = ze^{i\alpha}$ ▷

8.4. Ізоморфізм та автоморфізм конформних відображень

Означення. Конформне відображення $w = f(z)$ області D на D_1 називають *конформним ізоморфізмом* D на D_1 , а області D та D_1 – *конформно-ізоморфними*.

Означення. Конформний ізоморфізм області D на себе будемо називати *конформним автоморфізмом*.

Сукупність автоморфізмів довільної області утворює групу, у якій за групову операцію беруть композицію відображень $(\varphi_0 \circ \varphi_1)(z) = \varphi_0(\varphi_1(z))$, за одиницю – тотожне відображення $\varphi(z) = z$, а оберненим елементом до φ вважають обернене відображення $z = \varphi^{-1}(w)$. Позначають таку сукупність $\Lambda(D)$.

Надалі, якщо не виникатиме сумнівів, то слово *конформний* у виразі *конформний ізоморфізм (автоморфізм)* будемо опускати.

З наведеного вище означення випливає майже очевидне твердження.

Лема. Якщо f_0 є деяким фіксованим ізоморфізмом області D на D_1 , то сукупність усіх ізоморфізмів D на D_1 визначається як відображення $f = \varphi \circ f_0$, де φ – довільний автоморфізм області D_1 .

◁ Нехай f – довільний ізоморфізм D на D_1 . Тоді композиція $f \circ f_0^{-1} = \varphi$ є автоморфізмом. Отже, якщо $\varphi \in \Lambda(D_1)$, то $f = \varphi \circ f_0$.

І навпаки, якщо φ – довільний автоморфізм D_1 ($\varphi \in \Lambda(D_1)$), то $\varphi \circ f_0$ є ізоморфізмом f ▷

Розглянемо деякі приклади важливих і практично корисних автоморфізмів.

1. Нехай D збігається з розширеною комплексною площиною, а φ – довільний автоморфізм $\bar{\mathbb{C}}$. Тоді існує єдина точка $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ така, що

$\varphi(z_0) = \infty$. З цього випливає, що $\varphi(z)$ є аналітичною функцією в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$, а в точці z_0 вона має простий полюс. Згідно з однолистістю автоморфізму, функція $\varphi(z)$ не може мати полюса порядку більше першого. Тому, якщо $z_0 \neq \infty$, то з теореми Ліувілля випливає, що

$$\varphi(z) - \frac{A}{z - z_0} = B,$$

тобто

$$\varphi(z) = \frac{A}{z - z_0} + B, \quad (A, B \in \mathbb{C} - \text{сталі}).$$

Якщо ж $z_0 = 0$, то розглядуваним автоморфізмом є

$$\varphi(z) = Az + B.$$

Сукупність усіх цілих лінійних і дробово-лінійних відображень утворює групу автоморфізмів $\bar{\mathbb{C}}$.

2. Якщо область D є комплексною площиною ($D = \mathbb{C}$), то аналогічні міркування приводять нас до висновку, що множина цілих лінійних функцій $\varphi(z) = Az + B$ утворює групу автоморфізмів \mathbb{C} .

3. Покладемо $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Нехай φ – довільний автоморфізм одиничного круга та $\varphi(0) = w_0$. Побудуємо дробово-лінійний автоморфізм ψ цього круга

$$\psi(w) = \frac{w - w_0}{1 - \bar{w}w_0}, \quad \psi(w_0) = 0.$$

Розглянемо композицію $f = \psi \circ \varphi$. Очевидно, що $|f(z)| < 1 \quad \forall z \in D$, а $f(0) = 0$. Тоді за лемою Шварца $|f(z)| \leq |z|$. Ураховуючи побудову відображення $f(z)$, бачимо, що обернене відображення $f^{-1}(w) = z$ також задовольняє умову леми Шварца, а отже, $|f^{-1}(w)| \leq |w|$, або $|z| \leq |f(z)| \quad \forall z \in D$. Оскільки обидві нерівності виконуються $\forall z \in D$, то маємо $|f(z)| = |z|$, або $f(z) = e^{i\alpha} z$. Отже, відображення $f(z)$ є найпростішою цілою лінійною функцією, а $\varphi = \psi^{-1} \circ f$ – дробово-лінійною. З цього випливає, що довільний автоморфізм одиничного круга є дробово-лінійною функцією та має вигляд

$$w = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

де $|a| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = \arg \frac{dw}{dz} \Big|_{z=a}$.

Остання формула приводить до висновку, що автоморфізм одиничного круга залежить від двох параметрів: точки $a \in \mathbb{C}$ ($|a| < 1$) та $\alpha \in \mathbb{R}$.

Теорема. Для області $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ за рахунок вибору параметрів a та α можна знайти автоморфізм $\psi \in \Lambda(D)$, який задовольняє задані умови нормування $\psi(a) = b$, $\arg \psi'(a) = \alpha$, де a, b – фіксовані числа із \mathbb{C} , а α – довільно задане дійсне число.

◁ Побудуємо автоморфізми одиничного круга D

$$f = \mu(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad f(a) = 0$$

та круга $D_1 = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$

$$f = \eta(w) = \frac{w-b}{1-\bar{b}w}, \quad f(b) = 0.$$

Тоді для автоморфізму $\lambda = \eta^{-1} \circ \mu$ одержимо

$$\lambda(a) = b, \quad \lambda'(z) = \frac{\mu'(z)}{\eta'(f)} \quad \text{і} \quad \arg \lambda'(z) = \arg \mu'(z) - \arg \eta'(f),$$

тобто

$$\arg \lambda'(a) = \arg \mu'(a) - \arg \eta'(b) = \alpha - 0 = \alpha.$$

Ми побудували автоморфізм $\lambda = \eta^{-1} \circ \mu$ одиничного круга, який задовольняє умови нормування ▷

Можна показати, що знайдений при доведенні автоморфізм єдиний.

8.5. Основна теорема Рімана про конформні відображення однозв'язних областей

Ми вже показали, що при існуванні конформного відображення однієї однозв'язної області на іншу однозв'язну область установлюється взаємно однозначна й неперервна відповідність точок меж цих областей. Питання існування такого відображення залишилося відкритим.

Відповідь на питання, чи завжди одну задану однозв'язну область можна конформно відобразити на іншу задану однозв'язну область, дає така теорема Рімана.

Теорема Рімана. Довільну однозв'язну область D , задану в площині змінної Z , відмінну від розширеної площини й розширеної площини з вилученою точкою (тобто границя області складається більше ніж з однієї точки), можна взаємно однозначно та конформно відобразити на одиничний круг $|w| < 1$, причому так, щоб задана точка області D і заданий напрямок, що виходить із цієї точки, переходили, відповідно, у початок координат і в напрямок дійсної додатної півосі. Таке відображення єдине.

◁ Оскільки обмеження, накладені на межу області D , детально обговорено на початку теми, то перейдемо до доведення теореми, вважаючи, що ці умови виконані. Покажемо, що існує відображення даної області D на одиничний круг. Відображальна функція має бути однолистою в даній області та обмеженою за модулем. Прикладами таких функцій, заданих у D , можуть бути дробово-лінійні функції. Зокрема, якщо область D обмежена, то такою функцією є, наприклад, ціла лінійна функція $f(z) = z$. У випадку, коли область D не обмежена, але існує точка z_0 , зовнішня відносно D , існує окіл точки z_0 (круг $|z - z_0| < \rho$), зовнішній відносно D . Функція $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ є прикладом функції однолистої та обмеженої в області D тому, що $|f(z)| < \frac{1}{\rho} \quad \forall z \in D$.

Нехай тепер область D не обмежена й не має зовнішніх точок. За умовою теореми границя області D має принаймні дві різні точки: a та b ($a \neq b$). З однозв'язності області випливає, що вони належать континууму γ , який обмежує область D . Розглянемо двозначну функцію $F(z) = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$. Вона має дві точки розгалужування: a та b . Оскільки область D складається з точок комплексної площини, за виключенням точок деякого континууму, що зв'язує точки a та b , то функція $F(z)$ розпадається на дві однозначні аналітичні гілки $f_1(z)$ і $f_2(z)$, значення яких у кожній точці $z \in D$ відрізняються одне від одного тільки знаком.

Кожна з цих функцій є однолистою в D , оскільки для довільних $z_1, z_2 \in D$ із рівності $\sqrt{\frac{z_1 - a}{z_1 - b}} = \sqrt{\frac{z_2 - a}{z_2 - b}}$ випливає, що

$$\frac{z_1 - a}{z_1 - b} = \frac{z_2 - a}{z_2 - b}.$$

Отже, ця рівність можлива лише при $z_1 = z_2$. Тому функції $w = f_1(z)$ і $w = f_2(z)$ конформно відображають область D на дві області D_1 і D_2 , які не мають спільних точок. Кожна з точок $\tilde{w} \in D_2$ є зовнішньою відносно точок області D_1 , у протилежному випадку точки \tilde{w} і $-\tilde{w}$ були б прообразами однієї й тієї самої точки $z \in D$, що суперечить однолистої функції. Отже, існує круг $|w - w_0| < \rho$, що належить зовнішності області D_1 , а це вказує на існування функції

$$\frac{1}{w - w_0} = \frac{1}{f_1(z) - w_0} = f(z),$$

однолистої в D і обмеженої за модулем $|f(z)| < \frac{1}{\rho}$.

З розглянутого випливає, що для всіх можливих областей, обмежених континуумом, що містить більше однієї точки, існує сім'я однолистих обмежених відображень. Нехай $f(z)$ – одна з функцій цієї сім'ї, а точка z_0 є фіксованою скінченною точкою області D . Тоді, згідно з однолистістю, $f'(z_0) \neq 0$, а функція

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{f'(z_0)}$$

буде обмеженою та однолистою в області D , причому $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) = 1$.

Множину функцій, що мають цю властивість, позначимо через M_{z_0} . Для кожної функції $\varphi(z) \in M_{z_0}$ існує скінченна верхня межа її модуля в області D : $\mu(\varphi) = \sup_{z \in D} |\varphi(z)| > 0$. Це означає, що $\mu(\varphi)$ є радіусом найменшого круга з центром у початку координат, який містить образ області D при відображенні $w = \varphi(z)$.

Покажемо, що у множині M_{z_0} існує функція $\varphi(z) \in M_{z_0}$, для якої $\mu(\varphi)$ має найменше значення R_{z_0} , тобто $R_{z_0} = \inf_{\varphi \in M_{z_0}} \mu(\varphi)$. Ця функція буде конформним відображенням області D на круг з радіусом R_{z_0} .

Розглянемо послідовність $\{\varphi_n(z)\}$ із множини M_{z_0} , для елементів якої виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\varphi_n) = \inf_{\varphi \in M_{z_0}} \mu(\varphi) = R_{z_0}.$$

Така послідовність існує за означенням нижньої $\inf \mu(\varphi)$, вона рівномірно обмежена збіжною послідовністю чисел $\{\mu(\varphi)\}$:

$$\mu(\varphi_n) = \sup_{z \in D} |\varphi_n(z)| < c = \text{const}, \quad (\forall n = 1, 2, \dots).$$

Використовуючи принцип компактності, з указаної послідовності виділимо підпослідовність $\{\varphi_{n_k}(z)\}$, рівномірно збіжну всередині D до деякої аналітичної функції $\Phi(z)$, яка за побудовою має властивості

$$\Phi(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(z_0) = 0, \quad \text{та} \quad \Phi'(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi'_{n_k}(z_0) = 1,$$

а отже, $\Phi(z)$ не є сталою.

Застосовуючи теорему Гурвиця (див. п. 7.3), приходимо до висновку, що $\Phi(z)$ однолиста в D . Дійсно, якщо б для деякого w_0 рівняння $\Phi(z) - w_0 = 0$ мало принаймні два корені в D , то рівняння $\varphi_{n_k} - w_0 = 0$ повинно було б мати більше одного кореня, що неможливо внаслідок однолистості функції $\varphi_{n_k}(z)$.

Із співвідношень

$$\Phi(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(z) \quad \text{і} \quad |\varphi_{n_k}(z)| \leq \mu(\varphi_{n_k}(z)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} R_{z_0}$$

маємо, що $\forall \varepsilon > 0$

$$|\Phi(z)| < |\varphi_{n_k}(z)| + \frac{\varepsilon}{2} < R_{z_0} + \varepsilon$$

для всіх достатньо великих n_k .

Звідси, через довільний вибір ε , приходимо до висновку, що

$$|\Phi(z)| \leq R_{z_0} \quad \forall z \in D.$$

Однак з того, що функція $\Phi(z)$ однолиста, обмежена в області D і

задовольняє умови $\Phi(z_0) = 0$ та $\Phi'(z_0) = 1$, випливає, що $\Phi(z) \in M_{z_0}$
і

$$\sup_{z \in D} |\Phi(z)| \geq R_{z_0}.$$

Після зіставлення останніх двох нерівностей одержимо

$$\sup_{z \in D} |\Phi(z)| = R_{z_0}.$$

Покажемо, що функція $w = \Phi(z)$ конформно відображає область D на круг $K_0 = \{w \in \mathbb{C} : |w| < R_{z_0}\}$.

З одержаних властивостей відображення $\Phi(z)$ випливає, що образом області D є область $\Phi(D)$, яка міститься в крузі K_0 . Далі достатньо переконатися в тому, що кожна точка круга K_0 належить $\Phi(D)$. Нехай від супротивного це не так. Тоді всередині круга K_0 мають знаходитись деякі граничні точки замкненої множини $\bar{\Phi}(D)$. Позначимо одну з них через w_0 , вважаючи, що $0 < |w_0| < R$. Запишемо послідовність функцій

$$w = \Phi(z), \quad w_1 = R_{z_0}^2 \frac{w - w_0}{R_{z_0}^2 - \bar{w}_0 w} = \Phi_1(z),$$

$$w_2 = \sqrt{R_{z_0}} w_1 = \Phi_2(z), \quad w_3 = R_{z_0}^2 \frac{w_2 - \Phi_2(z_0)}{R_{z_0}^2 - \bar{\Phi}_2(z_0) w_2} = \Phi_3(z),$$

$$w_4 = \frac{w_3}{\Phi_3'(z_0)} = \Phi_4(z),$$

де у функції w_2 зафіксовано одну з двох гілок, а кожна з функцій $w_j = \Phi_j$ ($j = \overline{1, 4}$) розглядається як функція від w_{j-1} ($w_0 = w$), однолиста в області $\Phi_{j-1}(D)$ ($\Phi_0(D) = \Phi(D)$). Якщо розглядати всі ці функції як функції z , то вони будуть однолистими в області D .

Розглянемо відображення кожної з них. Перша функція $w_1(w)$ є автоморфізмом круга K_0 , при якому точка w_0 переходить у початок координат. При цьому область $\Phi(D)$ відображається в область $\Phi_1(D)$, яка лежить у крузі K_0 , а точка $w_1 = 0$ є граничною для неї. Значення

функції w_2 належать кругу K_0 , а точка $w_1 = 0$ переходить у точку $w_2 = 0$. Знов область $\Phi_2(D) \subset K_0$ і точка $w_2 = 0 \in$ граничною для області $\Phi_2(D)$. Функція $w_3(w_2)$ є автоморфізмом круга K_0 , при якому точка $\Phi_2(z_0)$ переходить у початок координат. Однолиста функція $\Phi_3(z)$ перетворюється на нуль у точці z_0 і відображає область D на деяку область $\Phi_3(D) \subset K_0$.

Знайдемо похідну $\Phi_3(z)$ у точці z_0 :

$$\begin{aligned} & \Phi_3'(z_0) = \\ &= \frac{dw}{dz} \Big|_{z=z_0} \frac{dw_1}{dw} \Big|_{w=\Phi(z_0)=0} \frac{dw_2}{dw_1} \Big|_{w_1=\Phi_1(z_0)=-w_0} \frac{dw_3}{dw_2} \Big|_{w_2=\Phi_2(z_0)=\sqrt{-R_{z_0}w_0}} = \\ &= 1 \cdot \frac{R_{z_0}^2 - |w_0|^2}{R_{z_0}^2} \cdot \frac{\sqrt{R_{z_0}}}{2\sqrt{-w_0}} \cdot \frac{R_{z_0}^2}{R_{z_0}^2 - R_{z_0}|w_0|} = \frac{R_{z_0} + |w_0|}{2\sqrt{-R_{z_0}w_0}}. \end{aligned}$$

Із $|w_0| < R_{z_0}$ випливає, що $|\Phi_3(z_0)| > 1$. Тому функція $\Phi_3(z)$ не належить множині M_{z_0} . Розділивши функцію $\Phi_3(z)$ на $|\Phi_3'(z_0)|$, одержимо функцію $\Phi_4(z)$, яка належить множині M_{z_0} (вона однолиста та $\Phi_4(z_0) = 0$, $|\Phi_4'(z_0)| = 1$). Однак функція $\Phi_4(z)$ відображає область D на область $\Phi_4(D)$, яка міститься в крузі $|w_4| < \frac{R_{z_0}}{|\Phi_3(z_0)|} < R_{z_0}$, отже,

$$\sup_{z \in D} |\Phi_4(z)| \leq \frac{R_{z_0}}{|\Phi_3'(z_0)|} \leq R_{z_0},$$

що суперечить визначенню числа R_{z_0} як нижньої межі множини чисел $\sup_{z \in D} |\varphi(z)|$, $\varphi(z) \in M_{z_0}$.

Побудований у доведенні теореми круг із центром у початку координат і визначеним радіусом R_{z_0} називається *конформним радіусом* області D .

З цього випливає, що при виконанні умови теореми існує однолиста аналітична функція, яка відображає область D на круг K_0 , а отже, і

на одиничний круг.

Доведемо тепер, що, за заданих у теоремі умов нормування відображення, відображальна функція єдина.

Нехай $w_1 = f_1(z)$ і $w_2 = f_2(z)$ – дві такі функції. Очевидно, що функція $z = \varphi_2(w_2)$ обернена до $f_2(z)$, конформно відображає круг $|w_2| < 1$ на область D так, що $\varphi_2(0) = z_0$ і $\varphi_2'(0) > 0$. Тому функція $w_1 = f_2(\varphi_2(z))$ відображає круг $|w_2| < 1$ на себе так, що $f_1(\varphi_2(0)) = 0$ і

$$\left. \frac{dw_1}{dw_2} \right|_{w_2=0} = \left. \frac{dw_1}{dz} \right|_{z=z_0} \left. \frac{dz}{dw_2} \right|_{w_2=0} = \frac{f_1'(z_0)}{f_2'(z_0)} > 0.$$

Функція $f_1(\varphi_2(w_2))$ задовольняє умову леми Шварца, отже,

$$\left| \frac{df_1}{dw_2} \right| = \left| \frac{f_1'(z_0)}{f_2'(z_0)} \right| \leq 1, \text{ або } 0 < f_1'(z_0) : f_2'(z_0) \leq 1.$$

Якщо функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ поміняти місцями, то одержимо умову $0 \leq f_2'(z) : f_1'(z_0) \leq 1$. Порівнюючи дві нерівності $0 < f_1'(z_0) : f_2'(z_0) \leq 1$ та $0 < f_1'(z_0) : f_2'(z_0) \leq 1$, приходимо до рівності $f_1'(z_0) : f_2'(z_0) = 1$, що, за лемою Шварца, можливо лише за умови $w_1 = e^{i\alpha} w_2$. У даному випадку за умовою нормування множник $e^{i\alpha}$ має дорівнювати одиниці. Отже, $f_1(z) \equiv f_2(z)$ ▽

Зауваження. Оскільки нам уже відомі конформні ізоморфізми одиничного круга на верхню півплощину та інші однозв'язні області, границі яких мають більше однієї точки, а також, що існує можливість побудувати групи автоморфізмів таких областей, то теорему Рімана можна розповсюдити на всі однозв'язні області, за винятком розширеної комплексної площини та комплексної площини з виколотою точкою.

Дві останні області можуть мати тільки автоморфізми.

Для обмежених однозв'язних областей має місце така узагальнена теорема.

Теорема. Для того, щоб функція $w = f(z)$, яка реалізує конформне відображення однозв'язної області D у площині змінної z на внутрішність одиничного кола $|w| < 1$, здійснювала взаємооднозначну й неперервну відповідність між точками замкненої області $D \cup \gamma$

і точками замкненого круга $|w| \leq 1$, необхідно й достатньо, щоб границя γ області D була кривою Жордана.

Оскільки повне доведення теореми виходить за межі нашого підручника, то наведемо тільки короткі коментарі.

У випадку області, обмеженої кривою Жордана, нормування відображення D на K в умовах теореми Рімана можна змінити. Замість того, щоб вимагати, як в основній теоремі Рімана, переходу заданої точки й заданого напрямку в задану точку й заданий напрямок, можна вимагати, щоб три точки границі області D перейшли в три точки границі кола. Таке відображення буде єдиним. Це твердження випливає з теореми про відповідність границь і з властивостей дробово-лінійних функцій.

Фіксуємо точки A, B, C на границі D і здійснюємо відображення. Ці точки переходять у деякі точки A', B', C' , які лежать на границі одиничного круга. Круг ми можемо конформно відобразити сам у себе так, щоб точки A', B', C' перейшли знову в точки A, B, C . При цьому має зберігатися напрямок обходу.

Отже, для областей, обмежених кривими Жордана, теорему Рімана можна сформулювати інакше.

Теорема. Будь-яку однозв'язну область D , обмежену кривою Жордана, можна взаємно однозначно й конформно відобразити на одиничне коло $|w| < 1$, причому так, щоб три задані точки границі області D перейшли в три задані точки границі кола $|w| < 1$. Таке відображення єдине.

Доведення цієї теореми також виходить за межі нашого підручника.

Зауважимо, що наведені вище теореми мають місце тільки для однозв'язних областей.

8.6. Застосування принципів симетрії Рімана – Шварца до конформних відображень

У доведених в п.8.5 теоремах приймалось припущення, що відображальну функцію визначено тільки в заданій області. Однак, як

відомо, аналітична функція може мати продовження за межі початкової області. У шостій темі ми довели теореми, які відтворюють принципи аналітичного продовження функцій з однієї області в іншу, основними з яких є принципи неперервності та симетрії Рімана – Шварца. Конструктивний характер доведення принципу симетрії підказує шлях його застосування в теорії конформних відображень. Далі ми розглянемо використання принципу симетрії Рімана – Шварца для побудови конформних відображень.

Теорема. Нехай область D лежить у площині \mathbb{C} і містить у складі своєї межі Γ дугу деякого кола γ , а функція $w = f(z)$ конформно відображає область D на область D' так, що дуга γ переходить у дугу γ' деякого кола, яке є частиною межі області D' . Тоді існує функція $w = \varphi(z)$, яка є аналітичним продовженням функції $w = f(z)$ з області D в область D_1 , симетричну області D відносно дуги γ . Це аналітичне продовження конформно відображає область D_1 на область D'_1 , симетричну області D' відносно дуги γ' (рис. 8.11, 8.12).

◀ Користуючись загальною схемою доведення принципу симетрії для аналітичного продовження функцій, наведеною у п. 6.6.2, за допомогою дробово-лінійних відображень відобразимо дуги γ та γ' на деякі скінченні відрізки $[AB]$ та $[A'B']$ дійсної осі у відповідних площинах допоміжних змінних.

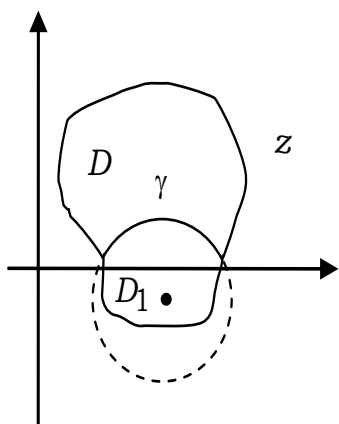


Рис. 8.11

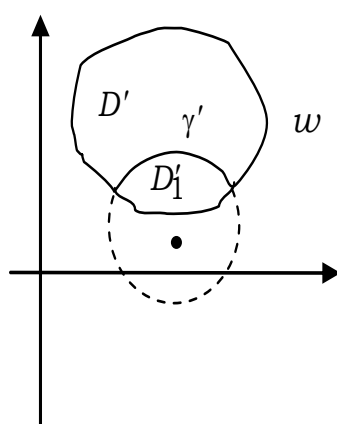


Рис. 8.12

Оскільки це не принципово, то ці змінні знов позначимо через z та w , відповідно (рис. 8.13, 8.14), і для одержаних областей залишимо попередні позначення.

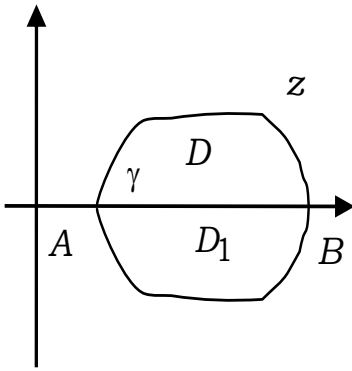


Рис. 8.13

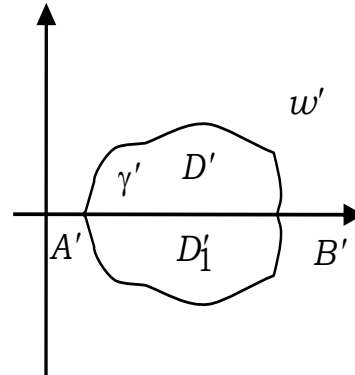


Рис. 8.14

За умовою теореми функція $w = f(z)$ конформно відображає область D на область D' , а відрізок AB – на відрізок $A'B'$. Оскільки ці відрізки є жордановими кривими, то, за теоремою про відповідність границь, функція $w = f(z)$ неперервна на AB і набуває на ній дійсних значень. Застосовуючи принцип симетрії Рімана – Шварца для аналітичного продовження (див. п.6.6.2), приходимо до висновку, що функція $w = f(z)$ аналітично продовжується в область D_1 , симетричну D відносно відрізка AB . Позначимо це продовження $w = \varphi(z)$. Функція $\varphi(z)$ аналітична й конформно відображає область D_1 на деяку область D_1' , яка, згідно з побудовою аналітичного продовження $w = \varphi(z)$ (див. принцип симетрії Рімана – Шварца для аналітичних продовжень), буде симетричною області D' відносно відрізка $A'B'$. Отже, функція

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D \\ \varphi(z) & z \in D_1 \end{cases}$$

конформно відображає область $D \cup \gamma \cup D_1$ на область $D' \cup \gamma' \cup D'_1$. Причому, як випливає з теореми про відповідність границь, таке відображення буде взаємно однозначним. ▸

8.7. Про відображення багатозв'язних областей

У п.8.6 та 8.7 ми достатньо повно вивчили питання існування та єдиності відображення однозв'язних областей і показали, що для багатозв'язних областей побудувати відображення можна тільки у випадку, коли вони мають однакову зв'язність.

Виникає природне питання: чи завжди можна побудувати відображення однієї області D на іншу область D_1 , яка має той самий порядок зв'язності? Виявляється, що це питання в загальному випадку не має позитивної відповіді. Його розв'язання вимагає конкретизації. У кожному конкретному випадку виникають певні умови існування та єдиності такого відображення. Навіть у найпростішому випадку, а саме при відображенні концентричного кільця на концентричне кільце, виникають певні обмеження. Проілюструємо це доведенням такої теореми.

Теорема. Для існування конформного відображення $w = f(z)$ кільця $r_1 < |z| < r_2$ на кільце $\rho_1 < |w| < \rho_2$ необхідно й достатньо подібності кільця, а саме виконання рівності $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{r_2}{r_1}$.

◁ Для доведення необхідності вимог теореми зауважимо, що функція $f(z)$ задовольняє умови теореми про відповідність границь та принцип симетрії Рімана – Шварца. Використовуючи цей принцип, функцію $f(z)$ можна аналітично продовжити в області $\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < r_1$ і

$r_2 < |z| < \frac{r_2^2}{r_1}$, симетричні кільцю $r_1 < |z| < r_2$ відносно кіл $|z| = r_1$ та

$|z| = r_2$, відповідно. Розширене таким чином кільце $\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < \frac{r_2^2}{r_1}$ функ-

ція $f(z)$ (разом з її аналітичними продовженнями) відображає на кільці $\frac{\rho_1^2}{\rho_2} < |w| < \frac{\rho_2^2}{\rho_1}$. Застосовуючи знову принцип симетрії до функції

$f(z)$, її можна продовжити в кільце $r_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 < |z| < r_2 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$. Виконуючи

таке продовження необмежену кількість разів, одержимо, що $f(z)$ реалізує однолисте відображення області $0 < |z| < \infty$ на область $0 < |w| < \infty$, причому виконується одна з двох умов:

або

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0 \text{ і } \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty,$$

або

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty, \text{ а } \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0,$$

залежно від того, яке коло відповідає колу $|z| = r_1$: $|w| = \rho_1$ або $|w| = \rho_2$. Отже, функція $f(z)$ є дробово-лінійною одного з двох видів:

$$f_1(z) = az \text{ або } f_2(z) = \frac{a}{z},$$

де a – комплексна стала. В обох випадках рівність, задана в теоремі, виконується.

Достатність випливає з того, що при виконанні умов теореми кільця подібні та їх можна відобразити одне на одне за допомогою однієї з функцій: $f_1(z) = az$ або $f_2(z) = \frac{a}{z}$ ▸

8.8. Застосування принципу симетрії до розв'язування задач теорії конформних відображень

Доведена теорема має не тільки фундаментальне теоретичне значення, але й дозволяє побудувати метод знаходження розв'язку важливих складних задач теорії конформних відображень.

Проілюструємо це на прикладах розв'язування таких задач.

1. Відобразити на зовнішність одиничного круга:

а) усю площину \mathbb{C} із розрізами вздовж відрізків $[-1, 1]$ і $[-i, i]$ (зовнішність хреста);

б) усю площину \mathbb{C} із розрізами вздовж променів $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$, $(-i\infty, -i]$, $[i, +i\infty)$.

◁ а) Для розв'язання задачі використаємо принцип симетрії Рімана – Шварца. Відобразимо верхню півплощину $\text{Im } z > 0$ із розрізом $[0, i]$ на верхню півплощину за допомогою функції $w_1 = \sqrt{z^2 + 1}$.

Функція w_1 , разом з її аналітичним продовженням (яке також позначимо w_1), здійснює відображення зовнішності хреста на всю площину w_1 із розрізом уздовж відрізка $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Функція $w_2 = \frac{w_1}{\sqrt{2}}$ відображає площину w_1 із зазначеним розрізом на всю площину w_2 із розрізом по відрізку $[-1, 1]$. Далі використаємо функцію $w = w_2 + \sqrt{w_2^2 - 1}$, обернену до функції Жуковського. Вона відображає площину w_2 із розрізом уздовж відрізка $[-1, 1]$ на зовнішність одиничного круга, тобто в область $|w| > 1$. Здійснивши послідовно всі підстановки, остаточно одержимо

$$w = \frac{w_1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{w_1^2}{2} - 1} = \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{z^2 + 1 - 2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{z^2 - 1} \right).$$

б) Функція $w_1 = \frac{1}{z}$ здійснює відображення заданої множини на зовнішність хреста, розглянутого в попередній задачі. Використавши одержані в ній результати, шукане відображення w визначимо за формулою

$$w = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{w_1^2 + 1} + \sqrt{w_1^2 - 1} \right) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot z} \left(\sqrt{1 + z^2} + \sqrt{1 - z^2} \right) \triangleright$$

2. Відобразити на верхню півплощину зовнішність хреста, який складається з відрізка $[-a, b]$ дійсної осі та відрізка $[-ci, ci]$ уявної осі.

◁ Легко переконатися, що функція $w_1 = \sqrt{z^2 + c^2}$ конформно відображає верхню півплощину з розрізом уздовж відрізка $[0, ci]$ на верхню півплощину, причому тут розглядається та гілка функції, для якої виконується умова $w_1(0) < 0$. При цьому прямолінійний відрізок границі

$$L = \{z \in \mathbb{C} : -\infty \leq \text{Re } z \leq -a, \text{Im } z = 0\} \cup \\ \cup \{z \in \mathbb{C} : b \leq \text{Re } z \leq +\infty, \text{Im } z = 0\}$$

відображається на відрізок

$$L' = \left\{ w_1 \in \mathbb{C} : -\infty \leq \operatorname{Re} w_1 \leq -\sqrt{a^2 + c^2}, \operatorname{Im} w_1 = 0 \right\} \cup \\ \cup \left\{ w_1 \in \mathbb{C} : 0 < \sqrt{b^2 + c^2} \leq \operatorname{Re} w_1 \leq +\infty, \operatorname{Im} w_1 = 0 \right\}.$$

Відповідно до принципу симетрії Рімана – Шварца, для функції w_1 існує аналітичне продовження в нижню півплощину через відрізок L . При цьому образом зовнішності хреста в площині змінної w_1 є зовнішність відрізка

$$l = \left\{ w_1 \in \mathbb{C} : -\sqrt{a^2 + c^2} \leq \operatorname{Re} w_1 \leq \sqrt{b^2 + c^2}, \operatorname{Im} w_1 = 0 \right\}.$$

Функція

$$w = \frac{\sqrt{w_1 + \sqrt{a^2 + c^2}}}{\sqrt{\sqrt{b^2 + c^2} - w_1}} = \frac{\sqrt{\sqrt{z^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2}}}{\sqrt{\sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{z^2 + c^2}}}$$

відображає зовнішність відрізка l , отже, і зовнішність хреста, на верхню півплощину.

3. Побудувати конформне відображення області D , яка є зовнішністю одиничного круга з розрізами вздовж відрізків $[i, bi]$, $[-bi, -i]$, $[1, a]$ та $[-a, -1]$, на верхню півплощину при заданому нормуванні $a > 1$, $b > 1$.

◁ Легко бачити, що функція Жуковського $w_1 = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ відображає зовнішність одиничного круга зі вказаними розрізами на зовнішність хреста, що складається з відрізка $\left[-\frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right), \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \right]$ дійсної осі та відрізка $\left[-\left(b - \frac{1}{b} \right) i, \left(b - \frac{1}{b} \right) i \right]$ уявної осі. Таке відображення приводить до частинного випадку задачі 2, у якому a та b потрібно замінити на $\frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$, а c – на $\frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{b} \right)$. Після заміни a , b і c указаними вище виразами можна скористатися одержаною в задачі 2 формулою. Виконавши таку підстановку, отримаємо шукане відображення w :

$$w = \frac{\sqrt{\left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + \left(b - \frac{1}{b} \right)^2} + \sqrt{\left(a + \frac{1}{a} \right)^2 + \left(b - \frac{1}{b} \right)^2}}{\sqrt{\left(a + \frac{1}{a} \right)^2 + \left(b - \frac{1}{b} \right)^2} - \sqrt{\left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + \left(b - \frac{1}{b} \right)^2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)} + \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)}}{\sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 - \frac{1}{b^2}\right)} - \sqrt{\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)}} = \\
&= \frac{\sqrt{\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)} + \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)}}{\sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)}} \triangleright
\end{aligned}$$

4. Відобразити на верхню півплощину внутрішність правої гілки гіперболи $\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1$.

◁ Позначимо через A вершину правої гілки гіперболи, а через F – її фокус. Проведемо розріз уздовж променя $[A, +\infty)$. Складемо алгоритм побудови відображення.

Функція Жуковського $w = u + iv = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ відображає сім'ю променів $\arg z = \alpha$ на сім'ю співфокусних гіпербол $\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1$. Отже,

функція $w_1 = z + \sqrt{z^2 - 1}$, обернена до функції Жуковського, за умови $w_1(\infty) = \infty$ здійснює конформне відображення верхньої половини заданої в задачі області на сектор $0 < \arg w_1 < \alpha$, $|w_1| > 1$. Степенева функція

$w_2 = w_1^{\frac{\pi}{\alpha}}$ відображає цей сектор на верхню півплощину з вилученим верхнім півкрусом з радіусом 1, а функція Жуковського

$w_3 = \frac{1}{2}\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right)$ – отриману область на верхню півплощину, причому

променю $[A, +\infty)$ відповідає промінь $(-\infty, -1]$. Застосувавши принцип симетрії Рімана – Шварца, а потім додаткове відображення

$w = i\sqrt{1 + w_3^2}$, одержимо, що w – шукана функція.

Повертаючись назад уздовж ланцюжка відображень від w_3 до z і зробивши відповідні підстановки, остаточно одержимо функцію, яка відображає задану в задачі область на верхню півплощину у вигляді

$$w = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} + \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^{-\frac{\pi}{\alpha}} + 2 \right)^{\frac{1}{2}} \triangleright$$

ТЕМА ІХ. КОНФОРМНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ БАГАТОКУТНИХ ОБЛАСТЕЙ НА ВЕРХНЮ ПІВПЛОЩИНУ

Серед однозв'язних областей, обмежених кусково-гладкими контурами, велику роль відіграють багатокутники. Області відображують на півплощину, яка, як відомо, при заданому нормуванні взаємно однозначно відображається на круг, а отже, за основною теоремою Рімана про існування конформного відображення (див. п. 8.5), відображення багатокутника на верхню півплощину $\text{Im } w > 0$ існує. Очевидно, існує й обернене конформне відображення верхньої півплощини $\text{Im } z > 0$ на внутрішність заданого багатокутника.

Питанням існування конформних відображень півплощини на багатокутник і багатокутних областей на верхню півплощину, побудові таких відображень і вивченню основних властивостей функцій, які їх здійснюють, присвячено цю тему.

9.1. Формула Христофеля – Шварца першого роду

Поставимо задачу: відобразити верхню півплощину площини z ($\text{Im } z > 0$) на внутрішність деякого багатокутника, що лежить у площині змінної w і має вершини в точках A_1, A_2, \dots, A_n , а також дослідити можливість однозначної побудови відображальної функції.

Оскільки багатокутник і півплощина обмежені кривими Жордана, то, за теоремою Рімана про конформні відображення (п. 8.5), функція, яка здійснює таке відображення, існує, а за доведеними в п. 8.2 теоремою про відповідність границь і принципом однолисті, ця функція здійснює взаємооднозначну й неперервну відповідність указаних замкнених областей. Вершинам багатокутника A_1, A_2, \dots, A_n поставлено у відповідність задані точки a_1, a_2, \dots, a_n дійсної осі. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що всі точки a_1, a_2, \dots, a_n лежать у скінченній частині площини змінної z . У протилежному випадку достатньо перетворити півплощину саму на себе так, щоб у точку $w = \infty$ перейшла точка, яка не відповідає жодній вершині багатокутника.

Функцію, яка здійснює таке конформне відображення, позначимо через $w = f(z)$ і дослідимо її властивості. У верхній півплощині вона

регулярна й не має особливостей. Відрізок $[a_1, a_2]$ (рис. 9.1) ця функція переводить у відрізок $[A_1 A_2]$ (рис. 9.2).

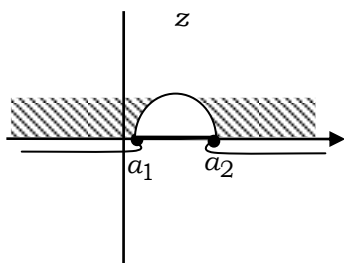


Рис. 9.1

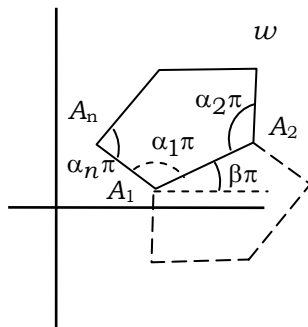


Рис. 9.2

Зробивши розрізи вздовж дійсної осі поза відрізком $[a_1, a_2]$, приходимо до висновку, що до даної задачі можна застосувати принцип симетрії Рімана – Шварца, а отже, побудувати аналітичне продовження функції $w = f_1(z)$ через відрізок $[a_1, a_2]$ у нижню півплощину $\text{Im } z < 0$. Це продовження дає конформне відображення нижньої півплощини на багатокутник, симетричний багатокутнику відносно сторони $[A_1 A_2]$. Багатокутник зображено пунктиром на рис. 9.2.

Аналогічно можна будувати аналітичні продовження $f_k(z)$ і через інші відрізки $[a_k, a_{k+1}]$. Аналітичне продовження функції $f(z)$ у нижню півплощину не буде мати особливостей у ній, а також у середині кожного з відрізків $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$, ..., $[a_{n-1}, a_n]$, $[a_n, a_1]$, за винятком самих точок a_1, a_2, \dots, a_n , які будуть особливими. Легко бачити, що точка $z = \infty$ не є особливою, оскільки за умовою $z = \infty$ переходить у деяку точку, що лежить між A_n та A_1 . В околі $z = \infty$ функція $f(z)$ має усуну особливу точку, яку можна вважати усунутою, а функцію $f(z)$ при підході до нескінченності – обмеженою.

Дослідимо поведінку функції в околі кожної з точок a_1, a_2, \dots, a_n . Внутрішні кути даного багатокутника позначимо відповідно через

$\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$. Тоді, як відомо з планіметрії, для суми внутрішніх кутів довільного n -кутника вірна формула $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2$, де $0 < \alpha_j < 2$, ($j = \overline{1, n}$).

Виберемо точку a_1 і розглянемо в її околі допоміжну функцію

$$w_1 = [f(z) - A_1]_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}} e^{-i\frac{\beta}{\alpha_1}}.$$

Ця функція півокіл точки a_1 переводить у півокіл точки $w_1 = 0$. За принципом симетрії Рімана – Шварца маємо, що функція $w_1(z)$ аналітично продовжується через відрізок дійсної осі $[a_1^1, a_1^2]$, який міститься в околі точки a_1 і проходить через неї в нижню півплощину. За теоремою про збереження околу (п. 8.1.1) $w_1(z)$ є аналітичною функцією в повному круговому околі точки a_1 і переводить її в однолистий окіл, тобто $w_1'(a_1) \neq 0$. Розвинемо функцію $w_1(z)$ в околі точки $z = a_1$ у ряд Тейлора:

$$w_1(z) = \left[e^{-i\beta_1} (w - A_1) \right]_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha_1}} = c_1 (z - a_1) + c_2 (z - a_1)^2 + \dots$$

Тут $c_0 = 0$, тому що точка $z = a_1$ відображається в точку $w_1 = 0$. Тоді

$$e^{-i\beta_1} (w - A_1) = (z - a_1)^{\alpha_1} [c_1 + c_2(z - a_1) + \dots]^{\alpha_1}.$$

Аналітичне продовження w_1 виражається через функцію $w = f(z)$ як її розвинення в ряд в околі точки $z = a_1$. Сама ж функція

$$w = A_1 + (z - a_1)^{\alpha_1} [c_1' + c_2'(z - a_1) + \dots]$$

відображає точку $z = a_1$ у точку $w = A_1$, а відрізок дійсної осі з околу точки $z = a_1$ – у відрізки сторін заданого кута, рівного $\alpha_1\pi$, при вершині $w = A_1$ багатокутника.

Обчислимо похідну цієї функції:

$$w' = \alpha_1 (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} [c_1' + c_2'(z - a_1) + \dots] + (z - a_1)^{\alpha_1} [c_2' + 2c_3'(z - a_1) + \dots] = \alpha_1 (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} [c_1' + c_2''(z - a_1) + \dots].$$

Звідси знаходимо, що

$$\ln w' = (\alpha_1 - 1) \ln(z - a_1) + \ln \alpha_1 \left[c_1' + c_2''(z - a_1) + \dots \right],$$

і

$$(\ln w')' = \frac{w''}{w'} = \frac{\alpha_1 - 1}{z - a_1} + \text{головна частина}.$$

Отже, функція $\varphi_1(z) = \frac{w''}{w'}$ у точці $z = a_1$ має полюс першого порядку з інтегральним лишком, рівним $\alpha_1 - 1$.

Якщо повторити всі вищенаведені міркування при побудові аналітичного продовження функції $w = f(z)$ через відрізок $[a_k, a_{k+1}]$, то для одержаної функції $w_k = f_k(z)$ ($k = 1, n$) матиме вигляд

$$w_k(z) = \left[e^{i\beta_k} (w - A_k) \right]^{1/\alpha_k} = c_1^{(k)} (z - a_k) + c_2^{(k)} (z - a_k)^2 + \dots$$

Звідси знаходимо, що функція $w = f(z)$ в околі точки $a = z_k$ розвивається в ряд

$$w = A_k + (z - a_k)^{\alpha_k} \left[c_1^{(k)} + c_1^{(k)} (z - a_k) + \dots \right],$$

а функція $\varphi_k(z) = \frac{w''}{w'}$ має в околі точки $z = a_k$ простий полюс з лишком, рівним $\alpha_k - 1$.

Зауважимо, що функції $\varphi_k(z)$ є аналітичними продовженнями функції $w = f(z)$ через відповідні сторони багатокутника та збігаються зі значеннями $w = f(z)$ в околах точок $z = a_k$ ($k = \overline{1, n}$).

Дослідимо тепер функцію

$$\Phi(z) = \frac{w''(z)}{w'(z)} - \sum_{k=1}^n \varphi_k(z) = \frac{w''(z)}{w'(z)} - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k}.$$

За побудовою в скінченній частині площини функція не має особливих точок. Розглянемо її поведінку при підході до точки $z = \infty$. За умовою $w(z)$ на нескінченності є голоморфною, отже, її розвинення в степеневий ряд в околі $z = \infty$ матиме вигляд

$$w(z) = d_0 + \frac{d_{-1}}{z} + \dots$$

Тоді

$$\frac{w''(z)}{w'(z)} = \frac{\frac{2d_{-1}}{z^3} + \dots}{-\frac{d_{-1}}{z^2} - \dots} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0,$$

тобто

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0.$$

Звідси випливає, що $\Phi(z)$ аналітична в усій комплексній площині та обмежена при прямуванні до нескінченності. За теоремою Ліувілля вона стала, а оскільки дорівнює нулю в точці $z = \infty$, то $\Phi(z) \equiv 0$. З цього випливає, що

$$(\ln w')' = \frac{w''(z)}{w'(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k}.$$

Рівність спочатку проінтегруємо:

$$\ln w'(z) = \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \ln(z - a_k) + \ln c,$$

потім пропотенціюємо:

$$w'(z) = c(z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1}$$

і, нарешті, визначимо саму функцію

$$w(z) = c \int_0^z (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt + c'. \quad (9.1)$$

Функція відображає верхню півплощину на багатокутник з кутовими параметрами $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2$. Сталі інтегрування c і c' довільні.

Формула (9.1) називається *формулою Христофеля – Шварца*, а кутові параметри $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – *параметрами Христофеля – Шварца*.

Сталі c і c' ($c, c' \in \mathbb{C}$) визначають положення багатокутника в площині w . Зокрема, параметр c' характеризує зміщення багатокутника на площині, а c здійснює перетворення подібності, отже, характеризує його розмір та орієнтацію.

Праву частину формули Христофеля – Шварца (9.1) називають *інтегралом Христофеля – Шварца першого роду*.

Зауважимо, що, за теоремою Рімана, три довільних параметри Христофеля – Шварца можна задавати, а решту потрібно визначати з додаткових умов. Процес обчислення цих параметрів, як правило, досить складний. Проте формула Христофеля – Шварца є ефективним інструментом відображення трикутних областей.

9.2. Формула Христофеля – Шварца другого роду

При побудові формули (9.1) ми вважали, що всі точки a_1, a_2, \dots, a_n лежать у скінченній частині площини. Нехай тепер одна з них лежить на нескінченності. Тоді формула Христофеля – Шварца набуде іншого вигляду. Побудуємо її.

Зробимо над площиною \mathbb{C} змінної z дробове-лінійне перетворення, яке переводить точку $z = a_n$ у точку $z = \infty$. При такому відображенні здійснюється заміна змінної $z = a_n + \frac{1}{t}$, ($t \in \bar{\mathbb{C}}$), і відповідна заміна змінної в інтегралі Христофеля – Шварца. Після заміни (переходу до площини змінної t) одержимо

$$\begin{aligned} w &= -c \int_{\frac{1}{a_n}}^t \left(\frac{1}{\zeta} + a_n - a_1 \right)^{\alpha_1 - 1} \left(\frac{1}{\zeta} + a_n - a_2 \right)^{\alpha_2 - 1} \dots \left(\frac{1}{\zeta} + a_n - a_n \right)^{\alpha_n - 1} \frac{d\zeta}{\zeta^2} + c' = \\ &= c \int_{\frac{1}{a_n}}^t \left[\frac{(a_n - a_1)\zeta + 1}{\zeta} \right]^{\alpha_1 - 1} \left[\frac{(a_n - a_2)\zeta + 1}{\zeta} \right]^{\alpha_2 - 1} \dots \left[\frac{1}{\zeta} \right]^{\alpha_n - 1} \frac{d\zeta}{\zeta^2} + c' = \\ &= c^* \int_0^t \left[\zeta - \frac{1}{a_1 - a_n} \right]^{\alpha_1 - 1} \left[\zeta - \frac{1}{a_2 - a_n} \right]^{\alpha_2 - 1} \dots \left[\zeta - \frac{1}{a_{n-1} - a_n} \right]^{\alpha_{n-1} - 1} \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{1}{\zeta^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - n + 2}} d\zeta + c'^*.$$

Позначимо $a'_k = \frac{1}{a_k - a_n}$ образ точки a_k , ($k = \overline{1, n}$) і врахуємо, що

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2.$$

Після заміни a_k на a'_k одержимо

$$w = c^* \int_0^t (\zeta - a'_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a'_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\zeta - a'_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} d\zeta + c'^*$$

або, змінюючи позначення на попередні, остаточно запишемо

$$w(t) = c \int_0^t (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} dz + c'. \quad (9.2)$$

Як бачимо, у правій частині формули точка $z = a_n$ відсутня.

Права частина одержаної формули (9.2) за довільних значень параметрів a_1, a_2, \dots, a_{n-1} називається *інтегралом Христофеля – Шварца другого роду*.

Можна показати, що інтеграли Христофеля – Шварца завжди здійснюють відображення верхньої півплощини $\text{Im } z > 0$ на багатокутник із внутрішніми кутами $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$, який може виявитись неодностимим і необмеженим.

Розглянемо, наприклад, інтеграл

$$w(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^z (1-t)^{-\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2}} dt. \quad (9.3)$$

Тут $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \neq 2 - 2 = 0$. Отже, інтеграл у вигляді (9.3)

не є інтегралом Христофеля – Шварца першого роду. Однак, якщо прийняти, що відображуваною областю є трикутник, один кут якого дорівнює нулю, то одержимо рівність $\alpha_1 + \alpha_2 + 0 = 3 - 2 = 1$, тобто інтеграл (9.3) є інтегралом Христофеля – Шварца другого роду. У даному випадку функцією, яка реалізує відображення, є $w = \arcsin z$. Вона, як відомо, відображає верхню півплощину (рис. 9.3) на верхню півсмугу, обмежену прямими $\text{Re } w = -\frac{\pi}{2}$ та $\text{Re } w = \frac{\pi}{2}$ (рис. 9.4).

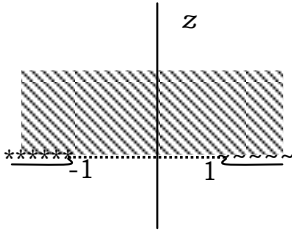


Рис. 9.3

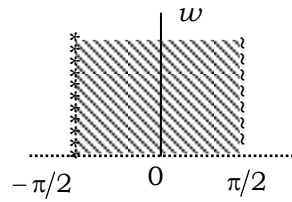


Рис. 9.4

При цьому нижня півплощина переходить у нижню півсмугу як аналітичне продовження функції через відрізок $-1 < \operatorname{Re} z < 1$. Кожній смузі (рис. 9.5) відповідає свій лист поверхні Рімана.

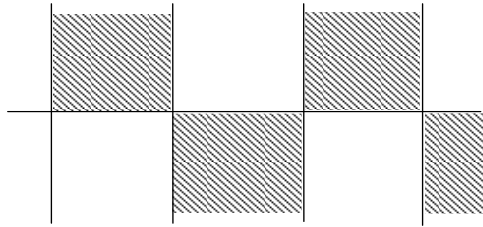


Рис. 9.5

Образом площини змінної z буде нескінченнолиста поверхня Рімана з точками розгалужування $z = \pm 1$. Отже, це відображення не-однолисте й необмежене.

9.3. Відображення верхньої півплощини на прямокутник

Використовуючи формулу Христофеля – Шварца, побудуємо відображення верхньої півплощини (рис. 9.6) на прямокутник, зображений на рис. 9.7. Нехай воно реалізується функцією $w = f(z)$. Оскільки відповідність трьох точок можна задати, то покладемо $w(0) = 0$

, $w(1) = \omega$ і $w(\infty) = i\omega_1$, де точки ω та ω_1 вважатимемо заданими.

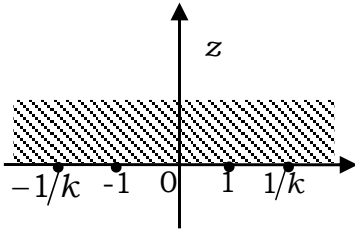


Рис. 9.6

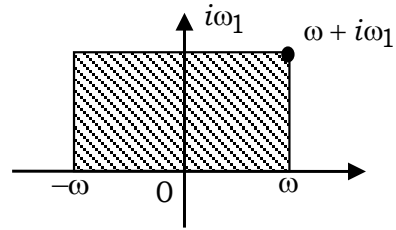


Рис. 9.7

При заданій відповідності точок відобразимо спочатку чверть площини на праву половину прямокутника. При цьому точці $\omega + i\omega_1$ буде відповідати деяка точка $z = \frac{1}{k}$, $0 < k < 1$ на дійсній осі. Таке відображення існує та єдине. За принципом симетрії Рімана – Шварца, існує функція, яка буде реалізовувати відображення другої півчверті площини на другу половину прямокутника при такій відповідності точок: $w(-1) = -\omega$ та $w\left(-\frac{1}{k}\right) = -\omega + i\omega_1$. Крім того, усі кути $\alpha_j = \frac{1}{2}$, $j = \overline{1,4}$.

У цьому випадку, за формулою Христофеля – Шварца, функцію $w = f(z)$ можна записати у вигляді

$$w = c \int_0^z \frac{-1}{(1-t^2)^2 (1-k^2 t^2)^2} dt = c \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}, \quad (9.4)$$

де c – дійсна стала.

Оскільки відрізок дійсної осі $[-1,1]$ переходить у відрізок дійсної осі $[-\omega, \omega]$ (повороту немає), то $\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=0} = c > 0$, а c визначає абсолютні розміри прямокутника. Зокрема, з формули (9.4) при $c = 1$ маємо

$$\omega = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Цей інтеграл називають *еліптичним інтегралом Лагранжа першого роду*, а параметр k ($0 < k < 1$) – *модулем еліптичного інтеграла*.¹

Визначимо довжини сторін, або, що те саме, значення ω та ω_1 , використовуючи встановлену відповідність точок:

$$\omega = c \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad (9.5)$$

$$\omega + i\omega = c \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = c \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + ic \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}.$$

Звідси знаходимо

$$i\omega_1 = c \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = ic \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}},$$

$$\omega_1 = c \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}. \quad (9.6)$$

Очевидно, що дріб

$$\tau = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}}{\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}}$$

¹ Узагалі, еліптичним інтегралом першого роду називається інтеграл, узятий уздовж деякого шляху L площини комплексної змінної z від раціональної функції $R(z, w)$, де w є алгебраїчною функцією, квадрат якої дорівнює багаточлену степеня n від змінної z , а $w^2 = P_n(z)$ при $n = 3, 4$. Причому $\int_L R(z, w) dz$ є обмеженою функцією за всіх z , крім $z = \infty$.

установлює відношення сторін прямокутника.

Отже, відношення сторін залежить від значення k . За допомогою цієї рівності ми можемо задавати k як функцію від τ , $k = k(\tau)$, а для обчислення значення k отримаємо трансцендентне рівняння.

Для обчислення значення ω_1 в інтегралі (9.6) здійснимо заміну

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - k_1^2 t^2}}, \text{ де } k_1 = \sqrt{1 - k^2}.$$

Тоді з (9.6) матимемо

$$\omega_1 = c \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)(1 - k^2 z^2)}} = c \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k^2 t^2)}},$$

а $\tau = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{E(k)}{E(k_1)}$, де $E(k)$ та $E(k_1)$ – повні еліптичні інтеграли першого роду з модулями k та k_1 відповідно:

$$E(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}. \quad (9.7)$$

За допомогою еліптичного інтеграла першого роду верхню півплощину можна відобразити на заздалегідь заданий прямокутник.

Якщо в площині змінної w задано прямокутник зі сторонами 2ω і ω_1 , то, визначивши $\tau = \frac{\omega}{\omega_1}$, знаходимо k , а потім і функцію

$$w = c \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} + c_1, \quad (9.8)$$

яка реалізує шукане відображення. Значення сталих c і c_1 у формулі (9.8) визначають із перетворення перенесення й подібності.

9.4. Еліптичні функції Якобі

З розглянутого в попередньому підрозділі відображення випливає, що існує функція, обернена до еліптичного інтеграла першого роду

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Така функція називається *еліптичним синусом Якобі* й позначається через $z = \operatorname{sn} w$.

За побудовою еліптичний синус Якобі відображає прямокутник, розміщений у площині w , на верхню півплощину змінної z так, як це вказано на рис. 9.8.

Довжини сторін прямокутника визначаються еліптичними інтегралами

$$\omega = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \omega_1 = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}.$$

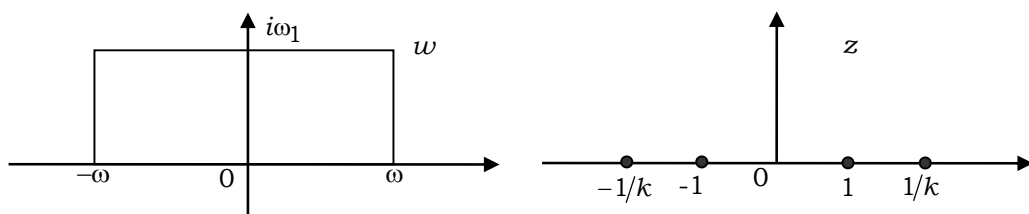


Рис. 9.8

Очевидно, що при $k = 0$ еліптичний інтеграл першого роду перетворюється на функцію $w = \operatorname{arcsin} z$, а еліптичний синус стає звичайним тригонометричним.

Дослідимо основні властивості еліптичного синуса. Зокрема, покажемо, що він є функцією з двома періодами, з'ясуємо питання про його диференційовність і введемо за аналогією з тригонометричними функціями поняття еліптичного косинуса та функції, яка не має серед тригонометричних функцій аналога, але належить до групи еліптичних функцій Якобі – функції еліптичного декременту.

Для встановлення подвійної періодичності еліптичного синуса повернемося до побудови відображення розглянутого прямокутника на верхню півплощину. Позначимо його сторони цифрами I, II, III, IV (рис. 9.9) і назовемо прямокутник (1) основним.

Функцію $w = \operatorname{sn} z$, задану всередині основного прямокутника (1), аналітично продовжимо за принципом симетрії Рімана – Шварца, наприклад, через сторону I, на прямокутник (2). За побудовою та теоремою Рімана – Шварца ця функція відображає прямокутник (2) на нижню півплощину. Продовживши функцію $w = \operatorname{sn} z$ із прямокутника (2) через сторону V, одержимо відображення прямокутника (2) на верхню півплощину. Оскільки такі продовження, за теоремою Рімана – Шварца, існують, то аналітичне продовження можна здійснювати до тих пір, поки їх області не покриють усю комплексну площину.

Заштриховані прямокутники відображені на верхню півплощину, не заштриховані – на нижню. Ми продовжили функцію $w = \operatorname{sn} z$ із прямокутника (1) на всю площину змінної z . Одержана повна аналітична функція однозначна, оскільки, якщо ми при обході довільного замкненого контуру знову потрапимо, наприклад, у прямокутник (1), то її нові значення збіжаться з уже отриманими, тому що вони також відображатимуть прямокутник (1) на $\operatorname{Im} w > 0$ із тим самим нормуванням, що й попередні. Отже, відображення задовольняють умову єдиності теореми Рімана (див. п. 8.5).

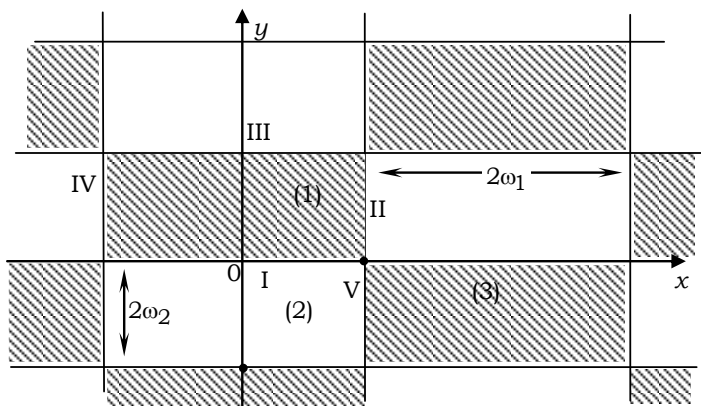


Рис. 9.9

За побудовою відображальна функція аналітична всередині кожного з прямокутників і на їх границях, крім точки $z = i\omega_2$ і всіх точок, одержаних з неї після аналітичного продовження. Кожна з цих точок є полюсом, оскільки при конформному відображенні вони переходять у точку $z = \infty$. Отже, функція $w = \operatorname{sn} z$ мероморфна.

Якщо ми візьмемо довільну точку z^* , яка належить основному прямокутнику (1), то в усіх точках $z = z^* + 2n_1\omega_1 + 2n_2i\omega_2$, де n_1 і n_2 – довільні цілі числа, матимемо $\operatorname{sn}(z^* + 2n_1\omega_1 + 2n_2i\omega_2) = \operatorname{sn} z^*$.

Така властивість функції називається *подвійною періодичністю*. Функція $\operatorname{sn} z$ має один період $T_1 = 2\omega_1$ уздовж $\operatorname{Re} z$, а інший – $T_2 = 2i\omega_2$ – уздовж $\operatorname{Im} z$. Ця дозволяє досліджувати функцію $w = \operatorname{sn} z$ не в усій площині, а тільки в одному періоді.

З побудови функції $w = \operatorname{sn} z$ випливає її непарність $\operatorname{sn}(-z) = -\operatorname{sn} z$.

У теорії еліптичних функцій поряд з еліптичним синусом вводяться також еліптичний косинус $w = \operatorname{cn} z$ та еліптичний декремент $w = \operatorname{dn} z$ за формулами

$$w = \operatorname{cn} z = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 z} \quad (9.9)$$

$$w = \operatorname{dn} z = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z}. \quad (9.10)$$

Двоперіодичні функції $w = \operatorname{sn} z$, $w = \operatorname{cn} z$ та $w = \operatorname{dn} z$ прийнято називати *еліптичними функціями Якобі*.

З формул (9.9) і (9.10) бачимо, що функції $\operatorname{cn} z$ і $\operatorname{dn} z$ парні. Вони мають властивість періодичності, аналогічну $\operatorname{sn} z$. Крім того, з означення синуса та косинуса еліптичного випливає, що при $k = 0$

$$\operatorname{sn} z = \sin z, \quad \operatorname{cn} z = \cos z,$$

а функція

$$\operatorname{dn} z = \operatorname{const} = 1.$$

Неперервність еліптичних функцій усередині прямокутника (1), а отже, і всіх інших, не викликає сумніву. Доведемо їх диференційовність на прикладі $w = \operatorname{sn} z$ і знайдемо значення похідних.

Оскільки функція $w = \operatorname{sn} z$ обернена до функції

$$z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-r^2w^2)}},$$

то, за правилом диференціювання оберненої функції, знаходимо

$$\frac{d \operatorname{sn} z}{dz} = \sqrt{(1 - \operatorname{sn}^2 z)(1 - r^2 \operatorname{sn}^2 z)} = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z.$$

Аналогічно, продиференціювавши рівність (9.9) та (9.10), одержимо

$$\frac{d \operatorname{cn} z}{dz} = -\frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z} = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z, \quad \frac{d}{dz}(\operatorname{dn} z) = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z.$$

Без доведення зазначимо, що еліптичні функції Якобі мають формули додавання аргументів, схожі на відповідні формули для тригонометричних функцій

$$\operatorname{sn}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{sn} z_1 \operatorname{cn} z_2 \operatorname{dn} z_2 + \operatorname{sn} z_2 \operatorname{cn} z_1 \operatorname{dn} z_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2}; \quad (9.11)$$

$$\operatorname{cn}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{cn} z_1 \operatorname{cn} z_2 \operatorname{dn} z - \operatorname{sn} z_1 \operatorname{sn} z_2 \operatorname{dn} z_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2}; \quad (9.12)$$

$$\operatorname{dn}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{dn} z_1 \operatorname{dn} z_2 - k^2 \operatorname{sn} z_1 \operatorname{sn} z_2 \operatorname{cn} z_1 \operatorname{cn} z_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2}.$$

Якщо у формулах (9.11), (9.12) покласти $k = 0$, то вони перетворяться на тригонометричні формули додавання аргументів. Тригонометричні функції синус і косинус є частинним, а саме граничним, випадком відповідних еліптичних функцій при $k \rightarrow 0$. Легко показати, що такий граничний перехід має місце.

Функції $\operatorname{sn} z$ та $\operatorname{cn} z$ мероморфні, оскільки у скінченній частині площини їх особливими точками можуть бути тільки полюси, тому еліптичні функції Якобі $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ двоперіодичні й мероморфні.

Теорія еліптичних функцій зокрема та теорія аналітичних функцій у цілому має подальше теоретичне розвинення й широкє застосування, яке виходить за межі цього курсу лекцій.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Гольберг А.А., Шеремета М.М., Заболоцький М.В., Спаськів О.Б. Комплексний аналіз. – Львів: Афіша, 2001
2. Грищенко О.Ю., Нагнибіда М.І., Настасієв П.П. Теорія функцій комплексної змінної. – К.: Вища школа, 1994
3. Грищенко О.Ю. Теорія функції комплексної змінної: підручник / О.Ю. Грищенко, С.І. Ляшко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2009. – 495 с.
4. Самойленко В.Г. Комплексний аналіз. Приклади і задачі: навчальний посібник / В.Г.Самойленко, В.А.Бородін, Г.В.Верьовкіна, А.В.Ловейкін, І.Б.Романенко – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2010. – 224 с.
5. Чемерис В.С. Теорія аналітичних функцій: В 5 ч. – К.: Вид-во Київ.ун-та, 1970-1973.
6. Fornberg B., Piret C. Complex Variables and Analytic Functions: An Illustrated Introduction / Philadelphia: SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, 2020. – 372 p.