

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка

П.О. Васін, Я.П. Троценко, Д.І. Черній

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З
НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «ТЕХНОЛОГІЇ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ»**

Частина I. Математичні моделі та обчислювальні алгоритми розв'язування плоских початково-крайових задач з системами еліптичних рівнянь в областях з непроникними вільними межами

для студентів спеціальності
F1 Прикладна математика

Київ – 2025

УДК 517.3; 532.5

Рецензенти:

Клюшин Дмитро Анатолійович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Кулян Віктор Романович, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри моделювання складних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики, протокол № 16 від 24 червня 2025 р.

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики, протокол № 11 від 23 червня 2025 р.

П.О. Васін, Я.П. Троценко, Д.І. Черній **Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з навчальної дисципліни «Технології чисельного моделювання»**. Частина I. Математичні моделі та обчислювальні алгоритми розв'язування пласких початково-крайових задач з системами еліптичних рівнянь в областях з непроникними вільними межами. – Київ : 2025. – 25 с.

Викладено довідкові матеріали до лабораторного практикуму з дисципліни «Технології чисельного моделювання», що є обов'язковою для студентів, які навчаються за освітньо-науковою програмою другого (магістерського) рівня вищої освіти «Прикладна математика» спеціальності F1 «Прикладна математика». Наведено основні теоретичні відомості з теорії гіперсингулярних інтегральних рівнянь і приклади побудови обчислювальних алгоритмів для комп'ютерного моделювання гідродинамічних течій важкої рідини в областях з вільною межею.

Наведено інструкції до виконання лабораторних робіт з побудови обчислювальних технологій, згідно з робочою програмою навчальної дисципліни «Технології чисельного моделювання».

Для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які навчаються за освітньо-науковою програмою «Прикладна математика» за спеціальністю F1 «Прикладна математика».

ЗМІСТ

Вступ	4
1. Математичні постановки плоских початково-крайових задач з системами еліптичних рівнянь в областях з непроникними вільними межами	5
1.1. Початково-крайова гідродинамічна задача з непроникними рухомими межами.....	5
1.2. Задача Коші-Пуассона	7
2. Математичні моделі для плоских початково-крайових задач	8
2.1. Математичні моделі із застосуванням контурних інтегралів	8
2.2. Математичні моделі, що засновані на застосуванні контурних інтегралів з особливим ядром	9
2.3. Дискретизовані математичні моделі та елементи обчислювальних технологій.....	12
3. Обчислювальні алгоритми розв'язування плоских початково-крайових задач в областях з вільними межами	17
3.1. Алгоритм 1	17
3.2. Алгоритм 2.....	18
4. Питання, задачі для самоконтролю	21
4.1. Контрольні питання	21
4.2. Задачі для самостійного розв'язування.....	21
Позначення	24
Література	25

Вступ

Викладено матеріали до лабораторного практикуму з дисципліни «Технології чисельного моделювання». Представлено постановки нелокальних початково-крайових гідродинамічних задач (задач з вільною рухомою межею відокремлення середовищ з різною щільністю). Також, наведено математичні моделі та обчислювальні алгоритми для їх розв'язування [1-9]. Наведено основні теоретичні відомості з теорії гіперсингулярних інтегральних рівнянь і приклади побудови обчислювальних алгоритмів для комп'ютерного моделювання гідродинамічних течій важкої рідини в областях з вільною межею. Наведено необхідні теоретичні відомості і приклади побудови алгоритмів для обчислювальних технологій комп'ютерного моделювання складних систем та гідродинамічних процесів[9-10]. Наведено інструкції до виконання лабораторних робіт з побудови обчислювальних технологій, згідно з робочою програмою з навчальної дисципліни «Технології чисельного моделювання» [14]. Наведено питання, тести для самоконтролю.

1. Математичні постановки плоских початково-крайових задач з системами еліптичних рівнянь в областях з непроникними вільними межами

1.1. Початково-крайова гідродинамічна задача з непроникними рухомими межами

Для визначення циркуляційної течії ідеальної нестисливої рідини в області поза рухомими межами $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$, де $L_d(t)$ – обтічна межа, рух якої задається, $L_v(t)$ – вільна межа (поверхня розриву дотичних швидкостей), ставиться задача для знаходження гармонічної в площині OXY функції (яка має параметричну залежність від часу t) $\varphi = \varphi(x, y, t)$ – потенціалу, для якого швидкість $\vec{V} = \nabla\varphi$, і потенціал задовольняє рівняння та крайові умови:

$$\text{при } t \geq t_0: \Delta\varphi = 0 \text{ для } \vec{r} \in D^+, \quad (1.1)$$

з крайовими умовами на рухомих межах:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{\vec{r}_d} = (\vec{W}_d, \vec{n})|_{\vec{r}_d} \quad \text{для } \vec{r} = \vec{r}_d \in L_d(t), \quad (1.2)$$

з крайовими умовами на невідомих межах:

$$\left. \frac{\partial\varphi^+}{\partial n} \right|_{r_v} = \left. \frac{\partial\varphi^-}{\partial n} \right|_{r_v} \quad \text{для } \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t), \quad (1.3)$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi^+ - \varphi^-)|_{r_v} = 0 \quad \text{для } \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t), \quad (1.4)$$

з умовами для зовнішньої задачі:

$$\lim_{|\vec{r} - \vec{r}_L| \rightarrow \infty} \nabla\varphi = \vec{U}_\infty. \quad (1.5)$$

Умови для внутрішньої задачі задаються на частині проникної ділянки межі області $L(t) = L_Q \in L_d(t)$ (на вході в область D^+):

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{\vec{r}_Q} = W_{Qn} \quad \text{для } \vec{r} = \vec{r}_Q \in L_Q, \quad (1.6)$$

або задається миттєва витрата через перетин $L_Q \in L_d(t)$:

$$Q = \int_{L_Q} \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds \quad \text{для } \vec{r} = \vec{r}_Q \in L_Q \quad (1.7)$$

із початковими умовами при $t = t_0$:

$$L_d(t_0) = L_{0d}, \quad L_v(t_0) = L_{0v}. \quad (1.8)$$

Розв'язок φ задачі розглядається в класі $C^2(D^+(t)) \cap C^1(\bar{D}^+(t))$, тобто

$$|\nabla\varphi| < \infty \text{ на } L(t). \quad (1.9)$$

Умова (1.9) є еквівалентною умові Кутта–Жуковського на гострих крайках і зламах контуру $L_d(t)$, яка природно задовольняється у відривних течіях, з породженням на гострих краях–закінцівках і зламах контуру $L_d(t)$ нових елементів вільних меж $L_v(t)$.

Слід зазначити[14], що задача (1.1)–(1.3) з умовами Неймана (1.2) на $L_d(t)$, з умовами Неймана (1.3) і умовами Діріхле (1.4) на $L_v(t)$, а так само з умовами (1.9) на ∞ , є нелінійною задачею з вільною рухомою межею $L_v(t)$.

В таких задачах рух невідомої межі $L_v(t)$ визначається полем швидкостей $\vec{V} = \nabla\varphi$, яке визначається із розв'язку самої задачі (1.1)–(1.9).

Форма області $\bar{D}^+(t)$ визначається геометрією рухомих меж $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$. Зміна $L_d(t)$ задається або визначається із задачі Коші при заданій правій частині

$$\frac{d\vec{r}_d}{dt} = \vec{W}_d(\vec{r}_d, t), \quad (1.10)$$

з початковими умовами при $t = t_0$:

$$L_d(t_0) = L_{0d}, \quad (1.11)$$

а зміна вільної межі $L_v(t)$ визначається з розв'язку задачі Коші для частинок $\vec{r}_v = (x_v(t), y_v(t), z_v(t))$, які й формують межу $L_v(t)$ та визначають її рух:

$$\frac{d\vec{r}_v}{dt} = \vec{W}_v(\vec{r}_v, t), \quad (1.12)$$

з початковими умовами при $t = t_0$:

$$L_v(t_0) = L_{0v}, \quad (1.13)$$

де права частина, для (1.4):

$$\vec{W}_v(\vec{r}_v, t) = \frac{1}{2}(\nabla\varphi^+(\vec{r}_v, t) + \nabla\varphi^-(\vec{r}_v, t)). \quad (1.14)$$

Розв'язання задач (1.1)–(1.9) і (1.10)–(1.14) у виділеному класі функцій (1.9) можливе при виконанні умови гладкості меж, яка забезпечується основним фактором фізичного процесу – виникненням відриву, який задовольняє критерій гладкості Вілля. Таким чином, умова Кутта–Жуковського на всіх зламах і кінцях контурів виконується при природному виникненні відривів.

1.2. Задача Коші-Пуассона

Для визначення еволюції збурення на вільній межі ідеальної нестисливої рідини, що знаходиться у полі сили тяжіння, маємо задачу:

$$\text{при } t \geq t_0: \quad \Delta\varphi = 0, \quad \text{для } r(x, y) \in D^+, \quad (1.15)$$

$$\frac{d\vec{r}_s^+}{dt} = V(\vec{r}_s^+, t), \quad \text{для } \vec{r}_s^+ = \vec{r} \in L_s(D^+), \quad (1.16)$$

$$\left. \frac{d\varphi^+}{dt} \right|_{L_s} = \left(\frac{(\nabla\varphi^+)^2}{2} - \frac{y}{Fr} \right)_{L_s}, \quad (1.17)$$

з початковими умовами при $t = t_0$:

$$L_s(t_0) = L_0, \quad \vec{V}(r_s(t_0)) = \vec{V}_{s0}, \quad \text{для } r_s = r \in L_s. \quad (1.18)$$

Покладемо $Fr = 1$.

2. Математичні моделі для плоских початково-крайових задач

2.1. Математичні моделі із застосуванням контурних інтегралів

Інтегральні представлення [14], які застосовні в моделях, мають представлення через особливі контурні інтеграли (на кусково-гладкому контурі, рис. 2.1), та потребують коректних обчислень.

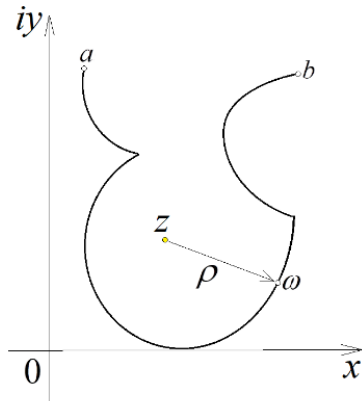


Рис. 2.1. Контур

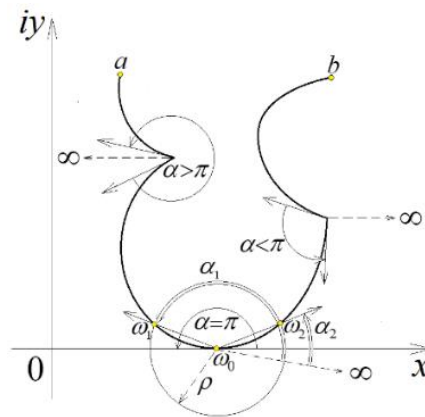


Рис. 2.2. Схема виділення особливостей

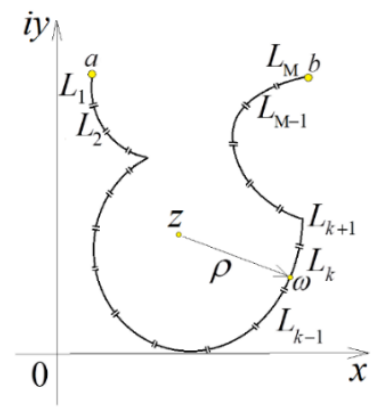


Рис. 2.3. Дискретизація контуру

Функції, виражені через сингулярні інтеграли $\Phi_1(z) = \int_{L_{ab}} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$, з підінтегральною функцією $f = f(\omega) \in H(\lambda)$, $0 < \lambda < 1$, які визначені у внутрішніх точках кусковогладкого контуру (рис. 2.1), розуміються в сенсі головного значення за Коші:

$$\Phi_1(z) = \int_{L_{ab}} \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = \lim_{\substack{\omega' \rightarrow \omega_0 \\ \omega'' \rightarrow \omega_0}} \left[\int_a^{\omega'} \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_{\omega''}^{\omega'} \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \right], \quad (2.1)$$

при виконанні умови, що

$$\lim_{\substack{\omega' \rightarrow \omega_0 \\ \omega'' \rightarrow \omega_0}} \frac{|\omega' - \omega_0|}{|\omega'' - \omega_0|} = 1. \quad (2.2)$$

При застосуванні гіперсингулярних інтегральних представлень з більш сильними особливостями (ядро, з показником ступеня $n \geq 2$) інтеграл

$$\Phi_n(z) = \int_{L_{ab}} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^n} d\omega, \quad \text{де } n = 2, 3, 4 \dots \quad (2.3)$$

варто розуміти, при виконання (2.2), в сенсі скінченної частини за Адамаром. Тобто, при виконанні умови (2.2), справедлива така теорема:

Теорема 2.1. Нехай функція має інтегральне представлення (2.3), з $n = 2, 3, 4, \dots$, де функція $f = f(\omega)$ визначена на контурі L_{ab} і задовольняє умову $|f(\omega) - f(\omega_0)| \leq A|\omega - \omega_0|^\lambda$, $n - 1 < \lambda < n$ (наприклад, $\lambda = n - 1 + \mu$, $0 < \mu < 1$).

В цьому випадку інтеграл (2.3) на всіх внутрішніх точках контуру L_{ab} , тобто при $z = \omega_0 \in L_{ab}$, існує як сильно сингулярний, якщо його, при виконанні умови (2.2), розуміти в сенсі скінченної частини за Коші–Адамаром:

$$\int_{L_{ab}} \frac{f(\omega)}{(\omega - \omega_0)^n} d\omega =$$

$$= \lim_{\substack{\omega' \rightarrow \omega_0 \\ \omega'' \rightarrow \omega_0}} \left[\int_a^{\omega'} \frac{f(\omega)}{(\omega - \omega_0)^n} d\omega + \int_{\omega''}^b \frac{f(\omega)}{(\omega - \omega_0)^n} d\omega - \frac{f(\omega_0)}{(n-1)} \left(\frac{1}{(\omega'' - \omega_0)^{n-1}} - \frac{1}{(\omega' - \omega_0)^{n-1}} \right) \right]. \quad (2.4)$$

Зауваження 2.1. Теорема залишається справедливою, якщо функція $f = f(\omega)$, яка визначена на L_{ab} є такою, що $f^{(n-1)}(\omega) \in H(\mu)$, $0 < \mu < 1$, тобто $f(\omega) \in H_{n-1}(\mu)$.

Зауваження 2.2. Для інтегрального представлення (2.3), з непарними $n = 2m + 1$, $m = 1, 2, 3, 4, \dots$, інтеграл (2.4) на всіх внутрішніх точках контуру L_{ab} існує в сенсі головного значення за Коші.

2.2. Дискретизовані математичні моделі та елементи обчислювальних технологій

Розглядаються аналітичні функції в області з кусково-гладкою межею, що допускає розбиття на сукупності крайових елементів $L = \sum_{j=1}^M L_j$ інтегральне представлення вигляду

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega, \quad (2.5)$$

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega, \quad \text{де } n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.6)$$

Теорема 2.2. Нехай аналітична за змінною z функція має інтегральне представлення вигляду (2.5), (2.6), де f – неперервна функція точок кусково-гладкого контуру L . Стверджується, що для $\forall z \in D^+$, яка знаходиться на відстані $\rho_0 = \min_{\omega \in L} |z - \omega|$ від контуру L , $\exists M$ (число) і $\exists E, E_0$ узгоджене розбиття контуру L (точками $\omega_j, j = 0, \dots, M$; та $\omega_{0j} \in L_j, j = 1, \dots, M$) так, що $L = \sum_{j=1}^M L_j$, $L_j = \overline{\omega_{j-1} \omega_j}$, $\omega_{0j} \in L_j$, у якому $\Delta = \max_j |\overline{\omega_{j-1} \omega_j}| < \rho_0$ так, що для (2.5) та (2.6) буде справедливе дискретизоване (квадратурне) представлення:

$$\Phi_0(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) + O(\varepsilon) \quad (2.7)$$

$$\Phi_n(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i (z - \omega_{0j})^n} + O\left(\frac{\varepsilon}{\rho_0^n}\right), \quad (2.8)$$

де $n = 1, 2, 3, 4, \dots$,

$$\Gamma_j = \int_{L_j} f(\omega) d\omega, \quad j = \overline{1, M}. \quad (2.9)$$

Доведення. Дійсно, маємо тотожності

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \ln(z - \omega_{0j}) \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \int_{L_j} f(\omega) \ln\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right) d\omega, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) \left(\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right)^{-n} - 1 \right) d\omega. \end{aligned} \quad (2.11)$$

При виконанні умови $\Delta = \max_j |\overline{\omega_{j-1}} \omega_j| < \rho_0$ для кожного L_j виконується

$$\left| \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}} \right| \leq \frac{\Delta}{\rho_0} = \varepsilon < 1, \quad (2.12)$$

тому для останніх членів правої частини (2.10) і (2.11) справедливі оцінки

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \int_{L_j} f(\omega) \ln\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left(\ln^2\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right) + \left(\frac{\Delta}{\rho_0}\right)^2 \right)^{1/2}, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) \left(\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right)^{-n} - 1 \right) d\omega \right| \leq \\ & \leq \frac{M\Delta}{2\pi\rho_0^n} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left(\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right)^{-n} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

У зв'язку з чим для $L = \sum_{j=1}^M L_j$, при $A = \frac{M\Delta}{2\pi} \max_{\omega \in L} |f(\omega)|$, $n = 1, 2, 3, 4 \dots$, справедлива оцінка

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \ln(z - \omega_{0j}) \int_{L_j} f(\omega) d\omega \right| \leq A \left(\ln^2 \left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0} \right) + \left(\frac{\Delta}{\rho_0} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (2.15)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega - \sum_{j=1}^M \frac{1}{2\pi i (z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) d\omega \right| \leq \frac{A}{\rho_0^n} \left(\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0} \right)^{-n} - 1 \right). \quad (2.16)$$

Якщо врахувати, що $\Gamma_j = \int_{L_j} f(\omega) d\omega$, $j = \overline{1, M}$. То

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega - \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) \right| \leq A \left(\ln^2 \left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0} \right) + \left(\frac{\Delta}{\rho_0} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (2.17)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega - \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i (z - \omega_{0j})^n} \right| \leq \frac{A}{\rho_0^n} \left(\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0} \right)^{-n} - 1 \right). \quad (2.18)$$

Що і доводить теорему.

Зауваження 2.3. При $n = 1$ та $f \in H(\lambda)$, $0 < \lambda < 1$, інтегральне представлення (2.6) є інтегралом типу Коші, для якого на контурі справедливі вимоги теореми, яка використовується для обґрунтування побудови методу дискретних особливостей.

Теорема 2.3. Нехай $\forall z: \rho(z) = |z - \omega| > \rho_0 = \min_{\omega \in L} |z - \omega| > 0$ маємо узгоджене канонічне розбиття контуру L_{ab} , тобто $\exists M, \exists E, E_0, L = \sum_{j=1}^M L_j$, таке, що функція (2.3) має дискретизоване представлення

$$\Phi_n(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i (z - \omega_{0j})^n} + O\left(\frac{\varepsilon}{\rho_0^n}\right), \quad (2.19)$$

де

$$n = 1, 2, 3, 4 \dots; \Gamma_j = \int_{L_j} f(\omega) d\omega, \quad j = \overline{1, M}. \quad (2.20)$$

Тоді для всіх непарних $n = 2m + 1$, $m = 1, 2, 3, 4 \dots$, в довільній внутрішній k -й точці контуру $\omega_{0k} \in L_k$, $k = \overline{1, M}$, існує оцінка модуля різниці:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(\omega_{0k} - \omega)^n} d\omega - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^M \frac{1}{2\pi i (\omega_{0k} - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) d\omega \right| \leq$$

$$\leq \frac{\Gamma_0}{2\pi \rho_0^n} |(1 - \varepsilon)^{-n} - 1| + \frac{A\delta^\mu}{\pi\mu} = O(\delta^\mu), \quad (2.21)$$

де A – константа Гельдера, показник Гельдера $0 < \mu < 1$, $\Gamma_0 = \int_L |f(\omega)| d|\omega|$.

2.3. Математичні моделі, що засновані на застосуванні контурних інтегралів з особливим ядром

$L_\infty \rightarrow L_{ab}$

$z \in D^+$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{ab}} f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega, \quad (2.22)$$

$$\bar{V}(z) = \frac{d\Phi}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{ab}} \frac{f(\omega)}{z - \omega} d\omega, \quad (2.23)$$

$$\Gamma = \int_{L_{ab}} f(\omega) d\omega, \quad (2.24)$$

$$L_\infty \rightarrow L_{ab} = \sum_{j=1}^M L_j,$$

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}), \quad (2.25)$$

$$\bar{V}(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i (z - \omega_{0j})}, \quad (2.26)$$

де

$$\Gamma_j = \int_{L_j} f(\omega) d\omega = \int_{\omega_{j-1}}^{\omega_j} f(\omega) d\omega.$$

$$\Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j, \quad (2.27)$$

$$F(\omega) = F(a) + \int_a^{\omega} f(\xi) d\xi; \quad \xi, \omega \in L_{ab}, \quad (2.28)$$

$$\Gamma(\omega, a) = F(\omega) - F(a) = \int_a^{\omega} f(\xi) d\xi, \quad (2.29)$$

$$\Gamma_0 = \Gamma(b, a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(\xi) d\xi, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \ln(z - \omega) = -\frac{\partial}{\partial z} \ln(z - \omega), \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{ab}} f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_a^b f(\omega) d\omega \right) \ln(z - b) + \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left(\int_a^{\omega} f(\xi) d\xi \right) \frac{\partial}{\partial z} \ln(z - \omega) d\omega = \\ &= \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z - b) + \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\Gamma(\omega, a)}{z - \omega} d\omega. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Таким чином,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{ab}} f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega = \frac{\Gamma_0}{2\pi i} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{ab}} \frac{\Gamma(\omega, a)}{z - \omega} d\omega. \quad (2.33)$$

Для (2.22) та (2.33) маємо дискретизоване представлення:

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{(\omega_{0j+1} - \omega_{0j})(\sum_{k=1}^j \Gamma_k)}{2\pi i(z - \omega_j)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M}) \quad (2.34)$$

або

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{D_j}{2\pi i(z - \omega_j)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M}), \quad (2.35)$$

де

$$\omega_j = \frac{(\omega_{0j+1} + \omega_{0j})}{2}, \quad D_j = (\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) \sum_{k=1}^j \Gamma_k, \quad j = 1, \dots, M-1, \quad (2.36)$$

$$\Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j \quad \left(D_j = (\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) Q_j; Q_j = \sum_{k=1}^j \Gamma_k \right), \quad j = 1, \dots, M-1. \quad (2.37)$$

Для усіх Γ_j та Q_j маємо зв'язок (формули перерахунку[10]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 = Q_1 \\ \Gamma_2 = Q_2 - Q_1 \\ \dots \\ \Gamma_j = Q_j - Q_{j-1} \\ \dots \\ \Gamma_M = Q_M - Q_{M-1} = \Gamma_0 - Q_{M-1} \end{array} \right\} \left\| \left\{ \begin{array}{l} Q_1 = \Gamma_1 \\ Q_2 = \Gamma_1 + \Gamma_2 \\ \dots \\ Q_j = \sum_{k=1}^j \Gamma_k \\ \dots \\ Q_M = \Gamma_0 = \sum_{k=1}^M \Gamma_k \end{array} \right. \right\}. \quad (2.38)$$

Відокремлюємо дійсну та уявну частину

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \operatorname{Re}(\Phi(z)) &= \sum_{j=1}^{M-1} \frac{Q_j}{2\pi} \left(\frac{(y_{0j+1} - y_{0j})(x - x_j) - (x_{0j+1} - x_{0j})(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \right) + \\ &+ \frac{\Gamma_0}{2\pi} \arg(x, y, x_{0M}, y_{0M}), \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = \operatorname{Im}(\Phi(z)) &= - \sum_{j=1}^{M-1} \frac{Q_j}{2\pi} \left(\frac{(x_{0j+1} - x_{0j})(x - x_j) + (y_{0j+1} - y_{0j})(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \right) - \\ &- \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln((x - x_{0M})^2 + (y - y_{0M})^2), \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \operatorname{Re}(\Phi(z)) &= \sum_{j=1}^{M-1} Q_j \left(\frac{(y_{0j+1} - y_{0j})(x - x_j) - (x_{0j+1} - x_{0j})(y - y_j)}{2\pi((x - x_j)^2 + (y - y_j)^2)} \right) + \\ &+ \frac{\Gamma_0}{2\pi} \arg(x, y, x_{0M}, y_{0M}), \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = \text{Im}(\Phi(z)) = & - \sum_{j=1}^{M-1} Q_j \left(\frac{(x_{0j+1} - x_{0j})(x - x_j) + (y_{0j+1} - y_{0j})(y - y_j)}{2\pi((x - x_j)^2 + (y - y_j)^2)} \right) - \\ & - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln((x - x_{0M})^2 + (y - y_{0M})^2). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Вводимо параметр геометричної регуляризації $R(x, y, x_j, y_j)$:

$$R(x, y, x_j, y_j) = \max \left\{ r_j, \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \right\} \quad (2.43)$$

$$\text{(можна покласти } r_j = r_0 = \sum_{j=1}^M |L_j| / (2M + 1) = \text{const}).$$

Тоді (2.39) та (2.40) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \sum_{j=1}^{M-1} \frac{Q_j}{2\pi} \left(\frac{(y_{0j+1} - y_{0j})(x - x_j) - (x_{0j+1} - x_{0j})(y - y_j)}{R^2(x, y, x_j, y_j)} \right) + \\ & + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \arg(x, y, x_{0M}, y_{0M}), \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & - \sum_{j=1}^{M-1} \frac{Q_j}{2\pi} \left(\frac{(x_{0j+1} - x_{0j})(x - x_j) - (y_{0j+1} - y_{0j})(y - y_j)}{R^2(x, y, x_j, y_j)} \right) - \\ & - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln R^2(x, y, x_{0M}, y_{0M}). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Також маємо визначення швидкості у кожній точці:

$$\vec{V}(x, y) = \sum_{j=1}^M \vec{V}_j(x, y) = \sum_{j=1}^M \Gamma_j \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}), \quad (2.46)$$

де

$$\vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) = \left(\frac{y_{0j} - y}{2\pi R(x, y, x_j, y_j)^2}, \frac{x - x_{0j}}{2\pi R(x, y, x_j, y_j)^2} \right).$$

Позначимо $\theta(x, y, x_{0j}, y_{0j}) = \frac{1}{2\pi} \arg(x, y, x_{0j}, y_{0j}) = \frac{1}{2\pi} \arg(z - \omega_{0j})$, який обчислюється (2.40):

$$\theta(x, y, x_{0j}, y_{0j}) = \frac{1}{2\pi} \arg(x, y, x_{0j}, y_{0j}) =$$

$$= \begin{cases} 0; & x = x_{0j}, y = y_{0j}; \\ \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}}; & x - x_{0j} > 0, y - y_{0j} \geq 0; \\ \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}}; & x - x_{0j} > 0, y - y_{0j} < 0; \\ -\frac{1}{4}; & x - x_{0j} = 0, y - y_{0j} < 0; \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{x - x_{0j}}{y - y_{0j}}; & x - x_{0j} \leq 0, y - y_{0j} < 0; \\ -\frac{1}{4}; & x - x_{0j} < 0, y - y_{0j} = 0; \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}}; & x - x_{0j} \leq 0, y - y_{0j} > 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Таким чином, вважаємо, що лінію розриву функцій $\theta(x, y, x_{0j}, y_{0j})$ направлено вертикально (направлення променів догори, рис.2.4, рис. 2.5) [2,10,16].

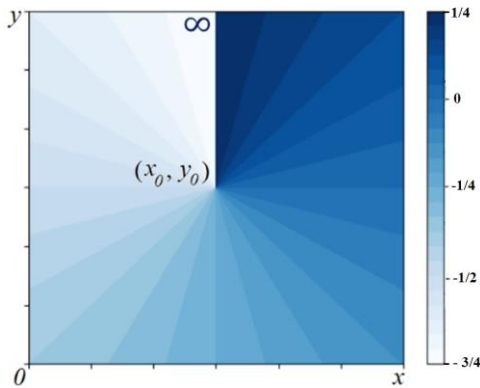


Рис. 2.4.

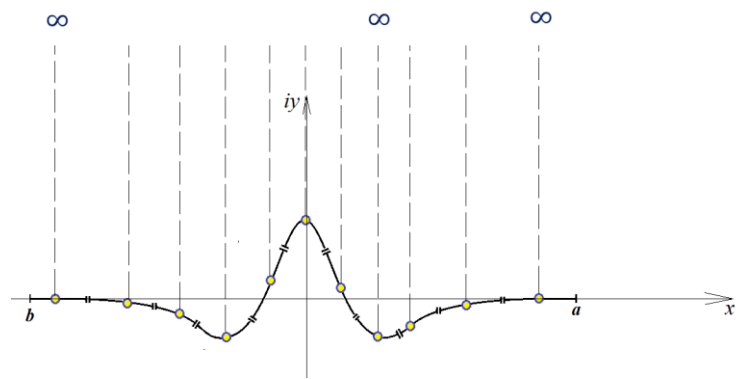


Рис. 2.5. Лінії розриву (промені) виділяють область однозначності для системи дискретних особливостей на контурі

Таким чином, (2.44) має представлення:

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{M-1} Q_j G(x, y, x_j, y_j) + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \theta(x, y, x_M, y_M), \quad (2.48)$$

де

$$G(x, y, x_j, y_j) = \frac{(y_{0j+1} - y_{0j})(x - x_j) - (x_{0j+1} - x_{0j})(y - y_j)}{2\pi R^2(x, y, x_j, y_j)}. \quad (2.49)$$

3. Обчислювальні алгоритми розв'язування плоских початково-крайових задач в областях з вільними межами

3.1. Алгоритм 1

Для розв'язання задачі Коші на рухомому контурі L_s (1.15)–(1.18) може бути застосовано явну схему Ейлера.

Точка \vec{r}_{0s} пробігає по всіх точках (x_{0j}, y_{0j}) розташування дискретних особливостей – вихорів $\Gamma_j, j = \overline{1, M}$.

У такому разі переміщення точок контуру L_s визначається переміщенням маркованих точок – дискретних особливостей $(\Gamma_j, j = \overline{1, M})$.

$$x_{0j}(t_{n+1}) = x_{0j}(t_n) + u(x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n)) \Delta t, \quad (3.1)$$

$$y_{0j}(t_{n+1}) = y_{0j}(t_n) + v(x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n)) \Delta t. \quad (3.2)$$

Далі, отримуємо розташування рухомих точок–диполів, які у момент часу t_{n+1} співпадають з новим положенням точок колокацій

$$x_j(t_{n+1}) = \frac{x_{0j+1}(t_{n+1}) + x_{0j}(t_{n+1})}{2}, \quad (3.3)$$

$$y_j(t_{n+1}) = \frac{y_{0j+1}(t_{n+1}) + y_{0j}(t_{n+1})}{2}, \quad j = \overline{1, \dots, M-1}, \quad (3.4)$$

Далі, із різницевого представлення задачі (1.15)–(1.18) отримуємо чисельні значення потенціалу в точках розташування дискретних особливостей у момент часу t_{n+1}

$$\begin{cases} \varphi(t_{n+1}, \vec{r}_{0k}(t_{n+1})) = \varphi(t_n, \vec{r}_{0s}(t_n)) + \left(\frac{V_s^{+2}(\vec{r}_{0k}(t_n))}{2} - y_{0k}(t_n) \right) \Delta t \\ r_{0k}(t_0) = r_{k0} \in L_0 \quad (\text{задано}) \\ \varphi(t_0, r_k(t_0)) = \varphi_{s0} \quad (\text{задано на } L_{s0}) \end{cases}. \quad (3.5)$$

Таким чином, для моменту часу t_{n+1} , із врахуванням (2.48), (2.49), із (3.5) отримуємо розподіл по межі – в точках $(x_{0k}(t_{n+1}), y_{0k}(t_{n+1}))$ розташування дискретних особливостей–вихорів чисельного значення потенціалу:

$$\varphi(x_{0k}(t_{n+1}), y_{0k}(t_{n+1})), k = \overline{1, M}. \quad (3.6)$$

Із (3.5) для моменту часу t_{n+1} , з врахуванням (2.48), (2.49), отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення чисельного значення коефіцієнтів $Q_j, j = \overline{1, \dots, M-1}$, та

Γ_0 , які визначають значення потенціалу в точках розташування дискретних особливостей–вихорів:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{M-1} Q_j G(x_{0k}(t_{n+1}), y_{0k}(t_{n+1}), x_j(t_{n+1}), y_j(t_{n+1})) + \\ & + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \theta(x_{0k}(t_{n+1}), y_{0k}(t_{n+1}), x_M(t_{n+1}), y_M(t_{n+1})) = \\ & = \varphi(x_{0k}(t_{n+1}), y_{0k}(t_{n+1})), \quad k = \overline{1, \dots, M-1}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

де

$$\begin{aligned} & G(x_{0k}(t_{n+1}), y_{0k}(t_{n+1}), x_j(t_{n+1}), y_j(t_{n+1})) = \\ & = \frac{(y_{0j+1}(t_{n+1}) - y_{0j}(t_{n+1}))(x_{0k}(t_{n+1}) - x_j(t_{n+1})) - (x_{0j+1}(t_{n+1}) - x_{0j}(t_{n+1}))(y_{0k}(t_{n+1}) - y_j(t_{n+1}))}{2\pi R(x_{0k}(t_{n+1}), y_{0k}(t_{n+1}), x_j(t_{n+1}), y_j(t_{n+1}))^2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Із системи (3.7), із врахуванням (3.8), отримуємо коефіцієнти Q_j , $j = \overline{1, M-1}$ та маємо (2.38) – формули перерахунку Q_j та визначення Γ_j із Q_j .

3.2. Алгоритм 2

Для розв’язання задачі Коші на рухомому контурі L_S (1.15)–(1.18) може бути застосовано явну схему Ейлера.

Точка \vec{r}_S – пробігає по всіх точках (x_j, y_j) розташування диполів – точок колокацій на межі області, Γ_j , $j = \overline{0, M}$.

Будемо вважати, що маркована точка \vec{r}_S пробігає по всіх точках розташування дискретних особливостей (x_j, y_j) (точки розташування диполів).

У такому разі переміщення точок контуру L_S визначається переміщенням маркованих точок колокацій, які у момент часу t_{n+1} співпадають з новим положенням точок–диполів:

$$x_j(t_{n+1}) = x_j(t_n) + u(x_j(t_n), y_j(t_n)) \Delta t, \quad (3.9)$$

$$y_j(t_{n+1}) = y_j(t_n) + v(x_j(t_n), y_j(t_n)) \Delta t. \quad (3.10)$$

Розташування рухомих точок – дискретних особливостей у момент часу t_{n+1} визначаються як середина поміж новими положеннями точок–диполів

$$x_{0j}(t_{n+1}) = \frac{x_{j+1}(t_{n+1}) + x_j(t_{n+1})}{2} \quad (3.11)$$

$$y_{0j}(t_{n+1}) = \frac{y_{j+1}(t_{n+1}) + y_j(t_{n+1})}{2}, \quad j = \overline{1, \dots, M}. \quad (3.12)$$

Із (3.9)–(3.12) для моменту часу t_{n+1} , з врахуванням (2.48), (2.49), отримуємо систему чисельного значення потенціалу $\varphi(x_{0k}(t_{n+1}), y_{0k}(t_{n+1}))$ в точках $(x_{0k}(t_{n+1}), y_{0k}(t_{n+1}))$, $k = \overline{1, M}$, розташування дискретних особливостей–вихорів:

$$\begin{cases} \varphi(t_{n+1}, \vec{r}_{0k}(t_{n+1})) = \varphi(t_n, \vec{r}_{0k}(t_n)) + \left(\frac{V^{+2}(\vec{r}_{0k}(t_n))}{2} - y_{0k}(t_n) \right) \Delta t \\ r_k(t_0) = r_{k0} \in L_0 \quad \text{(задано)} \\ \varphi(t_0, r_k(t_0)) = \varphi(x_{0k}(t_0), y_{0k}(t_0)) = \varphi_{s0} \quad \text{(задано на } L_{k0}) \end{cases}. \quad (3.13)$$

Таким чином, для моменту часу t_{n+1} , з врахуванням (2.48), (2.49), отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення чисельного значення коефіцієнтів Q_j , $j = \overline{1, \dots, M-1}$, та Γ_0 , які визначають значення потенціалу в точках розташування дискретних особливостей–вихорів:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{M-1} Q_j G(x_{0k}(t_{n+1}), y_{0k}(t_{n+1}), x_j(t_{n+1}), y_j(t_{n+1})) + \\ & + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \theta(x_{0k}(t_{n+1}), y_{0k}(t_{n+1}), x_M(t_{n+1}), y_M(t_{n+1})) = \\ & = \varphi(x_{0k}(t_{n+1}), y_{0k}(t_{n+1})), \quad k = \overline{1, \dots, M-1}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

де

$$\begin{aligned} & G(x_{0k}(t_{n+1}), y_{0k}(t_{n+1}), x_j(t_{n+1}), y_j(t_{n+1})) = \\ & = \frac{(y_{0j+1}(t_{n+1}) - y_{0j}(t_{n+1}))(x_{0k}(t_{n+1}) - x_j(t_{n+1})) - (x_{0j+1}(t_{n+1}) - x_{0j}(t_{n+1}))(y_{0k}(t_{n+1}) - y_j(t_{n+1}))}{2\pi R^2(x_{0k}(t_{n+1}), y_{0k}(t_{n+1}), x_j(t_{n+1}), y_j(t_{n+1}))}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Із системи (3.14), з врахуванням (3.15), отримуємо коефіцієнти Q_j , $j = \overline{1, M-1}$ та маємо (2.38) – формули перерахунку Q_j та для визначення Γ_j із Q_j .

Таким чином, при відомих Γ_j , $j = \overline{1, M}$, маємо визначення швидкості та потенціалу у довільній точці (x, y) , для якої у момент часу t_{n+1} :

$$\vec{V}(x, y) = \sum_{j=1}^M \vec{V}_j(x, y) = \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \vec{V}(x, y, x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})), \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \sum_{j=1}^{M-1} Q_j(t_{n+1}) G(x, y, x_j(t_{n+1}), y_j(t_{n+1})) + \\ & + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \theta(x, y, x_M(t_{n+1}), y_M(t_{n+1})), \end{aligned} \quad (3.17)$$

де

$$\begin{aligned} G(x, y, x_j(t_{n+1}), y_j(t_{n+1})) = \\ = \frac{(y_{0j+1}(t_{n+1}) - y_{0j}(t_{n+1}))(x - x_j(t_{n+1})) - (x_{0j+1}(t_{n+1}) - x_{0j}(t_{n+1}))(y - y_j(t_{n+1}))}{2\pi R^2(x, y, x_j(t_{n+1}), y_j(t_{n+1}))}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

4. Питання, задачі для самоконтролю

4.1. Контрольні питання

- 1) Загальні принципи постановки задач динаміки суцільного середовища. Точка зору Ейлера. Точка зору Лагранжа. Постановки задач в рухомій системі координат.
- 2) Методи теорії потенціалу. Чисельно-аналітичні (напіваналітичні) методи. Метод граничних інтегральних рівнянь. Метод граничних елементів.
- 3) Дискретизація моделі для початково-крайової гідродинамічної задачі з відривною течією. Метод дискретних особливостей (МДО).
- 4) Визначення співвідношення та розташування дискретних особливостей та точок колокації для розімкненого контуру. «Б-умова» в МДО.
- 5) Задачі масопереносу в рідині. Дискретизація моделей для задач масопереносу. Задачі адвекції. Дискретизація моделей адвекції.
- 6) Надати постановку зв'язаної задачі про масоперенос поверхневого/придонного забруднення рідини, яка рухається навколо перешкоди заданої форми.
- 7) Чи можна вважати початково-крайову задачу для еліптичного рівняння (для рівняння Лапласа, в області з рухомою межею) коректно поставленою?
- 8) Якщо метод дискретних вихорів – вихровий метод, то чому він застосовний для розв'язування потенціальної задачі?
- 9) Метод дискретних особливостей (МДО). Представлення дискретизованих моделей як функцій комплексної змінної. Представлення дискретизованих моделей як функцій дійсних змінних. Похибки апроксимації для методу дискретних особливостей.
- 10) Алгоритм моделювання нестационарного відривного обтікання рухомого деформованого контуру при застосуванні МДО.
- 11) Метод дискретних особливостей (МДО). Алгоритми забезпечення кінематичної умови непроникності крізь межу області.

4.2. Задачі для самостійного розв'язування

- 1) Визначити оцінку похибки апроксимації функції

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega$$

квадратурним представленням

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}).$$

- 2) Визначити оцінку похибки апроксимації функції

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega$$

квадратурним представленням

$$\Phi_n(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i (z - \omega_{0j})^n}.$$

- 3) Побудувати дипольне представлення для комплексної функції

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j})$$

з системою точок ω_{0j} , заданих на контурі. Контур лінійний.

- 4) Побудувати дипольне представлення для дійсної та уявної частин комплексної функції

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j})$$

з системою точок ω_{0j} , заданих на контурі. Контур лінійний.

- 5) Побудувати дипольне представлення для комплексної функції

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j})$$

з системою точок ω_{0j} , заданих на контурі. Контур гіллястий.

- 6) Побудувати дипольне представлення для дійсної та уявної частин комплексної функції

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j})$$

з системою точок ω_{0j} , заданих на контурі. Контур гіллястий.

7) Побудувати характеристичну функцію (потенціал) течії навколо пульсуючого джерела $\Phi(z, t) = ?$

8) Побудувати квадрупольне представлення для дипольного представлення комплексної функції

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i(z - \omega_{0j})}$$

з системою точок ω_{0j} , заданих на контурі. Контур лінійний.

9) Побудувати квадрупольне представлення для дійсної частини дипольного представлення комплексної функції

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i(z - \omega_{0j})}$$

з системою точок ω_{0j} , заданих на контурі. Контур лінійний.

10) Побудувати квадрупольне представлення для уявної частини дипольного представлення комплексної функції

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i(z - \omega_{0j})}$$

з системою точок ω_{0j} , заданих на контурі. Контур лінійний.

11) Побудувати мультипольне представлення для дипольного представлення комплексної функції

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i(z - \omega_{0j})^2}$$

з системою точок ω_{0j} , заданих на контурі. Контур лінійний.

Позначення

$$L = \sum_{j=1}^M L_j$$

– межа області, яка складається із сукупності межових елементів;

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega$$

– інтеграл з логарифмічним ядром;

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{z - \omega} d\omega$$

– особливий інтеграл з ядром Коші;

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega$$

– особливий інтеграл з гіперсингулярним ядром.

Література

1. Beshley A., Chapko R., Johansson B. T. On the alternating method and boundary-domain integrals for elliptic Cauchy problems. *Computers & Mathematics with Applications*. 2019. P. 1–13. doi.org/10.1016/j.camwa.2019.05.025
2. Chapko R., Johansson B. T. A boundary integral equation method for numerical solution of parabolic and hyperbolic Cauchy problems. *Applied Numerical Mathematics*. 2018. Vol. 129. P. 104–119.
3. Chapko R., Johansson B. T., Muzychuk Y., Hlova A. Wave propagation from lateral Cauchy data using a boundary element method. *Wave Motion*. 2019. Vol. 91. P. 1–12. doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.102385
4. Dovgiy S. O., Lyashko S. I., Cherniy D. I. Algorithms of the Discrete Singularity Method for Computing Technologies. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, 6. P. 950–962.
5. Dovgiy S. O., Lifanov I. K., Cherniy D. I. The method of singular integral equations and computational technologies. Kyiv: Publishing House “Yuston”, 2016. 308 p.
6. Ginevsky A. S., Zhelannikov A. I. Vortex wakes of Aircrafts. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, 2009. P. 154.
7. Golubiev S., Dovgiy S., Lebid O., Cherniy D. The Structure of a Vortex Wake Behind Vertical Wind Turbines as a Criterion for the Efficiency. *BBVIV-7 : The 7th Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations*. Proceedings, Carry-le-Rouet (Marseille), France, 3-6 July, 2018. P. 163–165.
8. Meleshko V. V., Cherniy D. I., Dovgiy S. O. The circulation model of vortex flow of a viscid wall layer. *23-rd ICTAM 2012 : 3rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*. Abstract Book, Beijing, China, August 19-24, 2012. Beijing, 2012. P. 101.
9. Saffman P. G. Vortex dynamics. Cambridge University Press, 1992. 376 p.
10. В.А. Ванін, В.А. Колпаков, Д.І.Черній Математичні моделі для задачі Коши-Пуассона. //Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2025. – №1. – С.103-110.
11. Васін П. О., Злощастьев Д. К., Черній Д. І. Алгоритм виконання умови непроникнення для методу дискретних особливостей. *Комп'ютерна гідромеханіка* : матер. VIII Міжнародної науково–практичної конференції, ІГМ НАНУ, м. Київ, 27-28 вересня. Київ, 2022. С. 11.
12. Васін П. О., Злощастьев Д. К., Черній Д. І. Алгоритм обчислювальних технологій для задач з вільною межею відокремлення середовищ. *Комп'ютерна гідромеханіка* : матер. VIII Міжнародної науково–практичної конференції, ІГМ НАНУ, м. Київ, 27-28 вересня 2022 р. Київ, 2022. С. 12.
13. Васін П. О., Злощастьев Д. К., Черній Д. І. Обчислювальна технологія для задач з вільними границями. *Сучасні проблеми механіки* : матер. VI Міжнародної наукової конференції. (До 70-річчя з дня народження Вячеслава Володимировича Мелешка), м. Київ, Україна, 30–31 серпня 2021. Київ, 2021. С. 45.
14. Довгий С. О., Троценко Я. П., Черній Д. І. Технології чисельного моделювання. Лабораторний практикум: навчальний посібник. Київ : 2024. 139 с.
15. Колпаков В. А., Черній Д. І. Метод розв'язання задачі Коші-Пуассона. *Шевченківська весна – 2024* : Матеріали ХХІІ Міжнародної науково-практичної конференції, 11 квітня 2024 р., м. Київ, Україна. К.: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2024, С. 85. https://probability.knu.ua/shv2024/ShV_2024.pdf.
16. Колпаков В. А., Черній Д. І., Ванін В. А. Математична модель для задачі Коші-Пуассона. *Комп'ютерна гідромеханіка* : матер. дев'ятої міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 1-2 жовтня 2024 р. Київ : ІГМ НАН України. 2024. С. 41–42.
17. Довгий С. О., Васін П. О., Злощастьев Д. К., Черній Д. І. Метод сингулярних інтегральних рівнянь для задач динаміки рідини в області з вільною межею. *Інформаційно-комунікаційні технології та сталий розвиток* : матер. ХХІ Міжнародної науково–практичної конференції, ІТГП НАНУ, м. Київ, 14–16 листопада. Київ, 2022. С. 37.