

**ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

О.А. Война

**ЙМОВІРНІСНІ та СТАТИСТИЧНІ
МОДЕЛІ
В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ**

Навчальний посібник

**Частина 1
ЕКОНОМЕТРИЧНІ МЕТОДИ
АНАЛІЗУ ФІНАНСОВОГО РИНКУ**

Київ 2025

УДК 519.2

Рецензенти: доктор економічних наук, проф. О.І. Ляшенко,
кандидат фізико-математичних наук, доц. М.М. Шарапов

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол № 14 від 20 травня 2025 року)

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол № 9 від 19 травня 2025 року)

д.ф.-м.н. Война Олександр Андрійович

Ймовірнісні та статистичні моделі в економічних дослідженнях.

Навчальний посібник. Частина 1. Економетричні методи аналізу фінансового ринку / О.А. Война – Київ: 2025. – 179 с.

В посібнику розглядаються приклади системного підходу до побудови математичних моделей суспільно-економічних явищ. Увага зосереджується на дослідженні складних систем, що функціонують в умовах невизначеності, та прийняттю рішень по управлінню такими системами. В якості предмету аналізу вибрано ринок криптовалют. Це новітній сегмент фінансової сфери, що стрімко розвивається. З методичних міркувань посібник поділений на дві частини. В першій частині приведені базові поняття та загальна характеристика математичного інструментарію, що буде застосовуватись. Йдеться, зокрема, про основні поняття таких сучасних прикладних розділів теорії ймовірностей та математичної статистики, як економетрика, прогнозування та дослідження економічної кон'юнктури, теорія економічного ризику, фінансова математика, тощо. Посібник містить велику кількість конкретних завдань для аудиторних занять та комп'ютерних лабораторних робіт. Детальні розв'язки розглянутих прикладів доповнюються розгорнутими коментарями з області основ теорії ймовірності, математичної статистики та суміжних економічно-математичних дисциплін.

Посібник адресований насамперед студентам, аспірантам та викладачам природничих, економічних та технічних факультетів університетів. Буде також корисним фахівцям-практикам, які користуються в своїй діяльності комп'ютерними програмами економетричного аналізу та математичної теорії прогнозу.

© Война О.А., 2025

ЗМІСТ

ЧАСТИНА 1

Економетричні методи аналізу фінансового ринку

ПЕРЕДМОВА.	5
Розділ 1.	
Математичні та статистичні інструменти моделювання фінансових процесів.	
1.1. Вступ. Моделювання як метод наукового дослідження.....	8
Метод Найменших Квадратів для лінійної моделі	
1.2. Економетрична модель лінійної регресії: принципи побудови та завдання для самоконтролю.	17
1.3. Метод Монте-Карло та стохастичне моделювання.....	25
1.4. Фінанси: фінансові відношення та фінансові процеси.	33
1.5. Негативні тенденції розвитку світової фінансової системи.....	40
1.6. Передумови появи фінансового ризик-менеджменту.....	44
1.7. Сучасна концепція управління ризиком підприємства	48
1.8. Лінійна модель з багатьма змінними:	53
1.9. Аналіз моделі з багатьма змінними: приклади та завдання для самоконтролю.	63
1.10. Етапи розвитку фінансового ризик-менеджменту.....	71
1.11. Криза фінансової системи та цифрові гроші.....	76

Розділ 2.	
Методи дослідження динаміки економічних явищ	
	79
2.1. Загальні поняття теорії статистичного прогнозування.....	79
2.2. Методи дослідження кон'юнктури фінансового ринку.	86
2.3. Економетричне прогнозування: приклади та завдання для само- контролю.	96
2.4. Економетричний аналіз процесу продукції.....	107
2.5. Побудова моделі виробничої функції $Q = Q(L, K)$	112
2.6. Побудова виробничих прогнозів.	117
2.7. Фінансовий ринок та ринок криптовалют.....	123
2.8. Інструменти аналізу динаміки економічних явищ.....	128
2.9. Цикли економічного розвитку.....	134
2.10. Динаміка явищ: дослідження короткострокових змін.....	139
Кількісні методи аналізу динаміки явищ фінансового ринку.	
2.11. Індивідуальні індекси: приклади.	146
2.12. Агреговані індекси.	155
2.13. Синтетичні показники при дослідженні кон'юнктури.	160
2.14. Характеристика методів дослідження кон'юнктури.....	169
2.15. Причинно-наслідкові моделі прогнозування кон'юнктури.....	174
ЛІТЕРАТУРА	179

ПЕРЕДМОВА

Ця книга є логічним продовженням серій написаних автором підручників [1] – [6]. У передмові до останнього серед цих підручників коротко анонсовано зміст всіх шести та встановлено взаємозв'язки між ними. Характерним для більшості цих підручників, за винятком [5], [6], є відсутність в них числових прикладів. Тому продовжуючи в новій книзі презентацію сучасних розділів прикладної статистики, що застосовуються при дослідженні економічних явищ, автор намагається також виправити цю ситуацію, доповнюючи та ілюструючи описані в попередніх підручниках стохастичні моделі конкретними числовими прикладами.

Опрацювання матеріалу як попередніх, так і запропонованого підручників не повинна бути надто обтяжливим для читачів, які володіють математичними знаннями в обсязі типової програми природничого факультету університету. Досягається це ретельним підбором та способом викладу тем, що розглядаються, математичним обґрунтуванням та практичною інтерпретацією методів дослідження, що вивчаються. Більшість методів представлено у вигляді зрозумілих обчислювальних алгоритмів, що дозволяє читачеві використовувати доступні комп'ютерні реалізації відповідних фрагментів, які входять, наприклад, до калькуляційного аркушу (електронної таблиці) «*Excel*» або найпростіших модулів пакету «*Статистика*». Мета автора полягала в тому, щоб надати читачеві базові знання, які дозволять йому вільно користуватися наявними в цих комп'ютерних продуктах теоретичними посібниками. Крім того, опрацювавши ці підручники зацікавлений читач напевно поглибить свою теоретичну математичну підготовку в царині прикладної статистики. Це дозволить йому звернутися до більш заангажованих математичних джерел та розширити доступний до практичного застосування комп'ютерний інструментарій в області статистичних методів.

Серед основних своїх завдань автор бачить також методичну допомогу, адресовану молодим викладачам, що проводять заняття як безпосередньо з теорії ймовірностей та математичної статистики, так і з сучасних економічних прикладних дисципліни, що базуються на них. Йдеться, зокрема, про економетрику, прогнозування, логістику та керування запасами, фінансову математику, страхування та актуарну математику, математичну економіку, дослідження операцій, теорію ризику, методи дослідження економічної кон'юнктури, теорію експерименту, та багато інших. Нині викладачі таких предметів стикаються з дуже неоднорідним (а точніше – дуже *низьким*) рівнем математичної підготовки студентів, особливо в області теорії ймовірностей та математичної статистики.

Часто ситуацію ускладнює дуже велика диспропорція між змістовним навантаженням названих предметів та часом, відведеним у навчаль-

них планах на їх опрацювання. Досвідчений викладач здатний швидко адаптуватися до *конкретної* ситуації, що складається в *конкретних* академічних групах, корегуючи відповідним чином методику проведення занять. Однак для викладачів-початківців це непросте завдання. Сподіваюсь, що написані підручники допоможуть їм в цій справі та будуть використані в якості надійного джерела методичної підтримки при підготовці практичних та лабораторних занять з використанням комп'ютерів. Цьому має сприяти запропонований автором спосіб передачі навчального матеріалу – максимально простий, зрозумілий і повний, без зайвого ангажування в абстрактний формалізм. Збережена, однак необхідна точність при визначенні і поясненні математичної суті базових понять, та адекватність інтерпретації їх змісту в прикладних застосуваннях.

Вибір тем, що ввійшли до книги, обумовлений багаторічним досвідом автора у проведенні занять з названих предметів та глибокого розуміння взаємозв'язків між ними. Запропоновані дидактичні матеріали апробовані автором на практиці і неодноразово реалізовувались в різних навчальних закладах на різних напрямках підготовки фахівців. Ці матеріали стосуються аудиторних вправ, лабораторних занять в комп'ютерних лабораторіях, самостійної роботи, завдань для проведення колоквиумів, заліків та іспитів з основ ймовірності, математичної статистики та вищезазначеної групи суміжних економічних дисциплін. Велика кількість вміщених у підручнику конкретних завдань оснащена детальними розв'язками та розгорнутими коментарями, що буде дуже корисними викладачам-початківцям при підготовці лекційних, практичних чи лабораторних занять. Приведені вказівки допоможуть також при розробці кількісних критеріїв поточного оцінювання роботи здобувачів освіти та контролю ефектів навчання. Подані в книзі дидактичні матеріали легко подати в електронному вигляді, тобто у вигляді відповідних комп'ютерних файлів. Це полегшує процес спілкування зі студентами, передачу навчальних матеріалів, мультимедійну їх презентацію, гнучке оновлення, тощо.

Підручник адресований насамперед студентам, аспірантам і викладачам природничих факультетів університетів. Рекомендується також для факультетів технічних університетів, освітні програми яких включають схожі предмети. Сподіваюся, що він буде корисний фахівцям-практикам, які використовують у своїй діяльності комп'ютерні програми, що реалізують економетричні методи та методи математичної теорії прогнозу.

Олександр ВОЙНА

Київ, вересень 2024

Розділ 1

Математичні та статистичні інструменти моделювання фінансових процесів

«Безсумнівно, нам неодноразово задавали питання:

- Для чого потрібна математика?
- Чи не є усі ці тонкі побудови, котрі ми повністю черпаємо із свого розуму, штучним плодом нашої примхи?

Я повинен встановити різницю між людьми, що задають ці питання.

Люди практичні потребують від нас **тільки способів наживи грошей.**

Ці люди не заслуговують на відповідь!»

Анрі Пуанкаре.

«Прямо зараз майнінг не є найприбутковішим заняття в світі. Майніти на одному комп'ютері останнім часом виходить дуже довго і не дуже вигідно.

Прибутковість ледь покриває витрати на електроенергію і то не завжди. Як наслідок схема майнінгу: **добув - поміняв на фіат** зараз неактуальна. Може однак спрацювати стратегія:

намайнив – тримай до підвищення ціни.

Таким чином ви ризикуєте інвестувати заради майбутніх доходів.

Зате при розвороті ринку можна отримати чималий прибуток».

Уільям Могайар.

«Про блокчейн всі розмовляють, але мало хто його бачив. Тим не менше проекти його використання чисельні та різноманітні, і поволі вони розповсюджуються на всі сфери діяльності. Саме тому можна з впевненістю стверджувати, що ця технологія має значний потенціал для розвитку. Однак все-таки дуже важливо розпочати переходити від **намірів до дій»**

Лоран Лелу.

Блокчейн – **кращий інструмент нинішнього десятиріччя.** Тим не менше, суспільство як і раніше не розуміє цю технологія до кінця і не знає, в чому причина проблем, що стоять на шляху її остаточного успіху. Ми повинні пам'ятати, що по своїй суті **блокчейн – це перспективна технологія.** Як і у випадку з будь-якою перспективою, **потрібен час, щоб вона наблизилась.** Але, щоб виконати всі її обіцянки, нам знадобляться **мільйони людей, що розуміють технологію блокчейн, мільйони бізнес-лідерів та мільйони активних користувачів»**

Уільям Могайар.

1.1. Вступ. Моделювання як метод наукового дослідження.

1. Математичні методи наукових досліджень. 2. «Складна система» та її модель. 3. Економіко-математичне моделювання. 4. Стохастичний характер економіко-математичної моделі. 5. Економетрична модель. 6. Емпіричний характер економетричної моделі. 7. Економетричне моделювання. 8. Наближений характер економетричної симуляції.

Цей підручник адресовано, перш за все, студентам факультету комп'ютерних наук та кібернетики, а також математикам та фахівцям в області інформатики. Головним чином увага в ньому зосереджується на презентації *ймовірнісних та статистичних методів* для побудови *моделей*, які можуть бути корисними при вивченні складних і часто суперечливих явищ, що спостерігаються на фінансових ринках. Яскравим прикладом такого «*явища*» може бути ринок *криптовалют*, що стрімко розвивається.

Однак ознайомлення з методологією дослідження новітнього сегменту сучасного фінансового ринку, яким є *електронні гроші*, має ще одну мету – це презентація на конкретному прикладі практичної реалізації *технології блокчейн*. Блокчейн без перебільшення є революційною технологією, яка має необмежену область можливих застосувань. Фінансова сфера не випадково стала тією галуззю, в якій вона вперше була успішно втілена на практиці у вигляді «*проекту Біткойн*».

➤ Результатом цього проекту було введення в фінансовий обіг *біткойну* – віртуальної (*електронної*) «*готівки*», або інакше – поява першої «*криптовалюти*».

Спочатку цього майже ніхто не помітив, потім *біткойн* перетворився в «*тему для жартів*», але всі жарти та насміхання швидко припинилися, коли вартість однієї віртуальної *монети* біткойн зросла з кількох *центів* до кількох *десятків тисяч доларів*.

➤ Менш ніж 15 років, що минули від моменту приведення в дію «*проекту Біткойн*» цілком вистачило, щоб переконати світ в тому, що саме *технологія блокчейн* призведе до корінної зміни всього сучасного світоустрою.

Однією з перешкод на шляху практичного втілення цієї технології є її складність – це досить не проста (з будь якої точки зору), багатогранна галузь науково-технічних знань (перш за все в сфері *теоретичної кібернетики*), що стрімко та динамічно розвивається. Тому роки підготовки студентів на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики – найкращий час для освоєння *основних аспектів*, що утворюють фундамент технології та принципів функціонування *блокчейн мереж*. Тисячі функціонуючих сьогодні на фінансовому ринку блокчейн мереж дають можливість проілюструвати основні теоретичні аспекти технології *блокчейн на конкретних прикладах*.

Тому зміст підручника побудований таким чином, щоб перш за все, познайомити читачів з економічними поняттями та категоріями, необхідними для розуміння процесів, що відбуваються на фінансовому ринку. Окреслити в загальних рисах завдання цього ринку, його структурою, елементи цієї структури, їх взаємовідношенням та взаємодією, тощо. Значна увага буде приділятися побудові ефективних інструментів кількісного аналізу фінансового ринку в цілому, тобто *формальним математичним моделям*, які описують окремі його елементи та основні процеси.

Те, що саме в фінансовій сфері знайшли своє перше успішне практичне втілення ідеї технології блокчейн, не було випадковим явищем. Існувала велика суспільна потреба (*суспільний запит*) в створенні подібних мереж. Причиною (приводом) для цього були *негативні тенденції* розвитку світової фінансової системи. Наслідками цих тенденцій стали потужні кризові явища на міжнародних фінансових ринках.

Ось чому вже в далекому 1976 р., коли *Інтернету* не існувало навіть в творах фантастів, (відповідно не існувало слів типу «*блокчейн*»), австрійський фінансист Фрідріх Август фон Хайек в своїй книзі «*Приватні гроші*» переконував в необхідності запровадження *конкурентних недержавних фінансових систем* та наводив аргументи слухності скасування *державної монополії* в управлінні грошово-фінансовою системою.

Нажаль його прогнози справдились і безвідповідальність інституцій, покликаних контролювати та регулювати фінансові установи, часто була причиною криз та потрясінь, які мали негативні наслідки на всі інші сфери діяльності.

Ідеї Фрідріха фон Хайек зацікавили *математиків* (в першу чергу *криптографів*), до них долучились *інформатики*, і процес формування підвалин технології *блокчейн* розпочався.

Комп'ютеризація господарських процесів, (особливо в фінансовій сфері) сприяла швидкому розвитку цієї революційної *технології*. Проаналізуємо деякі передумови формування «*ринку криптовалют*» та пригадаємо базові пов'язані з цим математичні поняття.

➤ Їх першоджерелом можна вважати *математичну теорію економічного ризику*.

1. Математичні методи наукових досліджень.

Загалом існують три основні методи вивчення явищ і процесів, що відбуваються в дійсності, за допомогою математичних методів. ([3], s. 272).

➤ Перший з них – це математичне моделювання за допомогою формалізованих точних математичних моделей.

Його можна назвати *аналітичним*, або *теоретичним* методом, а застосувати на практиці лише в такій ситуації, коли наукові досягнення у відпові-

дній галузі знань та наявна інформація щодо досліджуваного явища дозволяють отримати вичерпну відповідь на поставлені питання за допомогою відповідних математичних засобів.

Два інших підходи у вивченні реальних процесів можна назвати *експериментальним*, оскільки вони спираються на проведення відповідних експериментів і належну обробку їх результатів. Зазвичай вони використовуються тоді, коли немає відповідних формальних моделей або досліджуване явище є занадто складним для того, щоб дослідити його аналітичним шляхом. Різниця між ними полягає в тому, яким чином відбувається «експериментування».

- Один з таких методів називається *прямим експериментуванням* і зводиться до проведення дослідів безпосередньо над досліджуваним явищем.
- Другий спосіб «експериментування» – це проведення дослідів з використанням *моделі* предмету дослідження. Тому такий підхід отримав назву «*методу симуляції*» явища, що вивчається.

Варто підкреслити, що скористатися першим серед трьох названих, тобто *аналітичним* методом наукового дослідження, вдається дуже рідко, адже ситуацій, коли існує точна математична модель для явища, що є предметом такого дослідження, насправді не так багато. Тому *основними* при науковому дослідженні реальних явищ та процесів є два інших підходи, які ми об'єднали спільною назвою:

- *Експериментальний метод*.

2. «Складна система» та її модель.

Оскільки основним знаряддям в проведенні наших «експериментальних» досліджень будуть математичні методи, то, очевидно, йдеться про *моделювання*, тобто заміну предмету дослідження певним його «*відображенням*». Приймаючи до уваги ту обставину, що подібно до реальних явищ, їх «*моделі*» теж можуть мати найрізноманітніший характер, а отже розпочату загальну класифікацію можна продовжувати, зупинимось на ключових поняттях саме «*математичного моделювання*». А оскільки в центрі нашої уваги будуть переважно *економічні* явища, то нагадаємо базові поняття, що характеризують «*економіко-математичні моделі*». Детальніше про це можна прочитати в ([3], с. 272, 283), де йшлося про використання методу «*симуляції*» для прогнозування розвитку *економічних* явищ. Для того, щоб «*формалізувати*» ці явища, необхідно *чітко та точно* (тобто «*в міру однозначно*») визначити низку *окремих* понять. Серед них, зокрема, такі, як:

- «*система*», «*стан системи*», «*складна система*», «*економічна система*», «*симуляція*» «*економетрична симуляція*», тощо.

Всі ці поняття тісно пов'язані між собою і в сукупності дають можливість запровадити загальні категорії, що являються формальним відображенням

реальних об'єктів, тобто конкретних явищ, що спостерігаються в реальному житті і є предметом наукового інтересу та метою дослідження. До цих категорій належать, зокрема, такі як:

- «*модель*», «*моделювання*», або «*модель для симуляції*».

В «*економіко-математичному моделюванні*» найбільш загальною, або базовою є категорія «*складної системи*». Саме «*складна система*», є формальним *відображенням* предмету дослідження, тобто описує за допомогою формальних засобів явище, що вивчається.

Серед основних понять, що характеризують *складну систему*, виділяємо в першу чергу наступні:

- «*елементи системи*», «*внутрішні та зовнішні атрибути*», «*стани системи*», «*функція системи*», «*потоків подій (вхідні та вихідні)*» тощо.

Розглядаючи взаємозв'язок *об'єкту дослідження* (реальної системи) з *формальною* категорією «*складної системи*», слід трактувати складну систему, як модель, тобто «*замінник*» реальної системи:

- Модель досліджуваної реальної складної системи – це будь-яке її *логічне відтворення* (або *презентація*).

Основне припущення методу *наукового моделювання* полягає в тому, що модель розглядається як «*точна копія*» (або *відповідник*) системи, яка досліджується. Тоді все, що стосується поняття «*симуляція*», слід розглядати як «*замінник*», (або *логічне відтворення*) пов'язаних з реальним об'єктом «*потоків подій*».

- Це означає, що потоки *вхідних і вихідних* подій для моделі будуть *отождошнюватися* з відповідними потоками досліджуваної *реальної системи*.

Підсумовуючи, суть методу моделювання можна коротко охарактеризувати його наступним чином:

- Метод наукового моделювання дозволяє замінити експериментування на реальній системі експериментуванням на її моделі.
- Висновки, отримані в результаті дослідження моделі, переносяться на реальний об'єкт.

3. Економіко-математичне моделювання.

Головним чином нас цікавлять економічні явища, іншими словами – «*складні економічні системи*», тоді як «*моделі*», про які ми говоримо, це передусім «*математичні моделі*». Варто підкреслити, що «*економіко-математичне моделювання*» є основною формою застосування математики до вивчення економічних явищ, оскільки сутність економічного аналізу за визначенням є *математичною* в тому сенсі, що:

- *Економічний аналіз*, подібно до того, як і будь-яке *математичне дослідження*, спрямований на встановлення *кількісних зв'язків* між явищами, що вивчаються.

Як правило, економічно-математичні моделі мають форму систем рівнянь, що описують зв'язки та залежності між змінними, які характеризують вибране для аналізу явище. Будь-яка модель за визначенням є лише «замінником» реальних явищ, тобто спробою «приблизно їх описати». У випадку ж *економічних* явищ можна з певністю констатувати наступне:

➤ Математичних моделей, які *абсолютно точно* описують ці явища, в принципі не може існувати.

Іншими словами, у випадку *економічних* явищ *аналітичний* підхід, тобто метод математичного моделювання, що передбачає наявність *точної моделі*, непридатний. Назвемо деякі причини цього:

- Як правило, економічні явища є дуже складними, щоб можна було *точно* описати їх у «*всіх дрібницях*».

- Взаємозв'язки між ними *занадто складні* і часто *не повністю визначені*.

- Кожне економічне явище тісно пов'язане як з *економічними* (тобто *господарчими*) так і з *неекономічними* явищами, різноманіття яких практично необмежене;

тощо. Тому неможливо охопити одним визначенням ту величезну кількість різноманітних формальних економічних моделей, які існують сьогодні. Однак всі вони мають одну спільну рису:

➤ Кожна з них є спробою описати *приблизно* певний фрагмент економічної реальності.

4. Стохастичний характер економіко-математичної моделі.

Для того, щоб математична модель адекватно описувала реальні процеси, вона повинна базуватися на глибокому і всебічному теоретичному аналізі *змісту* цих процесів. Тому економіко-математичні моделі, як правило, будуються на основі відповідної *економічної теорії*. Це дозволяє належним чином врахувати в моделі *основні та найважливіші фактори*, що формують досліджуване явище.

Однак крім «*основних*» та «*найважливіших*» існує практично *нескінчена* кількість «*неістотних*» (або *незначних*) чинників, що теж впливають на явище, яке вивчається. Багато з них має *непередбачуваний, випадковий* характер. Господарчі процеси тісно взаємопов'язані зі своїм оточенням (часто теж *непередбачуваним*) та активно з ним взаємодіють. Все це і є головною причиною, яка визначає *стохастичну природу* економічних явищ. Що в свою чергу обумовлює стохастичний характер відповідних моделей, покликаних описувати ці явища.

«*Економічну реальність*», яку мають описувати економіко-математичні моделі, зазвичай представляють відповідні статистичні дані,

отримані в результаті *спостереження* за процесами, що формують цю «реальність». Тому серед великого різноманіття типів математичних моделей найбільш виразним прикладом формалізованого опису математичними засобами економічних явищ є *стохастичні моделі*, що будуються на основі таких *статистичних* даних.

➤ В загальній класифікації економіко-математичних моделей вони дістають назву «*економетричні моделі*» ([2], с. 88, [3], с. 151).

5. Економетрична модель.

Теоретичний фундамент економетричної моделі утворює, зазвичай, відповідна *економічна модель*. Ця формальна модель, як правило, будується в рамках певного розділу *економічної науки*. Базується економічна модель на низці попередніх припущень, характерних для цього розділу *економічної науки*. Варто підкреслити, що будь-яка економічна модель не є «*безумовним економічним законом*», а лише спробою адекватного опису деякого фрагменту економічної діяльності. Будується вона з використанням відповідних для цього розділу *економічної науки* понять та інструментів, та передбачає виконання низки *попередніх умов та обмежень*.

Статистичні дані, отримані в результаті *спостереження* явища, яке повинна описувати така *формальна економічна модель*, не підтверджують її «*абсолютної адекватності*», тобто кількісні співвідношення в рамках моделі не виконуються «*абсолютно точно*» для отриманих статистичних даних. Цей встановлений на практиці факт можна вважати практичним підтвердженням сформульованого раніше постулату, а саме:

➤ *Точної* моделі у випадку *економічних* явищ не існує в принципі, а та модель, яку вдається побудувати в рамках будь-якої *економічної* теорії – це лише спроба *приблизно* описати явище, що досліджується.

Ось чому характерною ознакою економетричної моделі, що відрізняє її від всіх інших економіко-математичних моделей, є присутність в ній *спеціальної змінної*, що має назву «*випадкова змінна*» (або «*випадковий доданок*»). Наявність в ній цієї *випадкової* складової, перш за все, і визначає *стохастичний* характер економетричної моделі.

Принцип побудови економетричної моделі простий і логічний. Її утворюють два елементи: *структурна* частина та *стохастична* частина.

➤ *Структурна* частина – це, як правило, економіко-математична модель, побудована на основі відповідної економічної теорії, що відображає головні закономірності досліджуваного явища, враховуючи належним чином всі *основні та найважливіші фактори*, що їх формують.

➤ *Стохастична* частина – це, власне, «*випадкова змінна*», яка об'єднує в собі спільний вплив на досліджуване явище чинників «*неосновних*», «*неістотних*», «*непередбачуваних*», «*незначних*», «*випадкових*», тощо.

З математичної точки зору ця змінна трактується, як *випадкова величина* – звідси її назва «*випадковий доданок*». Ця змінна дозволяє певною мірою «*уточнити*», або доповнити економічну модель, додаючи до *базових* змінних, що мають вирішальний вплив на формування предмету дослідження, сумарний вплив «*неосновних*» факторів.

Наявність в економетричній моделі «*випадкового доданку*» визначає її *стохастичний* характер, тобто економетрична модель – це *стохастична* модель. А це означає, що одними із основних інструментів побудови та дослідження економетричних моделей повинні бути методи теорії ймовірностей та математичної статистики.

6. Емпіричний характер економетричної моделі.

Наступною базовою ознакою економетричної моделі є її *емпіричний* характер. Як підкреслювалось, «*економічну реальність*» при економетричному моделюванні представляють відповідні *емпіричні* дані, отримані в результаті статистичного *спостереження* за цією «*реальністю*». Тому будується економетрична модель на підставі цих статистичних даних – що, перш за все, і означає вислів «*емпіричний характер*».

З іншого боку основні етапи процесу «*побудови*» моделі – це чергові кроки статистичного опрацювання емпіричної інформації.

- Перший з них – це статистичне *оцінювання*, тобто знаходження *оцінок* невідомих значень параметрів моделі. Підставою для такого оцінювання будуть результати *спостережень*, тобто *емпіричні* дані.

Задача полягає в тому, щоб за допомогою методів математичної статистики знайти такі оцінки параметрів моделі, які дозволять «*найкращим чином пояснити*» отримані статистичні дані.

Іншими совами, отримане рівняння (або ж система рівнянь), що формують цю модель, повинні найточніше «*підходити*» до наявних *емпіричних* даних.

- Наступний крок – це *верифікація* моделі, тобто з'ясування того, наскільки *адекватно* побудована модель описує те явище, що досліджується. Математичним інструментом такої верифікації будуть методи перевірки статистичних гіпотез, а підставою до висновків - наявні *емпіричні* дані.
- Нарешті *оцінка точності* отриманих результатів дослідження відбувається шляхом застосування відповідних статистичних методів і ґрунтується на використанні результатів спостережень.

Із сказаного робимо очевидний висновок:

- До основних *математичних інструментів* побудови та дослідження економетричних моделей слід зарахувати *поняття та методи теорії ймовірностей і математичної статистики*.

7. Економетричне моделювання.

Експериментування з економічними явищами на економетричній моделі створює окремий розділ економічної теорії, який називається *економетричним моделюванням*. Суть економетричного моделювання полягає в тому, щоб шляхом розв'язування рівнянь моделі для *різних початкових умов* та для *різних значень параметрів*, знайти відповіді на питання:

- Як би поводи́ла себе реальна «складна економічна система», яку описує дана економетрична модель, за певних визначених умов.

В даному випадку імітаційний експеримент, який супроводжує економетричне моделювання, буде *комп'ютерним експериментом*.

➤ Це – специфічний тип експериментування, що проводиться *не безпосередньо* над реальною системою, а на *математичній моделі* цієї системи.

Моделювання процесів, що відбуваються в реальних економічних системах, дозволяє визначити кількісні характеристики їх функціонування в конкретних умовах. Це дає змогу вивчити вплив на характеристики системи зміни умов її експлуатації та відповісти на наступні питання:

- Як зміниться *вихідний* потік досліджуваної системи при зміні характеристик одного або кількох компонентів системи?
- Як буде змінюватися *вихідний* потік цієї системи, якщо змінювати її *структуру*, тобто *додавати* нові елементи, *видаляти* існуючі, *змінювати* взаємозв'язки між елементами, тощо.

До основних переваг цього методу необхідно зарахувати ту обставину, що імітаційний експеримент можна провести в будь-який час, навіть тоді, коли тестування на реальній системі може бути неможливим. Більше того, навіть у випадку, коли можливий безпосередній експеримент на реальній системі, імітаційний експеримент може бути значно дешевшим та безпечнішим.

Комп'ютерне моделювання дозволяє «*прискорити*» або «*стиснути*» час, тобто за кілька секунд можна змоделювати процеси, які насправді, в «*реальному*» житті можуть тривати сотні років. Імітаційні експерименти (на відміну від інших способів моделювання) мають властивість *повторюваності*, тобто існує можливість їх багаторазового відтворення в однакових умовах. Це дозволяє розширити арсенал кількісного аналізу їх результатів за допомогою засобів математичної статистики. Як правило, імітаційні моделі є *універсальними* моделями і без серйозних (*суттєвих*) змін їх можна використовувати для вивчення *абсолютно різних* явищ. Крім того, алгоритми моделювання дуже гнучкі в плані їх модифікації, що в свою чергу дає можливість вивчати *цілий клас подібних систем*.

Нарешті сам процес *створення*, тобто побудови імітаційної моделі, дозволяє краще зрозуміти принципи функціонування складної системи, що досліджується, встановити її структуру, відслідкувати існуючі, як внутрішні зв'язки, так і зв'язки з навколишнім середовищем, тощо. Ця обставина є особливо важливою у випадку економічних систем, оскільки це має безпосередній вплив на ефективне управління такими системами.

8. Наближений характер економетричної симуляції.

Результати подібного моделювання слід розглядати як *приблизний опис* можливого перебігу реального економічного явища, оскільки можливості та точність такого підходу значною мірою обмежені. Наведемо деякі з основних причин, що зумовлюють наближений характер економетричного моделювання.

По-перше, використана модель, на якій відбувається «*експериментування*», сама по собі є *приблизним описом* аналізованого фрагмента економічної реальності.

Ця модель будувалася на основі емпіричних даних, що стосуються перебігу розглянутого економічного явища *в минулому*. Тобто структура моделі, її аналітичний вигляд та оцінки параметрів значною мірою базувалися саме на цій інформації. Натомість метою моделювання є намагання «*вгадати*» можливий розвиток досліджуваного економічного явища *в майбутньому*, оскільки *економетрична симуляція* – це один із різновидів *економетричного прогнозування*.

➤ Незмінність закономірностей поведінки досліджуваного явища, а отже актуальність побудованої моделі в майбутньому – це одне з *базових припущень* методу економетричного прогнозування.

Тому помилки отриманих прогнозів можуть бути наслідком хибності цього припущення. Розбіжності між результатами моделювання та майбутнім розвитком реальних подій значною мірою спричинені стохастичним характером явищ і невизначеністю у взаємозв'язках і взаємодії процесів, що описуються економетричною моделлю.

Наявність в економетричній моделі випадкової складової – це та *характеристична особливість*, що виділяє її серед великої кількості стохастичних математичних моделей. Ця специфічна змінна акумулює *сумарний ефект* впливу непередбачуваних факторів на досліджуване явище та визначає стохастичний характер економетричної моделі.

➤ Особливістю *економетричної симуляції* є та обставина, що випадкова складова *не враховується* під час розв'язання рівнянь моделі в імітаційному експерименті.

Ця обставина, без сумніву, має негативний вплив на точність прогнозів, побудованих методом *економетричної симуляції*.

Метод Найменших Квадратів для лінійної моделі.

1.2. Економетрична модель лінійної регресії: принцип побудови та завдання для самоконтролю.

Економетрико-статистичні методи в дослідженні економічних процесів.

1. Постановка задачі. 2. Оцінювання структурних параметрів моделі. 3. Оцінювання параметрів стохастичної структури моделі. 4. Точність оцінок структурних параметрів моделі. 5. Відповідність моделі емпіричним даним.

1. Постановка задачі.

Маємо наступні числові дані:

$$\{(x_1 = 3; y_1 = 10), (x_2 = 4; y_2 = 15), (x_3 = 1; y_3 = 11), (x_4 = 6; y_4 = 18), \\ (x_5 = 10; y_5 = 22), (x_6 = 12; y_6 = 20), (x_7 = 7; y_7 = 14), (x_8 = 10; y_8 = 18), \\ (x_9 = 2; y_9 = 9), (x_{10} = 5; y_{10} = 13)\},$$

Кожна пара (x_t, y_t) – це реалізація змінної Y (координата y_t) для відповідного значення (координата x_t) змінної X .

Припустимо, що між змінними X та Y існує лінійна залежність:

$$Y = b + a \cdot X.$$

Однак дані точки площини не лежать на одній прямій. Ця обставина пояснюється наступним чином.

- Емпіричні значення

$$x_1 = 3; x_2 = 4; x_3 = 1; x_4 = 6; x_5 = 10; x_6 = 12; x_7 = 7; x_8 = 10; x_9 = 2; x_{10} = 5$$

це визначені заздалегідь, точні значення змінної X .

- Числа $\{y_t, t = 1, 2, \dots, 10\}$ – це *емпіричні* значення змінної Y , тобто результат спостереження змінної Y для встановлених значень $\{x_t, t = 1, 2, \dots, 10\}$ змінної X .
- Вимірювання значень змінної Y під час спостереження неточні, тобто припускаємо, що:

$$y_t = b + ax_t + \xi_t, t = 1, 2, \dots, 10.$$

Похибка вимірювання ξ_t є випадковою величиною, що має наступні властивості:

- ✓ Розподіл похибок вимірювання ξ_t такий самий для всіх спостережень $t = 1, 2, \dots, 10$
- ✓ Похибки ξ_t та ξ_s для різних вимірювань ($t \neq s$) *некорельовані*, тобто

$$\text{Cov}(\xi_t, \xi_s) = 0, t, s = 1, 2, \dots, 10, t \neq s.$$
- ✓ $E(\xi_t) = 0, D(\xi_t) = \sigma^2, t = 1, 2, \dots, 10.$

Завдання 1. Побудувати в аркуші «*Excel*» графік точок, що представляють *числові дані моделі* $\{(x_t, y_t), t = 1, 2, \dots, 10\}$.

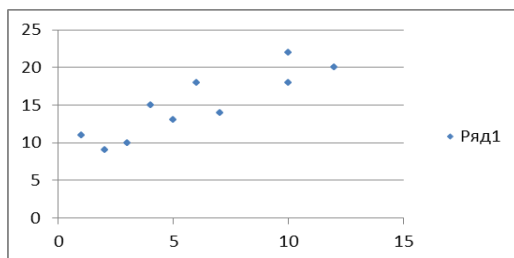


Рис 1. Графік числових даних $\{(x_t, y_t), t = 1, 2, \dots, 10\}$ моделі.

2. Оцінювання структурних параметрів моделі [2].

Завдання 2. Обчислити значення оцінки методу найменших квадратів (МНК) \hat{a} структурного параметру a моделі.

Розв’язок. Оцінка МНК \hat{a} визначається формулою:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \text{ де } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Необхідні обчислення впорядкуємо у вигляді наступної таблиці:

t	x_t	y_t	$x_t - \bar{x}$	$y_t - \bar{y}$	$(x_t - \bar{x})^2$	$(x_t - \bar{x}) \cdot (y_t - \bar{y})$
1	3	10	-3	-5	9	15
2	4	15	-2	0	4	0
3	1	11	-5	-4	25	20
4	6	18	0	3	0	0
5	10	22	4	7	16	28
6	12	20	6	5	36	30
7	7	14	1	-1	1	-1
8	10	18	4	3	16	12
9	2	9	-4	-6	16	24
10	5	13	-1	-2	1	2
Σ	60	150	0	0	124	130

Таблиця 1.

Середня арифметична емпіричних значень $\{x_t, t = 1, 2, \dots, 10\}$ змінної X

дорівнює: $\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{60}{10} = 6.$

Середня арифметична емпіричних значень $\{y_t, t = 1, 2, \dots, 10\}$ змінної Y

дорівнює: $\bar{y} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} y_i = \frac{150}{10} = 15.$

Значення (\hat{a}) оцінки МНК структурного параметру a моделі для емпіричних даних $\{(x_t, y_t), t = 1, 2, \dots, 10\}$ дорівнює:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - x^*)(y_i - y^*)}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - x^*)^2} = \frac{130}{124} = \frac{65}{62} \approx 1,0484.$$

Відповідь: $a \approx \hat{a} = \frac{65}{62} \approx 1,0484.$

Завдання 3. Обчислити значення (\hat{b}) оцінки МНК структурного параметру b моделі.

Розв'язок. \hat{b} визначається формулою: $\hat{b} = \bar{y} - \bar{x} \cdot \hat{a}$. Використовуючи таблицю 1 отримаємо: $\hat{b} = \bar{y} - \bar{x} \cdot \hat{a} = 15 - 6 \cdot \frac{65}{62} = \frac{540}{62} = \frac{270}{31} \approx 8,7097.$

Відповідь: $b \approx \hat{b} = \frac{270}{31} \approx 8,7097.$

Завдання 4. Використовуючи побудовану модель, визначити її *теоретичні* значення $\hat{y}_{(t)} = \{\hat{y}_t, t = 1, 2, \dots, 10\}$ та додати їх до збудованого графіка *емпіричних* значень.

Розв'язок. Теоретичні значення визначаються за формулою:

$$\hat{y}_t = \hat{b} + \hat{a} \cdot x_t.$$

Тому використовуючи результати завдань 2 та 3 отримаємо:

$$\hat{y}_1 = \hat{b} + \hat{a} \cdot x_1 = \frac{270}{31} + \frac{65}{62} \cdot 3 \approx 11,855;$$

$$\hat{y}_2 = \hat{b} + \hat{a} \cdot x_2 = \frac{270}{31} + \frac{65}{62} \cdot 4 \approx 12,903; \text{ ітд.}$$

Відповідь:

$\hat{y}_{(t)} \approx \{11,855; 12,903; 9,758; 15; 19,194; 21,29; 16,048; 19,194; 10,806; 13,952\}.$

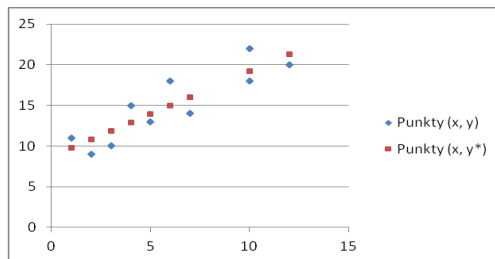


Рис 2.

Завдання 5. Використовуючи функцію «Формат лінії тренду» аркушу «Excel», додати до збудованого графіка теоретичну модель а також, знайти статистичні оцінки $\{\hat{b}, \hat{a}\}$ для структурних параметрів моделі.

Відповідь:

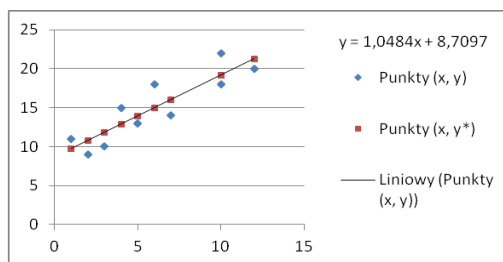


Рис. 3.

3. Оцінювання параметрів стохастичної структури моделі. [2]

Завдання 6. Обчислити числові значення решти моделі $\{e_t, t = 1, 2, \dots, n\}$.

Розв'язок. Рештами моделі називаються різниці між емпіричними (y_t) та теоретичними (\hat{y}_t) значеннями моделі.

$$e_t = y_t - \hat{y}_t, t = 1, 2, \dots, n.$$

Використовуючи результати завдання 4 отримаємо:

$$e_1 = y_1 - \hat{y}_1 \approx 10 - 11,855 = -1,855;$$

$$e_2 = y_2 - \hat{y}_2 \approx 15 - 12,903 = 2,097; \text{ ітд.}$$

Відповідь: $e_1 \approx -1,855; e_2 \approx 2,097; e_3 \approx 1,242; e_4 \approx 3; e_5 \approx 2,806; e_6 \approx -1,29; e_7 \approx -2,048; e_8 \approx -1,194; e_9 \approx -1,806; e_{10} \approx -0,952.$

Завдання 7. Знайти числове значення $\hat{\sigma}^2$ незміщеної статистичної оцінки для параметру σ^2 стохастичної структури моделі.

Розв'язок. Незміщена статистична оцінка $\hat{\sigma}^2$ для параметру σ^2 стохастичної структури моделі визначається формулою:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n e_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

Тому впорядкуємо проведені раніше обчислення у вигляді наступної таблиці 2.

Підрахуємо квадрати решт:

$$(e_t)^2 = (y_t - \hat{y}_t)^2.$$

Оскільки $n = 10$, то числове значення $\hat{\sigma}^2$ незміщеної статистичної оцінки для параметру σ^2 дорівнює:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{10-2} \cdot \sum_{i=1}^{10} e_i^2 = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^{10} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{37,71}{8} = 4,714.$$

Таблиця 2.

t	x_t	y_t	\hat{y}_t	$e_t = y_t - \hat{y}_t$	$(y_t - \hat{y}_t)^2$
1	3	10	11,855	-1,855	3,44
2	4	15	12,903	2,097	4,396
3	1	11	9,758	1,242	1,542
4	6	18	15	3	9
5	10	22	19,194	2,806	7,876
6	12	20	21,29	-1,29	1,665
7	7	14	16,048	-2,048	4,196
8	10	18	19,194	-1,194	1,425
9	2	9	10,806	-1,806	3,263
10	5	13	13,952	-0,952	0,906
Σ	60	150	150	0	37,71

Відповідь: $\sigma^2 \approx \hat{\sigma}^2 \approx 4,714$.

4. Точність оцінок структурних параметрів моделі. [2]

Завдання 8. Оцінити з якою *точністю* число $\hat{a} = 1,048$ наближує невідоме значення параметру a моделі, тобто оцінити різницю $|\hat{a} - a|$.

Розв'язок. В прикладі, що розглядається, оцінка \hat{a} є випадковою величиною з наступними параметрами:

$$E(\hat{a}) = a,$$

$$S^2(a) = D(\hat{a}) = E(\hat{a} - a)^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Використовуючи результати підрахунків, виконаних в попередніх завданнях, для оцінки $S^{*2}(a)$ дисперсії $S^2(a)$ оцінки \hat{a} отримаємо:

$$S^{*2}(a) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{4,714}{124} \approx 0,038.$$

Тому оцінкою середнього значення різниці $|\hat{a} - a|$ буде число, що визначається формулою:

$$|\hat{a} - a| \approx S^*(a) = \sqrt{S^{*2}(a)} = \sqrt{0,038} \approx 0,195.$$

Відповідь: $|\hat{a} - a| \approx 0,195$.

Завдання 9. Оцінити з якою *точністю* число $\hat{b} = 8,71$ наближує невідоме значення параметру b моделі, тобто оцінити різницю $|\hat{b} - b|$.

Розв'язок. Подібно як і у випадку оцінки \hat{a} , оцінка \hat{b} є випадковою величиною. Її параметрами відповідно дорівнюють:

$$E(\hat{b}) = b,$$

$$S^2(b) = D(\hat{b}) = E(\hat{b} - b)^2 = \sigma^2 \cdot \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right].$$

Тому оцінка $S^{*2}(b)$ дисперсії $S^2(b)$ дорівнює:

$$S^{*2}(b) = \hat{\sigma}^2 \cdot \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right] = 4,714 \cdot \left[\frac{1}{10} + \frac{36}{124} \right] \approx 1,84.$$

Отже середнє значення різниці $|\hat{b} - b|$ приблизно дорівнює:

$$|\hat{b} - b| \approx S^*(b) = \sqrt{S^{*2}(b)} = \sqrt{1,84} \approx 1,3564.$$

Відповідь: $|\hat{b} - b| \approx 1,3564.$

5. Відповідність моделі емпіричним даним. [2]

Завдання 10. Дати кількісну оцінку ступеня згідності побудованої моделі з емпіричними даними. Тобто оцінити в якій мірі побудована модель пояснює зміни величини Y .

Розв'язок. Для лінійної регресії, побудованої методом найменших квадратів, кількісною мірою ступеня згідності теоретичної моделі з емпіричними даними є множник детермінації R^2 , який визначається формулою:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

R^2 – це число, що належить до інтервалу $[0,1]$. Воно дає точну оцінку того, яка частина повної варіації (змінності) величини Y визначається змінами незалежної змінної X . Саме ці зміни пояснює побудована детермінована лінійна модель.

Щоб обчислити значення R^{*2} множника детермінації R^2 необхідно доповнити побудовані при розв'язуванні попередніх завдань таблиці 1 та таблиці 2. Необхідні для цього величини зібрані в наступній таблиці 3:

Таким чином значення R^{*2} множника детермінації R^2 дорівнює:

$$R^{*2} = \frac{136,3}{174} \approx 0,7833.$$

Таблиця 3.

t	x_t	y_t	\hat{y}_t	$\hat{y}_t - \bar{y}$	$(\hat{y}_t - \bar{y})^2$	$(y_t - \bar{y})^2$
1	3	10	11,855	-3,145	9,892	25
2	4	15	12,903	-2,097	4,396	0
3	1	11	9,758	-5,242	27,48	16
4	6	18	15	0	0	9
5	10	22	19,194	4,194	17,59	49
6	12	20	21,29	6,29	39,57	25
7	7	14	16,048	1,048	1,099	1
8	10	18	19,194	4,194	17,59	9
9	2	9	10,806	-4,194	17,59	36
10	5	13	13,952	-1,048	1,099	4
Σ	60	150	150	0	136,3	174

Отже побудована детермінована лінійна модель пояснює майже 79% повної варіації величини Y .

Понад 21% змінності Y залишається непоясненою.

В моделі, що розглядається, є два джерела можливих змін величини Y :

- Це вплив на Y структурної змінної X ;
- та сумарний вплив всього, що відрізняється від X і акумулюється в випадковому доданку ξ_t .

Тобто 21% змінності Y викликані малоістотними структурними факторами, а також випадковими, непередбачуваними, чинниками, серед яких можуть бути і помилки вимірювання, тощо.

Відповідь: $R^{*2} \approx 0,7833$. Модель пояснює понад 78% змін Y .

Завдання 11. Знайти числове значення R^{*2} множника детермінації R^2 використовуючи графік емпіричних даних моделі $\{(x_t, y_t), t = 1, 2, \dots, 10\}$.

Розв'язок. Використати функцію (опцію) «Помістити на діаграму величину достовірності апроксимації R^2 » аркушу «Excel»,

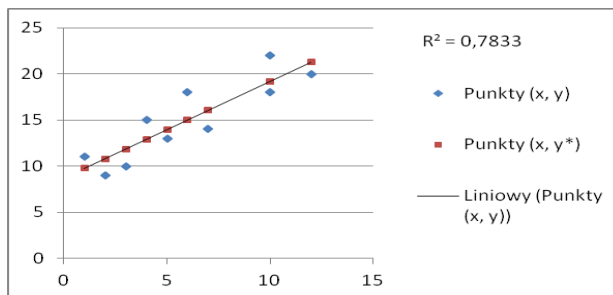


Рис. 4.

Завдання 12. Використовуючи емпіричні дані моделі

$$\{(x_t, y_t), t = 1, 2, \dots, 10\}$$

і застосовуючи функцію „**ЛІНІЙН**” аркушу «Excel», знайти:

- Значення $\{\hat{b}, \hat{a}\}$ оцінок МНК для структурних параметрів моделі.
- Значення $\{S^*(a), S^*(b)\}$ стандартних відхилень цих оцінок.
- Значення $\hat{\sigma}^2$ незміщеної статистичної оцінки для параметру σ^2 стохастичної структури моделі.
- Значення R^{*2} множника детермінації.

Розв’язок. Ввести до аркушу «Excel» емпіричні дані моделі

$$\{(x_t, y_t), t = 1, 2, \dots, 10\}.$$

Застосувати функцію „**ЛІНІЙН**” аркушу «Excel». Для цього:

- активізувати 6 комірок;
- зробити відповідні посилання на емпіричні дані моделі;
- застосувати режим «Статистика» шляхом впровадження для логічної змінної значення «1» («ПРАВДА»).

ЗАУВАЖЕННЯ:

Для отримання результатів обчислення необхідно одночасно натиснути 3 клавіші:

«Ctrl» – «Sift» – «Enter».

Результатом виконання функції „**ЛІНІЙН**” буде наступна таблиця 4:

Таблиця 4

1,0484	8,7097
0,195	1,3564
0,7833	2,1711

Відповідь:

a^*	1,0484	8,7097	b^*
$S^*(a)$	0,195	1,3564	$S^*(b)$
R^{*2}	0,7833	2,1711	σ^*

1.3. Метод Монте-Карло та стохастичне моделювання.

1. Стохастичне моделювання. 2. Основні методи дослідження стохастичних систем. 3. Задача Бюффона. 4. Метод Монте-Карло в стохастичному моделюванні. 5. Практична реалізація процедури стохастичне моделювання. 6. Базова випадкова величина.

1. Стохастичне моделювання.

Метод економетричного моделювання не позбавлений, однак, певних вад. Загалом недоліки імітаційних моделей пов'язані з їх точністю. Бракує, насамперед, об'єктивних та універсальних методів побудови адекватних імітаційних моделей для реальних явищ. Крім того поява помилок можлива як через погану імітаційну модель, так і через погано побудований «симулятор». У разі комп'ютерного моделювання таким «симулятором» можуть бути, наприклад, комп'ютерні програми, що реалізують алгоритми моделювання.

Неточність імітаційних моделей призводить до того, що імітаційний експеримент дає лише *оціночні*, тобто *приблизні* відповіді. Тому в контексті управління економічними процесами ми зазвичай розглядаємо економетричне моделювання, як метод *підтримки прийняття рішень*.

Варто зазначити, що *економетрична симуляція*, тобто експериментування на економетричній моделі – це не єдина форма *математичного моделювання* економічних явищ. Її можна розглядати як один з розділів ширшої математичної дисципліни під назвою «*Стохастичне моделювання*». Математика пропонує методи моделювання економічних явищ, що дозволяють врахувати як стохастичну природу подібних процесів, так і можливі зміни економічної реальності в майбутньому.

Методи стохастичного моделювання базуються на використанні концепції *стохастичного процесу*, а *стохастична симуляція*, тобто *імітування* реальних процесів, суттєво відрізняється від описаної в попередніх параграфах економетричної *симуляції*.

2. Основні методи дослідження стохастичних систем.

Система вважається *стохастичною*, коли серед факторів, що на неї впливають, є *випадкові* та *непередбачувані*, а умови, в яких система функціонує, не є строго-однозначно визначеними. Тому модель, що «*імітує*» траєкторію такої системи, повинна включати різноманітні *випадкові елементи*, прикладами яких можуть бути випадкові *події*, випадкові *величини*, випадкові *множини*, випадкові *вектори*, випадкові *процеси*, тощо.

Дослідження стохастичних систем можна проводити за допомогою різних методів. До основних можна зарахувати наступні:

1. Аналітичний метод.

Теорія ймовірності, теорія випадкових процесів і велика кількість різноманітних розділів математичної статистики (в тому числі статистика випа-

дкових процесів) на сучасному рівні їх розвитку дозволяють ефективно описати багато реальних явищ і дати вичерпні відповіді на ті запитання, що нас цікавлять.

2. Числове моделювання.

Такий підхід базується на використанні формальних математичних моделей та відповідних алгоритмів обчислювальної математики з метою проведення *числових експериментів* (на цих моделях). Прикладом реалізації такого підходу може бути *економетричне* моделювання.

Однак при вивченні складних, непередбачуваних явищ часто виникає ситуація, коли важко (або ж взагалі неможливо) використати з цією метою аналітичні підходи. А отже немає можливості скористатися жодним із згаданих методів: неможливо створити формальну модель і, як наслідок, немає на чому проводити числові експерименти. Значною мірою це стосується проблем, пов'язаних з аналізом економічних процесів, зокрема задач оптимізації та управління складними економічними системами. Тому нині широкого розповсюдження при вирішенні конкретних практичних завдань отримав *метод стохастичного моделювання*.

3. Стохастичне моделювання.

В цьому випадку за допомогою відповідних комп'ютерних програм повністю *відтворюється* поведінка реальної стохастичної системи. Моделюючи на комп'ютері умови, в яких функціонує система, тобто *«симулюючи»* всі основні та другорядні фактори, які впливають на її поведінку, можна таким чином *«зімітувати»* імовірну *«траєкторію розвитку»* системи.

Однак навіть серед основних можуть виступати чинники з елементами невизначеності, натомість головну частину другорядних складають, як правило, *випадкові* та *непередбачувані* (тобто *стохастичні*) фактори. Тому ключовою ознакою, що характеризує цей метод, є імітація *«випадкових елементів»*, притаманних реальним стохастичним системам, за допомогою відповідних комп'ютерних алгоритмів. Прикладами таких *«елементів»* можуть бути *випадкові події, випадкові величини, випадкові множини, випадкові вектори, випадкові процеси*, тощо.

3. Задача Бюффона.

Ідея моделювання *випадкових подій* з метою знаходження значень *конкретних величин* відома і використовується на практиці вже давно. Зазвичай першим *практичним застосуванням* цього методу вважається *експериментальне визначення* наближеного значення числа π . Пов'язують його з іменем французького математика Ж.-Л.Л. де Бюффона та сформульованою і розв'язаною ним в 1977р. знаменитою задачею *«про голку»*.

Звучить ця задача наступним чином. Припустимо, що площину покривають паралельні прямі, що проходять на відстані $2a$ один від одної. Голку довжиною $2l$, ($l < a$) кидаємо випадковим чином на цю площину. Необхідно знайти ймовірність наступної події:

$$C = \{\text{Голка перетне одну з нанесених на площину прямих}\}.$$

Виявляється, що відповідь задається рівністю:

$$P(C) = \frac{2l}{a \cdot \pi}.$$

Пояснимо коротко звідки цей висновок. Нехай x означає відстань від центру голки до найближчої прямої, а φ – кут між голкою та напрямком нанесених на площину прямих. Тоді пара чисел (x, φ) може бути елементарним наслідком стохастичного експерименту, пов'язаного з киданням голки:

➤ Ці числа визначають положення голки на площині і дають можливість встановити, відбулась досліджувана випадкова подія, чи ні.

Виходячи з припущень, відстань (x) центру голки від найближчої прямої не перевищує a , а кут (φ) може змінюватися від 0 до 180° . Тому простором елементарних наслідків (Ω) розглянутого стохастичного експерименту буде наступний прямокутник:

$$\Omega = \{(x, \varphi): 0 \leq x \leq a; 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

Припущення:

○ «кидаємо голку випадковим чином»

означає, що всі точки $\omega = (x, \varphi) \in \Omega$ є «однаково ймовірними», тобто:

○ не маємо підстав надати перевагу будь-яким серед них.

Тому можна скористатися з геометричного визначення ймовірності, відповідно до якого мірою множини Ω буде її площа:

$$m(\Omega) = a \cdot \pi < \infty.$$

Знайдемо підмножину елементарних наслідків $\omega = (x, \varphi) \in C$, що сприяють випадковій події C . Враховуючи умову ($l < a$), приходимо до висновку, що голка може перетнути тільки одну («найближчу» до неї) пряму.

Відстань від центру голки до цієї прямої визначає координата x елементарного наслідку $\omega = (x, \varphi) \in C$. Кут φ визначає, чи перетне її голка, чи ні:

○ Подія C відбудеться тоді і тільки тоді, коли:

$$x \leq l \cdot \sin(\varphi).$$

Підсумовуючи можемо формально подію C записати таким чином:

$$C = \{\text{Голка перетне одну з прямих}\} = \{(x, \varphi) \in \Omega: x \leq l \cdot \sin(\varphi)\}.$$

Мірою $m(C)$ множини C буде її площа:

$$m(C) = \int_0^{\pi} l \cdot \sin(\varphi) d\varphi = 2l.$$

Використовуючи геометричне визначення ймовірності, отримаємо:

$$P(C) = \frac{m(C)}{m(\Omega)} = \frac{2l}{a \cdot \pi}.$$

Варто зауважити, що ймовірність $P(C)$ безпосередньо містить шукане число π . Тому описаний стохастичний експеримент з «киданням голки» дає можливість експериментальним шляхом знайти наближення для значення числа π .

- Для цього необхідно в незмінних умовах повторити «достатньо багато разів» цей експеримент та замінити в отриманій формулі ймовірність $P(C)$ її статистичною оцінкою.

4. Метод Монте-Карло в стохастичному моделюванні.

Поява методу Монте-Карло пов'язується з іменем Джона фон Неймана і датується 1944 роком. В процесі інтенсивних ядерних досліджень, які проводились в той час, виникли серйозні математичні проблеми, що стосувалися необхідності обчислення інтегралів для досить складних функцій.

Д. Нейман запропонував дуже ефективний і (як на той час) абсолютно несподіваний підхід:

- Замість того, щоб намагатися вирішити цю проблему, застосовуючи відомі тоді традиційні «детерміновані» обчислювальні методи, він побудувати «фіктивну стохастичну модель» з використанням випадкових величин.

Для цього вистачило початкову задачу обчислення інтеграла Рімана замінити на еквівалентну їй задачу обчислення інтеграла Лебега за певною ймовірнісною мірою. Така трансформація дозволила звести проблему обчислення інтегралу до знаходження оцінки математичного сподівання деякої випадкової величини, що мала відомий розподіл.

Приведемо дуже простий приклад, який чудово ілюструє суть підходу, запропонованого Нейманом. Припустимо, що потрібно обчислити наступний інтеграл:

$$I = \int_0^1 H(x) dx.$$

де $H(x)$ деяка «досить складна» функція. Згадана «*фіктивна стохастична модель*» приймає в цьому прикладі вигляд випадкової величини α з *рівномірним* на проміжку $[0, 1]$ розподілом. Цей розподіл визначається щільністю:

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [0,1] \end{cases}.$$

Використовуючи властивості математичного сподівання та формулу для обчислення математичного сподівання функції від випадкової величини, можна записати:

$$E(H(\alpha)) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)f_{\alpha}(x)dx = \int_0^1 H(x)dx.$$

Отже обчислення інтегралу I зводиться до знаходження математичного сподівання $E(H(x))$. Припустимо тепер, що вдалося «*змоделювати*» послідовність незалежних реалізацій

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

випадкової величини α . Тоді обчислюючи значення функції $H(x)$ для цих реалізацій отримаємо *просту вибірку*:

$$H(\alpha_1), H(\alpha_2), \dots, H(\alpha_n)$$

Таким чином, наближене значення інтегралу I можна знайти, оцінюючи на основі простої вибірки $H(\alpha_1), H(\alpha_2), \dots, H(\alpha_n)$ математичне сподівання $E(H(\alpha))$ випадкової величини $H(\alpha)$.

Іншими словами – обчислення інтегралу I зводиться до однієї з основних задач математичної статистики. Тому, окрім уже згаданих назв «*метод стохастичного моделювання*» або «*метод Монте-Карло*», використовується також термін «*статистичне моделювання*».

5. Практична реалізація процедури стохастичного моделювання.

Бурхливий розвиток інформатики та комп'ютеризація всіх сфер діяльності – з одного боку, а також досягнення в області прикладної математики – з іншого, сприяли тому, що метод Монте-Карло дуже швидко став *універсальним* методом наукових досліджень і широко використовується в найрізноманітніших галузях. Залишаючи осторонь детальний аналіз *змісту* цих галузей та *способів* використання в них метод Монте-Карло, зазначимо лише, що термін «*метод Монте-Карло*» будемо вживати як синонім терміну «*метод статистичного моделювання*» та розглядати це як один із конкретних прикладів «*методу стохастичного моделювання*».

В свою чергу метод стохастичного моделювання полягає у відтворенні за допомогою комп'ютера ймовірнісної моделі складної стохастичної системи, тобто моделі, сформульованої з використанням понять та інструментів теорії ймовірності.

Тому статистичне моделювання (чи інакше – *метод Монте-Карло*) слід розглядати, як один з етапів стохастичного моделювання, метою якого є генерування реалізацій випадкових величин, що мають визначений заздалегідь розподіл.

В цілому ж практичну реалізацію методу стохастичного моделювання можна поділити на три етапи:

1. Етап побудови формальної математичної моделі, тобто опису процесів, що відбуваються в реальних стохастичних систем, за допомогою засобів теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів.
2. Етап генерування випадкових елементів, які необхідні для відтворення «реальної» поведінки стохастичної системи, а отже присутні в формальній математичній моделі.

Як підкреслювалось, такими «елементами» можуть бути *випадкові події, випадкові величини, випадкові множини, випадкові вектори, випадкові процеси*, тощо. Саме для генерування реалізацій цих випадкових «елементів» і служить *метод Монте-Карло*.

3. Етап статистичного опрацювання отриманих модельних даних.

Часто це єдиний метод, який дозволяє отримати прийнятні з практичної точки розв'язки. На практиці виглядає це наступним чином.

- За допомогою комп'ютерного моделювання *імітуємо* перебіг процесів, що вивчаються.
- Використовуючи імітаційну модель генеруємо достатньо велику кількість *можливих* траєкторій розвитку цих процесів.
- Аналізуючи за допомогою статистичних методів отриману інформацію, знаходимо необхідні (і що дуже важливо – *прийнятні з практичної точки зору*) розв'язки.

6. Базова випадкова величина.

Очевидно, що використання цього методу, перш за все, передбачає вміння *моделювати* випадкові величини з довільними розподілами.

- Моделюванням випадкових величин називається процедура отримання *послідовності реалізацій випадкових величин* із заздалегідь визначеним розподілом ймовірностей.

Варто зауважити, що побудова *адекватної комп'ютерної моделі* для симуляції складного явища, яке має стохастичний характер, не є простим завданням. Крім моделювання великої кількості випадкових величин з

різноманітними розподілами, виникає також необхідність імітувати більш загальні ймовірнісні елементи: *події, вектори, множини, процеси*.

Але є одна цікава обставина, що значною мірою сприяла бурхливому розвитку та швидкому поширенню комп'ютерного моделювання.

- Основою для моделювання випадкових величин з довільним розподілом та інших ймовірнісних елементів, є *базова випадкова величина*.
- Імітаційні алгоритми для моделювання випадкових величин та ймовірнісних елементів створюються шляхом *відповідного перетворення (трансформації)* реалізацій базової змінної.

Базовою випадковою величиною в методі комп'ютерного моделювання є випадковою величина α , що має рівномірний на проміжку $[0, 1]$ розподіл. Якщо говорити про його фізичну інтерпретацію, то в першу чергу необхідно відзначити процедуру «*випадкового вибору*» (або «*вибору навмання*») точки на проміжку $[0, 1]$:

З формальної точки зору «*вибір навмання*» означає наступне:

➤ Нехай $I_{[p, q]} = [p, q]$, $0 \leq p < q \leq 1$, та $I_{[x, y]} = [x, y]$, $0 \leq x < y \leq 1$, два інтервали на відріжку $[0, 1]$, що мають однакову довжину:

$$|I_{[x, y]}| = y - x = q - p = |I_{[p, q]}|.$$

Тоді «*так само ймовірно*», що значення α буде взяте з під-інтервалу $I_{[x, y]}$, як і з під-інтервалу $I_{[p, q]}$, тобто:

$$P\{\alpha \in I_{[p, q]}\} = |I_{[p, q]}| = q - p. \quad P\{\alpha \in I_{[x, y]}\} = |I_{[x, y]}| = y - x,$$

Функція розподілу випадкової величини α , визначається формулою:

$$F_{\alpha}(x) = P(\alpha < x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0 \\ x, & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

А її щільність $f_{\alpha}(x) = (F_{\alpha}(x))'$ відповідно:

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0 \\ 1, & \text{dla } 0 \leq x \leq 1. \\ 0 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

7. Стохастичного моделювання в економічних дослідженнях.

Будучи на початку одним з дуже ефективних чисельних методів, що використовувався для вирішення спеціального кола задач статистичної фізики, метод Монте-Карло швидко став універсальним *методом стохастичного моделювання*, практичне використання якого набуло загального характеру

та широкого розповсюдження в різноманітних сферах. Цьому сприяла, перш за все, швидка *комп'ютеризація* та *інформатизація* всіх сфер діяльності. Крім того, значне розширення сфери використання методу Монте-Карло зумовлено розвитком сучасних розділів прикладної математики, що присвячені дослідженню *стохастичних моделей*.

➤ Метод *статистичного моделювання* полягає у відтворенні за допомогою комп'ютера *стохастичної* моделі явища, що досліджується, з наступним аналізом отриманих результатів *статистичними засобами*.

Іншими словами, модель, що описує досліджувану складну стохастичну систему, формулюється за допомогою засобів *теорії ймовірностей*, а отримані результати аналізуються за допомогою методів *математичної статистики*.

Однією з галузей знань, що широко використовує можливості методу Монте-Карло, є економічна наука. Це пояснюється головним чином тим, що кожна економіко-математична модель, яка описує реальні економічні процеси, за своєю суттю є *стохастичною*. Тому кожен «замінник», тобто *адекватна імітаційна модель*, повинна враховувати цю *стохастичність*.

З іншого боку, такі розділи сучасної прикладної математики, як *теорія масового обслуговування*, *теорія мереж*, *теорія ігор*, *управління запасами*, *теорія ризику*, зокрема *теорія економічного ризику*, *дослідження операцій* (зокрема *прийняття рішень в умовах невизначеності*), *математична економіка*, *фінансова математика*, *актуарна (страхова) математика* та багато інших, вважаються окремими дисциплінами *економетрики* (в «широкому» її розумінні).

Вищезазначені дисципліни характеризуються тим, що, з одного боку, вони мають *чітко виражену економічну природу*, а з іншого те, що природа задач, які в них розглядаються, має *стохастичний характер*. Тому відповідний математичний інструментарій, за допомогою якого їх можна чітко сформулювати, це *теорія ймовірностей* та *математична статистика*.

На практиці часто метод статистичного моделювання використовується також у випадках, коли вихідна модель, яка описує досліджувану *реальну складну систему*, не є *ймовірнісною*. Тоді використовується «метод *рандомізації*», тобто побудувати «*фіктивної ймовірнісної моделі*», з наступним застосуванням *методу статистичного моделювання*. Описана вище процедура обчислення інтегралу

$$I = \int_0^1 H(x) dx$$

може бути яскравим прикладом використання такого підходу.

1.4. Фінанси: фінансові відношення та фінансові процеси.

1. Наукове визначення фінансових процесів. 2. Основні поняття, пов'язані з категорією «фінансові процеси». 3. Аналіз визначення категорії фінансів. 4. Типи фінансових потоків. 5. Основні функції – розподіл та контроль. 6. Моделі фінансових відносин. 7. Фінансовий ринок. Елементи та завдання фінансового ринку. 8. Критерії визначення структури фінансового ринку.

1. Наукове визначення фінансових процесів.

Фінансові процеси – це досить складне, багатогранне суспільне явище, що має дуже багато характерних рис та різноманітних проявів (перш за все в господарчій діяльності). Ці процеси можуть розглядатися на різних рівнях узагальнення та ступенях деталізації.

Наукові дисципліни, що так, чи інакше пов'язані з фінансовими процесами, з точки зору проблем, які в них розглядаються, умовно можна поділити на три групи:

1) *Загальна теорія фінансів.*

2) *Характеристика окремих рівнів та гілок фінансових відношень.*

Тобто *фінанси підприємства, страхування, громадські фінанси, бюджет та податкова система, міжнародні фінанси, фінансовий ринок, гроші та кредит*, ітп.

3) *Характеристика форм фінансових відношень та способів і методів фінансової діяльності.*

Тобто: *фінансовий менеджмент, страховий менеджмент, податковий менеджмент, бюджетний менеджмент, міжнародні фінансові розрахунки та міжнародні кредити, банківські транзакції та ринок банківських послуг*, ітп.

Перш за все пояснимо, що взагалі називаємо «фінансами», з чого вони складаються та яку мають структуру. Як виявляється, сучасна економічна наука не має однозначних відповідей на ці питання. Нагадаємо, що термін «фінанси» походить від латинських «*finantio*» та «*financia*», що в дослівному перекладі означає «*виплата на користь держави*» та «*обов'язкова сплата грошей*».

Фінанси – це одна з найважливіших та найбільш складних економічних категорій. Її можна розглядати на дещо спрощеному рівні, зводячи фінансові відносини до грошових, що відображають прибутки та витрати окремих суб'єктів. Але це лише зовнішня, або видима форма фінансів, яка створюється грошовими потоками між суб'єктами фінансових відносин. Ці потоки, їх характер та форма, напрямки та розміри – це результат практичної фінансової діяльності.

Фінанси – це більш складна економічна категорія. Має вона також *внутрішню* або *приховану* змістовну сторону, пов'язану з вираженням того, *якими є* ті чи інші грошові потоки. Аналіз існуючих поглядів на визначення фінансів та їх структуру показує, що, незважаючи на, здавалося б, розбіжності у визначенні категорій фінансів, суть цих термінів залишається однаковою. Виберемо наступне визначення категорії фінансів [12]:

➤ *Фінанси - це сукупність грошових відносин, пов'язаних з формуванням, мобілізацією та розміщенням фінансових ресурсів та з обміном розподілом та перерозподілом вартості створеного на основі їх використання валового внутрішнього продукту, а за певних умов і національного багатства.*

2. Основні поняття, пов'язані з категорією «фінансові процеси».

Саме це визначення вже запроваджує деякі найважливіші поняття, пов'язані з фінансами та фінансовими процесами.

До основних, зокрема, належать наступні:

- *Витрати, доходи та фінансові ресурси.*

У свою чергу, ми ділимо доходи на:

- *Первинні та вторинні.*

Внутрішній, або прихований зміст фінансів пов'язаний з розподілом та перерозподілом цінностей внутрішнього продукту, створених на основі використання фінансових ресурсів.

Оскільки говоримо про «фінансові процеси», які пов'язані з діяльністю, то напевно виникають *фінансові відносини*, що відбуваються між *суб'єктами* цих відносин.

Можна теж говорити про «предмет», або «об'єкт» *фінансових відносин*:

- Перш за все – це *гроші*, вони є основним *предметом*, або *об'єктом* фінансових відносин.
- Крім того гроші являються *інструментом* фінансових відносин.

Але поняття «фінанси» та «гроші» не є тотожними.

Детальніше на сутності взаємозв'язку категорій «фінанси» та «гроші» зупинимось в наступних підрозділах, де зокрема дамо більш широку характеристику «об'єктів» або «предметів» та «суб'єктів» фінансових відносин.

3. Аналіз визначення категорії фінансів.

Перш за все, загальним для всіх підходів до визначення категорії фінансів є те, що в основі визначення лежать однакові поняття, а саме:

- *Доходи та витрати суб'єктів і держави;*
- *Заощадження та інвестиції;*
- *Фінансові кошти та фінансові результати.*

Не існує також розбіжностей у розрізненні ключових елементів, що визначають суть фінансів та принципи їх функціонування. А саме виділяються:

➤ *Відносини*, тобто *фінансові відносини*, які відображають *перетікання цінностей між суб'єктами фінансових відносин*, характеризують процеси обміну, поділу та перерозподілу і проявляються у *грошових потоках*.

➤ *Фінансова діяльність*, яка полягає на *отриманні суб'єктами фінансових відносини доходів та здійсненню витрат*.

Це два тісно пов'язані між собою аспекти прояву процесу функціонування фінансів, що доповнюють один одного.

Різниця поглядів у визначенні поняття фінансів полягає в тому, що:

- В одному випадку у визначенні фінансів наголос робиться на аспекті їх функціонування.

Тобто фінанси визначаються з точки зору *фінансової діяльності*;

- В другому – більше уваги приділяється *фінансовим відносинам*.

Розглядаючи доходи та витрати як *результат цих відносин*.

4. Типи фінансових потоків.

Основна ознака, що визначає сутність і форму функціонування фінансів – це *перетікання грошей*, тобто *рух грошових потоків*. Ці потоки відображають як *фінансові відносини*, так і *фінансову діяльність*. Грошові потоки поєднують усі три основні аспекти функціонування фінансів, а саме:

- *Обмін*, тобто оплата рахунків за товари та послуги.
- *Поділ*.
- *Вторинний розподіл*.

Тобто:

- *Податкові розрахунки*,
- *Виплата дивідендів*,
- *Отримання субсидій*,

тощо.

Виділяють *два типи грошових потоків*:

➤ *Вхідні потоки*:

- Це потоки, пов'язані зі створенням *фінансових ресурсів*.

Тобто *запозичення*, надходження від *випуску акцій*, *бюджетних фондів* тощо.

- Потоки, пов'язані з надходження від *доходів*.

Тобто *прибуток* від продажу товарів і послуг.

➤ *Вихідні потоки*:

- Це потоки, що відображають *витрати*.
- Потоки, що відображають *тимчасове розміщення* вільних фінансових ресурсів на фінансовому ринку.

5. Основні функції – розподіл та контроль.

Загалом, фінанси виконують дві основні функції в соціально-економічних відносинах:

- Функцію *розподілу* та
- Функцію *контролю*.

Щоб пояснити їх *суть* та *джерело*, необхідно повернутися до основних учасників, або «сторін» фінансових відносин, тобто уточнити, що є «предметом» цих відносин та хто їх «суб'єкти».

- Предметом фінансових відносин є *національне багатство* або подібні, пов'язані з ним категорії – *національного доходу* чи *валового внутрішнього продукту*.

Серед суб'єктів фінансових відносин виділимо перш за все такі категорії:

- *Держава* як окремий суб'єкт;
- *Підприємства*; та
- *Окремі працівники*.

Оскільки «об'єкт» (*предмет*) фінансових відносин є лише один, а «суб'єктів» («сторін») принаймні три (а то й більше), фінансові відносини характеризуються явним протиріччям, яке є можна сформулювати так:

- *Кожен суб'єкт хоче отримати якнайбільше за рахунок інших*.

Отже виникає необхідність *збалансувати* інтереси всіх суб'єктів.

Тому функція розподілу фінансів полягає у поділі внутрішнього валового продукту між суб'єктами фінансових відносин. Механізм цього поділу складається з декількох етапів:

- Етап перший – первинний *поділ* (*дистрибуція*).

Для окремих суб'єктів фінансових відносин, як правило, первинний розподіл має такий вигляд:

- Для фізичних осіб – *зарплата* та інші *винагороди*.
- Для підприємств – *дохід*.
- Для держави – всі доходи бюджету від державного сектору, доходи від сектору державних послуг, деякі податки (не прямі).

- Етап другий – *перерозподіл* (*ре-дистрибуція*).

Він полягає у створенні та використанні спеціалізованих централізованих фондів:

- *Загально державних*;
- *Галузевих*;
- *Корпоративних*, тощо.

В свою чергу, *ре-дистрибуція* складається з двох кроків.

- Спочатку (на *першому* кроці) частина доходу одних суб'єктів господарювання вилучається з метою створення централізованих фондів.
- А потім (на *другому* кроці) передбачається використання коштів цих фондів.

Часто другий крок етапу перерозподілу виділяється в окремий, *третій* етап розподілу внутрішнього валового продукту між суб'єктами фінансових відносин, а саме:

➤ Етап третій – *вторинний розподіл*, тобто використання коштів, створених на стадії перерозподілу.

До основних інструментів реалізації функції розподілу, що ведуть до згладжування суперечностей між суб'єктами фінансових відносин, слід зарахувати перш за все:

- Створення умов для *постійного зростання доходів* усіх суб'єктів водночас; та
- Визначення *оптимальних пропорцій поділу* існуючого внутрішнього валового продукту.

6. Моделі фінансових відносин.

Функція контролю полягає в тому, що фінанси – це інструмент контролю діяльності суб'єктів господарювання та відносин обміну та поділу. Під час фінансових відносин різні суб'єкти контролюють один одного.

- Це один з найефективніших видів контролю в суспільстві.

На відміну від інших форм суспільного контролю, цей тип контролю охоплює все суспільство, оскільки всі громадяни задіяні у фінансових відносинах.

➤ Тому можна сказати, що *«усі контролюють усіх»*.

Варто зауважити, що саме це гасло:

«усі контролюють усіх»

характеризує новітню інформаційну технологію *«блокчейн»*.

На основі технології *«блокчейну»* створено перші цифрові гроші *«біткойн»* та велику кількість інших *криптовалют*, що будуть в центрі уваги нинішнього курсу лекцій.

Аналіз економічної категорії *«фінанси»* виділяє дві її основні функції в державі:

- Функцію *перерозподілу внутрішнього валового продукту* та
- Функцію *контролю*.

Поділ та перерозподіл, а також контроль за цими процесами можуть відбуватися різними способами відповідно до *існуючої моделі фінансових відносин* у державі. Взагалі виділяється *два типи* таких моделей, що відрізняються одна від одної *порядком поділу* внутрішнього продукту, а також *участю держави* в цьому процесі.

В даний момент функціонують (*переважно*) наступні фінансові моделі: *ринкова* та *адміністративна*.

➤ Перша з них – *ринкова модель*.

Ринкова модель характеризується тим, що на початку *внутрішній валовий продукт* (ВВП) поділяється між його прямими творцями, тобто:

- Між роботодавцями та працівниками.

Згідно з такою моделлю поділу держава отримує *свою частину* ВВП в результаті його *перерозподілу*.

Пропорції *первинного* поділу визначаються насамперед *ринком*, тоді як *закон* відіграє *другорядну роль*, вносячи деякі корективи в ці пропорції через юридичні обмеження.

➤ Друга модель – це *адміністративний поділ*.

Адміністративна модель відрізняється від ринкової тим що:

- В результаті *первинного* поділу більшу частину ВВП отримує *держава*.

Крім того, пропорції *первинного* поділу визначаються також *державою* адміністративним шляхом, а не ринком, як це має місце в ринковій моделі.

Варто зауважити, що для кожної з цих типів фінансових моделей в свою чергу можна зробити більш детальну класифікацію, розглядаючи різні варіанти їх практичної реалізації. Розрізняють, наприклад:

- *Американські*;
- *Західноєвропейські*; та
- *Скандинавські* ринкові моделі,

тощо.

Не є також абсолютно однаковими модифікації адміністративних моделей, які можна спостерігати в різних країнах.

Однак вичерпний опис економічної сутності фінансових процесів не є нашою метою. Нас цікавить лише презентація основних *понять* та *категорій*, пов'язаних з цим, для *розуміння* економічної сутності проблем, що виникають в контексті фінансових процесів.

Основна наша мета:

➤ Ефективне використання математичних та економетричних методів для вирішення цих проблем.

7. Фінансовий ринок. Елементи та завдання фінансового ринку.

Фінансовий ринок існує лише у випадку *ринкової* моделі фінансових відносин і фактично є інфраструктурою фінансової системи, яка дозволяє функціонувати фінансам суб'єктів господарювання.

➤ *Фінансовий ринок* – це сукупність відносин обміну, поділу та перерозподілу, пов'язаних з процесом купівлі-продажу фінансових ресурсів, необхідних для здійснення виробничої та фінансової діяльності.

Відносин обміну, або *біржові відносини* – це відносини, пов'язані з передачею одними суб'єктами господарювання іншим права для *тимчасового* або *безтермінового* використання фінансових ресурсів за відповідну винагороду: *відсотки, дивіденди, знижки* тощо.

- Подібні передачі можуть відбуватися безпосередньо у формі операцій купівлі-продажу від власника до покупця чи користувача.
- У цьому процесі можуть також брати участь *фінансові посередники* (комерційні банки, інвестиційні фонди тощо).

І в першому, і в другому випадку відносини *обміну* (передача *прав* користування) поєднуються з *розподільними* відносинами (передача *фінансових ресурсів* від власника до користувача).

Варто зазначити, що у фінансовій літературі немає єдиної думки щодо *природи* та *структури* фінансового ринку. Тому перш ніж вивчити структуру та принципи функціонування фінансового ринку, введемо декілька пов'язаних (*суміжних*) з категорією «*фінансовий ринок*» поняття.

Це наступні категорії:

- *Грошовий ринок*;
- *Ринок капіталів*;
- *Фондовий ринок та ринок цінних паперів*;
- *Кредитний та валютний ринки*

(валютний ринок також можна розглядати як сегмент грошового ринку);

- *Ринок фінансових послуг*.

Очевидно, що це тісно пов'язані між собою поняття, натомість вивчення структури та принципів функціонування фінансового ринку слід починати з визначення взаємозв'язку між ними. Для цього необхідно *уточнити* ці поняття, тобто виникає необхідність дати їх *точні визначення* та обґрунтувати, як ці визначення слід *інтерпретувати* в конкретних умовах. Перш за все слід чітко розділити сфери:

- *Грошового*; та
- *Фінансового* ринків.

Так само як неможна ототожнювати терміни «*фінанси*» та «*гроші*», неможна також ототожнювати категорії «*фінансовий ринок*» та «*грошовий ринок*». Це два *різних* ринки, які діють одночасно та паралельно і мають досить велику *спільну* сферу.

Принципова відмінність цих ринків виникає вже з *цїлі*, яку кожен з них виконує:

- Завдання *грошового* ринку – врівноваження грошової маси із вартістю товарів і послуг.
- Завдання *фінансового* ринку – задоволення потреб суб'єктів господарювання та фінансових установ у фінансових ресурсах.

8. Критерії визначення структури фінансового ринку.

Визначення структури потребує насамперед вибору *правил*, тобто *критеріїв* такого структурування. Щодо фінансового ринку, то до визначення його структури використовуються дві основні його особливості, а саме:

- *Форма фінансових ресурсів та*
- *Організація торгівлі фінансовими ресурсами.*

За формою фінансових ресурсів у структурі фінансового ринку ми виділяємо такі елементи:

- Ринок *короткострокових зобов'язань*, тобто *грошовий ринок*.
Товар на цьому ринку – це *гроші*;
Ціна – *процентна ставка*.

До транзакцій, що здійснюються на цьому ринку, включають усі фінансові операції, пов'язані з купівлею та продажем грошей.

- Ринок *капіталів*, тобто ринок фінансових *інструментів щодо прав власності* та
- Ринок *довгострокових зобов'язань*.

Зазвичай ринок капіталів в свою чергу поділяється на такі ринки:

- *Фондовий ринок*,

який пов'язаний із придбанням коштів та передачею права власності на кошти.

- Ринок *довгострокових та середньострокових позик*.

За способом організації торгівлі фінансовими ресурсами виділяються наступні спеціальні типи ринків у структурі фінансового ринку:

- *Кредитний ринок*,

який пов'язаний з укладанням кредитних договорів.

- Ринок *цінних паперів*,

пов'язаний з випуском та обігом спеціальних видів фінансових інструментів.

1.5. Негативні тенденції розвитку світової фінансової системи.

1. Прискорення економічних процесів та безпека фінансових ринків.
2. Дерегуляція фінансових ринків.
3. Дестабілізуючий вплив «вторинних цінних паперів».
4. Поглинання «спекулятивною» надбудовою виробничої «основи».
5. Проблеми методологічного забезпечення управління ризиком.

1. Прискорення економічних процесів та безпека фінансових ринків.

Проблеми пов'язані з управлінням ризиком для промислових корпорацій, учасників фінансових ринків та державних наглядових інституцій на протязі останніх кількох десятиків років суттєво загострилися. Ми вже відзначали низку поважних об'єктивних причин, які призвели до цього.

- *Перш за все, це процеси глобалізації світової економіки.*

Безпосереднім наслідком цих процесів було те, що економіка окремих держав все менше й менше стає захищеною від економічних криз, що виникають в інших країнах.

Маємо безліч прикладів, що підтверджують це твердження. Початок пригаданого періоду загострення проблем фінансової безпеки на світових ринках пов'язують з хвилею криз на фінансових ринках, що отримав назву «*Азіатський грип*». Ця хвиля прокотилася в другій половині 1997 р. і особливо вразила країни південно-східної Азії. Суттєвих змін на краще в цій сфері від тієї пори не відбулось. Ще не до кінця ліквідовані наслідки потужної фінансово-економічної кризи, що була «*спровокована*» в 2008 р. «*ризикованими*» явищами в банківській сфері Сполучених Штатів і дуже швидко охопила цілий світ, а світова економіка знову в новій кризі, небачених до цього масштабів, де до суто економічних негативних явищ добавилася пандемія короно-вірусу.

- *Наступний фактор – це бурхлива інформаційно-технічна революція, яку світ переживає якраз в цей період.*

Сам по собі цей фактор є позитивною рисою розвитку цивілізації, і аж ніяк не може бути *причиною* криз на фінансових ринках, але значно їх прискорює та посилює негативні їх наслідки. Впровадження в фінансову практику новітніх *інформативних технологій* призвело до того, що фінансові операції перейшли в «*віртуальну*» сферу і практично не припиняються ні на мить. В електронних торгових мережах (*ECN – electronic communication network*) фінансові транзакції відбуваються неперервно, кожної миті, на будь-якому ринку, в будь-якому місці.

- *Важливим фактором погіршення ситуації на фінансових ринках є велика швидкість розповсюдження різних явищ, в тому числі також негативних.*

Це – безпосередній наслідок названих вже причин: глобалізації та інформатизації, оскільки саме вони в найбільшій мірі *прискорюють* та *посилюють* господарські процеси, особливо в сфері фінансів.

Посилення господарських процесів в цьому контексті означає суттєве *розширення масштабу* та *прискорення* явищ, які відбуваються на фінансових ринках. Зміни, що ще не так давно тому вимагали років – зараз можуть відбутись за лічені години. Характерною прикметою сучасності є *дуже великий* масштаб банкрутств, як фінансових установ, так і промислових корпорацій, що відбуваються практично *миттєво*. Так кілька місяців в 1994-1995 роках вистачило для того, щоб припинив діяльність, втрапивши 1,1 млрд. \$ англійський банк «*Barings*». Заснований лауреатами Нобелівської премії в галузі фінансового ризику Хедж-фонд LTCM (*Long Term Capital Management*) збанкрутував в 1998 році протягом місяця, втрачаючи при цьому понад 2,1 млрд. \$. Безпосередньою причиною однієї з найглибших світових фінансово-економічних криз, що розпочалась в 2008 році, була низка голосних банкрутств кількох великих банків в Сполучених Штатах. Подібні приклади можна продовжувати, напевно незабаром їх кількість значно збільшиться.

2. Дерегуляція фінансових ринків.

- Виразна тенденція поглиблення *дерегуляції (deregulation)* – *черговий суттєвий фактор загострення ситуації на фінансових ринках.*

З одного боку – *дерегуляція* невід’ємний і природний наслідок процесів глобалізації світової економіки та фінансових ринків. З іншого боку – є цілеспрямованим процесом, рухається в конкретному напрямку, не дивлячись на те, що, здавалось би, стосується зовсім різних сфер. Відбувається так тому, що процеси *дерегуляції* – це неминучі наслідки цілком конкретних організаційних рішень. Приведемо кілька відповідних прикладів.

- До 1986 р. в Сполучених Штатах діяло та зване «*правило Q*» (*Regulation Q*), яке встановлювало максимальну процентну ставку по банківським депозитам (банківським вкладом на визначений термін). В 1986 р. це «правило» було скасоване, що призвело до зняття обмежень на величину процентних ставок.
- В дев’яностих роках минулого століття були відмінені всі обмеження, що стосувалися винагороди для біржових та банківських брокерів, які теж виконували певні регулюючі функції на фінансових ринках.
- Значною мірою «*велику депресію*» в економіці Сполучених Штатів (хіба найбільшу фінансово-економічну кризу в її історії), що тривала в тридцятих роках минулого століття, вдалося поконати завдяки так званому «*закону Гласса-Стігала*» (*Glass-Steagall Act*). Згідно з цим законом всі банки Сполучених Штатів були поділені на дві групи: *комерційні* банки та *інвестиційні* банки. Він діяв на протязі 65 років. Однак в 1999 р. цей закон було відмінено, що відкрило шлях *комерційним* банкам на ринок цінних паперів. Ця подія мала величезний *де-регулюючий* вплив на інвестиційний ринок.

Приведені, та багато інших, подібних прикладів, показують, що ці рішення, крім деяких *позитивних* наслідків (заради яких вони й приймалися), призвели також до величезних негативних ефектів. *Дерегуляція* фінансових ринків – один серед них.

3. Дестабілізуючий вплив «вторинних цінних паперів».

- Наступним фактором фінансового ризику, що є безпосереднім наслідком перерахованих щойно прикладів непередуманих організаційних рішень в фінансовій сфері, можна назвати «*ефект піраміди*», пов’язаний з *вторинним* ринком «*похідних цінних паперів*», або, як їх ще називають, «*деривативів*».

Ринок «*деривативів*» є дуже виразним прикладом *посилення* негативних наслідків невдалих організаційних рішень, що приймаються в умовах відсутності необхідних засобів регулювання та контролю процесів фінансової сфери. Для нас цей приклад особливо цікавий тим, що головною причиною виникнення такої «*піраміди*» була відсутність *точних* та *однозначно визначених* кількісних методів контролю за процесами управління фінан-

совою сферою. Це саме той *аспект* (чи те *забезпечення*) процесу управління ризиком, яке називається «*забезпеченням методологічним*» і формується за допомогою математичного інструментарію:

- Відсутність *точних* методів вимірювання ризику, оцінки ефективності і верифікації стабільності функціонування суб'єктів фінансового ринку.

Поєднання цієї причини з всіма пригаданими іншими факторами призвели до того, що дуже швидко виник розгалужений сектор фінансового ринку, на якому обертаються, з одного боку, величезні *реальні кошти* (гроші), а з іншого – «*деривативи*» від «*деривативів*» (часто «*уявні*» фінансові інструменти). Відсутність *точних* та *однозначно визначених* кількісних методів визначення їх *реальної вартості* призвела до того, що «*ринкова*» вартість «*вторинних* (чи *похідних*) *цінних паперів*» в багато разів *перевищує* загальну вартість всіх *реальних* (тобто *забезпечених чимсь конкретним*) товарів та послуг. Звідси порівняння з пірамідою, яка перевернута догори своєю основою. *Фактична* основи суспільства, яка *забезпечує* його стабільність та розвиток – тобто *реальний виробничий сектор економіки*, перетворився в «*вершину*» цієї перевернутої піраміди. Вверх від неї – необмежено розростається нічим не підкріплена «*спекулятивна*» надбудова у вигляді ринку «*похідних цінних паперів*» («*деривативів*»). Тому часто навіть *незначні* вагання *реальної основи* призводять до величезних «*потрясінь*» цієї штучної «*надбудови*». Варто підкреслити, що зараз ці процеси ще більше поширюються та посилюються. Повстають нові сегменти цих ринків (такі, наприклад, як ринки «*крипто-валют*»), та інші.

4. Поглинання «спекулятивною» надбудовою виробничої «основи».

Практичним результатом такої неконтрольованої «*емісії*» на фінансовий ринок «*спекулятивних*» коштів була «*гора легких та швидких до отримання грошей*», які з'явилися «*невідомо звідки*».

- Поступового «*втягування*» виробничого сектору економіки до цієї «*піраміди*» не треба було довго чекати – все частіше й частіше підприємства виробничої сфери приймали участь на ринку «*деривативів*» з метою отримання «*легких*» прибутків.

Це, безумовно, один з негативних наслідків явища «*ефекту піраміди*» та виникнення розгалуженої «*надбудови*» на фінансовому ринку. Крім того розвиток «*похідних цінних паперів*» створив широкі можливості до *трансформації* різних типів економічного ризику: *ринкового, інвестиційного, кредитного, валютного, цінового*, ітд. Таким чином суб'єкти господарювання отримали можливість *самостійно* формувати свій «*ризиковий портфель*» згідно з власними побажаннями. Здавалося б – дуже *позитивна* та *корисна* можливість, але позбавлена об'єктивних засобів контролю призводила до наслідків, цілком протилежних до очікуваних. Темпи *розвитку* реального сектору економіки значно поступаються швидкості зростання «*віртуальної*» надбудови.

5. Проблеми методологічного забезпечення управління ризиком.

Відсутність в таких умовах точних, а найважливіше – *зрозумілих* для учасників цього ринку методів оцінки *дійсної* вартості фінансових інструментів, робить неможливим прийняття превентивних дій, які б сприяли зменшенню можливих ризиків.

- Однією з головних причин, що призвела до такої ситуації на фінансовому ринку деривативів, є складність *математичної* структури відповідних фінансових інструментів, яка, крім того, постійно зростає. Часто методи, що використовуються для цього, не просто *незрозумілі* для переважної більшості учасників цього ринку, а є *недоступними* для їх розуміння.

Поєднання цих названих (та багатьох ще неназваних) факторів, призводить до наступних негативних наслідків:

- Ціни активів можуть раптово, протягом *кількох секунд* змінитися.
- Управління інвестиційним портфелем постійно ускладнюється.
- Протягом короткого часу можливі втрати *«несподівано»* можуть вирости в значні суми, ітп.

Очевидно, що адекватна реакція на подібні загрози неможлива без таких базових інструментів методологічного забезпечення процесу управління ризиком, як здатність неперервного *кількісного* вимірювання можливих *втрат* для кожної позиції активів та можливість неперервного *кількісного* вимірювання *загального*, тобто *інтегрального* ризику інвестиційного портфеля.

1.6. Передумови появи фінансового ризик-менеджменту.

1. Ризик як загальна наукова категорія.
2. Формування наукових уявлень та загальних понять про ризик.
3. Класичний підхід до керування ризиком в економічних науках.
4. «Порочне коло» в управлінні ризиком.
5. Відношення особи, яка приймає рішення до ризику.

1. Ризик як загальна наукова категорія.

Керування ризиком, або інакше *ризик-менеджмент (risk-management)* – це наукова дисципліна, що перш за все ґрунтується на економічних науках та переплітається в більшій чи в меншій мірі з цілою низкою різноманітних споріднених з нею галузей знань, серед яких необхідно виділити теорію ймовірностей, математичну статистику, дослідження операцій, психологію, право та інші суспільно-політичні науки, тощо.

Керування (чи *управління*) будь-якими процесами побудоване, перш за все, на *прийнятті рішень*.

- Тому з математичної точки зору *ризик-менеджмент* – це розділ *теорії прийняття рішень*.

Якщо розглядати цю дисципліну з точки зору математичних методів, якими вона користується, то це головним чином:

➤ *Теорія ймовірностей, математична статистика, дослідження операцій та різноманітні оптимізаційні методи.*

З іншого боку, для того, щоб взагалі можна було говорити про будь-який «ризик», необхідне виконання цілої низки спеціальних умов, головною серед яких є *непевність ситуації*. Тому *ризик-менеджмент* можна охарактеризувати, як *спеціальний розділ теорії прийняття рішень*, а саме:

✓ *Прийняттям рішень в умовах невизначеності.*

Поняття «ризик», слід зарахувати до найбільш розповсюджених: важко знайти якусь галузь практичної діяльності чи розділ науки де воно не було б присутнім. Щоправда в кожній із них воно має свої особливості. Так в медицині чи в біології ризик має зовсім інший зміст ніж, скажімо, в техніці чи промисловості.

В багатьох розділах математики важливу роль грає поняття ризику чи функції ризику. Зрозуміло, що в кожній конкретній ситуації воно має своє чітке визначення і, очевидно, аж ніяк не може бути тотожним ризику азартного гравця чи біржового маклера.

Супроводжуючи людину на всіх етапах її історичного розвитку, маючи всеохоплюючий, тотальний характер тим не менше поняття *ризик* довгий час залишалось поза увагою детального наукового дослідження. Таке дослідження передбачало перш за все відокремлення категорії ризику від його побутового тлумачення, змістовно-конструктивного аналізу та структуризації. Про кількісний аналіз цього поняття із застосуванням строгих математичних методів взагалі не було мови – це видавалося *цілком неможливим*.

2. Формування наукових уявлень та загальних понять про ризик.

Наукові уявлення щодо *ризик* склалися поступово і поетапно. Будучи спочатку однією із філософських категорій це явище згодом привернуло увагу представників інших наук, в тому числі і наук *точних*. В першу чергу це стосується економістів, статистиків, юристів, а з часом і математиків. Поняття ризику з'явилося у *військових, економічних, демографічних, медичних, біологічних, правових* та інших дисциплінах. Згодом ризик став предметом міждисциплінарних досліджень, що й призвело до появи таких математичних дисциплін, як *теорія ймовірностей, теорія ігор, дослідження операцій, теорія катастроф*, власне *теорія ризику*.

Найбільш цікавою і важливою сферою людської діяльності, безпосередньо і суттєво пов'язаною з поняттям ризику, є економічна діяльність. Детерміновані ситуації, коли ризик *відсутній*, в економіці зустрічаються дуже рідко. Особливого значення та актуальності набуває вивчення

поняття економічного ризику в сучасний період. Слід визнати, що впродовж багатьох десятиріч така важлива економічна категорія як «*економічний ризик*» майже зникла в Україні з поля зору науки та практики управління економікою. В умовах командно-адміністративної системи України вважалося, що «*соціалістична плановість*» та ризик – явища несумісні. Разом із розвитком ринкових відносин та ускладненням взаємозв'язків між усіма господарюючими суб'єктами зростає загроза виникнення *непередбачуваних ускладнень*, підвищується ступінь *ризик*у на усіх рівнях.

Окрім суто прагматичного, прикладного аспекту вивчення поняття економічного ризику має ще велике методологічне значення. Конкретність та наглядний характер економічних моделей дозволяє краще зрозуміти саму природу поняття *ризик*у, причин, що його зумовлюють, загальних його властивостей та можливі підходи до його аналізу, зокрема аналізу математичними методами.

В результаті отримуємо можливість керування не тільки економічним ризиком, а й поширити це на інші сфери.

3. Класичний підхід до керування ризиком в економічних науках.

Реальні господарські процеси неминуче знаходяться під впливом незліченної кількості різноманітних побічних випадкових факторів, які неможливо заздалегідь передбачити. Тому будь-яка економічна теорія, що прагне мати практичну цінність, повинна враховувати ці аспекти. Поняття *економічного ризику* є одним серед них. Оскільки ризик – невід'ємна риса господарських рішень, то з еволюцією умов господарювання змінювався і характер ризику.

Перш за все економічний ризик асоціюється з *непевністю* чи з *невизначеністю*. Ось одне з типових визначень економічного ризику, яке приводиться в економічних словниках:

✓ *Ризик – нестабільність, непевність, непевність у майбутньому, точніше рівень непевності, пов'язаний з проектом або з інвестиціями.*

Тому в господарській діяльності ризик, як правило, асоціюється з чимсь «*недобрим*», якоюсь невдачею, можливістю щось втратити, боязню що «*щось нам не вдасться*».

✓ Головним чином ризик сприймається в категоріях *загрози*.

Тому класичний підхід до керування ризиком в економічних науках спирається на інтерпретацію ризику, як «*зла*»

Як наслідок цього – намагання його *уникнути*, а оскільки в господарській діяльності це неможливо, то принаймні *мінімізувати* його.

✓ «*Класичний*» підхід до керування ризиком означає вибір «*найкращого*» рішення з множини «*можливих*».

В математичному розумінні такий підхід передбачає побудову відповідної математичної моделі, або іншими словами, формулювання відповідної

«задачі прийняття рішення». «Якість» рішення визначає цільова функція задачі, а основою до її визначення має бути *відповідна* для особи, яка приймає рішення, функція *корисності* $u(\cdot)$.

Таким чином класичний підхід зводиться до того, щоб серед можливих рішень вибрати таке, для якого цільова функція моделі приймає «оптимальне» (це може бути *найменше*, *найбільше* або *конкретно визначене*) значення. Однак завжди це призводить до *мінімізації ризику*, тобто означає намагання *уникнути* ризику.

4. «Порочне коло» в управлінні ризиком.

Практичним наслідком такого підходу часто є приведення в дію наступного явища, яке в економічному управлінні дістало назву «*порочного кола*». Схематично можна його зобразити наступним чином:

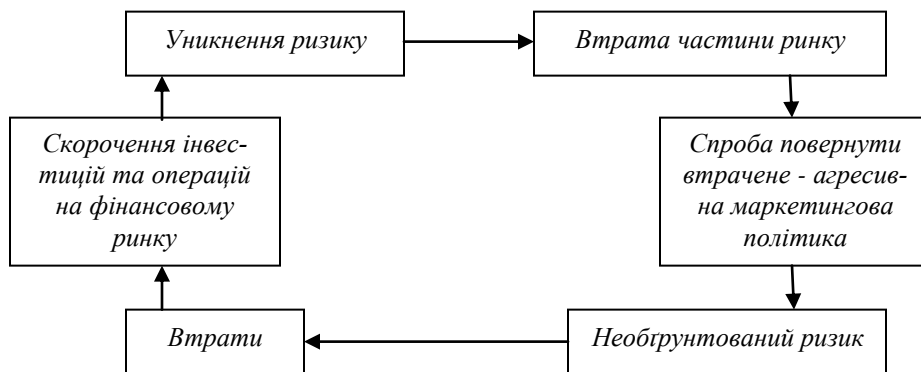


Схема «порочного кола» в управлінні ризиком

Тому сучасна концепція управління ризиком в певних аспектах відмовляється від «канонічного» класичного підходу і не трактує втрати, які можна зазнати під час реалізації господарського рішення, як визначальний фактор при визначенні раціональної поведінки. Сучасна інтерпретація ризику – це не стільки *втратами*, скільки *відсутність* значних економічних *результатів*; це можливість *відхилення від мети*, заради якої приймалося рішення. Безумовно, ризик містить негативні моменти для особи, яка приймає рішення. Проте повна *відсутність* ризику для неї – це свідчення серйозних дефектів в організації процесу управління. Іноді ризик бажаний для суб'єктів, тому він створюється штучно (наприклад гральний бізнес, різноманітні лотереї, тоталізатори, тощо). Сьогодні ризик – це *товар*. Створився потужний ринок ризику, споживачами на якому є страхові компанії та інші організації і фонди, які отримують ризик від багатьох суб'єктів ризику і за деяку винагороду повертають їм певні гарантії.

5. Відношення особи, яка приймає рішення до ризику.

Основою класичного підходу до управління ризиком є математична формалізація всіх його елементів та побудова на цій основі адекватної математичної моделі. Цей аспект зберігає свою актуальність і в сучасних концепціях. З точки зору можливості використання математичних (тобто кількісних, точних) методів в керуванні ризиком принциповим є дві наступні обставини:

- ✓ Перша і найважливіша – можливість *кількісного* (тобто *точного*) вимірювання *рівня ризику*.
- ✓ Друга обставина пов'язана з можливістю формального моделювання *відношення до ризику* особи, яка приймає рішення.

Ця властивість є ключовою в сфері керування ризиком, особливо в реалізації сучасних *портфельних* її концепцій. *Особа, яка приймає рішення* (скорочено ОПР) в даному контексті – це елемент моделі, тобто орган чи інституція, що має право приймати рішення, а не обов'язково окрема особа (людина). Теорія ризику класифікує всіх ОПР до трьох груп:

- ОПР, які характеризуються *схильністю* до ризику.
- ОПР, які характеризуються *байдужістю* до ризику.
- ОПР, які характеризуються *несхильністю* до ризику.

Головним інструментом для розв'язку задачі математичної формалізації відношення ОПР до ризику є вибір *відповідної* для нього функції *корисності* $u(\cdot)$. Функція *корисності* $u(\cdot)$, в свою чергу, є основою до побудови *цільової функції* задачі прийняття рішення, що оцінює «якість» прийнятого рішення.

Підсумовуючи можемо сказати, що керування ризиком згідно з класичною концепцією відбувається наступним чином:

- ✓ Вибирається відповідна до ситуації *кількісна міра ризику*.
- ✓ З'ясовуються принципи *раціональної поведінки* та формулюється чіткий формальний критерій цього ($u(\cdot)$).
- ✓ Визначається така послідовність дії, що дозволяє *досягти мети* при *мінімальним* рівні ризику.

1.7. Сучасна концепція управління ризиком підприємства.

1. Інтегральний ризик-менеджмент.
2. Інтегральний ризик банкрутства.
3. «Портфельний підхід» до управління ризиком.
4. Комплекс забезпечень процесу управління ризиком.
5. Методи аналізу економічного ризику: якісний аналіз.
6. Методи аналізу економічного ризику: кількісний аналіз.

1. Інтегральний ризик-менеджмент.

Проблеми пов'язані з управлінням ризиком в різноманітних сферах діяльності суттєво загострились на протязі останніх кількох десятків років. Відбулось це, перш за все, під впливом поважних об'єктивних причин. Най-

більш значимі серед них – це глобалізація економіки, інформаційно-технічна революція і, як наслідок, істотне прискорення господарських процесів, і тп. Все це призвело до того, що використання класичного підходу до управління ризиком в його «канонічним» трактуванні стало практично неможливим.

Тому останнім часом була опрацьована і інтенсивно зараз розвивається спеціальна методологія, яка дістала назву «інтегральний ризик-менеджмент».

- Головною метою інтегрального ризик-менеджменту в масштабі підприємства є знаходження оптимальної пропорції між *ризиком* та *прибутковістю* підприємства.

2. Інтегральний ризик банкрутства.

Інтегральний ризик-менеджмент передбачає, що головним предметом аналізу та управління стає «інтегральний ризик банкрутства». Згідно з новою концепцією визначальними факторами *раціональної поведінки* є, перш за все, рівень *ризиків банкрутства* та оцінка *наслідків* такого банкрутства для підприємства.

Пояснення цього дуже просте та прозоре:

- ✓ Такі аспекти, безпосередньо пов'язані з ризиком, як *банкрутство* та його *наслідки*, зрозумілі кожному, тому що вони *стосуються кожного*, хто має хоч якийсь зв'язок із цим підприємством, тобто для його *власників, керівництва, працівників, клієнтів, інвесторів, кредиторів, державу, наглядові інституції*, тощо.

Особливого значення набуває банкрутство в *фінансовій* сфері (наприклад банкрутство банку, який ризикує не тільки своїм майном, а ще й грішми своїх клієнтів).

- Згідно з новою концепцією, управління ризиком в масштабі підприємства зводиться до того, щоб утримувати ризик банкрутства на такому рівні, який задовольняє всіх, хто в цьому зацікавлений.

Досягти цього можна встановивши *оптимальне співвідношення* (пропорцію) між величиною залученого капіталу акціонерів та рівнем ризику, якому цей капітал піддається.

- Можна вважати, що *банкрутство* настає тоді, коли втрати *перевищують* вартість майна підприємства.

Основним показником, що визначає рівень *ризиків банкрутства*, є пропорція між величиною залученого капіталу та величиною *можливих* втрат. Встановлення рівня ризику банкрутства означає фактично визначення наступного співвідношення (або пропорції):

$$(Прибутковість\ діяльності)/(Ризик).$$

3. «Портфельний підхід» до управління ризиком.

В новій методології управління ризиком, що дістала назву «інтегральний ризик-менеджмент», «класична» концепція «мінімізації ризику» замінюється «портфельним підходом» до управління ризиком.

Згідно з новою концепцією управління ризиком (по аналогії з принципом «диверсифікації інвестиційного портфеля»), підприємство розглядається, як корпорація окремих, але пов'язаних між собою, суб'єктів господарювання.

- Кожен з них має свій власний напрямок економічної діяльності та свою власну пропорцію: $(\text{Рентабельність})/(\text{Ризик})$.

Це дозволяє використати перевірені практикою методи диверсифікації портфеля з метою встановлення відповідних рівнів залучення грошових коштів для окремих напрямків економічної діяльності підприємства таким чином, щоб досягти бажаного рівня співвідношення: $(\text{Рентабельність})/(\text{Ризик})$ в масштабі цілого підприємства.

Кількісним показником інтегрального ризику є *індекс нестабільності* (волатильності, англ. *volatility index*) ринкової вартості підприємства. Цей індекс обчислюється за допомогою стандартного відхилення *прибутковості* акцій підприємства, які є в обігу на фінансовому ринку, або як стандартного відхилення *рентабельності* активів підприємства.

4. Комплекс заходів процесу управління ризиком.

Вдала практична реалізація концепції інтегрального ризик-менеджменту в масштабі підприємства можлива виключно при умові тісної співпраці трьох головних складових частин процесу управління ризиком, або, як кажуть, *забезпечень* цього процесу:

1. *Забезпечення організаційне.*
2. *Забезпечення методологічне.*

Саме ця сфера процесу управління ризиком є предметом зацікавлення математичної теорії економічного ризику. Тому зупинимось детальніше на головних завданнях цього типу забезпечень та перелічимо головні з них:

- Кількісна оцінка рівня (величини) *ризик* (або простіше – вимірювання *ризик*)
 - Кількісна оцінка ефективності функціонування об'єкту управління, що передбачає наявність факторів ризику та враховує рівень *ризик*.
 - Стрес-тестування, тобто можливість верифікації стабільності функціонування об'єкту управління в різноманітних «кризових» умовах.
3. *Забезпечення інформативне.*

Ця сфера з області управління ризиком тісно пов'язана з процесами *інформатизації* та *комп'ютеризації* економіки, особливо в фінансовій сфері. Вона охоплює всі процеси, пов'язані із створенням та підтримкою систем

накопичення, обробки, опрацювання, збереження та використання інформації, необхідної в процесі прийняття рішень.

Відсутність будь-якого з цих складових робить неможливим реалізацію всього процесу управління ризиком. Особливого значення з цієї точки зору набувають кількісні методи вимірювання ризику. Ці методи відіграють ключову роль на всіх етапах процесу прийняття рішень, починаючи від формулювання критеріїв і закінчуючи оцінюванням фактичних результатів господарської діяльності.

5. Методи аналізу економічного ризику: якісний аналіз.

Виділяють два тісно між собою пов'язаних *способи* аналізу економічного ризику, які доповнюють одне одного:

- Аналіз якісний.
- Аналіз кількісний.

У випадку економічного ризику якісний аналіз, перш за все, проводиться з метою порівняння *очікуваних* позитивних результатів господарської діяльності з *можливими* їх негативними наслідками: *економічними, суспільними, екологічними* і тп.

- ✓ Якісний аналіз дає можливість визначити вплив рішень, що приймаються, на речі, що потрапляють до сфери зацікавленості суб'єктів господарської діяльності.
- ✓ Приймаючи ризиковане рішення треба встановити: *для кого цей ризик корисний і в чому його вигода; хто і чому в ньому зацікавлений; чийм інтересам він відповідає*; ітп.
- ✓ Якісний аналіз дозволяє встановити, з яким *типом* (чи *різновидом* або його *відмінностями*) економічного ризику маємо справу.
- ✓ Якісний аналіз передбачає встановлення також *факторів впливу* на величину (чи – *рівень*) того *типу* ризику, який вивчається.

Подібні фактори діляться на дві групи:

– Першу групу складають *зовнішні*, або інакше – *об'єктивні* фактори.

До них належать ті чинники, на які особа, яка приймає рішення не може впливати. Наприклад: *рівень інфляції, податки, діяльність конкуренції, економічна та політична кон'юнктура, міжнародні зв'язки, таможні тарифи, стан екології*, ітп.

– Друга група – це *внутрішні*, або інакше – *суб'єктивні* фактори. Вони лежать безпосередньо в межах компетенції особи, що приймає рішення.

Серед них можна виділити, наприклад: *виробничий потенціал, рівень технічного та технологічного оснащення, рівень та якість управління, освіта, рівень підготовки та кваліфікації персоналу, зв'язки та стосунки з партнерами, клієнтами, інвесторами, спонсорами* ітп.

6. Методи аналізу економічного ризику: кількісний аналіз.

Як вже підкреслювалось, з точки зору можливості використання математичних (тобто *кількісних*, або *точних*) методів в керуванні ризиком принциповим є дві наступні обставини: можливість *кількісного* (тобто *точного*) вимірювання *рівня ризику*; та можливістю формального моделювання *відношення до ризику* особи, яка приймає рішення.

Тому до головних завдань кількісного аналізу слід зарахувати:

- ✓ Розробку засобів формального опису понять пов'язаних з економічним ризиком.
- ✓ Розробку математичних методів кількісного вимірювання ризику.
- ✓ Створення методик оцінювання рівня ризику для різноманітних сфер господарської діяльності.

Серед таких, що активно використовуються на практиці, можна назвати наступні кількісні методи аналізу ризику:

- 1) *Статистичний* метод, який застосовується тоді, коли маємо в розпорядженні репрезентативні та достатньо чисельні емпіричні дані.
- 2) Метод *аналогії*, який застосовується тоді, коли не маємо достатньої кількості статистичних даних, що *безпосередньо* стосуються явища, яке нас цікавить, але можемо обґрунтувати свої рішення дослідженнями *подібних* до них явищ.
- 3) *Суб'єктивні* методи, що спираються на думках та висновках окремих фахівців та експертів в конкретних галузях.

Застосовуючи відповідні *методи* якісного та кількісного аналізу ризику, формуючи *підходи* до організації процесу управління ризиком та вибираючи необхідні *способи* його реалізації слід пам'ятати, що це *абсолютно конкретні* і *індивідуальні* завдання, що стосуються виключно *ситуації* та *явища*, які є предметом дослідження.

- Оскільки кількість різноманітних *типів* ризику практично необмежена, то в принципі *не існує* і *не може існувати* універсального способу управління ризиком.
- *Неможливо цілком та повністю уникнути ризику*. А отже, управляючи ризиком намагаємось звести його до *прийняттого рівня*, підготуватись та запобігти до його можливих *негативних наслідків*.
- Слід пам'ятати також те, що в деяких ситуаціях ризик є *бажаним* явищем, більше того – створюється штучно.

Головний принцип практичного управління ризиком можна сформулювати наступним чином:

- *Необхідно аналізувати ризик діяльності конкретного об'єкту і тільки для такої діяльності створювати знаряддя управління ризиком.*
- *Тільки в конкретних умовах проявляються реальні фактори, що створюють реальний ризик, тільки в конкретних умовах можна встановити конкретні наслідки ризику.*

1.8. Лінійна модель з багатьма змінними.

Економетрико-статистичні методи в дослідженні економічних процесів.

1. Припущення лінійної моделі. 2. Матрична форма лінійної моделі. 3. Аналіз припущень моделі. 4. Типи параметрів моделі. 5. МНК-оцінки структурних параметрів. 6. Властивості МНК-оцінок: незміщеність. 7. Властивості МНК-оцінок: коваріаційна матриця. 8. Оцінювання параметрів стохастичної структури.

1. Припущення лінійної моделі.

Аналіз економетричних моделей, розпочатий в підрозділі 1.2. (Лабораторна робота №1), стосувався найпростішої моделі лінійної регресії однієї змінної. На цьому простому прикладі було проілюстровано практичну процедуру та послідовні етапи економетричного дослідження. Однак з погляду на можливі застосування розглянута модель лінійної регресії однієї змінної є занадто сильним спрощенням тієї «реальності», яку необхідно описати математичними засобами.

Проте лінійна залежність є досить поширеною при вивченні економічних явищ. Тому модифікуючи розглянуту модель шляхом запровадження додаткових незалежних *пояснювальних* змінних (або *регресорів*), розширюємо область можливих її застосувань.

Припустимо, що на підготовчому етапі було встановлено, що метою дослідження є *пояснювана* змінна Y (саме її повинна модель «*пояснювати*», її називають також *регресантом*).

Припустимо також, що на етапі відбору (*специфікації*) чинників, які мають вплив на *пояснювану* змінну Y , сформовано вектор *пояснювальних* змінних $X_{(k)} = [X_1, X_2, \dots, X_k]$ (у моделях лінійної регресії ці змінні також називаються *регресорами*).

Припустимо далі, що між залежною змінною Y і *пояснювальними* змінними X_1, X_2, \dots, X_k існує наступна лінійна залежність:

$$Y = a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + \dots + a_k \cdot X_k.$$

Основою для дослідження є статистичні дані, зібрані у вигляді матриці:

$$[\mathbf{Y}/\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} y_1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ y_2 & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix}.$$

Визначення. Моделлю лінійної регресії з багатьма змінними називається наступна економетрична модель:

$$y_i = a_1 \cdot x_{i1} + a_2 \cdot x_{i2} + \dots + a_K \cdot x_{iK} + \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

де y_i – *регресант*, тобто залежна змінна, x_{ik} , $k = 1, 2, \dots, K$ – *регресори*, тобто *пояснювальні* змінні, ξ – випадкова змінна моделі (або – випадкова складова), символ i означає номер чергового її спостереження.

Остаточне визначення економетричної моделі вимагає ще прийняття ряду формальних припущень, які *математично-точно* визначають всі її елементи. *Класичну* модель лінійної регресії з багатьма змінними характеризують наступні обмеження:

Припущення 1. Модель є *лінійною* відносно параметрів

$$(a_1, a_2, \dots, a_K),$$

та *інваріантною* щодо спостережень.

Іншими словами, параметри (a_1, a_2, \dots, a_K) моделі не залежать від номера чергового спостереження $i = 1, 2, \dots, n$.

Припущення 2. Значення x_{ik} , $k = 1, 2, \dots, K$, пояснювальних змінних X_k , $k = 1, 2, \dots, K$, у повторних спостереженнях $i = 1, 2, \dots, n$, є фіксованими дійсними числами, тому елементи матриці \mathbf{X} є не випадковими.

Припущення 3. Ранг матриці \mathbf{X} дорівнює числу K параметрів моделі (a_1, a_2, \dots, a_K) : $r(\mathbf{X}) = K$.

Припущення 4. Випадкова змінна моделі (ξ) є випадковою величиною, яка має нормальний розподіл.

Розподіл ξ_i не залежить від номера $i = 1, 2, \dots, n$, чергового спостереження і є нормальним розподілом з параметрами $(0, \sigma^2)$:

$$\xi_i \Leftrightarrow N(0, \sigma^2), \quad E(\xi_i) = 0, \quad D(\xi_i) = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Припущення 5. Відсутня автокореляція випадкової змінної ξ , тобто випадкові величини ξ_i для різних $i = 1, 2, \dots, n$, є *некорельованими*:

$$\text{Cov}(\xi_i, \xi_j) = 0, \quad i \neq j, \quad j, i = 1, 2, \dots, n.$$

2. Матрична форма лінійної моделі.

Варто зауважити, що у випадку багатьох пояснювальних змінних

$$X_{(k)} = [X_1, X_2, \dots, X_K]$$

скалярна форма моделі не є зручною і зазвичай використовується наступний матрично-векторний її запис.

- Для i -того спостереження:

$$y_i = x_{i(k)} \cdot a_{(k)} + \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

де

$$x_{i(k)} = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iK}], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

вектор-рядок значень спостереження з номером i для всіх K пояснювальних змінних X_1, X_2, \dots, X_K , ($i = 1, 2, \dots, n$).

- У більш стислій формі використовується наступний запис:

$$y_{(i)} = \mathbf{X} \cdot a_{(k)} + \xi_{(i)},$$

де використано наступні позначення:

$$a_{(k)} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_K \end{bmatrix} \quad \text{– вектор коефіцієнтів правої частини моделі.}$$

Відповідно до введеного раніше загального визначення економетричної моделі, $a_{(k)}$ називається вектором *структурних параметрів* моделі.

$$y_{(i)} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{– вектор всіх } n \text{ спостережень } \textit{пояснюваної} \text{ змінної } Y;$$

$$x_{(i)k} = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, K; \quad \text{– вектор всіх } n \text{ спостережень } k\text{-тої пояснюваль-}$$

ної змінної X_k , $k = 1, 2, \dots, K$;

$$\xi_{(i)} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad \text{– вектор випадкової складової для всіх } n \text{ спостережень.}$$

Спираючись на властивості нормального розподілу та враховуючи припущення моделі приходимо до наступних висновків:

- Випадкові величини ξ_i для різних $i = 1, 2, \dots, n$, є незалежними.
- З припущень 4, 5 щодо стохастичної структури моделі відразу випливає, що значення випадкової складової ξ для всіх n спостережень утворюють випадковий вектор $\xi_{(i)}$, який має n -вимірний нормальний розподіл.

$$\xi_{(i)} \Leftrightarrow N(E(\xi_{(i)}); D^2(\xi_{(i)})).$$

При цьому математичне сподівання $E(\xi_{(i)})$ випадкового вектора $\xi_{(i)}$ є нульовим вектором:

$$E(\xi_{(i)}) = \mathbf{0}_{(i)},$$

де $\mathbf{0}_{(i)}$ позначає n -вимірний вектор-стовпець, усі координати якого дорівнюють нулю.

Незалежність координат випадкового вектора $\xi_{(i)}$ означає, що коваріаційна матриця $D^2(\xi_{(i)})$ випадкового вектора $\xi_{(i)}$ буде *діагональною матрицею* з однаковими елементами σ^2 на головній діагоналі:

$$D^2(\xi_{(i)}) = E(\xi_{(i)} \cdot (\xi_{(i)})^T) = \sigma^2 \mathbf{I},$$

де символ T означає операцію *транспонування* вектора, а \mathbf{I} – одинична матриця розмірності $(n \times n)$:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Іншими словами:

$$\xi_{(i)} \Leftrightarrow N(\mathbf{0}_{(i)}; \sigma^2 \mathbf{I}).$$

3. Аналіз припущень моделі.

Припущення 3: $r(\mathbf{X}) = K$ є цілком природним і просто означає, що серед незалежних змінних X_1, X_2, \dots, X_K , немає «зайвих» змінних. З математичної точки зору ця умова означає, що вектори $x_{(i)k}, k = 1, 2, \dots, K$, усіх n спостережень окремих пояснювальних змінних X_1, X_2, \dots, X_K , не є лінійно-залежними. Іншими словами, не існує такого набору чисел (c_1, c_2, \dots, c_K) , серед яких хоча б одне відмінне від нуля, щоб для всіх $i = 1, 2, \dots, n$, виконувалась рівність:

$$c_1 \cdot x_{i1} + c_2 \cdot x_{i2} + \dots + c_K \cdot x_{iK} = 0.$$

Або у векторній формі:

$$c_1 \cdot x_{(i)1} + c_2 \cdot x_{(i)2} + \dots + c_K \cdot x_{(i)K} = \mathbf{0}_{(i)}.$$

Якщо ввести вектор: $c_{(k)} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_K \end{bmatrix}$, то ця рівність приймає вигляд:

$$\mathbf{X} \cdot c_{(k)} = \mathbf{0}_{(i)}.$$

З іншого боку **припущення 3** гарантує виконання рівності:

$$r(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}) = K,$$

яка, в свою чергу, означає, що матриця $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}$ буде неособливою. Тому існує обернена до неї матриця $(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1}$.

Наведені міркування дають можливість зробити ще один важливий висновок:

- Кількість спостережень (n) не може бути меншою за кількість (K) параметрів моделі.

Відсутність вільного члена у визначенні моделі лінійної регресії з багатьма змінними:

$$y_i = a_1 \cdot x_{i1} + a_2 \cdot x_{i2} + \dots + a_K \cdot x_{iK} + \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

не є випадковою. Це зумовлено зручністю її подальшого математичного аналізу за допомогою методів матрично-векторної алгебри, оскільки тоді всі параметри моделі можна трактувати однаково.

Ця обставина, однак, не зменшує загальності моделі, тому що модель, яка містить вільний член, може бути легко приведена до вказаного вигляду шляхом введення штучної змінної. Зазвичай вільний член в математичній моделі, що описує *реальне* економічних явищ, можна інтерпретувати як наявність інваріантних у діапазоні дослідження чинників, тобто факторів, значення яких, а отже і їх вплив на *пояснювану* змінну Y , є *сталим* у всьому діапазоні $i = 1, 2, \dots, n$, спостережень.

Таким чином, для того, щоб врахувати вільний член, що присутній в *фактичній* лінійній залежності

$$Y = a_0 + a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + \dots + a_K \cdot X_K,$$

вистачить додатково ввести до неї штучну змінну X_0 , значення якої тотожно дорівнюють одиниці для всіх n спостережень.

На практиці це означає необхідність заміни матриці статистичних даних $[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]$ на *модифіковану* матрицю $[\mathbf{Y}/\mathbf{X}']$. Ця модифікація полягає у введенні нового стовпця до матриці $[\mathbf{Y}/\mathbf{X}]$, що складається з одиниць:

$$[\mathbf{Y}/\mathbf{X}'] = \begin{bmatrix} y_1 & 1 & x_{12} \dots & x_{1K} \\ y_2 & 1 & x_{22} \dots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & 1 & x_{n2} \dots & x_{nK} \end{bmatrix}.$$

4. Типи параметрів моделі.

При введенні в підрозділі 1.1. поняття *економетричної моделі* наголошувалось, що вона складається з двох принципово відмінних елементів, якщо брати до уваги їх математичну природу: *структурної частини* та *стохастичної частини*.

У випадку *багатовимірної моделі лінійної регресії*, що є предметом дослідження, виглядає це наступним чином:

➤ *Структурна частина:*

$$y_i = a_1 \cdot x_{i1} + a_2 \cdot x_{i2} + \dots + a_K \cdot x_{iK}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

➤ *Стохастична частина:* випадкова змінна моделі (ξ), який є випадковою величиною з нормальним розподілом $\xi \Leftrightarrow N(0, \sigma^2)$.

Якщо проаналізувати зміст припущень моделі, то перші три з них (1. 2. 3.) стосуються *структурної частини*, натомість два останні (4. 5.) характеризують її *стохастичну* структуру.

Припускаємо, що матриця статистичних даних:

$$[\mathbf{Y/X}] = \begin{bmatrix} y_1 & x_{11} & \dots & x_{1K} \\ y_2 & x_{21} & \dots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & x_{n1} & \dots & x_{nK} \end{bmatrix}$$

відома і саме ці данні будуть основою для дослідження.

Першим кроком цього дослідження є побудова *економетричної моделі*. В свою чергу, перший крок побудови моделі – це *оцінка* невідомих її параметрів. Наявність в моделі двох елементів принципово різної природи означає існування двох груп параметрів, пов'язаних відповідно з кожною з них.

➤ Перша група – це вектор $a_{(k)} = \{a_1, a_2, \dots, a_K\}^T$ *структурних параметрів* моделі.

➤ Друга група – це параметр σ^2 , що стосується *стохастичної структури* моделі.

Зазвичай ці параметри невідомі, але згідно з припущеннями моделі вся інформація щодо цих параметрів «міститься» в статистичній вибірці $[\mathbf{Y/X}]$. Зрозуміло, що «*природа*» цих параметрів абсолютно різна, а отже і математичні методи, що будуть застосовуватись до їх *оцінювання*, теж принципово відрізняються.

5. МНК-оцінки структурних параметрів.

Нехай вектор $\hat{a}_{(k)} \approx a_{(k)}$ означає *оцінку* вектора $a_{(k)}$ структурних параметрів моделі з багатьма змінними. В підрозділі 1.2, при вивченні лінійної

моделі з однією змінною ($Y = b + a \cdot X$), було введено поняття *теоретичних значень*:

$$\hat{y}_i = \hat{b} + \hat{a} \cdot x_i,$$

де (\hat{a}, \hat{b}) – оцінки структурних параметрів (a, b) моделі. По аналогії з цим визначимо «*вибіркову лінію регресії*»:

$$\hat{y}_{(i)} = \mathbf{X} \cdot \hat{a}_{(k)}.$$

(тобто *теоретичні значення*) лінійної моделі з багатьма змінними,

$$\hat{a}_{(k)} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_K \end{bmatrix}. \text{ Координата } \hat{y}_i \text{ вектора } \hat{y}_{(i)} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix}, \text{ як і у випадку моделі з}$$

однією змінною, називається *теоретичним значенням* змінної Y , що відповідає i -тому спостереженню y_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Позначимо через $e_{(i)} = y_{(i)} - \hat{y}_{(i)}$ вектор решт моделі, тобто вектор, окремі координати якого є різницями:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

між емпіричним значенням y_i моделі та його теоретичним «*відповідником*» \hat{y}_i . Для оцінювання структурних параметрів моделі використаємо метод найменших квадратів (МНК). Його застосування зводиться до знаходження вектора $\hat{a}_{(k)}$, що мінімізує «*суму квадратів решт*». Іншими словами, введемо функціонал:

$$Q(a_{(k)}) = Q(a_1, \dots, a_K) = \sum_{i=1}^n (y_i - a_1 \cdot x_{i1} - \dots - a_K \cdot x_{iK})^2.$$

Тоді оцінкою вектора $a_{(k)}$ структурних параметрів моделі, визначеною методом найменших квадратів (коротко «*МНК-оцінкою*»), буде такий вектор $\hat{a}_{(k)}$, для якого виконується співвідношення:

$$Q(\hat{a}_{(k)}) = \min_{a_{(k)}} Q(a_{(k)}).$$

Таким чином знаходження оцінки $\hat{a}_{(k)}$ вектора $a_{(k)}$ структурних параметрів моделі зводиться до мінімізації квадратичної форми $Q(a_{(k)})$. Як відомо, вона досягає свого екстремуму в точці $\hat{a}_{(k)}$, в якій значення перших похідних $Q(a_{(k)})$ за параметрами a_k , $k = 1, 2, \dots, K$, стають нульовими:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q(a_1, \dots, a_K)}{\partial a_k} = 0, \\ k = 1, 2, \dots, K \end{cases}.$$

Квадратична форма $Q(a_{(k)})$ у матрично-векторному записі виглядає наступним чином:

$$Q(a_{(k)}) = \sum_{i=1}^n (y_i - x_{i(k)} \cdot a_{(k)})^2.$$

Запишемо цю рівність дещо інакше:

$$\begin{aligned} Q(a_{(k)}) &= (y_{(i)} - X \cdot a_{(k)})^T \cdot (y_{(i)} - X \cdot a_{(k)}) = \\ &= (y_{(i)})^T \cdot y_{(i)} - 2(a_{(k)})^T \cdot X^T \cdot y_{(i)} + (a_{(k)})^T \cdot X^T \cdot X \cdot a_{(k)}. \end{aligned}$$

Використовуючи останню рівність легко перевірити, що у векторній формі систему «нормальних рівнянь» для визначення МНК-оцінок вектора $a_{(k)}$ можна записати так:

$$-2 \cdot X^T \cdot y_{(i)} + 2 \cdot X^T \cdot X \cdot a_{(k)} = 0.$$

Отриманий остаточний результат сформулюємо наступним чином.

Визначення. Оцінкою методу найменших квадратів (МНК-оцінкою) вектора $a_{(k)}$ структурних параметрів лінійної регресійної моделі з багатьма змінними називається вектор $\hat{a}_{(k)}$, що визначається формулою:

$$\hat{a}_{(k)} = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y_{(i)}.$$

6. Властивості МНК-оцінок: незміщеність.

Згідно з **припущенням 2** значення x_{ik} , $k = 1, \dots, K$, є не випадковими, а згідно з **припущенням 4** випадкова величина ξ_i^k має нормальний розподіл. Тому випадкова величина y_i , визначена формулою:

$$y_i = a_1 \cdot x_{i1} + a_2 \cdot x_{i2} + \dots + a_K \cdot x_{iK} + \xi_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

є лінійною функцією нормально-розподіленої випадкової величини ξ_i^k . Таким чином, виходячи з властивостей нормального розподілу, випадкова величина y_i також має нормальний розподіл з параметрами $(x_{i(k)} \cdot a_{(k)}, \sigma^2)$:

$$y_i \Leftrightarrow N(x_{i(k)} \cdot a_{(k)}, \sigma^2), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Значення y_i , $i = 1, 2, \dots, n$, для всіх n спостережень залежної змінної Y утворюють випадковий вектор $y_{(i)}$, який має n -вимірний нормальний розподіл. Вектор $E(y_{(i)})$ математичних сподівань випадкового вектора $y_{(i)}$ визначається рівністю:

$$E(y_{(i)}) = X \cdot a_{(k)},$$

а коваріаційна матриця $\mathbf{D}^2(y_{(i)})$ випадкового вектора $y_{(i)}$ є діагональною матрицею з однаковими елементами σ^2 на головній діагоналі:

$$\mathbf{D}^2(y_{(i)}) = E((y_{(i)} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{a}_{(k)}) \cdot (y_{(i)} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{a}_{(k)})^T) = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}.$$

Іншими словами:

$$y_{(i)} \Leftrightarrow N(\mathbf{X} \cdot \mathbf{a}_{(k)}, \sigma^2 \cdot \mathbf{I}).$$

Таким чином, вектор МНК-оцінок $\hat{\mathbf{a}}_{(k)}$ структурних параметрів $\mathbf{a}_{(k)}$ моделі, визначений формулою:

$$\hat{\mathbf{a}}_{(k)} = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot y_{(i)}.$$

є лінійним перетворенням випадкового вектора $y_{(i)}$, що має багатовимірний нормальний розподіл. Отже, виходячи з властивостей багатовимірного нормального розподілу, можемо стверджувати, що вектор $\hat{\mathbf{a}}_{(k)}$ також є нормально розподіленим. Тепер знайдемо параметри цього розподілу.

Використовуючи формулу для $\hat{\mathbf{a}}_{(k)}$, а також спираючись на припущення 2 та 4 моделі, отримаємо для вектора $E(\hat{\mathbf{a}}_{(k)})$ математичних сподівань випадкового вектора $\hat{\mathbf{a}}_{(k)}$ наступну рівність:

$$\begin{aligned} E(\hat{\mathbf{a}}_{(k)}) &= E\left(\left(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}\right)^{-1} \cdot \mathbf{X}^T y_{(i)}\right) = E\left(\left(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}\right)^{-1} \cdot \mathbf{X}^T (\mathbf{X} \cdot \mathbf{a}_{(k)} + \xi_{(i)})\right) = \\ &= E(\mathbf{a}_{(k)}) + \left(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}\right)^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot E(\xi_{(i)}) = \mathbf{a}_{(k)}. \end{aligned}$$

Тобто:

$$E(\hat{\mathbf{a}}_{(k)}) = \mathbf{a}_{(k)},$$

а це означає, що МНК-оцінка $\hat{\mathbf{a}}_{(k)}$ є незміщеною оцінкою структурних параметрів $\mathbf{a}_{(k)}$ лінійної регресійної моделі з багатьма змінними, оскільки її середнє значення дорівнює шуканому вектору параметрів $\mathbf{a}_{(k)}$.

7. Властивості МНК-оцінок: коваріаційна матриця.

Підрахуємо тепер коваріаційну матрицю $\mathbf{D}^2(\hat{\mathbf{a}}_{(k)})$ випадкового вектора $\hat{\mathbf{a}}_{(k)}$ МНК-оцінок структурних параметрів $\mathbf{a}_{(k)}$ лінійної регресійної моделі з багатьма змінними. Використовуючи припущення моделі, отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2(\hat{\mathbf{a}}_{(k)}) &= E\left[\left(\hat{\mathbf{a}}_{(k)} - E(\hat{\mathbf{a}}_{(k)})\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{a}}_{(k)} - E(\hat{\mathbf{a}}_{(k)})\right)^T\right] = E\left[\left(\hat{\mathbf{a}}_{(k)} - \alpha_{(k)}\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{a}}_{(k)} - \alpha_{(k)}\right)^T\right] = \\ &= E\left[\left[\left(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}\right)^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot y_{(i)} - \alpha_{(k)}\right] \cdot \left[\left(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}\right)^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot y_{(i)} - \alpha_{(k)}\right]^T\right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= E\left(\left[(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot (\mathbf{X} \cdot a_{(k)} + \xi_{(i)}) - \alpha_{(k)}\right] \cdot \left[(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot (\mathbf{X} \cdot a_{(k)} + \xi_{(i)}) - \alpha_{(k)}\right]^T\right) = \\
 &= E\left(\left[(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \xi_{(i)}\right] \cdot \left[(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \xi_{(i)}\right]^T\right) = \\
 &= E\left((\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \xi_{(i)} \cdot \xi_{(i)}^T \cdot \mathbf{X} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1}\right) = \\
 &= \left((\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T\right) \cdot E(\xi_{(i)} \cdot \xi_{(i)}^T) \cdot \left(\mathbf{X} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1}\right) = \\
 &= \left((\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T\right) \cdot (\sigma^2 \cdot \mathbf{I}) \cdot \left(\mathbf{X} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1}\right) = \\
 &= \sigma^2 \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} = \sigma^2 \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1}.
 \end{aligned}$$

Отже остаточно:

$$D^2(\hat{\alpha}_{(k)}) = \sigma^2 \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1}.$$

Тому вектор $\hat{a}_{(k)}$ має багатовимірний нормальний розподіл з параметрами:

$$\hat{a}_{(k)} \Leftrightarrow N\left(a_{(k)}; \sigma^2 \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1}\right).$$

8. Оцінювання параметрів стохастичної структури.

Формула для коваріаційної матриці $D^2(\hat{\alpha}_{(k)})$ випадкового вектора $\hat{a}_{(k)}$ МНК-оцінок структурних параметрів $a_{(k)}$ лінійної регресійної моделі з багатьма змінними містить параметр σ^2 , значення якого зазвичай невідоме.

- Дисперсія $D(\xi_i) = \sigma^2$ випадкової складової ξ_i , згідно із загальною термінологією теорії економетричних моделей, називається *параметром стохастичної структури моделі*.

Інтерпретація випадкової складової в економетричній моделі не залежить від її форми чи кількості (K) присутніх у ній пояснювальних змінних: $X_{(k)} = [X_1, X_2, \dots, X_k]$. Тому всі зауваження, щодо процедури оцінки її розподілу у випадку моделі з однією змінною (підрозділ 1.2), дійсні і для моделі з багатьма змінними.

Оскільки послідовні реалізації $\{\xi_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ випадкової складової моделі для відповідних значень $\{x_{i(k)}, i = 1, 2, \dots, n\}$ вектора $X_{(k)}$ пояснювальних змінних невідомі, то емпіричною підставою для дослідження властивостей випадкової складової ξ_i буде вектор решт моделі, що визначаються формулою $e_{(i)} = y_{(i)} - \hat{y}_{(i)}$. Окремі координати цього вектора:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i, i = 1, 2, \dots, n,$$

є різницями між емпіричним (y_i) та теоретичним (\hat{y}_i) значеннями моделі.

Вектор $e_{(i)}$ решт моделі є (у певному сенсі) «найкращим» наближенням вектора значень $\{\xi_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ випадкової компоненти моделі. Таким чином, спираючись на методи параметричного оцінювання математичної статистики, можемо стверджувати, що основою для оцінки дисперсії $D(\xi_i) = \sigma^2$ випадкової складової моделі буде квадратична форма:

$$(e_{(i)})^T \cdot e_{(i)} = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

Цей евристичний висновок підтверджується застосуванням до розглянутої моделі методу максимальної правдоподібності [3]. Як і у випадку моделі з однією змінною (підрозділ 1.2), застосування цього методу дає оцінку σ^{2*} дисперсії σ^2 випадкової складової ξ_i моделі, що визначається за формулою:

$$\sigma^{2*} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n e_i^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

Оскільки $E\left(\sum_{i=1}^n e_i^2\right) = (n - K) \cdot \sigma^2$, то σ^{2*} буде зміщеною оцінкою.

Виконуючи очевидну модифікацію статистики σ^{2*} , приходимо до висновку, що незміщена оцінка параметра стохастичної структури ($\hat{\sigma}^2$) моделі лінійної регресійної з багатьма змінними визначається формулою:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - K} \cdot \sum_{i=1}^n e_i^2 = \frac{1}{n - K} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

1.9. Аналіз моделі з багатьма змінними: приклади та завдання для самоконтролю.

Економетрико-статистичні методи в дослідженні економічних процесів.

1. Постановка задачі в матричній формі. 2. Оцінювання структурних параметрів моделі. 3. Оцінювання параметрів стохастичної структури моделі. 4. Програма «Solver» аркушу «Excel»: оцінювання параметрів. 5. Точність оцінок структурних параметрів моделі. 6. Відповідність моделі емпіричним даним.

Маємо наступні числові дані:

$$\{(x_1 = 3; y_1 = 10), (x_2 = 4; y_2 = 15), (x_3 = 1; y_3 = 11), (x_4 = 6; y_4 = 18), \\ (x_5 = 10; y_5 = 22), (x_6 = 12; y_6 = 20), (x_7 = 7; y_7 = 14), (x_8 = 10; y_8 = 18), \\ (x_9 = 2; y_9 = 9), (x_{10} = 5; y_{10} = 13)\}.$$

Кожна пара (x_t, y_t) – це реалізація змінної Y (координата y_t) для відповідного значення (координата x_t) змінної X .

Припустимо, що між змінними X та Y існує лінійна залежність:

$$Y = b + a \cdot X.$$

Однак дані точки площини не лежать на одній прямій. Ця обставина пояснюється наступним чином.

- Емпіричні значення

$$x_1 = 3; x_2 = 4; x_3 = 1; x_4 = 6; x_5 = 10; x_6 = 12; x_7 = 7; x_8 = 10; x_9 = 2; x_{10} = 5$$

це визначені заздалегідь точні значення змінної X .

- Числа $\{y_t, t = 1, 2, \dots, 10\}$ – це *емпіричні* значення змінної Y , тобто результат спостереження змінної Y для встановлених значень змінної X $\{x_t, t = 1, 2, \dots, 10\}$.
- Вимірювання значень змінної Y під час спостереження неточні, тобто припускаємо, що:

$$y_t = b + a \cdot x_t + \xi_t, t = 1, 2, \dots, 10.$$

Похибка вимірювання ξ_t є випадковою величиною, що має наступні властивості:

- ✓ Розподіл похибок вимірювання ξ_t такий самий для всіх спостережень $t = 1, 2, \dots, 10$
- ✓ Похибки ξ_t та ξ_s для різних вимірювань ($t \neq s$) *некорельовані*, тобто

$$\text{Cov}(\xi_t, \xi_s) = 0, t, s = 1, 2, \dots, 10, t \neq s.$$

- ✓ $E(\xi_t) = 0, D(\xi_t) = \sigma^2, t = 1, 2, \dots, 10.$

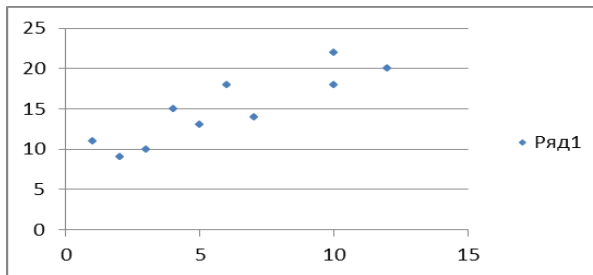


Рис. 1. Графік числових даних $\{(x_t, y_t), t = 1, 2, \dots, 10\}$ моделі.

1. Постановка задачі в матричній формі.

Завдання 1. Ввести до моделі нову штучну змінну X_1 , значення якої тотожно дорівнюють одиниці для всіх $n = 10$ спостережень:

$$X_1 \equiv 1.$$

Ввести позначення:

$$X_2 = X; b = a_1; a = a_2.$$

Записати лінійну залежність

$$Y = b + a \cdot X$$

змінної Y від однієї змінної X , у вигляді залежності

$$Y = a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2$$

змінної Y від вектора змінних $X_{(k)} = [X_1, X_2]$, $K = 2$.

$a_{(k)} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ – вектор коефіцієнтів правої частини моделі.

Лінійна залежність в матричній формі:

$$Y = X_{(k)} \cdot a_{(k)}.$$

Завдання 2. Утворити матрицю статистичних даних $[Y/X]$ = моделі:

$$y_t = a_1 \cdot x_{t1} + a_2 \cdot x_{t2} + \xi_t, \\ t = 1, 2, \dots, 10.$$

Відповідь:

[Y/X]		
Вектор $y_{(t)}$	Матриця X	
10	1	3
15	1	4
11	1	1
18	1	6
22	1	10
20	1	12
14	1	7
18	1	10
9	1	2
13	1	5

Нехай $\xi_{(t)} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$ – вектор випадкових доданків моделі, а $a_{(k)} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ –

вектор структурних параметрів моделі. Тоді у матричному запису модель приймає вигляд:

$$y_{(t)} = X a_{(k)} + \xi_{(t)}$$

2. Оцінювання структурних параметрів моделі.

Метод Найменших Квадратів.

Структурними параметрами моделі є коефіцієнти (a_1, a_2) .

Використовуючи *Метод Найменших Квадратів*, вектор оцінок:

$\hat{a}_{(k)} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix}$ знаходимо з умови ($n = 10$):

$$\sum_{t=1}^n (y_t - a_1 - a_2 \cdot x_t)^2 \rightarrow \min ,$$

Завдання 3. Обчислити оцінку $\hat{a}_{(k)}$ методу найменших квадратів вектора $a_{(k)}$ структурних параметрів лінійної регресійної з багатьма змінними.

Розв’язок. Оцінка $\hat{a}_{(k)} \approx a_{(k)}$ визначається формулою:

$$\hat{a}_{(k)} = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot y_{(i)} .$$

Відповідь: $a_{(k)} \approx \hat{a}_{(k)} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,7097 \\ 1,0484 \end{bmatrix} .$

Завдання 4. Використовуючи побудовану модель, визначити її *теоретичні* значення ($\{y^*, t = 1, 2, \dots, 10\}$) та додати їх до збудованого графіка *емпіричних* значень (Рис. 1).

Обчислення виконати у матричному вигляді за формулою:

$$\hat{y}_{(t)} = \mathbf{X} \cdot \hat{a}_{(k)} .$$

Відповідь:

$$(\hat{y}_{(t)})^T = \{11,855; 12,903; 9,758; 15; 19,194; 21,29; 16,048; 19,194; 10,806; 13,952\} .$$

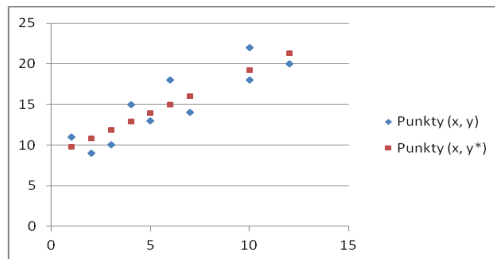


Рис. 2.

Завдання 5. Використовуючи послідовно функції:

«Додати лінію тренду» → «Формат лінії тренду»

аркушу «Excel», додати до збудованого графіка *теоретичну модель* а також, знайти *статистичні оцінки* (\hat{a} , \hat{b}) для *структурних параметрів* моделі (a , b).

Відповідь: Малюнок 3.

3. Оцінювання параметрів стохастичної структури моделі.

Завдання 6. Обчислити значення вектора *решити* моделі

$$e_{(t)} = \{e_t, t = 1, 2, \dots, n\}; e_{(t)} = y_{(t)} - \hat{y}_{(t)}.$$

Відповідь:

$$(e_{(t)})^T = \{-1,855; 2,097; 1,242; 3; 2,806; -1,29; -2,048; -1,194; -1,806; -0,952\}.$$

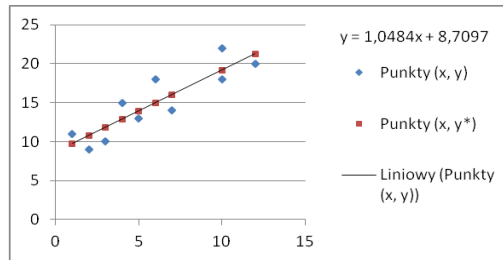


Рис. 3.

Знайти значення *незміщеної статистичної оцінки* $\hat{\sigma}^2$ для параметра σ^2 стохастичної структури моделі.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^n e_i^2 = \frac{1}{n-2} \cdot (e_{(t)})^T \cdot e_{(t)}.$$

Відповідь: $\sigma^2 \approx \hat{\sigma}^2 \approx 4,7137$;

4. Програма «Solver» аркушу «Excel»: оцінювання параметрів. Оцінювання структурних параметрів моделі.

Завдання 7. Розглядаючи оцінювання за допомогою *методу найменших квадратів* структурних параметрів (b ; a) моделі

$$y_t = b + a \cdot x_t + \xi_t, t = 1, 2, \dots, 10.$$

як задачу *НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ* і використовуючи програму “Solver” аркушу „Excel” знайти оцінки (\hat{b} ; \hat{a}).

Цільова функція задачі має вигляд:

$$F(b; a) = \sum_{t=1}^n (y_t - b - a \cdot x_t)^2 \rightarrow \min.$$

Відповідь: $b \approx \hat{b} = 8,7097$; $a \approx \hat{a} = 1,0484$.

Оцінювання параметру стохастичної структури моделі.

Завдання 8. Враховуючи те, що незміщена статистична оцінка $\hat{\sigma}^2$ для параметру σ^2 стохастичної структури моделі визначається формулою:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{b} - \hat{a} \cdot x_t)^2,$$

а також використовуючи результати роботи програми “Solver”, а саме – використовуючи знайдене оптимальне значення $F(\hat{b}; \hat{a})$ цільової функції:

$$F(\hat{b}; \hat{a}) = \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{b} - \hat{a} \cdot x_t)^2,$$

знайти числове значення $\hat{\sigma}^2$.

Відповідь: $\sigma^2 \approx \hat{\sigma}^2 \approx 4,714$;

5. Точність оцінок структурних параметрів моделі.

Завдання 9. Оцінити з якою *точністю* числа $\hat{a}_{(k)} = \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix}$ наближують невідомі значення параметрів $a_{(k)} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$ моделі, тобто оцінити різниці:

$$|\hat{b} - b|, |\hat{a} - a|.$$

Розв'язок. Вектор $\hat{a}_{(k)}$ визначає незміщені оцінки вектора $a_{(k)}$ структурних параметрів моделі лінійної регресійної з багатьма змінними, тобто:

$$E(\hat{b}) = b, E(\hat{a}) = a.$$

Тому, якщо

$$S^2(b) = D(\hat{b}) = E(\hat{b} - b)^2, \text{ та } S^2(a) = D(\hat{a}) = E(\hat{a} - a)^2$$

дисперсії оцінок \hat{b} та \hat{a} , то «середнє значення» різниць

$$|\hat{b} - b| \text{ та } |\hat{a} - a|$$

приблизно дорівнюють:

$$|\hat{b} - b| \approx S(b) = \sqrt{D(\hat{b})}; \text{ та } |\hat{a} - a| \approx S^2(a) = \sqrt{D(\hat{a})}.$$

Якщо виконуються прийняті відносно випадкових доданків ξ_t моделі припущення, то випадковий вектор $\hat{a}_{(k)}$ має двовимірний нормальний розподіл з параметрами $(a_{(k)}; \sigma^2 \cdot (X^T \cdot X)^{-1})$:

$$\hat{a}_{(k)} \Leftrightarrow N(a_{(k)}; \sigma^2 \cdot (X^T \cdot X)^{-1}).$$

При цьому коваріаційна матриця $\mathbf{D}^2(\hat{a}_{(k)})$ випадкового вектора $\hat{a}_{(k)}$:

$$\mathbf{D}^2(\hat{a}_{(k)}) = E((\hat{a}_{(k)} - a_{(k)}) \cdot (\hat{a}_{(k)} - a_{(k)})^T) = \begin{bmatrix} D(\hat{b}) & \text{Cov}(\hat{b}, \hat{a}) \\ \text{Cov}(\hat{a}, \hat{b}) & D(\hat{a}) \end{bmatrix}$$

визначається рівністю:

$$\mathbf{D}^2(a_{(k)}) = \sigma^2 \cdot (X^T \cdot X)^{-1}.$$

Дисперсії $S^2(b)$ та $S^2(a)$ оцінок \hat{b} та \hat{a} – це елементи на головній діагоналі матриця $\mathbf{D}^2(\hat{a}_{(k)})$. Тому замінивши незміщеною статистичною оцінкою $\hat{\sigma}^2$ невідоме значення параметра стохастичної структури моделі σ^2 , отримуємо наступну формулу для оцінки коваріаційної матриці $\mathbf{D}^2(\hat{a}_{(k)})$ вектора $\hat{a}_{(k)}$:

$$\mathbf{D}^2(a_{(k)}) \approx \mathbf{D}^2(\hat{a}_{(k)}) = \hat{\sigma}^2 \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1}.$$

Відповідь: $|\hat{b} - b| \approx 1,3564$; $|\hat{a} - a| \approx 0,195$.

$$(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 0,39032 & -0,0484 \\ -0,0484 & 0,00806 \end{bmatrix}; \mathbf{D}^2(\hat{a}_{(k)}) = \begin{bmatrix} 1,8399 & -0,22808 \\ -0,22808 & 0,03801 \end{bmatrix}$$

6. Відповідність моделі емпіричним даним.

Кількісною мірою ступеня згідності побудованої моделі з емпіричними даними є два множники R^2 та φ^2 що визначаються формулами:

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - \bar{y})^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}, \quad \varphi^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n y_t.$$

Ці множники змінюється в межах: $0 \leq R^2 \leq 1$; $0 \leq \varphi^2 \leq 1$.

Сума $S_Y^2 = \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2$ в знаменнику цих формул оцінює «повну

змінність» величини Y , тобто змінність емпіричних значень

$$\{y_t, t = 1, 2, \dots, n\}.$$

Слід зауважити, що у випадку лінійної моделі з багатьма змінними, збудованої з використанням методу найменших квадратів, справедлива наступна рівність:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n y_t = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n \hat{y}_t = \bar{\hat{y}},$$

тобто середнє значення емпіричних даних та середнє значення теоретичних значень, обчислених на основі збудованої моделі, співпадають.

Отже сума

$$S_{\hat{Y}}^2 = \sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - \bar{y})^2$$

в чисельнику R^2 дає оцінку «повної змінності» теоретичних значень $\{\hat{y}_t, t = 1, 2, \dots, n\}$, обчислених на основі збудованої моделі.

Тому R^2 вказує:

- В якій мірі зміни величини Y знайшли своє відображення в побудованій моделі, тобто яку частину від загальної «змінності» Y пояснює економетрична модель.

В чисельнику ϕ^2 знаходиться сума квадратів:

$$S_{\xi}^2 = \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2 = \sum_{t=1}^n e_t^2$$

решт моделі, тобто S_{ξ}^2 є мірою тієї частини від загальної «змінності» Q , які модель *не пояснює*. Отже ϕ^2 вказує:

- Яку частину від загальної «змінності» Q модель не пояснює.

Для лінійної моделі з багатьма змінними, збудованої з використанням методу найменших квадратів, справедлива наступна тотожність:

$$\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2 = \sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - \bar{y})^2 + \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2,$$

тобто: $S_Y^2 = S_{\hat{Y}}^2 + S_{\xi}^2$. А це означає, що для множників R^2 та ϕ^2 справедлива наступна тотожність:

$$R^2 + \phi^2 = 1.$$

Звідси простий висновок:

- Модель тим краще описує емпіричні дані, чим R^2 ближче до 1;
- Моделі тим краще описує емпіричні дані, чим ϕ^2 ближче до 0.

Завдання 10. Виконуючи обчислення у матричному вигляді, знайти наступні числові значення:

- Обчислити «повну змінність» емпіричних значень $\{y_t, t = 1, 2, \dots, n\}$:

$$S_Y^2 = \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2 = (y_{(t)} - \bar{y})^T \cdot (y_{(t)} - \bar{y}).$$

Відповідь: $S_Y^2 = 174$.

- Переконатись в справедливості наступної рівності:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n y_t = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n \hat{y}_t = \bar{\hat{y}},$$

Відповідь: $\bar{y} = 15$; $\bar{\hat{y}} = 15$.

- Обчислити «повну змінність» теоретичних значень $\{\hat{y}_t, t = 1, 2, \dots, n\}$:

$$S_{\hat{Y}}^2 = \sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - \bar{y})^2 = (\hat{y}_{(t)} - \bar{y})^T \cdot (\hat{y}_{(t)} - \bar{y}).$$

Відповідь: $S_{\hat{Y}}^2 = 136,29$.

- Обчислити сума квадратів решт моделі:

$$S_{\xi}^2 = \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2 = \sum_{t=1}^n e_t^2 = (e_{(t)})^T \cdot e_{(t)}.$$

Відповідь: $S_{\xi}^2 = 37,7097$

- Обчислити значення множників R^2 та φ^2 моделі та переконатись в справедливості наступної рівності:

$$R^2 + \varphi^2 = 1.$$

Відповідь: $R^2 = 0,7833$; $\varphi^2 = 0,2167$; $R^2 + \varphi^2 = 1$.

- Дати кількісну оцінку ступеня згідності побудованої моделі з емпіричними даними. Тобто кількісно оцінити, в якій мірі побудована модель пояснює зміни величини Y .

Відповідь: $R^2 = 0,7833$. Модель пояснює понад 78% змін Y .

1.10. Етапи розвитку фінансового ризик-менеджменту.

1. Нормативний та позитивний підходи.
2. Виділення методології в окрему дисципліну.
3. Етапи розвитку фінансового ризик-менеджменту.
4. Теоретичні основи фінансового ризик-менеджменту.

1. Нормативний та позитивний підходи.

В сучасних економічних та суспільно-політичних умовах проблеми, пов'язані з керуванням ризиком, істотно загострились. Підтвердженням цьому є безліч конкретних прикладів. Деякі серед них уже обговорювались. Тому спільними зусиллями спеціалістів в області математики, статистики, фінансової інженерії та менеджменту в останні роки була розроблена спеціальна методологія, що отримала назву «*фінансовий ризик-менеджмент*». Головна її ціль – успішне розв'язування сформульованих та подібних їм задач в сфері управлінням.

Необхідно наголосити, що ця методологія дозволяє успішно (в більшому або в меншому ступені) розв'язувати гострі практичні проблеми, що безпосередньо стосуються *фінансової безпеки*. Іншими словами, необхідно цю методологію розглядати з двох точок зору.

- Перша з них передбачає підхід *нормативний*, тобто обґрунтування необхідності ризик-менеджменту з точки зору конкретної *економічної теорії*, що стосується фінансових процесів.

З цієї точки зору можуть бути різні думки, судження та висновки. *Неокласична* теорія фінансів, наприклад, стверджує, що фінансовий ризик-менеджмент, про який йдеться, (чи будь-яка інша форма «менеджменту») взагалі позбавлена сенсу, оскільки є *зайвою* і *непотрібною*. Згідно з *базовими* припущеннями цієї теорії в умовах *повноти* і *досконалості* фінансових ринків таке управління не створює жодної *доданої вартості*.

В свою чергу центральне в цій теорії твердження Модоліані-Мюллера доводить, що найбільше, що можна сказати про будь-які дії, спрямовані на управління ризиком, так це те, що (в межах цієї теорії) вони ні на що не впливають, тобто не мають жодного значення.

- Другий підхід називається *позитивним*, і не звертає уваги на жодну з існуючих *теорій*, а описує *існуючу практику* застосування фінансового ризик-менеджменту.

Будь-яка теорія – це тільки теорія. Можна, очевидно, припускати, що фінансові ринки є *«повними»* та *«досконалими»*. Але якщо вони такі-ми не є (а саме це підтверджує практика), то від цього припущення вони *«повними»* та *«досконалими»* не стануть.

З цієї точки зору, спираючись на практичний досвід використання фінансового ризик-менеджменту, можна провести певну систематизацію та виділити кілька основних етапів запровадження її в функціонування фінансового ринку, а саме наступні періоди.

2. Виділення методології в окрему дисципліну.

Період функціонування фінансового ризик-менеджменту, як окремої сфери науково-практичної діяльності, зазвичай окреслюють, починаючи з 1973 року. Саме тоді відбулось кілька важливих подій, що створили необхідні передумови до формування методології ризик-менеджменту.

1. Першою і ключовою серед них можна назвати остаточне скасування в 1973 р. Бреттон-Вудської (*Bretton-Wood*) системи фіксованих курсів валют та перехід до вільно-ринкових курсів.

Це створило для банків ряд додаткових проблем, серед яких, зокрема, управління валютним ризиком та ризиком процентних ставок.

2. Другою важливою подією, яка значною мірою прискорила негативні процеси, пов'язані з функціонуванням фінансового ринку, було відкриття в 1973 р. в Сполучених Штатах, в Чикаго біржі по *продажу* опціонів (*Chicago Board Options Exchange*), одного з типів *деривативів*, чи *похідних цінних паперів*.

До відкриття цієї біржі операції з опціонами та іншими похідними цінними паперами відбувалися на *позабіржовим* ринку. В даний момент біржа в Чикаго – одна з найбільших з точки зору вартості *деривативів*, які там знаходяться в обігу (продаються та купуються).

3. Якщо дві попередні події були пов'язані з *законодавчими* та *організаційними* рішеннями в фінансовій сфері, то третя має безпосередній зв'язок з *методологічним забезпеченням* управління ризиком.

В 1973 р. були опубліковані *знамениті* наукові праці Ф. Блека, М. Шоулса та Р. Мертона (*Black F., Scholes M., Merton R.*), присвячені визначенню ціни *європейських опціонів*.

Ці праці були сприйняті в науковому середовищі, як теоретична основа *оцінки ризику*, що був пов'язаний з обігом на фінансовому ринку *вторинних*, тобто *похідних цінних паперів*. Дуже швидко, завдяки зусиллю величезної групи авторів, що спирались на результати цих праць та використовували запропоновані в них міри, було опрацьовано велику кількість різноманітних *моделей управління ризиком* на фінансовому ринку *деривативів*, тобто математичних моделей *ризик*у для похідних цінних паперів.

Таким чином в 1973 р. була започаткована нова, окрема науково-практична дисципліна, що пізніше отримала назву «*фінансовий ризик-менеджмент*». В її подальшому розвитку (починаючи від 1973 р.) фахівці виділяють *три* етапи. Головний критерій їх визначення – це, перш за все, введенням нових *підходів* та розробка нових *методів* оцінки ризику.

3. Етапи розвитку фінансового ризик-менеджменту.

Загальна наукова дисципліна, яку часто називають «*ризик-менеджментом*» (або – «*прийняття рішень в умовах невизначеності*»), це окремий, спеціальний розділ теорії прийняття рішень (*decision analysis*). Тому її спеціальна частина, що пов'язана з фінансами («*фінансовий ризик-менеджмент*») – це теж математична дисципліна, яка має свій власний предмет дослідження та необхідні для цього методи.

З іншого боку – це *міждисциплінарні* науки:

- По-перше, вони користуються доробком інших розділів математики;
- Крім того, граничать з цілою низкою *соціально-економічних, юридичних, екологічних* наук; тощо.
- Тісно пов'язані з *психологією* та *адмініструванням* (в значенні *організації* та *управління* різними процесами).

Підсумовуючи процес становлення та розвитку *фінансового ризик-менеджменту* за останні кілька десятиліть, можна умовно виділити наступні основні його етапи.

- Перший етап – це **кінець 70-тих років** та **початок 90-тих років**. В цей період відбулась своєрідна *революція* з точки зору розробки *мір*, які використовувались до кількісної оцінки рівня ризику на практиці. Головною подією було створення та введення в практику управління ризиком першої версії кількісної міри ризику *VaR (value at risk)*.

В своїй першій версії ця міра була опрацьована до вимірювання величини *ринкового* ризику. Тому завершенням першого етапу розвитку

фінансового ризик-менеджменту вважається 1994 рік, коли в Інтернеті банком *J.P.Morgan* були опубліковані:

- Методика підрахунку *VaR* для величини *ринкового* ризику;
- Документацію системи *Risk-Metrics*;

Крім того банк створив можливість *безкоштовного доступу* та *використання* цієї системи.

- Другий етап – це **друга половина 90-тих** років.

Цей етап характеризується тим, що методологія *VaR* була поширена для вимірювання величини *кредитного* ризику.

В 1997 році банк *J.P.Morgan* розробив та опублікував своєрідне продовження системи *Risk-Metrics* – нову систему *Credit-Metrics*. В результаті виник «*інтегральний ризик-менеджмент*», тобто можливість визначення за допомогою методики *VaR* *загальної* величини двох типів ризиків – *ринкового* та *кредитного*.

- Третій етап розпочався в **кінці 90-тих** років та триває і нині.

Характерними для цього етапу є спроби поширити методологію *VaR* до вимірювання різних відмін *операційного* ризику. Тобто опрацьовуються (і *небезуспішно*) різноманітні версії методики *VaR*, за допомогою яких можна вимірювати окремі типи *операційного* ризику.

Оскільки з точки зору успішного функціонування підприємства найголовнішими вважаються три види ризику: *ринковий*, *кредитний* та *операційний*, то успішний розв'язок проблеми створення версії «*VaR-операційний*» буде одночасно означати розв'язок проблеми створення *інтегральної* системи управління ризиком в масштабі підприємства.

- Таким чином буде створена можливість одночасно *охопити* основні види ризику та оцінити пов'язану з ними *загальну* загрозу, застосовуючи одну універсальну міру.

Ці види ризику необхідно *постійно контролювати*, тому, що вони *реально загрожують існуванню підприємства*.

4. Теоретичні основи фінансового ризик-менеджменту.

Фінансовий ризик-менеджмент – це окремий, спеціальний розділ «*загального*» ризик-менеджменту, про який вже була мова раніше. В свою чергу, з точки зору математики, «*загальна*» наукова дисципліна, яку часто називають «*ризик-менеджмент*» (або – «*прийняття рішень в умовах невизначеності*»), це окремий, спеціальний розділ «*загальної*» теорії прийняття рішень (*decision analysis*).

Тому, як загальний розділ («*ризик-менеджмент*»), так і його спеціальну частину, що пов'язана з фінансами («*фінансовий ризик-менеджмент*») можна вважати окремимит спеціальними розділами прик-

ладної математичними. Вони мають свій власний предмет дослідження та необхідні для цього методи, що й робить їх самостійними дисциплінами.

З іншого боку – це *міждисциплінарні науки*:

- По-перше, вони користуються доробком інших розділів математики;
- Крім того, граничать з цілою низкою *соціально-економічних, юридичних, екологічних наук*;
- Тісно пов'язані з *психологією* та *адмініструванням* (в значенні організації та управління різними процесами).

Ймовірно, що слово «менеджмент» (яке присутнє в їх «другій» назві), є наслідком їх спорідненості з «керуванням» певними процесами та чіткої *практичної спрямованості* всіх понять та методів.

Фінансовий ризик-менеджмент необхідно розглядати з двох точок зору. З одного боку – це спеціальний розділ (тобто *окремий випадок*) *ризик-менеджменту*. Це означає, що він користується доробком загальної теорії прийняття рішень в умовах невизначеності. І необхідно виконати відповідну *інтерпретацію* всіх її понять та методів таким чином, щоб *приспосувати* їх до специфіки завдань із сфери фондового ринку. Пам'ятаючи при цьому, що банки, інвестиційні фонди і безліч інших суб'єктів фінансового ринку, перш за все, хвилюють проблеми *фінансової безпеки*. З іншого боку фінансовий ризик-менеджмент має одну особливу властивість, що притаманна тільки цьому «спеціальному розділу»:

- Фінансовий ризик-менеджмент (на відміну від інших методологій управління фінансовим ризиком) в якості *універсальної міри ризику* використовує *ринкові ціни*.

Вона і виділяє його в окрему дисципліну. Головною проблемою теорії прийняття рішень в умовах невизначеності є *вдалий вибір* відповідної *міри ризику*. В математичному плані ця проблема рівнозначна формалізації фактору *невизначеності*. Як правило, в ризик-менеджменті з цією метою використовуються поняття та методи *теорії ймовірностей*.

В даний момент відомі *чотири* способи (або *типи*) інтерпретації ймовірності, а саме: *класична; емпірична; аксіоматична; та суб'єктивна*. «Загальна» теорія прийняття рішень (*ризик-менеджмент*), від якої «*відокремився*» фінансовий ризик-менеджмент, часто використовує *суб'єктивну* інтерпретацію ймовірності. Яскравим прикладом цього може бути теорія корисності Неймана-Монгенштерна.

- Фінансовий ризик-менеджмент дає можливість (в більшості випадків) визначити необхідні *ймовірності* та описати *відношення* ОПР до ризику, використовуючи з цією метою *ринкові ціни*. На практиці це означає *кількісне* вимірювання *ефективності* прийнятих рішень.

1.11. Криза фінансової системи та цифрові гроші.

1. Перші біткойн-транзакції. 2. Ринкова вартість біткойна. 3. Біткойн як платіжний засіб.

1. Перші біткойн-транзакції.

В жовтні 2008 р. Сатоші Накамото опублікував статтю під назвою:

«*Bitcoin BTC: A Peer-toPeer Elektronik Cash System.*»

В ній з'явилося повідомлення, що принципові проблеми створення біткойну розв'язані.

Незабаром Сатоші Накамото запустив в дію систему «*Блокчейн Біткойн*».

Ця подія відбулась 3 січня 2009 р.

На той момент крім її засновника Сатоші Накамото в мережі *Біткойн* ніяких інших учасників не було. Тому перший блок «*блокчейн біткойну* Накамото» «*намайнив*» саме він і отримав за це перші 50 біткойнів, що з'явилися в мережі.

Потім він створив ще кілька, використовуючи для цього звичайний комп'ютер.

Майже відразу вслід за Сатоші Накамото в мережі з'явився другий учасник – американський програміст і криптограф Хел Фінні.

Після цього кількість учасників в мережі почала швидко збільшуватись.

На початковому рівні складності, яку встановив в момент запуску системи Сатоші Накамото, звичайного комп'ютерного процесора вистачало, щоб в середньому за 10 хвилин знаходити новий блок.

Вже через 9 днів після запуску мережі, 12 січня 2009 р. Сатоші Накамото спільно з Хелом Фінні здійснили в ній першу операцію.

- В якості тесту Сатоші Накамото відправив на адресу Хела Фінні 10 біткойнів. Цю транзакцію була включена в блок під номером #170.

Це була історично перша *біткойн-транзакція* між двома учасниками системи *Блокчейн Біткойн*.

На перших етапах функціонування мережі участь в ній багато хто з «*майнерів*» розглядали, як гру. Тому вони відповідним чином, легковажно поводитися з добутими цифровими монетами: виконували тестові перекази один одному, дарували, викидали за непотрібністю або просто губили разом з секретним ключем від свого цифрового гаманця.

2. Ринкова вартість біткойна.

Однак активний старт мережі сприяв тому, що вже 5 жовтня 2009 р. біткойн отримав свою першу «класичну» монетарну ринкову оцінку, що спиралась на реально здійснені операції.

- За \$1 на фінансовому ринку давали 1309 біткоїнів!

Тобто одна монета коштувала на початку свого «фінансового шляху» приблизно 0,08 цента.

Перша торгова площадка для обміну біткойна на фіатні гроші з'явилася **6 лютого 2010 р.** Це була біржа «*Bitcoin Market*». Однак початковий період торгівлі біткойном був головним чином пов'язаний з біржею «*Mt.Gox*», що відкрилася 17 липня 2010 р.

Лише в лютому 2011 р. вартість 1 біткойна досягла 1\$. Перший «бум» торгівлі біткойном, коли її вартість стрімко зростала, припадає на 2011 – 2013рр.:

- В листопаді 2013р. його курс «пробив» позначку в \$1200 за один біткойн.

Але навіть тоді передбачити, що менш ніж через 10 років, на весні 2021 р. вартість однієї монети перевищить \$64000 було так само неймовірно, як з *першої спроби* відгадати «золотий хеш».

Якщо проглянути історію досягнення цієї позначки, то варто виділити *кінець* 2017р. В *крипто-товаристві* з'явився навіть новий термін «*хайп*», яким тоді характеризували ситуацію, що склалася навколо *блокчейн-індустрії*.

Походить він від англійського слова «*hure*», що означає «*галас*», «*ажіотаж*», або також «*нав'язлива реклама*».

Тоді дорожчали всі *криптовалюти*, але особливо – *біткойн*.

- Перед (католицьким) Різдом 2017 р. його вартість перевищила відмітку \$20000 за один біткойн!

Однак вже *початок* 2018р. відзначився істотною корекцією цінового курсу:

- На *кінець* 2018р. біткойн втратив 75% своєї ринкової вартості!

Після того, як біткойн отримав серйозну оцінку фінансового ринку, володарі значної кількості монет, легко добутих ними на початку функціонування мережі, раптом стали *дуже заможними* людьми.

➤ Сам таємничий Сатоші Накамото, який по останнім оцінкам має біля 700000 монет, в періоди «*ринкових рекордів*» біткойна потрапляє до першої сотні рейтингу журналу *Forbes*.

2. Біткойн як платіжний засіб.

В даний момент біткойн та інші криптовалюти (альткоіни, яких вже більше, ніж 2000) – це один із важливих елементів фінансового ринку. Вартість біткойна не є сталою, а визначається економічною ситуацією та станом валютного ринку. Як і у випадку будь-якого іншого фінансового інструменту, ціна біткойна породжується згодою співтовариства прийняти його у якості *обмінної вартості*.

Створюючи *блокчейн біткойн* Сатоші Накамото склав набір правил, що регламентують роботу мережі («*протокол*»), в якому відносно *вартості* біткойна було записано наступне:

- З метою запобігання інфляції вартості біткойна для їх загальної кількості встановлено верхню межу. Вона становить 21 мільйон біткойнів.
- Кожен біткоїн ділиться до восьмого десяткового знаку.
- Найменша сума, що може бути передана в мережі становить 10^{-8} біткойна, (тобто 0,00000001 біткойна).

На честь винахідника валюти в співтоваристві біткойн цю квоту названо «*сатоші*».

- 1 біткойн = 1000 мілібіткойнів;
- 1 біткойн = 1000 000 мікробіткойнів, або бітів;
- 1 біткойн = 100 000 000 сатоші.

Обмежуючи емісію біткоіна Накамото в першу чергу дбав про захист від інфляції. При цьому він припускав (*і не помилився!*), що його вартість буде суттєво зростати. Тому навіть, якщо коли-небудь вартість одного сатоші стане рівною одному центу, то загальна вартість всіх монет біткоін буде становити біля \$21 трлн., що цілком достатньо, аби бути *масовим платіжним засобом* в світовому масштабі.

Оскільки біткоїн є *децентралізованими* цифровими грошима і при цьому не існує єдиного емісійного центру контролюваного якоюсь державою, поки що про визнання його офіційним платіжним засобом не йдеться.

- Такі питання вирішуються на рівні окремих держав – одні визнають *криптовалюти*, інші – ні, одні *сприяють* їх розвитку та поширенню, інші – *не звертають уваги*, а деякі *жорстко забороняють*.

Тим не менше цифровими грошима (подібно як і *фіатними*) можна оплачувати всі без винятку товари та послуги, а технологія *блкчейн* дає можливість реалізувати це на практиці.

І якщо сьогодні покупка товарів та послуг за *криптовалюти* не отримала ще належного поширення, то цей процес *поволі*, але *впевнено* завойовує все нові і нові сфери і, без сумніву, незабаром займе своє достойне місце в світовому товарно-грошовому обігу.

Розділ 2

Методи дослідження динаміки економічних явищ

2.1. Загальні поняття теорії статистичного прогнозування..

1. Передбачення та прогноз. 2. Статистичний прогноз. 3. Якість прогнозів. 4. Загальна схема процедури прогнозування. 5. Типи прогнозів та кількісне вимірювання точності. 6. Міри точності прогнозів *ex-post*. 7. Дослідження якості прогнозів *ex-post*. 8. Структура середньоквадратичної помилки прогнозу.

1. Передбачення та прогноз.

Теорія прогнозу, як і будь-яка інша окрема галузь науки, використовує певний набір характерних для неї понять і припущень. Обговоримо деякі найважливіші з них.

Вихідними, первинними поняттями теорії прогнозу є саме поняття «передбачення» та «прогноз». Поняття «передбачення» є більш широким, ніж поняття «прогнозування» в тому сенсі, що кожний прогноз – це також передбачення. Однак передбачення має ряд додаткових властивостей, тому не кожне передбачення можна вважати прогнозом.

В теорії прогнозу, як правило, всі явища мають часовий вимір.

- Момент визначення прогнозу зручно трактувати як «зараз» тобто *теперішній момент*.
- *Минулим* називаємо події більш *раннього часу* по відношенню до часу, в який робиться прогнозування.
- У свою чергу, *майбутнім* називають події, які відбуваються *пізніше* по відношенню до часу, в який робиться прогнозування.

Як і в математичній статистиці, основою для будь-яких прогностичних висновків є *емпіричні дані*, які в теорії прогнозування називаються *передумовами*.

- *Передбачення майбутнього* – це рішення щодо подій, які відбудуться *пізніше*, ніж акт передбачення, на основі інформації про минуле.
- Якщо *передумови* не надано або зв'язок між *передумовами* та висновком відсутній, то маємо справу з *нераціональним* передбаченням майбутнього.
- З *раціональними* передбаченням майбутнього маємо справу тоді, коли основою для передбаченням є певні *передумови*, що належать до минулого, а *рішення* – це логічний процес переходу від передумов до висновків.

Коротко різницю між поняттями «передбачення» та «прогноз» можна сформулювати наступним чином:

- *Прогнозування* – це *раціональне, наукове передбачення* майбутніх подій.

2. Статистичний прогноз.

Прочитуємо одне з чисельних визначень поняття «*статистичний прогноз*»:

- Статистичним прогнозом будемо називати кожне *судженням*, правдивість якого є *випадковою* подією, *ймовірність* цієї події відома і достатньо *висока* для практичних цілей.

Метою цих лекцій є *соціально-економічні* прогнози. Тому вкажемо основні *властивості* таких прогнозів та їх найважливіші *характеристики*, тим самим зробивши приведені вище визначення дещо *точнішим*.

- ✓ Перш за все, прогноз повинен стосуватися *чогось конкретного*, якогось конкретного об'єкта (об'єднання чи системи), якими можуть бути: *країна, регіон, підприємство, людина* тощо. Оскільки мова про *економічне прогнозування*, то в згаданих об'єктах повинні відбуватися *соціально-економічні явища*.
- ✓ Якщо змінна, що описує передбачуване явище, є *кількісною* змінною, то «*подія*» або «*судження*», про яке йдеться у вищезгаданому визначенні прогнозу, полягає в тому, що «*змінна приймає певний стан, виражений числом*».
- ✓ У випадку *якісної* змінної прогноз – це «*точний словарний опис цієї змінної*».
- ✓ Майбутнє, якого стосується прогноз, має бути *чітко визначеним*, вказавши відповідний *момент* (або *період*) або визначивши прогнозоване явище *певними обставинами*.
- ✓ Повинна бути запевнена емпірична перевірка прогнозу: необхідно мати можливість *вчасно* перевірити, *відбулася* подія, згадана у визначеннях прогнозу, чи ні.

Підсумовуючи, приходимо до висновку, що під поняттям «*статистичний прогноз*» будемо розуміти *судження* з такими властивостями:

- Сформульоване з використанням *досягнень науки*.
- Відноситься до *конкретного* майбутнього.
- Має можливість *емпіричного* підтвердження.
- *Непевне*, але *прийнятне*.

3. Якість прогнозів.

Якість прогнозу тісно пов'язана з його *точністю*. Згідно з визначенням:

- Прогноз – це *непевне, але прийняте* судження. Тобто емпірична перевірка даного прогнозу може виявити відмінності між прогнозом і реальністю.

Іншими словами:

- Прогноз обтяжений *помилками*, повністю усунути які ніколи *неможливо*.

Існує багато критеріїв для перевірки *раціональної оптимальності* прогнозів. Представимо декілька основних способів *вимірювання помилки прогнозу* та побудованих на їх основі методів *оцінки точності, обґрунтованості*, а отже, і *якості* прогнозів. З цією метою введемо декілька загальних позначень.

- Прогнозовану змінну, тобто економічний показник, що є метою дослідження, позначимо великою літерою Y .
- Спостереження прогнозованої змінної Y , на яких ґрунтуються дослідження, позначатимуть малі літери з індексами (y_i).
- Зазвичай індекс i має *часову інтерпретацію* і позначає i -тий по порядку момент (або період) спостереження.

У загальному ж випадку глумачення значення y_i залежить від характеру статистичних даних, тобто характеру *передумов*.

Припустимо, що загальна кількість спостережень прогнозованої змінної дорівнює T : $\{y_1, y_2, \dots, y_T\}$.

Тоді інтервал $i \in \{1, 2, \dots, T\}$, називається:

- Інтервалом, *доступним* для спостереження.

Відповідно інтервал $\tau > T$ називають:

- Інтервалом, *недоступним* для спостереження.

Задачу визначення прогнозу можна сформулювати наступним чином

- Знаючи значення $\{y_i, i = 1, 2, \dots, T\}$ прогнозованої змінної Y з інтервалу, доступного для спостереження, слід визначити прогноз цієї змінної на період $\tau > T$, з недоступного для спостереження діапазону.

4. Загальна схема процедури прогнозування.

Якщо Y^* позначає змінну, що розглядається як прогноз змінної Y , то y^*_i позначатиме *значення* прогнозу змінної Y на період i .

Загальна схема для прогнозування кількісних змінних за допомогою формальних моделей, як правило, виглядає наступним чином:

- ✓ Інтервал $\{1, 2, \dots, T\}$ доступний для спостереження, ділиться на дві частини: $\{1, 2, \dots, n\} \cup \{n + 1, n + 2, \dots, T\}$.
- Перша – це інтервал $\{1, 2, \dots, n\}$ *побудови* прогностичної моделі;
- Друга – це інтервал $\{n + 1, n + 2, \dots, T\}$ *емпіричної перевірки* прогнозу.

Емпіричні дані $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ використовуються для побудови формальної моделі прогнозування. Таким чином реалізується *етап діагностики минулого* в загальній процедурі прогнозування.

- ✓ Перш ніж побудована прогностична модель буде використана для визначення прогнозу y^*_τ змінної Y на період $\tau = T + k$, що належить до інтервалу, недоступного для спостереження, слід перевірити, чи підходить вона для цього, чи ні.

Тому деякі значення змінної прогнозування, що спостерігалися в минулому, а саме значення $\{y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_T\}$, не використовуються для побудови формальної моделі, а служать до перевірки прогностичних властивостей побудованої моделі. Відбувається це наступним чином:

- 1) Визначаються відповідні прогнозовані значення $\{y_{n+1}^*, y_{n+2}^*, \dots, y_T^*\}$, на основі побудованої моделі.
- 2) Обчислюються та аналізуються значення різноманітних *мір точності* кількісних прогнозів.

З цього приводу інтервал $i = n + s, s = 1, 2, \dots, S, (T = n + S)$ називається інтервалом *емпіричної перевірки* прогнозу.

Слід при цьому зауважити, що іноді (як, наприклад, у випадку *адаптивних моделей*, що будуть розглядатися в наступних підрозділах) немає необхідності в такому поділі, оскільки «*послідовний характер*» цих моделей дозволяє використовувати *всі* наявні дані для емпіричної перевірки прогностичних властивостей моделі (тобто $T = n$).

5. Типи прогнозів та кількісне вимірювання точності.

На практиці розрізняють два типи прогнозів:

- ✓ Прогноз, що називають «*прогнозом ex-post*», тобто зроблений в межах інтервалу, доступного для спостереження, коли *відомі* фактичні значення прогнозованої змінної Y .
- ✓ Прогноз, що називають «*прогнозом ex-ante*» (*nonпередній* прогноз), на період, що належить до майбутнього, і є недоступним для спостереження, а значення прогнозованої змінної Y *невідоме*.

Основою для визначення більшості *мір*, що використовуються на практиці для оцінки точності «*прогнозів ex-post*» є *безумовна похибка* прогнозу в момент t , яка визначається як різниця:

$$e_t = y_t - y_t^*.$$

Оскільки прогноз *ex-post* визначається для кількох моментів, що належать до інтервалу *емпіричної перевірки* прогнозу, то окремі *міри* відрізняються одна від одної лише «*способом агрегації*» помилок e_t .

У випадку кількісного прогнозу *ex-post*, який визначається *після* того моменту, на який було визначено прогноз, його *точність* можна виміряти використовуючи *безумовну похибку прогнозу* e_t . Однак треба підкреслити, що визначення *якості* прогнозу – завдання більш складне, і воно не обмежується лише вимірюванням того, наскільки *близькі* спостережувані значення прогнозованої змінної Y до їх прогнозу.

- На *якість* прогнозу, перш за все, мають вплив *наслідки рішень*, що приймаються на його основі.

Тому серед великої кількості існуючих мір точності прогнозу *ex-post*, жоден не завоював домінуючого положення.

Практика використання цих мір показує, що вони висвітлюють різні особливості розглянутого прогнозу, характеризуючи його з різних ракурсів. Аналіз та порівняння значень різних мір точності прогнозування може дати багато корисної інформації про *якість моделі*, на основі якої цей прогноз визначено. Це, в свою чергу, дозволяє відповідним чином скорегувати ці моделі.

6. Міри точності прогнозів *ex-post*.

➤ Середня безумовна похибка прогнозу *ex-post* в діапазоні верифікації (англ. абревіатура *ME* – *mean error*):

$$ME = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (y_{n+s} - y^*_{n+s}).$$

➤ Відносна помилка прогнозу *ex-post* в момент t визначаються формулою:

$$\psi_t = \frac{y_t - y^*_t}{y_t} \cdot 100\% .$$

➤ Середня відносна похибка прогнозу *ex-post* в діапазоні верифікації (англ. абревіатура *MPE* – *mean percentage error*).

$$MPE = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \frac{y_{n+s} - y^*_{n+s}}{y_{n+s}} \cdot 100\% .$$

Показники *ME* або *MPE* мають очевидний недолік:

- При обчисленні середнього арифметичного безумовних помилок в інтервалі перевірки *позитивні* (із знаком +) і *негативні* (із знаком –) помилки можуть взаємно *редукуватися* (скорочуватись), що буде спричиняти *необґрунтоване зменшення значень ME або MPE*.

Тому неможливо використовувати лише їх для вимірювання точності прогнозу. Однак у поєднанні з іншими, позбавленими цієї особливості, показники *ME* та *MPE* можуть надати багато корисної інформації, яка характеризує прогностичну модель.

До «інших» показників, що мають широке практичне використання, належать наступні. Аналогічно до визначення *безумовної* похибки e_t прогнозу в момент t , введемо *абсолютну безумовну* похибку e^+_t прогнозу в момент t :

$$e^+_t = |y_t - y^*_t|.$$

- Середня абсолютна безумовна похибка прогнозу *ex-post* в діапазоні верифікації (англ. абревіатура *MAE* – *mean absolute error*) визначається за формулою:

$$MAE = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S |y_{n+s} - y_{n+s}^*|.$$

- Абсолютна відносна помилка прогнозу *ex-post* в момент t , визначається за формулою:

$$\psi_t^+ = \left| \frac{y_t - y_t^*}{y_t} \right| \cdot 100\%.$$

- Середня абсолютна відносна похибка прогнозу *ex-post* в діапазоні верифікації (англ. абревіатура *MAPE* – *mean absolute percentage error*) визначається формулою:

$$MAPE = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left| \frac{y_{n+s} - y_{n+s}^*}{y_{n+s}} \right| \cdot 100\%.$$

7. Дослідження якості прогнозів *ex-post*.

З якістю прогнозів пов'язані такі поняття, як «оптимальний прогноз» або «прогноз раціональних очікувань». Визначення подібних понять передбачає, між іншим:

- Відсутність у помилці такого прогнозу *систематичної складової*.

Ця помилка має бути «виключно випадковою». Формально це означає, що математичне сподівання похибки прогнозу e_t в будь-який момент t дорівнює нулю.

На практиці це означає, що спостережувані значення похибок e_t повинні мати різні знаки. Порівняння помилок *ME* та *MAE* (а також *MPE* та *MAPE*) дозволяє встановити це.

- Якщо абсолютні значення *ME* та *MAE* (*MPE* та *MAPE* відповідно) «близькі», це означає, що прогнозовані значення *систематично занижені*, або *систематично завищені*.
- У випадку, коли абсолютні значення *ME* та *MPE* значно нижчі, ніж *MAE* та *MAPE* відповідно, маємо справу з *незміщеним* прогнозом (тобто емпіричні значення помилок e_t мають різні знаки).

На відміну від *ME* та *MPE*, *MAE* та *MAPE* можуть використовуватися як *міри точності прогнозу* і часто використовуються для цього.

8. Структура середньо-квадратичної помилки прогнозу.

Іноді ми стикаємося з ситуаціями, коли виникнення *незвично великих* помилок вважається особливо небажаним. Наявність таких похибок можна визначити, проаналізувавши *середньо-квадратичну* помилку *MSE* та порівнявши корінь з цієї помилки з помилкою *MAE*.

➤ Середньо-квадратичну помилку прогнозу *ex-post* в діапазоні верифікації (англ. *MSE – mean square error*).

$$MSE = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (y_{n+s} - y^*_{n+s})^2.$$

Найважливіша перевага помилки прогнозу *MSE* полягає в тому, що крім вимірювання *точності прогнозу*, вона також дозволяє встановити *причини помилок*. Це можна зробити, розклавши середньо-квадратичну помилку на три складові.

Міра *MSE* – це статистика, яка використовується для вимірювання «*близькості*» між множинами

$$\{y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_T\} = \{y_{n+s}, s = 1, 2, \dots, S\},$$

та

$$\{y^*_{n+1}, y^*_{n+2}, \dots, y^*_T\} = \{y^*_{n+s}, s = 1, 2, \dots, S\}.$$

Введемо наступні позначення:

$$\bar{y} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S y_{n+s}; \text{ та } \bar{y}^* = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S y^*_{n+s}.$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (y_{n+s} - \bar{y})^2;$$

та

$$\sigma_{Y^*}^2 = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (y^*_{n+s} - \bar{y}^*)^2.$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} \text{ та } \sigma_{Y^*} = \sqrt{\sigma_{Y^*}^2}.$$

$$r_{YY^*} = \frac{\sum_{s=1}^S (y_{n+s} - \bar{y})(y^*_{n+s} - \bar{y}^*)}{\sqrt{\sum_{s=1}^S (y_{n+s} - \bar{y})^2 \cdot \sum_{s=1}^S (y^*_{n+s} - \bar{y}^*)^2}}.$$

Справедлива наступна рівність:

$$MSE = (\bar{y} - \bar{y}^*)^2 + (\sigma_Y - \sigma_{Y^*})^2 + 2\sigma_Y \cdot \sigma_{Y^*} \cdot (1 - r_{YY^*}),$$

Чи

$$U^M + U^S + U^C = 1,$$

де

$$U^M = \frac{(\bar{y} - \bar{y}^*)^2}{MSE}.$$

Доданок U^M вимірює зміщення прогнозу, тобто відхилення середнього спостережуваного значення від середнього прогнозованого значення.

$$U^S = \frac{(\sigma_Y - \sigma_{Y^*})^2}{MSE}.$$

Доданок U^S вимірює те, наскільки добре модель відображає динаміку змінної прогнозування Y , тобто її *ступінь змінності*. Ці два доданки характеризують *систематичну похибку*: великі значення цих коефіцієнтів можуть спричинити корекцію моделі прогнозування з метою їх зменшення.

$$U^C = \frac{2\sigma_Y\sigma_{Y^*}(1 - r_{YY^*})}{MSE}.$$

Доданок U^C вимірює *несистематичну похибку*, тобто оцінює помилку, якої неможливо уникнути, а також визначає розмір помилок, пов'язаних з *фактичним напрямком* зміни Y (тобто з вгадуванням її *тенденції розвитку*).

2.2. Методи дослідження кон'юнктури фінансового ринку.

1. Теорія економічного аналізу – суть та завдання.
2. Фактори та їх класифікація.
3. Причинно-наслідкові зв'язки в економічних процесах.
4. Ринкова кон'юнктура та її вплив на економічну діяльність.
5. Ринок: потреба та попит.
6. Економічна статика та динаміка ринку.
7. Динамічна та локальна рівновага.
8. Стохастичний характер локальної рівноваги.

Ефективне функціонування фінансового ринку суттєво впливає на стан економіки та сприяє прискоренню соціально-економічного розвитку. Тому проблема оптимізації структури фінансового ринку є однією з основних для сучасної науки. Причому у її вирішенні необхідно використовувати не лише економічні дисципліни, *безпосередньо пов'язані з фінансами*, а всі наявні економічні знання, адже фінансові відносини охоплюють усі сфери соціально-економічного життя.

Надзвичайно важливу роль в оптимізації структури фінансового ринку відіграють *економетричні дисципліни*, тобто науки, що використовуються для вивчення економічних явищ *математичними та статистичними* методами. Ці методи, зокрема, можуть бути дуже корисними та результативними з точки зору *ефективного управління* фінансовими ринками і їх елементами.

1. Теорія економічного аналізу – суть та завдання.

Сформульована задача *ефективного управління* елементами фінансових ринків може бути яскравим прикладом (серед величезної кількості подібних за своєю суттю практичних проблем), що спонукали появу на протязі кількох останніх десятиліть нової окремої наукової економічної дисципліни під назвою «*Теорія економічного аналізу*». Це була спроба систематизувати та поєднати різноманітні (не обов'язково економічні) наукові дисципліни, з метою використання їх методів та дослідницьких підходів до вивчення господарських процесів.

- Предметом такого аналізу повинна бути *вся доступна досліднику економічна дійсність*, що постійно розвивається і змінюється, вступаючи у взаємозв'язки з іншими явищами та соціальними процесами.
- Метою ж досліджень мало бути забезпечення *можливості всебічного аналізу господарської діяльності в усіх її формах і проявах*, а також оцінки економічних результатів цієї діяльності.

Це, в свою чергу, вимагало застосування як специфічних для *гуманітарних наук евристичних* методів, так і *точних кількісних* методів, що використовуються в *природничих* науках.

«*Теорія економічного аналізу*» складається з двох тісно й органічно пов'язаних частин.

➤ Перша частина – це *теорія аналізу*.

Коротко зміст цього «*аналізу*» можна окреслити наступним чином:

- Це *система спеціальних знань, пов'язаних з вивченням економічних процесів*.

Необхідність проведення такого аналізу впливає, насамперед, із практичних потреб і скерована *на підтримку процесу прийняття* рішень при управлінні конкретними економічними явищами.

➤ Друга частин – це *методологія проведення практичного* економічного аналізу.

Тобто методологія фахового дослідження конкретних економічних явищ.

- Головним завданням практичного економічного аналізу є *вдосконалення* управління господарчими процесами на різних їх щаблях: як на рівні економіки країни *загалом*, так і на рівні окремих *галузей* та конкретних *підприємств*.

Основним предметом (чи *об'єктом*) економічного аналізу є окремі суб'єкти господарської діяльності, тобто окремі економічні одиниці. Це насамперед підприємства та різного роду компанії: *асоціації, корпорації, консорціуми, концерни* тощо. Як правило, у зв'язку з місцем і роллю суб'єктів у виробничому процесі ми їх поділяємо на три групи:

1. Основні елементи ринку (це підприємства – виробники та споживачі і їх спілки).
2. Елементи ринкової інфраструктури (банки, біржі, страхові компанії, комерційні компанії, тощо).
3. Некомерційні організації, тобто організації, прибуток яких не розподіляється між працівниками цих організацій (наприклад, лікарні, навчальні заклади, бібліотеки, музеї, благодійні організації, різні фонди тощо).

Оскільки економічні процеси, що відбуваються на різних щаблях господарювання, тісно між собою пов'язані, то, крім окремих суб'єктів господарської діяльності, об'єктами цього аналізу, можуть також бути:

- *Окремі галузі економіки або цілі економічні регіони,*
- *Національна економіка чи світове господарство.*

2. Фактори та їх класифікація.

Поняття «фактора» («чинника») є фундаментальним для аналізу будь-якого явища. Мінливість явищ, які нас цікавлять, є основною причиною їх аналізу, тоді як ці зміни викликають певні *причини*, тобто інші явища, які активно впливають на поточний стан явища, що аналізується.

- Ми розглядаємо *причини* як діючі («чинні») сили, що змушують досліджуване явище змінюватися.

Проте результат впливу активного явища (тобто «*причини*») на стан досліджуваного явища (тобто «*наслідок*») залежить також від *умов*, у яких ці причини діють. На відміну від причин, умови відіграють *пасивну* роль у змінах, що відбуваються в аналізованому явищі, але вони однаково важливі для аналізу цих змін. Органічне поєднання *причин* і *умов*, в яких ці причини діють, складають поняття «фактора» (або «чинника»).

➤ *Фактори* – це сили, що активно діють за певних умов.

Або:

➤ Конкретні *рішення*, скеровані на управління аналізованим об'єктом, *що викликають зміни станів* цього об'єкта.

У випадку об'єктів економічного аналізу виділяють два основних типи факторів:

- Фактори *внутрішнього* та
- Фактори *зовнішнього* оточення (чи «*середовища*»).

До базових факторів *внутрішнього* середовища зазвичай відносять: *трудові ресурси, основні ресурси і технології, матеріальні ресурси, фінансові ресурси (капітал), інформаційні ресурси* тощо.

Основними факторами *зовнішнього* середовища є: *економічні умови, реципієнти* (споживачі), *чинне національне та міжнародне законодавство, урядові акти, конкуренти, соціальні організації та професійні спілки, технічний розвиток та нові технології* тощо.

Критеріїв класифікації факторів, що впливають на економічні явища, може бути багато. Враховуючи зміст проблем, які розглядаються в цих лекціях, виберемо в якості такого критерію *характер впливу* факторів на формування досліджуваної змінної, та поділимо всі фактори на дві групи.

- *Первинні*, тобто ті, що *безпосередньо* впливають на змінну перебігу явища, що вивчається;
- *Вторинні*, тобто такі, впливають на формування *первинних* факторів.

Наприклад, впровадження новітньої техніки та використання нових технологій *підвищує продуктивність праці*. Це, в свою чергу, призводить до *збільшення виробництва* певних товарів. Тому при дослідженні такої змінної, як *об'єм виробництва*, *продуктивність праці* слід розглядати в якості *первинного* фактору, тоді як показники, що характеризують рівень технічного та технологічного розвитку, відіграють роль *вторинних* факторів.

Для питань, що будуть обговорюватися в цих лекціях, важливо також розділити фактори на дві групи за ознакою: *кількісні* та *якісні*. Основою такого поділу є можливість (в якомусь розумінні – «*величина*», «*сила*», «*інтенсивність*») *чисельного вимірювання* значень факторів, що розглядаються, а отже і визначення *кількісної* оцінки їх *впливу* на змінну, що досліджується.

Для *кількісних* факторів таке вимірювання можливе, тоді як для *якісних* – зазвичай можна визначити тільки *напрямок*, тобто основну *тенденцію* такого впливу.

Серед *кількісних* факторів також виділяємо:

- *Безпосередньо доступні* для спостереження, для яких конкретні числові значення їх *величини* можна отримати шляхом *безпосереднього вимірювання*.
- *Недоступні* для спостереження, тобто значення яких неможливо отримати шляхом *безпосереднього спостереження*. Їх значення можна лише *оцінити* або *спрогнозувати*, або ж взагалі визначити лише *тенденцію* їх поведінки.

3. Причинно-наслідкові зв'язки в економічних процесах.

Економічний аналіз господарської діяльності окремих *суб'єктів* дає можливість вивчення *сукупності явищ*, що їх характеризують та визначають. Це, в свою чергу, дозволяє встановити *фактори*, що впливають на результати діяльності *об'єкту* аналізу і дослідити відповідні цим *явищам* та *факторам* економічні категорії.

Серед суттєвих *факторів*, що мають вплив на економічні результати об'єкту, який є предметом аналізу, слід відзначити *суб'єктивну* діяльність людей та їх конкретні *рішення*, скеровані на управління цим об'єктом. Тому необхідна також:

- Всебічна оцінка *адекватності* діяльності по *управлінню*. Тобто встановлення *відповідності* рішень, що приймаються, *об'єктивним економічним законам*.

Наступне завдання економічного аналізу предмету дослідження – це встановлення *взаємних пов'язань* економічних *процесів*, що формують його зовнішнє середовище, та *взаємозалежності* відповідних їм *економічних категорій*. При цьому зв'язки економічних процесів можуть виникати як в результаті впливу *об'єктивних законів економіки*, так і в результаті суб'єктивної діяльності людей з метою управління економікою на різних її рівнях.

Підсумовуючи можна сказати, що зміст проведеного аналізу стосується скоріше *економічної сутності* підприємництва суб'єктів господарської діяльності, а не самих суб'єктів, як *реальних, конкретних об'єктів* господарювання.

➤ Цей аналіз має допомогти *виявити* причинно-наслідкові зв'язки в економічних процесах, виявити ті *фактори*, що впливають на результати господарської діяльності, та *оцінити* можливі *наслідки* суб'єктивних рішень, прийнятих для управління цією діяльністю.

Варто зауважити, що термін «*причинно-наслідкові зв'язки*» використовується тут в дещо «*розширеному*» значенні, враховуючи як *функціональні*, так і *статистичні* зв'язки між досліджуваними явищами та факторами, що розглядаються.

Взагалі використання *функціональних* залежностей при аналізі економічних явищ завжди слід розглядати як *наближений опис* їх за допомогою математичних засобів. Предметом дослідження в даних лекціях будуть головним чином методи функціонального опису та математичної формалізації стохастичних факторів, вплив яких на досліджуване явище чітко не визначено, але має він чітко виражений *статистичний характер*.

➤ Сама ця особливість є характерною для *реальних економічних явищ*.

4. Ринкова кон'юнктура та її вплив на економічну діяльність.

Успішне функціонування суб'єктів господарювання означає, перш за все, забезпечення їх *довгострокової рентабельності*, тобто отримання *прибутку* від ділової активності. А це, в свою чергу, вимагає розпізнання ринкової ситуації з погляду на *реальні можливості виробництва* та *фактичний* попит потенційних клієнтів і їх *купівельну спроможність*.

Стратегія успішного функціонування повинна, зокрема, враховувати баланс між *попитом* та *пропозицією*, тобто доставкою товарів і послуг на конкретні ринки, в певних кількостях і протягом певного періоду часу. Тому до завдань економічного аналізу включають також дослідження поточного стану ринку:

- Вивчення поточних та потенційних клієнтів, дослідження впливу конкурентів на ринок, аналіз ринкових цін з метою створення власної стратегії ціноутворення тощо.

Проведення такого аналізу у поєднанні з визначенням впливу на економічну активність зовнішнього та внутрішнього середовища дає змогу компанії гнучко адаптуватися до *поточної ринкової ситуації*, а отже, забезпечує активну участь у *формуванні* цієї ситуації.

➤ Стан економіки, тобто ситуація, що виникла в економічному житті з погляду на обставини, що обговорювалися вище, називається ринковою *кон'юнктурою*.

Проведення відповідних досліджень, спрямованих на вивчення цього стану, виділяється в теорії економічного аналізу в окремий розділ, який називається «*Дослідження кон'юнктури*». Як економічний аналіз, так і дослідження кон'юнктури, спрямовані на розширення сфери діагностики ринкового середовища. Тобто їх головна мета – вчасно *помітити, виявити та проаналізувати* нові *тренди і тенденції*, що притаманні розвитку економічних процесів. Для цього необхідно *прогнозувати поведінку* суб'єктів економічного середовища, щоб своєчасно, усуваючи різного роду перешкоди, створити умови для швидкої їх адаптації до мінливих ринкових умов. Економічний аналіз у поєднанні з методами економіко-математичного прогнозування та моделювання економічних процесів дозволяє вибирати правильні рішення, а отже – оптимальним чином управляти господарськими процесами.

➤ Тому не випадково серед математичних методів економічного аналізу важливу роль відіграють методи *економічного прогнозування та планування* господарської діяльності.

Серед них, зокрема, *статистичні методи*, які використовуються в процесі визначення *прогнозів ділового циклу та прогнозів кон'юнктури на фінансовому ринку*.

➤ При цьому, в першу чергу, нас будуть цікавити ефективні математичні інструменти дослідження кон'юнктури нового його сегменту, який утворюють «*електронні гроші*», або «*криптовалюти*».

В цілому ж, економічний аналіз буде стосуватися питань *виробництва та логістики*, тобто головна увага в процесі *дослідження кон'юнктури* буде зосереджена на наступних обставинах економічного життя:

- Реальний баланс між *попитом* та *пропозицією*, тобто:
 - *Реальні можливості виробництва*;
 - *Фактичний попит потенційних клієнтів*;
 - *Купівельна спроможність цих клієнтів*.
- Доставка товарів і послуг на *конкретні ринки*, в *певних кількостях* і протягом *певного періоду часу*, тобто
 - *Вивчення вже залучених та потенційних клієнтів*;
 - *Дослідження впливу конкурентів на ринок*;
 - *Аналіз ринкових цін*;
 - *Спроба створення власної стратегії ціноутворення*,тощо.

Дослідження *кон'юнктури*, або інакше – *вивчення поточного стану ринку*, належить до основних завдань економічного аналізу.

- Його мета – дати змогу суб'єкту економічної діяльності гнучко адаптуватися до *поточної ринкової ситуації* і, тим самим, забезпечити йому активну участь у *формуванні цієї ситуації*.

5. Ринок: потреба та попит.

Поняття «*ринку*» є однією з найважливіших базових категорій в системі соціально-економічних наук. Область використання цього поняття, як і різних його пояснень, дуже широка. Перш за все, поняття "*ринок*" визначає соціальний інститут, який зберігає та регулює всю сукупність процесів виробництва та обміну.

Поняття "*ринок*" може також означати сукупність потенційних *покупців* товару або асоціюватись з місцем, де певні товари чи послуги обмінюються або продаються, тощо.

Зважаючи на коло проблем, які будуть нас цікавити, «*ринок*» буде розглядатися як сфера *обміну*, тобто як сфера реалізації відносин обміну між *виробниками* та *споживачами*. На цьому ринку:

- З одного боку, участь беруть суб'єкти господарювання, які пропонують певну продукцію чи послугу, тобто *створюють пропозицію*.
- З іншого боку, суб'єкти господарювання, які їх купують, тобто *представляють попит*.

В такому розумінні ринок має досить складну структуру, в якій з точки зору предмету обміну, перш за все, виділяємо:

- *Товарні та фінансові ринки*.

Беручи до уваги те, хто бере участь в цьому обміні, виділяємо:

- *Зовнішні та внутрішні ринки*.

Необхідною умовою проведення успішної господарської діяльності є постійне спостереження та дослідження ринків з метою отримання інформації, що цікавить їх суб'єктів.

- Для ринку, що трактується як сфера обміну, головним показником є баланс між *попитом* та *пропозицією*.

Спорідненим з категорією *попиту* є поняття *потреби*.

- Як соціальна категорія, *потреба* означає *здатність до споживання* і носить об'єктивний характер.

Потреба, тобто *внутрішній* стан споживача, не є *статичною* категорією. Потреба має динамічний характер, а її особливості дозволяють досить ефективно та точно прогнозувати цю динаміку.

- *Попит* - це зовнішній спосіб виявлення потреби. Попит - це потреба, яку може собі дозволити суспільство (або споживач), тобто *це грошова форма потреби*.

Попит виражається у необхідності придбати певну кількість товарів, мати *визначений* асортимент товарів чи послуг, які служать для задоволення тих чи інших потреб.

- *Попит* – це не повна *потреба*, а частина тієї, яка *забезпечується грошима*.

Попит може значно коливатися, тому постійний моніторинг його рівня є необхідною умовою як комерційного, так і виробничого успіху.

6. Економічна статика та динаміка ринку.

Суб'єкти господарської діяльності є самостійними одиницями величезної та складної системи, якою є економіка. Кожен з них має свої цілі та намагається досягти їх. Але це неможливо без розуміння загальних принципів функціонування всієї системи та напряму її розвитку..

Ключову роль при побудові формальних моделей складних системи (зокрема – *економічних*) відіграє поняття їх «*стану*». Кожен окремий елемент складної системи може характеризуватися певними *атрибутами* або *параметрами*. В свою чергу кожному атрибуту може бути підпорядкована певна змінна.

- Тоді *множину можливих станів* складної системи можна описати, вказавши *діапазон значень* кожної змінної.

- Будь-яка змістовна комбінація значень усіх змінних описує «*поточний стан*» досліджуваної системи.

Таким чином можна вивчати функціонування складної системи та досліджувати можливість впливу на її поведінку. Аналізуючи економічні явища, ми виділяємо два аспекти, пов'язані з ними:

- Економічну *статика* та
- Економічну *динаміку*.

Встановивши значення кожної змінної, що описує поточний стан економічної системи в конкретні моменти часу, ми отримаємо *статичний стан системи*. Економічна статика розглядає явища поза змінами у часі, тому основними категоріями статистики є:

- *Тотожність* та
- *Незмінність*.

На відміну від статистики, економічна *динаміка* вивчає скоріше не явища (як такі), а економічні *процеси*, тобто вивчає ці явища у своєму розвитку, відображає їх зміни в часі. Тому основними категоріями економічної динаміки є поняття:

- *Мінливість*,
- *Різноманітність* та
- *Несхожість* елементів економічної системи.

Моделюючи динаміку окремих елементів та аналізуючи всю систему, враховуючи її структуру та зв'язки між окремими елементами, іноді можна здогадатися про основні *тренди* чи *тенденції* розвитку системи.

7. Динамічна та локальна рівновага.

Намагаючись дати загальне визначення змісту дослідження кон'юнктури та охарактеризувати суть методів такого дослідження, можна сказати, що:

➤ Методи аналізу кон'юнктури встановлюють зв'язок між знаннями про *статичний стан* і *динамікою* окремих елементів аналізованої складної економічної системи, про їх поведінку в складі економічної системи.

Для економічних явищ однаково важливими є обидва поняття:

- *Статика* і пов'язане з цим поняття *статичної рівноваги*, та
- *Динаміка* і пов'язана з цим концепція *динамічної рівноваги*.

Економіка є частиною *більшої системи*, пов'язаної з існуванням людства, а саме елементом *соціально-економічної системи*. Тому будь-який її стан ніколи не може залишатися *абсолютно однаковим*, тобто:

➤ Стан економічної рівноваги не є *статичним* або *незмінним*.

Говорячи про рівновагу економічної системи, маємо на увазі *динамічну рівновагу*. Це означає, що у випадку економічних систем рівновага може бути лише *локальною*:

- Поведінка економічної система характеризується тим, що вона переходить з *одного стану локальної рівноваги* в наступний *такий стан*.

При цьому говорячи про стан *рівноваги*, маємо на увазі:

➤ Здатність економічної системи *самостійно* повертатися до цього стану.

Іншими словами, якщо внаслідок впливу на неї певних чинників вона буде виводиться з рівноваги, то після закінчення їх впливу сама повинна повернутися до початкового стану.

У випадку економічних систем це неможливо, оскільки стан економічної рівноваги не є *статичним* і економічна система ніколи не може повернутися до стану, що *абсолютно однаковий* до початкового.

➤ Тому рівновага економічної системи – це *динамічна рівновага*.

В цілому для економіки є характерним *перманентний стан дисбалансу* в тому сенсі, що:

- *Абсолютна* рівновага для економічних систем за своєю суттю *неможлива*. Таким чином, можна говорити лише про *локальну або відносну рівновагу*.

8. Стохастичний характер локальної рівноваги.

Загалом локальний дисбаланс економічної системи та її *динамічну рівновагу* можна описати наступним чином:

- ✓ Після виведення економічної системи з стану локальної рівноваги виникають певні сили, які хочуть повернути її до цього стану.
- ✓ Якщо відхилення від початкового стану не надто велике, система самостійно повертається до нього в результаті взаємодії цих сил.
- ✓ Однак якщо порушення є значним, то система не зможе повернутися до початкового стану автоматично.
- ✓ Це призводить до непередбачуваних структурних змін не тільки в економічній системі а й, можливо, навіть в соціально-економічній системі.
- ✓ Що, в свою чергу, змушує економічну систему рухатися до нового стану локальної рівноваги.

Як правило, процеси, про які йдеться, не є *детермінованими*, а мають *стохастичний характер*. Тому існує багато, на перший погляд, суперечливих економічних теорій, що описують подібну еволюцію.

➤ Одні з них базуються на концепції *глобальної світової економічної рівноваги*.

➤ Інші описують динаміку та дисбаланс економічних систем виходячи з *циклічного характеру економічних процесів*, тощо.

Начебто суперечливі теорії в цілому не є повністю взаємовиключними. Навпаки, вони логічно пов'язані між собою та взаємодоповнюють одна одну. Справа в тому, що кожна з цих теорій вивчає економічні процеси з іншої точки зору, під різними кутами, в різних часових вимірах:

- *Перші пояснюють динамічну рівновагу економічних систем на тривалому проміжку часу;*
- *Тоді як другі розглядають економічні системи на відносно короткому проміжку часу.*

2.3. Економетричне прогнозування: приклади та завдання для самоконтролю.

Економетрико-статистичні методи в дослідженні економічних процесів

1. Точковий економетричний прогноз. 2. Помилка прогнозу. 3. Інтервальний прогноз. 4. Інтервал на підставі нормального розподілу. 5. Побудова інтервалу з використанням функції Лапласа. 6. Інтервал на підставі розподілу t -Стюдента. 7. Економетричне прогнозування в аркуші «Excel».

1. Точковий економетричний прогноз. [2]

Між змінними X та Y існує лінійна залежність: $Y = b + a \cdot X$. Маємо в розпорядженні наступні числові дані:

$$\{(x_1 = 3; y_1 = 10), (x_2 = 4; y_2 = 15), (x_3 = 1; y_3 = 11), (x_4 = 6; y_4 = 18), \\ (x_5 = 10; y_5 = 22), (x_6 = 12; y_6 = 20), (x_7 = 7; y_7 = 14), (x_8 = 10; y_8 = 18), \\ (x_9 = 2; y_9 = 9), (x_{10} = 5; y_{10} = 13)\}.$$

Кожна пара (x_t, y_t) – це реалізація змінної Y (координата y_t) для відповідного значення (координата x_t) змінної X .

- Числа $\{y_t, t = 1, 2, \dots, 10\}$ – це *емпіричні* значення змінної Y , тобто результат спостереження змінної Y для встановлених заздалегідь значень $\{x_t, t = 1, 2, \dots, 10\}$ змінної X .
- Вимірювання значень змінної Y під час спостереження неточні, тобто припускаємо, що:

$$y_t = b + ax_t + \xi_t, t = 1, 2, \dots, 10.$$

Похибка вимірювання ξ_t є випадковою величиною, що має наступні властивості:

- 1) Розподіл ξ_t такий самий для всіх спостережень $t = 1, 2, \dots, 10$;
- 2) Похибки ξ_t різних вимірювань некорельовані, тобто $\text{Cov}(\xi_t, \xi_s) = 0, t \neq s$.
- 3) $E(\xi_t) = 0, D(\xi_t) = \sigma^2$.

Завдання 1. Припустимо, що відомі також наступні значення змінної X :

$$(x_{11} = 13), (x_{12} = 14), (x_{13} = 16),$$

Для цих значень змінна Y є недоступною для спостереження.

Спираючись на проведені вимірювання визначити прогнозовані значення $\{y_{11}^*, y_{12}^*, y_{13}^*\}$ змінної Y для значень $\{x_{11}, x_{12}, x_{13}\}$ змінної X .

Розв'язок. Спираючись на доступні емпіричні дані $\{(x_t, y_t), t = 1, 2, \dots, 10\}$ необхідно спочатку побудувати *прогностичну модель*. Згідно з умовою можна використати модель лінійної регресії:

$$\hat{y}_t = \hat{b} + \hat{a} \cdot x_t.$$

побудовану методом найменших квадратів в **підрозділі 1.2**. Маємо:

$$\hat{y}_t = 8,7097 + 1,0484 \cdot x_t, t = 1, 2, \dots, 10,$$

Згідно з головним принципом економетричного прогнозування точковий прогноз $\{y_{11}^*, y_{12}^*, y_{13}^*\}$ змінної Y визначаємо шляхом продовження цієї моделі в область значень: $(x_{11} = 13)$, $(x_{12} = 14)$, $(x_{13} = 16)$ змінної X . Тобто припускаємо, що $x_{11} = 13$, $x_{12} = 14$, $x_{13} = 16$ – визначені заздалегідь дійсні числа та екстраполюємо модель за межі вибірки $\{(x_t, y_t), t = 1, 2, \dots, 10\}$ наступним чином:

$$y_\tau^* = 8,7097 + 1,0484 \cdot x_\tau, \tau = 11, 12, 13.$$

Тому:

$$y_{11}^* = 8,7097 + 1,0484 \cdot 13 = 22,339;$$

$$y_{12}^* = 8,7097 + 1,0484 \cdot 14 = 23,387;$$

$$y_{13}^* = 8,7097 + 1,0484 \cdot 16 = 25,484;$$

2. Помилка прогнозу. [2]

Завдання 2. Оцінити точність точкового прогнозу, тобто знайти *приблизне значення різниці*:

$$|y_\tau - y_\tau^*|, \tau = 11, 12, 13,$$

де y_τ – фактичне, але невідоме нам значення змінної Y , а y_τ^* – прогноз цього значення, визначений за допомогою моделі лінійної регресії.

Розв'язок. З метою оцінки точності прогнозування використовується *помилка прогнозу*, тобто число, що визначається рівністю:

$$e_\tau = y_\tau - y_\tau^*.$$

Якщо виконуються прийняті відносно моделі припущення, то e_τ є випадковою величиною, що має наступні параметри :

$$E(e_\tau) = E(y_\tau - y_\tau^*) = 0.$$

$$D(e_\tau) = D(y_\tau - y_\tau^*) = \sigma^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_\tau - \bar{x})^2}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2} \right].$$

Тому оцінкою середнього значення помилки прогнозу e_τ буде стандартне відхилення:

$$|y_\tau - y_\tau^*| \approx S(e_\tau) = \sqrt{D(e_\tau)}.$$

Замінюючи невідоме значення параметру σ^2 стохастичної структури моделі його незміщеною статистичною оцінкою $\hat{\sigma}^2$, отримаємо наступну формулу для оцінки $S^{*2}(e_\tau)$ дисперсії $S^2(e_\tau) = D(e_\tau)$ помилки прогнозу e_τ :

$$S^{*2}(e_\tau) = \hat{\sigma}^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_\tau - \bar{x})^2}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2} \right].$$

Використовуючи результати підрахунків, виконаних при побудові моделі в [підрозділі 1.2](#), (а саме $\hat{\sigma}^2 = 4,714$) отримаємо для оцінки $S^{*2}(e_\tau)$ дисперсії $S^2(e_\tau) = D(e_\tau)$ наступне значення:

$$S^{*2}(e_\tau) = 4,714 \cdot \left[1 + \frac{1}{10} + \frac{(x_\tau - 6)^2}{124} \right].$$

Тому для окремих точкових прогнозів $\{y_{11}^*, y_{12}^*, y_{13}^*\}$ змінної Y отримаємо наступні оцінки $S^{*2}(e_\tau)$ дисперсії $S^2(e_\tau) = D(e_\tau)$ помилки прогнозу:

$$\tau = 11, x_\tau = 13: S^{*2}(e_{11}) = 4,714 \cdot \left[1,1 + \frac{(13 - 6)^2}{124} \right] = 7,0478;$$

$$\tau = 12, x_\tau = 14: S^{*2}(e_{12}) = 4,714 \cdot \left[1,1 + \frac{(14 - 6)^2}{124} \right] = 7,618;$$

$$\tau = 13, x_\tau = 16: S^{*2}(e_{13}) = 4,714 \cdot \left[1,1 + \frac{(16 - 6)^2}{124} \right] = 8,9865.$$

Відповідно статистичними оцінками значення різниць:

$$|y_\tau - y_\tau^*|, \tau = 11, 12, 13,$$

будуть числа, визначені за формулою:

$$|y_{11} - y_{11}^*| \approx S^*(e_{11}) = \sqrt{S^{*2}(e_{11})} = \sqrt{7,048} = 2,6548;$$

$$|y_{12} - y_{12}^*| \approx S^*(e_{12}) = \sqrt{S^{*2}(e_{12})} = \sqrt{7,618} = 2,7601;$$

$$|y_{13} - y_{13}^*| \approx S^*(e_{13}) = \sqrt{S^{*2}(e_{13})} = \sqrt{8,986} = 2,9977.$$

Завдання 3. Дати графічну ілюстрацію процедури економетричного прогнозування. З цією метою:

- Побудувати в аркуші «Excel» графік точок, що представляють *числові дані моделі* $\{(x_t, y_t), t = 1, 2, \dots, 10\}$.
- Використовуючи функцію «Формат лінії тренду» аркушу «Excel», додати до збудованого графіка *теоретичну модель*.
- Додати до збудованих графіків, графік точкового прогнозу, тобто додати пункти з координатами:

$$\{(x_{11}, y^*_{11}), (x_{12}, y^*_{12}), (x_{13}, y^*_{13})\}.$$

Розв'язок.

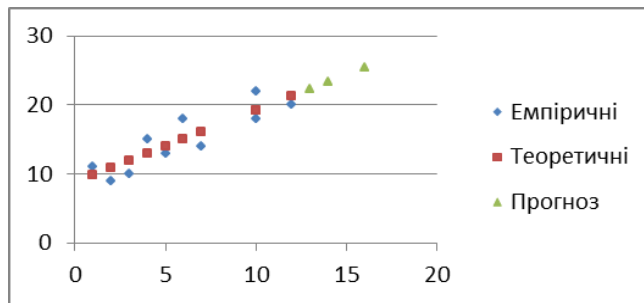


Рис. 1.

3. Інтервальний прогноз.

Інтервал певності для прогнозованих значень.

Крім визначення точкового прогнозу та дослідження його точності згідно з загальною процедурою економетричного прогнозування будується також *інтервальний прогноз*, тобто:

- Числовий інтервал, який з заданою наперед ймовірністю «покриває» точне (але невідоме) значення змінної, що прогнозується.

Припустимо, що задано близьке до 1 число β . Задача побудови інтервального прогнозу формулюється наступним чином.

- Необхідно визначити числовий інтервал $[d_\tau^*, g_\tau^*]$ таким чином, щоб виконувалась рівність:

$$P\{d_\tau^* < q_\tau < g_\tau^*\} = \beta, \tau = n + s, s > 0.$$

Згідно з припущеннями моделі – емпіричні значення (y_t) змінної Y мають вигляд:

$$y_t = b + ax_t + \xi_t, t = 1, 2, \dots;$$

а випадкова величина ξ_t має наступні властивості:

- Розподіл ξ_t не залежить від t ;
- ξ_t та ξ_s для різних t і s некорельовані, тобто $Cov(\xi_t, \xi_s) = 0$, якщо $t \neq s$;
- $E(\xi_t) = 0, D(\xi_t) = \sigma^2, t = 1, 2, \dots$

Прийнятих припущень недостатньо щоб побудувати інтервальний прогноз, адже необхідно знати ще розподіл МНК-естиматорів \hat{a} та \hat{b} структурних параметрів моделі, а також розподіл отриманим на їх основі точкових прогнозів $\{y^*_{11}, y^*_{12}, y^*_{13}\}$ змінної Y .

Тому будемо вважати, що виконується ще одна умова *класичної моделі лінійної регресії*:

➤ Випадкова величина ξ_t має нормальний розподіл.

Нормальний розподіл має наступні властивості:

- Лінійна функція випадкової величини, що має нормальний розподіл також має нормальний розподіл.

Тобто для довільних дійсних чисел a та b випадкова величина

$$\eta_t = b + a \cdot \xi_t$$

також має нормальний розподіл.

- Лінійна комбінація випадкових величин, що мають нормальний розподіл також має нормальний розподіл.

Тобто для довільних дійсних чисел c_1, c_2, \dots, c_n , та випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, що мають нормальний розподіл, величина:

$$\eta_t = c_1 \cdot \xi_1 + c_2 \cdot \xi_2 + \dots + c_n \cdot \xi_n$$

також буде мати нормальний розподіл.

Тому МНК-естиматори \hat{a} та \hat{b} структурних параметрів моделі мають нормальний розподіл, оскільки являються лінійними комбінація випадкових величин, що мають нормальний розподіл.

Згідно з припущеннями $x_{11} = 13, x_{12} = 14, x_{13} = 16$ – визначені заздалегідь дійсні числа. Тому точкові прогнози $\{y^*_{11}, y^*_{12}, y^*_{13}\}$ змінної Y також будуть лінійними комбінація випадкових величин (\hat{a} та \hat{b}), що мають нормальний розподіл, а отже мають нормальний розподіл.

Емпіричні значення (y_t) змінної Y мають вигляд:

$$y_t = b + ax_t + \xi_t, t = 1, 2, \dots,$$

тобто являються лінійними функціями випадкових величин ξ_t , що мають нормальний розподіл. Вони також розподілені за нормальним законом.

Приходимо до висновку, що решти $e_\tau, \tau = 1, 2, \dots$, тобто число, що визначається рівністю: $e_\tau = y_\tau - y_\tau^*$, також розподілені за нормальним законом:

$$e_\tau \Leftrightarrow N(0; S^2(e_\tau))$$

4. Інтервал на підставі нормального розподілу.

Припустимо, що значення параметру стохастичної структури (σ^2) моделі відоме. Тоді використовуючи відповідну таблицю, або відповідну статистичну функцію аркушу «Excel», необхідно визначити величину δ_β з умови

$$P\{|N(0; S^2(e_\tau))| < \delta_\beta\} = \beta, \tau = n + s, s > 0.$$

Оскільки решти e_τ , $\tau = 1, 2, \dots$, розподілені за нормальним законом:

$$e_\tau \Leftrightarrow N(0; S^2(e_\tau))$$

то очевидно:

$$P\{-\delta_\beta < e_\tau < \delta_\beta\} = \beta, \tau = n + s, s > 0.$$

Тобто:

$$P\{y_\tau^* - \delta_\beta < y_\tau < y_\tau^* + \delta_\beta\} = \beta, \tau = n + s, s > 0.$$

Отже:

$$d_\tau^* = y_\tau^* - \delta_\beta; g_\tau^* = y_\tau^* + \delta_\beta, \tau = n + s, s > 0.$$

В аркуші «Excel» відповідними статистичними функціями, що дозволяють визначити величину δ_β , є функції «НОРМ.РОЗП» та «НОРМ.ОБЕР». Однак відповідних друкованих таблиць не існує. Пов'язано це з тим, що немає необхідності складати подібні таблиці для довільних значень параметрів (m , σ^2). Цілком вистачить однієї таблиці, для будь-якого одного конкретного набору параметрів.

Таким «конкретним набором» є параметри (0, 1).

➤ Нормальний розподіл з параметрами (0, 1) називається *стандартним нормальним розподілом*.

Відповідну випадкову величину будемо позначати символом η :

$$\eta \Leftrightarrow N(0, 1)$$

Щільність $f_\xi(x)$ випадкової величини ξ , яка має нормальний розподіл з параметрами (m , σ^2), визначається формулою:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty.$$

Математичне сподівання та дисперсія нормальний розподіл з параметрами (m , σ^2), відповідно дорівнюють:

$$m = E(\xi); \sigma^2 = D(\xi).$$

Для стандартного нормального розподілу випадку, коли $m = 0$ та $\sigma^2 = 1$, щільність $f_\eta(x)$ приймає вигляд:

$$f_{\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty.$$

Функція розподілу стандартного нормального розподілу: $\eta \Leftrightarrow N(0, 1)$ називається *функцією Лапласа* та визначається формулою:

$$\Phi(x) = P\{\eta < x\} = P\{N(0, 1) < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du, -\infty < x < \infty.$$

Пригадаємо ще одну властивість нормального розподілу:

- Якщо випадковими величинами ξ має нормальний розподіл з параметрами (m, σ^2) : $\xi \Leftrightarrow N(m, \sigma^2)$, то випадкова величина $\eta = \frac{\xi - m}{\sigma}$ має нормальний стандартний розподіл: $\eta \Leftrightarrow N(0, 1)$.

Функція Лапласа, з свого боку, має такі властивості:

- $\Phi(0) = 0,5$.
- $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$.

Пригадаємо також, що число x_{α} , яке визначається рівністю:

$$P\{N(0, 1) < x_{\alpha}\} = \alpha.$$

називається *квантилем порядку α* для стандартного нормального розподілу.

5. Побудова інтервалу з використанням функції Лапласа.

Решта e_{τ} розподілена за нормальним законом з параметрами $(0; S^2(e_{\tau}))$. Таким чином на підставі приведеної властивості:

$$\frac{N(0, S^2(e_{\tau}))}{\sqrt{S^2(e_{\tau})}} \Leftrightarrow N(0; 1).$$

Тобто:

$$\frac{e_{\tau}}{\sqrt{S^2(e_{\tau})}} \Leftrightarrow N(0; 1).$$

Знайдемо коефіцієнт z_{β} з умови:

$$P\{-z_{\beta} < N(0; 1) < z_{\beta}\} = \beta.$$

Очевидно, що z_{β} – це *квантиль порядку $\frac{\beta+1}{2}$* для стандартного нормального розподілу:

$$P\{N(0; 1) < z_\beta\} = \Phi(z_\beta) = \frac{\beta + 1}{2}.$$

Тоді:

$$P\left\{-z_\beta < \frac{e_\tau}{\sqrt{S^2(e_\tau)}} < z_\beta\right\} = \beta.$$

Тобто:

$$P\left\{-z_\beta < \frac{y_\tau - y_\tau^*}{\sqrt{S^2(e_\tau)}} < z_\beta\right\} = \beta.$$

Або рівнозначно:

$$P\{y_\tau^* - z_\beta \cdot \sqrt{S^2(e_\tau)} < y_\tau < y_\tau^* + z_\beta \cdot \sqrt{S^2(e_\tau)}\} = \beta, \tau > n.$$

А це і означає, що числовий інтервал:

$$[d_\tau^* = y_\tau^* - z_\beta \cdot \sqrt{S^2(e_\tau)}; g_\tau^* = y_\tau^* + z_\beta \cdot \sqrt{S^2(e_\tau)}]$$

визначає інтервальний прогноз для значення y_τ , $\tau > n$ змінної Y .

Завдання 4. Нехай $\beta = 0,95$. Побудувати числовий інтервал $[d_\tau^*, g_\tau^*]$ для кожного моменту часу $\tau = n + s$, $s = 1, 2, 3$, таким чином, щоб виконувалась рівність

$$P\{d_\tau^* < y_\tau < g_\tau^*\} = \beta, \tau = n + s, s > 0.$$

Використати для цього визначений в завданні 1 точковий прогноз $\{y_{11}^*, y_{12}^*, y_{13}^*\}$ змінної Y для відповідних значень змінної X , а також обчислені в завданні 2 оцінки $S^{*2}(e_\tau)$ дисперсії помилок прогнозу e_τ .

Розв'язок. Використовуючи таблиці функції Лапласа знаходимо коефіцієнт z_β з умови:

$$P\{-z_\beta < N(0; 1) < z_\beta\} = 0,95.$$

Або:

$$P\{N(0, 1) < z_\beta\} = 0,975; z_\beta = 1,96.$$

Таким чином:

$$d_{11}^* = 22,339 - 1,96 \cdot 2,6548 = 16,2168; \text{ ітд.}$$

$$g_{11}^* = 22,339 + 1,96 \cdot 2,6548 = 28,4606; \text{ ітд.}$$

Впорядкуємо проведені раніше а також необхідні нові обчислення у вигляді наступної таблиці:

τ	x_τ	y_τ^*	$S^{*2}(e_\tau)$	$S^*(e_\tau)$	d_τ^*	g_τ^*
11	13	22,339	7,0478	2,6548	17,1354	27,542
12	14	23,387	7,618	2,7601	17,9774	28,7968
13	16	25,484	9,9865	2,9977	19,6083	31,3595

Завдання 5. Додати до збудованих в завданні 3 графіків, графіки інтервального прогнозу, тобто додати пункти з координатами:

$$\{(x_{11}, d^*_{11}), (x_{12}, d^*_{12}), (x_{13}, d^*_{13})\};$$

та

$$\{(x_{11}, g^*_{11}), (x_{12}, g^*_{12}), (x_{13}, g^*_{13})\}.$$

Розв'язок.

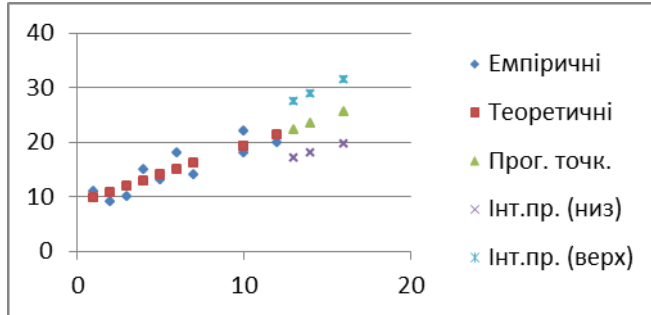


Рис. 2.

6. Інтервал на підставі розподілу t–Стюдента.

Припущення відносно того, що значення параметру σ^2 стохастичної структури моделі є *відомим*, можна прийняти, якщо йдеться про *наближений* розв'язок задачі побудови прогнозованого інтервалу.

➤ Зазвичай на практиці значення параметру σ^2 стохастичної структури моделі є *невідомим*.

Тому у формулі для дисперсії $S^2(e_\tau) = D(e_\tau)$ помилки прогнозу e_τ , невідоме значення параметру σ^2 необхідно замінити його незміщеною статистичною оцінкою $\hat{\sigma}^2$.

В результаті отримуємо наступну формулу для оцінки $S^{*2}(e_\tau)$ дисперсії $S^2(e_\tau)$ помилки прогнозу e_τ :

$$S^{*2}(e_\tau) = \hat{\sigma}^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_\tau - \bar{x})^2}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2} \right].$$

Якщо виконуються прийняті відносно моделі припущення, то статистика

$$\frac{e_\tau}{\sqrt{S^{*2}(e_\tau)}} = \frac{y_\tau - y_\tau^*}{\sqrt{S^{*2}(e_\tau)}} \Leftrightarrow t_{(n-2)}$$

буде мати розподіл t–Стюдента з $(n - 2)$ степенями свободи. [1], [2]

Знайдемо коефіцієнт t_β з умови:

$$P\{-t_\beta < t_{(n-2)} < t_\beta\} = \beta.$$

Якщо

$$S_{(n)}(x) = P\{t_{(n)} < x\}, -\infty < x < \infty,$$

функція розподіл випадкової величини $t_{(n)}$, то коефіцієнт t_β знаходимо з рівняння:

$$S_{(n-2)}(t_\beta) = \frac{\beta + 1}{2}.$$

Тоді:

$$P\left\{-t_\beta < \frac{y_\tau - y_\tau^*}{\sqrt{S^{*2}(e_\tau)}} < t_\beta\right\} = \beta.$$

Або рівнозначно:

$$P\{y_\tau^* - t_\beta \cdot \sqrt{S^{*2}(e_\tau)} < y_\tau < y_\tau^* + t_\beta \cdot \sqrt{S^{*2}(e_\tau)}\} = \beta, \tau > n.$$

А це і означає, що числовий інтервал:

$$[d_\tau^* = y_\tau^* - t_\beta \cdot \sqrt{S^{*2}(e_\tau)}; g_\tau^* = y_\tau^* + t_\beta \cdot \sqrt{S^{*2}(e_\tau)}]$$

визначає інтервальний прогноз для значення y_τ , $\tau > n$ змінної Y .

Завдання 6. Нехай $\beta = 0,95$. Побудувати числовий інтервал $[d_\tau^*, g_\tau^*]$ для кожного моменту часу $\tau = n + s$, $s = 1, 2, 3$, таким чином, щоб виконувалась рівність

$$P\{d_\tau^* < y_\tau < g_\tau^*\} = \beta, \tau = n + s, s > 0.$$

Використати для цього визначений в завданні 1 точковий прогноз $\{y_{11}^*, y_{12}^*, y_{13}^*\}$ змінної Y для відповідних значень змінної X , а також обчислені в завданні 2 оцінки $S^{*2}(e_\tau)$ дисперсії помилок прогнозу e_τ .

Розв'язок. Використовуючи таблиці розподіл t -Стьюдента з $n - 2 = 8$ степенями свободи знаходимо коефіцієнт t_β з умови:

$$P\{-t_\beta < t_{(8)} < t_\beta\} = 0,95.$$

Або:

$$P\{t_{(8)} < t_\beta\} = 0,975; t_\beta = 2,306.$$

Таким чином:

$$d_{11}^* = 22,339 - 2,306 \cdot 2,6548 = 16,2168; \text{ ітд.}$$

$$g_{11}^* = 22,339 + 2,306 \cdot 2,6548 = 28,4606; \text{ ітд.}$$

Впорядкуємо проведені раніше а також необхідні нові обчислення у вигляді наступної таблиці:

τ	x_τ	y^*_τ	$S^{*2}(e_\tau)$	$S^*(e_\tau)$	d^*_τ	g^*_τ
11	13	22,339	7,0478	2,6548	16,2168	28,4606
12	14	23,387	7,618	2,7601	17,0224	29,7518
13	16	25,484	9,9865	2,9977	18,5711	32,3967

Завдання 7. Додати до збудованих в завданні 3 графіків, графіки інтервального прогнозу, тобто додати пункти з координатами:

$$\{(x_{11}, d^*_{11}), (x_{12}, d^*_{12}), (x_{13}, d^*_{13})\};$$

та

$$\{(x_{11}, g^*_{11}), (x_{12}, g^*_{12}), (x_{13}, g^*_{13})\}.$$

Розв'язок.

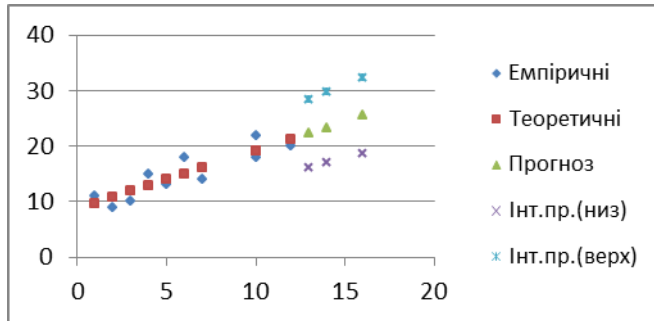


Рис. 3.

7. Економетричне прогнозування в аркуші «Excel».

Функція „ТЕНДЕНЦІЯ”.

Історичний прогноз. (Теоретичні значення $\{\hat{y}_t, t = 1, 2, \dots, 10\}$)

Завдання 8. Обчислити теоретичні значення моделі $\{\hat{y}_t, t = 1, 2, \dots, n\}$, які називають також «історичним прогнозом», використовуючи для цього функцію „ТЕНДЕНЦІЯ” аркушу «Excel».

Завдання 9. Використовуючи емпіричні дані моделі:

$$\{(x_t, y_t), t = 1, 2, \dots, 10\}$$

і застосовуючи функцію „ТЕНДЕНЦІЯ”, визначити точковий прогноз $\{y^*_{11}, y^*_{12}, y^*_{13}\}$ змінної Y для наступних значень змінної X :

$$(x_{11} = 13), (x_{12} = 14), (x_{13} = 16).$$

Функція «ПЕРЕДБАЧЕННЯ» аркушу «Excel».

Завдання 10. Використовуючи емпіричні дані моделі

$$\{(x_t, y_t), t = 1, 2, \dots, 10\}$$

і застосовуючи функцію «ПЕРЕДБАЧЕННЯ», визначити точковий прогноз $\{y^*_{11}, y^*_{12}, y^*_{13}\}$ змінної Y для наступних значень змінної X :

$$(x_{11} = 13), (x_{12} = 14), (x_{13} = 16).$$

2.4. Економетричний аналіз процесу продукції.

1. Інтервальний прогноз та міри ризику «типу небезпеки». 2. Лінійна модель виробничої функції.

1. Інтервальний прогноз та міри ризику «типу небезпеки».

Наведемо конкретний приклад використання введених в підрозділі 2.3 теоретичних понять до аналізу реальних економічних явищ. Це дасть можливість проілюструвати їх *практичний* зміст, узагальнюючи одночасно описані в підрозділі 2.3 методи та реалізуючи їх у векторно-матричній формі.

Методологія дослідження економічних явищ в значній мірі базується на методах та інструментарії сучасних розділів теорії ймовірностей та прикладної статистики. Причиною цього є те, що *реальні* господарські процеси по своїй *суті* мають *стохастичний характер*. Умови, в яких вони відбуваються та форми, в яких вони *проявляються* неможливо *однозначно* та *точно* описати, а тим більше – *передбачити*. Неможливо навіть встановити *всі чинники*, що можуть мати вплив на формування та перебіг цих процесів. Тому основним знаряддям вивчення господарських явищ являються їх *економіко-математичні* моделі. Саме вони дозволяють провести предметний аналіз *факторів*, що формують економічне явище, дослідити їх *взаємодію* (чи її відсутність), *взаємозв'язки*, *взаємозалежності*, тощо.

- Без побудови та перевірки на практиці формальних *економіко-математичних* моделей неможливо з'ясувати суть процесів, що відбуваються в *реальній економіці*.

Один із основних різновидів такого моделювання представляють *економетричні моделі*. Питання, що стосуються аналізу точності *економетричного прогнозування*, були предметом детального розгляду в підрозділі 2.3. При обговоренні загальних понять та принципів *прогнозування* (див. підрозділ 2.1) підкреслювалось:

- Будь-яке *судження* можна вважати *статистичним прогнозом* тільки при умові, що *ймовірність* його «*правдивості*» відома та «*достатньо*» висока.

Практичне втілення цього принципу може мати різноманітні форми. Традиційний підхід *математичної статистики* до оцінки точності статистичних прогнозів полягає в побудові двох типів прогнозів:

- ✓ Прогнозу *точкового*; та
- ✓ *Інтервального* прогнозу, або іншими словами – «*інтервалів певності для прогнозованих значень*».

Ця процедура послідовно та детально ілюструється на конкретних прикладах в підрозділі 2.3.

З точки зору теорії ризику, наприклад, проблема аналізу точності статистичного прогнозування може бути сформульована інакше, в наступній постановці.

✓ Для кожного часового інтервалу (τ), що належить до «майбутнього» встановлюються межі $[q_{\tau}^{(d)*}, q_{\tau}^{(g)*}]$ «коридору» в якому бажано мати прогнозовану вартість змінної, що досліджується.

✓ Задача полягає в тому, щоб для кожного з цих часових інтервалів (τ) оцінити ризик (R_{τ}) того, що V_{τ} буде за межами встановленого «коридору».

В теорії ризику подібні міри ризику отримали назву «мір типу небезпеки» (“*Downside risk measures*”). Використаємо цей підхід та побудуємо математичну модель, що описує процес випуску продукції. Спираючись на статистичну інформацію, яка стосується реальних виробничих процесів, оцінимо точність прогнозів та пов’язані з цим ризику.

2. Лінійна модель виробничої функції.

Ефективне управління компанією, що виробляє певну продукцію, залежить насамперед від якості управлінських рішень щодо виробничого процесу. Тобто від здатності керівництва вибрати «найкращі» (або інакше – оптимальні) рішення з множини всіх «можливих».

Це вимагає від осіб, які приймають рішення, враховувати безліч різноманітних чинників, адже виробничі процеси завжди мають дуже складну природу.

Однак головну роль в процесі прийняття управлінських рішень має відігравати аналіз зв’язків між обсягом виробництва (Q) та розмірами X_1, X_2, \dots, X_m необхідних для цього основних засобів.

- Саме від «якості» цього аналізу головним чином залежить ефективність виробництва продукції.

Описати та вивчити ці зв’язки дозволяє виробнича функція:

$$Q = f(X_1, X_2, \dots, X_m),$$

що виражає формальну залежність між обсягом виробництва (Q) та величиною витрат необхідних для цього виробництва ресурсів (тобто сировинних матеріалів, енергоресурсів, затрат праці, капіталу, тощо).

- ✓ Конкретна виробнича функція на конкретному підприємстві визначається головним чином технологічними умовами конкретного виробництва.

Спираючись на економічний аналіз явища, що вивчається, з допомогою виробничої функції можна виділити та конкретизувати характер зв’язків між основними елементами даного виробничого процесу.

У випадку виробничих процесів, пов’язаних з випуском продукції, базовими для нас будуть наступні поняття:

✓ Повний продукт Q (або інакше - *обсяг виробництва*).

Повний продукт (або обсяг виробництва) – це кількість продукції Q , при умові, що *визначені та зафіксовані* величини усіх основних *засобів* виробництва.

✓ Та *середній* продукт (PP_X).

Середній продукт (PP_X) (або одиничний продукт) по відношенню до витрат фактора виробництва X – це кількість продукції, яку можна отримати з одиниці фактора виробництва X .

Використовуючи відповідні економічні показники можна визначити напрямок та кількісно оцінити інтенсивність зв'язків між елементами даного виробничого процесу. Все це дасть можливість «*систематизувати*» присутні в моделі величин з точки зору «*істотність*» їх впливу на виробництво, а отже їх ролі в процесі прийняття рішень.

З метою спрощення ілюстрації основних понять, що пов'язані з процесами продукції, залишимо поза увагою *економічні* аспекти подібних досліджень та зосередимось виключно на *математичних* проблемах. Для цього розглянемо спочатку випадок *одного фактора виробництва* X .

У випадку *одного фактора виробництва* X *одиничний* продукт визначається рівністю:

$$PP_X = \frac{Q}{X}.$$

Основною причиною, яка змушує вивчати будь-які явища (в тому числі і економічні) та будувати з цієї метою *формальні* моделі, є *мінливість* різноманітних показників, що його характеризують.

- Якби такої «*мінливості*» не було, якби значення всіх змінних, що спостерігаються при вивченні *реального* перебігу досліджуваного явища, залишалися б на тому ж рівні, то не було б і необхідності для будь-якого *формального* опису цього явища.

Тому важливу роль при побудові формальної моделі відіграють кількісні показники *реакції* досліджуваної змінної на *можливі зміни* факторів, що її формують.

У випадку *виробничих процесів*, що розглядаються, одним із основних показників такого впливу є «*граничний продукт*» (PK_X) (вживаються також назви – «*гранична продуктивність*» або «*маргінальний продукт*»).

А саме нехай: ΔQ позначає приріст обсягу виробництва, а ΔX – величина приросту витрат фактора виробництва X , що спричинив це збільшення повного продукту Q .

Граничний продукт по відношенню до витрат фактора виробництва X визначає величину (PK_X) зміни обсягу виробництва Q , спричинену зміною фактора виробництва X на одну одиницю, тобто:

$$PK_X = \frac{\Delta Q}{\Delta X}.$$

У випадку, коли витрати засобу виробництва X змінюються неперервним чином, граничний продукт по відношенню до витрат цього засобу визначається як:

$$PK_X = \frac{dQ}{dX},$$

і характеризує швидкість зміни (в «абсолютному» вимірі) обсягу виробництва, що викликана змінами величини фактора X .

Припустимо тепер, що виробнича функція $Q = f(X)$ є функцією з постійним граничним продуктом, іншими словами, виконується наступна умова:

$$PK_X = a_x.$$

Записуючи (формально) цю рівність у вигляді:

$$dQ = a_x \cdot dX,$$

а потім обчислюючи (формально) невизначені інтеграли від обох її сторін, приходимо до висновку, що відповідною економічною моделлю для виробничої функції у цьому випадку буде лінійна функція:

$$Q = a_0 + a_x \cdot X.$$

✓ Однак в реальних умовах припущення $PK_X = a_x$ ніколи «абсолютно точно» не виконується.

✓ Крім того, припущення, що виробнича функція залежить лише від одного фактора X , є досить спрощеним.

Тому знак «рівності» (=) в моделі слід розглядати як певну «апроксимацію» (\approx) (або *приблизну оцінку*) поведінки обсягу виробництва Q .

Для того, щоб «приблизну рівність» (\approx) замінити точною (=):

$$Q = F(X; \xi_X)$$

і побудувати *економетричну* модель, слід ввести до *економічної* моделі

$$Q = f(X)$$

спеціальну змінну (ξ_X), яку називають «випадковою складовою» і яка виражає сумарний ефект впливу на Q усіх факторів, відмінних від X .

Таким чином:

- У випадку одного виробничого фактора X ;
 - При виконанні припущення, що *граничний продукт* по відношенню до витрат фактора X зберігає постійне значення a_x ;
- економетрична модель для виробничої функції має вигляд:

$$Q = a_0 + a_x \cdot X + \xi_x.$$

Для остаточної побудови економетричної моделі необхідно ще сформулювати *набір припущень* щодо розподілу ймовірностей *випадкової складової* ξ_x .

Наявність *випадкової складової* ξ_x у економетричній моделі обумовлює її *стохастичного* характеру. Це призводить до необхідності використання методів математичної статистики з метою Оцінювання невідомих значень a_0 та a_x *структурних параметрів*.

З іншого боку – з допомогою статистичних засобів є можливість перевірити ступінь *відповідності* побудованої моделі економічній *реальності*, яку вона *намагається* описати. Така «*перевірка*» дозволяє робити обґрунтовані висновки щодо *коректності* визначених в моделях *кількісних закономірностей* між економічними змінними, що досліджуються.

- В результаті для *аналізу* явища, в якому спостерігаються змінні (Q, X), отримуємо ефективний інструмент – *формальну* математичну модель.

Наведені міркування легко узагальнити на випадок багатьох факторів виробництва X_1, X_2, \dots, X_m .

✓ Припустимо, що виробнича функція $Q = f(X_1, X_2, \dots, X_m)$ характеризується сталими значеннями (a_i) *граничного продукту* по відношенню до всіх факторів ($X_i, i = 1, 2, \dots, m$).

Іншими словами, нехай:

$$a_i = PK_{X_i} = \frac{\Delta Q}{\Delta X_i}, i = 1, 2, \dots, m,$$

граничний продукт відносно витрат фактора виробництва $X_i, i = 1, 2, \dots, m$.

Припустимо також, що значення *граничної продуктивності* a_1, a_2, \dots, a_m для всіх факторів залишаються незмінними. Тоді економетрична модель $Q = F(X_1, X_2, \dots, X_m; \xi)$ буде лінійною функцією відносно всіх своїх змінних і має наступний вигляд:

$$Q = a_0 + a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + \dots + a_m \cdot X_m + \xi.$$

2.5. Побудова моделі виробничої функції $Q = Q(L, K)$.

1. Постановка задачі.
2. Оцінювання структурних параметрів моделі.
3. Оцінювання параметрів стохастичної структури моделі.
4. Відповідність моделі емпіричним даним.

1. Постановка задачі.

Маємо числові дані що стосуються наступних змінних:

- $\{q_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ – значення змінної Q , яка визначає вартість чистої продукції (в мл. гр.), виробленої в послідовних часових інтервалах:

$$\begin{aligned} q_1 = 864; q_2 = 1081,2; q_3 = 1092,8; q_4 = 1194,1; q_5 = 1225,6; q_6 = 1284,6; \\ q_7 = 1409,7; q_8 = 1502,7; q_9 = 1597,4; q_{10} = 1634,2; q_{11} = 1783; \\ q_{12} = 1786,9; q_{13} = 1900,4; q_{14} = 1972,8; q_{15} = 2022,5; (n = 15). \end{aligned}$$

- $\{k_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ – значення змінної K , що визначає вартість (брутто) сталих коштів виробничого процесу для відповідних часових інтервалів:

$$\begin{aligned} k_1 = 13,5; k_2 = 17,4; k_3 = 18,7; k_4 = 23,3; k_5 = 24,4; k_6 = 24,2; \\ k_7 = 28,6; k_8 = 31,2; k_9 = 34,1; k_{10} = 33,2; k_{11} = 35,1; k_{12} = 38,5; \\ k_{13} = 41,4; k_{14} = 41,1; k_{15} = 42,2; (n = 15). \end{aligned}$$

- $\{l_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ – значення змінної L , яка визначає середню кількість найманих працівників (осіб) у відповідних часових інтервалах (t), які приймали участь у виготовленні цієї продукції.

$$\begin{aligned} l_1 = 359; l_2 = 453; l_3 = 431; l_4 = 423; l_5 = 424; l_6 = 471; \\ l_7 = 486; l_8 = 511; l_9 = 535; l_{10} = 574; l_{11} = 601; l_{12} = 600; \\ l_{13} = 634; l_{14} = 690; l_{15} = 707; (n = 15). \end{aligned}$$

Крім цього відомі також заплановані на m наступних часових інтервалів значення змінних K та L :

- $\{k^{(n,l)}_\tau, \tau = n + 1, n + 2, \dots, n + m\}$;

$$k^{(n,l)}_{16} = 43; k^{(n,l)}_{17} = 45; k^{(n,l)}_{18} = 47; (m = 3).$$

- $\{l^{(n,l)}_\tau, \tau = n + 1, n + 2, \dots, n + m\}$.

$$l^{(n,l)}_{16} = 720; l^{(n,l)}_{17} = 730; l^{(n,l)}_{18} = 740; (m = 3).$$

Виробнича функція $Q = Q(L, K)$ процесу випуску продукції має наступні властивості

- ✓ Граничний продукт по відношенню до сталих коштів виробничого процесу:

$$PK_K = a_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$$

є величиною сталою;

✓ Граничний продукт по відношенню до кількості найманих працівників:

$$PK_L = a_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$$

є величиною сталою.

Для кожного часового інтервалу $\tau = n + s, s = 1, 2, \dots, m$, встановлено «коридор бажаного рівня продукції»:

$$\{[q_{\tau}^{(H)*}, q_{\tau}^{(6)*}], \tau = n + s, s = 1, 2, \dots, m\}.$$

Відомо, що

$$[q_{16}^{(H)*}, q_{16}^{(6)*}] = [2060, 2080];$$

$$[q_{17}^{(H)*}, q_{17}^{(6)*}] = [2100, 2150];$$

$$[q_{18}^{(H)*}, q_{18}^{(6)*}] = [2165, 2200].$$

➤ Задача полягає в тому, щоб для кожного часового інтервалу:

$$\tau = n + s, s = 1, 2, \dots, m,$$

оцінити **ризик** $\{R_{\tau}, \tau = n + s, s = 1, 2, \dots, m\}$, того, що обсяг виробництва продукції (q_{τ}) вийде за межі встановленого коридору: $[q_{\tau}^{(H)*}, q_{\tau}^{(6)*}]$.

Тобто необхідно знайти ймовірність наступних подій

$$R_{\tau} = P\{q_{\tau} \notin [q_{\tau}^{(H)*}, q_{\tau}^{(6)*}]\}, \tau = n + 1, n + 2, \dots, n + m.$$

2. Оцінювання структурних параметрів моделі.

Для розв'язку сформульованої задачі скористаємося мірою ризику «типу небезпеки» (чи “*downside risk measures*”). Міри такого типу оцінюють «ступінь загрози» того, що відбудуться «небажані» події. До таких мір, зокрема, зараховують різного роду *кількісні прогнози* та оцінку їх *точності*. Наприклад – побудову *інтервалів певності* для точкових прогнозів.

Згідно з прийнятими припущеннями виробнича функція $Q = Q(L, K)$ є функцією зі *сталим граничним продуктом* по відношенню до обох факторів L та K .

Це означає, що $Q = Q(L, K)$ є лінійною функцією двох змінних та має наступний вигляд:

$$Q = a_0 + a_K \cdot k_t + a_L \cdot l_t.$$

При цьому вільний член (a_0) цієї функції треба інтерпретувати, як вартість *сталих* для даного виробничого процесу витрат, що *не залежать* від величини змінних факторів виробництва L та K .

Економетрична *модель* для виробничої функції Q має вигляд:

$$q_t = a_0 + a_K \cdot k_t + a_L \cdot l_t + \cdot \xi_t, t = 1, 2, \dots, n.$$

Підставою до будування моделі є набір числових даних, які стосуються змінних Q, K, L :

$$[Q/[K, L]] = \begin{bmatrix} q_1 & k_1 & l_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_n & k_n & l_n \end{bmatrix}.$$

Числа $\{q_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ це *емпіричні* значення змінної Q , тобто результат спостереження змінної Q для встановлених значень $\{k_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ та $\{l_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ змінних K та L .

Спостереження *неточні*, тобто припускаємо, що похибку вимірювання представляє випадкова величина ξ_t . Тому для остаточної побудови економетричної моделі необхідно ще сформулювати припущення щодо властивостей *випадкової складової* ξ_t .

Будемо вважати, що:

- ✓ Похибки $\xi_t, \xi_s, (t \neq s)$ в різних вимірюваннях *некорельовані*, тобто $Cov(\xi_t, \xi_s) = 0$, а їх розподіл такий самий для всіх спостережень.
- ✓ $\xi_t \Leftrightarrow N(0, \sigma^2), (t = 1, 2, \dots, n)$, тобто ξ_t має нормальний розподіл $N(0, \sigma^2)$ з параметрами $(0, \sigma^2)$.
- ✓ $E(\xi_t) = 0, D(\xi_t) = \sigma^2, (t = 1, 2, \dots, n)$.

Структурними параметрами моделі є коефіцієнти (a_0, a_K, a_L) . Використовуючи *Метод Найменших Квадратів*, оцінки $\{a^*_0, a^*_K, a^*_L\}$ цих параметрів знаходимо з умови:

$$\sum_{t=1}^n (q_t - a^*_0 - a^*_K \cdot k_t - a^*_L \cdot l_t)^2 \rightarrow \min$$

Нехай $\xi_{(t)} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$ – вектор випадкових доданків моделі, а $\mathbf{a}_{(k)} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_K \\ a_L \end{bmatrix}$ –

вектор структурних параметрів моделі. Тоді у матричному запису модель приймає вигляд:

$$\mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{X} \mathbf{a}_{(k)} + \xi_{(t)},$$

вектор структурних параметрів моделі. Тоді у матричному запису модель приймає вигляд:

$$\mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{X} \mathbf{a}_{(k)} + \xi_{(t)},$$

де $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & k_1 & l_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & k_n & l_n \end{bmatrix}$; $\mathbf{y}_{(t)} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$. Вектор $\mathbf{a}^*_{(k)} = \begin{bmatrix} a^*_0 \\ a^*_K \\ a^*_L \end{bmatrix}$ оцінок МНК структурних параметрів визначається формулою:

$$\mathbf{a}^*_{(k)} = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{y}_{(t)}.$$

Відповідь: $\mathbf{a}_{(k)} \approx \mathbf{a}^*_{(k)} = [61,141; 24,089; 1,351]^T$.

3. Оцінювання параметрів стохастичної структури моделі.

Теоретичні значення $y_{(t)}^* = q_t^*$ моделі визначаються за формулою:

$$q_t^* = a^*_{0} + a^*_{K} \cdot k_t + a^*_{L} \cdot l_t, \quad t = 1, 2, \dots, n;$$

або у матричному запису: $\mathbf{y}_{(t)}^* = \mathbf{X} \cdot \mathbf{a}^*_{(k)}$.

Решити моделі $\{e_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ підраховуємо за формулою:

$$e_t = q_t - q_t^*, \quad t = 1, 2, \dots, n;$$

Параметром стохастичної структури моделі, що розглядається, є невідома дисперсія $D(\xi_t) = \sigma^2$ випадкових доданків $\xi_t, t = 1, 2, \dots, n$. Незміщена статистична оцінка σ^{*2} для параметру σ^2 стохастичної структури моделі визначається формулою:

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{n-3} \sum_{t=1}^n (q_t - q_t^*)^2 = \frac{1}{n-3} \cdot \sum_{t=1}^n (e_t)^2.$$

Статистичну оцінку σ^* для стандартного відхилення σ випадкового доданку ξ_t обчислюємо за формулою: $\sigma^* = \sqrt{\sigma^{*2}}$.

Відповідь: $\sigma^2 \approx \sigma^{*2} = 417,737$; $\sigma^* = 20,439$.

Встановимо тепер *точність* отриманих оцінок структурних параметрів моделі. Вектор $\mathbf{a}^*_{(k)} = \{a^*_{0}, a^*_{K}, a^*_{L}\}$ визначає незміщені оцінки структурних параметрів моделі (a_0, a_K, a_L), тобто:

$$E(a^*_{0}) = a_0, \quad E(a^*_{K}) = a_K, \quad E(a^*_{L}) = a_L.$$

Тому:

$$|a^*_{0} - a_0| \approx S^*(a_0) = \sqrt{D(a^*_{0})};$$

$$|a^*_{K} - a_K| \approx S^*(a_K) = \sqrt{D(a^*_{K})};$$

$$|a^*_{L} - a_L| \approx S^*(a_L) = \sqrt{D(a^*_{L})}.$$

Якщо виконуються прийняті відносно випадкових доданків ξ_t моделі умови, то випадковий вектор $\mathbf{a}^*_{(k)}$ має 3-х вимірний нормальний розподіл з параметрами $(\mathbf{a}_{(k)}; \sigma^2 \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1})$:

$$\mathbf{a}^*_{(k)} \Leftrightarrow N(\mathbf{a}_{(k)}; \sigma^2 \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1}).$$

Замінюючи незміщеною статистичною оцінкою σ^{*2} невідоме значення параметру стохастичної структури моделі σ^2 , отримуємо наступну формулу для оцінки коваріаційної матриці $\mathbf{D}^2(\mathbf{a}^*_{(k)})$ вектора $\mathbf{a}^*_{(k)}$:

$$\mathbf{D}^2(\mathbf{a}^*_{(k)}) = \sigma^{*2} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1}.$$

Відповідь:

$$(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 3,578 & 0,118 & -0,013 \\ 0,118 & 0,008 & -0,001 \\ -0,013 & -0,001 & 0,000 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}^2(\mathbf{a}^*_{(k)}) = \begin{bmatrix} 1494,834 & 49,282 & -5,574 \\ 49,282 & 3,424 & -0,287 \\ -5,574 & -0,287 & 0,0268 \end{bmatrix}$$

$$D(a^*_{0}) = 1494,834; \quad D(a^*_{K}) = 3,424; \quad D(a^*_{L}) = 0,0268.$$

$$|a^*_{0} - a_0| \approx S^*(a_0) = 38,663; \quad |a^*_{K} - a_K| \approx S^*(a_K) = 1,850; \quad |a^*_{L} - a_L| \approx S^*(a_L) = 0,164.$$

4. Відповідність моделі емпіричним даним.

Кількісною мірою ступеня згідності побудованої моделі з емпіричними даними є два множники R^2 та ϕ^2 що визначаються формулами:

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (q^*_t - \bar{q})^2}{\sum_{t=1}^n (q_t - \bar{q})^2}, \quad (\bar{q} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n q_t).$$

$$\phi^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (q_t - q^*_t)^2}{\sum_{t=1}^n (q_t - \bar{q})^2}, \quad (\bar{q} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n q_t).$$

Ці множники змінюються в межах: $0 \leq R^2 \leq 1$; $0 \leq \phi^2 \leq 1$. Сума

$S_q^2 = \sum_{t=1}^n (q_t - \bar{q})^2$ в знаменнику цих формул оцінює «повну змінність»

величини Q , тобто змінність емпіричних значень $\{q_t, t = 1, 2, \dots, n\}$.

Відповідно сума $S_{q^*}^2 = \sum_{t=1}^n (q^*_t - \bar{q})^2$ в чисельнику R^2 дає оцінку

«повної змінності» теоретичних значень $\{q^*_t, t = 1, 2, \dots, n\}$, обчислених на основі збудованої моделі.

Тому R^2 вказує, в якій мірі зміни величини Q знайшли своє відображення в побудованій моделі, тобто яку частину від загальної «змінності» Q пояснює економетрична модель.

В чисельнику ϕ^2 знаходиться сума квадратів решт моделі:

$S_\xi^2 = \sum_{t=1}^n (q_t - q^*_t)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2$. Тобто S_ξ^2 є мірою тієї частини від загальної

«змінності» Q , яку модель не пояснює.

Отже ϕ^2 вказує, яку частину від загальної «змінності» Q модель не пояснює.

Для лінійної моделі з багатьма змінними, збудованої на основі методу найменших квадратів, справедлива наступна тотожність:

$$\sum_{t=1}^n (q_t - \bar{q})^2 = \sum_{t=1}^n (q^*_t - \bar{q})^2 + \sum_{t=1}^n (q_t - q^*_t)^2,$$

тобто $R^2 + \phi^2 = 1$. Звідси простий висновок:

- Моделі тим краще описує емпіричні дані, чим R^2 ближче до 1;
- Моделі тим краще описує емпіричні дані, чим ϕ^2 ближче до 0.

Відповідь: $R^2 = 0,9972$; $\phi^2 = 0,0028$; $R^2 + \phi^2 = 1$.

2.6. Побудова виробничих прогнозів.

1. Точковий прогноз та помилка прогнозу.
2. Інтервальний прогноз.
3. Ефективний алгоритм обчислення прогнозів значень.
4. Оцінювання ризиків у виробничих процесах.

1. Точковий прогноз та помилка прогнозу.

В якості *прогностичної* моделі використовуємо побудовану *економетричну модель* для виробничої функції $Q = Q(L, K)$.

$$q^*_t = a^*_{0} + a^*_{K} \cdot k_t + a^*_{L} \cdot l_t.$$

Згідно з головним принципом економетричного прогнозування точковий прогноз $\{q^{(np)}_t, t = n + 1, n + 2, \dots, n + m\}$ для змінної Q визначаємо, продовжуючи модель в часовий інтервал прогнозу, тобто шляхом екстраполяції збудованої функції q^* :

$$q^{(np)}_t = a^*_{0} + a^*_{K} \cdot k^{(np)}_t + a^*_{L} \cdot l^{(np)}_t, t = n + 1, n + 2, \dots, n + m.$$

$$\text{Відповідь: } q^{(np)}_{16} = 2069,55; q^{(np)}_{17} = 2131,23; q^{(np)}_{18} = 2192,92.$$

З метою оцінки точності прогнозування використовується *помилка прогнозу*, тобто число, що визначається рівністю:

$$e_{\tau} = q_{\tau} - q^{(np)}_{\tau}, \tau = n + s, s > 0.$$

Якщо виконуються прийняті відносно моделі припущення, то e_{τ} є випадковою величиною, що має нормальний розподіл з параметрами:

$$E(e_{\tau}) = 0;$$

$$D(e_{\tau}) = \sigma^2 \cdot [1 + \mathbf{x}_{\alpha(k)} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot (\mathbf{x}_{\alpha(k)})^T].$$

Тобто $e_{\tau} \Leftrightarrow N(0; S^2(e_{\tau}))$, де

$$S^2(e_{\tau}) = \sigma^2 \cdot [1 + \mathbf{x}_{\alpha(k)} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot (\mathbf{x}_{\alpha(k)})^T],$$

а

$$\mathbf{x}_{\alpha(k)} = (k^{(np)}_{\tau}, l^{(np)}_{\tau}) = (k^{(np)}_{n+s}, l^{(np)}_{n+s}), \tau = n + s, s > 0,$$

значення змінних K та L в інтервалі прогнозу $\tau = n + s$.

Замінюючи невідоме значення параметра стохастичної структури моделі σ^2 його незміщеною статистичною оцінкою σ^{*2} отримаємо наступну формулу для оцінки $S^{*2}(e_{\tau})$ дисперсії $S^2(e_{\tau}) = D(e_{\tau})$ помилки прогнозу e_{τ} :

$$S^{*2}(e_{\tau}) = \sigma^{*2} \cdot [1 + \mathbf{x}_{\alpha(k)} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot (\mathbf{x}_{\alpha(k)})^T].$$

Таким чином:

$$|e_{\tau}| = |q_{\tau} - q^{(np)}_{\tau}| \approx S^*(e_{\tau}) = \sqrt{S^{*2}(e_{\tau})}.$$

$$\text{Відповідь: } x_{16(k)} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot (x_{16(k)})^T = 0,3861; x_{17(k)} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot (x_{17(k)})^T = 0,3656; \\ x_{18(k)} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot (x_{18(k)})^T = 0,3685.$$

2. Інтервальний прогноз.

Крім визначення точкового прогнозу та дослідження його точності, згідно з загальною процедурою економетричного прогнозування, будується також *інтервальний прогноз*:

Інтервальний прогноз - це числовий інтервал, який з заданою наперед ймовірністю «покриває» точне (але *невідоме*) значення змінної, що прогнозується.

Припустимо, що задано близьке до одиниці число β . Задача побудови інтервального прогнозу формулюється наступним чином.

➤ Необхідно визначити числовий інтервал $[d_\tau^*, g_\tau^*]$ таким чином, щоб виконувалась рівність:

$$P\{d_\tau^* < q_\tau < g_\tau^*\} = \beta, \tau = n + s, s > 0.$$

Оскільки $e_\tau \Leftrightarrow N(0; S^2(e_\tau))$, і на підставі властивостей нормального розподілу випадкова величина:

$$\frac{N(0, S^2(e_{n+s}))}{\sqrt{S^2(e_{n+s})}} \Leftrightarrow N(0; 1),$$

має нормальний стандартний розподіл, то:

$$\frac{e_{n+s}}{\sqrt{S^2(e_{n+s})}} \Leftrightarrow N(0; 1).$$

Тому якщо $S^{*2}(e_\tau)$ означає дисперсію $S^2(e_\tau) = D(e_\tau)$ помилки прогнозу e_τ , в якій невідоме значення параметру σ^2 замінено його незміщеною статистичною оцінкою σ^{*2} , то статистика

$$\frac{e_{n+s}}{\sqrt{S^{*2}(e_{n+s})}} \Leftrightarrow t_{(n-3)}$$

буде мати розподіл t -Стюдента з $(n - 3)$ степенями свободи [3].

✓ Знайдемо коефіцієнт t_β з умови:

$$P\{-t_\beta < t_{(n-2)} < t_\beta\} = \beta.$$

Тоді: $P\left\{-t_\beta < \frac{e_{n+s}}{\sqrt{S^{*2}(e_{n+s})}} < t_\beta\right\} = \beta$. Або рівнозначно:

$$P\{q_{\tau-t_\beta}^{(np)} \cdot \sqrt{S^{*2}(e_\tau)} < q_\tau < q_{\tau+t_\beta}^{(np)} + t_\beta \cdot \sqrt{S^{*2}(e_\tau)}\} = \beta, \tau > n.$$

А це і означає, що числовий інтервал:

$$[q_{\tau-t_\beta}^{(np)} \cdot \sqrt{S^{*2}(e_\tau)} ; q_{\tau+t_\beta}^{(np)} + t_\beta \cdot \sqrt{S^{*2}(e_\tau)}]$$

визначає інтервальний прогноз для значення q_τ , $\tau > n$ змінної Q .

Нехай $\beta = 0,95$. Враховуючи, що $n = 15$, а отже $n - 3 = 12$, та використовуючи функцію «СТБЮДЕНТ.ОБР» аркушу «Excel» знаходимо коефіцієнт t_β з умови:

$$P\{-t_\beta < t_{(12)} < t_\beta\} = 0,95.$$

Або:

$$P\{t_{(12)} < t_\beta\} = 0,975.$$

Відповідь: $t_\beta = 2,179$.

Впорядкуємо проведені в аркуші «Excel» обчислення у вигляді наступної таблиці:

τ	$q_{\tau}^{(np)}$	$S^{*2}(e_\tau)$	$S^*(e_\tau)$	d_τ^*	g_τ^*
16	2069,55	579,03	24,063	2017,119	2121,977
17	213123	570,47	23,884	2079,195	2183,274
18	2192,92	571,68	23,909	2140,826	2245,016

3. Ефективний алгоритм обчислення прогнозаних значень.

Економетрична лінійна модель, побудована з використанням методу найменших квадратів, дає можливість при знаходженні прогнозів (як точкових, так і інтервальних) досить ефективно провести необхідні обчислення.

Нехай

$$\{x_{\tau(k)} = (k^{(np)}, l^{(np)}) = (k^{(np)}_{n+s}, l^{(np)}_{n+s}), s = 1, 2, \dots, m\};$$

та

$$\mathbf{X}_{(m)} = \begin{bmatrix} 1 & k_{n+1}^{(nl)} & l_{n+1}^{(nl)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & k_{n+m}^{(nl)} & l_{n+m}^{(nl)} \end{bmatrix};$$

відповідно вектори значень змінних K та L для кожного часового інтервалу прогнозу $\tau = n + s$, $s = 1, 2, \dots, m$, та матриця, що складається з векторів $\{x_{\tau(k)}, \tau = n + s, s = 1, 2, \dots, m\}$.

Позначимо символом \mathbf{O} матрицю розмірності $n \times m$, що складається з самих нулів.

Символ $\bar{0}$ буде позначати вектор розмірності m , що складається з самих нулів, а символом \mathbf{I} – одиничну матрицю розмірності $m \times m$.

Побудуємо матрицю \mathbf{A} та вектор y_m^n наступним чином:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{O} \\ \mathbf{X}_{(m)} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, y_m^n = \begin{bmatrix} y_{(i)} \\ \bar{0} \end{bmatrix}$$

Замінюючи в формулі $a_{(k)}^* = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot y_{(i)}$ для оцінок МНК матрицю \mathbf{A} матрицею \mathbf{X} , а вектор $y_{(i)}$ вектором y_m^n , безпосередньою перевіркою можемо переконатись в справедливості наступної рівності:

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot y_m^n = \begin{bmatrix} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T y_{(i)} \\ \mathbf{X}_{(m)} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T y_{(i)} \end{bmatrix}.$$

Тобто оцінювання структурних параметрів та обчислення точкових прогнозів для всіх m часових інтервалів $\tau = n + s, s = 1, 2, \dots, m$, можна поєднати:

- ✓ Перші k координат отриманого вектора $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot y_m^n$ – це оцінки МНК структурних параметрів;
- ✓ Наступні m його координат – це точкові прогнози для всіх m часових інтервалів $\tau = n + s, s = 1, 2, \dots, m$.

Безпосередньою перевіркою переконуємось також в справедливості наступної рівності:

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} & (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}_{(m)}^T \\ \mathbf{X}_{(m)} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} & \mathbf{I} + \mathbf{X}_{(m)} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}_{(m)}^T \end{bmatrix}.$$

Отже обчисливши матрицю $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1}$, маємо можливість:

- Обчислити *коваріаційну матрицю*:

$$\mathbf{D}^2(\mathbf{a}^*_{(k)}) = \sigma^2 \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1}$$

вектора $\mathbf{a}^*_{(k)}$ оцінок структурних параметрів.

- Побудувати *інтервальні прогнози* для всіх m часових інтервалів.

Необхідні для цього величини

$$[1 + \mathbf{x}_{\tau(k)} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot (\mathbf{x}_{\tau(k)})^T], \tau = n + 1, n + 2, \dots, n + m,$$

розташовані на головній діагоналі матриці:

$$[\mathbf{I} + \mathbf{X}_{(m)} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}_{(m)}^T].$$

4. Оцінювання ризиків у виробничих процесах.

Побудову *інтервалів певності* для точкових прогнозів та оцінку їх *точності* – теж можна трактувати як свого роду кількісне вимірювання ризиків, пов'язаних з процесом прогнозування.

В підрозділі 2.5 була сформульована задача, що безпосередньо стосується оцінювання *ризик*у реалізації «небажаних» з точки зору прогнозування економічних явищ подій, а саме.

- Для кожного часового інтервалу $\{\tau = n + s, s = 1, 2, \dots, m\}$, що належить до «майбутнього» необхідно оцінити ризик того, що обсяг виробництва продукції (q_τ) вийде за межі встановленого коридору $[q_\tau^{(n)*}, q_\tau^{(6)*}]$.

Міри, які оцінюють «ступінь загрози» реалізації «небажаних подій» в теорії ризику дістали назву «мір ризику типу небезпеки» (англ. “downside risk measures”).

Використовуючи обчислені інтервали певності для точкових прогнозів (тобто інтервальні прогнози), побудуємо одну з них.

Порядок обчислень наступний:

- Спочатку, використовуючи числові дані, визначаємо точковий прогноз

$$\{q^{(np)}_{\tau} \mid \tau = n + 1, n + 2, \dots, n + m\}$$

для змінної Q .

Згідно з наведеною теорією, випадкова величина:

$$e_{n+s} = q_{n+s} - q^{(np)}_{n+s} \Leftrightarrow N(0; S^2(e_{n+s})),$$

має нормальний розподіл з параметрами:

$$E(e_{n+s}) = 0;$$

$$D(e_{n+s}) = \sigma^2 \cdot [1 + \mathbf{x}_{\alpha(k)} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot (\mathbf{x}_{\alpha(k)})^T].$$

Тобто

$$S^2(e_{n+s}) = \sigma^2 \cdot [1 + \mathbf{x}_{\alpha(k)} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot (\mathbf{x}_{\alpha(k)})^T],$$

де

$$\mathbf{x}_{\alpha(k)} = (k^{(nn)}_{n+s}, l^{(nn)}_{n+s}).$$

Тому:

$$\begin{aligned} P\{q_{\tau} \leq q^*\} &= P\{q_{n+s} \leq q^*\} = P\{q_{n+s} - q^{(np)}_{n+s} \leq q^* - q^{(np)}_{n+s}\} = \\ &= P\{N(0; S^2(e_{n+s})) \leq q^* - q^{(np)}_{n+s}\}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} R_{\tau} &= P\{q_{\tau} \notin [q_{\tau}^{(h)*}, q_{\tau}^{(e)*}]\} = \\ &= 1 - P\{q_{\tau}^{(h)*} \leq q_{\tau} \leq q_{\tau}^{(e)*}\}, \tau = n + 1, \dots, n + m. \end{aligned}$$

Оцінювання ризику з використанням нормального розподілу.

Дисперсія $S^2(e_{\tau}) = D(e_{\tau})$ помилки прогнозу e_{τ} залежить від невідомого параметру σ^2 , а отже точне її значення невідоме. Тому якщо замінити σ^2 незміщеною її статистичною оцінкою σ^{*2} , отримаємо оцінку $S^{*2}(e_{\tau})$ дисперсії $S^2(e_{\tau})$. Таким чином можна знайти *наближене* значення величини ризику (R_{τ} , $\tau > n$):

$$1 - R_{\tau} \approx P\{q_{\tau}^{(h)*} - q^{(np)}_{\tau} \leq N(0; S^{*2}(e_{\tau})) \leq q_{\tau}^{(e)*} - q^{(np)}_{\tau}\}, \tau > n.$$

$$\text{Або: } 1 - R_{n+s} \approx \Phi\left(\frac{q_{\tau}^{(e)*} - q^{(np)}_{n+s}}{S^*(e_{n+s})}\right) - \Phi\left(\frac{q_{\tau}^{(h)*} - q^{(np)}_{n+s}}{S^*(e_{n+s})}\right), s = 1, \dots, m.$$

$$\begin{aligned} \text{Позначимо: } S_{\tau}^{(e)} &= \frac{q_{\tau}^{(e)*} - q^{(np)}_{n+s}}{\sqrt{S^{*2}(e_{n+s})}}; \quad S_{\tau}^{(h)} = \frac{q_{\tau}^{(h)*} - q^{(np)}_{n+s}}{\sqrt{S^{*2}(e_{n+s})}}, \text{ де} \\ S^{*2}(e_{\tau}) &= \sigma^{*2} \cdot [1 + \mathbf{x}_{\alpha(k)} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot (\mathbf{x}_{\alpha(k)})^T], \end{aligned}$$

Тоді: $1 - R^*_\tau = \Phi(S^{(\theta)}_\tau) - \Phi(S^{(h)}_\tau)$.

Відповідь:

Впорядкуємо проведені в аркуші «Excel» обчислення у вигляді наступної таблиці:

$q_\tau^{(h)*}$	$q_\tau^{(\theta)*}$	$q_\tau^{(\theta)*} - q_\tau^{(np)}$	$q_\tau^{(h)*} - q_\tau^{(np)}$	$S^{*2}(e_\tau)$	$\Phi(S^{(\theta)}_\tau)$	$\Phi(S^{(h)}_\tau)$	$1 - R^*_\tau$	R^*_τ
2060	2080	10,451	-9,548	579,03	0,668	0,346	0,322	0,678
2100	2150	18,765	-31,235	570,47	0,784	0,095	0,688	0,312
2165	2200	7,079	-27,921	571,68	0,616	0,121	0,495	0,505

Оцінювання ризику з використанням t -розподілу Стьюдента.

Точнішу оцінку ($R^*_\tau, \tau > n$) для величини ризику ($R_\tau, \tau > n$) отримаємо, якщо використаємо доведений раніше результат:

$$\frac{e_{n+s}}{\sqrt{S^{*2}(e_{n+s})}} = \frac{q_{n+s} - q_{n+s}^{(np)}}{\sqrt{S^{*2}(e_{n+s})}} \Leftrightarrow t_{(n-3)}$$

З цієї рівності маємо: $q_{n+s} = q_{n+s}^{(np)} + t_{(n-2)} \cdot S^*(e_{n+s})$. Таким чином:

$$\begin{aligned} 1 - R_{n+s} &\approx 1 - R^*_\tau = P\{q_\tau^{(h)*} \leq q_\tau \leq q_\tau^{(\theta)*}\} = \\ &P\{q_\tau^{(h)*} \leq q_{n+s}^{(np)} + t_{(n-2)} \cdot \sqrt{S^{*2}(e_{n+s})} \leq q_\tau^{(\theta)*}\} = \\ &= P\left\{\frac{q_\tau^{(\theta)*} - q_{n+s}^{(np)}}{\sqrt{S^{*2}(e_{n+s})}} < t_{(n-2)} < \frac{q_\tau^{(h)*} - q_{n+s}^{(np)}}{\sqrt{S^{*2}(e_{n+s})}}\right\}, s = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Нехай $S_{(n)}(x) = P\{t_{(n)} < x\}, -\infty < x < \infty$, означає функцію розподілу величини $t_{(n)}$, що має розподіл t -Стьюдента з (n) степенями свободи. Тоді:

$$R_{n+s} \approx R^*_\tau = 1 - \left(S_{(n-3)}\left(\frac{q_\tau^{(\theta)*} - q_{n+s}^{(np)}}{\sqrt{S^{*2}(e_{n+s})}}\right) - S_{(n-3)}\left(\frac{q_\tau^{(h)*} - q_{n+s}^{(np)}}{\sqrt{S^{*2}(e_{n+s})}}\right) \right), s = 1, \dots, m.$$

Позначимо:

$$S_\tau^{(\theta)} = \frac{q_\tau^{(\theta)*} - q_{n+s}^{(np)}}{\sqrt{S^{*2}(e_{n+s})}}; S_\tau^{(h)} = \frac{q_\tau^{(h)*} - q_{n+s}^{(np)}}{\sqrt{S^{*2}(e_{n+s})}}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} 1 - R^*_\tau &= S_{(n-3)}(S_\tau^{(\theta)}) - S_{(n-3)}(S_\tau^{(h)}). \\ S^{*2}(e_\tau) &= \sigma^{*2} \cdot [1 + \mathbf{x}_{\alpha(k)} \cdot (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot (\mathbf{x}_{\alpha(k)})^T], \end{aligned}$$

Відповідь:

Впорядкуємо проведені в аркуші «Excel» обчислення у вигляді наступної таблиці:

τ	$q_\tau^{(h)*}$	$q_\tau^{(\theta)*}$	$S_\tau^{(h)}$	$S_\tau^{(\theta)}$	$S_{(n-3)}(S_\tau^{(\theta)})$	$S_{(n-3)}(S_\tau^{(h)})$	$1 - R^*_\tau$	R^*_τ
16	2060	2080	0,434	-0,397	0,664	0,349	0,315	0,685
17	2100	2150	0,786	-1,308	0,776	0,108	0,669	0,331
18	2165	2200	0,296	-1,168	0,614	0,133	0,481	0,519

2.7. Фінансовий ринок та ринок криптовалют.

1. Взаємозв'язок фінансового та крипто-ринків. 2. Криптовалюти як різновидність фіатних грошей. 3. Криптовалюта як елемент структури фінансового ринку.

1. Взаємозв'язок фінансового та крипто-ринків.

В широкому розумінні економічна наука розглядає «ринок», як певну сукупність характерних для нього «об'єктів обміну» (товарів та послуг), і трактує його, як систему економічних відносин, що існують між суб'єктами цього ринку, та стосуються купівлі-продажу цих товарів та послуг.

Отже в загальному вигляді згідно, з цією концепцією, фінансовий ринок – це ринок, на якому є *попит* та *пропозиція* на специфічний *товар* – *фінансові ресурси*.

Значення фінансового ринку полягає в тому, що він *забезпечує* економіку *інвестиціями*.

В залежності від того, які «фінансові інструменти» є об'єктом зацікавлення його *суб'єктів*, ще зовсім недавно на фінансовому ринку виділялись наступні сегменти:

- *Кредитно-депозитний;*
- *Фондовий;*
- *Страховий;*
- *Валютний;*
- *Дорогоцінних банківських металів.*

Розвиток телекомунікаційних технологій і засобів шифрування дозволив створити новий тип грошей – *криптовалюти*, тобто різновид *цифрових грошей*, створення і контроль за якою базується на криптографічних методах

Тому впродовж останнього десятиріччя серед «традиційних» сегментів фінансового ринку з'явився новий:

- *Ринок криптовалют, або крипторинк.*

- Криптовалюта (англ. «*crypto currency*») – створена на основі сучасних математичних методів, інформаційних технологій та телекомунікаційних засобів зв'язку, різновидність *цифрової валюти*.

В умовах ринкової економіки всі сегменти фінансового ринку є достатньо розвиненими. Багатовимірний характер структури фінансового ринку, наявність різних фінансових установ та використання цими інститутами різних інструментів, а також пропонування різних фінансових послуг створює можливість для максимальної мобілізації та ефективного використання наявних фінансових ресурсів.

Хоч остаточно місце *ринку криптовалют* в сучасній фінансовій системі ще *остаточно не визначилось* і зараз активно формується, капіталізація криптовалют досягла такого рівня, що не рахуватися з її впливом на фінансові фондові ринки неможливо.

➤ Перш за все тому, що без вивчення механізмів цього впливу неможливо пояснити та спрогнозувати тенденції на фондовому ринку.

Сучасний ринок *біткойнів* та *альткойнів* вже досить зрілий, щоб інтегруватися в глобальні фінансові ринки. Тому в даний момент біткойн та інші криптовалюти (а їх вже більше 2000) – це один із важливих елементів фінансового ринку. Їх вартість не є сталою, а визначається економічною ситуацією та станом валютного ринку.

- Як і у випадку будь-якого іншого фінансового інструменту, ціна біткойна породжується згодою співтовариства прийняти його у якості *обмінної вартості*.

Розвиток фінансово-банківської сфери та засобів шифрування призвели до того, що криптовалюта на практиці стає *транснаціональною* і, без сумніву, впливає на різні аспекти фінансового ринку, формуючи значну його частину.

Не варто нікого переконувати на скільки складними та багатограними є проблеми, що пов'язані з функціонуванням криптовалют. Очевидно, що необхідно вести мову про *взаємний* вплив цих ринків («традиційного» та «крипторинку») один на одного, адже сьогодні крипторининок має вже самостійне значення і розглядається як *окремий сегмент* на фінансовому ринку.

Знання механізмів цієї *взаємодії* дозволяє *обґрунтовувати* та *модельовати* перспективи розвитку *фінансового ринку* під впливом *ринку криптовалют*, і навпаки, що є одним із основних елементів різноманітних моделей *управління ризиком* на цих ринках.

2. Криптовалюти як різновидність фіатних грошей.

Перш за все цей вплив проявляється в безпосередніх інвестиціях учасників фінансового ринку в криптовалюту – *цифрові* гроші відбирають частину ринку *фіатних* грошей.

І хоча говорити про те, що криптовалюти взагалі замінять *долар* чи *євро* ще немає підстав, то їх вплив на фінансовий ринок по цьому механізму буде тільки посилюватись:

- Доля та значимість сегменту крипторинку в загальній структурі буде тільки розвиватися, зростати та розширюватися.

Загалом розрізняють два види грошей:

- Повноцінні (товарні та металеві);
- Неповноцінні (паперові та кредитні).

Повноцінні та неповноцінні гроші розрізняють за критерієм матеріально-речового змісту:

- Номінальна вартість повноцінних грошей відповідає вартості благородного металу, що міститься в них
- Неповноцінні гроші не мають власної субстанціональної вартості.

До них належать, зокрема, паперові гроші, які з точки зору фінансової науки зараховують до категорії *фіатних* грошей.

- *Фіатні грошей* (англ. *fiat currency*), або *фідуціарні гроші* – це звичайні засоби оплати (паперові купюри, монети, електронні гроші на банківських картках тощо).

Назва «*фіатні гроші*» походить від лат. *fiat* – декрет, наказ (дослівно «хай буде так»), тому що:

- *Їх цінність походить не від власної вартості чи гарантії обміну на золото, валюту, або які-небудь інші активи, а від державного наказу (fiat) використання їх як засобу платежу.*

В ФРС (Федеральна резервна система США) назвали біткоїн ще однією різновидністю *фіатних* грошей. Економісти Нью-Йоркського відділення ФРС вважають, що:

- *Цінність фіатних грошей базується виключно на вірі в те, що вони будуть прийматися, як платіжний засіб в обмін на товари та послуги.*

Тому, на їх думку, саме біткоїн *повністю* відповідає цьому визначенню, оскільки гроші, що випускаються центральними банками, не можуть в повній мірі вважатися фіатними:

- ✓ Адже вони мають «*статус законного засобу платежу*».

Так, чи інакше, але криптовалюти мають *властивості грошей*, тому що *суспільство вважає їх унікальні особливості корисними*. Більше того – у криптовалют є одна важлива риса, що відрізняє їх від всіх інших грошових інструментів:

- *Вони пропонують принципово новий механізм обміну та передачі різних видів активів.*

Варто пригадати, що у фінансових системах європейських країн у другій половині 19 та на початку 20 століття переважав «*Золотий стандарт*», тобто:

➤ «Золотий стандарт» – це грошова система, що ґрунтується на золоті.

Держава гарантувала забезпечення золотом випущених в обіг грошей та встановлювала *тверду й незмінну* відповідність національної грошової одиниці певній, чітко визначеній кількості золота.

- США перебували в системі золотого стандарту з 1879 р., та вийшли із цієї системи в 1933 р.

Курс долара на рівні \$35 за унцію золота, встановлений урядом в 1934 р. тримався до 1971 р., коли США остаточно ліквідували золотий стандарт та припинили конвертувати долари на золото за фіксованим курсом.

- Австрійська школа економіки вважає *відміну* золотого стандарту *головною причиною* економічних криз.

Це спричинило неконтрольовану емісію та ріст інфляції: приміром ціна за унцію золота зросла до \$1000.

3. Криптовалюта як елемент структури фінансового ринку.

Ефективним способом дослідження механізмів впливу криптовалют на фінансові та фондові ринки є визначення *кількісних оцінок* взаємозалежності та взаємовпливу цін на цифрові гроші та основними показниками ринків.

- Перш за все це взаємозв'язок між *ціною криптовалют* та *динамікою індексів* фондового ринку.

Маємо все необхідне, щоб ретельно в деталях дослідити цей зв'язок. Математична статистика пропонує безліч ефективних інструментів для цього. Дані з усіх фондових ринків загальнодоступні і щохвили актуалізуються, а спроможність сучасних обчислювальних мереж дозволяє миттєво отримувати значення необхідних нам параметрів.

- Дослідження показують, що з кожним роком *кореляція тенденцій ринків* стає більш помітною.

В фінансовій математиці існує багато різноманітних кількісних параметрів, що характеризують фінансовий інструмент. Для захисних активів одним з ключових є їх *волатильність* або *мінливість*.

➤ Волатильність (*мінливість* англ. *Volatility*) – показник, який в класичному статистичному аналізі характеризує ступінь коливання (змінність) значень часових рядів.

- У фінансовій статистиці цей показник характеризує тенденцію ринкової ціни або доходу *змінюватися* з часом.

Для оцінки цього фактору на фондовому ринку є *індекс волатильності VIX (Volatility Index VIX)*.

- VIX представляє припущення інвесторів про майбутні зміни фондового ринку.
Тобто їх прогноз щодо *«розмаху руху»* ринкових цін.

В фінансовому аналізі Індекс волатильності VIX називається ще *«фактором страху»* інвесторів.

В даний момент волатильність криптовалют (зокрема *біткоіна*) відносно *висока*. Однак статистика динаміки фондового ринку доводить кореляцію індексу VIX з волатильністю криптовалют (зокрема *біткоіна*). Коріння цього явища слід шукати в психології інвесторів.

- Намагаючись зняти з себе (або принаймні послабити) *кредитний ризик*, пов'язаний з депозитами активів в банківській сфері, інвестори спрямовують їх до криптовалютних *«гаманців»* та бірж цифрових грошей.

З *практичної* точки зору це означає, що індекс VIX може бути корисним інструментом для прогнозування періодів високої мінливості цін біткойна та криптоактивів і навпаки.

- Практика прийняття інвестиційних рішень, які враховують наявність такої кореляції, показала, що незважаючи на свою відносно високу волатильність, біткоін однак може бути захисним активом в періоди істотних потрясінь на фондовому ринку.

Характерною особливістю фондових ринків є їх посилені та швидка реакція на всі події оточуючого життя, а особливо на суспільно-політичні явища. Ця рефлексивна властивість стосується також реакції на інші ринки, в том числі і на крипторинки.

- З *економічної* точки зору криптовалюти є практичним втіленням *концепції інформаційного середовища*.

Досвід останніх років переконливо показує, що це середовище намагається (*і небезуспішно*) стати альтернативою фіатним грошам, а отже претендує на свою долю фінансового ринку.

- Аналіз поведінки фінансових ринків останнім часом показує, що цифрові гроші (зокрема *біткоін*) проявляють себе як захисний актив, подібно до традиційних захисних активів таких як *золото, швейцарський франк* чи *японська ієна*.

Зростання суспільно-політичної напруженості та загострення інших дестабілізуючих чинників призводить до подорожання цих активів.

2.8. Інструменти аналізу динаміки економічних явищ.

1. Прогнозування економічної кон'юнктури. 2. Кон'юнктура ринку та циклічний характер економічного розвитку. 3. Економічний зміст дослідження кон'юнктури. 4. Часові ряди. 5. Типи часових рядів.

1. Прогнозування економічної кон'юнктури.

Оскільки прогноз економічної кон'юнктури є спеціальною різновидністю економічного прогнозу, то з формальної точки зору процес його визначення включає дві фази:

- Фаза діагностики минулого та
- Фаза визначення майбутнього.

Враховуючи особливості процесу визначення прогнозу економічної кон'юнктури, конкретизуємо завдання, які слід виконувати на етапі *статистичного аналізу* актуальної економічної ситуації. Цей етап можна вважати підготовчим, або етапом *економічного обстеження*, тому поділимо (умовно) його на декілька послідовних кроків.

- ✓ Вибравши для аналізу конкретний ринок, вивчаються спочатку всі його основні характеристики, умови функціонування, місце в загальній структурі ринку та інші деталі, що можуть мати значення при розв'язуванні поставлених задач.
- ✓ Розробляється *методологія* дослідження економічної кон'юнктури.

Зупинимось на цьому кроці більш детально та визначимо, що формує цю методологію.

- Залежно від обраного *сегмента* ринку, *типу* аналізованих економічних процесів та *типу* кон'юнктури, визначається відповідний *метод* вивчення динаміки цих процесів.

При цьому обираються необхідні *кількісні параметри*, що характеризують процеси, які досліджуються, та відповідні їм показники *динаміки*.

- Розробляються способи визначення за їх допомогою *тенденції* розвитку аналізованих процесів.

Підбираються відповідні методи для визначення *пропорції* між елементами системи, яка досліджується, та *оцінки* ринкового потенціалу.

- Підбираються відповідні *якісні показники* економічної кон'юнктури, тобто відповідна *економічна інтерпретація* кількісного аналізу динаміки аналізованих процесів.

- ✓ На наступному кроці збирається, нагромаджується та піддається попередній обробці необхідна *емпірична інформація*, що стосується як безпосередньо самого обраного для дослідження сегмента ринку, так і існуючої економічної кон'юнктури.

- ✓ На підставі результатів попередніх кроків *будується модель*, що відображає структуру та взаємозв'язки між елементами досліджуваного ринкового сегмента.
- ✓ На підставі збудованої моделі визначається *актуальний стан* досліджуваного ринкового сегмента, *пропорції* в його структурі окремих суб'єктів, а також стан ринку *в цілому*.
- ✓ При побудові моделі передбачаємо вибір необхідних математичних інструментів, які дозволяють вивчати поведінку системи *в цілому* та динаміку окремих її компонентів.
- ✓ Робляться спроби *передбачення* за допомогою побудованої моделі *майбутнього* розвитку економічної ситуації на вибраному сегменті ринку, тобто (згідно з визначенням) спроби дати *прогноз кон'юнктури* для вибраного до аналізу ринкового сегмента.

2. Кон'юнктура ринку та циклічний характер економічного розвитку.

Сукупність обставин, що виникли на ринку, актуальні умови, що визначають його стан, прийнято називати *кон'юнктурою ринку*.

- Кон'юнктура вказує на сукупність факторів та умов, що впливають на розвиток ринкових процесів.

Від кон'юнктури ринку, тобто від поточної ситуації, від сучасного економічного стану, залежить його функціонування: *розширення* або *скорочення*, *попит* та *пропозиція*, тощо. Тому вивчення кон'юнктури є важливою і дуже динамічною галуззю економічної науки, яка вивчає економічні процеси в умовах їх постійної зміни та розвитку. При цьому в дослідженнях *кон'юнктури ринку* можна виділити два напрямки:

- Кон'юнктура *загально-господарча*, (тобто *економічна*), яка характеризує стан ринкового економічного процесу в даний момент *в цілому*.
- Кон'юнктура *окремих товарних ринків*, яка вивчає зміни та коливання сфери виробництва та реалізації *конкретних* видів товарів.

Неважко помітити, що бувають періоди, коли «збіг обставин» сприятливий для економічної діяльності, допомагає *розвивати* виробництво та *збільшувати* прибуток. Причому такі сприятливі періоди характерні не лише для окремих галузей економіки, а й для всієї національної економіки.

Є також «*не найкращі часи*» для народного господарства, тобто періоди, *несприятливі* для його розвитку, коли темпи розвитку економіки *сповільнюються*, доходи *зменшуються*, а товари важко продати. Іншими словами:

- Економічне життя характеризується *циклічністю* розвитку, коли періоди зростання змінюються періодами занепаду.

Такі коливання називаються *циклами* ділової активності, або *циклами кон'юнктури*.

Економічні коливання – це *об'єктивний процес*.

Існує два типи коливань:

- ✓ *Нерегулярні* або *випадкові* коливання, що виникають внаслідок непередбачуваних випадкових факторів, природа яких часом має дуже складний характер.
- ✓ *Регулярні* коливання.

Регулярні коливання в свою чергу поділяються на:

- *Сезонні*, зумовлені природними та кліматичними факторами;
- *Циклічні*, пов'язані з існуванням фаз зростання та спаду економічної активності.

Циклічні коливання також можна розділити на дві групи:

- *Короткострокові* коливання, що охоплюють 7-11 років;
- *Довгострокові* коливання, що охоплюють 50-60 років.

Довгострокові коливання пов'язані з глобальними процесами, що відбуваються в суспільстві: *технологічними революціями, війнами, політичними революціями, змінами системи*, тощо.

3. Економічний зміст дослідження кон'юнктури.

Кон'юнктура ринку – це економічна ситуація на ринку, що характеризує взаємозв'язок між величезною кількістю різноманітних економічних показників, таких як:

- *попит і пропозиція;*
- *рівень цін і рівень товарних запасів;*

тощо.

Економічний зміст кон'юнктури визначає наступна ознака:

- Вивчаючи економічну ситуацію можна виділити *сукупність обставин*, які вказують на ймовірність *збільшення* або *зменшення* економічної активності в певному секторі економіки або в економічному житті в цілому.

Таким чином головне завдання спостереження за кон'юнктурою та її дослідження полягає в тому, щоб:

- *Виявити* ці обставини і *відгадати* часові періоди, в яких «збіг» цих обставин буде *сприятливим* для економічного розвитку, а в яких – *несприятливим*.

Іншими словами, завдання зводиться до прогнозування змін, що відбуваються на ринку

Дослідження кон'юнктури полягає у зборі, нагромадженню, обробці та систематизації необхідної інформації та визначення на її основі прогнозів кон'юнктури.

Проведення таких досліджень дозволяє прийняти правильне рішення при вирішенні наступної проблеми:

➤ Чи слушно у конкретний момент часу, за конкретних обставин, виходити з конкретним "товаром" на конкретний ринок.

При цьому потрібно розрізнити поняття

- «Дослідження кон'юнктури» та
- «Маркетингове дослідження».

Іноді вважають, що дослідження кон'юнктури це складова частина маркетингових досліджень. Часто це пов'язано з тим, що при проведенні маркетингових досліджень конкретних товарних ринків використовуються методи, подібні до тих, що й при дослідженні кон'юнктури. Отже між цими типами досліджень безперечно існує певний зв'язок.

Однак варто підкреслити, що сфера «дослідження кон'юнктури» набагато ширша, ніж дослідження товарних ринків, яке проводиться в процесі маркетингових досліджень.

Дослідження кон'юнктури включає також:

- ✓ Вивчення фінансових ринків;
- ✓ Передбачає дослідження процесів на макроекономічному рівні;
- ✓ Вивчення процеси циклічності розвитку галузей економіки;
- ✓ Аналіз циклічності розвитку регіональної та світової економіки, тощо.

Тому підводячи підсумки, можна сказати:

«Дослідження кон'юнктури» – це окремий розділ економічної науки, який має власний предмет для вивчення, власну мету дослідження, використовує відповідний інструментарій та методологією проведення досліджень, і (що найголовніше) має суттєві практичні застосування.

4. Часові ряди.

Представимо кілька статистичних засобів дослідження динаміки явищ.

Про динаміку говоримо у тому випадку, коли явище розглядається на певному часовому проміжку, а нас цікавлять зміни, що в ньому відбуваються.

Предметом нашої уваги будуть методи *виявлення статистичних закономірностей*, що можна спостерігати на протязі *цього часу*. Розглянемо, яким чином можна дослідити ці закономірності, вивчаючи поведінку певних числових показників, що характеризують ці явища.

Очевидно, що подібні дослідження повинні спиратися на фактичні спостережень реальних явищ, що відбуваються в дійсності, тобто на *емпіричні дані*. Тому розпочати слід від *способу презентації* таких даних у випадку, коли метою дослідження є вивчення *динаміки явищ*.

- Головним зняряддям та основою для підрахунків будуть *часові ряди*.

Припустимо, що предметом нашого дослідження є вивчення динаміки розвитку певного явища на часовому проміжку $t \in [t_0, T]$. Нехай змінна Y означає один із числових показників цього явища.

Спостерігаємо перебіг змін $Y(t)$, $t \in [t_0, T]$, цього показника, та фіксуємо його значення в моменти часу:

$$t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_n \in [t_0, T].$$

Позначимо

$$y_k = Y(t_k), k = 1, 2, \dots, n.$$

В результаті отримаємо множину спостережень $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, яка в подальшому буде служити емпіричною основою для досліджень.

Визначення. Часовим рядом для змінної Y називається впорядкована в напрямку зростання моментів часу $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_n \in [t_0, T]$, множин її значень $Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_k), \dots, Y(t_n)$.

Якщо час вимірюється в дискретних одиницях, то відповідний часовий ряд називаємо рядом з *дискретним часом*.

Якщо при цьому моменти часу $(t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_n)$ спеціальним чином визначені: наприклад спостереження виконуються в послідовні рівновіддалені моменти часу:

$$t_1 = t_0 + h; t_2 = t_0 + 2 \cdot h; \dots, t_k = t_0 + k \cdot h; \dots, t_n = t_0 + n \cdot h;$$

то відповідний часовий ряд позначаємо $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_n$.

Якщо розглядати момент t_0 як початковий (тобто $t_0 = 0$), а h означає дискретну одиницю часу, то y_t треба розглядати як значення змінної Y в моменти часу t : $y_t = Y(t)$.

Якщо час змінюється неперервним чином, часовий ряд називаємо рядом з *неперервним часом*.

Якщо при цьому спостереження змінної Y виконуються для всіх моментів (t) з проміжку часу $[t_0, T]$, то відповідний часовий ряд позначаємо $Y(t)$, $t \in [t_0, T]$, або $\{Y(t), t_0 \leq t \leq T\}$.

5. Типи часових рядів.

На практиці виділяють два типи часових рядів:

1) Детерміновані часові ряди.

Майбутнє значення змінної Y , яку представляє детермінований часовий ряд, можна *однозначно і точно* обчислити за допомогою певної заданої математичної функції. Іншими словами, будь-яке значення $Y(t_k)$ часового ряду це значення конкретної, відомої функції.

Наприклад, якщо детермінований часовий ряд представляє функція:

$$y(t) = \cos(2\pi t), t \geq 0, \text{ то } Y(t_k) = \cos(2\pi t_k), k = 1, 2, \dots, n.$$

2) Не детерміновані, або випадкові часові ряди.

З такими рядами маємо справу, коли можливе значення $Y(t_k)$ змінної Y в момент t_k , що належить до майбутнього, є *випадковою величиною*, для якої можна визначити тільки її розподіл ймовірностей.

В математичному плані «не детермінований часовий ряд» – це інша назва (або синонім) загального поняття «випадковий процес»:

- Нехай $[Y(t), t_0 \leq t \leq T]$ – випадковий часовий ряд, що представляє динаміку розвитку змінної Y . Якщо проміжок часу $[t_0, T]$ належить до *минулого*, то тоді цей часовий ряд – множина *конкретних* чисел, кожне з яких вказує, яке значення ($Y(t)$) мала змінна Y моменти часу t .
- Якщо ж якийсь момент $t \in [t_0, T]$ належить до *майбутнього*, то $Y(t)$ – випадкова величина, функція розподілу якої відома.

З теорії ймовірностей виділилась та інтенсивно розвивається окрема математична дисципліна під назвою «*Теорія випадкових процесів*». З практичної точки зору випадковий процес використовується для математичної формалізації перебігу в часі певного роду явищ, які неможливо *точно і однозначно* описати за допомогою «звичайних» детермінованих функцій. Подібні явища називають явищами, що знаходяться під впливом *непередбачуваних* (або *стохастичних, випадкових, спонтанних* ітп.) чинників. Формальне математичне визначення випадкового процесу звучить наступним чином:

➤ Випадковим процесом називається параметрична множина випадкових величин $\{\xi(t), t \in Q\}$.

Параметр $t \in Q$, при цьому, зазвичай інтерпретується як час.

- Якщо $Q = \{t_1, t_2, \dots, t_k, \dots\}$ – дискретна множина, то сукупність

$$\{\xi(t), t \in Q\} = \{\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_k), \dots\}$$

називається *випадковим процесом з дискретним часом*, або *стохастичною послідовністю*: $\xi_n, n = 1, 2, \dots$, де $\xi_k = \xi(t_k), t_k \in Q$.

- Якщо $Q = [t_0, T]$ – числовий інтервал, то відповідний процес називається *випадковим процесом з неперервним часом*:

$$\{\xi(t), t \in Q\} = \{\xi(t), t_0 \leq t \leq T\}.$$

2.9. Цикли економічного розвитку.

1. Цикли кон'юнктури.
2. Довгі цикли економічної кон'юнктури.
3. Економічні кризи.
4. Фази депресії та зростання циклу економічної активності.
5. Сучасний підхід до вивчення циклів економічного розвитку.

1. Цикли кон'юнктури.

Економічний розвиток не є монотонним і рівномірним процесом, а скоріше нагадає хвилі, коли *періоди швидкого розвитку змінюються на періоди занепаду та кризи*.

Говоримо, що економічний розвиток є *«хвилеподібним»*, оскільки це не є *«звичайна»* хвиля. Це фактично сума великої кількості окремих хвиль різного характеру.

- Тому замість терміна *«економічна хвиля»* використовується термін *«економічний цикл»*.

При цьому основні *загальні параметри* економічного циклу аналогічні характеристикам звичайної хвилі: *довжина хвилі; частота; та амплітуда*.

Зазвичай виділяють два принципово різних типи коливання, що пов'язані з економічними процесами.

- ✓ Перший тип коливань – *нерегулярні або випадкові* коливання.

Цей тип коливань є наслідком впливу на економічні процеси великої кількості різноманітних випадкових факторів (наприклад, кліматичні порушення, стихійні лиха, політичні та міжнародні кризи, соціальна напруженість тощо), які мають випадковий, непередбачуваний, часто одноразовий (нерегулярний) характер.

Стохастичний характер цих коливань потребує спеціальних математичних засобів їх формалізованого опису. Як правило – це методи теорії ймовірностей та математичної статистики. Тому подібні коливання ще називають *випадковими коливаннями* або *випадковою складовою*.

- ✓ Другий тип коливань – це *регулярні коливання*, тобто *циклічні* коливання, або *економічні цикли*, про які ми зараз говоримо.

Варто також підкреслити, що коливання, які теоретично називають *«регулярними коливаннями»*, на практиці також значною мірою *нерегулярні*. Для них як амплітуда, так і тривалість їх циклу можуть змінюватися з часом.

- Але якщо для коливань *нерегулярних* будь-яка *видима* закономірність відсутня, то у випадку *циклічних* коливань такі закономірності очевидні. Звідси й назва *«регулярні коливання»*.

З поняттям економічного циклу тісно пов'язані поняття «циклу кон'юнктури» та «коливання кон'юнктури». Залежно від тривалості циклу кон'юнктури теорія економічної кон'юнктури виділяє чотири типи коливань кон'юнктури:

- Довгі хвилі *циклів кон'юнктури* (їх приблизна тривалість 55 років).
- *Середні хвилі* або *малі цикли* господарчої активності, що тривають, як правило, від 7 до 11 років.
- *Короткі хвилі галузевої кон'юнктури*, які тривають до 5 років і характерні для окремих галузей економіки.
- *Сезонні коливання* тривалістю менше року і тому їх називають *короткочасними* коливаннями (або *над-короткими*).

Різні типи коливань кон'юнктури – це наслідок існування різних типів хвиль економічного розвитку. Оскільки довгі хвилі охоплюють періоди, що перевищують одне покоління, то вони *майже непомітні* на тлі мінливої економічної реальності.

Середні хвилі, на відміну від довгих, тривають 7-11 років. Тому вони найбільш помітні, оскільки декілька таких хвиль переживає кожне покоління, а отже має можливість їх дослідити.

Ми коротко обговоримо *ендогенні* причини таких хвиль, які іноді називаються *малими циклами економічної кон'юнктури*.

2. Довгі цикли економічної кон'юнктури.

Серед експертів існує згода щодо ендегенних причин довгих хвиль економічного розвитку та відповідних циклів кон'юнктури. Пов'язані вони з *тенденціями* до коливання на *макроекономічному* рівні.

- ✓ Основна причина – науково-технічний прогрес і технологічний розвиток, що є наслідком цього прогресу.

Закономірності та відносини, що відбуваються в цій сфері, дуже прості та природні. Впроваджені в соціально-економічне життя винаходи, створені в результаті цього прогресу, викликають глибокі зміни у всій соціально-економічній системі:

- *Підвищена соціальна активність прискорює науково-технічний розвиток, а це призводить до економічного зростання.*

Оскільки соціально-економічні процеси характеризуються високою інерційністю, то і тривалість відповідних хвиль також досить велика.

Сучасна економічна наука виділяє *п'ять* довгих хвиль економічного розвитку, починаючи з 1789 року, при цьому межа між четвертою та п'ятою хвилями проходить між ХХ та двадцять першим століттями. Існує підтвержене економічним розвитком припущення, що «*середня довжи-*

на» такої хвилі становить 50 – 55 років. Довга хвиля економічного розвитку складається з чотирьох послідовних фаз:

- Фаза зростання;
- Фаза рецесії;
- Фаза депресії;
- Фаза поживлення.

Однак в економічній реальності ми не спостерігаємо "класичних" хвиль правильної "синусоїдальної" математичної форми. Причиною цього є те, що на довгі хвилі накладаються усі інші: *середні, короткі та надкороткі*, які зазвичай мають різну природу та характер.

Крім того, це не проста сума *незалежних* хвиль з різними параметрами (*довжина, частота та амплітуда*):

➤ У випадку *економічних хвиль* ми спостерігаємо накладання *взаємодіючих та взаємозалежних* хвиль.

- Якщо, наприклад, середня хвиля економічної активності відбувається на тлі фази зростання (*піднесення*) довгої хвилі економічного розвитку, то фази середньої хвилі, пов'язані з розвитком (тобто фаза *поживлення* і фаза *зростання*), відносно довші та більш динамічні.
- Якщо ж середня хвиля накладається на фазу зниження (*занепаду*) довгої хвилі економічного розвитку, то, відповідно, довгими та глибшими в середній хвилі будуть фази, пов'язані зі *спадом* та *депресією*.

Це зауваження може бути своєрідним обґрунтуванням того факту, що теоретично «*регулярні*» коливання насправді не є регулярними.

3. Економічні кризи.

Аналіз середніх хвиль економічної активності (та пов'язаних з ними *малих циклів економічної кон'юнктури*) розпочнемо з фази *кризи*.

Перші симптоми наближення фази кризи з'являються спочатку у *фінансово-кредитній сфері*, потім вони охоплюють *виробничу сферу*, а з часом поширюються *на всю соціально-економічну систему*.

- Пов'язано це з тим, що *падінню* рівня виробництва передують *зниження* цін на товари.

Це, в свою чергу, створює напругу на кредитному ринку, призводить до зниження цін на акції, падіння торгівлі, падіння інвестицій, тощо.

- З часом такі процеси призводять до кризи, яка характеризується втратою *фінансової плинності* багатьох підприємств, а отже, *банкрутством* деяких з них.

Внаслідок цього відбувається *зниження рівня виробництва*, *збільшення рівня безробіття*, *підвищується* соціальна *напруга* з усіма негативними наслідками, що з цим пов'язані.

Однак, з точки зору соціально-економічного процесу, кризи мають не лише негативні, але й позитивні наслідки.

- Вони змушують підприємців шукати ефективні рішення для раніше невідомих проблем і викликів, тобто: *впроваджувати нові технології; принципово змінювати виробничі процеси; вдосконалювати структуру економічних систем; модифікувати методи управління економічними процесами*, тощо.

Під час кризової фази запаси виробничих ресурсів повільно знижуються до мінімального рівня.

- Тому багато економістів вважають, що основною причиною кризової фази середньої хвилі економічного розвитку є *необхідність періодичної заміни виробничих ресурсів* (що включає як матеріальні ресурси, так і технічне обладнання, машини, технології тощо).

Це позитивні «внутрішні» наслідки кризи, тобто наслідки для економіки чи галузі, яка постраждала від кризи.

До позитивних «зовнішніх» її наслідків можна віднести зміну балансу імпорту та експорту на користь *експорту* та розширення присутності вітчизняних виробників на міжнародних ринках, що досить часто відбуваються під час кризи.

Фаза кризи природним чином готує всі передумови для наступного економічного зростання, проводячи вищезазначені технологічні та організаційні зміни у виробничому секторі.

4. Фази депресії та зростання циклу економічної активності.

Вплив на виробничі процеси всіх вищезазначених та інших факторів спричиняє поступове уповільнення тенденцій спаду, але через високу інерційність соціально-економічної системи *негайне* економічне зростання не відбувається.

- Фаза кризи плавно переходить у наступну фазу малого циклу економічної активності – *фазу депресії*.

Тривалість цієї фази залежить від великої кількості як економічних, так і неекономічних факторів, включаючи *соціальні, політичні, міжнародні*, тощо. Першим сигналом про закінчення фази депресії є зміна настроїв підприємців в економічній сфері:

- *Песимістична* атмосфера, характерна для кризової фази, повинна перетворитися на *оптимістичну*.

Основні економічні фактори, що *сприяють* такій зміні, стосуються насамперед *фінансової сфери*. Наприклад:

- *Процентні ставки* за кредитами, які незмірно *зросли* під час кризи, повинні бути *знижені* до відповідного рівня, тощо.

Серед економічних факторів, що *гальмують* подальше зростання і продовжують період депресії, можна відзначити наступні:

- *Зменшення накопичених грошових ресурсів різного виду фондів, що неминуче відбувається під час кризової фази;*
- *Вичерпання виробничих потужностей основних ресурсів та продовження періоду їх заміни через відсутність відповідних фінансових засобів;*
- *Витрати на зберігання «старих» товарних запасів, пов'язані з труднощами в їх реалізації, що викликані кризою тощо.*

Варто підкреслити, однак, що постійний характер кризових фаз економічного циклу доводить наявність *неекономічних причин*, тобто *політичних, соціальних, міжнародних* тощо факторів, що перешкоджають *природному* розвитку економічних процесів, (що на протязі багатьох років характерно Українській економіці).

- Це означає необхідність *втручання* в економіку та *регулювання* відповідних питань *на державному рівні*.

Якщо не буде *штучних* перешкод, що виводять економічну систему з рівноваги, всі необхідні умови для майбутнього економічного зростання будуть створені природним шляхом на етапах кризи та депресії.

- Падіння виробництва з часом спричиняє скорочення пропозиції, і, таким чином, призводить до зростання цін.
- З іншого боку, відносно вирівнювання і з часом навіть відносно збільшення доходів збільшує попит.

Необхідність задоволення зростаючого попиту викликає перехід від фази депресії до фази *пожвавлення* економічної діяльності, яка плавно переходить у фазу економічного *зростання*.

- Вона характеризується прискореними темпами *зростання виробництва* (порівняно зі темпами зростання цін), наслідком чого є *уповільнення*, а з часом – *повне припинення зростання цін* і загальне збільшення доходу.

Так розпочинається *новий цикл* господарчої активності, що є *композицією* кількох економічних хвиль з різними параметрами: *амплітудою, довжиною, частотою* тощо. Тому його «форма» очевидно буде відрізнятися від «класичної» математичної «*синусоїди*», тобто черговий «*регулярний*» етап ділового циклу на практиці виявиться досить «*нерегулярним*».

5. Сучасний підхід до вивчення циклів економічного розвитку.

Характерною особливістю сучасних циклів економічного розвитку є те, що фаза *зростання*, як правило, довша, ніж фаза *спаду*, а її амплітуда *вища* за амплітуди фази низької економічної активності. Часто період, який називають «*фазою спаду*», не означає *абсолютного* скорочення виробництва, а лише *уповільнення* економічного зростання. Тому насправді чітко можна виділити лише дві основні фази:

- Фазу високої економічної активності;
- Фазу низької економічної активності.

З іншого боку, залежно від цілей економічного аналізу, іноді зручно збільшувати кількість фаз в одному циклі кон'юнктури. Наприклад, при вирішенні завдань, пов'язаних з управлінням підприємством, замість згаданих вище чотирьох фаз ділового циклу іноді виділяють шість:

- Фаза *пожвавлення* економічної діяльності;
- Фаза *росту*;
- Фаза *буму* (розквіту);
- Фаза *попередження*;
- Фаза *спаду*; та
- Фаза *депресії*.

Це дозволяє вдосконалити процес управління, здійснюючи на кожному етапі відповідні дії, спрямовані як на зменшення можливих негативних наслідків поточної фази, так і вжиття відповідних профілактичних, тобто підготовчих, заходів до наступного етапу.

Тому з практичної точки зору дослідження кон'юнктури передбачає оперативне та ґрунтовне розв'язування двох основних задач:

- Задача *ідентифікації*, тобто завдання встановлення поточної фази ділового циклу економічної кон'юнктури.
- *Прогноз* економічної кон'юнктури, тобто *прогноз настання певних фаз* ділового циклу економічної активності.

2.10. Динаміка явищ: дослідження короткострокових змін.

1. Інтерпретація випадкового часового ряду. 2. Практичні вимоги до побудови та структура значень часового ряду. 3. Типи досліджень динаміки явищ. 4. Дослідження короткострокових змін: прирости; індекси.

1. Інтерпретація випадкового часового ряду.

Припустимо, що предметом нашого дослідження є динаміка значень одного з числових показників $Y = Y(t)$ певного явища на проміжку $t \in [t_0, T]$. Емпіричною підставою для цього дослідження буде часовий ряд

$$\{y_1, y_2, \dots, y_n\},$$

для змінної Y . Згідно з визначенням, y_1, y_2, \dots, y_n – це впорядковані в напрямку зростання моментів часу $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_n \in [t_0, T]$, значення

$$y_k = Y(t_k), k = 1, 2, \dots, n,$$

показника $Y = Y(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Якщо маємо справу з *не детермінованим*, тобто *випадковим* часовим рядом, то використовуючи термінологію теорії випадкових процесів можна дати наступну інтерпретацію послідовності $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$:

- Припустимо, що предметом нашого дослідження є вивчення динаміки (тобто *процесу зміни станів*) деякої системи, яка знаходиться під впливом *непередбачуваних* факторів.

Ці зміни відбуваються внаслідок впливу на систему певних чинників, які можна поділити на дві групи.

- Перша з них – це *головні* чинники.

Зазвичай існує можливість спостерігати та вимірювати їх значення, а отже *передбачувати* вплив на поведінку системи. Тому їх ще називаються «*явними*», або «*доступними для спостереження*».

- Друга група – це *другорядні*, або *приховані* чинники.

При цьому, якщо «*головних*» чинників, як правило, не дуже багато, а вплив кожного з них – істотний, то «*другорядних*» навпаки може бути дуже багато, а вплив кожного окремо – незначний.

Часто навіть неможливо точно встановити ані їх кількість, ані їх природу.

- Результатом *спільного впливу* всіх другорядних чинників є те, що поведінка системи стає *непередбачуваною*.
- Якщо *спільний вплив* всіх другорядних чинників на поведінку системи вдається описати за допомогою засобів теорії ймовірностей, то таку систему називають *стохастичною*.
- Дію *непередбачуваних* факторів на поведінку системи називають *прихованим стохастичним* механізмом (або *пробабілістичним*, або просто – *випадковим*).

Припустимо далі, що часовий ряд $[Y(t), t \in Q]$ представляє спостереження стану описаної стохастичної системи в моменти часу, що належать до множини Q .

- Тоді часовий ряд $[Y(t), t \in Q]$ – це конкретна реалізація динаміки станів системи, що генерується прихованим стохастичним механізмом.

Або інакше:

- Припустимо, що випадковий процес $\{\xi(t), t \in Q\}$ описує поведінку системи, яка вивчається, тобто є її формальною математичною моделлю.
- Тоді часовий ряд $[Y(t), t \in Q]$ можна інтерпретувати, як одну із можливих траєкторій випадкового процесу $\{\xi(t), t \in Q\}$.

2. Практичні вимоги до побудови та структура значень часових рядів.

Припустимо, що предметом дослідження є вивчення поведінки змінної Y , яку можна вимірювати, спостерігаючи певне явище. Явище це має *непередбачуваний* характер, тобто розвивається під впливом *прихованого стохастичного механізму*.

Емпіричною підставою для досліджень є часовий ряд:

$$y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_n$$

Для того, щоб можна було використати цей ряд для статистичних досліджень необхідно виконання кількох умов, а саме:

- Всі елементи часового ряду $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_n$ повинні стосуватися того самого явища;
- Всі його елементи повинні бути виражені в тих самих одиницях міри;
- Форма представлення його елементів повинна бути однаковою;
- При побудові часового ряду $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_n$, всі його елементи визначаються відповідно до тих самих правил. (Наприклад, при побудові часового ряду тривалість кожного з інтервалів спостереження повинна бути однаковою для всіх елементів (y_k) часового ряду.)

Структура окремих значень, що спостерігаємо в цьому часовому ряді, може бути досить складною.

Тобто остаточне значення y_t , $t = 1, 2, \dots, n$, змінної Y в момент часу t (або в часовому інтервалі спостереження з номером t) може бути сумою кількох компонентів, які пов'язані з явищем, що вивчається, які формують його, а отже мають безпосередній вплив на всі його характеристики, втім і на змінну Y .

Проблема в тому, що природа цих компонентів різна, а отже вони вимагають для свого дослідження відповідних математичних засобів.

➤ Ось чому невід'ємним і обов'язковим елементом статистичного аналізу часових рядів є їх *графічна презентація*.

Зазвичай, незважаючи на те, настільки складні в математичному плані методи будуть пізніше використовуватись, дослідження часового ряду $[Y(t), t \in Q]$ розпочинається від візуального аналізу його графіку.

Це дає можливість сформулювати *робочі гіпотези*, щодо природи компонент, які можуть бути присутніми в цих рядах, а отже полегшує і спрощує встановлення характеру статистичних закономірностей, які необхідно вивчати.

➤ На наступному етапі аналізу часового ряду, в залежності від мети дослідження та інших обставин, обираються математичні засоби та конкретні методи і способи їх практичного використання.

3. Типи досліджень динаміки явищ.

На практиці, як правило, виділяють два типи досліджень динаміки, або розвитку явищ:

➤ *Дослідження короткострокових змін.*

- Про методи дослідження *короткострокових (короткочасних)* змін говоримо тоді, коли хочемо вивчити *ступінь* змін, які відбуваються в явищі, що нас цікавить, щодо *конкретних моментів (або періодів)*.

Йдеться про зміни, що можуть відбутися в деякі *конкретні, визначені* моменти часу. Тривалість (n) часового ряду в цьому випадку не має істотного значення. Часто при цьому маємо спостереження за короткий проміжок часу.

➤ *Дослідження довгострокових змін.*

- Вивчення довгострокових змін означає, перш за все, *встановлення математичної структури* окремих значень часових рядів, тобто виділення окремих *компонентів*, що містяться в цих значеннях.

Визначення ж довгострокових закономірностей, притаманних явищу, що досліджується, потребує його спостереження в довгостроковій перспективі. При цьому слід пам'ятати, що «*тривалість*» періоду спостереження є поняттям *відносним* і суттєво залежить від характеру явища, що спостерігається.

4. Дослідження короткострокових змін: прирости; індекси.

Припустимо, що часовий ряд $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_n$, представляє розвиток у часі змінної Y , яка описує певне явище, а метою дослідження є вивчення *ступеня змін*, що відбуваються в цьому явищі.

Найпростіший тип дослідження *динаміки змін* – порівняння *поточного* рівня явища з певним *постійним* рівнем. Типова схема подібного дослідження виглядає наступним чином:

- Вибираємо певний момент (чи проміжок) часу, який розглядається як базовий період.
- Значення y_0 змінної Y для цього періоду розглядається як основа для порівняння.
- А потім поточне значення y_t змінної Y в момент t порівнюється зі значенням y_0 змінної Y для базового періоду.

Часто базовий період називають *нульовим* і позначають $t = 0$.

Але це не обов'язково *перше* значення змінної Y у даному часовому ряді. Дивлячись на мету дослідження будь-який момент:

$$t^* \in \{1, 2, \dots, n\}$$

та відповідно будь-яка основа порівнянь y_{t^*} можуть бути обрані, як *базові*.

Більше того, нульовий період, а отже, і основа для порівняння, може змінюватися під час дослідження.

4(а). Якщо часовий ряд представляє значення змінної Y у вигляді *абсолютних* показників, то аналіз динаміки розпочинається з обчислення *абсолютних* та *відносних приростів*.

Визначення. *Одноосновним* приростом (або приростом із *фіксованою* основою порівняння) називається числа $\Delta y_{t,0}$, що визначається формулою:

$$\Delta y_{t,0} = y_t - y_0, \quad t = 1, 2, \dots, n;$$

де y_0 – основа для порівняння, а y_t – значення змінної Y з досліджуваного періоду.

Визначення. *Ланцюговим* приростом (або приростом із змінною основою порівняння) називається числа $\Delta y_{t/t-1}$, що визначається формулою:

$$\Delta y_{t/t-1} = y_t - y_{t-1}, t = 1, 2, \dots, n.$$

де y_t – значення змінної Y з досліджуваного періоду, y_{t-1} – основа для порівняння, тобто значення змінної Y за період $(t - 1)$, що передує досліджуваному періоду.

Відносні прирости (як і всі інші *відносні* міри) не мають конкретних одиниць вимірювання і тому їх найчастіше визначають у *відсотках* (чи *процентах*).

Визначення. Відносними приростам із *фіксованою* основою порівняння (або *одноосновними*) називається числа, які є відношенням абсолютного *одноосновного* приросту змінної Y до її рівня за період, прийнятий за основу порівнянь, тобто визначається формулою:

$$\frac{\Delta y_{t/0}}{y_0} \cdot 100\% = \frac{(y_t - y_0)}{y_0} \cdot 100\%, t = 1, 2, \dots, n.$$

Визначення. Відносні прирости зі змінною основою порівняння (або *ланцюгові*) обчислюються, як відношення абсолютного ланцюгового приросту в досліджуваному періоді t до рівня змінної з попереднього періоду $(t - 1)$:

$$T_t = \frac{\Delta y_{t/t-1}}{y_t} \cdot 100\% = \frac{(y_t - y_{t-1})}{y_t} \cdot 100\%, t = 1, 2, \dots, n.$$

Ланцюгові відносні прирости (T_t) називають також *темпом абсолютного приросту* за період t , або коротко – *темпом*.

У випадку, коли значення змінної Y зростає – ланцюгові прирости будуть *додатними*, при зменшенні значення змінної Y ці прирости будуть *від’ємними*.

4(б). Для вимірювання *умовних* змін у часових рядах можна також використовувати показники динаміки, що називаються *індексами*. Залежно від характеру досліджуваного явища, розрізняють два основні типи цих показників.

- Для вивчення динаміки *однорідних* явищ використовуються *індивідуальні* показники динаміки.
- У разі аналізу динаміки *складних, неоднорідних* явищ використовуються *агреговані* або *групові* показники динаміки.

Подібно до приростів як для індивідуальних, так і для агрегованих індексів виділяють два їх типи:

- Індекси з *фіксованою* базою (відомі також як *одноосновні* індекси).
- Індекси із змінною базою, що називаються *ланцюговими* індексами.

Оскільки, за визначенням, індекси є *відносними* показниками і не номінованими значеннями, вони часто подаються у відсотках.

Припустимо, що часовий ряд $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_n$, представляє розвиток у часі змінної Y , яка описує певне явище, а метою дослідження є вивчення *ступеня змін*, що відбуваються в цьому явищі.

Визначення. Індивідуальний індекс з фіксованою базою, (або одноосновний індекс) $i_{t/0}$ визначається формулою:

$$i_{t/0} = \frac{y_t}{y_0} \cdot 100\% , t = 1, 2, \dots, n,$$

де y_0 – основа для порівняння, а y_t – значення змінної Y з досліджуваного періоду.

Індивідуальний одноосновний індекс інформує:

- На скільки (відсотків) досліджувана змінна змінилася за даний період (t) по відношенню до періоду ($t = 0$), взятого за основу для порівнянь.

Визначення. Індивідуальний ланцюговий індекс $i_{t/t-1}$ визначається формулою:

$$i_{t/t-1} = \frac{y_t}{y_{t-1}} \cdot 100\% , t = 1, 2, \dots, n.$$

де y_t – значення змінної Y з досліджуваного періоду, y_{t-1} – значення змінної Y за період ($t - 1$), що передує досліджуваному періоду.

Індивідуальний ланцюговий індекс інформує:

- На скільки (відсотків) змінилася досліджувана змінна за даний період (t) порівняно з періодом ($t - 1$) безпосередньо перед досліджуваним періодом.

У випадку, коли значення змінної Y *зростає* – ланцюгові індекси *перевищують* одиницю (тобто більше 100%).

Коли значення змінної Y *зменшується*, показники становлять *менше* одного (тобто менше 100%).

Порівнюючи визначення *відносних приростів* та *одноосновних індексів* приходимо до висновку, що ці показники дуже схожі і тісно пов'язані між собою. Можна, наприклад, записати наступні тотожності:

$$i_{t/0} = \left[\frac{\Delta y_{t/0}}{y_0} + 1 \right] \cdot 100\% , \text{ або } \frac{\Delta y_{t/0}}{y_0} \cdot 100\% = i_{t/0} - 100\% , t = 1, 2, \dots, n,$$

$$i_{t/t-1} = \left[\frac{\Delta y_{t/t-1}}{y_{t-1}} + 1 \right] \cdot 100\% , \text{ або } T_t = i_{t/t-1} - 100\% , t = 1, 2, \dots, n.$$

4(е). Як природи, так і індекси характеризують поточну швидкість зміни досліджуваного явища, тобто швидкість зміни в конкретні моменти часу t , що належить до розглянутого інтервалу часу $t \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Синтетичним показником, що характеризує швидкість зміни досліджуваного явища протягом *усього* часового інтервалу $\{1, 2, \dots, n\}$ є *середній* (в часовому інтервалі) *темп приросту* \bar{T} , тобто показник *середньої* швидкості зміни, обчислений на основі послідовності ланцюгових індексів $\{i_{t/t-1}, t = 1, 2, \dots, n\}$.

Визначення. Нехай символ $\bar{i}_{n/n-1}$ позначає середнє геометричне значення ланцюгових індексів $\{i_{t/t-1}, t = 1, 2, \dots, n\}$, тобто корінь ступеня n від їх добутку:

$$\bar{i}_{n/n-1} = \sqrt[n]{i_{1/0} \cdot i_{2/1} \cdot \dots \cdot i_{n/n-1}}.$$

Середнім темпом приросту називаємо число, яке визначається формулою:

$$\bar{T} = \bar{i}_{n/n-1} - 100\%.$$

Враховуючи визначення індивідуального ланцюгового індексу, отримаємо наступну формулу для обчислення середнього геометричного $\bar{i}_{n/n-1}$:

$$\bar{i}_{n/n-1} = \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_0}} \cdot 100\%.$$

Отже середній темп приросту \bar{T} можна обчислити за формулою:

$$\bar{T} = \left[\sqrt[n]{\frac{y_n}{y_0}} - 1 \right] \cdot 100\%.$$

Середній темп приросту (середня швидкість зміни) \bar{T} вказує:

- На скільки процентів в середньому змінювалось значення змінної Y від періоду до періоду протягом розглянутого часу.
- *Додатні* значення \bar{T} означають *збільшення* (в середньому) значення змінної Y від періоду до періоду на \bar{T} процентів, *негативні* значення – відповідно його *середнє зменшення* на \bar{T} процентів.

Основою для обчислення середнього значення в цьому випадку є індивідуальні ланцюгові індекси $i_{t/t-1}$, а для обчислення середньої швидкості зміни використовується середнє геометричне.

- Як відомо, середнє геометричне значення є *менш чутливим до граничних* (чи крайніх) значень $i_{t/t-1}$ і краще ніж інші середні-класичні підходить для застосувань у випадку часових рядів.

З іншого боку, одноосновні та ланцюговий індекси обчислюються, як для абсолютних, так і відносних величин (тобто таких, які є відношенням двох логічно пов'язаних абсолютних величин, наприклад, продуктивності праці, середньої заробітної плати тощо). Розрахунок середнього геометричного для відносних величин значно спрощується порівняно з обчисленням інших класичних середніх.

Індекси, включаючи ланцюгові індекси, за визначенням можуть бути зараховані до *відносних величин*. Остання формула для обчислення середнього геометричного $\bar{i}_{n/n-1}$ підтверджує це припущення.

Кількісні методи аналізу динаміки явищ фінансового ринку.

2.11. Індивідуальні індекси: приклади.

Економетрико-статистичні методи в економічних дослідженнях

1. Індивідуальні індекси: Приклад 1. 2. Заміна індивідуальних індексів: Приклади 2-4. 3. Індексна рівність для економічних показників.

1. Індивідуальні індекси:

Припустимо, що предметом дослідження є вивчення поведінки змінної Y , яку можна вимірювати, спостерігаючи певне явище, що розвивається під впливом *прихованого стохастичного механізму*. Емпіричною підставою для досліджень змінної Y є часовий ряд:

$$y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_n$$

На практиці виділяють два типи досліджень динаміки: *дослідження короткострокових змін* та *дослідження довгострокових змін*.

- Про дослідження короткострокових змін говоримо тоді, коли йдеться про зміни, що можуть відбутися в деякі *конкретні, визначені* моменти часу.

Основним інструментом дослідження короткострокових змін є обчислення та аналіз таких показників динаміки, як *прирости* та *індекси*. Визначення основних типів цих показників приведені в підрозділі 2.10. Це, зокрема, індекси з *фіксованою* базою, та *ланцюгові* індекси, що розраховуються виходячи із значень часового ряду:

- *Маючи часовий ряд, легко обчислити будь-яку послідовність індексів.*

Приклад 1. Наступні числові дані, приведені в таблиці 1, ілюструють динаміку курсу продажу певної іноземної валюти протягом двох тижнів.

Завдання 1. Обчислити індивідуальні індекси з фіксованою базою, тобто одноосновний індекс $i_{t/0}$.

За основу (t_0) вибирати день безпосередньо перед початком спостережень (нульовий період), коли курсу продажу становив 210).

<i>t</i>	0	1	2	3	4	5	6
Курс	210	212	220	235	268	259	288

<i>t</i>	7	8	9	10	11	12	13
Курс	292	305	317	301	288	290	260

Таблиця 1.

Розв'язок: 1(1). (Індивідуальні індекси $i_{t/0}$).

Наведемо для прикладу кілька детальних обчислень, що базуються на приведених в підрозділі 2.10 визначеннях:

$$y_0 = 210, y_1 = 212, i_{1/0} = \frac{y_1}{y_0} \cdot 100\% = \frac{212}{210} \cdot 100\% = 100,9;$$

$$y_5 = 259, i_{5/0} = \frac{y_5}{y_0} \cdot 100\% = \frac{259}{210} \cdot 100\% = 123,3, \text{ ітд.}$$

Остаточні результати приведені в таблиці 2

$i_{1/0}$	$i_{2/0}$	$i_{3/0}$	$i_{4/0}$	$i_{5/0}$	$i_{6/0}$	$i_{7/0}$
100,9	104,7	111,9	127,6	123,3	137,1	139,0

$i_{8/0}$	$i_{9/0}$	$i_{10/0}$	$i_{11/0}$	$i_{12/0}$	$i_{13/0}$
145,2	150,9	143,3	137,1	138,1	123,8

Таблиця 2.

Завдання 2. Обчислити індивідуальні ланцюгові індекси.

Розв'язок: 2(1). (Ланцюгові індекси $i_{t/t-1}$).

Наведемо для прикладу кілька детальних обчислень, що базуються на приведених в підрозділі 2.10 визначеннях:

$$y_0 = 210, y_1 = 212, i_{1/0} = \frac{y_1}{y_0} \cdot 100\% = \frac{212}{210} \cdot 100\% = 100,9;$$

$$y_4 = 268, y_5 = 259, i_{5/4} = \frac{y_5}{y_4} \cdot 100\% = \frac{259}{268} \cdot 100\% = 96,64;$$

$$y_9 = 317, y_{10} = 301, i_{10/9} = \frac{y_{10}}{y_9} \cdot 100\% = \frac{301}{317} \cdot 100\% = 94,95, \text{ ітд.}$$

Остаточні результати приведені в таблиці 3

$i_{1/0}$	$i_{2/1}$	$i_{3/2}$	$i_{4/3}$	$i_{5/4}$	$i_{6/5}$	$i_{7/6}$
100,9	103,7	106,8	114,0	96,64	111,2	101,3

$i_{8/7}$	$i_{9/8}$	$i_{10/9}$	$i_{11/10}$	$i_{12/11}$	$i_{13/12}$
104,5	103,9	94,95	95,68	100,7	89,66

Таблиця 3.

2. Заміна послідовностей індексів: Приклади 2-4.

З точки зору інформації, що стосується динаміки досліджуваного явища, ці показники прирівнюються до значень часових рядів. Оскільки в залежності від одиниць вимірювання, що використовуються, окремі значення часового ряду можуть бути дуже великими, то часто послідовність індексів замінює часовий ряд.

Тому не позбавлене практичного значення завдання заміни послідовностей індексів, що формулюється наступним чином:

- Як на основі послідовності індексів *одного типу* обчислення послідовності індексів *іншого типу*?

2(а). Заміна індексів з фіксованою основою на ланцюгові.

Припустимо, у нас є послідовність одноосновних індексів:

$$i_{1/0}, i_{2/0}, i_{3/0}, \dots, i_{n/0}.$$

При цьому припускається, що основою для порівняння є значення ряду за період $t = 0$, але:

- Індивідуальні значення часового ряду $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, та значення y_0 за базовий період *невідомі*.
- Необхідно замінити послідовність *одноосновних* індексів – послідовністю індексів *ланцюгових*.

Згідно з визначенням:

$$i_{t/t-1} = \frac{y_t}{y_{t-1}} \cdot 100\% = \frac{\left(\frac{y_t}{y_0}\right) \cdot 100\%}{\left(\frac{y_{t-1}}{y_0}\right) \cdot 100\%} \cdot 100\% = \frac{i_{t/0}}{i_{t-1/0}} \cdot 100\%, t = 1, \dots, n.$$

Таким чином маємо наступне правило заміни:

Для того, щоб отримати значення ($i_{t/t-1}$) ланцюгового індексу, слід одноосновний індекс з постійною базою ($i_{t/0}$), за досліджуваний період t поділити на індекс постійною базою ($i_{t-1/0}$) для попереднього періоду ($t - 1$), а потім отриманий результат помножити на 100%.

Приклад 2. В таблиці 2 приведені результати обчислення індивідуальних індексів $i_{t/0}$, що ілюструють динаміку курсу продажу певної іноземної валюти протягом двох тижнів.

$i_{1/0}$	$i_{2/0}$	$i_{3/0}$	$i_{4/0}$	$i_{5/0}$	$i_{6/0}$	$i_{7/0}$
100,9	104,7	111,9	127,6	123,3	137,1	139,0

$i_{8/0}$	$i_{9/0}$	$i_{10/0}$	$i_{11/0}$	$i_{12/0}$	$i_{13/0}$
145,2	150,9	143,3	137,1	138,1	123,8

Таблиця 2.

Замінити індивідуальні індекси з фіксованою базою, тобто одноосновні індекси $i_{t/0}$, на ланцюгові індекси $i_{t/t-1}$.

Розв'язок: Наведемо для прикладу кілька детальних обчислень:

$$i_{4/0} = 127,6; i_{5/0} = 123,3;$$

$$i_{5/4} = \frac{i_{5/0}}{i_{4/0}} \cdot 100\% = \frac{123,3}{127,6} \cdot 100\% = 96,64;$$

$$i_{7/0} = 139; i_{8/0} = 145,2;$$

$$i_{8/7} = \frac{i_{8/0}}{i_{7/0}} \cdot 100\% = \frac{139}{145,2} \cdot 100\% = 104,5; \text{ ітд.}$$

2(б). Заміна ланцюгових індексів на одноосновні.

Правило заміни послідовності індексів в цьому випадку є більш складним.

Припустимо, у маємо послідовність ланцюгових індексів:

$$i_{1/0}, i_{2/1}, i_{3/2}, \dots, i_{n/n-1},$$

обчислених на основі часового ряду: $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$.

Припустимо також, що значення часового ряду невідомі.

Базою, або основою для порівнянь одноосновних індексів, не обов'язково має бути перше значення часового ряду. Базою може бути значення y_{t^*} з будь-якого часового періоду (або моменту) $t^* \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Припустимо, що період t^* вибрано, як базовий.

- Необхідно замінити наявну послідовність ланцюгових індексів

$$i_{1/0}, i_{2/1}, i_{3/2}, \dots, i_{n/n-1},$$

на послідовність одноосновних індексів

$$i_{1/t^*}^*, i_{2/t^*}^*, i_{3/t^*}^*, \dots, i_{n/t^*}^*,$$

з основою y_{t^*} .

Варто підкреслити, що значення y_{t^*} також невідоме.

- Процедуру перетворення індексів розпочинаємо з базового періоду t^* .

Виходячи з визначення одноосновних індивідуальних індексів, можемо записати:

$$i_{t^*/t^*}^* = \frac{y_{t^*}}{y_{t^*}} \cdot 100\% = 100\% .$$

- Тепер розглянемо періоди часу, що передують базовому періоду t^* .

$$i_{t^*-1/t^*}^* = \frac{y_{t^*-1}}{y_{t^*}} \cdot 100\% = \frac{\left(\frac{y_{t^*}}{y_{t^*}}\right) \cdot 100\%}{\left(\frac{y_{t^*}}{y_{t^*-1}}\right) \cdot 100\%} \cdot 100\% = \frac{i_{t^*/t^*}^*}{i_{t^*/t^*-1}^*} \cdot 100\% ,$$

Продовжуючи аналогічно отримаємо:

$$i_{t^*-s/t^*}^* = \frac{y_{t^*-s}}{y_{t^*}} \cdot 100\% = \frac{y_{t^*-s} \cdot y_{t^*-(s-1)}}{y_{t^*} \cdot y_{t^*-(s-1)}} \cdot 100\% = \frac{i_{t^*-s+1/t^*}^*}{i_{t^*-s+1/t^*-s}^*} \cdot 100\%, s = 1, 2, \dots, t^*.$$

Таким чином маємо *наступне правило* заміни:

Для того, щоб отримати значення (i_{t/t^*}^*) одноосновного індексу за період t ($1 \leq t \leq t^* - 1$), за умови, що значення (i_{t+1/t^*}^*) одноосновного індексу з попереднього періоду вже було знайдене, цей індекс (i_{t+1/t^*}^*) слід поділити на ланцюговий індекс $(i_{t+1/t})$ з того ж періоду, а потім отриманий результат помножити на 100%.

Сформульоване правило дозволяє йдучи у напрямку від базового періоду t^* до 1, знайдіть послідовно одноосновні індекси для часових періодів, що йдуть передують.

Залишилося визначити метод перетворення індексів за часові періоди, що наступають за періодом t^* .

➤ Нехай це буде період (t^*+1) .

$$\begin{aligned} i_{t^*+1/t^*}^* &= \frac{y_{t^*+1}}{y_{t^*}} \cdot 100\% = \frac{y_{t^*+1} \cdot y_{t^*}}{y_{t^*} \cdot y_{t^*}} \cdot 100\% = \frac{y_{t^*}}{y_{t^*}} \cdot \frac{y_{t^*+1}}{y_{t^*}} \cdot 100\% = \\ &= \frac{i_{t^*/t^*}^*}{100\%} \cdot \frac{i_{t^*+1/t^*}}{100\%} \cdot 100\% = \frac{i_{t^*/t^*}^* \cdot i_{t^*+1/t^*}}{100\%}. \end{aligned}$$

Продовжуючи отримаємо:

$$\begin{aligned} i_{t^*+s/t^*}^* &= \frac{y_{t^*+s}}{y_{t^*}} \cdot 100\% = \frac{y_{t^*+s} \cdot y_{t^*+(s-1)}}{y_{t^*} \cdot y_{t^*+(s-1)}} \cdot 100\% = \\ &= \frac{i_{t^*+(s-1)/t^*}^*}{100\%} \cdot \frac{i_{t^*+s/t^*+(s-1)}}{100\%} \cdot 100\% = \frac{i_{t^*+(s-1)/t^*}^* \cdot i_{t^*+s/t^*+(s-1)}}{100\%}. \end{aligned}$$

Таким чином маємо наступне правило заміни:

Припустимо, що значення (i_{t/t^*}^*) одноосновного індексу за період $t \geq t^*$ вже знайдене. Одноосновний індекс (i_{t+1/t^*}^*) за період $(t + 1)$ отримувється шляхом множення (i_{t/t^*}^*) на ланцюговий індекс $(i_{t+1/t})$ з того ж періоду, а потім отриманий результат поділити на 100%.

Приклад 3. В таблиці 3 приведені результати обчислення ланцюгових індексів $i_{t/t-1}$, що ілюструють динаміку курсу продажу певної іноземної валюти протягом двох тижнів.

Замінити ланцюгові індекси на індивідуальні індекси з фіксованою базою $i_{t/8}^*$, де за основу порівняння прийнято *восьмий день* спостережень, коли ціна продажу становив 305.

$i_{1/0}$	$i_{2/1}$	$i_{3/2}$	$i_{4/3}$	$i_{5/4}$	$i_{6/5}$	$i_{7/6}$
100,9	103,7	106,8	114,0	96,64	111,2	101,3

$i_{8/7}$	$i_{9/8}$	$i_{10/9}$	$i_{11/10}$	$i_{12/11}$	$i_{13/12}$
104,5	103,9	94,95	95,68	100,7	89,66

Таблиця 3.

Розв'язок: Наведемо для прикладу кілька детальних обчислень. Процедура заміни індексів розпочинаємо від базового, тобто від *восьмого дня* спостережень: $t^* = 8$.

$$i_{8/8}^* = \frac{y_8}{y_8} \cdot 100\% = 100\%.$$

Для попередніх періодів спостереження $t = 0, t = 1, t = 2, t = 3, t = 4, t = 5, t = 6, t = 7$, обчислення проводимо в напрямку від періоду $t = 7$ до $t = 0$:

$$i_{7/8}^* = \frac{y_7}{y_8} \cdot 100\% = \frac{y_7 \cdot y_8 \cdot 100\%}{y_8 \cdot y_8 \cdot 100\%} \cdot 100\% = \frac{y_8}{y_8} \cdot 100\% = \frac{y_8}{y_7} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{i_{8/8}^*}{i_{8/7}} \cdot 100\% = \frac{100}{104,5} \cdot 100\% = 95,73\%;$$

$$i_{6/8} = \frac{y_6}{y_8} \cdot 100\% = \frac{y_6 \cdot y_7 \cdot 100\%}{y_8 \cdot y_7 \cdot 100\%} \cdot 100\% = \frac{y_7}{y_8} \cdot 100\% \cdot 100\% = \frac{i_{7/8}^*}{i_{7/6}} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{95,73}{101,3} \cdot 100\% = 94,42\%;$$

$$i_{5/8} = \frac{y_5}{y_8} \cdot 100\% = \frac{y_5 \cdot y_6 \cdot 100\%}{y_8 \cdot y_6 \cdot 100\%} \cdot 100\% = \frac{y_6}{y_8} \cdot 100\% \cdot 100\% = \frac{i_{6/8}^*}{i_{6/5}} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{103,9 \cdot 94,95}{100} = 84,91; \text{ ітд.}$$

Для періодів спостереження $t = 9, t = 10, t = 11, t = 12, t = 13$, що слідують після базового, тобто від *восьмого дня* спостережень $t^* = 8$, обчислення проводимо в напрямку від періоду $t = 9$ до періоду $t = 13$.

$$i_{9/8}^* = \frac{y_9}{y_8} \cdot 100\% = \frac{y_9 \cdot y_8}{y_8 \cdot y_8} \cdot 100\% = \frac{y_8}{y_8} \cdot \frac{y_9}{y_8} \cdot 100\% = \frac{i_{8/8}^* \cdot i_{9/8}}{100} \cdot 100\% = \\ = \frac{i_{8/8}^* \cdot i_{9/8}}{100} \% = \frac{100 \cdot 103,9}{100} \% = 103,9;$$

$$i_{10/8}^* = \frac{y_{10}}{y_8} \cdot 100\% = \frac{y_{10} \cdot y_9}{y_8 \cdot y_9} \cdot 100\% = \frac{y_9}{y_8} \cdot \frac{y_{10}}{y_9} \cdot 100\% = \frac{i_{9/8}^* \cdot i_{10/9}}{100} \% = \\ = \frac{103,9 \cdot 94,95}{100} \% = 98,69;$$

$$i_{11/8}^* = \frac{y_{11}}{y_8} \cdot 100\% = \frac{y_{11} \cdot y_{10}}{y_8 \cdot y_{10}} \cdot 100\% = \frac{y_{10}}{y_8} \cdot \frac{y_{11}}{y_{10}} \cdot 100\% = \frac{i_{10/8}^* \cdot i_{11/10}}{100} \% = \\ = \frac{98,69 \cdot 95,68}{100} \% = 94,43; \text{ ітд.}$$

Остаточні результати приведені в таблиці 4.

$i_{0/8}^*$	$i_{1/8}^*$	$i_{2/8}^*$	$i_{3/8}^*$	$i_{4/8}^*$	$i_{5/8}^*$	$i_{6/8}^*$
68,85	69,50	72,13	77,04	87,86	84,91	94,42

$i_{7/8}^*$	$i_{8/8}^*$	$i_{9/8}^*$	$i_{10/8}^*$	$i_{11/8}^*$	$i_{12/8}^*$	$i_{13/8}^*$
95,73	100	103,9	98,69	94,43	95,08	85,25

Таблиця 4.

2(в). Заміна основи в і індексах з фіксованою основою.

Припустимо, що значення часового ряду

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

були замінені послідовністю одноосновних індексів

$$i_{1/0}, i_{2/0}, i_{3/0}, \dots, i_{n/0},$$

із базою порівняння з періоду $t = 0$.

Метою дослідження є вивчення динаміки розвитку явища по відношенню до його значення y_{t^*} з періоду t^* . Тому необхідно змінити основу порівняння y_0 в послідовності індексів з періоду $t = 0$ на y_{t^*} з періоду $t = t^*$.

Правило подібного перетворення дуже просте, але перед тим, як сформулювати його, ми представляємо його коротке обґрунтування.

Слід обчислити ряд одноосновних індексів:

$$i_{1/t^*}^*, i_{2/t^*}^*, i_{3/t^*}^*, \dots, i_{n/t^*}^*,$$

$$\text{де } i_{t/t^*}^* = \frac{y_t}{y_{t^*}} \cdot 100\%, \text{ використовуючи } i_{t/0} = \frac{y_t}{y_0} \cdot 100\%.$$

$$\text{Тому: } i_{t/t^*}^* = \frac{y_t/y_0 \cdot 100\%}{y_{t^*}/y_0 \cdot 100\%} \cdot 100\% = \frac{i_{t/0}}{i_{t^*/0}} \cdot 100\%.$$

Таким чином маємо наступне правило заміни:

Заміну індексу ($i_{t/0}$) з фіксованою базою y_0 з періоду $t = 0$, на індекс i_{t/t^*} з іншою постійною базою y_{t^*} з періоду $t = t^*$ виконуємо, ділячи індекс $i_{t/0}$ за даний період на індекс $i_{t^*/0}$ за період t^* , який повинен бути новою основою для порівнянь, а потім отриманий результат множачи на 100%.

Приклад 4. В наступній таблиці 4 приведені числові дані, що ілюструють динаміку курсу продажу певної іноземної валюти протягом двох тижнів, у вигляді індивідуальних індексів з фіксованою базою $i_{t/8}^*$, де за основу порівняння прийнято *восьмий день* спостережень: $t^* = 8$.

$i_{0/8}^*$	$i_{1/8}^*$	$i_{2/8}^*$	$i_{3/8}^*$	$i_{4/8}^*$	$i_{5/8}^*$	$i_{6/8}^*$
68,85	69,50	72,13	77,04	87,86	84,91	94,42
$i_{7/8}^*$	$i_{8/8}^*$	$i_{9/8}^*$	$i_{10/8}^*$	$i_{11/8}^*$	$i_{12/8}^*$	$i_{13/8}^*$
95,73	100	103,9	98,69	94,43	95,08	85,25

Таблиця 4.

Замінити індивідуальні індекси з фіксованою базою $i_{t/8}^*$, на індивідуальні індекси з фіксованою базою $i_{t/0}$, вибираючи за основу день безпосередньо перед початком спостережень (нульовий період $t = 0$).

Розв'язок: Наведемо для прикладу кілька детальних обчислень:

$$i_{1/0} = \frac{y_1}{y_0} \cdot 100\% = \frac{y_1 \cdot 100\%}{\frac{y_8}{y_0} \cdot 100\%} = \frac{y_1}{y_8} \cdot 100\% = \frac{i_{1/8}^*}{i_{0/8}^*} \cdot 100\% = \frac{69,5}{68,85} \cdot 100\% = 100,9;$$

$$i_{7/0} = \frac{y_7}{y_0} \cdot 100\% = \frac{y_7 \cdot 100\%}{\frac{y_8}{y_0} \cdot 100\%} = \frac{y_7}{y_8} \cdot 100\% = \frac{i_{7/8}^*}{i_{0/8}^*} \cdot 100\% = \frac{95,73}{68,85} \cdot 100\% = 139,0;$$

ітд.

Остаточні результати приведені в таблиці 5.

$i_{1,0}$	$i_{2,1}$	$i_{3,2}$	$i_{4,3}$	$i_{5,4}$	$i_{6,5}$	$i_{7,6}$
100,9	103,7	106,8	114,0	96,64	111,2	101,3
$i_{8,7}$	$i_{9,8}$	$i_{10,9}$	$i_{11,10}$	$i_{12,11}$	$i_{13,12}$	
104,5	103,9	94,95	95,68	100,7	89,66	

Таблиця 5.

3. Індексна рівність для економічних показників.

Що стосується економічних явищ, то серед абсолютних величин особливе значення мають такі показники, як *вартість* (w), *ціна* (p) та *кількість* (q). Часто доводиться проводити динамічний аналіз цих параметрів, спираючись на їх часові ряди, відповідно:

$$\{q_1, q_2, \dots, q_n\}, \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \text{ та } \{p_1, p_2, \dots, p_n\}.$$

При визначенні значення індексу (байдуже якого – одноосновного чи ланцюгового) важливо, щоб враховувались два періоди:

- Досліджуваний період t і базовий (тобто «нульовий») період ($t = 0$).

Тому подамо універсальну (в певному сенсі) схему визначення індексів, яку можна використати для підрахунку як одноосновних, так і для ланцюгових індексів.

Розглянемо два часових періоди:

- Період «нульовий», який розглядається як *основа для порівняння*;
- Період (t), що розглядається як *досліджуваний*.

Ціна P: Припустимо, що для періодів (t) і (0) є наступні величини.

- p_0 – ціна одиниці продукції (товару чи послуги) за базовий період;
- p_t – ціна одиниці тієї ж продукції за досліджуваний період.

Визначення. Індивідуальний індекс ціни (i_p) визначається як відношення ціни даного товару за досліджуваний період (t) до ціни цього товару за базовий період (0):

$$i_p = \frac{P_t}{P_0} \cdot 100\%.$$

Він інформує про взаємозв'язок між рівнем цін на дану продукцію протягом досліджуваного періоду (t) та базового періоду (0).

Кількість Q: Припустимо, що для періодів (t) і (0) є наступні величини.

- q_0 – кількість продукції (товару чи послуги) в базовому періоді;
- q_t – кількість тієї ж продукції в досліджуваному періоді.

Визначення. Індивідуальний індекс кількості (i_q) визначається як відношення кількості даного товару за досліджуваний період (t) до кількості цього товару за базовий період (0):

$$i_q = \frac{Q_t}{Q_0} \cdot 100\%.$$

Вартість W: Припустимо, що для періодів (t) і (0) є наступні величини.

- w_0 – вартість продукції (товару чи послуги) в базовому періоді;
- w_t – вартість тієї ж продукції в досліджуваному періоді.

Визначення. Індивідуальним індексом вартості (i_w) називається відношення вартості даного товару за досліджуваній період (w_t) до вартості цього товару за базовий період (w_0):

$$i_w = \frac{w_t}{w_0} \cdot 100\%.$$

Як відомо, для будь-якого періоду (або ж моменту) t між цими трьома економічними величинами існує наступна залежність:

$$w_t = q_t \cdot p_t.$$

Використовуючи її отримаємо:

$$i_w = \frac{p_t \cdot q_t}{p_0 \cdot q_0} \cdot 100\% = \frac{1}{100\%} \cdot \frac{p_t}{p_0} \cdot 100\% \cdot \frac{q_t}{q_0} \cdot 100\%.$$

Тож ми дійшли висновку, що між індексами вартості, ціни та кількості існує наступна рівність:

$$i_w = \frac{i_p \cdot i_q}{100\%},$$

що називається *індексною рівністю* у для індивідуальних індексів i_w, i_p, i_q .

2.12. Агреговані індекси.

1. Практична потреба в агрегованих показниках динаміки. 2. Загальна схема побудови агрегованих показників динаміки. 3. Вартість (W) як узагальнюючий економічний показник. 4. Індекс фізичного рівня продукції. 5. Різні форми агрегованих індексів.

1. Практична потреба в агрегованих показниках динаміки.

Розглянуті індивідуальні індекси – це інструмент для аналізу однорідних явищ, оскільки вони використовуються для вивчення змін значення лише однієї ознаки. У практиці статистичних досліджень часто доводиться аналізувати динаміку складних, неоднорідних явищ, які є сумою компонентів, що виражаються різними одиницями вимірювання.

Припустимо, наприклад, що певна галузь промисловості виробляє n видів продукції. Часові ряди

$$Q^s_1, Q^s_2, \dots, Q^s_T, s = 1, 2, \dots, n;$$

представляють виробництво окремих видів ($s = 1, 2, \dots, n$) виробів у відповідних одиницях вимірювання за певний проміжок часу $t \in \{1, 2, \dots, T\}$.

Припустимо, що метою дослідження є аналіз сукупного рівня всіх видів продукції одночасно. Тоді можливості використання індивідуальних засобів є недостатніми, оскільки для різних видів продукції динаміка їх рівня може бути різною.

Аналогічна ситуація спостерігається, якщо вивчається загальний стан економічної кон'юнктури:

- Не виключаємо виникнення ситуації, коли одночасно для одних галузей рівень виробництва збільшується, для інших – знижується.

Яскравим прикладом складних, неоднорідних явищ є торгівля:

- З точки зору *попиту* та *пропозиції* дуже важливо оцінити *загальну* динаміку, тобто охопити всі товари разом, при тому, що зміни рівня цін на окремі з них можуть істотно відрізнятись.

З практичної точки зору найважливішим прикладом синтетичних мір динаміки різномірних економічних явищ є *макроекономічні показники* загального стану економіки певної країни чи регіону. Адже такий показник повинен враховувати усі аспекти економічної діяльності в регіоні, що розглядається.

До подібних показників зараховують, наприклад:

- ✓ *Національне багатство* (НБ);
- ✓ *Валовий національний продукт* (ВНП);
- ✓ *Валовий внутрішній продукт* (ВВП);
- ✓ *Національний дохід* (НД);
- ✓ *Чистий національний дохід* (ЧНД);
- ✓ *Чистий матеріальний продукт* (ЧМП)), ітп.

Очевидно, що кожен з таких *показників*, який умовно можна назвати «*станом економіки певного регіону*», є складною, неоднорідною ознакою, що поєднує в собі величезну кількість компонентів, які неможливо «*безпосередньо скласти*». Однак всі згадані вище різні показники мають одну спільну властивість:

- Це *агреговані*, або *групові* індикатори, які дозволяють описати динаміку змін значення багатьох ознак одночасно.

2. Загальна схема побудови агрегованих показників динаміки.

Наступна загальна схема формалізує процедуру побудови агрегованих показників динаміки для наведених вище прикладів складних економічних явищ:

- Досліджується два фактори X та Y , спільні для n різних явищ.
- Наступні часові ряди описують динаміку цих факторів:

$$x^s_1, x^s_2, \dots, x^s_T, s = 1, 2, \dots, n;$$

та

$$y^s_1, y^s_2, \dots, y^s_T, s = 1, 2, \dots, n.$$

- Неможливо утворити один часовий ряд

$$X_1, X_2, \dots, X_T$$

таким чином, щоб для кожного періоду часу $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ значення X_t можна було б розглядати, як узагальнений, спільний результат, що визначається всіма значеннями $x^1_t, x^2_t, \dots, x^n_t$.

- Не можливо також утворити один часовий ряд

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_T,$$

таким чином, щоб для кожного періоду часу $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ значення Y_t можна було б розглядати як узагальнений, спільний результат, що визначається всіма значеннями $y^1_t, y^2_t, \dots, y^n_t$.

- Однак існує узагальнюючий економічний показник U , однаковий для всіх n явищ, визначений як добуток факторів X та Y , і такий, що його значення для різних явищ можна підсумовувати (*безпосередньо скласти*).

Тоді аналіз динаміки «сумарного» для всіх n явищ фактора X замінюється аналізом динаміки «сумарного» для всіх n явищ узагальнюючого фактора U (при умові, що було усунуто вплив на U фактору Y).

Подібним чином аналіз динаміки «сумарного» для всіх n явищ фактора Y замінюється аналізом динаміки «сумарного» для всіх n явищ узагальнюючого фактора U (при умові, що було усунуто вплив на U фактору X).

3. Вартість (W) як узагальнюючий економічний показник.

Для ілюстрації цієї загальної схеми розглянемо конкретний приклад.

Нехай спільний для всіх n явищ фактор X , про який йдеться в описаній схемі – це рівень виробництва n продуктів.

$$\{(Q^s_t, t = 1, 2, \dots, T), s = 1, 2, \dots, n\}$$

Часові ряди

$$x^s_1, x^s_2, \dots, x^s_T, s = 1, 2, \dots, n;$$

описують динаміку виробництва кожного з n продуктів.

Еквівалентом чинника Y буде рівень цін (P) на окремі види продукції, натомість:

$$P^s_1, P^s_2, \dots, P^s_T, s = 1, 2, \dots, n;$$

часові ряди, що описують динаміку цін кожного з продуктів у розглянутому інтервалі часу $t \in \{1, 2, \dots, T\}$.

Роль узагальнюючого економічного показника U у цьому випадку відіграє виражена у грошових одиницях *вартість* (W) окремих видів продукції.

$$W = Q \cdot P.$$

Нехай:

$$W^s_t = Q^s_t \cdot P^s_t, t = 1, 2, \dots, T,$$

часові ряди, що описують для окремих типів ($s = 1, 2, \dots, n$) виробів динаміку їх вартості у відповідних часових інтервалах $t = 1, 2, \dots, T$.

Часові ряди $\{W^s_t, t = 1, 2, \dots, T\}, s = 1, 2, \dots, n$ дозволяють так само оцінювати рівень виробництва всіх видів продукції, незалежно від

того, якими одиницями вимірюється цей рівень для кожного них окремо. Динаміку рівня виробництва всієї галузі, що виробляє n видів продукції, описує часовий ряд: W_1, W_2, \dots, W_T , де

$$W_t = \sum_{s=1}^n W_t^s = \sum_{s=1}^n Q_t^s \cdot P_t^s, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

4. Індекс фізичного рівня продукції.

При дослідженні загальної кон'юнктури виробництва широко використовується *індекс фізичного рівня продукції* (I_t^W), тобто синтетичний показник, що характеризує рівень виробництва відповідної галузі, який визначається наступним чином:

$$I_t^W = \frac{W_t}{W_0} = \frac{\sum_{s=1}^n Q_t^s \cdot P_t^s}{\sum_{s=1}^n Q_0^s \cdot P_0^s}, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

де ($t = 0$) означає «нульовий» або базовий період, що розглядається як *основа для порівняння*, а період (t) розглядається як *досліджуваний*.

Індекс фізичного рівня продукції (I_t^W) включає два основні фактори, що значною мірою формують загальну економічну ситуацію у виробничому секторі:

- Рівень випуску продукції Q ; та
- Ціна P цієї продукції.

Тому виражаючи ціни у відповідних валютах, за допомогою індексу I_t^W можна порівняти стан відповідних галузей виробництва для різних країн або загальний стан їх виробничого сектору.

5. Індeksi «очищені» від впливу окремих факторів.

Модифікуючи відповідним чином індекс I_t^W , та *усуваючи вплив* на нього одного з факторів (Q або P), можна побудувати агреговані показники, що оцінюють вплив на загальний економічний стан кожного з цих факторів окремо.

Припустимо, що ми хочемо вивчити, *в якій мірі (наскільки сильно)* на динаміку загального рівня виробництва галузі впливають рівні випуску продукції Q^s , на окремі види товарів ($s = 1, 2, \dots, n$). Для цього необхідно усунути вплив на цю динаміку можливої зміни ціни P^s , на окремі види товарів ($s = 1, 2, \dots, n$).

Універсальна схема побудови синтетичних показників, як підкреслювалось в підрозділі 2.10, передбачає наявність двох часових періодів:

- «Нульового», який розглядається як *основа для порівняння*; та
- *Досліджуваного* (t).

Отже маємо два рівня цін:

- P^s_0 , $s = 1, 2, \dots, n$; – ціна одиниці кожного з продуктів за базовий період;
- P^s_t , $s = 1, 2, \dots, n$; – ціна тієї ж продукції за досліджуваний період.

Тому маємо дві можливості:

1. Індекси у формі Ласпейреса.

Перша можливість полягає в тому, щоб залишити ціни на тому самому рівні, якими вони були в базовому періоді $t = 0$.

Тоді сукупний індекс рівня буде обчислюватись за формулою:

$$I^Q_t = \frac{\sum_{s=1}^n Q_t^s \cdot P_0^s}{\sum_{s=1}^n Q_0^s \cdot P_0^s}, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

- Цей показник буде характеризувати зміни загального стану виробництва досліджуваної галузі, спричинені зміною рівня виробництва окремих товарів, тобто змінами загального рівня виробництва всієї галузі *незалежно від коливань цін*.
- Подібні сукупні індекси називаються індексами у формі Ласпейреса.

Ця назва походить від імені їх творця – німецького економіста Л. Ласпейреса, який ввів їх до економічного аналізу у 1869 році.

2. Індекси у формі Пааше.

Друга можливість полягає в тому, щоб залишити ціни на рівні, якими вони були в періоді t , який досліджуються.

Тоді сукупний індекс рівня буде обчислюватись за формулою:

$$I^Q_t = \frac{\sum_{s=1}^n Q_t^s \cdot P_t^s}{\sum_{s=1}^n Q_0^s \cdot P_t^s}, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

- Цей показник теж характеризує зміни загального рівня виробництва всієї галузі *незалежно від коливань цін*.
- Такі індекси називаються індексами у формі Пааше, оскільки були введені німецьким економістом Г. Пааше у 1874 році.
- Як правило, ці індекси мають різні числові значення. Для того, щоб розрізнити їх, для кожного з них були введені інші позначення.
- Індекс фізичного рівня продукції у формі Ласпейреса позначається символом I^L_Q ;
- Індекс фізичного рівня продукції у формі Пааше позначається символом I^P_Q .

3. Індекси у формі Фішера.

Щоб не виникало непорозумінь в ситуаціях, коли нас цікавить виключно *тенденція* зміни загального рівня виробництва галузі, обчислюється індекс рівня виробництва у формі Фішера (I^F_Q).

- Індекс I^F_Q у формі Фішера визначається, як *середнє геометричне* індексів I^L_Q та I^P_Q :

$$I^F_Q = \sqrt{I^L_Q \cdot I^P_Q}.$$

Зауваження: Аналогічна ситуація існує і у випадку агрегованого показника, що оцінює вплив на загальний економічний стан галузі, цінових змін, тобто у випадку сукупного індексу цін.

Такий індекс, подібно як і індекс рівня продукції, існує в трьох різних формах:

- У формі Ласпейреса (I^L_P);
 ➤ У формі Пааше (I^P_P); та
 ➤ У формі Фішера (I^F_P):

$$I^F_P = \sqrt{I^L_P \cdot I^P_P}.$$

2.13. Синтетичні показники при дослідженні кон'юнктури.

1. Споживчий «кошик»
2. Індекс споживчих цін.
3. Агреговані індекси у формі Фішера.
4. Індексні рівності для агрегованих показників.
5. Агреговані індекси: Приклади.

1. Споживчий «кошик»

Агреговані індекси вартості.

Припустимо, що досліджується *кошик товарів*, що містить n різних товарів (або послуг), які неможливо безпосередньо «*підсумувати*» природним способом. Економічним інструментом, який дозволяє *агрегувати* неоднорідні явища в один «*кошик*», аби порівнювати їх між собою в часі, є ціна:

- Ціна дозволяє виразити окремі величини різної природи в одних і тих же грошових одиницях.

Введемо наступні позначення:

- $(p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0n})$ – ціни окремих товарів (чи послуг) в базовому періоді часу ($t = 0$);
- $(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n})$ – кількості окремих товарів (чи послуг) в базовому періоді часу ($t = 0$);
- відповідні $(p_{t1}, p_{t2}, \dots, p_{tm})$ – ціни та $(q_{t1}, q_{t2}, \dots, q_{tm})$ – кількості в періоді (t), що вивчається.

Визначимо також:

- Відповідні *вартості* $(w_{01}, w_{02}, \dots, w_{0n})$ для в базового періоду часу; та
 ➤ *Вартості* $(w_{t1}, w_{t2}, \dots, w_{tm})$ для в періоду часу(t), що вивчається.

Тоді на підставі залежності між цими величинами, що існує в будь-який період часу (t), маємо наступні рівності:

$$w_{0i} = q_{0i} \cdot p_{0i}, i = 1, 2, \dots, n;$$

та

$$w_{ti} = q_{ti} \cdot p_{ti}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким чином загальна вартість *кошика* (множини) товарів відповідно в базовому періоді часу (W_0) та в періоді, що вивчається (W_t), становить:

$$W_0 = \sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot p_{0i};$$

та

$$W_t = \sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot p_{ti}.$$

І безпосередньо на основі відповідних визначень можна ввести як *одноосновні*, так і *ланцюгові* індекси вартість досліджуваного кошика:

Індекс сукупної вартості визначається рівністю

$$I_W = \frac{W_t}{W_0} \cdot 100\%,$$

і вказує:

- На скільки *відсотків* буде *змінюватися* вартість досліджуваної групи (сукупності) товарів чи послуг в період часу (t) порівняно з базовим періодом ($t = 0$) в результаті *одночасних змін як кількості так і ціни*.

Агреговані індекси кількості.

Визначення. Агрегований індекс кількості у формі Ласпейреса (I_q^L), тобто при умові стабільності цін з базового періоду, визначається за такою формулою:

$$I_q^L = \frac{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot p_{0i}}{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot p_{0i}} \cdot 100\%.$$

- I_q^L інформує, на скільки відсотків зміниться *вартість* товарів чи послуг протягом періоду (t), що вивчається, порівняно з базовим періодом ($t = 0$), за умови, що *ціни будуть постійними* на рівні *базового* періоду, а змінилася б лише *кількість* товарів чи послуг.

Цей показник *опосередковано*, через *вартість* кошика товарів, визначає *середню динаміку кількості*, оскільки розраховується в умовах припущення, що ціни не змінюються, а залишаються на рівні *базового* періоду.

Визначення. Агрегований індекс кількості у формі Пааше (I_q^P), тобто при умові стабільності цін з періоду (t), що вивчається, визначається за такою формулою:

$$I_q^P = \frac{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot P_{ti}}{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot P_{ti}} \cdot 100\%.$$

- I_q^L інформує, на скільки відсотків зміниться *вартість* товарів чи послуг протягом періоду (t), що вивчається, порівняно з базовим періодом ($t = 0$), за умови, що *ціни* будуть *постійними* на рівні періоду часу (t), а змінилася б лише *кількість* товарів чи послуг.

Цей показник *опосередковано*, через *вартість* кошика товарів, визначає *середню динаміку кількості*, оскільки розраховується в умовах припущення, що *ціни* не змінюються, а залишаються на рівні періоду часу (t).

2. Споживчий «кошик» та індекс споживчих цін.

Визначення. Агрегований індекс ціни у формі Ласпейреса (I_p^L), тобто при умові стабільності кількості товарів з базового періоду, визначається за такою формулою:

$$I_p^L = \frac{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot P_{ti}}{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot P_{0i}} \cdot 100\%.$$

Цей показник *опосередковано*, через *вартість* кошика товарів, визначає *середню динаміку ціни*, оскільки розраховується в умовах припущення, що *кількості* не змінюються, а залишаються на рівні *базового* періоду.

Ось чому індекс Ласпейреса дає дещо *завищену*, (тобто *переоцінену*) величину темпу зростання цін, оскільки не враховуються зміни в *структурі* споживання товарів, викликані зміною цін.

Визначення. Індекс Ласпейреса (I_p^L), визначений для фіксованого «кошика» споживчих товарів та послуг, називається *індексом споживчих цін*.

Кількість товарів і послуг, які складають *встановлений* споживчий «кошик», зазвичай становить понад 300 найменувань, що купуються «середніми» споживчими. При цьому послідовність індексів споживчих цін побудована таким чином, що ціна «кошика» в базовому періоді приймається за 100%.

Тому значення індексу споживчих цін інформує:

- На скільки відсотків зміниться ціна товарів чи послуг, які формують кошик, протягом періоду (t), порівняно з базовим періодом (0).

Індекс споживчих цін визначається щонайменше кожного місяця і є оперативним та найпоширенішим показником рівня інфляції.

Визначення. Агрегований індекс ціни у формі Пааше (I^P_p), тобто при умові стабільності кількості товарів з періоду (t), що вивчається, визначається за такою формулою:

$$I^L_q = \frac{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot p_{ti}}{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot p_{0i}} \cdot 100\%.$$

Дефлятор ВВП

Визначення. Індекс Пааше, розрахований на всі товари та послуги, що входять до валового внутрішнього продукту (ВВП), називається *дефлятором ВВП*.

Оскільки на цей індекс впливають структурні зміни, які компенсують зростання цін на деякі товари, вважається, що дефлятор ВВП *недооцінює* значення темпу зростання цін.

3. Агреговані індекси у формі Фішера.

За винятком найпростіших ситуацій, коли значення розглянутих факторів у періоди, що порівнюються, однакові, обчислення показників за різними формулами зазвичай дає різні результати.

Варто, однак, зазначити, що на практиці ця різниця не дуже велика, при цьому як індекси типу Ласпейреса (I^L_q , I^L_p), так і показники типу Пааше (I^P_q , I^P_p) дуже добре відображають *тенденцію* та *швидкість* зміни кількості та ціни.

Кожен із способів визначення індексу має свої переваги та недоліки, проте в конкретних умовах завжди можна вибрати такий тип агрегованого індексу, який найкраще вирішує проблеми, поставлені в цьому дослідженні.

Третій тип агрегованих індексів – індекси у формі Фішера, у певному сенсі усуває недоліки обох вищезазначених типів індексів (як для ціни (I^F_p), так і для кількості (I^F_q)).

Визначення. Агрегований індекс кількості у формі Фішера (I^F_q) визначається, як середнє геометричне для відповідних індексів Ласпейреса (I^L_q) та Пааше (I^P_q) і обчислюється за формулою:

$$I^F_q = \sqrt{I^L_q \cdot I^P_q}.$$

Визначення. Агрегований індекс ціни у формі Фішера (I_p^F) визначається, як середнє геометричне для відповідних індексів Ласпейреса (I_p^L) та Пааше (I_p^P) і обчислюється за формулою:

$$I_p^F = \sqrt{I_p^L \cdot I_p^P}.$$

4. Індексні рівності для агрегованих показників.

Крім усунення відмінностей, що виникають внаслідок різних припущень при обчисленні індексів Ласпейреса і Пааше, можна навести ще один аргумент на користь введення індексів Фішера.

Більше того, отримаємо переконливий аргумент, що виправдовує слушність використання *середньої геометричної* для визначення середнього значення відповідних індексів Ласпейреса і Пааше.

Повернемося до введеного раніше визначення індексу (I_W) сукупної вартості групи товарів чи послуг, та перетворимо формулу для його обчислення наступним чином:

$$\begin{aligned} I_W &= \frac{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot P_{ti}}{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot P_{0i}} \cdot 100\% = \frac{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot P_{0i}}{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot P_{0i}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot P_{ti}}{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot P_{0i}} \cdot 100\% = \\ &= \frac{1}{100\%} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot P_{0i}}{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot P_{0i}} \cdot 100\% \cdot \frac{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot P_{ti}}{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot P_{0i}} \cdot 100\% = \frac{I_p^L \cdot I_p^P}{100\%}. \end{aligned}$$

Або інакше:

$$\begin{aligned} I_W &= \frac{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot P_{ti}}{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot P_{0i}} \cdot 100\% = \frac{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot P_{ti}}{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot P_{ti}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot P_{ti}}{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot P_{0i}} \cdot 100\% = \\ &= \frac{1}{100\%} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot P_{ti}}{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot P_{ti}} \cdot 100\% \cdot \frac{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot P_{ti}}{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot P_{0i}} \cdot 100\% = \frac{I_p^L \cdot I_q^P}{100\%}. \end{aligned}$$

Отримані співвідношення для агрегованих індексів:

$$I_W = \frac{I_q^L \cdot I_p^P}{100\%};$$

та

$$I_W = \frac{I_p^L \cdot I_q^P}{100\%},$$

за аналогією з індексною рівністю:

$$i_w = \frac{i_p \cdot i_q}{100\%},$$

для індивідуальних індексів, називаються *індексними рівностями*.

Якщо помножити ліві та праві частини цих рівностей між собою, то отримаємо:

$$(I_W)^2 = \frac{I_q^L \cdot I_p^P}{100\%} \cdot \frac{I_p^L \cdot I_q^P}{100\%},$$

Або остаточно:

$$I_W = \sqrt{\frac{I_q^L \cdot I_p^P \cdot I_p^L \cdot I_q^P}{100\% \cdot 100\%}} = \frac{I_p^F \cdot I_q^F}{100\%},$$

що буквально повторює індексну рівність для індивідуальних індексів.

5. Агреговані індекси: Приклади.

Приклад 1.

Підприємство експортує 3 групи виробів: А, В, С. Інформація щодо об'ємів експорту (кількості виробів) та їх ціни для двох років приведена в наступній таблиці 1.

Товари	Кількість q_0	Кількість q_t	Ціна p_0	Ціна p_t
А(тис.т)	30	40	1000	1500
В(тис.ш)	10	15	500	600
С(тис.м)	80	50	800	1000

Таблиця 1.

Необхідно на підставі даних, представлених в цій таблиці, обчислити наступні *агреговані показники*:

Агрегований індекс вартості.

Розв'язок: Приймаючи до уваги приведені визначення *агрегованих індексів*, виконаємо спочатку деякі попередні обчислення, перетворюючи відповідним чином наявні в таблиці 1 емпіричні дані.

Остаточні результати цих обчислень приведені в таблиці 2.

Товари	q_0	q_t	p_0	p_t	$q_0 p_0$	$q_t p_t$	$q_0 p_t$	$q_t p_0$
A(тис.т)	30	40	1000	1500	30000	60000	45000	40000
B(тис.л)	10	15	500	600	5.000	9000	6000	7500
C(тис.м)	80	50	800	1000	64000	50000	80000	40000
Сума:					99000	119000	131000	87500

Таблиця 2.

Згідно з визначенням *агрегований індекс вартості* (I_W) обчислюємо за формулою:

$$I_W = \frac{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot p_{ti}}{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot p_{0i}} \cdot 100\% = \frac{119000}{99000} \cdot 100\% = 120,2\%.$$

Висновок. Загальна вартість експорту протягом року (t) вища на 20,2% в порівнянні з вартістю експорту протягом року (0), що є підставою порівняння.

Агрегований індекс ціни у формі Ласпейреса (I_p^L).

Розв'язок: Приймаючи до уваги приведені визначення агрегованого індексу ціни у формі Ласпейреса (I_p^L), та результати обчислень розміщені в таблиці 2, отримаємо:

$$I_p^L = \frac{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot p_{ti}}{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot p_{0i}} \cdot 100\% = \frac{131000}{99000} \cdot 100\% = 132,3\%.$$

Висновок. Використовуючи агрегований індекс ціни I_p^L для загальної оцінки динаміки цін, можна стверджувати, що в середньому ціни всіх товарів *загалом* на протязі року (t) виросли в порівнянні з роком (0), що є підставою порівняння, на 32,3%.

Агрегований індекс ціни у формі Пааше (I_p^P).

Розв'язок: Приймаючи до уваги приведені визначення агрегованого індексу ціни у формі Пааше (I_p^P), та результати обчислень розміщені в таблиці 2, отримаємо:

$$I_p^P = \frac{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot p_{ti}}{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot p_{0i}} \cdot 100\% = \frac{119000}{87500} \cdot 100\% = 136\%.$$

Висновок. Використовуючи агрегований індекс ціни у формі Пааше (I_p^P) з метою загальної оцінки динаміки цін, приходимо до висновку, що в середньому ціни всіх товарів *загалом* на протязі року (t) виросли в порівнянні з роком (0), що є підставою порівняння, на 36%.

Цей результат відрізняється від результату, отриманого в тих самих умовах, на підставі тих самих емпіричних даних з використанням *агрегованого індексу ціни у формі Ласпейреса* (I_p^L).

Там ріст становив 32,3%.

Агрегований індекс ціни у формі Фішера (I_p^F).

На конкретних прикладах переконуємось, що показники, підраховані на підставі *індексів у формі Ласпейреса* (I_p^L) та *індексів у формі Пааше* (I_p^P), можуть відрізнятись.

В ситуації, коли нас цікавить виключно дослідження динаміки зміни потрібних показників, обчислюється *агрегований індекс у формі Фішера* (I_p^F). Це дозволяє, зокрема, уникнути розбіжності в результатах при використанні *агрегованих індексів у формі Ласпейреса* та *Пааше*.

Агрегований індекс у формі Фішера визначається, як середнє геометричне для відповідних індексів Ласпейреса (I_p^L) та Пааше (I_p^P) і обчислюється за формулою:

$$I_p^F = \sqrt{I_p^L \cdot I_p^P}.$$

$$I_p^F = \sqrt{I_p^L \cdot I_p^P} = \sqrt{132,3 \cdot 136\%} = 134,1\%.$$

Висновок. В середньому ціни всіх товарів *загалом* на протязі року (t) виросли в порівнянні з роком (0), що є підставою порівняння, на 34,1%.

Приклад 2.

Використовуючи емпіричні дані, приведені в [таблиці 1](#), та результати їх перетворень, що приведені в [таблиці 2](#), обчислити наступні *агреговані показники*:

Агрегований індекс кількості у формі Ласпейреса (I_q^L).

$$I_q^L = \frac{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot P_{0i}}{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot P_{0i}} = \frac{87500}{99000} \cdot 100\% = 88,4\%.$$

Агрегований індекс кількості у формі Пааше (I_q^P).

$$I_q^P = \frac{\sum_{i=1}^n q_{ti} \cdot p_{ti}}{\sum_{i=1}^n q_{0i} \cdot p_{ti}} = \frac{119000}{131000} \cdot 100\% = 90,8\%.$$

Агрегований індекс кількості у формі Фішера (I_q^F).

$$I_q^F = \sqrt{I_q^L \cdot I_q^P} = \sqrt{88,4 \cdot 90,8\%} = 89,6\%.$$

Висновки.

1) В середньому загальне зменшення кількості експорту всіх товарів в році (t) в порівнянні з роком (0) становить 10,4%.
виросли ціни товарів

2) Ріст загальної вартості експорту на 20,2% був обумовлений зменшенням кількості експорту в середньому на 10,4%, та ростом цін в середньому на 34,1%.

Приклад 3.

Використовуючи результати обчислень проведених в прикладах 1 та 2, перевірити справедливність наступних *індексних рівностей* для агрегованих показників:

$$1. I_W = \frac{I_q^L \cdot I_p^P}{100\%}; \quad 2. I_W = \frac{I_p^L \cdot I_q^P}{100\%}; \quad 3. I_W = \frac{I_p^F \cdot I_q^F}{100\%}.$$

$$I_W = 120,2\%;$$

1.

$$\frac{I_q^L \cdot I_p^P}{100\%} = \frac{90,8 \cdot 132,3}{100} = 120,2.$$

2.

$$\frac{I_p^L \cdot I_q^P}{100\%} = \frac{88,4 \cdot 136}{100} = 120,2.$$

3.

$$\frac{I_p^F \cdot I_q^F}{100\%} = \frac{89,6 \cdot 134,1}{100} = 120,2.$$

2.14. Характеристика методів дослідження кон'юнктури.

1. Методи, побудовані на основі «моделей часових рядів». 2. Декомпозиція часових рядів. 3. Методи прогнозування на підставі часових рядів. 4. Методи фундаментального та технічного аналізу. 5. Коротка характеристика методів фундаментального аналізу.

Очевидно, що математичні методи повинні відігравати фундаментальну роль у вирішенні завдань *ідентифікації*, тобто встановлення поточної фаз циклу кон'юнктури, та визначення *прогнозів кон'юнктури*:

- Шляхом обчислення та належного аналізу динаміки числових показників, що характеризують досліджуване економічне явище, можна, робити обґрунтовані висновки щодо перебігу хвилі ділової активності.

1. Методи, побудовані на основі «моделей часових рядів».

Проблема полягає в тому, що всі описані вище типи економічних хвиль відбуваються одночасно. Тому будь-який показник відображає *сумарний* вплив усіх цих хвиль на досліджуване явище. Корисними для вирішення цих проблем можуть бути математичні методи, пов'язані зі статистичним аналізом часових рядів.

Варто зазначити, що саме практичні економічні потреби призвели до появи математичної дисципліни під назвою «*Теорія часових рядів*». Моделі часових рядів були створені при розробці планів та необхідністю в зв'язку з цим внесення певних коректив, пов'язаних з порами року: Для багатьох економічних явищ спостерігалися пов'язані з цим так звані «*сезонні коливання*».

Методи, побудовані на основі «моделей часових рядів», класифікуються як *поза-причинні* методи (*не каузальні*), тобто такі, що *не пояснюють* механізми формування змінних, а базують свої висновки на *значеннях досліджуваних змінних* за певний проміжок часу з минулого.

- *Моделі часових рядів* намагаються описати досліджуване явище, спираючись на значень змінних, що його характеризують, в минулому.

Моделі часових рядів особливо корисні, коли мета прогнозу полягає в тому, щоб здогадатися «*що може статися*», а не пояснювати «*чому це станеться*». Саме це дуже часто є головним завданням прогнозування кон'юнктури. Основна перевага методів часових рядів пов'язана з відносною простотою їх формального обґрунтування та застосування до практичних потреб в порівнянні з більш складними та трудомісткими причинно-наслідковими математико-статистичними методами. А це, в свою чергу, впливає з того, що:

- *Методи часових рядів* не намагаються *пояснити* причини змін, що відбуваються в досліджуваному явищі.
- Вони *визначають його динаміку*, припускаючи, що поточна тенденція збережеться і в майбутньому.

Не дивлячись на це вони є досить ефективними і часто за тих самих умов дають кращі результати в порівнянні з іншими методами.

Даючи загальну характеристику методів часових рядів можна сказати наступне:

- Ці методи описують динаміку досліджуваного економічного явища, використовуючи певну *функцію тренду*, враховуючи *сезонність*, *циклічність* та *стохастичний характер* процесу, але не вдаючись до економічних механізмів, які його формують.

2. Декомпозиція часових рядів.

Будь-яка практична процедура побудови прогнозів за допомогою часових рядів неодмінно повинна враховувати *фактичну структуру* того економічного явища, що досліджується.

Проблема полягає в тому, що значення $y_t = Y(t)$, представлені в часовому ряді, відображають *сумарну дію* всіх чинників, які впливають на нього. Запропонована ж загальна схема прогнозування фактично передбачає аналіз майбутньої поведінки кожної складової, присутньої в значенні y_t , окремо.

- Тому перш за все необхідно встановити, які саме складові *можуть бути присутніми* в значенні ряду y_t , що спостерігається в момент t .

Це непросте завдання, що дістало назву «*декомпозиції часового ряду*», викликало великий інтерес з боку математиків. Був створений та постійно розвивається спеціальний розділ прикладної статистики, метою якого є розробка відповідних методів.

➤ Процес *ідентифікації* та *виділення* складових, що утворюють значення:

$$y_t = Y(t), t \in \{1, 2, \dots, T\},$$

емпіричних даних, з метою розкладання часового ряду на *окремі компоненти*, називається його *декомпозицією*.

- Під час розкладання часового ряду можна встановити, які компоненти в ньому *присутні*.
- Це, в свою чергу, дозволяє визначити вплив кожної з них на досліджувану змінну.

У багатьох випадках прості засоби візуалізації часових рядів (зокрема побудова їх графіку) можуть бути дуже корисними в процесі декомпозиції. Вони, між іншим, дозволяють встановити наявність окремих компонент, визначити природу часового ряду (*адитивна* чи *мультиплікативна*), виявити *атипові* (*нетипові*) спостереження тощо.

При побудові прогнозів кон'юнктури особливе значення мають так звані «*зворотні пункти*» в досліджуваному явищі, тобто такі моменти, в яких змінюється напрямок його розвитку. Стохастичний характер явищ

не дозволяє визначити їх *однозначно*. Але в багатьох випадках *форми* різноманітних *графіків* та *діаграм* часових рядів можуть надати дуже корисну інформацію з цього приводу.

- Дослідженням таких закономірностей та їх використанням при побудові прогнозів кон'юнктури займається окремий розділ прикладної статистики під назвою «*Методи технічного аналізу*».

3. Методи прогнозування на підставі часових рядів.

Перший крок процедури прогнозування передбачає визначення *функція тренду*, тобто *основного* (або *домінуючого*) напрямку розвитку досліджуваного явища.

- Методи визначення прогнозів, що базуються на аналізі часових рядів, (втім також *прогнозів кон'юнктури*) передбачають, зазвичай, *екстраполяцію* функції тренду в *область прогнозування*.

Нагадаємо, що крім «*основних*» («*базових*») чинників, які обумовлюють досліджуване явище, на нього впливає безліч інших, «*мени істотних*». Тому необхідно відповідним чином «*відкоригувати*» отримані прогнозовані значень функції тренду. Тобто необхідно внести зміни, враховуючи вплив на прогнозоване явище таких чинників, як:

- *Сезонні фактори*;
- Чинників, пов'язаних з *циклічністю* економічних процесів;
- Врахувати можливі наслідки, обумовлені *стохастичним характером* майбутніх змін, тощо.

Цей вплив теж знайшов своє відображення в часовому ряду, що є підставою для побудови прогнозу.

Слід зауважити, що стохастичний характер економічних процесів може бути суттєвою перешкодою під часі «*розмежування*» окремих типів економічних циклів та встановлення їх наступних фаз.

Дуже простими та зручними в застосуванні і водночас достатньо ефективними, виявились в цьому випадку «*механічні*» методи «*згладжування*» економічних рядів.

- Варто зауважити, що методи «*згладжування*» є *універсальними* по своїй суті і можуть використовувати для вивчення явищ будь-якої природи (не обов'язково *економічних*).
- Що ж стосується економічних досліджень, то особливо корисними виявилися вони саме при побудові прогнозів *господарчої кон'юнктури*.

З метою «*усунення*» випадкових коливань з економічних рядів крім згаданих «*механічних*», широко використовуються інші, «*формалізовані*» методи згладжування. Вони передбачають визначення *аналітичного*

вигляду відповідних економіко-математичних моделей та використання методів *математичної статистики* для оцінювання невідомих параметрів цих моделей.

4. Методи фундаментального та технічного аналізу.

Загалом методи дослідження *економічних явищ* ділять (умовно) на дві основні групи:

- Методи фундаментального аналізу;
- Методи технічного аналізу.

Тому охарактеризуємо коротко їх особливості, звертаючи при цьому увагу на наступну обставину:

- Дослідження господарчої кон'юнктури – це різновид *економічних досліджень*. Тому всі методи, що застосовуються з цією метою, повинні бути належним чином *модифіковані* з врахуванням *специфіки* проблем, пов'язаних з такими дослідженнями.

До методів фундаментального аналізу зараховуємо методи, що відповідають наступним вимогам:

- Базуються, передусім, на предметному аналізі різних *факторів*, які формують досліджуваний ринковий сегмент;
- Базуються на вивченні *умов*, в яких ці фактори проявляються;
- На дослідженні *взаємодії* різних *факторів*, їх *взаємозв'язків*, *взаємозалежностей*, тощо, (чи може відсутності такої *взаємодії*).

Основним джерелом розвитку таких методів є *окремі галузі економічної науки* у поєднанні із широким використанням *математичних та статистичних засобів*.

До методів фундаментального аналізу економічних процесів, включаючи також дослідження кон'юнктури, зараховуються методи побудови *економіко-математичних моделей* на основі статистичного аналізу економічних часових рядів (*поза-причинні*, чи *некаузальні*).

Одну з основних груп методів фундаментального аналізу утворюють *економетричні методи* (тобто *каузальні*, чи *причинно-наслідкові*).

Характеризуючи принципову, ключову відмінність методів *фундаментального та технічного аналізу* варто звернути увагу на основне джерело цієї відмінності:

- Відмінність ця передусім виникає з *підходу* до вивчення економічних та господарських явищ.
 - Група методів *фундаментального аналізу* складається з методів, заснованих на припущенні, що всі *зміни*, які відбуваються в *господарсько-економічних процесах*, зумовлені *змiнами* відповідних *економічних факторів*.

Іншими словами, якщо ми хочемо вивчити динаміку *конкретного економічного явища*, нам слід, насамперед, шукати (поза цим явищем) *економічні чинники*, що впливають на його формування.

Згідно з таким постулатом, кожен економічний процес слід розглядати в контексті *всієї економіки*: як на рівні окремих її секторів, так і на рівні окремих суб'єктів господарювання.

Ключову роль у фундаментальному аналізі відіграють також такі чинники, як загальна *політична* ситуація, *монетарна* політика та *стан фінансової системи*, сучасний стан відповідних *галузей економіки*, та економічний стан окремих господарюючих суб'єктів, тощо.

➤ Ось чому фундаментальний аналіз передбачає вивчення спочатку *економічного змісту* всіх факторів, що мають значення для розглянутого економічного процесу.

- Основним же *інструментом* фундаментального аналізу є *економіко-математичні моделі*, які формально описують взаємозв'язок цих факторів.

Підхід методів технічного аналізу до вивчення економічних та господарських явищ можна охарактеризувати стисло наступним чином.

➤ На відміну від фундаментального аналізу, методи *технічного аналізу* можна визначити, як спробу *передбачити майбутній розвиток* економічних явищ виключно математичними засобами, *не вникаючи* в економічний зміст розглянутих явищ.

- Основними інструментами технічного аналізу є різні типи *діаграм* та *таблиць* (звідси назва «*технічний аналіз*»).

Таким чином основні припущення підходу *технічного аналізу* до вивчення економічних процесів абсолютно протилежні припущенням підходу *фундаментального аналізу*.

Тому методи цих двох типів аналізу певним чином *взаємно доповнюють* один одного:

- Завдяки використанню принципово різних математичних засобів розглядають досліджувані явища з іншої точки зору.

5. Коротка характеристика методів фундаментального аналізу.

Охарактеризуємо деякі підходи в *фундаментальних дослідженнях*.

➤ *Методи балансу та порівнянь у графічній формі:*

Це спеціально розроблені для аналізу економічної ситуації методи, що використовують відповідні *таблиці та схеми*, спеціально створені з цією метою.

Вони полягають у підрахунку *відповідних показників динаміки*, що характеризують досліджуваний ринковий сегмент, з наступною їх *графічною презентацією*, відповідним *аналізом* та належною *інтерпретацією*.

Завдяки балансовим закономірностям, що існують для будь-якого сегмента ринку, та цілком *визначених* пропорцій, що *повинні* існувати між його елементами, подібні таблиці або схеми дозволяють ефективно прогнозувати основні тенденції в кон'юктурі досліджуваних ринків.

Очевидною перевагою цих методів є їхня *простота* та *репрезентативність* у застосуванні, пов'язана з можливістю візуального аналізу відповідних діаграм та таблиць, *дешевизна* в порівнянні з іншими методами, і в той же час *висока ефективність*.

➤ *Методи аналізу громадської думки*: тобто методи *експертної оцінки* та визначення і використання *рейтингів*.

Рейтинг може визначити, яку позицію на ринку (за відповідною шкалою показників), займає аналізований суб'єкт господарювання.

Ця позиція визначає його здатність до виконання своїх зобов'язань, що впливають з *місця* суб'єкта у відповідній системі господарювання та *принципів функціонування* цієї системи.

- Що стосується *фінансових ринків*, то *визначення і використання рейтингів* є одним із основних інструментів аналізу та прогнозування кон'юкттури.
- Це, перш за все, пояснюється тим, що *рейтинг* окремих фінансових інституцій вказує на їх *здатність своєчасно здійснювати* необхідні *виплати* власникам цінних паперів.

2.15. Причинно-наслідкові моделі прогнозування кон'юкттури.

1. Каузальні методи дослідження економічних явищ.
2. Формальний вигляд економетричної моделі.
3. Модель «тенденції розвитку».
4. Алгоритм побудови моделі.

1. Каузальні методи дослідження економічних явищ.

До «*непричинних*» (або *некаузальних*) моделей включають, зазвичай, моделі *часових рядів*. На відміну від них, «*причинно-наслідкові*» моделі намагаються пояснити поведінку досліджуваної економічної системи шляхом *встановлення зв'язків* між її основними елементами.

Одним із яскравих прикладів ефективності використання «*причинно-наслідкового*» підходу в економічних дослідженнях є *економетричні* моделі. Можливість такого підходу до вивчення соціально-економічних явищ базується на існуванні об'єктивних *кількісних закономірностей*, яким підпорядковані економічні величини.

Постійні та дедалі точніші спостереження за соціально-економічними явищами в поєднанні з розробкою відповідних розділів математики і прикладної статистики дозволяють виявити ці закономірності та формально описати їх. Зупинимось на головних елементах економет-

ричної моделі, яку слід розглядати як *математично-статистичний* вираз економічних законів. В моделі присутні змінні *трьох типів*:

➤ *Пояснювана змінна* моделі – це змінна, що відображає економічне явище, яке є предметом дослідження.

Явище що вивчається (а отже і *пояснювана змінна*) зазнає *істотного впливу* багатьох інших явищ (*чинників*).

➤ Чинники, вплив яких на пояснювану змінну є *«відносно великим»*, утворюють множину *пояснювальних змінних* моделі.

➤ Третім серед головних і обов'язкових *елементів* економетричної моделі, а також третім різновидом *змінних* моделі, є її *випадкова компонента*, або інакше – *випадкова змінна* моделі.

- Саме наявність цієї складової в економетричній моделі *виділяє* її серед великого різноманіття *економіко-математичних* моделей;
- Саме наявність цієї складової зумовлює стохастичний характер економетричної моделі;
- Натомість *статистичні властивості* випадкової складової визначають *стохастичну структуру* економетричної моделі.

Тому охарактеризуємо коротку *природу* випадкової компоненти та необхідність введення її до економетричної моделі. Крім *«істотних чинників»*, формалізованих у вигляді пояснювальних змінних моделі, існує багато інших менш важливих, часто *непередбачуваних* факторів, характер яких, зазвичай, є *випадковим*.

Вплив кожного такого чинника на формування явища, що досліджується, не є *«достатньо великим»*, щоб розглядати його окремо – сам по собі він *практично непомітний*. Тому його неможливо зарахувати до *пояснювальних змінних* і безпосередньо врахувати у *формальній моделі*.

Однак сукупний ефект впливу таких чинників на явище, що вивчається, може бути *дуже значним*.

➤ Необхідність введення *випадкової змінної* до економетричної моделі пояснюється намаганням врахувати *«формальним чином»* вплив всіх *«неістотних»* чинників на формування та розвиток *залежних змінних*.

Тому згідно з визначенням:

➤ Економетрична модель – це формалізований опис економічної реальності, який враховує лише її *суттєві* елементи, (виражені *пояснюваною* та *пояснювальними змінними*), та ігнорує *менш значущі* фактори, (що об'єднує в собі *випадкова складова*).

7. Формальний вигляд економетричної моделі.

Аналіз реальних економічних явищ показує, що на практиці для будь-якої заданої множин економічних величин Y, X_1, X_2, \dots, X_k , будь-яка рівність:

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_k)$$

не може бути *точною*, а є лише *наближеною*.

Тому фактично замість «рівності» має місце співвідношення:

$$Y \approx F(X_1, X_2, \dots, X_k).$$

Вводячи до моделі «випадкову складову» ξ , намагаємось врахувати сумарний вплив на змінну Y всіх факторів, відмінних від X_1, X_2, \dots, X_k . Це дозволяє замінити знак (\approx) «наближеної рівності» в наведеному співвідношенні символом ($=$) рівності «точної», тобто побудувати «адекватну формальну модель»:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k; \xi).$$

Це, в свою чергу, призводить до того, що детермінована модель перетворюється на стохастичну. Отже, *економетричну* модель можна визначити наступним чином:

- Економетрична модель – це представлена рівнянням (або системою рівнянь): $Y = f(X, \xi)$, стохастична залежність виділеного явища Y від інших явищ X , які його пояснюють.

В цій рівності використовуються наступні позначення:

- $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m]$ позначає вектор *пояснюваних змінних*, тобто таких, поведінку яких модель «намагається» описати «формальним чином» (тобто «пояснити»).
- $X = [X_1, X_2, \dots, X_k]$ позначає вектор *пояснювальних змінних* моделі, тобто змінних, які загалом «формують» змінні Y , оскільки їхній вплив на них є значним;
- $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m]$ є вектором «випадкових доданків» моделі та визначає її стохастичну структуру.

Змінні моделі Y, X та її аналітичний вигляд f вибираються у відповідності до вказівок економічних наук, а також будь-яких інших «*неекономічних знань*», що можуть бути корисними з цього погляду.

Числові значення параметрів, присутніх в моделі, визначаються наступним чином.

- ✓ Спочатку в результаті спостереження досліджуваного явища в економічному житті збираються *емпіричні дані*, що стосуються змінних Y та X .
- ✓ Потім, використовуючи методи та знаряддя *математичної статистики*, спираючись на знання *стохастичної структури* моделі, намагаємось оцінити невідомі значення цих параметрів таким чином, щоб отримана *конкретна* модель: $Y = f^*(X)$; «найкраще» відповідала зібраним емпіричним даним («підходила» до цих даних).

3. Модель «тенденції розвитку».

Своєрідним «містком» між «не каузальними» та «причинно-наслідковими» моделями може бути «модель тенденції розвитку».

З формальної точки зору це «некаузальна» модель, оскільки побудована на основі часового ряду. А саме, припустимо, що часовий ряд:

$$\{y_1, y_2, \dots, y_T\} = \{y_t, t = 1, 2, \dots, T\}$$

містить випадкові коливання (ξ_t) та систематичну складову у вигляді тренду $f(t)$. Іншими словами, значення y_t часового ряду, що спостерігаються для послідовних моментів часу $t \in \{1, 2, \dots, T\}$, містять дві складові:

$$y_t = f(t) + \xi_t, t = 1, 2, \dots, T,$$

де випадковий доданок ξ_t позначає величину коливань в момент часу t .

- Істотною обставиною у випадку моделі тенденції розвитку є те, що зміни в досліджуваному явищі, спричинені наявністю в ньому тренду $f(t)$, були значно більшими, ніж випадкові «флуктуації» ξ_t .

Наслідком цього буде те, що на графіку часового ряду

$$\{y_1, y_2, \dots, y_T\} = \{y_t, t = 1, 2, \dots, T\},$$

буде виразно видно «форму» функції $f(t)$, тобто:

- Загальну «тенденцію розвитку явища», що описується рядом y_t , та «досить довгі» інтервали незмінного напрямку цієї тенденції – зростання чи спадання.
- «Ширина» смуги точок графіка, яка визначається амплітудою випадкових флуктуацій ξ_t , не може приховати цю тенденцію.

Подібні моделі особливо корисні при визначенні економічних прогнозів, зокрема прогнозів кон'юнктури. Пояснення для цього дуже просте:

- Досить часто в економічних прогнозах якісна характеристика динаміки досліджуваних процесів (тобто визначення напрямку основної тенденції) важливіша від встановлення точних кількісних показників такої динаміки.

Прикладом такого «якісного висновку», що вказує «напрямок можливої зміни явища», яке цікавить нас, може бути, наприклад, такий висновок:

- Підвищення ціни товару призведе до зниження попиту на цей товар.

Важливо також те, що досить точну інформацію про майбутню економічну ситуацію (тобто прогноз економічної кон'юнктури) отримуємо виключно на основі аналізу спостережуваних раніше значень $\{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ часового ряду, не вдаючись при цьому у суть зв'язків між змінними, що формують цей ряд.

4. Алгоритм побудови моделі.

Побудова формалізованої математичної моделі складається з кількох основних кроків.

1. Перший крок: *вибір аналітичного вигляду моделі*. Цей крок передбачає визначення конкретної функції $f(t)$, яка в певному сенсі «найкраще» відповідає часовому ряду, що спостерігається.
2. Другий крок: *побудова моделі*. На цьому кроці, застосовуючи статистичні методи оцінки параметрів, а також використовуючи наявні значення

$\{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ часового ряду, визначаємо оцінки невідомих параметрів функції $f(t)$. На практиці з цією метою часто використовується *метод найменших квадратів* (МНК) (див. підрозділ 1.2).

В результаті отримуємо певну функцію часової змінної t :

$$y^*_t = f^*(t), t = 1, 2, \dots, T,$$

що називається моделлю тренду розвитку, побудованою на основі емпіричних значень часового ряду $\{y_1, y_2, \dots, y_T\}$.

3. Третій крок: *згладжування емпіричних даних*. Метою такого згладжування є усунення випадкових вагань ξ_t із значень y_t часового ряду.

Значення $\{y^*_1, y^*_2, \dots, y^*_T\}$ функції $f^*(t)$, для послідовних моментів часу $t = 1, 2, \dots, T$, називаються «теоретичними значеннями» моделі тенденції розвитку.

Саме ці значення утворюють «*вигладжений*» часовий ряд. Пояснюється це наступною обставиною:

- Лінія, на якій знаходяться точки $\{(t, y^*_t), t = 1, 2, \dots, T\}$, буде проходити між точками $\{(t, y_t), t = 1, 2, \dots, T\}$. При цьому оцінки невідомих параметрів функції $f(t)$ визначені таким чином, ця лінія буде «найближчою до множини точок $\{(t, y_t), t = 1, 2, \dots, T\}$.

Зважаючи на *формальний характер* процедури побудови моделі тенденції розвитку, можна розглядати її, як *спеціальний тип* економетричної моделі, тобто *причинно-наслідкової* моделі в якій:

- Роль «*пояснювальної*» змінної умовно виконує часова змінна t .

Звідси і виникає трактування моделі тенденції розвитку, як «*містка*», що пов'язує між собою «*непричинні*» («*не каузальні*») та «*причинно-наслідкові*» («*каузальні*») моделі.

Що стосується задач дослідження економічної кон'юнктури та побудови відповідних прогнозів, то економетричні методи можуть бути дуже корисними при їх розв'язуванні, а отже рекомендованими для практичного використання.

- Економетричні методи належать до *основних методів фундаментального аналізу* в дослідженні економічної кон'юнктури.

Не випадково серед *основних* формулюються, зокрема, наступні завдання «*Класичної економетрії*»:

- Встановлення кількісних закономірностей, притаманних соціально-економічним процесам (включаючи дослідження в *фінансовій* сфері та *прогнозування кон'юнктури на фінансових ринках*);
- Побудова *господарчих планів* та їх адаптація до мінливих внутрішніх і зовнішніх умов (тобто до *мінливої економічної кон'юнктури*).

Рекомендовані літературні джерела:

1. Wojna A.: *Analiza statystyczna oraz prognozowanie w modelach ekonomicznych*. Część 1. *Wprowadzenie do statystyki opisowej, rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*. Koszalin, PK 2003.
2. Wojna A.: *Analiza statystyczna oraz prognozowanie w modelach ekonomicznych*. Część 2. *Metody oraz narzędzia prognozowania zjawisk ekonomicznych*. Koszalin, PK 2004.
3. Wojna A.: *Predykcja ekonometryczna oraz stochastyczne modelowanie* Część 1. Koszalin, PK 2007.
4. Wojna A.: *Ryzyko w procesach finansowych oraz metody badań koniunktury*. Koszalin, PK 2009.
5. Wojna A.: *Wykłady z podstaw statystyki*. Część 1. *Opis statystyczny*. Koszalin, PK 2011.
6. Wojna A.: *Wykłady z podstaw statystyki*. Część 2. *Elementy wnioskowania statystycznego oraz matematyczne metody pomiaru ryzyka*. Koszalin, PK 2015.
7. О.А. Война «Економічний ризик. Математичні моделі та методи керування». – Київ. ВПЦ «Київський університет», 2001, – 100 с
8. Box G.E.P., Jenkins G.M.: *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. San Francisco: Holden-Day 1976.
9. Green W. H.: *Econometric analysis*. Macmillan, New York 1993.
10. Kotler P.: *Marketing Management*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1988.
11. Welfe A.: *Ekonometria. Metody i ich zastosowanie*. Warszawa PWE 1995.
12. Опарін В. М. та ін.: «Фінанси». – К: Знання, 2006, – 247 с.
13. Imran Bashir. «*Mastering Blockchain*». – Birmingham - Mumbai. Packt Publishing. 2018, – 538p.
14. William Mougayar. «*The Business Blockchain*». – JohnWiley&Sons, Inc. 2016, – 216 h.
15. Laurent Leloup. «*Blockchain: La revolution de la confiance*». – 2017, Groupe Eyrolles, Paris, France – 256 p
16. Daniel Drescher. "Blockchain Basics: A Non-Technical Introduction in 25 Steps", – 2017.
17. Andreas M. Antonopoulos. "Mastering Bitcoin: Programming the Open Blockchain". – 2017.
18. A.O. Petters, X. Dong “An Introduction to Mathematical Finance with Applications” Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology, 2016.
19. Marco Corazza, et. al. “Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance”, Springer International Publishing AG, Cham, 2018.
20. О.В. Виноградова, Н. С. Гончар: «Фінансова математика». – Київ. 2020.
21. В.Р. Кучеренко, В.А.Карпов: «Основи економічної кон'юнктури»: – Київ. Центр навчальної літератури, 2004..