ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Кафедра моделювання складних систем

М.В. Коробова

МАТЕМАТИЧНА ЕКОНОМІКА

Навчальний посібник

для студентів спеціальності
113 «Прикладна математика»
освітнього рівня «бакалавр»

Київ – 2025

УДК 330.4

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор І.А. Джалладова;

кандидат технічних наук, доцент В.Р. Кулян

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол № 10 від 19 лютого 2025 року)

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол № 6 від 17 лютого 2025 року)

К. ф.-м. н., доц. Коробова Марина Віталіївна

Навчальний посібник з дисципліни «Математична економіка» / М.В. Коробова. – Київ: 2025. – 52 с.

Викладено приклади розв'язування задач, завдання для практичних занять і для самостійної роботи студентів з обов'язкової навчальної дисципліни «Математична економіка». Також наведено приклади завдань для контрольних робіт, порядок розрахунку семестрових (залікових) оцінок, коротка структура навчальної дисципліни. Для студентів четвертого курсу факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які навчаються за освітньо-професійною програмою «Прикладна математика» спеціальності 113 «Прикладна математика».

ЗМІСТ

I. ПЕРЕДМОВА

1.1. Мета дисципліни: ознайомлення з основними принципами побудови і дослідження моделей економічних явищ і процесів; математичними мікроекономічними моделями теорії споживання та виробництва; макроекономічними балансовими моделями; моделями економічного зростання, моделями взаємодії економіки та довкілля.

1.2. Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни

Для успішного вивчення дисципліни **«Математична економіка»** академічний рівень студента повинен відповідати таким вимогам:

1. Знати: основні поняття математичного аналізу, лінійної алгебри, методів оптимізації, теорії прийняття рішень та теорії керування.

2. Вміти: розв’язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь з параметрами, розв’язувати диференціальні рівняння, досліджувати функції та функціонали на екстремум, формулювати та розв’язувати задачі лінійного та опуклого програмування, оптимального керування.

3. Володіти: навичками побудови, аналізу та застосування математичних моделей при розв’язанні прикладних задач.

1.3. Анотація навчальної дисципліни

Навчальна дисципліна «Математична економіка» є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти галузі знань 11 «Математика та статистика» зі спеціальності «Прикладна математика» в рамках освітньо-професійної програми «Прикладна математика».

Дисципліна належить до переліку обов’язкових навчальних дисциплін. Викладається у 8 семестрі в обсязі 90 годин (3 кредити ECTS). Зокрема, лекції – 18 годин: консультації – 2 години; практичні заняття – 10 годин; самостійна робота – 60 годин. У курсі передбачено 2 змістовні частини, 2 контрольні роботи та усна співбесіда. Дисципліна закінчується заліком.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен:

знати основні поняття, а також базові моделі поведінки окремих економічних суб’єктів як на мікро-, так і на макрорівні;

вміти досліджувати стани ринкової рівноваги на стабільність, формулювати та розв’язувати задачі оптимальної поведінки споживача, класифікувати типи ринкових структур, формулювати та розв’язувати задачі оптимальної поведінки фірми залежно від типу ринкової структури, класифікувати багатогалузеві макроекономічні моделі, досліджувати продуктивність відповідних моделей, формулювати та досліджувати моделі економічного зростання (зокрема, з урахуванням екологічного впливу), а також визначати магістралі для різних типів макроекономічних моделей.

Дисципліна «Математична економіка» допомагає зрозуміти практичну цінність багатьох базових математичних дисциплін з точки зору можливого їх застосування для опису і глибинного дослідження економічних процесів та явищ; може виявитися корисною для тих студентів, які планують проводити наукові пошуки в царині математичного моделювання економічної (еколого-економічної) сфери.

1.4. Завдання (навчальні цілі)

Основними завданнями дисципліни «Математична економіка» є набуття знань, умінь та навичок (компетентностей) відповідно до кваліфікації «бакалавр із прикладної математики». Зокрема, розвивати:

- здатність проведення досліджень на відповідному рівні;
- здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі.

1.5. Результати навчання за дисципліною

Результат навчання (1. знати; 2. вміти; 3. комунікація; 4. автономність та відповідальність)		**Форми (та/або методи і технології) викладання і навчання**	**Методи оцінювання та пороговий критерій оцінювання (за необхідності)**	**Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни**
Код	**Результат навчання (РН)**			
РН1.1	Знати модель ринкової рівноваги, її складові та властивості	Лекції, практичні заняття, самостійна робота	Контрольна робота № 1, усні відповіді	6%
РН1.2	Знати основні моделі теорії споживання та їх властивості	Лекції, практичні заняття, самостійна робота	Контрольна робота № 1, усні відповіді	10%

РН1.3	Знати основні моделі теорії виробництва та їх властивості	Лекції, практичні заняття, самостійна робота	Контрольна робота № 2, усні відповіді	14%
РН1.4	Знати класичну, кейнсіанську та вальрасівські моделі ринку	Лекції, самостійна робота	Усні відповіді	5%
РН1.5	Знати статичну та динамічну моделі Леонтьєва	Лекції, практичні заняття, самостійна робота	Контрольна робота № 2, усні відповіді	10%
РН1.6	Знати динамічні багатогалузеві моделі та моделі економічного зростання	Лекції, самостійна робота	Усні відповіді	10%
РН2.1	Розв'язувати задачі, пов'язані з моделюванням ринкової рівноваги	Практичні заняття, самостійна робота	Поточне оцінювання, контрольна робота № 1	5%
РН2.2	Розв'язувати задачі теорії споживання	Практичні заняття, самостійна робота	Поточне оцінювання, контрольна робота № 1	10%
РН2.3	Розв'язувати задачі теорії виробництва	Практичні заняття, самостійна робота	Поточне оцінювання, контрольна робота № 2	15%
РН2.4	Розв'язувати задачі на статику та динаміку моделей Леонтьєва	Практичні заняття, самостійна робота	Поточне оцінювання, контрольна робота № 2	5%
РН3.1	Обґрунтовувати власний погляд на задачу, спілкуватися з колегами з питань проектування та розробки моделей, розв'язування задач, складати письмові звіти	Практичні заняття, самостійна робота	Поточне оцінювання, усні відповіді	5%

РН4.1	Організовувати свою самостійну роботу для досягнення результату	Самостійна робота	Усні відповіді	5%

1.6. Співвідношення результатів навчання дисципліни із програмними результатами навчання

Результати навчання дисципліни **Програмні результати навчання** *(з опису освітньої програми)*	**РН 1.1**	**РН 1.2**	**РН 1.3**	**РН 1.4**	**РН 1.5**	**РН 1.6**	**РН 2.1**	**РН 2.2**	**РН 2.3**	**РН 2.4**	**РН 3.1**	**РН 4.1**
РН07. Вміти проводити практичні дослідження та знаходити розв’язок некоректних задач.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+
РН09. Будувати ефективні щодо точності обчислень, стійкості, швидкодії та витрат системних ресурсів алгоритми для чисельного дослідження математичних моделей та розв’язання практичних задач							+	+	+	+	+	+

1.7. Схема формування оцінки

1.7.1 Форми оцінювання студентів

Семестрове оцінювання:

Максимальна кількість балів які можуть бути отримані студентом: 100 балів:

1. Контрольна робота 1: РН1.1, РН1.2, РН2.1, РН2.2 – 20/12 балів.
2. Контрольна робота 2: РН1.3, РН1.5, РН2.3, РН2.4 – 20/12 балів.
3. Поточне оцінювання: РН2.1 – РН2.4, РН3.1 – 20/12 балів.
4. Усні відповіді: РН 1.1 – РН1.6, РН3.1, РН4.1 – 40/24 балів.

1.7.2 Приклади завдань контрольних робіт

Контрольна робота № 1 на тему «Модель попиту і пропозиції. Теорія споживання»

1. На ринку деякого товару попит і пропозиція задані такими функціями:

$$Q_d = \frac{19}{3} - 5P, \qquad Q_s = 3P^2 + 14P - \frac{1}{3}.$$

Визначити рівноважні ціни на цьому ринку. Яка рівновага є стабільною? Чи вигідно продавцям знижувати ціну товару?

2. $U = (x_1^3 + x_2^3)^{\frac{1}{3}}$. Знайти попит Хікса та класифікувати за еластичністю.

3. $U = x_1^{\frac{1}{6}}(x_2 - 4)^{\frac{1}{3}}$. При $p_1 = 1$, $\xi_2 = 8$, $I = 12$, знайти ξ_1, p_2, Λ. Також знайти компенсуючий дохід при зростанні p_1 на $50\,\%$.

Контрольна робота № 2 на тему «Теорія виробництва. Макроекономічні моделі»

1. Перевірити продуктивність матриці прямих витрат A. Знайти число Фробеніуса, правий та лівий вектори Фробеніуса: $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$.

2. $\Phi(q, K, L) = K^3 + 2L^3 - 3q_1^4 - 2q_2^4 = 0$.

Знайти ξ_L, Q_1, $\frac{\partial \xi_K}{\partial w_K}$. Розв'язати при $p_1 = p_2 = 2$, $w_K = w_L = 3$.

3. Визначити рівноважні обсяги ресурсів, рівноважний обсяг випуску фірми та ціну продукції, якщо

$q(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$, $p(q) = 4 - 2q$ (w_1, w_2 вважаються заданими).

Визначити тип фірми.

1.7.3. Перелік питань для підготовки до усних відповідей

1. Математична економіка як наука. Мікро- та макроекономіка. Ціна, цінність (корисність). Парадокс «Діаманти – вода». Модель Маршала.
2. Поле переваг споживача, аксіоми, функція корисності. Теорема Дебре.
3. Неокласична задача споживання, закон оптимального споживання.

4. Двоїста задача споживання, закон оптимального споживання.
5. Основне рівняння теорії споживання (як отримати, що описує). Компенсована зміна ціни.
6. Рівняння Слуцького, класифікація товарів за реакцією попиту.
7. Еластичність, класифікація попиту за еластичністю. Дискретні еластичності.
8. Виробнича функція, аксіоми, основні класи.
9. Критичні точки, стадії виробництва.
10. Зміна масштабів виробництва, еластичності випуску та заміщення.
11. Основні задачі конкурентної фірми.
12. Основне рівняння теорії виробництва (як отримати, що описує).
13. Моделі багатопродуктової фірми. Функція випуску.
14. Монополія, монопсонія, закон оптимального виробництва.
15. Олігопсонія, олігополія, гадані варіації.
16. Дуополії Курно та Штакельберга.
17. Кооперативні моделі.
18. Класична та кейнсіанська моделі ринку.
19. Модель Вальраса, конкурентна рівновага.
20. Моделі формування цін (Курно та Самуельсона).
21. Основні макроекономічні показники, система національних рахунків. Принципи та методи розрахунку ВВП.
22. Номінальний та реальний ВВП. Індекси Ласпейреса, Пааше, Фішера.
23. Безробіття, рівень безробіття, рівень зайнятості, види безробіття, закон Оукена.
24. Інфляція, індекс споживчих цін, дефлятор ВВП, рівняння Фішера.
25. Статична модель Леонтьєва, двоїста модель. Критерій продуктивності, достатні умови продуктивності.
26. Динамічна неперервна модель Леонтьєва, економічна прийнятність розв’язків.
27. Дискретна динамічна модель фон Неймана.
28. Магістральний підхід, теорема Морішимі.
29. Модель економічного зростання Солоу, «золоте» правило накопичення.
30. Модель оптимального економічного зростання.
31. Динамічна еколого-економічна модель, рівноваги «золотого» та «темного» віків.
32. Модель Леонтьєва-Форда.

Підсумкова оцінка у формі заліку:

Залікові бали визначаються як сума оцінок-балів за всіма успішно оціненими результатами вивчення, передбаченими даною програмою. Мінімальний пороговий рівень для сумарної оцінки за всіма компонентами становить 60% від можливої кількості балів.

Студент отримує загальну позитивну оцінку з дисципліни, якщо його оцінка за семестр становить не менше, ніж 60 балів.

1.7.4 Організація оцінювання

Терміни проведення форм оцінювання:

1. Контрольна робота № 1: 5-й тиждень семестру.
2. Контрольна робота № 2: 10-й тиждень семестру.
3. Усні відповіді: на останній парі семестру.
4. Поточне оцінювання: протягом семестру.

Студенти мають право на одне перескладання кожної контрольної роботи у визначений викладачем термін із можливістю отримання максимально 80 % початково визначених за цю контрольну роботу балів.

У випадку встановлення фактів порушення студентами академічної доброчесності, передбачених пунктом 9.8.2 «Положення про організацію освітнього процесу у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка», що діє від 07.05.2018, вони будуть притягнуті до відповідальності, передбаченої пунктом 9.8.3 цього положення.

Шкала відповідності оцінок

Зараховано / Passed	60-100
Не зараховано / Fail	0-59

1.8. Структура навчальної дисципліни

Тематичний план лекцій і практичних занять

№ п/п	Назва теми	Кількість годин		
		Лекції	Практичні	Самостійна робота
Частина 1 «Мікроекономіка»				
1	Вступ до математичної економіки. Модель попиту і пропозиції. *Самостійна робота*: Еластичність, види еластичності. Класифікація станів ринкової рівноваги.	2	2	4
2	Теорія споживання. Моделі споживання. Основне рівняння теорії споживання. *Самостійна робота*: Функції попиту та маргінальної вартості грошей споживача. Властивості функцій попиту для різних моделей споживання.	2	1	8
3	Рівняння Слуцького, класифікація товарів. Еластичність попиту, умови агрегації. *Самостійна робота*: Компенсована зміна ціни. Матриця Слуцького. Умови Енгеля та Курно. Зв'язок функції корисності споживача і доходу.	1		5
4	Теорія виробництва. Виробничі функції. Основне рівняння теорії виробництва. *Самостійна робота*: Властивості функцій попиту на ресурси та пропозиції продукції. Моделі поведінки конкурентної фірми.	3	3	5
Контрольна робота № 1				2
5	Моделі недосконалої конкуренції. Монополія, олігополія. *Самостійна робота*: Типи ринкових структур. Монополістична конкуренція. Монопсонія, олігопсонія. Дуополії Курно та Штекельберга. Кооперативні моделі.	2	2	6

Частина 2 «Моделі ринку. Макроекономіка»				
6	Класична та кейнсіанська моделі ринку. Вальрасівські моделі ринку. *Самостійна робота*: Процеси формування цін.	2		6
7	Макроекономіка. Система національних рахунків. *Самостійна робота*: Цінові індекси. Основні макроекономічні показники.	1		6
8	Міжгалузевий баланс, модель Леонтьєва, модель ціноутворення, продуктивність. Узагальнення моделі Леонтьєва. *Самостійна робота*: Статичні багатогалузеві економічні моделі. Продуктивність.	2	2	5
9	Динамічні багатогалузеві моделі. Магістральний підхід. *Самостійна робота*: Модель Неймана. Теореми про магістраль.	1		5
10	Моделі економічного зростання. Модель Солоу. Оптимальне еколого-економічне зростання. *Самостійна робота*: Балансові та оптимізаційні еколого-економічні моделі.	2		6
Контрольна робота № 2				2
ВСЬОГО		**18**	**10**	**60**

Загальний обсяг 90 годин, у тому числі:
Лекцій – 18 год.
Консультацій – 2 год.
Практичних занять – 10 год.
Самостійної роботи – 60 год.

II. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ НА СЕМЕСТР

2.1 Тема 1. Модель попиту і пропозиції	Поняття попиту. Попит і ціна. Поняття еластичності. Види еластичності. Еластичність і виручка продавців. Поняття пропозиції. Пропозиція і ціна. Взаємодія попиту і пропозиції. Модель Маршала. Умова часткової рівноваги (статична рівновага). Динамічна рівновага. Дискретна (динамічна) павутиноподібна модель

Приклад 1.1. Маємо функції попиту на деякий товар для трьох споживачів: $Q_1 = 300 - 100P$, $Q_2 = 150 - 30P$ та $Q_3 = 300 - 75P$. Зобразити графічно індивідуальні, а також ринковий попити.

Розв'язання. На графіку (рис. 1.1) відображено індивідуальні попити, а також за кожного можливого рівня цін – функцію ринкового попиту. Аналітична функція ринкового попиту має вигляд:

$$Q_m = \begin{cases} Q_2 = 150 - 30P, & P \in [4,5]; \\ Q_2 + Q_3 = 450 - 105P, & P \in [3,4]; \\ Q_1 + Q_2 + Q_3 = 750 - 205P, & P \in [0,3]. \end{cases}$$

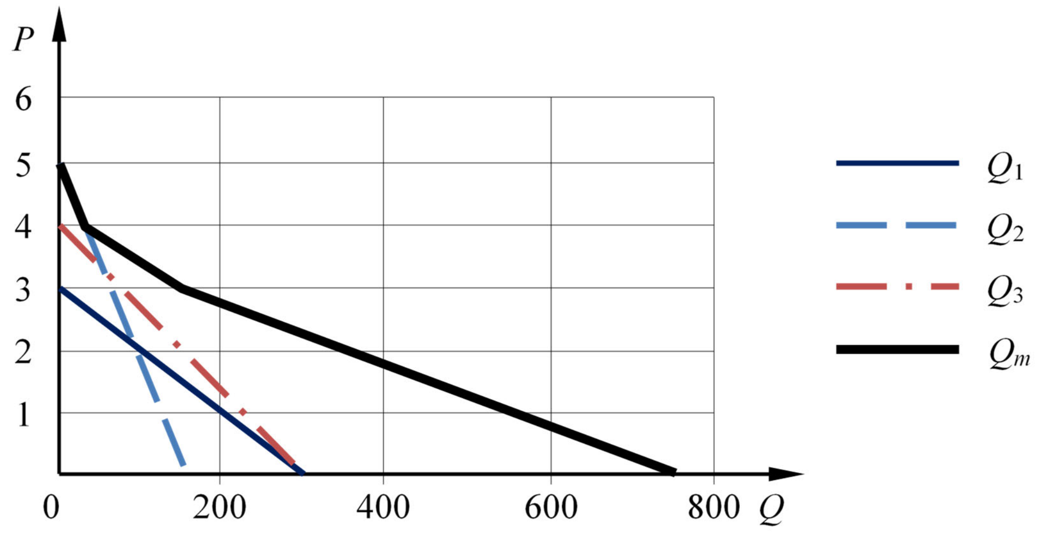

Рисунок 1.1

ВПРАВИ

1.1. Нехай функції індивідуального попиту на деякий товар залежно від ціни трьох споживачів: $Q_1 = 5 - P$, $Q_2 = -2P + 10$, $Q_3 = 3 - P$. Знайти функцію ринкового попиту Q_m, побудувати графіки функцій Q_1, Q_2, Q_3, Q_m у системі координат (Q, P).

1.2. Функції індивідуального попиту визначаються як $Q_d^1 = -P + 5$, $Q_d^2 = 3 - P$, а функція пропозиції – $Q_s = 1 + P$. Побудувати графік павутиноподібної моделі, графік зміни ціни залежно від часу для моментів часу $t = 0, 1, 2, 3$. Визначити тип рівноваги ринку. Початкова ціна в момент часу $t = 0$ становить $P_0 = 5$.

1.3. Індивідуальні попити двох споживачів на певний товар $Q_d^1 = 1 - \frac{1}{2}P$, $Q_d^2 = -P + 3$; пропозиція товару $Q_s = \frac{1}{3}P + 1$. Визначити ринкову функцію попиту Q_m, рівноважну ціну, рівноважний обсяг продажу, кількість товару, яку придбають перший і другий споживачі.

1.4. Функція попиту на деякому ринку $Q_d = 17 - 3P$, функція пропозиції, відповідно, $Q_s = 3P^2 - 19P + 22$. Знайти рівноважну ціну, рівноважний обсяг продажу, виручку продавця.

1.5. Функція попиту на деякий товар $Q_d = \frac{3}{P}$, а функція пропозиції – $Q_s = \frac{2P}{3} - 3$. На скільки відсотків має зрости попит, щоб рівноважна ціна зросла на $10\,\%$? Обчислити виручку виробника до та після зміни ціни.

1.6. Функція попиту визначається функцією $Q_d = 5 - 0{,}5P$, функція пропозиції $Q_s = P$. Побудувати графік павутиноподібної моделі, графік зміни ціни залежно від часу для моментів часу $t = 0, 1, 2, 3$. Визначити тип рівноваги ринку. Початкова ціна становить $P_0 = 4$.

Приклад 1.2. Попит споживачів на певний товар описується функцією $Q_d = max\left\{6 - \frac{3}{2}P;\ -\frac{10}{3}P + 10\right\}$, пропозиція – $Q_s = 5P - 1$. Визначити: а) рівноважну ціну та обсяг ринкових угод; б) цінову еластичність попиту в точці рівноваги. Знайти, при якій ціні коефіцієнт еластичності попиту за ціною дорівнюватиме $-\frac{1}{2}$. Побудувати графік.

Розв'язання. а) Визначимо ціну, за якої будуть однаковими значення обсягів попиту (у функції попиту): $6 - \frac{3}{2}P = -\frac{10}{3}P + 10$. Точкою перетину цих двох функцій є ціна $P = \frac{24}{11}$. З графіка (рис. 1.2) можна побачити, з якою з прямих перетинається функція пропозиції. Отже, маємо: $-\frac{10}{3}P + 10 = 5P - 1$, звідки $P^* = \frac{33}{25}$. (Знайшовши перетин функції пропозиції з іншою частиною функції попиту побачимо, що знайдена ціна не належатиме відповідному проміжку цін.) Рівноважний обсяг ринкових угод становить $Q^* = \frac{28}{5}$.

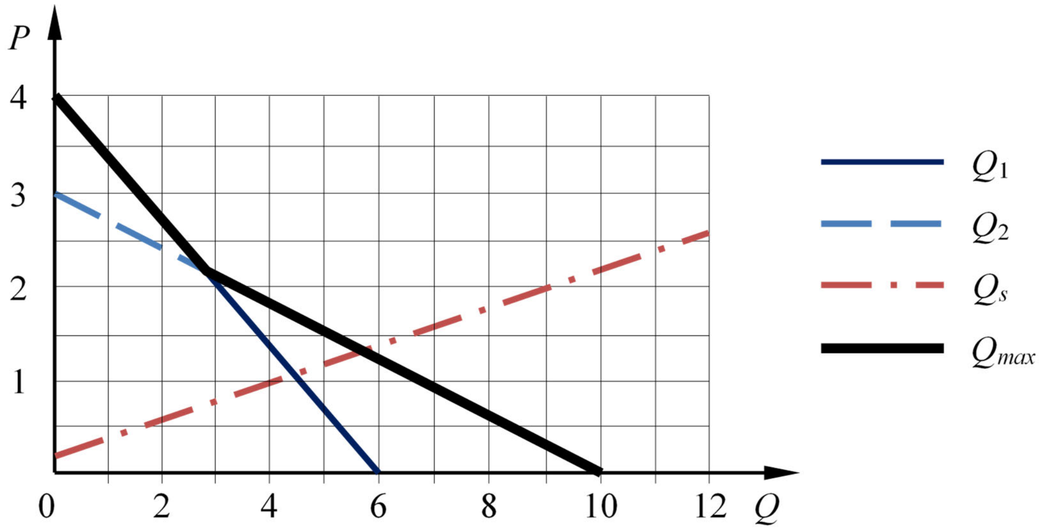

Рисунок 1.2

б) Тепер знайдемо точкову еластичність попиту в точці рівноваги (Q^*, P^*): $E_P^d = \frac{\mathrm{d}Q_d}{\mathrm{d}P} \cdot \frac{P^*}{Q^*} = -\frac{10}{3} \cdot \frac{33}{25} \cdot \frac{5}{28} = -\frac{11}{14}$.

Нарешті, оскільки $$Q_d = \begin{cases} -\frac{3}{2}P + 6, & P \in \left[\frac{24}{11}, 4\right], \\ -\frac{10}{3}P + 10, & P \in \left[0, \frac{24}{11}\right], \end{cases}$$

то $$E_P^d = \begin{cases} \frac{-\frac{3}{2}P}{-\frac{3}{2}P+6} = -\frac{1}{2}, \\ \frac{-\frac{10}{3}P}{-\frac{10}{3}P+10} = -\frac{1}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = \frac{4}{3} \notin \left[\frac{24}{11}, 4\right], \\ P = 1 \in \left[0, \frac{24}{11}\right]. \end{cases}$$

Отже, $P = 1$.

ВПРАВИ

1.7. Функція ринкового попиту трьох споживачів має вигляд $Q_d = max\{3 - P;\ -2P + 5;\ 6 - 3P\}$. Знайти індивідуальні попити споживачів. Знайти межі зміни цінової еластичності попиту для відрізку ціни $P \in [1, 2]$. Побудувати графік зміни цінової еластичності попиту залежно від ціни $E_P^d(P)$ при $P \in [1, 2]$.

1.8. Магазин продавав кожен день по 20 кг огірків за ціною 45 гр.од. за 1 кг. Ціна зросла на 10 %, обсяг продажу зменшився на 5 %. Визначити еластичність попиту на огірки.

1.9. На ринку шоколад продавали по 80 гр.од. за плитку. Еластичність попиту на шоколад становить $E = -2$. На скільки потрібно змінити ціну шоколаду, щоб величина попиту зросла від 50 до 100 плиток на день?

1.10. Нехай функція попиту $Q_d = max\left\{-\frac{3}{10}P + 6;\ -\frac{10}{3}P + 10\right\}$. Знайти ціни, за яких цінова еластичність попиту буде $E_P^d = -\frac{1}{2}$.

1.11. Магазин реалізовував 200 кг кураги на день по 250 гр.од. за 1 кг. Відповідний коефіцієнт еластичності попиту за ціною $E_P^d = -5$. Власник знизив ціну на товар на 10 %. На скільки відсотків зміняться обсяг продажу і виручка від реалізації кураги?

1.12. Делікатесна страва в ресторані коштує 300 гр.од., у день її продавали по 100 порцій. Яку кількість страв буде реалізовано, якщо ціна зросте до 350 гр.од.? Як зміниться виручка ресторану? Цінова еластичність попиту на страву становить -3.

1.13. Функція попиту деякого товару $Q_d = \frac{750}{P-5}$, а функція пропозиції $Q_s = P^2 + 5P$. Знайти рівноважну ціну, рівноважний обсяг продажу, виручку продавця. Дослідити ринкову рівновагу на стабільність.

1.14. На ринку деякого товару попит і пропозиція задані такими функціями: $Q_d = 21 - 4P$, $Q_s = 2P^2 - 10P + 25$. Визначити рівноважні ціни на цьому ринку. Яка рівновага є стабільною? Чи вигідно продавцям підвищувати ціну товару?

1.15. Нехай функція пропозиції має вигляд $Q_s = c + dP$, де $d > 0$, а c може набувати довільних значень. Дослідити зміну еластичності пропозиції за ціною E_P^s залежно від динаміки (зміни) цін для випадків $c = 0$, $c > 0$, $c < 0$. Побудувати відповідні графіки $E_P^s(P)$.

2.2 Тема 2. Теорія споживання

Простір товарів та відношення переваг. Порядкові функції корисності, типи функцій корисності. Моделі раціональної поведінки споживача: неокласична (за Маршалом), дуальна (за Хіксом). Функції попиту та маргінальної вартості грошей. Основне рівняння теорії споживання. Компенсована зміна ціни, рівняння Слуцького. Класифікація товарів

Приклад 2.1. Нехай функція корисності споживача $U(x) = ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$. Знайти функції попиту та маргінальної вартості грошей, якщо дохід споживача I, а ціни товарів p_1 та p_2, відповідно.

Розв'язання: При $x_1,\ x_2 > 0$ функція корисності також набуває додатних значень – $U > 0$. Функція корисності неспадна, тобто $MU > 0$, маргінальна корисність спадна, тобто $\ddot{U} < 0$. Знайдемо знаки параметрів a, α, β:

$$U > 0 \ \Rightarrow a > 0; \qquad MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = a\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} > 0 \ \Rightarrow \ \alpha > 0;$$

$$MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = a\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} > 0 \ \Rightarrow \ \beta > 0.$$

Задача оптимальної поведінки споживача:

$$\begin{cases} U(x) = ax_1^{\alpha}x_2^{\beta} \to \max, \\ p_1x_1 + p_2x_2 \le I, \\ x_1, x_2 > 0. \end{cases}$$

Запишемо функцію Лагранжа для цієї задачі:

$$L(x,\lambda) = ax_1^{\alpha}x_2^{\beta} + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2).$$

Необхідні й достатні умови оптимальності вибору товарів:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = a\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} - \lambda p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = a\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} - \lambda p_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0,$$

звідки знайдемо невідомі x_1, x_2, λ: функція попиту першого товару $x_1^* = \xi_1 = \frac{\alpha I}{(\alpha+\beta)p_1}$, функція попиту другого товару $x_2^* = \xi_2 = \frac{\beta I}{(\alpha+\beta)p_2}$, функція маргінальної вартості грошей споживача $\lambda^* = a\left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\beta}\left(\frac{I}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta-1}$.

Приклад 2.2. Функція корисності деякого споживача $U(x,y) = 1350 - (x-10)^2 - (y-5)^2$. Ціна товару x становить 2 гр.од., а товару y – 1 гр.од. Споживач на ці товари може витратити не більше 100 гр.од. Яку кількість кожного товару буде купувати споживач, який прямує до точки насичення?

Розв'язання. Розв'яжемо задачу, використовуючи неокласичний підхід.

$$L(x,y,\lambda) = 1350 - (x-10)^2 - (y-5)^2 + \lambda(100 - 2x - y) \to \max.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -2(x-10) - 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -2(y-5) - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - 2x - y = 0. \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x^* = 40, \\ y^* = 20. \end{matrix}$$

Маємо оптимальний набір споживача за даних умов. Набір насичення – це пара $(10;\ 5)$ – максимальне значення $U(x,y)$ без бюджетного обмеження. Якщо споживач придбає свій набір насичення, то він, очевидно, отримає максимально можливий рівень корисності 1350, а також залишиться з додатною кількістю грошей: $100 - (2\cdot 10 + 1\cdot 5) = 75$. У протилежному випадку він матиме надлишок товарів x та y (відповідно 30 та 15 одиниць).

Приклад 2.3. Споживач витрачає 130 гр.од. на придбання двох товарів. Маргінальна корисність першого товару $MU_1 = 30 - 2x_1$, де x_1 – кількість цього товару, а другого – $MU_2 = 19 - 3x_2$, x_2 – кількість другого товару. Яку кількість першого й другого товарів придбає раціональний споживач, якщо ціни на товари становлять, відповідно, $p_1 = 20$ гр.од. та $p_2 = 10$ гр.од.? Визначити функцію корисності споживача й корисність у точці споживчої рівноваги. Побудувати криву байдужості, що проходить через точку рівноваги.

Розв'язання. Отже, маємо: $I = 130$ гр.од., $MU_1 = 30 - 2x_1$, $MU_2 = 19 - 3x_2$. Відомо, що на оптимальному споживанні $MU_i = \lambda p_i$; тоді $\lambda = \frac{MU_1}{p_1} = \frac{MU_2}{p_2}$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\frac{30-2x_1}{20} = \frac{19-3x_2}{10}$ $\Rightarrow$ $15 - x_1 = 19 - 3x_2$ $\Rightarrow$ $-x_1 + 3x_2 = 4$. Додамо ще одне рівняння з умов оптимальності, та отримаємо систему

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 4, \\ 20x_1 + 10x_2 = 130. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 5, \\ x_2^* = 3. \end{cases}$$

Оскільки $\frac{\partial U}{\partial x_1} = 30 - 2x_1$, то $U(x_1, x_2) = 30x_1 - x_1^2 + c_2(x_2)$. Відповідно, оскільки $\frac{\partial U}{\partial x_2} = 19 - 3x_2$, то $U(x_1, x_2) = 19x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 + c_1(x_1)$.

Якщо вважати, що $U(0,0) = 0$, то матимемо таку функцію корисності споживача:

$$U(x_1, x_2) = 30x_1 + 19x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 .$$

Корисність у точці споживчої рівноваги:

$$U(x_1^*, x_2^*) = 30 \cdot 5 + 19 \cdot 3 - 5^2 - \frac{3}{2} \cdot 3^2 = \frac{337}{2} .$$

Насамкінець, щоб побудувати криву байдужості, яка проходить через точку споживчої рівноваги, маємо:

$$U(x_1, x_2) = U(x_1^*, x_2^*) \quad \Rightarrow \quad 30x_1 + 19x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 = \frac{337}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x_1 - 15)^2}{{}^{700}/_{6}} + \frac{\left(x_2 - {}^{19}/_{3}\right)^2}{{}^{700}/_{9}} = 1.$$

Відповідну геометричну інтерпретацію подано на рис. 2.1.

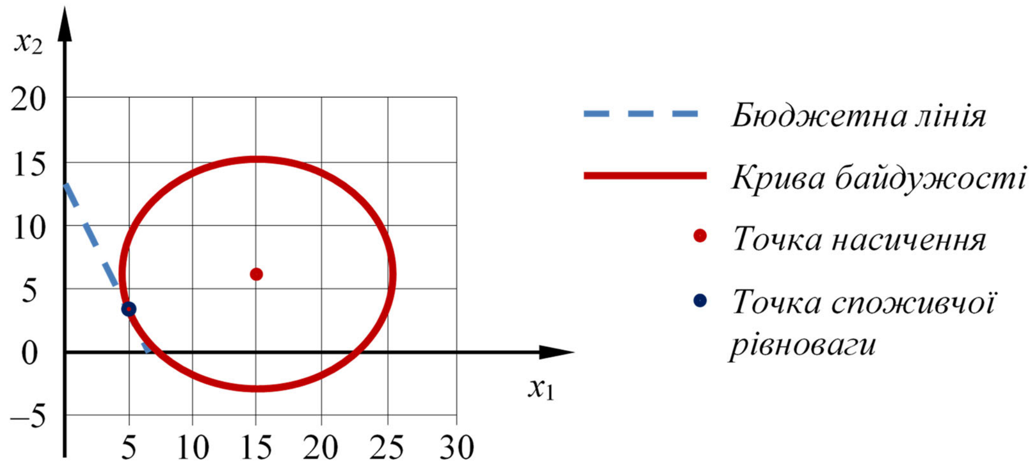

Рисунок 2.1

Приклад 2.4. Функція корисності $U(x) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{3}}$. За цін $p_1 = p_2 = 1$, побудувати криву дохід-споживання для кожного з товарів.

Розв'язання. Будуємо функцію Лагранжа для цієї задачі:

$$L(x, \lambda) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{3}} + \lambda(I - x_1 - x_2).$$

Записуємо умови оптимальності:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} - \lambda = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{2}{3} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{2}{3}} - \lambda = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - x_1 - x_2 = 0,$$

звідки знаходимо залежності: $x_1 = \frac{3}{5} I$, $x_2 = \frac{2}{5} I$. Будуємо графіки цих функцій в координатних осях, відповідно, (I, x_1) та (I, x_2) при $I \geq 0$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Отримаємо прямі, що зображують рівні споживання товарів за різних рівнів доходу споживача.

ВПРАВИ

2.1. Розглянемо модель поведінки споживача за Хіксом. Функція корисності споживача $U(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{5}} x_3^{\frac{1}{2}}$. Знайти функції споживчого попиту на товари.

2.2. Функція корисності $U(x) = 10x_1^{\frac{1}{10}} x_2^{\frac{1}{5}} x_3^{\frac{1}{2}}$. Розглянути задачу про раціональну поведінку споживача, вважаючи, що задано бюджет споживача I та ціни на товари p_1, p_2, p_3. Знайти попит на i-ий товар, $i = 1, 2, 3$. Записати рівняння поверхні байдужості, яка проходить через точку оптимального споживання. Обчислити витрати на кожен товар.

2.3. Знайти функції попиту та маргінальної вартості грошей споживача для функції корисності $U(x) = a \prod_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_i)^{\alpha_i}$. Розв'язати відповідну задачу за Хіксом.

2.4. Для функції корисності $U(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i - \overline{x}_i)$ знайти функції попиту на товари та функцію маргінальної вартості грошей. Розв'язати відповідну задачу за Хіксом.

2.5. Знайти функції попиту на товари та функцію маргінальної вартості грошей для функції корисності $U(x) = \frac{1}{1-b}\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - \overline{x}_i)^{1-b}$. Розв'язати відповідну задачу за Хіксом.

2.6. Для функції корисності $U(x) = a\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{-\beta}\right)^{-\frac{h}{\beta}}$ знайти функції попиту на товари та функцію маргінальної вартості грошей. Розв'язати відповідну задачу за Хіксом.

2.7. Для функції корисності $U(x) = \min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right\}$ знайти функції попиту на товари (узагальнити для $\forall\, n$), функцію маргінальної вартості грошей. Розв'язати відповідну задачу за Хіксом.

2.8. Родина витрачає 200 гр.од. на місяць на картоплю та яблука. Маргінальна корисність картоплі $MU_1 = 10 - x_1$, де x_1 – кількість кілограмів картоплі, а маргінальна корисність яблук $MU_2 = 20 - x_2$, де x_2 – кількість кілограмів яблук. Ціна кілограма картоплі $p_1 = 5$ гр.од., яблук – $p_2 = 20$ гр.од. Яку кількість картоплі та яблук придбає родина, діючи раціонально? Знайти корисність у точці споживчої рівноваги.

2.9. Функція корисності споживача має вигляд $U(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$. Знайти:

1) попит Хікса на товари і класифікувати попит за еластичністю;

2) крос-еластичності при $p_1 = 2$, $p_2 = 3$;

3) дугові крос-еластичності при відповідній зміні цін $p_1\colon\ 1 \to 2$; $p_2\colon\ 2 \to 3$.

2.10. Показати, що коли маргінальна корисність доходу (грошей споживача) λ^* виражається як функція параметрів, тобто $\lambda^* = \lambda^*(p, I)$, то вона є однорідною функцією степеня -1.

Приклад 2.5. Функція корисності споживача має вигляд $U(x) = x_1x_2$. Ціни товарів $p_1 = 10$ гр.од., $p_2 = 2$ гр.од. Споживач витрачає на ці товари 60 гр.од. Ціна другого товару зросла до 5 гр.од. На скільки потрібно компенсувати споживача, щоб його добробут не змінився? Знайти обсяг споживання двох даних товарів до та після зміни ціни.

Розв'язання. Власне, потрібно визначити, скільки гр.од. потрібно додати до бюджету споживача для забезпечення початкового рівня корисності. Спершу знайдемо цей рівень корисності. Будуємо функцію Лагранжа для вихідної задачі: $L(x, \lambda) = x_1x_2 + \lambda(60 - 10x_1 - 2x_2)$. Записуємо необхідні умови оптимальності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 10\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 60 - 10x_1 - 2x_2 = 0, \end{cases}$$

звідки $x_1^* = 3$, $x_2^* = 15$, $\lambda^* = 1{,}5$. Таким чином, початковий рівень корисності $U^* = U(x_1^*, x_2^*) = 45$.

Тепер побудуємо функцію Лагранжа та записуємо умови оптимальності з урахуванням подорожчання другого товару до $p_2' = 5$ гр.од. Корисність у точці оптимуму залишається тією самою, $U^* = 45$, але дохід I' вважаємо невідомим:

$$L(x, \lambda) = x_1x_2 + \lambda(I' - 10x_1 - 5x_2);$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 10\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - 5\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = I' - 10x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases}$$

Із системи виразимо оптимальне споживання через невідомий дохід I': $x_1^{**} = \frac{I'}{20}$, $x_2^{**} = \frac{I'}{10}$. Підставимо ці значення у функцію корисності: $U^{**} = \frac{(I')^2}{200} = 45$, звідки новий дохід $I' = 30\sqrt{10} \approx 94{,}87$. Різниця двох доходів $\Delta I = I' - I = 34{,}87$. Отже, для забезпечення незмінного добробуту потрібно компенсувати споживача на $34{,}87$ гр.од.

Після підвищення ціни другого товару оптимальні рівні споживання становитимуть, відповідно, $x_1^{**} = \frac{94{,}87}{20} \approx 4{,}74$; $x_2^{**} = \frac{94{,}87}{10} \approx 9{,}49$.

Приклад 2.6. Для логарифмічної функції корисності (див. вправу 2.4) при $n = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 18$, $\overline{x}_1 = 20$, $\overline{x}_2 = 5$ знайти:

1) ξ_1, ξ_2, Λ;

2) еластичність попиту на другий товар за доходом і цінами;

3) компенсовану зміну цін та класифікувати товари за взаємозамінністю.

Розв'язання. Відповідно до умови, маємо розв'язати неокласичну задачу споживання:

$$\begin{cases} U(x) = 3\ln(x_1 - 20) + 18\ln(x_2 - 5) \to \max, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \le I, \\ x_1, x_2 > 0. \end{cases}$$

1) Записавши необхідні умови оптимальності, матимемо:

$$\lambda = \frac{3}{(x_1 - 20)p_1} = \frac{18}{(x_2 - 5)p_2}, \quad \text{звідки} \quad x_1 = \frac{p_2}{6p_1}(x_2 - 5) + 20.$$

Підставляємо останній вираз в бюджетне рівняння та, після необхідних перетворень, отримаємо:

$$x_1^* = \xi_1 = \frac{I - 20p_1 - 5p_2}{7p_1} + 20, \qquad x_2^* = \xi_2 = \frac{6(I - 20p_1 - 5p_2)}{7p_1} + 5,$$

$$\lambda^* = \Lambda = \frac{21}{I - 20p_1 - 5p_2}.$$

2) Знайдемо відповідні еластичності:

$$E_2^I = \frac{\partial \xi_2}{\partial I} \cdot \frac{I}{\xi_2} = \frac{6I}{6I - 120p_1 + 5p_2};$$

$$E_2^{p_1} = \frac{\partial \xi_2}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{\xi_2} = \frac{-120p_1}{6I - 120p_1 + 5p_2};$$

$$E_2^{p_2} = \frac{\partial \xi_2}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{\xi_2} = \frac{-6I + 120p_1}{6I - 120p_1 + 5p_2}.$$

Перевірка: $E_2^I + E_2^{p_1} + E_2^{p_2} = 0.$ Тобто, сумарна еластичність за усіма аргументами дорівнює ступеню однорідності функції.

3) Зрештою, знайдемо компенсовану зміну цін. З рівняння Слуцького:

$$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j}\right)_{comp} = \frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} + \frac{\partial \xi_i}{\partial I}\xi_j.$$

Таким чином,

$$\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial p_1}\right)_{comp} = \frac{\partial \xi_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial I}\xi_1 = \frac{-6(I - 20p_1 - 5p_2)}{49p_1^2},$$

$$\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial p_2}\right)_{comp} = \frac{\partial \xi_1}{\partial p_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial I}\xi_2 = \frac{6(I - 20p_1 - 5p_2)}{49p_1 p_2},$$

$$\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial p_2}\right)_{comp} = \frac{\partial \xi_2}{\partial p_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial I}\xi_2 = \frac{-6(I - 20p_1 - 5p_2)}{49p_2^2}.$$

Оскільки $\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial p_2}\right)_{comp} = \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial p_1}\right)_{comp} > 0,$ то товари є взаємозамінними.

Приклад 2.7. Оптимальний рівень корисності непрямо залежить від цін p та доходу $I,$ оскільки $U^* = U(x^*) = U^*(p, I),$ де $x^* = x^*(p, I)$ – функція попиту.

Функція $U^*(p,I)$ називається непрямою функцією корисності. Стягнення податків із споживачів за принципом «рівності пожертвувань» вимагає, щоб $U^*(p,I) - U^*\big(p, I - T(I)\big) = const$ для всіх I, де $T(I)$ – частка доходу, яка є податком на дохід. Знайти залежність податків від доходу для мультиплікативної ФК при $n = 3$. Показати, що $\frac{\mathrm{d}T(I)}{\mathrm{d}I} > 0$.

Розв'язання. Отже, $U(x) = ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma}$, причому $a > 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in (0,1)$ (випливає з властивостей функцій корисності). Функція Лагранжа

$$L(x, \lambda) = ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma} + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3),$$

необхідні умови оптимальності

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = a\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}x_3^{\gamma} - \lambda p_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = a\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}x_3^{\gamma} - \lambda p_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = a\gamma x_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma-1} - \lambda p_3 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = I - x_1 - p_2x_2 - p_3x_3 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1^* = \dfrac{\alpha I}{p_1(\alpha+\beta+\gamma)}, \\ x_2^* = \dfrac{\beta I}{p_2(\alpha+\beta+\gamma)}, \\ x_3^* = \dfrac{\gamma I}{p_3(\alpha+\beta+\gamma)}. \end{cases}$$

Таким чином, $U(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = aI^{\alpha+\beta+\gamma}\varphi(p_1, p_2, p_3)$,

де $\varphi(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\beta}\left(\frac{\gamma}{p_3}\right)^{\gamma}\frac{1}{(\alpha+\beta+\gamma)^{\alpha+\beta+\gamma}}$ – функція від цін товарів. Очевидно, що $\varphi > 0$. Для зручності позначимо $\alpha + \beta + \gamma = \omega$. Оскільки $U^*(p,I) = a\varphi I^{\omega}$, то $U^*\big(p, I - T(I)\big) = a\varphi\big(I - T(I)\big)^{\omega}$. Тому

$$U^*(p,I) - U^*\big(p, I - T(I)\big) = const = c \quad \Rightarrow \quad I^{\omega} - \big(I - T(I)\big)^{\omega} = c_1,$$

де $c_1 = \frac{c}{a\varphi}$.

Визначимо $T(I)$ у явному вигляді. Маємо:

$$(I^{\omega} - c_1)^{\frac{1}{\omega}} = I - T(I) \quad \Rightarrow \quad T(I) = I - (I^{\omega} - c_1)^{\frac{1}{\omega}}.$$

Тепер покажемо, що $\frac{\mathrm{d}T(I)}{\mathrm{d}I} > 0$. З цією метою продиференціюємо співвідношення $I^{\omega} - \left(I - T(I)\right)^{\omega} = c_1$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}I}\left(I^{\omega} - \left(I - T(I)\right)^{\omega}\right) = \frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}I} = 0.$$

$$\omega I^{\omega-1} - \omega\left(I - T(I)\right)^{\omega-1}\left(1 - \frac{\mathrm{d}T(I)}{\mathrm{d}I}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -I^{\omega-1} + \left(I - T(I)\right)^{\omega-1} = \frac{\mathrm{d}T(I)}{\mathrm{d}I}\left(I - T(I)\right)^{\omega-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}T(I)}{\mathrm{d}I} = 1 - \left(\frac{I}{I - T(I)}\right)^{\omega-1}.$$

Тоді $\frac{\mathrm{d}T(I)}{\mathrm{d}I} > 0$ при $\left(\frac{I}{I-T(I)}\right)^{\omega-1} < 1$. Однак, оскільки $\frac{I}{I-T(I)} > 1$ (у випадку, коли $T(I) \neq 0$), то остання нерівність виконується лише тоді, коли $\omega - 1 < 0$. Отже, для того, щоб $\frac{\mathrm{d}T(I)}{\mathrm{d}I} > 0$, необхідно на параметри функції корисності накласти умову $\omega = \alpha + \beta + \gamma < 1$. Зокрема, якщо $\alpha + \beta + \gamma = 1$, то $T(I) = c_1 = const$.

ВПРАВИ

2.11. Функції попиту Торнквіста визначаються рівностями $\xi_1 = \frac{\alpha I}{I+\beta}$, $\xi_2 = \frac{\alpha(I-\gamma)}{I+\beta}$, $\xi_3 = \frac{\alpha I(I-\gamma)}{I+\beta}$ для товарів, відповідно, першої необхідності, відносної розкоші та розкоші. Параметри α, β, γ залежать від цін. Визначити еластичності цих функцій за доходом, порівняти їх з одиницею, зробити висновки.

2.12. Функція корисності має вигляд $U(x) = x_1^2 x_2^3$. Ціни товарів $p_1 = 12$ гр.од., $p_2 = 3$ гр.од. Споживач витрачає на ці товари 300 гр.од. Ціна другого товару зросла до $p_2' = 8$ гр.од. На скільки потрібно збільшити бюджет споживача, щоб його добробут і структура споживання не змінилися?

2.13. Дохід споживача $I = 150$ гр.од., ціни на товари $p_1 = p_2 = p_3 = 2$ гр.од. Функція корисності $U(x) = x_1 x_2 x_3$. Нехай ціна першого товару зросла у два рази. Знайти такий дохід для споживача, щоб корисність у точці споживчої рівноваги була такою самою, як і до підвищення ціни. Знайти обсяг споживання продукції в точці споживчої рівноваги до та після підвищення ціни.

2.14. Функція корисності споживача $U(x) = \frac{x_1 x_2}{2}$, де x_1 – обсяг споживання бананів у кілограмах, x_2 – обсяг споживання кока-коли в літрах. Ціна за 1 кг бананів $p_1 = 13$ гр.од., за 1 л кока-коли – $p_2 = 6$ гр.од. Улітку споживач витрачав на ці товари 100 гр.од. на тиждень. Узимку ціна бананів зросла до 19 гр.од. за 1 кг. Визначити обсяг споживання бананів і кока-коли влітку. Записати рівняння кривої байдужості, яка проходить через точку оптимального споживання. Визначити величину витрат, необхідних узимку для досягнення літнього рівня корисності.

2.15. Класифікувати товари за реакцією попиту, якщо залежність попиту від доходу й ціни становить:

1) $\xi = \dfrac{1}{I} - P$; 2) $\xi = \ln I - P$; 3) $\xi = \dfrac{P}{I}$.

2.16. Функція корисності споживача $U(x) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{6}}$. При $\xi_1 = 2$, $p_2 = 1$, $\Lambda = 1$ знайти I, ξ_2, p_1. Також знайти компенсуючий дохід при зростанні ціни першого товару вдвічі.

2.17. Щоб урахувати в теорії споживання грошовий капітал, потрібно припустити, що функція корисності залежить не лише від набору товарів, але й від усіх цін та цінності грошового капіталу, оскільки характер попиту на гроші залежить від цін. Отже, вважатимемо, що $U = U(x, p_0K, p)$, де K – грошовий капітал, p_0 – ціна грошей (наприклад, банківська ставка), p – вектор цін на товари x. Зазвичай вважають, що функція U є однорідною нульового степеня відносно всіх $(n+1)$ цін. Бюджетне обмеження споживача у такому випадку має вигляд $(p, x) = I + r(W - p_0K)$, де r – норма відсотка на грошові активи, W – загальне багатство (грошові та негрошові активи). Знайти функції попиту для товарів і грошового капіталу, якщо функція корисності є логирифмічною, а набір товарів складається з одного товару x. Визначити показники порівняльної статики.

2.18. Можна розглядати проблему вибору між заробітком і вільним часом (дозвіллям) з погляду теорії споживання. Тоді відповідна проблема постає у вигляді такої задачі: $U(x, l) \to \max$, $px = I + wh$, $l + h = q$, де x позначає набір товарів, l – дозвілля (наприклад у годинах; при цьому $\frac{\partial U(x,l)}{\partial l} > 0$), h – робочий час, w – рівень заробітної плати, I – нетрудовий дохід (наприклад, доходи з акцій, нерухомості тощо), q – загальний наявний час. Параметри задачі: p, I, w, q; корисність $U(x, l)$ максимізується за обома аргументами. Нехай $U(x, l)$ – функція корисності зі сталою еластичністю $(n = 1,\ b_i = 0{,}5)$. Знайти функції попиту на товари x та дозвілля l. Класифікувати дозвілля як товар.

2.3 Тема 3. Теорія виробництва

Простір витрат і виробничі функції; типи виробничих функцій. Еластичність виробництва й можливості заміщення. Типи ринкових структур. Моделі поведінки фірми. Неокласична модель фірми в умовах досконалої конкуренції. Максимізація випуску продукції та мінімізація видатків фірми. Функції попиту на ресурси та пропозиції продукції. Основне рівняння теорії виробництва. Монополія, монопсонія. Олігополія, олігопсонія. Дуополії Курно та Штакельберга. Багатопродуктові моделі

Приклад 3.1. Визначити ефект масштабу виробництва для функції $q(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \quad \alpha, \beta > 0.$

Розв'язання. Нехай коефіцієнт зростання виробництва $t > 1$. Тоді $q(tx) = t^{\alpha+\beta} x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \quad tq(x) = t x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$. Розглянемо випадки:

а) зростаючий ефект: $q(tx) > tq(x), \quad t^{\alpha+\beta} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} > t x_1^{\alpha} x_2^{\beta},$ або $t^{\alpha+\beta-1} > 1$, тобто $\alpha + \beta > 1$;

б) спадний ефект: $q(tx) < tq(x), \quad t^{\alpha+\beta} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} < t x_1^{\alpha} x_2^{\beta},$ або $t^{\alpha+\beta-1} < 1$, тобто $\alpha + \beta < 1$;

в) сталий ефект: $q(tx) = tq(x), \quad t^{\alpha+\beta} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = t x_1^{\alpha} x_2^{\beta},$ або $t^{\alpha+\beta-1} = 1$, тобто $\alpha + \beta = 1$.

Приклад 3.2. Обчислити еластичність виробництва такої ВФ: $q(x) = 2 x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{4}}$.

Розв'язання. Еластичність виробництва даної функції:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{F(x)} \sum_{i=1}^{m} MP_i(x) x_i =$$

$$= \frac{1}{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{3}}x_3^{\frac{1}{4}}} \cdot \left(x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{4}} x_1 + \frac{2}{3} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{2}{3}} x_3^{\frac{1}{4}} x_2 + \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{-\frac{3}{4}} x_3 \right) = \frac{13}{12} > 1.$$

Отже, маємо зростаючий дохід від масштабу виробництва.

Еластичність виробництва відносно зміни витрат кожного окремого i-го ресурсу підрахуємо за формулами $\varepsilon_i(x) = \frac{x_i}{F(x)} MP_i(x)$. Маємо: $\varepsilon_1(x) = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_2(x) = \frac{1}{3}$, $\varepsilon_3(x) = \frac{1}{4}$.

ВПРАВИ

3.1. Коли фірма збільшує використання ресурсу x_1, який зайнятий у виробництві, зі 120 до 150 од., а ресурсу x_2 – від 500 до 625 од., розширюючи при цьому випуск продукції з 200 до 220 од., то який ефект масштабу має місце в цьому випадку?

3.2. Шляхом безпосереднього обчислення знайти еластичності виробництва ε та заміщення σ для типових виробничих функцій.

3.3. Обчислити еластичності виробництва, а також еластичність заміщення між x та v для ВФ $F(x, y, v) = 2^{-x} + y^3 + \ln(x^2 v)$.

3.4. Переконатися, що ВФ CES при $\beta \to -1$ прямує до лінійної виробничої функції, при $\beta \to 0$ – до ВФ Кобби – Дугласа, а при $\beta \to \infty$ – до ВФ Леонтьєва.

3.5. Обчислити показники P, AP, MP та побудувати графіки їх зміни для виробничих функцій: а) лінійної; б) Леонтьєва; в) CES; г) Кобби – Дугласа.

3.6. Переконатися, що для виробничої функції $F_1(x_1, x_2) = \frac{x_2(2x_1^2 + x_2^2)}{3x_1^2 + x_2^2}$ маргінальний продукт MP_2 спадає, а середній продукт AP_2 не спадає; для функції $F_2(x_1, x_2) = \frac{x_2(4x_1^2+x_2^2)}{3x_1^2+x_2^2}$ середній продукт AP_2 спадає, а маргінальний продукт MP_2 не спадає.

3.7. Нехай $q = F(K, L)$ – виробнича функція (K – капітал та L – праця). Якщо виробнича функція лінійно-однорідна, то вона залежить лише від капіталоозброєності $k = \frac{K}{L}$. Уведемо функцію $f(k) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = \frac{q}{L}$ – середня продуктивність праці. Виразити через $f(k)$ такі показники: 1) маргінальну продуктивність праці (MP_L); 2) маргінальну капіталовіддачу (MP_K); 3) коефіцієнт еластичності за фондами (капіталом); 4) еластичність за працею.

3.8. Спочатку капіталоозброєність праці становила 10. Чому вона дорівнюватиме за умов зростання маргінальної норми технологічної заміни на 10 %, якщо еластичність заміни капіталу працею становить 2 %?

3.9. Лінійно-однорідна виробнича функція, для якої $f(0) = 0$, і для всіх $k > 0$ виконується: $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$, $\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$, $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$, називається неокласичною. Дослідити на неокласичність основні типи виробничих функцій.

3.10. Знайти лінійно-однорідну виробничу функцію $F(K, L)$, для якої коефіцієнт еластичності за фондами $\alpha = \frac{kf'(k)}{f(k)}$ має вигляд: $\alpha = \frac{\gamma}{\left(1+\frac{1-\delta}{\delta}k^{\rho}\right)} + \alpha_0$.

Приклад 3.3. Без використання добрив фермер збирає врожай 30 ц з 1 га. При використанні x одиниць добрив на гектар маргінальна продуктивність добрив становить $\left(1 - \frac{x}{200}\right)$. Ціна зерна на ринку – 6 у. о. за 1 ц, ціна добрива – 3 у. о. за 1 ц. Отримати функцію залежності врожаю від кількості використаного добрива (виробничу функцію); визначити кількість добрива для максимізації прибутку; обчислити витрати фермера.

Розв'язання. Залежність урожаю від кількості використаних добрив виражається функцією $q = F(x)$, і до того ж відомо, що маргінальна продуктивність добрива $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \left(1 - \frac{x}{200}\right)$. Таким чином, $F(x) = \int \left(1 - \frac{x}{200}\right) \mathrm{d}x = x - \frac{x^2}{400} + C$, де C – константа інтегрування. Без використання добрива врожай складає 30 ц з 1 га, тобто $F(0) = 30 \;\Rightarrow\; C = 30$. Отже, виробнича функція $F(x) = x - \frac{x^2}{400} + 30$.

Щоб визначити кількість добрив, необхідну для максимізації прибутку, побудуємо функцію прибутку фермера: $\pi(x) = pq - wx =$ $= p\left(x - \frac{x^2}{400} + 30\right) - wx;$ урахуємо, що $p = 6$ у. о., $w = 3$ у. о. Отже, маємо задачу:

$$\pi(x) = 6\left(x - \frac{x^2}{400} + 30\right) - 3x = -\frac{3 \cdot x^2}{200} + 3x + 180 \to \max.$$

Необхідна умова оптимальності: $\frac{\mathrm{d}\pi(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{3 \cdot x}{100} + 3 = 0$, звідки оптимальна кількість добрив $x^* = 100$ ц, а оптимальні витрати фермера $TC(x^*) = wx^* =$ $= 3 \cdot 100 = 300$ у. о.

Приклад 3.4. Виробнича функція фірми $q(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{6}}$. Ціни продукції p та ресурсів w_1, w_2 відомі. Визначити функцію пропозиції фірми (випуск продукції). Знайти вектор оптимальних витрат (функції попиту на ресурси). Знайти загальні, середні та маргінальні витрати. Записати рівняння ізокванти та ізокости, що проходять через точку виробничої рівноваги.

Розв'язання. Враховуючи умову задачі, маємо розглянути неокласичну модель поведінки фірми:

$$\pi(x) = pq - w_1 x_1 - w_2 x_2 \to \max, \qquad q(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{6}}, \qquad x_1, x_2 > 0.$$

Запишемо функцію Лагранжа для цієї задачі

$$L(q, x_1, x_2, \lambda) = pq - w_1 x_1 - w_2 x_2 + \lambda\left(x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{6}} - q\right),$$

а також необхідні умови оптимальності:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = p - \lambda = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -w_1 + \frac{1}{2}\lambda x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{6}} = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -w_2 + \frac{1}{6}\lambda x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{5}{6}} = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = q - x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{6}} = 0.$$

Розв’язавши останню систему, знаходимо:

функцію пропозиції (випуск продукції) $Q(p, w) = q^* = \frac{p^2}{4\sqrt{3} w_1^{\frac{3}{2}} w_2^{\frac{1}{2}}}$; вектор оптимальних витрат (функції попиту на ресурси) $\xi_1(p, w) = x_1^* =$ $= \frac{p^3}{8\sqrt{3} w_1^{\frac{5}{2}} w_2^{\frac{1}{2}}}$, $\xi_2(p, w) = x_2^* = \frac{p^3}{24\sqrt{3} w_1^{\frac{3}{2}} w_2^{\frac{3}{2}}}$. Загальні витрати фірми $TC(q) = w_1 x_1^* + w_2 x_2^* = \frac{p^3}{6\sqrt{3} w_1^{\frac{3}{2}} w_2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} pq$; середні витрати $AC(q) = \frac{TC(q)}{q} = \frac{2}{3} p$; маргінальні витрати $MC(q) = \frac{\mathrm{d}TC(q)}{\mathrm{d}q} = \frac{2}{3} p$.

Рівняння ізокванти, яка проходить через точку виробничої рівноваги: $x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{6}} = q^* = \frac{p^2}{4\sqrt{3} w_1^{\frac{3}{2}} w_2^{\frac{1}{2}}}$, а відповідне рівняння ізокости – $w_1 x_1 + w_2 x_2 =$ $= w_1 x_1^* + w_2 x_2^* = \frac{p^3}{6\sqrt{3} w_1^{\frac{3}{2}} w_2^{\frac{1}{2}}}$.

ВПРАВИ

3.11. Фірма сплачує 20 000 у.о. на день за оренду обладнання (використання капіталу) та 10 000 у.о. на день заробітної плати. При цьому вона використовує таку кількість праці й капіталу, що їх маргінальна продуктивність становить 0,5 та 1, відповідно. Чи використовує фірма оптимальне поєднання виробничих факторів з погляду максимізації прибутку?

3.12. Для основних типів виробничих функцій знайти в загальному вигляді:

а) функції попиту на витрати та функції пропозиції продукції (задача максимізації прибутку);

б) функції попиту на фактори та функції пропозиції продукції (задача максимізації випуску);

в) функції попиту на ресурси та функції видатків фірми (задача мінімізації витрат).

3.13. Задана виробнича функція фірми $q(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}}$, ціна продукції $p = 2$ у.о., ціни виробничих ресурсів $w_1 = 3$ у.о., $w_2 = 1$ у.о. Записати рівняння ізокости та ізокванти, які проходять через точку виробничої рівноваги.

3.14. Виробнича функція фірми $q(x) = 2x_1x_2$, ціни ресурсів $w_1 = 50$ у.о., $w_2 = 100$ у.о. Який обсяг витрат необхідний для виробництва 20 одиниць продукції? Записати рівняння ізокости та ізокванти, що проходять через точку виробничої рівноваги.

3.15. Маємо виробничу функцію фірми $q(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{5}}$. Ціни продукції p та ресурсів w_1, w_2, w_3 відомі. Визначити функцію пропозиції фірми (випуск продукції). Знайти вектор оптимальних витрат (функції попиту на ресурси). Знайти загальні, середні та маргінальні витрати. Записати рівняння ізокости, що проходить через точку виробничої рівноваги.

3.16. Виробнича функція фірми має вигляд $q(x) = 2(3x_1^3 + 2x_2^3)^{\frac{2}{3}}$ і виражає залежність випуску продукції q від двох виробничих факторів x_1, x_2. Класифікувати попит на ресурси.

Приклад 3.5. Визначити рівноважні обсяги ресурсів, рівноважний обсяг випуску, ціну продукції, якщо виробнича функція фірми $q(x) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$, а ціна продукції залежно від випуску має вигляд $p = p(q) = a - bq, \quad a, b > 0.$

Розв'язання. З огляду на умову, маємо розглянути задачу фірми-монополіста:
$\pi(x) = p(q)q - w_1x_1 - w_2x_2 \to \max$, $q(x) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$, $p(q) = a - bq$, $x_1, x_2 > 0$.
Функція Лагранжа для цієї задачі:

$$L(q, x_1, x_2, \lambda) = aq - bq^2 - w_1x_1 - w_2x_2 + \lambda\left(x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} - q\right).$$

Записуючи необхідні умови оптимальності, матимемо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q} = a - 2bq - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{1}{3}\lambda x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} - w_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \dfrac{2}{3}\lambda x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{1}{3}} - w_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} - q = 0, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, матимемо:

рівноважні обсяги ресурсів $x_1^* = \dfrac{w_2\left(2^{\frac{2}{3}}a - 3w_1^{\frac{1}{3}}w_2^{\frac{2}{3}}\right)}{2^{\frac{7}{3}}bw_1}$, $x_2^* = \dfrac{w_1^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{2}{3}}a - 3w_1^{\frac{1}{3}}w_2^{\frac{2}{3}}\right)}{2^{\frac{4}{3}}bw_2^{\frac{1}{3}}}$;

рівноважний обсяг випуску $q^* = \frac{\left(2^{\frac{2}{3}}a - 3w_1^{\frac{1}{3}}w_2^{\frac{2}{3}}\right)}{2^{\frac{5}{3}}b}$;

ціна продукції $p^* = \frac{\left(2^{\frac{2}{3}}a + 3w_1^{\frac{1}{3}}w_2^{\frac{2}{3}}\right)}{2^{\frac{5}{3}}}$.

Приклад 3.6. *Призначення цін у дуополії.* Двоє дуополістів пропонують на ринку взаємозамінну продукцію. Якщо вони встановили ціни на свою продукцію p_1 та p_2, то відповідний попит на їх продукцію становитиме $d_1 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\alpha_1}$ одиниць товару, вироблених першою фірмою, та $d_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha_2}$ одиниць товару, вироблених другою фірмою $(\alpha_1, \alpha_2 > 1)$. Нехай затрати на випуск одиниці продукції при збільшення масштабу виробництва є постійними в обох фірм. Знайти оптимальні ціни p_1, p_2 за умови максимізації фірмами своїх прибутків.

Розв'язання. Відповідно до умови задачі, прибуток i-ої фірми запишемо як $\pi_i(p_1, p_2) = (p_i - c_i)d_i$, $i = 1, 2$; c_i – постійні витрати на випуск одиниці i-ої продукції.

Кожна фірма оптимізує прибуток, встановлюючи свою ціну. Отже, для знаходження оптимальних цін необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\alpha_1} - \alpha_1(p_1 - c_1)\frac{1}{p_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\alpha_1} = 0, \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha_2} - \alpha_2(p_2 - c_2)\frac{1}{p_2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha_2} = 0, \end{cases}$$

звідки $p_1^* = \frac{\alpha_1 c_1}{\alpha_1 - 1}$, $p_2^* = \frac{\alpha_2 c_2}{\alpha_2 - 1}$.

Приклад 3.7. *Стійкість у дуополії Курно з обмеженням випусків.* Два виробники постачають на ринок один і той самий товар, ціна на який визначається як $p = 1 - x_1 - x_2$, де x_1, x_2 – кількості виробленого товару першого й другого виробників. Знайти оптимальні випуски для кожного з виробників, якщо максимальні виробничі можливості для кожного з них становлять $\frac{1}{2}$, а витрати:

а) на виробництво y одиниць продукції становлять $\frac{1}{2}y$ для кожного з виробників (постійні витрати на випуск одиниці продукції при збільшенні масштабу виробництва);

б) на виробництво y одиниць продукції становлять $\frac{1}{2}y - \frac{3}{4}y^2$ для кожного з виробників (спадні витрати на випуск одиниці продукції при збільшенні масштабу виробництва).

Розв'язання. Для випадку а) маємо таку задачу:

$$\pi_i(x) = (1 - x_1 - x_2)x_i - \frac{1}{2}x_i \to \max_{x_i}, \qquad x_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad i = 1, 2.$$

Оптимальні відповіді i-го виробника на фіксовані стратегії j-го знаходимо з розв'язку системи

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Таким чином, маємо: $R_i = \left\{(x_i, x_j) \middle| \; x_i = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_j, \; 0 \le x_j \le \frac{1}{2}\right\}$. Це так звана крива реагування i-го виробника (рис. 3.1). Оптимальні випуски для виробників знаходимо як перетин множин R_1 та R_2; тобто, рівновага (а в даному випадку це буде стійка рівновага Неша, NE) є множиною

$$NE = R_1 \cap R_2 = \left\{ \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \right\}.$$

Як показано на рис. 3.1, з довільної початкової позиції, відповідно до кривих реагування, процес намацування Курно (пошуку компромісу) прямує до точки $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$.

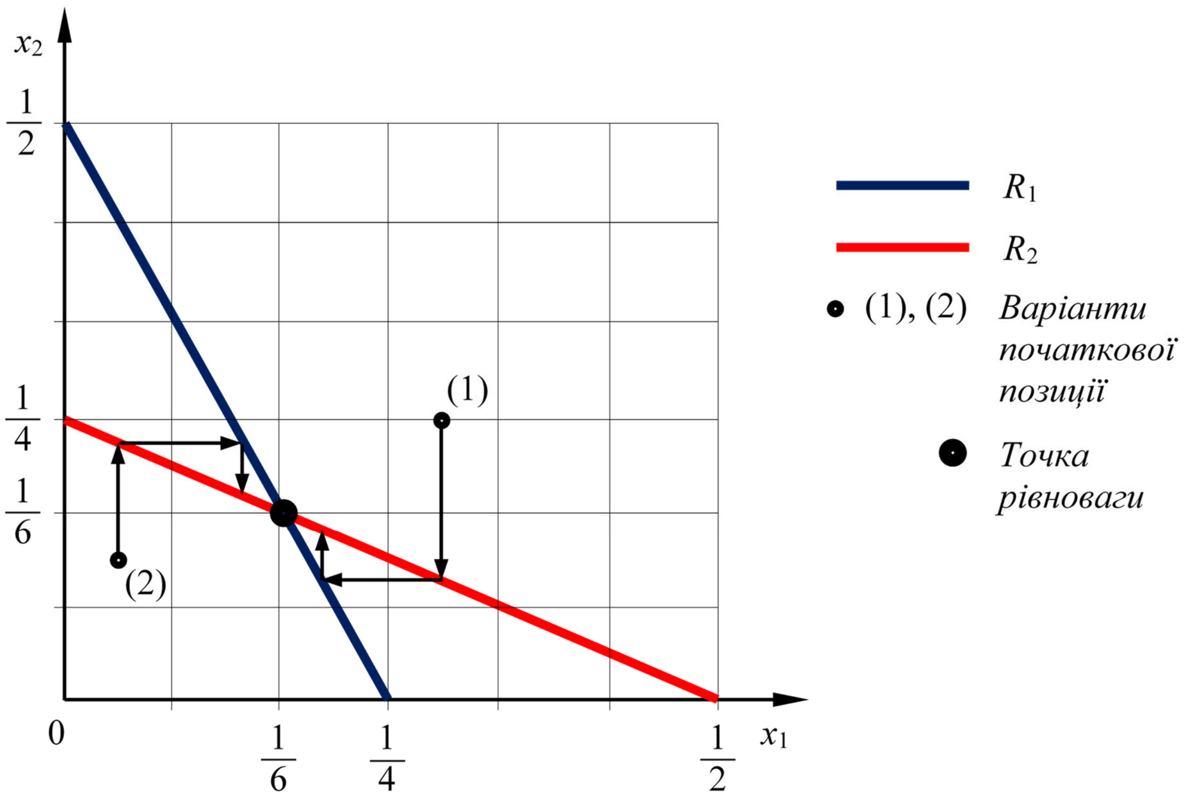

Рисунок 3.1

Для випадку б) маємо задачу:

$$\pi_i(x) = (1 - x_1 - x_2)x_i - \left(\frac{1}{2}x_i - \frac{3}{4}x_i^2\right) \to \max_{x_i}, \qquad x_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad i = 1, 2.$$

Крива реагування i-го виробника:

$$R_i = \left\{(x_i, x_j) \middle|\ x_i = \beta_i(x_j), \qquad 0 \le x_j \le \frac{1}{2}\right\}, \qquad i = 1, 2,$$

$$\beta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le x \le \frac{1}{4}, \\ 1 - 2x, & \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Внаслідок перетину кривих реагування, $R_1 \cap R_2$, отримаємо три NE-ситуації (рис. 3.2):

$$NE = R_1 \cap R_2 = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

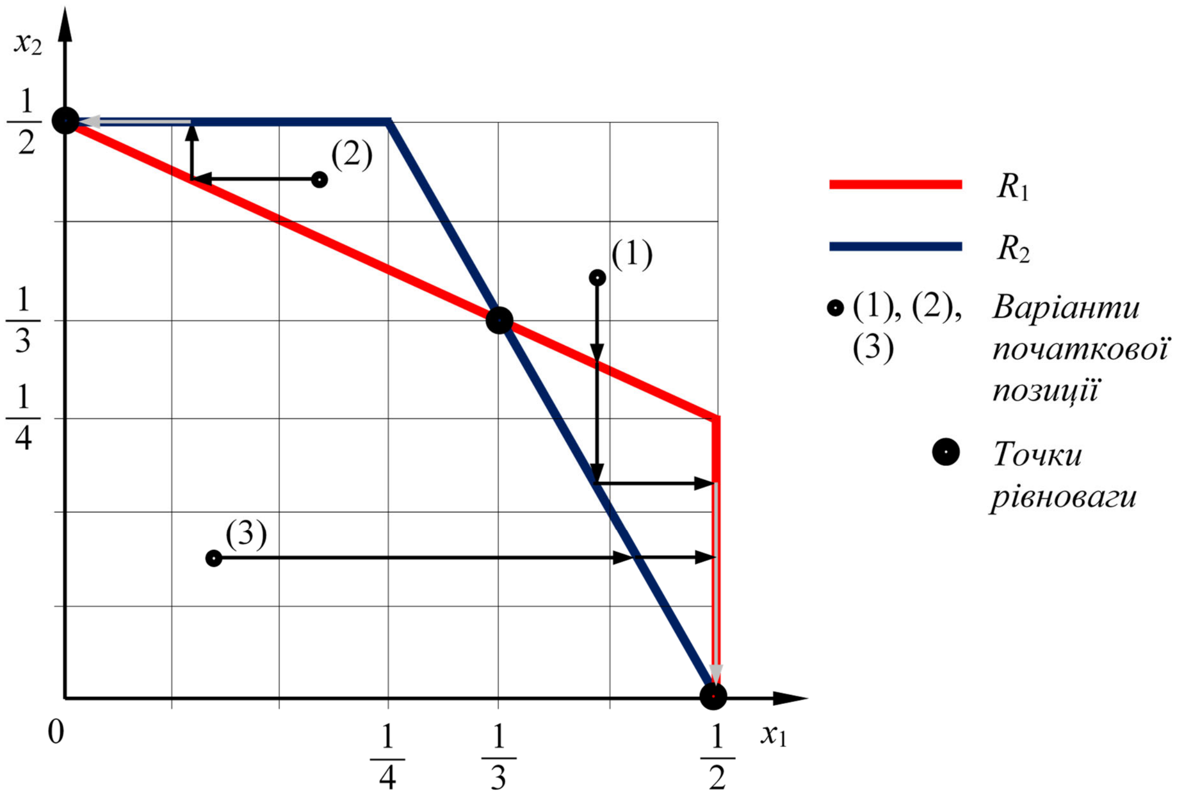

Рисунок 3.2

Використовуючи графічну інтерпретацію процесу намацування Курно, переконуємося, що починаючи з будь-якої початкової позиції $x^0 \neq \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, за скінчену кількість кроків процедура намацування збігається або до точки $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, або – до точки $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Це залишається справедливим, якщо точка x^0 лежить як завгодно близько до точки $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, але не збігається з нею. Отже, NE-ситуацію $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ логічно назвати нестійкою, а NE-ситуації $\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)$ – локально стійкими.

ВПРАВИ

3.17. Нехай функція витрат монополіста залежно від кількості виробленого продукту $C(q) = 50 + q^2$, ціна на продукцію $p = 40 - q$. Знайти: кількість товару, яку виробить монополіст для максимізації прибутку; сукупні, середні та маргінальні витрати монополіста; максимальний прибуток.

3.18. Визначити оптимальний обсяг випуску фірми, відповідні обсяги ресурсів, загальні, середні й маргінальні витрати, якщо виробнича функція фірми $F(x) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}}$, а ціни на відповідні ресурси $w_1 = a_1 x_1$, $w_2 = a_2$, $a_1, a_2 > 0$. Визначити тип фірми.

3.19. Виробнича функція фірми $q(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{5}}$, ціни ресурси визначаються функціями $w_i(x_i) = a_i x_i$, $a_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Встановити тип фірми; визначити вектор виробничої рівноваги та обсяг випуску продукції.

3.20. Визначити рівноважні обсяги витрат ресурсів, рівноважний обсяг випуску фірми, а також ціну продукції, якщо $q(x) = x_1^{\frac{3}{4}} x_2^{\frac{1}{4}}$, $p(q) = 3 - 2q$ (w_1, w_2 вважаємо заданими). На якому ринку працює фірма?

3.21. *Олігополія з призначенням випусків.* Нехай ціна на деякий товар з насичувальним попитом (наприклад, мінеральну воду) спадає за експоненціальним законом: $p = ae^{-S}$, де S – сукупний випуск. Нехай кількості мінеральної води, які пропонуються на ринку n виробниками, становлять x_1, $x_2, \ldots, x_n$; затрати на виробництво нульові. Знайти оптимальні ціни для кожного з виробників: p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

3.22. Знайти оптимальні випуски фірм для дуополії з $p = 1 - q_1 - q_2$, $c_1 = q_1^2$, $c_2 = 2q_2^2$ і гаданими варіаціями $\frac{\partial q_1}{\partial q_2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = -1$.

3.23. На ринку діють дві фірми, які виробляють однотипну продукцію. Нехай витрати кожної з фірм описуються відповідними функціями: $c_1(q_1) = 10 + 2q_1$, $c_2(q_2) = q_2^2$. Ринковий попит на продукцію визначається функцією $p = \frac{1}{3}(100 - q_1 - q_2)$. Знайти параметри рівноваги ринку:

а) за умови Курно;

б) за умови Штакельберга для другої фірми.

Визначити нерівновагу Штакельберга.

3.24. На ринку діють дві фірми, які виробляють однотипну продукцію. Нехай витрати кожної з фірм описуються відповідними функціями: $c_1(q_1) = 3q_1^2$, $c_2(q_2) = 4q_2^2$. Ринковий попит на продукцію визначається функцією $p = \frac{1}{4}(48 - 32q_1 - q_2)$. Знайти параметри рівноваги ринку:

а) за умови Курно;

б) за умови Штакельберга для першої фірми.

3.25. Знайти егалітарний розв'язок $(\pi = \pi_1 = \pi_2 \to \max)$ для дуополії з $p = 1 - q_1 - q_2$, $c_1 = q_1^2$, $c_2 = q_2^2$.

3.26. Два виробники постачають на ринок x_1 і x_2 одиниць однакового товару, $x_i \in [0, 0.75]$, $i = 1, 2$, ціна на який визначається як $p = 1 - x_1 - x_2$. Функції витрат $c_i = 0.5x_i - 0.75x_i^2$, $i = 1, 2$. Знайти оптимальні випуски для обох виробників і відповідну ринкову ціну.

3.27. Два виробники постачають на ринок x_1 і x_2 одиниць однакового товару, $x_i \in [0, 0.5]$, $i = 1, 2$, ціна на який визначається як $p = 1 - x_1 - x_2$. Функції витрат $c_i = 0.25x_i - 0.5x_i^2$, $i = 1, 2$. Знайти параметри ринкової рівноваги (рівноважну ціну та рівноважний випуск). Яка ціна встановиться за 5 кроків процедури намацування за Курно з точки $(0.1, 0.1)$?

Приклад 3.8. Нехай фірма випускає 2 типи продукції q_1, q_2, використовуючи 2 типи витрат x_1, x_2. Ціни продукції, відповідно, p_1, p_2; ціни на витрати – w_1, w_2. Знайти оптимальний випуск продукції та витрати ресурсів, якщо виробничі функції, які задають зв'язок між випуском і витратами, відповідно, $q_1(x^1) = q_1(x_1^1, x_2^1) = a(x_1^1)^2 x_2^1$, $q_2(x^2) = q_2(x_1^2, x_2^2) = bx_1^2(x_2^2)^2$. Тут x_i^j – кількість i-го ресурсу, використаного для виробництва j-ої продукції.

Розв'язання. Запишемо задачу для багатопродуктової фірми-виробника:

$$\pi(x^1, x^2) = p_1 a(x_1^1)^2 x_2^1 + p_2 b x_1^2 (x_2^2)^2 - w_1(x_1^1 + x_1^2) - w_2(x_2^1 + x_2^2) \to \max.$$

Необхідні умови оптимальності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial x_1^1} = 2p_1 a x_1^1 x_2^1 - w_1 = 0, \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial x_1^2} = p_2 b (x_2^2)^2 - w_1 = 0, \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial x_2^1} = p_1 a (x_1^1)^2 - w_2 = 0, \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial x_2^2} = 2p_2 b x_1^2 x_2^2 - w_2 = 0, \end{cases}$$

звідки отримаємо оптимальні витрати ресурсів:

$$x_1^{1^*} = \sqrt{\frac{w_2}{ap_1}}, \quad x_1^{2^*} = \frac{w_2}{2\sqrt{bp_2 w_1}}, \quad x_2^{1^*} = \frac{w_1}{2\sqrt{ap_1 w_2}}, \quad x_2^{2^*} = \sqrt{\frac{w_1}{bp_2}}.$$

Оптимальні випуски відповідних продуктів: $q_1^* = \frac{w_1\sqrt{w_2}}{2p_1\sqrt{ap_1}}$, $q_2^* = \frac{w_2\sqrt{w_1}}{2p_2\sqrt{bp_2}}$.

ВПРАВИ

3.28. Нехай фірма випускає 2 типи продукції $q_1,\ q_2$, використовуючи 3 типи витрат $x_1,\ x_2,\ x_3$. Ціни на продукцію – $p_1,\ p_2$; ціни ресурсів – $w_1,\ w_2,\ w_3$. Знайти оптимальний дохід, який отримає фірма, якщо виробничі функції, що задають зв'язок між випуском і витратами, є такими: $q_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = a_1(x_1^1)^{\frac{1}{2}} + a_2(x_2^1)^{\frac{1}{3}} + a_3(x_3^1)^{\frac{1}{4}}$, $q_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = b_1(x_1^2)^{\frac{1}{3}} + b_2(x_2^2)^{\frac{1}{4}} + b_3(x_3^2)^{\frac{1}{2}}$. Тут x_i^j – кількість i-го ресурсу, використаного для виробництва j-ої продукції.

3.29. Нехай фірма випускає 2 види продукції q_1 та q_2, і використовує для цього 2 види ресурсів $x_1,\ x_2$. Ціни на продукцію – $p_1,\ p_2$, відповідно; ціни на ресурси – $w_1,\ w_2$. Знайти мінімальні витрати фірми, якщо виробничі функції, які задають зв'язок між випуском і витратами, є такими: $q_1(x_1, x_2) = \left(\frac{a_1}{(x_1)^2} + \frac{a_2}{(x_2)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $q_2(x_1, x_2) = \left(\frac{b_1}{(x_1)^2} + \frac{b_2}{(x_2)^2}\right)^{-2}$; x_i – кількість ресурсу i-го виду, що використовується у виробничому процесі фірми.

3.30. Нехай фірма випускає 3 види продукції $q_1,\ q_2,\ q_3$ і використовує для цього 2 види витрат $x_1,\ x_2$. Ціни продукції – $p_1,\ p_2$ та p_3; ціни на ресурси – w_1 і w_2. Знайти оптимальний випуск продукції фірми, якщо відповідні виробничі функції: $q_1(x_1^1, x_2^1) = x_1^1 x_2^1$, $q_2(x_1^2, x_2^2) = (x_1^2)^{\frac{1}{2}} x_2^2$, $q_3(x_1^3, x_2^3) = x_1^3 (x_2^3)^2$. Тут x_i^j – кількість i-го ресурсу, використаного для виробництва j-ої продукції.

3.31. Фірма випускає 3 види продукції $q_1,\ q_2$ та q_3, і використовує 2 види ресурсів x_1 і x_2. Ціни продукції – $p_1,\ p_2,\ p_3$, а ціни на ресурси – w_1 та w_2.

Знайти попит на ресурси та оптимальний випуск кожної продукції, якщо виробничі функції, які задають зв'язок між випуском і витратами, мають вигляд: $q_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $q_2(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{\frac{1}{2}}$, $q_3(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{\frac{1}{2}}$, де x_i – кількість i-го ресурсу, що використовується у виробничому процесі фірми.

3.32. Функція випуску фірми задається співвідношенням $\Phi(q, x) = x_1^2 + 2x_2^2 - q_1^3 - 2q_2^3 = 0$. Знайти:

а) обсяг пропозиції першого продукту (Q_1);

б) попит на другий ресурс (ξ_2);

в) вплив зміни ціни першої продукції на зміну пропозиції другої $\left(\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\right)$.

Розв'язати задачу при $p_1 = p_2 = w_1 = w_2 = 1$.

3.33. Функція випуску фірми задається співвідношенням $\Phi(q, x) = 2x_1^2 + x_2^2 - q_1^4 - 2q_2^4 = 0$. Знайти:

а) попит на перший ресурс (ξ_1);

б) обсяг пропозиції другого продукту (Q_2);

в) вплив зміни ціни другого ресурсу на зміну попиту на нього $\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial w_2}\right)$.

Розв'язати задачу при $p_1 = p_2 = w_1 = w_2 = 2$.

3.34. Функція випуску фірми задається співвідношенням

$$\Phi(q, x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2q_1^2 - q_2^2 + q_1 q_2 - \frac{1}{196} = 0.$$

Знайти:

а) обсяг пропозиції першого продукту (Q_1);

б) обсяг пропозиції другого продукту (Q_2);

в) вплив зміни ціни першого ресурсу на зміну попиту на нього $\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial w_1}\right)$.

Розв'язати задачу при $p_1 = p_2 = 1$, $w_1 = w_2 = 2$.

2.4 Тема 4. Макроекономічні моделі	Статична модель «витрати – випуск» Леонтьєва. Продуктивність моделі «витрати – випуск». Модель ціноутворення. Деякі узагальнення моделі Леонтьєва. Динамічні багатогалузеві моделі; модель фон Неймана. Магістральний підхід. Моделювання процесів економічного зростання; модель Солоу

Приклад 4.1. Економіка країни поділяється на два типи економічної діяльності (промисловість і сільське господарство). За минулий рік повний випуск промислових виробництв у вартісній формі мав таку структуру: 800 млн. у.о. для виробничих потреб промисловості; 400 млн. у.о. для виробничих потреб сільського господарства; 800 млн. у.о. для споживання населення (відповідно до попиту на цю продукцію).

Повний випуск сільськогосподарської продукції (у вартісній формі) розподілявся так: 300 млн. у.о. для виробничих потреб промисловості; 350 млн. у.о. для виробничих потреб сільського господарства; 600 млн. у.о. для споживання населення (відповідно до попиту на цю продукцію).

На наступний рік прогнозується зростання попиту населення на вітчизняну продукцію, у тому числі на промислові вироби – до 1000 млн. у.о., а на сільськогосподарську продукцію – до 800 млн. у.о. Які повні випуски промислової та сільськогосподарської продукції зможуть задовольнити новий попит?

Розв'язання. Будуємо вартісний баланс по кожному виду економічної діяльності:

$x_1 = x_{11} + x_{12} + c_1$ – промисловість,
$x_2 = x_{21} + x_{22} + c_2$ – сільське господарство.

Відповідно до умови, $x_{11} = 800$, $x_{12} = 400$, $x_{21} = 300$, $x_{22} = 350$,

$c_1 = 800, \qquad c_2 = 600.$

Отже, $x_1 = 2000$, $x_2 = 1250$.

Використовуючи модель Леонтьєва, $x_{ij} = a_{ij}x_j$, знайдемо технологічні коефіцієнти:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{800}{2000} = 0{,}4; \qquad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{400}{1250} = 0{,}32;$$
$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{300}{2000} = 0{,}15; \qquad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{350}{1250} = 0{,}28.$$

Таким чином, матриця прямих матеріальних витрат (технологічна матриця) має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}32 \\ 0{,}15 & 0{,}28 \end{pmatrix}.$$

Будуємо модель Леонтьєва

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}4x_1 + 0{,}32x_2 + c_1, \\ x_2 = 0{,}15x_1 + 0{,}28x_2 + c_2, \end{cases}$$

і знаходимо розв’язок моделі при $c_1 = 1000$, $c_2 = 800$, тобто, розв’язуємо систему

$$\begin{cases} 0{,}6x_1 - 0{,}32x_2 = 1000, \\ -0{,}15x_1 + 0{,}72x_2 = 800. \end{cases}$$

Маємо: $x_1 \approx 2541{,}7$ (млн. у.о.); $x_2 \approx 1640{,}6$ (млн. у.о.).

ВПРАВИ

4.1. Використовуючи дані з прикладу 4.1, знайти ціни на продукцію промисловості та сільського господарства, вважаючи, що додані вартості в цінах, відповідно, становлять $0{,}4$ у промисловості та $0{,}5$ у сільському господарстві.

4.2. Нехай матриця A нерозкладна. Що можна стверджувати про нерозкладність матриць A^T, A^{-1} та A^2 ?

4.3. Знайти власні числа матриці $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$, її число Фробеніуса, а також правий і лівий вектори Фробеніуса. З'ясувати питання щодо продуктивності даної матриці.

4.4. Дослідити модель Леонтьєва на продуктивність, знайти правий і лівий вектори Фробеніуса. Знайти валовий випуск:

$$x = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.5. Матриця прямих матеріальних витрат має вигляд $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю повних витрат B, числа λ_A та λ_B. При $l = (1 \quad 2)$ знайти вектор повних трудових витрат.

4.6. Динамічна модель Леонтьєва має вигляд

$$x(t) = Ax(t) + B\dot{x}(t) + c(t).$$

Вважаючи, що $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \end{pmatrix}$, дослідити динаміку $x(t)$, якщо:

1) $c(t) = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix} = c_0$;

2) $c(t) = c_0 e^{0,1t}$.

Приклад 4.2. Дослідити на продуктивність та на розкладність модель фон Неймана з матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для відповідного дослідження, будуємо допоміжну ЗЛП:

$$u \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_1 - u \le 0, \\ x_2 - 2\lambda x_2 - u \le 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0, \end{cases}$$

звідки $u(\lambda) = \frac{(1-\lambda)(1-2\lambda)}{2-3\lambda}$. Таким чином, число Неймана $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, число Фробеніуса $\lambda_1 = 1$. Отже, модель є непродуктивною, бо $\lambda_1 \ge 1$, а також вона є розкладною, бо $\lambda_0 \ne \lambda_1$.

ВПРАВИ

4.7. Знайти магістраль для динамічної дискретної моделі Леонтьєва з термінальним критерієм, якщо виробнича матриця A:

$$1)\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}; \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}; \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

4.8. Знайти темп зростання та магістраль для моделі фон Неймана з матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

4.9. Перевірити на розкладність модель фон Неймана з матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.10. Дослідити на продуктивність та на розкладність модель фон Неймана з матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти стан рівноваги моделі (A, B).

4.11. Дослідити на стійкість сталі розв'язки $k = \tilde{k}$, $k = \hat{k}$, $k = k_L$ та $k = k_U$ основного диференціального рівняння неокласичної теорії економічного зростання.

4.12. Розміри валового випуску визначаються виробничою функцією Кобби – Дугласа $Y = F(K, L) = aK^{\alpha}L^{\beta}$, де a, α, $\beta > 0$. Норма амортизації капіталу дорівнює μ; темп приросту населення – n.

1) Записати рівняння Солоу економічного зростання.

2) Знайти стаціонарні точки рівняння для нульового, максимального та проміжного питомого споживання. Визначити рівень питомого споживання за «золотим правилом».

Розв'язати при $a = 1$; $\beta = 0{,}5$; $n + \mu = 0{,}8$; $\bar{c} = 0{,}2$.

III. РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА

1. Пономаренко О.І. Сучасний економічний аналіз: У 2ч. Ч.1. Мікроекономіка. Ч.2. Макроекономіка: Навчальний посібник. / О.І. Пономаренко, М.О. Перестюк, В.М. Бурим. – К.: Вища школа, 2004. – 472 с. mikro_eko.pdf (knu.ua) , makro_eko.pdf (knu.ua)

2. Волошин О.Ф. Методичні рекомендації, приклади та вправи з курсу «Математична економіка»: Навчальний посібник. / О.Ф. Волошин, М.В. Коробова, Т.В. Колянова. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2013. – 224 с.

3. Будаговська С. та ін. Мікроекономіка і макроекономіка. Підручник. – Київ: Основи, 2001. – 518 с.

4. Ляшенко І.М. Моделювання економічних, екологічних і соціальних процесів: навчальний посібник. / І.М. Ляшенко, М.В. Коробова, І.А. Горіцина. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2010. – 320 с.

5. Коробова М.В. Екологічні й економічні процеси та їх моделювання: навчально-методичний посібник. / М.В. Коробова, Т.В. Колянова. – Київ: 2023. – 209 с. Microsoft Word - Metod_16-04-23

6. Волошин О.Ф. Теорія прийняття рішень: Навчальний посібник. / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – К.: ВПЦ» Київський університет», 2019. – 232 с.

7. Самуельсон П. Економіка: Підручник. – Львів: Світ, 1993. – 495 с.