



**ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ  
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ  
ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**С.О. Довгий, Я.П. Троценко, Д.І. Черній**

# **ТЕХНОЛОГІЇ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

**Лабораторний практикум**

**Навчальний посібник**

**Київ 2024**

УДК 517.3; 532.5

**Рецензенти:**

доктор технічних наук, професор, чл.-кор. НАН України О.М.Трофимчук,  
доктор фізико-математичних наук, професор Д.А.Клюшин

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики,  
протокол № 15 від 28 травня 2024 р.

Рекомендовано до друку вченою радою Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного  
простору, Національної академії наук України, протокол № 15 від 12 грудня 2023 р.

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики,  
протокол № 13 від 27 травня 2024 р.

д.ф.-м.н., проф., академік НАН України Станіслав Олексійович Довгий,  
Ph.D., асистент Ярослав Павлович Троценко,  
д.т.н., доц. Дмитро Іванович Черній

**Технології чисельного моделювання.** Лабораторний практикум: навчальний посібник / С.О. Довгий, Я.П. Троценко, Д.І. Черній. – Київ : 2024. – 139 с.

Викладено матеріали до лабораторного практикуму з дисципліни «Технології чисельного моделювання», що є обов'язковою для студентів, які навчаються за освітньо-науковою програмою другого (магістерського) рівня вищої освіти «Прикладна математика» спеціальності 113 «Прикладна математика». У посібнику наведено основні теоретичні матеріали і приклади побудови обчислювальних технологій для комп'ютерного моделювання складних систем та гідродинамічних процесів. Представлені завдання та наведено інструкції до виконання лабораторних робіт з побудови обчислювальних технологій, згідно робочої програми з навчальної дисципліни «Технології чисельного моделювання». Представлено приклади виконання лабораторних робіт.

Для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які навчаються за освітньо-науковою програмою «Прикладна математика» за спеціальністю 113 «Прикладна математика».

© Довгий С.О., Троценко Я.П., Черній Д.І., 2024

## ЗМІСТ

<b>Вступ</b> .....	<b>5</b>
<b>Розділ 1. Одновимірні сингулярні інтеграли та їх дискретизація</b> .....	<b>6</b>
1.1. Поняття сингулярного інтеграла .....	6
1.2. Сингулярний інтеграл по замкненому контуру .....	10
1.3. Сингулярний інтеграл по відрізьку .....	15
1.4. Сингулярний інтеграл по кусково-гладкій кривій .....	25
<b>Розділ 2. Одновимірні гіперсингулярні інтеграли та їх дискретизація</b> .....	<b>31</b>
2.1. Задача Неймана для рівняння Лапласа в плоскому випадку .....	31
2.2. Гіперсингулярний інтеграл на відрізьку .....	33
2.3. Гіперсингулярний інтеграл від періодичних функцій .....	39
<b>Розділ 3. Постановка задач та системи дискретних особливостей</b> .....	<b>44</b>
3.1. Постановка задачі гідродинаміки .....	44
3.2. Основні положення методу дискретних особливостей з системою дискретних вихрових елементів .....	46
3.3. Основні дискретні вихрові системи .....	48
<b>Розділ 4. Метод дискретних особливостей для плоских стаціонарних задач</b> .....	<b>54</b>
4.1. Задачі для профілю. Задачі для ґратки профілів .....	54
4.2. Виділення класу розв'язків. Б-умова методу дискретних особливостей .....	63
4.3. Тілесний та проникний профілі .....	69
<b>Розділ 5. Метод дискретних особливостей для плоских нестаціонарних задач</b> .....	<b>73</b>
5.1. Лінійна нестаціонарна задача обтікання тонкого профілю .....	73
5.2. Нелінійна нестаціонарна задача для довільного кусково-гладкого контуру .....	77
5.3. Математичне моделювання обтікання профілю з ежекцією .....	81
5.4. Математичне моделювання руху профілю, який коливається, поблизу меж .....	89
5.5. Моделювання струменевих течій методом дискретних особливостей .....	95
<b>Розділ 6. Обчислювальні технології для плоских задач</b> .....	<b>101</b>
6.1. Фізичні аспекти задач гідроаеродинаміки .....	101
6.2. Про постановки математичних задач гідроаеродинаміки .....	101
6.3. Математичні моделі плоских нестаціонарних течій .....	103
6.3.1. Інтегральні представлення моделей .....	103
6.3.2. Математичні постановки задач для моделей в інтегральних представленнях .....	104
6.4. Дискретизовані математичні моделі та елементи обчислювальних технологій для плоских нестаціонарних течій .....	105
6.4.1. Дискретизація інтегральних представлень .....	105
6.4.2. Елементи обчислювальних технологій для плоских течій .....	107
6.4.3. Алгоритм виділення області однозначності багатозначної функції, яка визначена на лінійному контурі .....	108
6.4.4. Алгоритм перетворення для виділення лінії розриву у області однозначності багатозначної функції (заданої на довільному контурі) .....	109
6.4.5. Дискретні представлення моделей (як функцій комплексної змінної) .....	112
6.4.6. Дискретні представлення моделей (як функцій дійсних змінних) .....	113
6.4.7. Математичні постановки задач для дискретизованих моделей .....	113
6.5. Алгоритми обчислювальних технологій для математичних моделей плоских нестаціонарних течій .....	115

6.5.1. Послідовність обчислень при моделюванні нестационарного відривного обтікання рухомого деформівного контуру (етапи I-VI) .....	115
6.5.2. Алгоритм перетворення дискретних особливостей .....	118

**Розділ 7. Завдання до лабораторних робіт ..... 121**

7.1. Лабораторна робота №1 .....	121
7.1.1. Математична постановка задачі .....	121
7.1.2. Параметри дискретизації задачі .....	122
7.1.3. Завдання до лабораторної роботи №1 .....	125
7.2. Лабораторна робота №2 .....	126
7.2.1. Математична постановка задачі .....	126
7.2.2. Параметри дискретизації задачі .....	127
7.2.3. Приклади графічного відображення .....	131
7.2.4. Схеми для умови непроникнення .....	134
7.2.5. Проблеми визначення часових інтервалів .....	136
7.2.6. Завдання до лабораторної роботи №2 .....	137

**Заключення ..... 138**

**Список використаних літературних джерел..... 139**

*Присвячено професору І.К.Ліфанову,  
який приклав багато зусиль для того,  
щоб науковий напрямок зі створення  
методів для гіперсингулярних рівнянь  
отримав свій розвиток в Україні*

## **Вступ**

Актуальність досліджень прикладних проблем та розширення можливостей комп'ютерної техніки призвели до необхідності створення обчислювальних технологій, призначених для прямого комп'ютерного моделювання складних явищ, систем та процесів. Етап побудови обчислювальних технологій є складовим елементом багатокрокового процесу з підготовки до комп'ютерного моделювання складних систем, який і розглядається у якості основного інструмента при проведенні досліджень, структуру якого представлено у дисципліні «Технології чисельного моделювання». Мета дисципліни «Технології чисельного моделювання» – опанування технологій підготовки та проведення комп'ютерного моделювання, за послідовністю: виявлення характеристичних параметрів процесу, визначення системи моделей, дискретизація системи моделей, побудова обчислювальних технологій, програмування алгоритмів, чисельне моделювання, обробка та аналіз даних, відображення результатів.

В даному навчальному посібнику наведено основні відомості щодо теорії та представлено схеми побудови обчислювальних технологій, що ґрунтуються на застосуванні методу дискретних особливостей, який є методом чисельного розв'язання сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь та належить до сімейства методів з розв'язування граничних інтегральних рівнянь. Представлено метод та алгоритм перетворень, який змінює порядок особливостей та властивості системи дискретних особливостей, що становлять основу обчислювальних технологій. Наведено приклади використання особливостей та вихрових елементів різних типів, побудови плоских та просторових математичних моделей в аерогідродинаміці, а також результати чисельного моделювання з їх застосуванням. Наведено приклади побудови обчислювальних технологій та їх застосування для вирішення завдань з комп'ютерного моделювання складних систем та досліджень гідродинамічних процесів. На прикладі аерогідродинамічних завдань показано, що метод дискретних вихорів (МДВ) є складовою частиною методу дискретних особливостей (МДО). Сформульовані типові завдання для складових частин (Лабораторна робота №1, Лабораторна робота №2) Комплексної лабораторної роботи, яка є обов'язковою до виконання (згідно робочої програми з навчальної дисципліни «Технології чисельного моделювання») студентами, які навчаються за освітньо-науковою програмою другого (магістерського) рівня вищої освіти «Прикладна математика» спеціальності 113 «Прикладна математика». Також, даний навчальний посібник може бути корисним для аспірантів та інженерів, що працюють в різних галузях прикладної математики, механіки та фізики.

# Розділ 1. Одновимірні сингулярні інтеграли та їх дискретизація

## 1.1. Поняття сингулярного інтеграла

Нижче розглядаються лише лінії, розміщені на площині з декартовою правою системою координат  $OXY$ . Іноді точки площини будемо розглядати як комплексні числа і позначати їх  $t = x + iy$ , де  $i$  – уявна одиниця.

Під гладкими лініями будемо розуміти прості лінії, тобто такі, які не перетинають самі себе.

*Гладкою розімкненою кривою (дугою)  $L$*  називатимемо лінію, яку можна описати параметрично таким чином:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad s_a \leq s \leq s_b, \quad (1.1.1)$$

де  $s_a$  та  $s_b$  – деякі скінченні сталі, а  $x(s)$ ,  $y(s)$  та  $x'(s)$ ,  $y'(s)$  – неперервні функції на  $[s_a, s_b]$ , причому похідні одночасно в нуль не перетворюються. При цьому різним значенням параметра  $s \in [s_a, s_b]$  відповідають різні точки кривої  $L$ .

Якщо через  $t = x(s) + iy(s)$  позначити точки кривої  $L$ , то між  $t$  та  $s$  існує взаємно однозначна відповідність ( $t \in L, s \in [s_a, s_b]$ ) та  $t'_s = x'(s) + iy'(s)$ .

Іноді криву  $L$ , що описана вище, будемо позначати  $ab$ , де  $a = t(s_a)$ ,  $b = t(s_b)$ .

*Гладким замкненим контуром  $L$*  називатимемо гладку криву, в якій  $x(s_b) = x(s_a)$ ,  $y(s_b) = y(s_a)$ , причому

$$\begin{aligned} x'(s_b - 0) &= x'(s_a + 0), \\ y'(s_b - 0) &= y'(s_a + 0). \end{aligned}$$

Таким чином, в цьому випадку функції  $x(s)$ ,  $y(s)$  та  $x'(s)$ ,  $y'(s)$  можна розглядати як періодичні з періодом  $T = s_b - s_a$ .

*Гладкою лінією (простою) називатимемо сукупність скінченного числа замкнених або розімкнених гладких контурів, які не мають загальних точок (у тому числі й кінців).*

*Кусково-гладкою кривою називатимемо криву, яка складається із скінченного числа гладких розімкнених кривих, які не мають загальних точок, за винятком хіба що кінців. При цьому будемо говорити, що ця крива має тільки кутові точки, якщо в кожному вузлі будь-які дві гладкі криві сходяться під кутами, що відрізняються від нульового, тобто вузол не є точкою розвороту.*

Так, у [1,5,7] показано наступне. Нехай  $L$  – проста кусково-гладка крива (тобто вона складається із скінченного числа гладких розімкнених кривих  $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_{n-1}a_n$ , розміщених так, що кінцева точка кожної попередньої гладкої кривої збігається з початковою точкою наступної), яка має тільки кутові вузли. Тоді для будь-якої пари точок  $t_1, t_2$  на кривій  $L$  виконується нерівність

$$K_0 \sigma(t_1, t_2) \leq r(t_1, t_2) \leq \sigma(t_1, t_2), \quad (1.1.2)$$

де:

1)  $\sigma(t_1, t_2)$  – довжина частини кривої  $L$ , що лежить між точками  $t_1$  та  $t_2$ , причому якщо  $L$  замкнена, то  $\sigma(t_1, t_2)$  позначає меншу довжину;

2)  $r(t_1, t_2) = |t_1 - t_2|$  – відстань між точками  $t_1$  та  $t_2$  на площині  $OXY$  ;

3) константа  $K_0 \in (0,1)$  не залежить від положення точок  $t_1$  та  $t_2$  на кривій  $L$ .

Зазначимо, що якщо кусково-гладка крива  $L$  має тільки кутові вузли, то для її точок також виконується нерівність (1.1.2).

Означення 1.1.1. Функція  $\varphi(t)$  змінної  $t$  (взагалі, комплексної) задовольняє умову  $H(\mu)$  (умову Гьольдера степеня  $\mu$ ) на даній множині  $D$  значень цієї змінної, якщо для будь-яких двох значень  $t_1$  та  $t_2$  з цієї множини маємо

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq A |t_1 - t_2|^\mu, \quad (1.1.3)$$

де  $A$  та  $\mu$  – додатні числа,  $0 < \mu \leq 1$ . Сталу  $A$  називають коефіцієнтом, а  $\mu$  – показником умови  $H(\mu)$ . Якщо показник  $\mu$  нас не цікавить, то будемо говорити, що функція  $\varphi(t)$  задовольняє умову  $H$  (або належить класу  $H$ ) на множині  $D$ , і будемо писати  $\varphi(t) \in H(\mu)$  або  $\varphi(t) \in H$ .

Зауважимо, що якщо  $\varphi(t) \in H(\mu)$ , то і  $|\varphi(t)| \in H(\mu)$ .

Поняття умови  $H$  узагальнюється на випадок функції кількох аргументів. Функція  $\varphi(t_1, \dots, t_n)$  задовольняє умову  $H(\mu_1, \dots, \mu_n)$  (або просто  $H$ ) на множині  $D$  змінних  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , якщо для будь-яких двох точок  $(t'_1, \dots, t'_n)$  та  $(t''_1, \dots, t''_n)$  з цієї множини виконується нерівність

$$|\varphi(t''_1, \dots, t''_n) - \varphi(t'_1, \dots, t'_n)| \leq A_1 |t''_1 - t'_1|^{\mu_1} + \dots + A_n |t''_n - t'_n|^{\mu_n}, \quad (1.1.4)$$

де  $A_i \geq 0$ ,  $0 < \mu_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

З (1.1.4) випливає, що якщо функція  $\varphi(t_1, \dots, t_n) \in H$ , то вона належить класу  $H(\mu_k)$  за змінною  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , рівномірно\* відносно останніх змінних. Справедливо й навпаки.

Надалі, говорячи, що функція  $\varphi(t_1, \dots, t_n)$  задовольняє умову  $H$  по кожній змінній окремо, будемо припускати, що ця умова задовольняється рівномірно відносно останніх змінних.

Гладка розімкнена крива  $L$  називається кривою Ляпунова, якщо похідна  $t'(s)$  задовольняє умову  $H(\alpha)$  на  $[s_a, s_b]$ . У цьому випадку, як показано в [7], відношення  $\frac{t - t_0}{s - s_0} = \frac{t(s) - t(s_0)}{s - s_0}$  задовольняє умову  $H(\alpha)$  по обох змінних  $s$  та  $s_0$  і не перетворюється в нуль на  $[s_a, s_b]$ . Останнє випливає з наступної леми, яка доведена в тій самій праці.

Лема 1.1.1. Нехай функція  $f(s)$  дійсної змінної  $S$ , що задана на відрізку  $[s_a, s_b]$ , має неперервну на цьому відрізку  $n$ -у похідну  $f^{(n)}(s)$ . Тоді функція

$$\begin{cases} F(s_0, s) = \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0}, & s, s_0 \in [s_a, s_b], \\ F(s, s) = \frac{df(s)}{ds} \end{cases} \quad (1.1.5)$$

\*) Тобто  $|\varphi(t_1, \dots, t''_k, \dots, t_n) - \varphi(t_1, \dots, t'_k, \dots, t_n)| < A |t''_k - t'_k|^{\mu_k}$ , де константа  $A$  не залежить від  $t_1, \dots, t_n$ .

має неперервні всі частинні похідні  $(n-1)$ -го порядку, тобто

$$\frac{\partial^{n-1} F(s_0, s)}{\partial s^k \partial s_0^l}, \quad k+l = n-1;$$

якщо  $f^{(n)}(s) \in H(\mu)$  на  $[s_a, s_b]$ , то попередні частинні похідні належать класу  $H(\mu)$  по обох змінних, і має місце

$$\frac{\partial^n F(s_0, s)}{\partial s^k \partial s_0^l} = \frac{k(s_0, s)}{|s_0 - s|^\lambda}, \quad k+l = n, \quad (1.1.6)$$

де  $1-\mu < \lambda = \text{const} < 1$ ,  $k(s_0, s) \in H$ ,  $\lambda$  довільно взято з указанного проміжку.

Д о в е д е н н я . Правильність першого пункту випливає з таких формул:

$$f(s) - f(s_0) = \int_{s_0}^s f'(\sigma) d\sigma = (s - s_0) \int_0^1 f'[s_0 + u(s - s_0)] du, \quad (1.1.7)$$

тобто

$$F(s_0, s) = \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0} = \int_0^1 f'[s_0 + u(s - s_0)] du,$$

і, отже,

$$\frac{\partial^{n-1} F(s_0, s)}{\partial s^k \partial s_0^l} = \int_0^1 u^k (1-u)^l f^{(n)}[s_0 + u(s - s_0)] du, \quad (1.1.8)$$

де  $k+l = n-1$ .

Для доведення другого пункту повернемося у формулі (1.1.8) до змінної  $\sigma$ . Отримаємо (заміняючи  $k$  на  $k-1$ )

$$\frac{\partial^{n-1} F(s_0 - s)}{\partial s^k \partial s_0^l} = \frac{1}{(s - s_0)^n} \int_{s_0}^s (\sigma - s_0)^{k-1} (s - \sigma)^l f^{(n)}(\sigma) d\sigma,$$

де  $k-1+l = n-1$ , тобто  $k+l = n$ .

Виконуючи диференціювання обох частин по  $s$ , покладаючи  $l \geq 1$  і знову повертаючись до змінної інтегрування  $u$ , отримуємо

$$\frac{\partial^n F(s_0, s)}{\partial s^k \partial s_0^l} = \frac{1}{s - s_0} \int_0^1 u^{k-1} (1-u)^{l-1} (nu - k) f^{(n)}[s_0 + u(s - s_0)] du. \quad (1.1.9)$$

Позначивши через  $\varphi(s_0, s)$  доданок при  $\frac{1}{s - s_0}$  у (1.1.9), отримаємо, що  $\varphi(s_0, s) \in H(\mu)$

(тому що  $f^{(n)}(s) \in H(\mu)$ ) і

$$\varphi(s_0, s_0) = -f^{(n)}(s_0) \int_0^1 d[u^k (1-u)^l] = 0.$$

З останньої рівності випливає формула (1.1.6). Аналогічно розглядаються випадки  $k = n, l = 0$  або  $k = 0, l = n$ .

Криву  $L$  будемо називати кусково-ляпуновською, якщо всі її гладкі частини є кривими Ляпунова.

**Визначення 1.1.2.** Функція  $\varphi(t)$  належить класу  $H^*$  ( $\varphi(t) \in H^*$ ) на кусково-гладкій кривій  $L$ , якщо її можна подати у вигляді

$$\varphi(t) = \varphi^*(t) \left/ \prod_{k=1}^p |t - c_k|^{\nu_k} \right. = \varphi^*(t) \left/ P_L^\nu(t) \right., \quad (1.1.10)$$

де  $\varphi^*(t) \in H_0$  на  $L$  ( $H_0$  – це клас функцій, що належать класу  $H$  на кожній гладкій частині кривої  $L$ );  $\nu_k = \alpha_k + i\beta_k$ ,  $0 \leq \alpha_k < 1$ ;  $c_k$  ( $k = 1, \dots, p$ ) – всі вузли кривої  $L$ .

Якщо ж хоча б для одного  $k$  буде виконуватися нерівність  $\alpha_k \geq 1$ , то будемо писати  $\varphi(t) \in H^{**}$ . Не зменшуючи загальності, можна вважати, що  $\varphi^*(t) \in H$  на  $L$ .

Нагадаємо тепер визначення сингулярного інтеграла типу Коші на кусково-гладкій кривій.

**Визначення 1.1.3.** Нехай точка  $t_0$  не збігається ні з яким вузлом кривої  $L$ , тобто є внутрішньою точкою. Опишемо з  $t_0$ , як з центра, коло настільки малого радіуса  $\varepsilon > 0$ , щоб воно перетинало  $L$  в двох точках  $t'$  та  $t''$ , і позначимо як  $l$  дугу  $t't''$ . Розглянемо інтеграл  $\int_{L \setminus l} \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0}$ .

Якщо при  $\varepsilon \rightarrow 0$  цей інтеграл прямує до певної границі, то ця границя і називається головним значенням інтеграла за Коші:

$$\Phi(t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L \setminus l} \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} = \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in L. \quad (1.1.11)$$

У [1,7] доведено, що клас  $H^*$  функцій на кусково-гладкій кривій  $L$  є інваріантним відносно операції взяття інтеграла в розумінні головного значення Коші (сингулярного інтеграла), тобто якщо  $\varphi(t) \in H^*$  на  $L$ , то  $\Phi(t_0) \in H^*$  на  $L$ .

Іноді в даній задачі доцільно замінити криву інтегрування  $L$  іншою кривою  $\Lambda$  (зробити заміну змінних у сингулярному інтегралі). При цьому припускається, що між точками  $t$  гладких частин кривої  $L$  та точками  $\tau$  гладких частин кривої  $\Lambda$  можна встановити взаємно однозначну відповідність  $t = t(\tau)$ , таку, що існує похідна  $t'(\tau) = \frac{dt}{d\tau}$ , яка відрізняється від нуля і належить класу  $H_0$  на  $\Lambda$ . Нехай далі щільність  $\varphi(t)$  задовольняє умову  $H$  в околі точки  $t_0$  (яка відрізняється від вузлів) та є інтегрованою на  $L$ . Тоді справедлива формула [1,5,7]

$$\int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} = \int_\Lambda \frac{\psi(\tau) d\tau}{\tau - \tau_0}, \quad (1.1.12)$$

де  $\psi(\tau) = \frac{(\tau - \tau_0)t'(\tau)}{t(\tau) - t(\tau_0)} \varphi(t(\tau))$ ;  $t_0 = t(\tau_0)$ ;  $\tau_0$  – точка лінії  $\Lambda$ .

## 1.2. Сингулярний інтеграл по замкненому контуру

Спочатку розглянемо сингулярний інтеграл

$$I(t_0) = \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} \quad (1.2.1)$$

по колу  $L$  одиничного радіуса з центром у початку координат;  $\varphi(t)$  – функція класу  $H$  на  $L$ .

Зручніше почати з інтеграла

$$I_0(t_0) = \int_L \frac{dt}{t - t_0},$$

для якого відомо [1,5,7], що

$$I_0(t_0) = \pi i. \quad (1.2.2)$$

Виберемо на  $L$  дві множини вузлів:  $E = \{t_k, k = 1, \dots, n\}$  та  $E_0 = \{t_{0k}, k = 1, \dots, n\}$ , таких, що точки  $t_k, k = 1, \dots, n$ , розбивають коло на  $n$  рівних частин, а точка  $t_{0k}$  є серединою дуги  $t_k t_{k+1}$ , де покладемо  $t_{n+1} = t_1$ . Надалі вибрані таким чином множини  $E$  та  $E_0$  точок кола будемо називати *канонічним розбиттям кола  $L$* .

**Лема 1.2.1.** Для будь-якої точки  $t_{0j} \in E_0$  виконується нерівність

$$\left| \int_L \frac{dt}{t - t_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{\Delta t_k}{t_k - t_{0j}} \right| \leq O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (1.2.3)$$

де  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, k = 1, \dots, n$ . Через  $O(1/n)$  ( $O_\delta(1/n)$ ) позначимо величину одного порядку малості з  $1/n$ , тобто в цьому випадку справа в нерівності потрібно розуміти величину виду  $B/n$  ( $B_\delta/n$ ), де константа  $B$  ( $B_\delta$ ) не залежить від  $n$ . Константа  $B_\delta$  залежить від параметра  $\delta$ .

**Доведення.** Оскільки  $L$  – одиничне коло з центром у початку координат, то можна записати

$$t_k = e^{i\theta_k}, t_{0k} = e^{i\theta_{0k}},$$

де  $\theta_k$  та  $\theta_{0k}$  – полярні кути точок  $t_k$  та  $t_{0k}, k = 1, \dots, n$ .

Враховуючи періодичність функції  $e^{i\theta}$  та позначаючи  $\eta_m = 2\pi m/n - \pi/n, m = 1, \dots, n$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta t_k}{t_k - t_{0j}} &= - \sum_{k=1}^n \frac{e^{i\eta_{m+1}} - e^{i\eta_m}}{1 - e^{i\eta_m}} = \\ &= \sum_{m=1}^n \left[ \operatorname{ctg} \frac{\eta_m}{2} \cos \frac{\Delta \eta_m}{2} - \sin \frac{\Delta \eta_m}{2} + i \left( \cos \frac{\Delta \eta_m}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\eta_m}{2} \sin \frac{\Delta \eta_m}{2} \right) \right] \sin \frac{\Delta \eta_m}{2}, \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

де  $\Delta \eta_m = \eta_{m+1} - \eta_m = 2\pi/n, m = 1, \dots, n$ .

Зазначимо, що числа  $\eta_m/2, m = 1, \dots, n$ , розміщені симетрично відносно  $\pi/2$ , і тому

$$\sum_{m=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\eta_m}{2} = 0. \quad (1.2.5)$$

З рівностей (1.2.4) та (1.2.5) випливає

$$\sum_{m=1}^n \frac{\Delta t_k}{t_k - t_{0j}} = -n \sin^2 \frac{\pi}{n} + i \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n} = i\pi + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (1.2.6)$$

що разом із формулою (1.2.2) показує справедливість нерівності (1.2.3).

З а у в а ж е н н я 1.2.1. Справедлива така оцінка:

$$\sum_{k=1}^n \frac{|\Delta t_k|}{|t_{0j} - t_k|} \leq O(\ln n), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.2.7)$$

Дійсно, зауважимо, що

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Delta t_k}{t_k - t_{0j}} = \sum_{m=1}^n \left[ \cos \frac{\eta_{m+1}}{2} + i \sin \frac{\eta_{m+1}}{2} \right] \frac{\sin \Delta \eta_m / 2}{\sin \eta_m / 2},$$

тому матимемо

$$\sum_{k=1}^n \frac{|\Delta t_k|}{|t_k - t_{0j}|} = \sum_{m=1}^n \frac{|\sin \Delta \eta_m / 2|}{|\sin \eta_m / 2|} \leq C \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \frac{\Delta \eta_m}{2} \frac{2}{\eta_m} = O(\ln n), \quad (1.2.8)$$

де  $[x]$  – ціла частина від числа  $x$ .

Займемося тепер вивченням аналогічної квадратурної суми для інтеграла (1.2.1). Нехай множини точок  $E$  та  $E_0$  утворюють канонічне розбиття кола  $L$ . Позначимо

$$S_n(t_{0j}) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) \Delta t_k}{t_k - t_{0j}}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.2.9)$$

Справедлива така теорема.

**Теорема 1.2.1.** Нехай  $\varphi(t)$  задовольняє умову  $H(\alpha)$  на  $L$ . Тоді виконується нерівність

$$|I(t_{0j}) - S_n(t_{0j})| \leq \theta(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.2.10)$$

$$\theta(t_{0j}) = O\left(\frac{1}{n^\alpha} \ln n\right) + |\varphi(t_{0j})| O\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Д о в е д е н н я.** Для зручності покладемо  $t_{0j} = 1$ . Тоді

$$|I(t_{0j}) - S_n(t_{0j})| \leq I_1 + I_2,$$

де

$$I_1 = \left| \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{t - 1} dt - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) - \varphi(1)}{t_k - 1} \Delta t_k \right|,$$

$$I_2 = |\varphi(1)| \left| \int_L \frac{dt}{t - 1} - \sum_{k=1}^n \frac{\Delta t_k}{t_k - 1} \right|.$$

Нерівність (1.2.3) дає оцінку для  $I_2$ . Вираз для  $I_1$  перетворимо у такий:

$$I_1 \leq I_1' + I_1'' + I_1''' ,$$

де

$$I_1' = \left| \sum_{k=1}^{n-1} \int_{I_k}^{I_{k+1}} \left[ \frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{t-1} - \frac{\varphi(t_k) - \varphi(1)}{t_k - 1} \right] dt \right|,$$

$$I_1'' = \left| \int_{t_n}^{t_1} \frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{t-1} dt \right|, \quad I_1''' = \left| \frac{\varphi(t_n) - \varphi(1)}{t_n - 1} \right| \frac{2\pi}{n}.$$

Через те що функція  $\varphi(t)$  задовольняє умову  $H(\alpha)$  на  $L$ , маємо

$$I_1'' \leq \int_{t_n}^{t_1} \frac{|\varphi(t) - \varphi(1)|}{|t-1|} |dt| \leq A \int_{t_n}^{t_1} |t-1|^{-1+\alpha} |dt|.$$

Для одиничного кола  $|dt| = d\theta$  і

$$|t-1| = |e^{i\theta} - 1| = |(\cos \theta - 1) + i \sin \theta| = 2|\sin \theta/2|.$$

Отже,

$$I_1'' \leq A 2^\alpha \int_0^{\pi/n} \left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^{-1+\alpha} d\theta \leq c_1 \int_0^{\pi/n} \theta^{-1+\alpha} d\theta = O\left( \frac{1}{n^\alpha} \right).$$

Для  $I_1'''$  отримаємо

$$I_1''' \leq A |t_n - 1|^{-1+\alpha} \frac{2\pi}{n} = O\left( \frac{1}{n^\alpha} \right).$$

Для оцінки  $I_1'$  буде потрібне перетворення, яке далі неодноразово застосовуватиметься:

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_{0j})}{t - t_{0j}} = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_k)}{t - t_{0j}} + \frac{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{0j})](t_k - t)}{(t - t_{0j})(t_k - t_{0j})}. \quad (1.2.11)$$

Згідно з формулою (1.2.11) маємо

$$I_1' \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|\varphi(t) - \varphi(t_k)|}{|t-1|} |dt| + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|\varphi(t_k) - \varphi(1)|}{|t_k - 1|} \frac{|t_k - t|}{|t-1|} |dt| = S_1 + S_2.$$

Оскільки  $\varphi(t)$  задовольняє умову  $H(\alpha)$  на  $L$  та  $t = e^{i\theta}$ , маємо

$$S_1 \leq A \left( \frac{2\pi}{n} \right)^\alpha \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|dt|}{|t-1|} \leq C_2 \frac{1}{n^\alpha} \int_{\pi/n}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\theta} = O\left( \frac{\ln n}{n^\alpha} \right).$$

Нарешті, для суми  $S_2$  отримаємо

$$S_2 \leq A \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|t_k - 1|^{1-\alpha}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|dt|}{|t-1|} \leq C_3 \frac{\pi}{n} \int_{\pi/n}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\theta^{2-\alpha}} = O\left( \frac{1}{n^\alpha} \right).$$

Підставляючи оцінки для  $S_1$  та  $S_2$  у нерівність для  $I_1'$ , а оцінки для  $I_1'$ ,  $I_1''$  та  $I_1'''$  – у нерівність для  $I_1$ , отримуємо

$$I_1 \leq O(n^{-\alpha} \ln n).$$

Таким чином, теорема 1.2.1 доведена.

Означення 1.2.1. Функція  $\varphi(t)$  належить класу П функцій на  $L$ , якщо вона має вигляд

$$\varphi(t) = \frac{\psi(t)}{q-t},$$

де  $\psi(t) \in H$  на  $L$ , а  $q$  – деяка фіксована точка на  $L$ . Зазначимо, що можна записати

$$\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = \frac{1}{q-t_0} \left[ \int_L \frac{\psi(t)dt}{t-t_0} - \int_L \frac{\psi(t)dt}{t-q} \right].$$

Остання формула показує справедливість такої теореми.

**Теорема 1.2.2.** Нехай  $\varphi(t)$  належить класу П на колі  $L$ , а множини  $E$  та  $E_0$  утворюють канонічне розбиття  $L$ , причому  $q \in E_0$  при  $j = j_q$ . Тоді справедлива нерівність

$$|I(t_{0j}) - S_n(t_{0j})| \leq \theta(t_{0j}), \quad j \neq j_q, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.2.12)$$

де величина  $\theta(t_{0j})$  має вигляд

$$\theta(t_{0j}) = \frac{1}{|t_{0j} - q|} O\left(\frac{1}{n^\alpha} \ln n\right), \quad j \neq j_q.$$

Неважко помітити, що величина  $\theta(t_{0j})$  задовольняє нерівність

$$\theta(t_{0j}) \leq O_l\left(\frac{1}{n^{\lambda_1}}\right), \quad \lambda_1 > 0 \quad (1.2.13)$$

для всіх  $t_{0j} \in L \setminus l$ , де  $l$  – як завгодно малий окіл точки  $q$ , та

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_q}}^n \theta(t_{0j}) |\Delta t_{0j}| \leq O\left(\frac{1}{n^{\lambda_2}}\right), \quad \lambda_2 > 0. \quad (1.2.14)$$

Очевидно, що в нерівності (1.2.13) точніше можна записати  $O_l(n^{-\alpha} \ln^2 n)$ , а в нерівності (1.2.14) –  $O(n^{-\alpha} \ln n)$ .

**З а у в а ж е н н я 1.2.2.** Нерівність (1.2.10) є справедливою і для інтеграла  $\int_L \frac{\varphi(t, t_0)}{t-t_0} dt$ , якщо  $\varphi(t, t_0) \in H(\alpha)$  на  $L$ , тобто

$$\left| \int_L \frac{\varphi(t, t_0) dt}{t-t_0} - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k, t_0) \Delta t_k}{t_k - t_0} \right| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right). \quad (1.2.15)$$

**З а у в а ж е н н я 1.2.3.** Нехай тепер  $L_1$  є замкненим контуром Ляпунова. Тоді між точками  $\tau$  цієї кривої та точками  $t$  стандартного (одиничного, з центром в початку координат) кола  $L$  існує взаємно однозначна відповідність  $\tau = \tau(t)$ , така, що похідна  $\tau'(t) = d\tau/dt$  належить класу  $H(\beta)$  і не перетворюється в нуль на  $L$ . Якщо тепер  $\varphi(t)$  задовольняє умову  $H(\alpha)$  на  $L_1$ , то згідно з формулою заміни змінної в сингулярних інтегралах (1.1.12) отримаємо

$$\int_{L_1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - \tau_0} = \int_L \frac{\Psi(t, t_0)dt}{t - t_0}, \quad \Psi(t, t_0) = \frac{t - t_0}{\tau(t) - \tau(t_0)} \tau'(t) \varphi(\tau(t)).$$

Розглянемо тепер на колі  $L$  канонічне розбиття, утворене множинами  $E$  та  $E_0$ . Множини точок  $\tau_k = \tau(t_k)$ ,  $t_k \in E$  та  $\tau_{0k} = \tau(t_{0k})$ ,  $t_{0k} \in E_0$  називатимемо *канонічним розбиттям* кривої  $L_1$ . Візьмемо суму

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\tau_k) \Delta \tau_k}{\tau_k - \tau_{0j}} = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\tau(t_k))(t_k - t_{0j})}{\tau(t_k) - \tau(t_{0j})} \frac{\Delta \tau_k}{\Delta t_k} \frac{\Delta t_k}{t_k - t_{0j}}.$$

Оскільки

$$\frac{\Delta \tau_k}{\Delta t_k} = \frac{\tau(t_{k+1}) - \tau(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = \tau'(\tilde{t}_k), \quad \tilde{t}_k \in t_k t_{k+1},$$

а  $\tau'(t) \in H(\beta)$  на  $L$ , то  $|\tau'(\tilde{t}_k) - \tau'(t_k)| \leq A|\tilde{t}_k - t_k|^\beta$ , тобто  $\tau'(\tilde{t}_k) = \tau'(t_k) + O(|\tilde{t}_k - t_k|^\beta)$ .

Отже,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\tau_k) \Delta \tau_k}{\tau_k - \tau_{0j}} &= \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\tau(t_k))(t_k - t_{0j})}{\tau(t_k) - \tau(t_{0j})} \frac{\tau'(t_k) \Delta t_k}{t_k - t_{0j}} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\tau(t_k))(t_k - t_{0j})}{\tau(t_k) - \tau(t_{0j})} O(|\tilde{t}_k - t_k|^\beta) \frac{\Delta t_k}{t_k - t_{0j}} = S_j^1 + S_j^2. \end{aligned}$$

Використовуючи нерівність (1.2.7), отримуємо

$$|S_j^2| \leq O(n^{-\beta} \ln n).$$

Через те з нерівності (1.2.15) і оцінки для  $S_j^2$  матимемо співвідношення

$$\left| \int_{L_1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - \tau_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\tau_k) \Delta \tau_k}{\tau_k - \tau_{0j}} \right| \leq O\left(\frac{1}{n^\lambda}\right), \quad \lambda > 0. \quad (1.2.16)$$

Нехай тепер крива  $L$  є сукупністю  $p$  замкнених кривих Ляпунова  $L_1, \dots, L_p$ , що не перетинаються, а множини  $E_m = \{\tau_k, k = n_{m-1} + 1, \dots, n_m\}$  і  $E_{0m} = \{\tau_{0k}, k = n_{m-1} + 1, \dots, n_m\}$  утворюють канонічне розбиття  $N_m = n_m - n_{m-1}$  кривої  $L_m$ ,  $m = 1, \dots, p$ ;  $n_0 = 0$ . Позначимо

$$N = \min_{m=1, \dots, p} N_m$$

і надалі припускатимемо, що  $N_m/N \leq R < +\infty$ . Позначимо ще

$$S_{n_p}(\tau_{0j}) = \sum_{k=1}^{n_p} \frac{\varphi(\tau_k) \Delta \tau_k}{\tau_k - \tau_{0j}}, \quad j = 1, \dots, n_p,$$

де

$$\Delta \tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k, \quad k = 1, \dots, n_p, \quad k \neq n_1, \dots, n_p;$$

$$\Delta \tau_{n_m} = \tau_{n_m+1} - \tau_{n_m}, \quad m = 1, \dots, p.$$

Тоді справедлива така теорема.

**Теорема 1.2.3.** Нехай  $\varphi(t)$  задовольняє умову  $H$  на кривій  $L$ . Тоді для будь-якої точки  $\tau_{0j} \in \bigcup_{m=1}^p E_{0m}$  виконується нерівність

$$\left| I(\tau_{0j}) - S_{n_p}(\tau_{0j}) \right| \leq O(1/N^\lambda), \quad \lambda > 0. \quad (1.2.17)$$

**Зауваження 1.2.4.** У застосуваннях [1,5,7] для обчислення інтеграла (1.2.1) частіше виконується квадратурна формула виду

$$S_n^*(t_{0j}) = \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{t_k - t_{0j}}, \quad j=1, \dots, n, \quad (1.2.18)$$

$$\text{де } \Gamma_k = \int_{t_{0k-1}}^{t_{0k}} \varphi(t) dt.$$

Для модуля  $\left| I(t_{0j}) - S_n^*(t_{0j}) \right|$  справедливі ті самі оцінки, що й для модуля  $\left| I(t_{0j}) - S_n(t_{0j}) \right|$ .

### 1.3. Сингулярний інтеграл по відрітку

Вважатимемо, що в сингулярному інтегралі (1.2.1)  $L=[a,b]$  на дійсній осі, а функція  $\varphi(t) \in H^*$  на  $L$ , тобто має вигляд

$$\varphi(t) = \frac{\psi(t)}{(t-a)^\nu (b-t)^\mu},$$

де  $\psi(t) \in H(\alpha)$  на  $[a,b]$ ,  $0 \leq \nu, \mu < 1$ .

У цьому випадку визначення (1.1.11) можна записати так:

$$\Phi(t_0) = \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{t_0-\varepsilon} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} - \int_{t_0+\varepsilon}^b \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} \right).$$

Нехай точки  $t_0 = a, t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = b$  розбивають відрізок  $[a,b]$  на  $n+1$  рівних частин довжиною  $h = (b-a)/(n+1)$ , а точка  $t_{0j}$  є серединою відрізка  $[t_j, t_{j+1}]$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Будемо говорити, що точки множин  $E = \{t_k, k = 1, \dots, n\}$  та  $E_0 = \{t_{0j}, j = 0, 1, \dots, n\}$  утворюють канонічне розбиття відрізка  $[a,b]$  з кроком  $h$ .

Справедлива така лема.

**Лема 1.3.1.** Для будь-якої точки  $t_{0j} \in E_0$  виконується нерівність

$$\left| \int_a^b \frac{dt}{t-t_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{h}{t_k - t_{0j}} \right| \leq \frac{hB}{(t_{0j}-a)(b-t_{0j})}, \quad (1.3.1)$$

де  $B$  – деяка константа.

Відзначимо, що має місце нерівність

$$\sum_{k=1}^n \frac{h}{|t_k - t_{0j}|} \leq O(|\ln h|). \quad (1.3.2)$$

Лема 1.3.2. Нехай тепер функція  $\varphi(t) \in H(\alpha)$  на відрізку  $[a, b]$ . Тоді для будь-якої точки  $t_{0j} \in E_0$  справедлива нерівність

$$I_1 \equiv \left| \int_a^b \frac{\varphi(t) - \varphi(t_{0j})}{t - t_{0j}} dt - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_{0j})}{t_k - t_{0j}} h \right| \leq O(h^\alpha |\ln h|). \quad (1.3.3)$$

Доведення. Зробимо таке перетворення:

$$\begin{aligned} I_1 \leq & \left| \int_a^{t_1} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_{0j})}{t - t_{0j}} dt \right| + \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( \frac{\varphi(t) - \varphi(t_{0j})}{t - t_{0j}} - \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_{0j})}{t_k - t_{0j}} \right) dt \right| + \\ & + \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_{0j})}{t - t_{0j}} dt \right| + \left| \frac{\varphi(t_j) - \varphi(t_{0j})}{t_j - t_{0j}} h \right| = I_1^1 + I_1^2 + I_1^3 + I_1^4. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Через те що  $\varphi(t)$  задовольняє умову  $H(\alpha)$ ,

$$I_1^1 = O(h^\alpha), \quad I_1^3 = O(h^\alpha), \quad I_1^4 = O(h^\alpha).$$

Тепер, використовуючи формулу (1.2.11), отримаємо

$$I_1^2 \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|\varphi(t) - \varphi(t_k)|}{|t - t_{0j}|} dt + \sum_{k=1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|t_k - t|}{|t - t_{0j}|} \frac{|\varphi(t_k) - \varphi(t_{0j})|}{|t_k - t_{0j}|} dt = S_1 + S_2.$$

Для  $S_1$  дістанемо оцінку

$$S_1 \leq Ah^\alpha \left( \int_{t_1}^{t_j} \frac{dt}{t_{0j} - t} + \int_{t_{j+1}}^b \frac{dt}{t - t_{0j}} \right) = O(h^\alpha |\ln h|).$$

Оскільки для будь-яких  $k$  та  $j$  маємо нерівність

$$\frac{h}{|t_k - t_{0j}|} \leq 2, \quad (1.3.5)$$

то

$$S_2 \leq Ah \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{|t - t_{0j}| |t_k - t_{0j}|^{1-\alpha}} \leq Ch^\alpha \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{|t - t_{0j}|} = O(h^\alpha |\ln h|).$$

Підставляючи тепер оцінки для  $S_1$  та  $S_2$  у формулу для  $I_1^2$ , а оцінки для  $I_1^1, \dots, I_1^4$  – у формулу для  $I_1$ , отримаємо, що лема 1.3.2 справедлива.

З нерівності (1.3.1) та (1.3.3) випливає справедливість такої теореми.

**Теорема 1.3.1.** Нехай функція  $\varphi(t) \in H(\alpha)$  на відрізку  $[a, b]$  і множини  $E$  та  $E_0$  утворюють канонічне розбиття цього відрізка. Тоді для будь-якої точки  $t_{0j} \in E_0$  маємо

$$|I(t_{0j}) - S_n(t_{0j})| \leq O\left(\frac{h^\alpha |\ln h| + |\varphi(t_{0j})| h}{(t_{0j} - a)(b - t_{0j})}\right), \quad (1.3.6)$$

$$\text{де } S_n(t_{0j}) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) h}{t_k - t_{0j}}.$$

Нарешті, доведемо таку теорему.

**Теорема 1.3.2.** Нехай  $\varphi(t) \in H^*$  на відрізку  $[a, b]$  і нехай множини точок  $E$  та  $E_0$  утворюють канонічне розбиття цього відрізка. Тоді справедлива така нерівність:

$$I \equiv \left| \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t - t_{0j}} dt - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) h}{t_k - t_{0j}} \right| \leq \theta(t_{0j}), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (1.3.7)$$

де величина  $\theta(t_{0j})$  задовольняє нерівності:

а) для всіх точок  $t_{0j} \in [a + \delta, b - \delta]$ , де  $\delta > 0$  – як завгодно мале число:

$$\theta(t_{0j}) \leq O_\delta(h^{\lambda_1}), \quad 0 < \lambda_1 \leq 1; \quad (1.3.8)$$

б) для усіх точок  $t_{0j} \in [a, b]$

$$\sum_{j=0}^n \theta(t_{0j}) |\Delta t_{0j}| \leq O(h^{\lambda_2}), \quad 0 < \lambda_2 \leq 1, \quad (1.3.9)$$

де  $|\Delta t_{0j}| = h, \quad j = 0, 1, \dots, n.$

**Доведення.** Можемо записати

$$\begin{aligned} I &\leq \left| \int_a^b \frac{\varphi(t) - \varphi(t_{0j})}{t - t_{0j}} dt - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_{0j})}{t_k - t_{0j}} h \right| + \\ &+ \left| \varphi(t_{0j}) \left| \int_a^b \frac{dt}{t - t_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{h}{t_k - t_{0j}} \right| \right| = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Оцінку для  $I_2$  одержуємо за допомогою нерівності (1.3.1). Для того, щоб дати оцінку для  $I_1$ , зауважимо спочатку, що якщо  $\varphi(t) \in H^*$  на  $[a, b]$ , то

$$\begin{aligned} |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| &\leq A \left[ \frac{|t_2 - t_1|^\alpha}{(t_2 - a)^\nu (b - t_2)^\mu} + \frac{|\Psi(t_1)| |t_2 - t_1|^\nu}{(t_2 - a)^\nu (b - t_2)^\mu (t_1 - a)^\nu} + \right. \\ &\left. + \frac{|\Psi(t_1)| |t_2 - t_1|^\mu}{(b - t_2)^\mu (b - t_1)^\mu (t_1 - a)^\nu} \right]. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Якщо тепер  $I_1$  виразити так, як і в нерівності (1.3.4), то для  $I_1^4$  отримаємо

$$I_1^4 \leq A_1 \left[ \frac{h^\alpha}{(t_{0j} - a)^\nu (b - t_{0j})^\mu} + \frac{|\Psi(t_{0j})| h^\nu}{(t_{0j} - a)^{2\nu} (b - t_{0j})^\mu} + \frac{|\Psi(t_{0j})| h^\mu}{(t_{0j} - a)^\nu (b - t_{0j})^{2\mu}} \right],$$

тому що для будь-якого  $j = 1, \dots, n$  маємо

$$\frac{1}{2} \leq \frac{t_j - a}{t_{0j} - a}, \quad \frac{t_j - b}{t_{0j} - b} \leq 2. \quad (1.3.11)$$

Для  $I_1^3$  маємо

$$I_1^3 \leq A \left[ \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{h^\alpha dt}{(t-a)^\nu (b-t)^\mu |t-t_{0j}|^{1-\alpha}} + \frac{|\Psi(t_{0j})|}{(t_{0j}-a)^\nu} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{h^\nu dt}{(t-a)^\nu (b-t)^\mu |t-t_{0j}|^{1-\nu}} + \frac{|\Psi(t_{0j})|}{(b-t_{0j})^\mu (t_{0j}-a)^\nu} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{h^\mu dt}{(b-t)^\mu |t-t_{0j}|^{1-\mu}} \right].$$

У [1,7] доведена теорема про середнє значення для невластного інтеграла, яка формулюється так. Нехай функції  $f(x)$  та  $g(x)$  інтегровні на  $[a, b]$ , причому  $f(x)$  обмежена, тобто  $-\infty < m \leq f(x) \leq M < +\infty$ , а  $g(x)$  не змінює знака. Тоді функція  $f(x)g(x)$  інтегровна і

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx, \quad m \leq \mu \leq M.$$

Застосовуючи сформульовану теорему про середнє значення для всіх  $j = 1, \dots, n-1$ , отримуємо

$$I_1^3 \leq A \left[ \frac{1}{(\xi_j^1 - a)^\nu (b - \xi_j^1)^\mu} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{dt}{|t - t_{0j}|^{1-\alpha}} + \frac{|\Psi(t_{0j})|}{(t_{0j} - a)^\nu (\xi_j^2 - a)^\nu (b - \xi_j^2)^\mu} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{dt}{|t - t_{0j}|^{1-\nu}} + \frac{|\Psi(t_{0j})|}{(b - t_{0j})^\mu (t_{0j} - a)^\nu (b - \xi_j^3)^\mu} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{dt}{|t - t_{0j}|^{1-\mu}} \right] \leq A_2 \left[ \frac{h^\alpha}{(t_{0j} - a)^\nu (b - t_{0j})^\mu} + \frac{|\Psi(t_{0j})| h^\nu}{(t_{0j} - a)^{2\nu} (b - t_{0j})^\mu} + \frac{|\Psi(t_{0j})| h^\mu}{(t_{0j} - a)^\nu (b - t_{0j})^{2\mu}} \right],$$

оскільки  $\xi_j^k \in [t_j, t_{j+1}]$ ,  $k = 1, 2, 3$ , і тому відношення  $(\xi_j^k - a)/(t_{0j} - a)$  та  $(\xi_j^k - b)/(t_{0j} - b)$  є величинами, обмеженими для  $j = 1, \dots, n-1$ . Для  $j = n$  у  $I_1^3$  знову застосуємо сформульовану теорему про середнє значення, але заздалегідь розіб'ємо ділянку інтегрування на два відрізки  $[t_n, t_n + 3h/4]$  та  $[t_n + 3h/4, b]$ . В результаті отримаємо, що  $I_1^3$  має ту саму оцінку і при  $j = n$ . Аналогічно можна показати, що така ж оцінка є справедливою і для  $I_1^1$  при  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Нарешті, розглянемо  $I_1^2$ . Як і в доведенні нерівності (1.3.3) для  $I_1^2$  запишемо

$$I_1^2 \leq S_1 + S_2.$$

Використовуючи формулу (1.3.10), для  $S_1$  отримуємо

$$\begin{aligned}
S_1 &\leq A \left[ h^\alpha \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{(t-a)^\nu (b-t)^\mu |t-t_{0j}|} + \right. \\
&+ h^\nu \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{|\Psi(t_k)|}{(t_k-a)^\nu} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{(t-a)^\nu (b-t)^\mu |t-t_{0j}|} + \\
&\left. + h^\nu \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{|\Psi(t_k)|}{(t_k-a)^\nu (b-t_k)^\mu} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{(b-t)^\mu |t-t_{0j}|} \right] \leq \\
&\leq A_3 \left[ h^\alpha \frac{1}{(b-t_j)^\mu} \int_{t_1}^{t_j} \frac{dt}{(t-a)^\nu |t-t_{0j}|} + h^\alpha \frac{1}{(t_{j+1}-a)^\nu} \int_{t_{j+1}}^b \frac{dt}{(b-t)^\mu |t-t_{0j}|} + \right. \\
&+ \frac{h^\nu}{(b-t_j)^\mu} \left( \frac{1}{(t_1-a)^\nu} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(t-a)^\nu |t-t_{0j}|} + \int_{t_2}^{t_j} \frac{dt}{(t-h-a)^{2\nu} |t-t_{0j}|} \right) + \\
&+ \frac{h^\nu}{(t_{j+1}-a)^{2\nu}} \int_{t_{j+1}}^b \frac{dt}{(b-t)^\mu |t-t_{0j}|} + \frac{h^\mu}{(b-t_j)^{2\mu}} \int_{t_1}^{t_j} \frac{dt}{(t-h-a)^\nu |t-t_{0j}|} + \\
&\left. + \frac{h^\mu}{(t_{j+1}-a)^\nu} \left( \int_{t_{j+1}}^{b-h} \frac{dt}{(b-t)^{2\mu} |t-t_{0j}|} + \frac{1}{(b-t_n)^\mu} \int_{t_n}^b \frac{dt}{(b-t)^\mu |t-t_{0j}|} \right) \right],
\end{aligned}$$

тому що  $|\Psi(t_k)|$  – величина, обмежена на  $[a, b]$ .

Зазначимо тепер, що

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_j} \frac{dt}{(t-a)^\nu |t-t_{0j}|} &= \int_{t_1}^{(t_j+t_1)/2} \frac{dt}{(t-a)^\nu (t_{0j}-t)} + \int_{(t_j+t_1)/2}^{t_j} \frac{dt}{(t-a)^\nu (t_{0j}-t)} \leq \\
&\leq \frac{2}{(1-\nu)(t_{0j}-t_1+t_{0j}-t_j)} \left[ \left( \frac{t_j+t_1}{2} - a \right)^{1-\nu} - (t_1-a)^{1-\nu} \right] + \\
&+ \frac{2^\nu}{(t_j-a+t_1-a)^\nu} \ln \frac{t_{0j}-t_j+t_{0j}-t_1}{2(t_{0j}-t_j)} \leq \\
&\leq \frac{A_4}{(t_{0j}-t_1)^\nu} + \frac{O(|\ln h|)}{(t_j-a)^\nu} = \frac{O(|\ln h|)}{(t_{0j}-a)^\nu}, \quad j=1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Аналогічно розглядаючи інтеграл

$$\int_{t_2}^{t_j} \frac{dt}{(t-h-a)^{2\nu} |t-t_{0j}|},$$

будемо мати: якщо  $2\nu \leq 1$ , то справедлива оцінка виду (1.3.12), а якщо  $2\nu > 1$ , то згідно з умовою  $1-2\nu < 0$  формула (1.3.12) набуває вигляду

$$\int_{t_2}^{t_j} \frac{dt}{(t-h-a)^{2\nu} |t-t_{0j}|} \leq \left[ \frac{h^{1-2\nu}}{t_{0j}-a} + \frac{1}{(t_{0j}-a)^{2\nu}} \right] O(|\ln h|). \quad (1.3.13)$$

Для останніх інтегралів у нерівності для  $S_1$  є справедливою оцінка виду (1.3.12) або (1.3.13) із відповідними замінами  $\nu$  на  $\mu$  та  $a$  на  $b$ . Тому остаточно отримаємо

$$S_1 \leq \left[ \frac{h^\alpha}{(t_{0j}-a)^\nu (b-t_{0j})^\mu} + \frac{h^\nu}{(t_{0j}-a)^{2\nu} (b-t_{0j})^\mu} + \frac{h^\mu}{(t_{0j}-a)^\nu (b-t_{0j})^{2\mu}} + \frac{h^{1-\nu}}{(t_{0j}-a)(b-t_{0j})^\mu} + \frac{h^{1-\mu}}{(t_{0j}-a)^\nu (b-t_{0j})} \right] O(|\ln h|).$$

Розглянемо тепер  $S_2$ . Застосовуючи формулу (1.3.10), отримуємо

$$S_2 \leq A_4 h \left[ \frac{1}{(t_{0j}-a)^\nu (b-t_{0j})^\mu} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{|t_k-t_{0j}|^{1-\alpha} |t-t_{0j}|} + \frac{1}{(t_{0j}-a)^\nu (b-t_{0j})^\mu} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{(t_k-a)^\nu |t_k-t_{0j}|^{1-\nu} |t-t_{0j}|} + \frac{1}{(b-t_{0j})^\mu} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{(t_k-a)^\nu (b-t_k)^\mu |t_k-t_{0j}|^{1-\mu} |t-t_{0j}|} \right].$$

Використовуючи тепер знов те, що  $h/|t_i-t_{0j}| \leq 2$ ,  $j=1, \dots, n$ , для будь-якого  $i$ , і оцінки виду (1.3.12), отримаємо

$$S_2 \leq \left[ \frac{h^\alpha}{(t_{0j}-a)^\nu (b-t_{0j})^\mu} + \frac{h^\nu}{(t_{0j}-a)^{2\nu} (b-t_{0j})^\mu} + \frac{h^\mu}{(t_{0j}-a)^\nu (b-t_{0j})^{2\mu}} \right] O(|\ln h|).$$

Введемо тепер позначення  $\eta(t_{0j}, \alpha, \beta) = (t_{0j}-a)^{-\alpha} (b-t_{0j})^{-\beta}$ . Тоді оцінка для  $I$  запишеться у вигляді

$$I \leq \theta(t_{0j}) = \theta_0(t_{0j}, \alpha, \nu, \mu) O(|\ln h|), \quad (1.3.14)$$

де

$$\theta_0(t_{0j}, \alpha, \nu, \mu) = \eta(t_{0j}, \nu, \mu) h^\alpha + \eta(t_{0j}, 2\nu, \mu) h^\nu + \eta(t_{0j}, \nu, 2\mu) h^\mu + \eta(t_{0j}, 1, \mu) h^{1-\nu} + \eta(t_{0j}, \nu, 1) h^{1-\mu} + \eta(t_{0j}, 1+\nu, 1+\mu) h, \quad 0 < \nu, \mu < 1.$$

Нескладно перевірити, що величина  $\theta(t_{0j})$  у нерівності (1.3.14) задовольняє умови (1.3.8) та (1.3.9).

Зауваження 1.3.1. Фактично доведення нерівності (1.3.7) здійснювалося за умови  $0 < \nu, \mu < 1$ . Однак із проведених міркувань можна отримати такі твердження:

1) якщо  $\nu \neq 0, \mu = 0$ , то вираз для  $\theta_0(t_{0j}, \alpha, \nu, 0)$  матиме вигляд

$$\begin{aligned} \theta_0(t_{0j}, \alpha, \nu, 0) = & \eta(t_{0j}, \nu, 0)h^\alpha + \eta(t_{0j}, 2\nu, 0)h^\nu + \eta(t_{0j}, 1, 0)h^{1-\nu} + \\ & + \eta(t_{0j}, 1 + \nu, 1)h; \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

2) якщо  $\nu = \mu = 0$ , то величина  $\theta(t_{0j})$  матиме вигляд правої частини нерівності (1.3.6).

Відзначимо ще й таке. Якщо функція  $\varphi(t)$  має вигляд

$$\varphi(t) = \frac{(b-t)^\mu}{(t-a)^\nu} \psi(t),$$

де  $0 < \nu < 1, 0 < \mu$ , а  $\psi(t)$  належить класу  $H$  на відрізку  $[a, b]$ , то нерівність (1.3.8) виконується для всіх точок  $t_{0j} \in [a + \delta, b]$ .

За уваження 1.3.2. В аеродинаміці (див., наприклад, [7]) часто використовується такий вибір точок  $t_k$  та  $t_{0j}$ . Розіб'ємо відрізок  $[a, b]$  на  $n$  рівних частин довжиною  $h$ , які позначимо  $\Delta_k, k = 1, \dots, n$ . Точку, яка знаходиться від лівого кінця відрізка  $\Delta_k$  на  $h/4$  і лежить на ньому, позначимо  $t_k$ , а точку цього відрізка, яка знаходиться на  $3h/4$  від лівого кінця, позначимо  $t_{0k}, k = 1, \dots, n$ . Для розбиття, яке описується, справедливими є [7] всі твердження, наведені для сингулярного інтеграла на відрізку  $[a, b]$ . Розрахунки показують [7], що остання схема дає кращі результати для модельних прикладів, ніж канонічне розбиття.

Справедливе й більш загальне твердження. Нерівності (1.3.1), (1.3.3), (1.3.6) та (1.3.7) правильні і в тому випадку, коли точки множин  $E = \{t_k, k = 1, \dots, n\}$  і  $E_0 = \{t_{0j}, j = 0, 1, \dots, n\}$  не утворюють канонічне розбиття відрізка, а задовольняють умову

$$\begin{aligned} |t_{k+1} - t_k| &= h, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ |t_{0j+1} - t_{0j}| &= h, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \\ t_1 - t_{00} &= \frac{h}{2}, \quad t_{0k} = t_k + \frac{h}{2}, \quad k = 1, \dots, n, \\ t_{00} - a &= hq_h^a, \quad b - t_{0n} = hq_h^b, \quad 0 < p_1 \leq q_h^a, \quad q_h^b \leq p_2 < +\infty, \end{aligned}$$

де  $p_1$  та  $p_2$  – задані числа.

Таке розміщення виникає в тому випадку [7], коли вимагається, щоб деяка фіксована точка  $q \in (a, b)$  знаходилась у заданому положенні відносно точок розбиття, наприклад, щоб точка  $q$  належала множині  $E$  або  $E_0$  при будь-якому  $n$ .

Покажемо, як зробити, щоб  $q \in E_0$  при будь-якому  $n$ . Розіб'ємо відрізок  $[a, b]$  на  $n+2$  рівних частин точками  $t'_k, k = 1, \dots, n+1, t'_0 = a, t'_{n+2} = b, t'_{0k}$  – середина відрізка  $[t'_k, t'_{k+1}], k = 0, 1, \dots, n+1$ . Нехай точка  $q$  лежить на відрізку  $[t'_{0j_q}, t'_{0j_q+1}]$ . Зробимо зсув множини точок  $\{t'_k, k = 1, \dots, n+1\} \cup \{t_{0j}, j = 0, 1, \dots, n+1\}$  як жорсткого цілого так, щоб найближчий до точки  $q$  кінець відрізка  $[t'_{0j_q}, t'_{0j_q+1}]$  збігся з точкою  $q$ . Викинемо крайні точки з множини  $\{t'_k, k = 1, \dots, n+1\}$  та  $\{t'_{0j}, j = 0, 1, \dots, n+1\}$  з того краю, у бік якого відбувся зсув. Решту точок із зсунутих множин

позначимо  $t_k, k = 1, \dots, n$ , і  $t_{0j}, j = 0, 1, \dots, n$ . Якщо на початку точка  $q$  збігалася з однією з точок  $t'_{0j}$ , то вихідні множини позначимо  $E$  і  $E_0$ .

Аналогічно будуються точки  $t_k$  та  $t_{0j}$  і в тому випадку, коли вимагається, щоб  $q \in E$ .

При розгляді задачі обтікання профілю із закритком множини  $E$  і  $E_0$  вибираються таким чином, щоб точка  $q$  лежала при будь-якому  $n$  точно посередині між найближчими до неї точками з  $E$  і  $E_0$ . Зробити це можна так. Нехай  $h = (b - a)/(n + 1)$ . Точку, що знаходиться на  $h/4$  вправо від точки  $q$ , віднесемо до множини  $E_0$ , а ту, що знаходиться на  $h/4$  вліво, – до множини  $E$ , решта точок множин  $E$  та  $E_0$  вибираються з кроком  $h$  від обраних. Те саме можна зробити й описаним вище зсувом точок канонічного розбиття з указаним кроком, причому зсув відбудеться на величину, не більшу за  $h/4$ .

Сформульовані вище результати для сингулярного інтеграла на відрізку будуть справедливими й у тому випадку, коли поміняти місцями точки множин  $E$  і  $E_0$ , тобто підінтегральну функцію брати в точках множини  $E_0$ , а обчислювати інтеграл у точках множини  $E$ .

**З а у в а ж е н н я 1.3.3.** Усі результати справедливі і для функції

$$\varphi(t, \tau) = \frac{\Psi(t, \tau)}{(t - a)^\nu (b - t)^\mu}, \quad (1.3.16)$$

якщо  $\Psi(t, \tau) \in H$  на відрізку  $[a, b]$  по обох змінних, а також коли для побудови суми використовуються тільки точки множин  $E$  або  $E_0$ . Наприклад, якщо позначити

$$S'_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{\varphi(t_k)h}{t_k - t_j}, \quad (1.3.17)$$

$$I'_j = \int_a^b \frac{\varphi(t)dt}{t - t_j}, \quad (1.3.18)$$

то для модуля різниці  $I'_j - S'_j$  справедлива нерівність виду (1.3.7).

Для кола в параграфі 1.2 введено клас функцій  $\Pi$ . Аналогічний клас функцій на відрізку  $[a, b]$  визначається таким чином [7].

**В и з н а ч е н н я 1.3.1.** Функція  $\varphi(t)$  належить класу  $\Pi$  на відрізку  $[a, b]$ , якщо вона має вигляд

$$\varphi(t) = \frac{\Psi(t)}{q - t}, \quad (1.3.19)$$

де  $\Psi(t) \in H^*$  на відрізку  $[a, b]$ , а  $q \in (a, b)$  – фіксована точка.

Справедлива така теорема.

**Т е о р е м а 1.3.3.** Нехай  $\varphi(t) \in \Pi$  на відрізку  $[a, b]$  та множини  $E$  та  $E_0$  вибираються таким чином, що точка  $q$  належить множині  $E_0$  при будь-якому  $n$ ,  $q = t_{0j_q}$ . Тоді

$$\left| I(t_{0j}) - S_n(t_{0j}) \right| \leq \theta_q(t_{0j}), \quad j \neq j_q, \quad (1.3.20)$$

де  $\theta_q(t_{0j}) = |q - t_{0j}|^{-1} \theta(t_{0j})$ , а величина  $\theta(t_{0j})$  має такі самі властивості, як і в нерівності (1.3.7). Тому для величини  $\theta_q(t_{0j})$  нерівність (1.3.8) виконується для всіх точок  $t_{0j}$ , що лежать у множині  $[a + \delta, q - \delta] \cup [q + \delta, b - \delta]$ , і виконується нерівність (1.3.9), в якій підсумовування зліва потрібно вести по всіх  $j \neq j_q$ .

Зауваження 1.3.4. Як і в зауваженні 1.2.4, відзначимо, що у застосуваннях [7] часто замість суми  $S_n(t_{0j})$  у (1.3.6) розглядають суму

$$S_n^*(t_{0j}) = \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{t_k - t_{0j}}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (1.3.21)$$

де покладають

$$\Gamma_k = \int_{t_{0k-1}}^{t_k} \varphi(t) dt, \quad k = 1, \dots, n.$$

Для модуля  $|I(t_{0j}) - S_n^*(t_{0j})|$  справедливі ті самі оцінки, що й для модуля  $|I(t_{0j}) - S_n(t_{0j})|$  (див. Теорему 1.3.2).

Проте в нестационарних задачах [1,7] показано, що дискретні вихори розміщуються і на кінцях відрізка. Тому в цих задачах розглядають квадратурні суми вигляду

$$S_n^{**}(t_{0j}) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\Gamma_k}{t_k - t_{0j}}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (1.3.22)$$

де (рис. 2.3.1)

$$\Gamma_0 = \int_a^{t_{00}} \varphi(t) dt, \quad \Gamma_{n+1} = \int_{t_{0n}}^b \varphi(t) dt,$$

$$\Gamma_k = \int_{t_{0k-1}}^{t_k} \varphi(t) dt, \quad k = 1, \dots, n.$$

Для модуля  $|I(t_{0j}) - S_n^{**}(t_{0j})|$ ,  $j = 1, \dots, n$ , виконуються ті самі оцінки при  $\varphi(t) \in H^*$  на  $[a, b]$ .

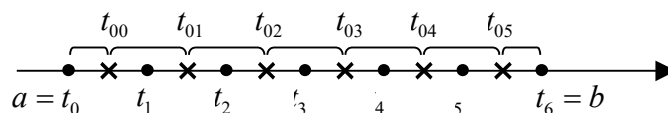


Рис. 1.3.1

Зауваження 1.3.5. До цього часу ми розглядали обчислення сингулярного інтеграла  $I(t_0)$  в тому випадку, коли точка  $t_0$  належить кривій інтегрування. Однак у застосуваннях

доводиться розглядати й випадки, коли точка  $t_0$  не лежить на кривій  $L$ . Наприклад, в аеродинаміці – обчислення поля швидкостей у рідині, у теорії пружності – обчислення поля напружень не в граничних точках, в електродинаміці – обчислення відбитого електромагнітного поля в задачах дифракції і т.д.

Для того, щоб краще зрозуміти особливості вказаного обчислення інтеграла  $I(t_0)$ , розглянемо такий модельний приклад. Нехай  $[a, b]$  – відрізок  $[-1, 1]$  на осі  $OX$ , а  $\gamma(t) \equiv 1$  на  $[-1, 1]$ . В цьому випадку змінну  $t \in [-1, 1]$  будемо позначати  $x$ , а  $t_0 = x_0 + iy_0$ , де  $i$  – уявна одиниця. Тоді вираз для  $I(t_0)$  матиме вигляд

$$\begin{aligned} I(t_0) &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{x - t_0} = \int_{-1}^1 \frac{(x - x_0) + iy_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx + i \int_{-1}^1 \frac{y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx = \operatorname{Re} I(t_0) + i \operatorname{Im} I(t_0), \quad y_0 \neq 0. \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

Нехай точка  $t_0$  лежить на осі  $OY$ . Тоді отримаємо

$$\operatorname{Re} I(t_0) = \int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2 + y_0^2} = \frac{1}{2} \ln |x^2 + y_0^2| \Big|_{-1}^1 = 0 \quad (1.3.24)$$

для будь-якого  $y_0$ , та

$$\operatorname{Im} I(t_0) = \int_{-1}^1 \frac{y_0 dx}{x^2 + y_0^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y_0} \Big|_{-1}^1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{y_0} \quad (1.3.25)$$

для будь-якого  $y_0 \neq 0$ .

З (1.3.25) видно, що

$$\lim_{y_0 \rightarrow O+0} \operatorname{Im} I(t_0) = \pi, \quad \lim_{y_0 \rightarrow O-0} \operatorname{Im} I(t_0) = -\pi. \quad (1.3.26)$$

Візьмемо тепер на  $[-1, 1]$  систему точок  $x_k = -1 + \left(k - \frac{1}{2}h\right)$ ,  $k = 1, \dots, 2m$ ,  $h = 1/m$ , та розглянемо

$$\begin{aligned} S_{2m}(t_0) &= \sum_{k=1}^{2m} \frac{h}{x_k - t_0} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{x_k h}{x_k^2 + y_0^2} + i \sum_{k=1}^{2m} \frac{y_0 h}{x_k^2 + y_0^2} = \\ &= \operatorname{Re} S_{2m}(t_0) + i \operatorname{Im} S_{2m}(t_0). \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

Оскільки точки  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2m$ , розташовані симетрично відносно початку координат, то  $\operatorname{Re} S_{2m}(t_0) = 0$ , тобто дійсна частина інтеграла  $I(t_0)$  точно обчислюється.

Для суми  $\operatorname{Im} S_{2m}(t_0)$  відзначимо, що якщо  $h$  фіксовано (тобто і  $m$  фіксовано), а  $y \rightarrow 0$ , то отримаємо

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \operatorname{Im} S_{2m}(t_0) = 0, \quad (1.3.28)$$

тому що при  $y_0 \rightarrow O+0$  маємо

$$0 \leq \operatorname{Im} S_{2m}(t_0) \leq 2y_0 \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{1-h/2} \right). \quad (1.3.29)$$

Для похибки обчислення  $\operatorname{Im} I(t_0)$  можна отримати таку оцінку:

$$\begin{aligned} 2 \left( \operatorname{arctg} \frac{hy_0}{2(y_0^2 + 1 - h/2)} - \operatorname{arctg} \frac{h}{2y_0} \right) &\leq \operatorname{Im} I(t_0) - \operatorname{Im} S_{2m}(t_0) \leq \\ &\leq 2 \left( \operatorname{arctg} \frac{hy_0}{2(y_0^2 + 1 - h/2)} + \operatorname{arctg} \frac{h}{2y_0} \right). \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

З формули (1.3.30) отримаємо

$$|\operatorname{Im} I(t_0) - \operatorname{Im} S_{2m}(t_0)| \leq 4 \operatorname{arctg} \frac{h}{2y_0}. \quad (1.3.31)$$

Таким чином, при фіксованому кроці дискретизації відрізка інтегрування в  $I(t_0)$  при обчисленні  $\operatorname{Im} S_{2m}(t_0)$  отримаємо тим більшу похибку відносно  $\operatorname{Im} I(t_0)$ , чим ближче точка  $t_0$  до кінця відрізка інтегрування.

#### 1.4. Сингулярний інтеграл по кусково-гладкій кривій

1°. Нехай  $L$  є розімкненою кривою Ляпунова, тобто між точками  $\tau$  кривої  $L$  та точками  $t$  відрізка  $[a, b]$  існує взаємно однозначна відповідність  $\tau = \tau(t)$ , така, що похідна  $\tau'(t) = d\tau/dt$  належить класу  $H(\beta)$  на  $[a, b]$  й не перетворюється в нуль на цьому відрізку. В даному випадку, як було відзначено вище, функція

$$\omega(t, t_0) = \frac{t - t_0}{\tau(t) - \tau(t_0)}$$

належить класу  $H(\beta)$  по обох змінних на  $[a, b]$  і не перетворюється в нуль на цьому відрізку.

Візьмемо на відрізку  $[a, b]$  множини  $E = \{t_k, k = 1, \dots, n\}$  та  $E_0 = \{t_{0k}, k = 0, 1, \dots, n\}$ , що утворюють канонічне розбиття цього відрізка з кроком  $h$ . Тоді будемо говорити, що множини  $\tilde{E} = \{\tau_k = \tau(t_k), k = 1, \dots, n\}$  та  $\tilde{E}_0 = \{\tau_{0k} = \tau(t_{0k}), k = 0, 1, \dots, n\}$  утворюють канонічне розбиття кривої  $L$  з кроком  $h$ . Введемо ще позначення  $\bar{a} = \tau(a)$ ,  $\bar{b} = \tau(b)$  та  $S_n(\tau_{0j}) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\tau_k) \Delta \tau_k}{\tau_k - \tau_{0j}}$ , де  $\Delta \tau_k = \tau(t_{k+1}) - \tau(t_k)$ . Справедлива така теорема.

**Теорема 1.4.1.** *Нехай  $\varphi(t)$  належить класу  $H^*$  на розімкненій кривій Ляпунова  $L$  і множини  $\tilde{E} = \{\tau_k, k = 1, \dots, n\}$  та  $\tilde{E}_0 = \{\tau_{0k}, k = 0, 1, \dots, n\}$  утворюють канонічне розбиття цієї кривої з кроком  $h$ . Тоді виконується нерівність*

$$|I(\tau_{0j}) - S_n(\tau_{0j})| \leq \theta(\tau_{0j}), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (1.4.1)$$

де величина  $\theta(\tau_{0j})$  задовольняє нерівності (1.3.8) і (1.3.9). При цьому величина  $\theta(\tau_{0j})$  визначається формулою (1.3.14), якщо в ній замінити  $\eta(t_{0j}, \nu, \mu)$  на функцію  $\eta(\tau_{0j}, \nu, \mu) = |\tau_{0j} - \bar{a}|^{-\nu} |\bar{b} - \tau_{0j}|^{-\mu}$  і  $\alpha$  – на число  $\lambda = \min(\alpha, \nu\beta, \mu\beta)$ .

Доведення випливає з формули заміни змінної в сингулярному інтегралі та суперпозиції функцій класу  $H$  [1,7].

Якщо  $\nu = 0$  або  $\mu = 0$ , то для величини  $\theta(\tau_{0j})$  у нерівності (1.4.1) потрібно зробити ті самі зміни, які були вказані в зауваженні 1.3.1 для величини  $\theta(t_{0j})$  з нерівності (1.3.14).

При розгляді лише точок  $\tau_{0j}$ , що лежать в околі, скажімо, кінця  $\bar{a}$  кривої  $L$ , нерівність (1.4.1) можна уточнити таким чином:

$$\left| \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - \tau_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\tau_k) \Delta\tau_k}{\tau_k - \tau_{0j}} \right| \leq \left[ \frac{h^\lambda}{|\tau_{0j} - \bar{a}|^\nu} + \frac{h^\nu}{|\tau_{0j} - \bar{a}|^{2\nu}} + \frac{h^{1-\nu}}{|\tau_{0j} - \bar{a}|} + \frac{h}{|\tau_{0j} - \bar{a}|^{1+\nu}} \right] O(|\ln h|). \quad (1.4.2)$$

2°. Нехай тепер крива  $L$  є кусково-ляпуновською кривою, яка має тільки кутові вузли, і складається з  $l$  кривих Ляпунова  $L_1, \dots, L_l$ . На кожному з відрізків  $[a_m, b_m]$ , що відображається на криву  $L_m, m = 1, \dots, l$ , візьмемо канонічне розбиття з кроком  $h_m$ , утворене множинами  $E_m = \{t_k, k = n_{m-1} + 1, \dots, n_m\}$  і  $E_{0m} = \{t_{0j}, j = n_{m-1} + 0, n_{m-1} + 1, \dots, n_m\}$ ,  $n_0 = 0^*$ . Позначимо  $h = \max h_m$  і будемо далі припускати, що  $h/h_m \leq R < +\infty$ . У цьому випадку і величина  $h_p/h_m$  при будь-яких  $m, p = 1, \dots, l$ , є обмеженою при  $h \rightarrow 0$ . Позначимо тепер

$$S(\tau_{0j}) = \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\varphi(\tau_k) \Delta\tau_k}{\tau_k - \tau_{0j}}, \quad j = 0, 1, \dots, n_1, n_1 + 0, \dots, n_2, \dots, n_l, \quad (1.4.3)$$

$$\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k, \quad k = 1, \dots, n_l, \quad k \neq n_1, \dots, n_l.$$

$$\Delta\tau_{n_m} = \bar{b} - \tau_{n_m}, \quad m = 1, \dots, l; \quad \tau_k = \tau_m(t_k),$$

$$k = n_{m-1} + 1, \dots, n_m, \quad \tau_{0j} = \tau_m(t_{0j}), \quad j = n_{m-1} + 0, \dots, n_m,$$

де  $\tau_m(t)$  – відображення відрізка  $[a_m, b_m]$  на криву  $L_m = \bar{a}_m \bar{b}_m$ .

При описаних припущеннях справедлива така теорема.

**Теорема 1.4.2.** *Нехай функція  $\varphi(\tau) \in H^*$  на кривій  $L$ . Тоді*

$$|I(\tau_{0j}) - S(\tau_{0j})| \leq \theta(\tau_{0j}), \quad j = 0, 1, \dots, n_1, n_1 + 0, \dots, n_l, \quad (1.4.4)$$

де величина  $\theta(\tau_{0j})$  задовольняє нерівності:

1) для всіх точок  $\tau_{0j}$ , що належать кривій  $L'$ , яка є частиною  $L$ , і не містить її вузлів разом із деяким їх оточенням,

$$\theta(\tau_{0j}) \leq O(h^{\lambda_1}), \quad 0 < \lambda_1 \leq 1; \quad (1.4.5)$$

---

\* Це означає, що індекс  $j$ , яким нумеруються точки множини  $E_{0m}$  на кривій  $L_m$ , пробігає значення  $0, 1, \dots, n_m - n_{m-1}$ .

2) для всіх точок  $\tau_{0j}$ , що лежать в околі вузла  $\bar{a}$

$$\theta(\tau_{0j}) \leq \left[ \frac{h^{\lambda_2}}{|\tau_{0j} - \bar{a}|^v} + \frac{h^v}{|\tau_{0j} - \bar{a}|^{2v}} + \frac{h^{1-v}}{|\tau_{0j} - \bar{a}|} \right] O(|\ln h|), \quad (1.4.6)$$

якщо функція  $\varphi(\tau)$  має в цьому околі вигляд

$$\varphi(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{|\tau - \bar{a}|^v}, \quad (1.4.7)$$

де  $\psi(\tau) \in H(\beta)$ ,  $0 < v < 1$ .

Якщо  $v = 0$ , то права частина формули (1.4.6) набуває вигляду

$$\left( h^{\lambda_2} + \frac{h}{|\tau_{0j} - \bar{a}|} \right) O(|\ln h|).$$

Нарешті, відзначимо, що з (1.4.5) та (1.4.6) випливає справедливість нерівності

$$\sum_{j=0}^{n_l} \theta(\tau_{0j}) |\Delta\tau_{0j}| \leq O(h^{\lambda_3}), \quad 0 < \lambda_3 \leq 1. \quad (1.4.8)$$

Доведення. Можна записати

$$|I(\tau_{0j}) - S(\tau_{0j})| \leq \sum_{m=1}^l |I_m(\tau_{0j}) - S_m(\tau_{0j})|,$$

де

$$I_m(\tau_{0j}) = \int_{L_m} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - \tau_{0j}}, \quad S_m(\tau_{0j}) = \sum_{k=n_{m-1}+1}^{n_m} \frac{\varphi(\tau_k) \Delta\tau_k}{\tau_k - \tau_{0j}}.$$

Нехай точка  $\tau_{0j} \in L_p \cap L'$ . Тоді до модуля  $|I_m(\tau_{0j}) - S_m(\tau_{0j})|$  при  $m = p$  можна застосувати нерівність (1.4.1), а для  $m \neq p$  можна використати звичайну формулу прямокутників. Звідси випливає справедливість нерівності (1.4.5). Доведемо тепер справедливість нерівності (1.4.6). Нехай  $\bar{a}$  є загальним кінцем гладких кривих  $L_1, \dots, L_{l_1}$ ,  $l_1 \leq l$ . Для точок  $\tau_{0j}$  з околу вузла  $\bar{a}$  можна записати

$$|I(\tau_{0j}) - S(\tau_{0j})| \leq \sum_{m=1}^{l_1} |I_m(\tau_{0j}) - S_m(\tau_{0j})| + O(h^\lambda), \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

Оскільки всі криві  $L_1, \dots, L_{l_1}$  є кривими Ляпунова, то для модуля  $|I_p(\tau_{0j}) - S_p(\tau_{0j})|$  при  $\tau_{0j} \in L_p$ ,  $1 \leq p \leq l_1$ , справедлива нерівність (1.4.2). Отже, тепер треба розглянути  $|I_m(\tau_{0j}) - S_m(\tau_{0j})|$  при  $m = 1, \dots, l_1$ ,  $m \neq p$ . Маємо

$$\begin{aligned} \left| I_m(\tau_{0j}) - S_m(\tau_{0j}) \right| \leq & \left| \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(\tau_{0j})}{\tau - \tau_{0j}} d\tau - \sum_{k=n_{m-1}+1}^{n_m} \frac{\varphi(\tau_k) - \varphi(\tau_{0j})}{\tau_k - \tau_{0j}} \Delta\tau_k \right| + \\ & + \left| \varphi(\tau_{0j}) \left| \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \frac{d\tau}{\tau - \tau_{0j}} - \sum_{k=n_{m-1}+1}^{n_m} \frac{\Delta\tau_k}{\tau_k - \tau_{0j}} \right| \right|, \end{aligned}$$

де через  $\bar{b}$  позначено інший кінець кривої  $L_m$  і мається на увазі, що нумерацію точок  $\tau_k$  на цій кривій можна вибрати так, щоб точка  $\bar{a}$  була початковою на кривій  $L_m$ .

У [1,7] показано, що якщо функція  $\psi(\tau)$  однозначно визначена на  $L$  і належить класу  $H(\mu)$  на кожній із гладких дуг, що сходяться в кінці  $\bar{a}$ , то ця функція належить класу  $H(\mu)$  на  $L$  в усьому околі точки  $\bar{a}$ , якщо вузол  $\bar{a}$  є кутовим для кривої  $L$ . Звідси отримаємо, що функція  $|\bar{a} - \tau|^\nu$ ,  $0 < \nu \leq 1$ , належить класу  $H(\nu)$  на всій кривій, яка розглядається. Враховуючи нерівність (1.1.2), приводимо оцінку для модуля  $|I_m(\tau_{0j}) - S_m(\tau_{0j})|$ ,  $m \neq p$ , до оцінок інтегралів виду

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\nu (t-t_{0j})} \quad (1.4.9)$$

при  $t_{0j} < a < b$ . Після того як оцінимо ці інтеграли, повернення до змінної  $\tau$  зробимо за цією ж нерівністю (1.1.2).

У [7] показано, що для функції

$$K(x, a) = \frac{(b-x)^{1-\mu}}{\pi} \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^{1-\mu} (t-a)^\mu (t-x)} \quad (1.4.10)$$

при  $x < a$  та  $0 < \mu < 1$  справедливе зображення

$$K(x, a) = \frac{1}{(a-x)^\mu \sin \mu\pi}, \quad (1.4.11)$$

звідки

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\nu (t-t_{0j})} \leq O\left(\frac{1}{|t_{0j} - a|^\nu}\right) \quad (1.4.12)$$

при  $t_{0j} < a$ ,  $0 < \nu < 1$  та

$$\int_{a+h}^b \frac{dt}{(t-a)^{2\nu} (t-t_{0j})} \leq \begin{cases} O\left(\frac{|\ln h|}{a-t_{0j}}\right), & 2\nu = 1, \\ O\left(\frac{h^{1-2\nu}}{a-t_{0j}}\right), & 1 < 2\nu < 2. \end{cases} \quad (1.4.13)$$

Нерівності (1.4.12), (1.4.13), а також міркування, які були проведені під час доведення нерівності (1.3.7), показують справедливість нерівності (1.4.4).

Зауважимо, що для функції  $\varphi(\tau)$ , яка належить класу  $H^*$  на  $L$ , тобто функції виду

$$\varphi(\tau) = \psi(\tau) / P_L^v(\tau)$$

(див. (1.1.5)), завжди можна вважати, що  $\psi(\tau)$  перетворюється в нуль у вузлах кривої  $L$  і належить класу  $H$  в околі вузлів.

Відзначимо також, що всі доповнення, сформульовані після доведення теореми 1.3.2 відносно вибору сіток  $E$  та  $E_0$  і функції  $\varphi(t, \tau)$ , яка залежить від параметра (див. (1.3.16)), звичайним чином узагальнюються на випадок, що розглядається.

Виділимо тепер два окремих випадки теореми 1.4.2, які будуть потрібними в подальшому.

**Теорема 1.4.3.** *Нехай крива  $L$  є об'єднанням відрізків  $[a, q]$  та  $[q, b]$ , а  $\varphi(t)$  належить класу  $H^*$  на  $L$  ( $a < q < b$ ). Множини  $E = \{t_k, k = 1, \dots, n\}$  та  $E_0 = \{t_{0k}, k = 0, 1, \dots, n\}$ , що утворюють розбиття відрізка  $[a, b]$  з кроком  $h$ , виберемо так, щоб точка  $q$  лежала посередині між найближчими до неї точками з множин  $E$  та  $E_0$ . Тоді*

$$\left| \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{t - t_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) h}{t_k - t_{0j}} \right| \leq \theta(t_{0j}), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

де величина  $\theta(t_{0j})$  задовольняє нерівності:

$$1) \theta(t_{0j}) \leq O_\delta(h^{\lambda_1}), \quad 0 < \lambda_1 \leq 1, \text{ для всіх точок } t_{0j} \in [a + \delta, q - \delta] \cup [q + \delta, b - \delta];$$

$$2) \sum_{j=0}^n \theta(t_{0j}) h \leq O(h^{\lambda_2}), \quad 0 < \lambda_2 \leq 1.$$

**Теорема 1.4.4.** *Нехай  $L$  є або об'єднанням відрізків  $[a_m, b_m]$ ,  $m = 1, \dots, l$ , що не перетинаються, або об'єднанням відрізків  $[a_m, q_m]$ ,  $[q_m, b_m]$ ,  $q_m \in (a_m, b_m)$ ,  $m = 1, \dots, l$ . Якщо виконується перша можливість, то множини  $E_m = \{t_k, k = n_{m-1} + 1, \dots, n_m\}$  та  $E_{0m} = \{t_{0k}, k = n_{m-1} + 0, \dots, n_m\}$  утворюють канонічне розбиття відрізка  $[a_m, b_m]$  з кроком  $h_m$ ,  $m = 1, \dots, l$ ,  $n_0 = 0$ ; якщо ж виконується друга можливість, то ці множини вибираються таким чином, щоб  $q_m \in E_{0m}$ . Тоді*

$$\left| \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{t - t_{0j}} - \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\varphi(t_k) h}{t_k - t_{0j}} \right| \leq \theta(t_{0j}), \quad j = 0, 1, \dots, n_l, n_l + 0, \dots, n_l,$$

де  $\Delta t_k = h_m$ ,  $k = n_{m-1} + 1, \dots, n_m$ ,  $m = 1, \dots, l$ , та величина  $\theta(t_{0j})$  задовольняє нерівностям:

$$1) \theta(t_{0j}) \leq O(h^{\lambda_1}), \quad 0 < \lambda_1 \leq 1 \text{ для всіх } t_{0j} \in \bigcup_{m=1}^l [a_m + \delta, b_m - \delta], \text{ якщо виконується перша}$$

можливість для  $L$ , та  $t_{0j} \in \bigcup_{m=1}^l ([a_m + \delta, q_m - \delta] \cup [q_m + \delta, b_m - \delta])$ , якщо виконується друга можливість;

$$2) \sum_{j=0}^{n_l} \theta(t_{0j}) |\Delta t_{0j}| \leq O(h^{\lambda_2}), \quad 0 < \lambda_2 \leq 1, \text{ де } h = \max_{m=1, \dots, l} h_m, \quad \Delta t_{0j} = h_m, \quad j = n_{m-1} + 0, \dots, n_m, \text{ та}$$

припускаємо, що  $h/h_m \leq R < +\infty$ .

З а у в а ж е н н я 1.4.1. Як і в зауваженнях 1.2.4 та 1.3.4 доцільно відзначити, що в багатьох задачах аеродинаміки для кривих з кутами [1,5,7,10], тобто для кусково-ляпуновської кривої краще буває замість суми (1.4.3) брати суму

$$S^*(t_{0j}) = \sum_{k=0}^{n_l} \frac{\Gamma_k}{\tau_k - \tau_{0j}}, \quad j = 0, 1, \dots, n_1, n_1 + 0, n_1 + 1, \dots, n_2, \dots, n_l, \quad (1.4.14)$$

де підсумовування ведеться по всіх точках  $\tau_k$  – як тих, що не лежать у вузлах кривої, так і тих, що лежать. При цьому, якщо  $\tau_k$  лежить на гладкій частині, то

$$\Gamma_k = \int_{\tau_{0k-1}}^{\tau_{0k}} \varphi(\tau) d\tau, \quad (1.4.15)$$

а якщо  $\tau_k$  є вузлом кривої, то інтегрування в  $\Gamma_k$  йде по всіх дугах, які з'єднують точку  $\tau_k$  з найближчими до неї розрахунковими точками (рис. 1.4.1).

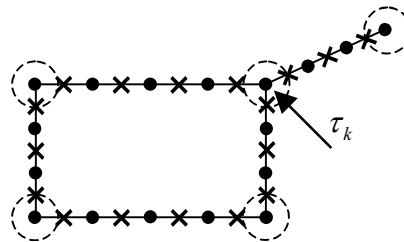


Рис. 1.4.1

## Розділ 2. Одновимірні гіперсингулярні інтеграли та їх дискретизація.

### 2.1. Задача Неймана для рівняння Лапласа в плоскому випадку.

Нехай  $D^{(-)}$  – обмежена відкрита область у  $R^2$ , межу якої позначимо  $L$  (рис. 2.1.1). Припустимо, що  $L$  – проста замкнута крива, яка належить класу  $C^2$ , тобто функції  $x(t)$  та  $y(t)$ , які дають параметричне представлення цієї кривої, мають неперервні другі похідні та  $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$  для всіх точок кривої. Зовнішню до  $L$  область позначимо  $D^{(+)}$ .

Сформулюємо задачу Неймана для рівняння Лапласа стосовно зовнішньої області  $D^{(+)}$ .

Зовнішня задача Неймана. Потрібно знайти функцію  $\Phi(M) \in C^2(D^{(+)}) \cap C(\bar{D}^{(+)})$ , що має на межі  $L$  нормальну похідну (у розумінні рівномірної збіжності), яка задовольняє:

1) рівняння Лапласа в  $D^{(+)}$

$$\Delta\Phi(M) \equiv \frac{\partial^2\Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad M(x, y) \in D^{(+)}$$

;

(2.1.1)

2) крайову умову на кривій  $L$

$$\left. \frac{\partial\Phi(M_0)}{\partial \bar{n}_{M_0}} \right|_L = f(M_0), \quad M_0 \in L,$$
(2.1.2)

де  $f$  – задана функція;  $\bar{n}_{M_0}$  – орт зовнішньої нормалі до кривої  $L$  у точці  $M_0$ ,  $C^2(D^+)$  – множина функцій на  $D^+$ , всі другі частинні похідні яких неперервні на  $D^+$ ,  $C(\bar{D}^{(+)})$  – функції, неперервні на  $\bar{D}^{(+)}$ ;

3) умову на нескінченності

$$|\Phi(M)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty.$$
(2.1.3)

Як показано в [1,5,7,10], необхідною умовою розв'язності задачі Неймана є виконання рівності

$$\int_L f(M) dl_M = 0.$$
(2.1.4)

Зазвичай при зведенні цих задач до інтегральних рівнянь використовують потенціал простого шару, щоб отримати інтегральне рівняння Фредгольма другого роду. У праці [12] показано, що ці задачі можна звести до інтегральних рівнянь першого роду, але робиться зауваження, що ці рівняння, як правило, не використовуються в силу своєї некоректності. Однак у зв'язку з розвитком чисельних методів розв'язання вказаних рівнянь (метод дискретних особливостей) будемо розглядати відповідні інтегральні рівняння першого роду та в наступних розділах дамо стійкі методи їх чисельного розв'язання стосовно деяких класів кривих.

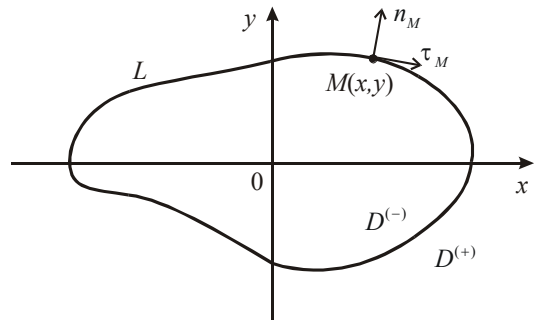


Рис. 2.1.1

Отже, будемо шукати розв'язок задачі Неймана у вигляді потенціалу подвійного шару

$$W(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left( \ln \frac{1}{R_{MM_0}} \right) g(M) dl_M, \quad M_0 \notin L, \quad (2.1.5)$$

де  $M(x, y) \in L$  – точка інтегрування на кривій  $L$ ;  $\bar{n}_M$  – орт зовнішньої нормалі до  $L$  в точці  $M$ ;  $r_{MM_0} = |\bar{r}_{MM_0}| = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}$  – відстань між точками  $M$  та  $M_0$ ;  $g(M)$  – невідома функція, яка називається щільністю потенціалу подвійного шару і підлягає визначенню.

Відомо [12], що потенціал подвійного шару задовольняє рівняння Лапласа всюди, крім кривої  $L$ , тому функція  $W(M_0)$  буде розв'язком задачі Неймана (зовнішньої або внутрішньої), якщо щільність  $g(M)$  буде розв'язком такого інтегрального рівняння:

$$W(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left( \ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) g(M) dl_M, \quad M_0 \in L, \quad (2.1.6)$$

яке отримується підстановкою функції  $W(M_0)$  у крайову умову (2.1.2). При написанні рівняння (2.1.6) також враховувався факт неперервності похідної по нормалі потенціалу подвійного шару на межі [9,12].

Необхідно відзначити, що розв'язок інтегрального рівняння (2.1.6) існує з точністю до константи [12]. Тому в прикладних задачах для виділення єдиного розв'язку звичайно використовується додаткова інформація про функцію, яку шукають. Це може бути або інтегральна характеристика (значення інтеграла на кривій  $L$ ), або конкретне значення шуканої функції в деякій точці. Дані значення можна отримати шляхом теоретичних міркувань, відштовхуючись від фізичної сутності початкової задачі, або в результаті проведення експериментальних досліджень.

Тепер залежно від задачі, що розв'язується, рівняння (2.1.6) зручніше буде записати в одному з таких двох видів.

Наприклад, у плоских стаціонарних задачах аеродинаміки достатньо знати похідну по довжині дуги від щільності потенціалу подвійного шару (інтенсивність вихрового шару), і тому рівняння (2.1.6) запишемо у вигляді

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\bar{\tau}_M, \bar{n}_{M_0})(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M) - (\bar{n}_M, \bar{n}_{M_0})(\bar{r}_{MM_0}, \bar{\tau}_M)}{r_{MM_0}^2} g'(M) dl_M = f(M_0), \quad M_0 \in L, \quad (2.1.7)$$

де  $\bar{\tau}_M$  – орт дотичного вектора до кривої  $L$  у точці  $M$ .

При бажанні отримати в плоских задачах аеродинаміки чисельні методи, що аналогічні чисельним методам у просторових задачах, зручніше записати рівняння (2.1.6) відносно  $g(M)$ . Для цього скористаємося твердженням про неперервність нормальної похідної потенціалу подвійного шару [3,9,12] та внесемо в рівняння (2.1.6) знак нормальної похідної під знак інтеграла. Отримаємо

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{R_{MM_0}^2 (\bar{n}_M, \bar{n}_{M_0}) - 2(\bar{R}_{MM_0}, \bar{n}_{M_0})(\bar{R}_{MM_0}, \bar{n}_M)}{R_{MM_0}^4} g(M) dl_M = f(M_0), \quad M_0 \in L. \quad (2.1.8)$$

Інтеграл у лівій частині (2.1.8) має сильну особливість у точці  $M_0$  і називається гіперсингулярним інтегралом. Різні визначення гіперсингулярних інтегралів на площині та в просторі наведені в працях [1,3,4,7,9,10,11,12].

З а у в а ж е н н я 2.1.1. Нехай  $L$  – гладка розімкнута крива (рис. 2.1.2). У цьому випадку вся площина  $OXY$ , за винятком кривої  $L$ , є зовнішньою областю  $D^{(+)}$  до кривої  $L$ . Тоді можна сформулювати таку крайову задачу Неймана: знайти функцію  $\Phi(M) \in C^2(D^{(+)}) \cap C(\overline{D^{(+)}})$ , яка гармонічна поза  $L$  і зникає на нескінченності, має рівномірно неперервні граничні значення  $\Phi^+(M_0)$  й  $\Phi^-(M_0)$  у точках кривої  $L$  і задовольняє умову на ребрі [1,7] та крайову умову (2.1.2) на  $L$ . Мається на увазі, що в точках  $M_0$  кривої  $L$  обрано орт  $\bar{n}_{M_0}$  нормалі, який неперервно змінюється при русі точки  $M_0$  по кривій. Якщо шукати розв’язок сформульованої задачі у вигляді потенціалу подвійного шару, то знов прийдемо до рівняння (2.1.6) (відповідно, до рівнянь (2.1.7)–(2.1.8)).

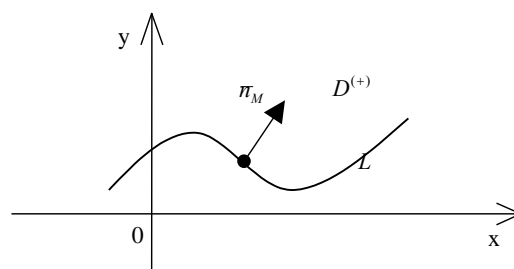


Рис. 2.1.2

Далі будемо розглядати тільки останню форму запису рівняння (2.1.8). Зокрема, дамо відповіді на такі питання: як необхідно розуміти інтеграл, що стоїть у лівій частині рівняння (2.1.8), залежно від вибору кривої  $L$ ; якими є властивості даного інтеграла; які чисельні методи можна запропонувати для його наближеного обчислення.

## 2.2. Гіперсингулярний інтеграл на відрізку

Нехай  $L$  – відрізок  $[a, b]$  осі  $OX$  площини  $OXY$  (рис. 2.2.1) [1,5,7].

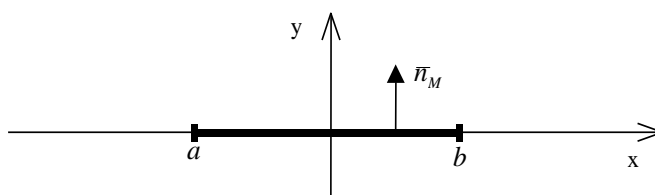


Рис. 2.2.1

У цьому випадку  $\bar{r}_{MM_0} = (x_0 - x)\bar{i}$ ,  $\bar{n}_M = \bar{n}_{M_0} = \bar{j}$ ,  $dl = dx$ , і рівняння (2.1.8) запишеться у вигляді

$$\int_a^b \frac{g(x)dx}{(x_0 - x)^2} = f(x_0), \quad x_0 \in (a, b). \quad (2.2.1)$$

Розглянемо спочатку такий інтеграл:

$$I(x_0) = \int_a^b \frac{dx}{(x_0 - x)^2}, \quad x_0 \in (a, b). \quad (2.2.2)$$

Якщо визначити його за аналогією з інтегралом Коші, то отримаємо (при  $\varepsilon > 0$ )

$$I(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{x_0 - \varepsilon} \frac{dx}{(x_0 - x)^2} + \int_{x_0 + \varepsilon}^b \frac{dx}{(x_0 - x)^2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x_0 - x} \Big|_a^{x_0 - \varepsilon} + \frac{1}{x_0 - x} \Big|_{x_0 + \varepsilon}^b \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{x_0 - a} + \frac{1}{x_0 - b} + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{x_0 - b} - \frac{1}{x_0 - a} \right). \tag{2.2.3}
\end{aligned}$$

З формули (2.2.3) видно, що при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ця границя не існує і дорівнює  $+\infty$ .

Тому, виконуючи ідею Адамара [1,7] про поняття інтеграла в розумінні скінченної частини, визначимо інтеграл (2.2.2) таким чином:

$$I(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{[a,b] \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{dx}{(x_0 - x)^2} - \frac{2}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{x_0 - b} - \frac{1}{x_0 - a}, \tag{2.2.4}$$

де позначено  $[a,b] \setminus O(x_0, \varepsilon) = [a, x_0 - \varepsilon] \cup [x_0 + \varepsilon, b]$ ,  $O(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ .

Визначення 2.2.1. Інтеграл  $I(x_0)$  у формулі (2.2.2) визначимо за формулою (2.2.4) і будемо називати його гіперсингулярним інтегралом на відріжку.

Розглянемо тепер інтеграл

$$I(x_0) = \int_a^b \frac{g(x)dx}{(x_0 - x)^2}, \quad x_0 \in (a, b), \tag{2.2.5}$$

де функція  $g(x)$  визначена на  $[a, b]$ .

Визначення 2.2.2. Інтеграл (2.2.5) будемо розуміти як рівність

$$I(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{[a,b] \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{g(x)dx}{(x_0 - x)^2} - \frac{2g(x_0)}{\varepsilon} \right) \tag{2.2.6}$$

і називати гіперсингулярним інтегралом на відріжку.

Доведемо кілька простих теорем.

**Теорема 2.2.1** [1,5,7]. Інтеграл (2.2.6) існує для будь-якої функції  $g(x) \in H_1(\alpha)$  на відріжку  $[a, b]$ , тобто  $g'(x) \in H(\alpha)$  – класу Гьольдера степеня  $\alpha$  на  $[a, b]$ .

**Доведення.** Зробимо перетворення формули (2.2.6) таким чином:

$$\begin{aligned}
I(x_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{[a,b] \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)dx}{(x - x_0)^2} + \right. \\
&+ g(x_0) \int_{[a,b] \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{dx}{(x - x_0)^2} - g'(x_0) \int_{[a,b] \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{dx}{x_0 - x} - \left. \frac{2g(x_0)}{\varepsilon} \right] = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{[a,b] \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)dx}{(x - x_0)^2} \right] + \\
&+ g(x_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{[a,b] \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{dx}{(x - x_0)^2} - \frac{2}{\varepsilon} \right] - g'(x_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{[a,b] \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{dx}{x_0 - x} \right\} =
\end{aligned}$$

$$= I_1(x_0) + g(x_0)I_2(x_0) - g'(x_0)I_3(x_0). \quad (2.2.7)$$

У формулі (2.2.7) інтеграл  $I_1(x_0)$  існує як невласний інтеграл, оскільки  $g'(x) \in H(\alpha)$ , і тому

$$|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)| \leq A|x - x_0|^{1+\alpha}. \quad (2.2.8)$$

Інтеграл  $I_2(x_0)$  існує в розумінні визначення 2.2.1, а інтеграл  $I_3(x_0)$  існує у сенсі головного значення за Коші [1,7]. Теорема 2.2.1 доведена.

**Теорема 2.2.2.** *Нехай функція  $g(x) \in H_1(\alpha)$  на відрізку  $[a, b]$ . Тоді для інтеграла (2.2.5) справедлива така формула інтегрування за частинами:*

$$\int_a^b \frac{g(x)dx}{(x-x_0)^2} = \frac{g(b)}{x_0-b} - \frac{g(a)}{x_0-a} - \int_a^b \frac{g'(x)dx}{x_0-x}. \quad (2.2.9)$$

**Доведення.** Виконуючи у формулі (2.2.6) інтегрування за частинами, отримаємо

$$\begin{aligned} I(x_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{g(x)}{x_0-x} \Big|_a^{x_0-\varepsilon} + \frac{g(x)}{x_0-x} \Big|_{x_0+\varepsilon}^b - \int_{[a,b] \setminus O(x_0,\varepsilon)} \frac{g'(x)dx}{x_0-x} - \frac{2g(x_0)}{\varepsilon} \right) = \\ &= \frac{g(b)}{x_0-b} - \frac{g(a)}{x_0-a} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{g(x_0-\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{g(x_0+\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{2g(x_0)}{\varepsilon} \right) - \\ &- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{[a,b] \setminus O(x_0,\varepsilon)} \frac{g'(x)dx}{x_0-x} \right) = \frac{g(b)}{x_0-b} - \frac{g(a)}{x_0-a} + I_4(x_0) - I_5(x_0). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Інтеграл  $I_5(x_0)$  існує в розумінні головного значення за Коші. З того, що  $g(x) \in H_1(\alpha)$ , то

$$\begin{aligned} &|g(x_0+\varepsilon) + g(x_0-\varepsilon) - 2g(x_0)| = \\ &= \left| [g(x_0+\varepsilon) - g(x_0)] - [g(x_0) - g(x_0-\varepsilon)] \right| \leq 2A\varepsilon^{1+\alpha} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

і тому границя  $I_4(x_0)$  дорівнює нулю для будь-якого  $x_0 \in (a, b)$ . Теорема 2.2.2 доведена.

**Зауваження 2.2.1.** Якщо  $g(a) = g(b) = 0$  та  $g(x) \in H_1(\alpha)$  на  $[a, b]$ , то формула (2.2.9) набуває вигляду

$$\int_a^b \frac{g(x)dx}{(x-x_0)^2} = - \int_a^b \frac{g'(x)dx}{x_0-x}, \quad x_0 \in (a, b). \quad (2.2.12)$$

**Зауваження 2.2.2.** Формула (2.2.12) справедлива і в тому випадку, коли  $g(a) = g(b) = 0$ , а  $g(x) \in H_1^*(\alpha)$  на  $[a, b]$ , тобто похідна  $g'(x) \in H^*(\alpha)$  на  $[a, b]$ , що означає [1,7]:

$$g'(x) = \frac{\psi(x)}{(x-a)^\nu (b-x)^\mu}, \quad (2.2.13)$$

де  $\psi(x) \in H$  на  $[a, b]$ , тобто є функцією Гьольдера на  $[a, b]$  деякого степеня, а  $\nu, \mu < 1$ .

Якщо функція  $g(x)$  задовольняє вимоги, які вказані в зауваженні 2.2.2, то будемо говорити, що  $g(x) \in H_1^{(0,0)*}$  на  $[a, b]$ .

Розглянемо тепер для гіперсингулярного інтеграла (2.2.5) на  $[a, b]$  таку квадратурну суму. Візьмемо на  $[a, b]$  точки  $x_k = a + (k-1)h$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n+1$ , які розбивають відрізок  $[a, b]$  на  $n$  штук однакових відрізків  $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = 1, \dots, n$ , і точки  $x_{0k} = x_k + \frac{h}{2}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Будемо говорити, що множини  $E = \{x_k, k = 1, \dots, n+1\}$  і  $E_0 = \{x_{0k}, k = 1, \dots, n\}$  утворюють канонічне розбиття відрізка  $[a, b]$  (рис. 2.2.2).

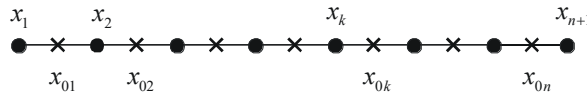


Рис. 2.2.2

Замінімо тепер інтеграл (2.2.5) у точці  $x_{0j} \in E_0$  такою сумою:

$$S_n(x_{0j}) = \sum_{k=1}^n g(x_{0k}) \int_{I_k} \frac{dx}{(x_{0j} - x)^2} = \sum_{k=1}^n g(x_{0k}) \left( \frac{1}{x_{0j} - x_{k+1}} - \frac{1}{x_{0j} - x_k} \right). \quad (2.2.14)$$

Справедлива така теорема.

**Теорема 2.2.3.** Нехай функція  $g(x) \in H_1^*(\alpha)$  на  $[a, b]$ . Нехай множини точок  $E$  і  $E_0$  утворюють канонічне розбиття цього відрізка. Тоді справедлива нерівність

$$I_n(x_{0j}) = |I(x_{0j}) - S_n(x_{0j})| = \left| \int_a^b \frac{g(x)dx}{(x_{0j} - x)^2} - \sum_{k=1}^n g(x_{0k}) \left( \frac{1}{x_{0j} - x_{k+1}} - \frac{1}{x_{0j} - x_k} \right) \right| \leq \Theta(x_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.2.15)$$

де величина  $\Theta(x_{0j})$  задовольняє нерівності:

а) для всіх точок  $x_{0j} \in [a + \delta, b - \delta]$

$$\Theta(x_{0j}) \leq C_\delta h^{\lambda_1}, \quad 0 < \lambda_1 < 1, \quad (2.2.16)$$

де  $\delta > 0$  – як завгодно мале число;

б) для всіх точок  $x_{0j} \in [a, b]$

$$\sum_{j=1}^n \Theta(x_{0j}) h \leq Ch^{\lambda_2}, \quad 0 < \lambda_2 < 1, \quad (2.2.17)$$

де  $C_\delta, C$  – деякі константи, що не залежать від  $n$ .

Доведення. Інтеграл  $I(x_{0j})$  представимо формулою (2.2.9), а суму  $S_n(x_{0j})$  запишемо у вигляді

$$S_n(x_{0j}) = -\frac{g(x_{01})}{x_{0j}-a} - \sum_{k=2}^n \frac{g(x_{0k}) - g(x_{0k-1})}{h} \frac{h}{x_{0j}-x_k} + \frac{g(x_{0n})}{x_{0j}-b}. \quad (2.2.18)$$

Тоді для  $I_n(x_{0j})$  можна записати

$$\begin{aligned} I_n(x_{0j}) &\leq \left| \frac{g(b) - g(x_{0n})}{x_{0j} - b} \right| + \left| \frac{g(x_{01}) - g(a)}{x_{0j} - b} \right| + \\ &+ \left| \int_a^b \frac{g'(x) dx}{x_{0j} - x} - \sum_{k=2}^n \frac{g(x_{0k}) - g(x_{0k-1})}{h} \frac{h}{x_{0j} - x_k} \right| = \\ &= I_{1,n}(x_{0j}) + I_{2,n}(x_{0j}) + I_{3,n}(x_{0j}). \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Звідси безпосередньо видно, що  $I_{1,n}(x_{0j}) \leq \Theta_1(x_{0j})$ ,  $I_{2,n}(x_{0j}) \leq \Theta_2(x_{0j})$ , а з результатів [1,5,7] випливає, що  $I_{3,n}(x_{0j}) \leq \Theta_3(x_{0j})$ , де кожна з величин  $\Theta_p(x_{0j})$ ,  $p=1,2,3$ , задовольняє нерівності (2.2.16) і (2.2.17). Отже, сума величин  $\Theta_p(x_{0j})$ ,  $p=1,2,3$ , також задовольняє ці нерівності. Теорема 2.2.3 доведена.

Зауваження 2.2.3. Квадратурна сума  $S_n(x_{0j})$  збігається до значення інтеграла  $I(x_{0j})$  таким чином. Ця збіжність рівномірна по точках  $x_{0j}$  поза фіксованих околів кінців відрізка  $[a,b]$ , при підході точки  $x_{0j}$  до одного з кінців ця похибка губиться і може прямувати до  $\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , але в цілому є інтегральна збіжність, тобто виконується нерівність (2.2.17).

Наведемо деякі приклади чисельних розрахунків з обчислення гіперсингулярного інтеграла (2.2.5). Для цього покажемо, що для інтеграла (2.2.5) виконується таке спектральне співвідношення.

Теорема 2.2.4. [1,7,12]. *Справедливе таке спектральне співвідношення:*

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} U_n(x) dx}{(x-x_0)^2} = -\pi(n+1) U_n(x_0), \quad x \in (-1,1), \quad (2.2.20)$$

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sin(\arccos x)}, \quad (2.2.21)$$

де  $U_n(x)$  – поліном Чебишова другого роду.

Доведення. Використовуючи представлення  $U_n(x)$  і рівність  $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ , запишемо

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} U_n(x) dx}{(x-x_0)^2} = \int_{-1}^1 \frac{\sin((n+1) \arccos x) dx}{(x-x_0)^2}. \quad (2.2.22)$$

Тепер згідно з формулою інтегрування за частинами (2.2.9), оскільки  $\sin((n+1)\arccos(1)) = \sin((n+1)\arccos(-1)) = 0$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\sin((n+1)\arccos x) dx}{(x-x_0)^2} &= (n+1) \int_{-1}^1 \frac{\cos((n+1)\arccos x) dx}{\sqrt{1-x^2}(x-x_0)} = \\ &= (n+1) \int_{-1}^1 \frac{T_{n+1}(x) dx}{\sqrt{1-x^2}(x-x_0)} = -\pi(n+1)U_n(x_0), \quad x_0 \in (-1,1). \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Остання рівність справедлива в силу відповідного спектрального співвідношення для сингулярного інтеграла на відрізку [1,5,7]. Теорема 2.2.4 доведена.

Відзначимо, що співвідношення (2.2.20) доводиться іншим методом також у [7,12].

Будемо використовувати співвідношення (2.2.20) для порівняння чисельних результатів з точними значеннями. Методика проведення обчислень така. Задамо індекс полінома Чебишова. Беремо канонічне розбиття відрізка  $[-1,1]$  на  $N$  частин (див. рис. 2.2.2). Позначимо точне значення інтеграла  $I(x_0)$ , наближене значення  $S_N(x_0)$ , а  $\Theta(x_0) = |I(x_0) - S_N(x_0)|$  – похибка обчислення. Для нас цікаво розглянути характер поведінки максимуму похибки  $\max_k \Theta(x_{0k})$  та інтегральної похибки

$\sum_{k=1}^N \Theta(x_{0k})h$ . Також цікаво розглянути динаміку зміни похибки обчислення залежно від числа розбиття  $N$ .

На рис. 2.2.3, 2.2.4 наведені результати чисельних розрахунків для квадратурних сум при  $n = 2$  в (2.2.20).

Як показали розрахунки, поточкова похибка обчислення інтеграла рівномірно прямує до нуля поза околиць кінців відрізка та має місце інтегральна збіжність похибки по всіх розрахункових точках.

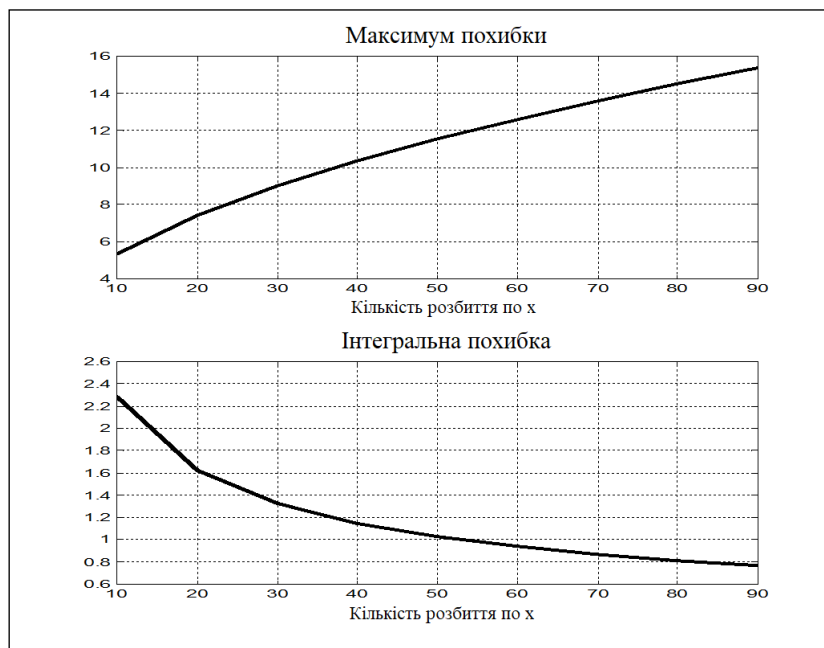


Рис. 2.2.3

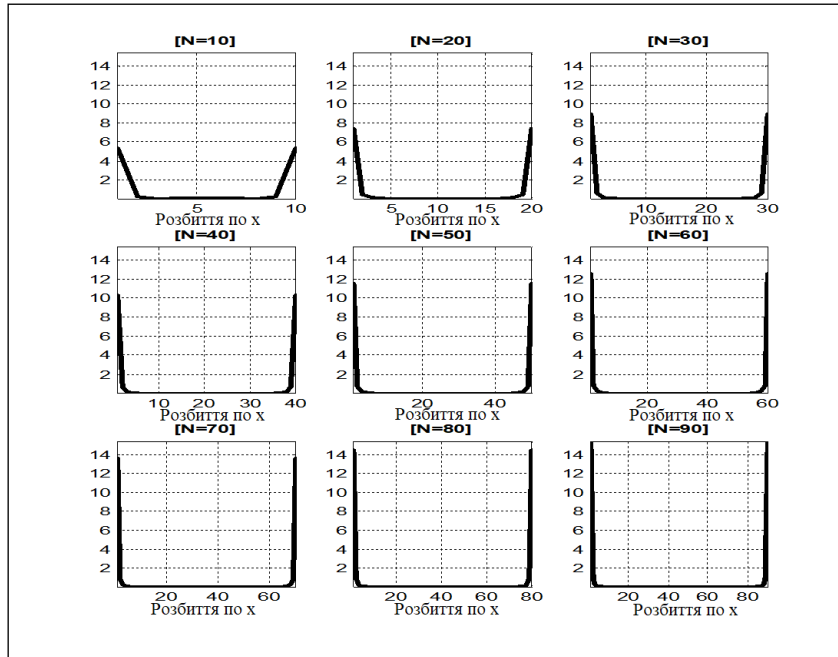


Рис. 2.2.4

### 2.3. Гіперсингулярний інтеграл від періодичних функцій

Нехай  $L$  – коло радіуса  $R$  з центром у початку координат (рис. 2.3.1). У цьому випадку  $x = R \cos \theta$ ,  $y = R \sin \theta$ ,  $n_M = \cos \theta + i \sin \theta$ ,  $dl = R d\theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , і рівняння (2.1.8) набуває вигляду

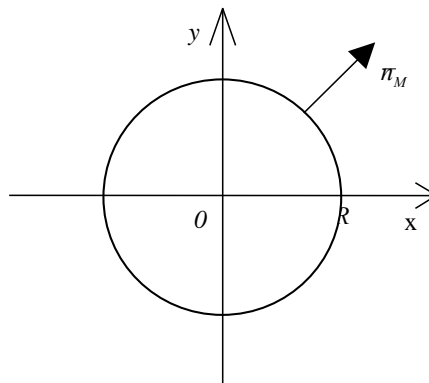


Рис. 2.3.1

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} = f(\theta_0), \quad \theta_0 \in [0, 2\pi], \quad (2.3.1)$$

де щільність  $g(\theta)$  –  $2\pi$ -періодична функція.

Розглянемо інтеграл у лівій частині виразу (2.3.1)

$$I_{\Gamma}(\theta_0) = \int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}}, \theta_0 \in [0, 2\pi]. \quad (2.3.2)$$

Будемо називати його гіперсингулярним інтегралом типу Гільберта або, якщо треба підкреслити геометричну сутність цього інтеграла, гіперсингулярним інтегралом на колі.

Як і для гіперсингулярного інтеграла на відрізку, розглянемо спочатку випадок  $g(\theta) \equiv 1$  на  $[0, 2\pi]$ . Тоді у відповідності з формулами (2.2.3) та (2.2.4) дамо таке визначення.

Визначення 2.3.1. Інтеграл  $I_{\Gamma}(\theta_0)$  при  $g(\theta) \equiv 1$  на  $[0, 2\pi]$  будемо розуміти так:

$$\begin{aligned} I_{\Gamma}(\theta_0) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{[0, 2\pi] \setminus O(\theta_0, \varepsilon)} \frac{d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} - 4 \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ 2 \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} - 2 \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} + 2 \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - 2\pi}{2} + 2 \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} - 4 \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} \right] = \\ &= 2 \operatorname{ctg} \left( \frac{\theta_0}{2} - \pi \right) - 2 \operatorname{ctg} \left( \frac{\theta_0}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Тепер для інтеграла (2.3.2), за визначенням, покладемо

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{[0, 2\pi] \setminus O(\theta_0, \varepsilon)} \frac{g(\theta)d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} - 4g(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} \right]. \quad (2.3.4)$$

Аналогічно теоремам 2.2.1 та 2.2.2 доводяться такі теореми.

Теорема 2.3.1. Інтеграл (2.3.4) існує для будь-якої періодичної функції  $g(\theta)$ , що належить класу  $H_1(\alpha)$  на  $[0, 2\pi]$ .

Теорема 2.3.2. Нехай функція  $g(\theta)$  –  $2\pi$ -періодична і належить класу  $H_1(\alpha)$  на  $[0, 2\pi]$ . Тоді для інтеграла (2.3.2) є справедливою така формула інтегрування за частинами:

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} = -2 \int_0^{2\pi} g'(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} d\theta. \quad (2.3.5)$$

Розглянемо тепер квадратурні формули для інтеграла (2.3.2). За аналогією з квадратурною формулою для гіперсингулярного інтеграла на відрізку зробимо таке. Нехай множини  $E = \{\theta_k, k=1, \dots, n+1\}$  та  $E_0 = \{\theta_{0k}, k=1, \dots, n\}$  утворюють канонічне розбиття відрізка  $[0, 2\pi]$  (рис. 2.3.2).

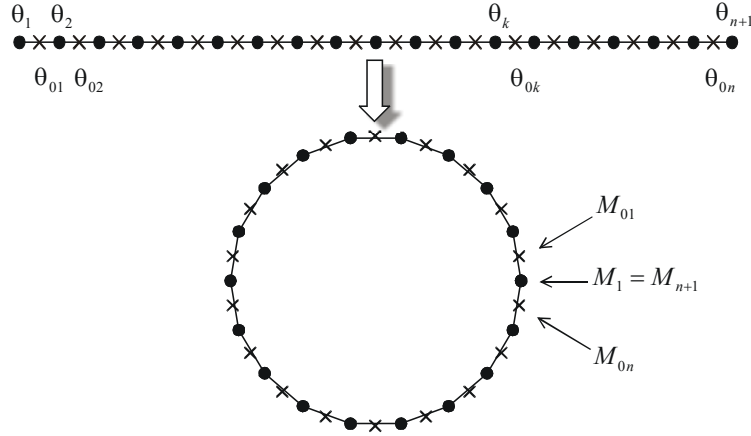


Рис. 2.3.2

Тоді замінимо інтеграл (2.3.2) у точці  $\theta_{0j} \in E_0$  сумою

$$\begin{aligned}
 S_{\Gamma,n}(\theta_{0j}) &= \sum_{k=1}^n g(\theta_{0k}) \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_{0j} - \theta}{2}} = \\
 &= 2 \sum_{k=1}^n g(\theta_{0k}) \left[ \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_{k+1}}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} \right], \quad j=1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Теорема 2.3.3. Нехай функція  $g(\theta)$  –  $2\pi$ -періодична та належить класу  $H_1(\alpha)$  на  $[0, 2\pi]$ . Нехай множини точок  $E$  та  $E_0$  утворюють канонічне розбиття цього відрізка. Тоді справедлива нерівність

$$\begin{aligned}
 I_{\Gamma,n}(\theta_{0j}) &= |I_{\Gamma}(\theta_{0j}) - S_{\Gamma,n}(\theta_{0j})| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_{0j} - \theta}{2}} - \right. \\
 &\left. - 2 \sum_{k=1}^n g(\theta_{0k}) \left[ \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_{k+1}}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} \right] \right| \leq C \frac{\ln n}{n^\alpha}, \quad j=1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Доведення. Інтеграл  $I_{\Gamma}(\theta_{0j})$  подамо формулою (2.3.5), а суму  $S_{\Gamma,n}(\theta_{0j})$  запишемо у вигляді

$$S_{\Gamma,n}(\theta_{0j}) = -2 \sum_{k=1}^n \frac{g(\theta_{0k}) - g(\theta_{0k-1})}{h} \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} h, \quad j=1, \dots, n, \tag{2.3.8}$$

де  $g(\theta_{00}) = g(\theta_{0n})$ .

Тоді для  $I_{\Gamma,n}(\theta_{0j})$  можна записати

$$\begin{aligned}
 I_{\Gamma,n}(\theta_{0j}) &\leq 2 \left| \int_0^{2\pi} g'(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta}{2} d\theta - \sum_{k=1}^n g'(\theta_k) \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} h \right| + \\
 &+ C_1 h^\alpha \sum_{k=1}^n \left| \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} \right| h, \quad j=1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Тепер з результатів [1,7] для квадратурних формул типу методу дискретних вихорів для інтеграла з ядром Гільберта впливає оцінка (2.3.7). Теорема 2.3.3 доведена.

Наведемо деякі приклади чисельних розрахунків гіперсингулярного інтеграла (2.3.2). Для цього скористаємося таким спектральним співвідношенням [7,12]:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) d\theta = -4\pi i (a_n \cos n\theta_0 + b_n \sin n\theta_0), n = 0, 1, 2, \dots, \theta_0 \in [0, 2\pi], \quad (2.3.10)$$

де  $a_n$  та  $b_n$  – довільні дійсні числа.

Співвідношення (2.3.10) отримується з формул (3.3.3) та (2.3.5).

Методика проведення розрахунків повністю збігається з методикою проведення розрахунків на відрізку, крім задання відрізка розбиття та параметрів спектрального співвідношення.

На рис. 2.3.3, 2.3.4 наведено результати чисельних розрахунків для квадратурних сум при  $n = 2$ ,  $a_n = 1$ ,  $b_n = 1$  у формулі (2.3.10).

Як показали розрахунки, поточкова похибка обчислення інтеграла рівномірно прямує до нуля по всіх розрахункових точках.

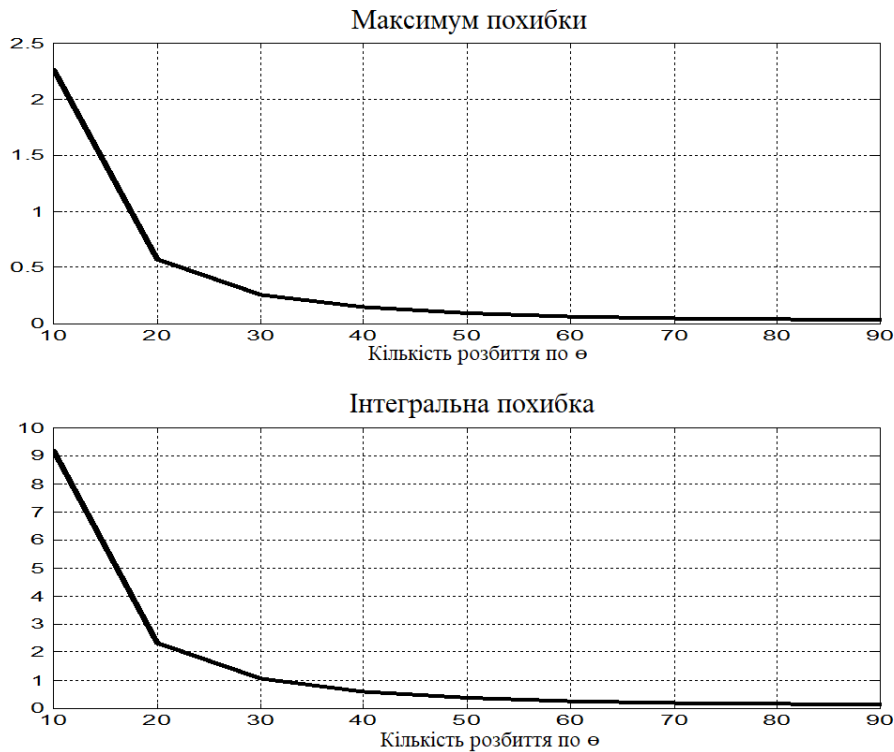


Рис. 2.3.3

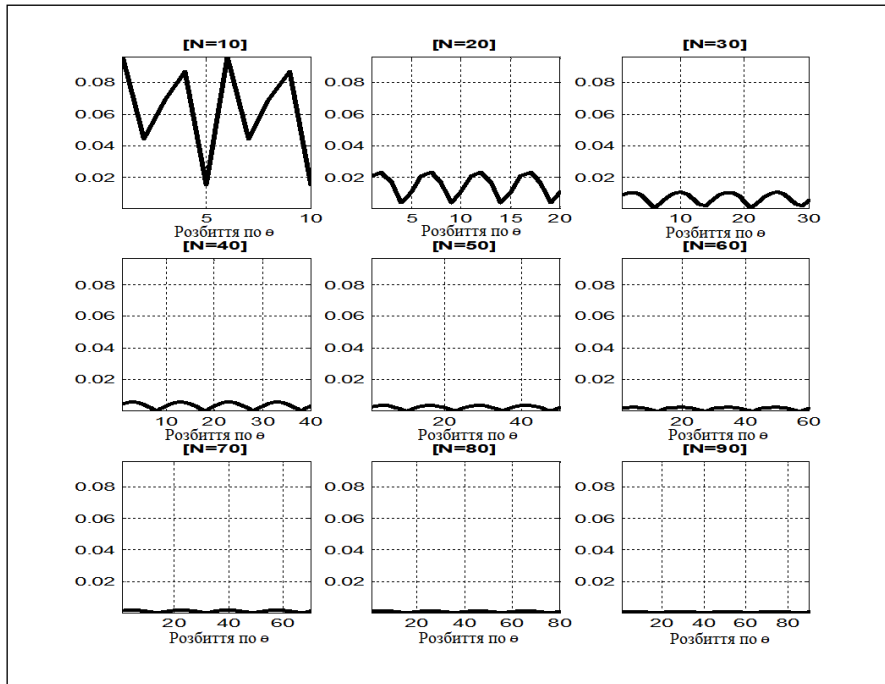


Рис. 2.3.4

## Розділ 3. Постановка задач та системи дискретних особливостей

### 3.1. Постановки задач гідродинаміки

Розглядається стаціонарне та нестационарне обтікання крила (тіла) довільної форми, яке рухається в ідеальному невязкому нестисливому середовищі із поступальною швидкістю  $U_0$  (рис. 3.1.1). Щільність середовища  $\rho = \rho_\infty$  не змінюється при обтіканні тіла.

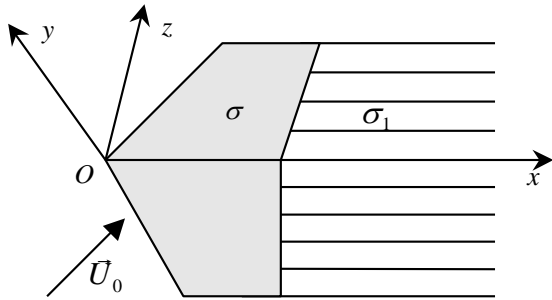


Рис. 3.1.1

У таких задачах аерогідродинаміки форма тіла та закон його руху вважаються відомими. Якщо тіло пружне, то припускається, що задано й закон деформації тіла. Крім того, вважаються відомими умови, в яких здійснюється рух (політ) тіла. Зазвичай це безмежне середовище, яке збурене тільки тілом. Однак можна розглядати й рух тіла в збуреному середовищі (вплив вітру, течій, турбулентності). У цьому випадку невідомими будуть швидкість  $\vec{V}(x, y, z, t) = \{V_x, V_y, V_z\}$ , збурена тілом у середовищі, і тиск  $P(x, y, z, t)$ . Для визначення чотирьох невідомих

функцій  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  і  $P$  маємо три скалярних рівняння з векторного рівняння Ейлера та рівняння нерозривності [1,3,4,7,9].

Одне з найважливіших питань – крайові умови на поверхні тіла. Такою є умова, що визначає задання швидкостей, збурених тілом, на його поверхні. Якщо в'язкістю середовища не знехтувати, то такою умовою була б вимога про "прилипання", тобто на поверхні тіла  $\vec{V} = 0$ . Для ідеальної невязкої рідини крайова умова зводиться до вимоги про непротікання потоку крізь поверхню тіла. Вона формулюється як умова перетворення в нуль нормальної складової відносно швидкості середовища на поверхні тіла

$$\vec{V}_{\text{відн}} \vec{n}_M = 0, \quad M(x, y, z) \in \sigma, \quad (3.1.1)$$

де  $\vec{n}_M$  – орт нормалі до поверхні  $\sigma$  тіла в точці  $M(x, y, z)$ , яка розглядається.

Зауважимо, що існує клас задач, наприклад, зв'язаних з обтіканням парашутів та крил-парашутів, коли поверхня тіла являє собою тонку тканину. Тоді потік може протікати крізь поверхню тіла, але закон протікання невідомий. Він визначається експериментально та є співвідношенням, що характеризує даний матеріал. Зазвичай він задається у вигляді залежності швидкості протікання від перепаду тиску на тканині.

Подальше спрощення в постановці загальної задачі пов'язано з таким фундаментальним дослідницьким фактом. При обтіканні тіла біля нього і за ним утворюється аеродинамічний слід, який характеризується тим, що в ньому спостерігається вихровий рух, тобто такий рух рідких частинок, при якому вони не тільки рухаються поступально і деформуються, але й обертаються. Поза цією областю течія виявляється безвихровою. Тоді поза тілом і слідом за ним течію, збурену тілом, можна характеризувати не трьома невідомими функціями  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ , а однією – потенціалом поля швидкостей  $\Phi(x, y, z, t)$ , причому

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k} = \vec{V} \quad (3.1.2)$$

або

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

У цьому випадку рівняння нерозривності перетворюється в рівняння Лапласа

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad M \notin \sigma \cup \sigma_1, \quad (3.1.3)$$

де  $\sigma_1$  – вихровий слід за тілом. Оскільки з фізичних міркувань ясно, що далеко від тіла  $\sigma$  та його сліду  $\sigma_1$  збудені швидкості повинні згасати, то для необхідного розв'язку  $\Phi(x, y, z, t)$  рівняння (3.1.3) повинні виконуватися умови

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \nabla \Phi = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (3.1.4)$$

для точок  $M(x, y, z)$ , нескінченно віддалених від тіла  $\sigma$  та його сліду  $\sigma_1$ .

При вказаних вище умовах рівняння руху Ейлера можуть бути проінтегрованими, що приведе до відомого співвідношення між тиском  $P$  і похідними від потенціалу поля швидкостей  $\Phi$  по координатах та часу – інтегралу Коші–Лагранжа

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\bar{V}_{\text{відн}}^2}{2} - \frac{\bar{V}^{*2}}{2} + \frac{P - P_\infty}{\rho} = 0, \quad (3.1.5)$$

де  $\bar{V}_{\text{відн}}$  – відносна, а  $\bar{V}^*$  – переносна швидкості частинки рідини,  $\rho$  – густина рідини (вона припускається постійною),  $P_\infty$  – тиск на нескінченності, який вважається відомим.

Таким чином, невідома функція  $P(x, y, z, t)$  також може бути виключена із загальної постановки задачі.

Потрібно відзначити одну важливу особливість загальної постановки задачі. При розгляді вихрового сліду тіла необхідно враховувати ті загальні теореми гідродинаміки, які поки що не фігурували в умовах задачі. Вони впливають із загальних властивостей полів швидкостей і тих рівнянь, які ці поля повинні задовольняти.

Відзначимо їх:

- а) при усталеному русі вихори спрямовані за лініями току;
- б) при неусталеному русі вихори, які сходять з тіла (вільні вихори), рухаються по траєкторіях рідких частинок разом з ними;
- в) циркуляція швидкості по будь-якому замкненому контуру, який не перетинає тіло і його слід або складається з одних і тих же частинок рідини, за часом не змінюється;
- г) зміна циркуляції приєданого вихору (нерухомо пов'язаного з тілом) супроводжується сходом вільного вихору, причому повинна виконуватися вимога попереднього пункту;
- д) вихровий слід  $\sigma_1$  не створює перепаду тиску (не несе) і є нескінченно тонкою поверхнею, таким чином, при переході через нього повинні додержуватися умови неперервності тиску та нормальної до нього складової швидкості:

$$P^+ = P^-, \quad V_{\bar{n}_M}^+ = V_{\bar{n}_M}^-, \quad M(x, y, z) \in \sigma_1. \quad (3.1.6)$$

Індекси (+) та (-) відносяться до різних сторін поверхні  $\sigma_1$ .

Із теореми Жуковського “в малому” [1,7] випливає, що відносна швидкість вільних вихорів дорівнює нулю, тобто вони рухаються разом із частинками рідкого середовища.

Фізичний зміст задачі та рівень точності її описання, який вибирає дослідник, диктує ще один дуже важливий етап у постановці задачі – вибір схеми обтікання. Основними серед них є такі.

1) Безциркуляційне обтікання – коли вихровим слідом нехтують. Звичайно використовується при аналізі обтікання сильно витягнутих тіл, приєднаних мас і при коливанні тіл на місці.

2) Циркуляційне відривне обтікання із задоволенням усіх фізично очевидних умов, у тому числі вимоги про скінченність швидкостей і тисків у всьому просторі. Сказане вирішальним чином впливає на вибір схеми обтікання. Наприклад, коли вивчається обтікання тонкого крила з гострими кромками (передніми, задніми, боковими), доводиться припускати схід вільних вихорів з усіх кромок, і на всіх кромках ставити умову Кутга–Жуковського про скінченність швидкостей. У протилежному випадку на них швидкості будуть досягати нескінченно великих значень. Зауважимо, що при цьому зазвичай навіть при русі крила з постійною швидкістю виникають пульсуючі (нестационарні) режими обтікання.

3) Спрощені схеми циркуляційного обтікання тіл, в яких деякі умови знімаються. Найбільш поширені схеми, в яких не вимагається скінченність швидкостей і тисків на передніх і бокових кромках тонких крил та на зломах поверхні тіла. В результаті задача може розв’язуватися і як стаціонарна, причому вільні вихори сходять тільки із задньої кромки крила.

Досвід використання подібних схем великий. Ці схеми приводять до задовільних результатів за сумарними ефектами, але дають локально некоректні дані (поблизу гострих кромок та зломів картини тисків та швидкостей описуються ними неправильно).

### **3.2. Основні положення методу дискретних особливостей з системою дискретних вихорових елементів.**

Розглянемо у якості чисельного методу для розв’язання задач гідродинаміки метод дискретних особливостей з системою дискретних вихорів. Крило  $\sigma$  та його слід  $\sigma_1$  замінюємо неперервною вихровою поверхнею, причому крило  $\sigma$  – поверхнею з приєднаних сумарних та вільних вихорів, які нерухомо пов’язані з крилом, а слід  $\sigma_1$  – поверхнею з вільних вихорів, які рухаються разом із рідиною по траєкторіях частинок. За допомогою цього неперервного вихрового шару знайдемо поле швидкості  $\vec{V}$ , для якого потенціалом буде функція  $\Phi(x, y, z)$  і яке буде задовольняти всі перелічені в параграфі 3.1 умови.

Таким чином, задачу аеродинаміки при розв’язанні її вихровим методом намагаються звести до знаходження інтенсивності такого вихрового шару, який замінює крило  $\sigma$  та його слід  $\sigma_1$ , щоб поле швидкостей, індукованих цим шаром, задовольняло всі вимоги, вказані в параграфі 3.1.

Чисельна реалізація всіх умов крайових задач аерогідродинаміки в методі дискретних вихорів здійснюється таким чином.

Неперервний вихровий шар замінюється системою дискретних вихорів так, щоб у границі при збільшенні числа дискретних вихорів отримати шуканий вихровий шар. Як основний елемент розглядається вихровий образ, що відповідає класу задач, які вивчаються: у плоских задачах – вихрова нитка нескінченного розмаху; при вивченні обтікання тонких крил на малих кутах атаки –

косі підковоподібні вихори; у загальних нелінійних просторових задачах – прямолінійні вихрові відрізки або замкнуті вихрові багатокутники (зазвичай – трикутники або чотирикутники).

Індуковане ними поле швидкостей обчислюється за допомогою формули Біо–Савара [1,3,4,5,7,9,12], за якою елемент  $d\vec{s}$  вихрової лінії, яка має циркуляцію  $\Gamma$ , індукує в точці  $M_0$ , розташованій від  $d\vec{s}$  на відстані, що визначається вектором  $\vec{r}$ , швидкість

$$d\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (3.2.1)$$

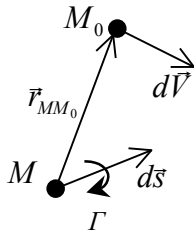


Рис. 3.2.1

Напрямок  $d\vec{s}$  має бути прийнятий таким, щоб циркуляція навколо нього згідно з правилом “правої руки” була додатною, що ілюструється рис. 3.2.1. Якщо початок елемента  $d\vec{s}$  розташований у точці  $M$ , то  $\vec{r} = \overline{MM_0}$ . Позначимо  $\Pi$  – даний дискретний вихровий образ, який має по всій довжині інтенсивність  $\Gamma$  (за відомими теоремами гідродинаміки про вихрові нитки [3,4,9] їх інтенсивність не повинна змінюватися за довжиною). Тоді поле швидкостей, яке індукується цим вихором, визначається формулою

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\Pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (3.2.2)$$

Отримане поле швидкостей задовольняє умову нерозривності у всьому просторі (виключаючи сам дискретний вихор). Крім того, швидкості загасають при віддаленні від вихрових елементів, перетворюючись у нуль на нескінченній відстані від точок, що належать вихорам.

У стаціонарних задачах слід продовжується від тіла до нескінченності. У нестационарних він розвивається – старі вихори зносяться потоком, а нові сходять з тіла. При цьому конструювання вихрових систем здійснюється з обов’язковим виконанням усіх теорем про зберігання вихорів у межах вибраної схеми обтікання.

Поверхня тіла в кожен момент часу замінюється сумарними вихорами, в яких немає ділення на приєднані та вільні, причому місцезнаходження їх на тілі фіксоване. Криволінійні вільні вихори апроксимуються системами прямолінійних відрізків.

Число дискретних вихорів скінченне, але може безмежно збільшуватися. Це здійснюється за заданим алгоритмом, який забезпечує виконання таких вимог, які лежать в основі ефективності методу.

1. Розміри вихрових сіток поблизу тіла за всіма напрямками повинні бути приблизно однаковими.

2. Точки, в яких задовольняються крайові умови про непротікання (*точки колокації*), повинні лежати приблизно в центрі вихрових багатокутників. Цим забезпечується виділення головного значення в інтегралах типу Коші.

3. На межах тонких поверхонь та поблизу зломів поверхні тіла, де швидкості можуть перетворюватися в нескінченність, вибір розміщення вихорів та розрахункових точок здійснюється згідно з вибраною схемою. Якщо ставиться вимога про скінченність швидкостей (*умова Кутта–Жуковського*) на кромках та зломах, то на них (або ближче до них) ставляться точки колокації (розрахункові точки) – дискретний аналог умови Кутта–Жуковського. У протилежному випадку на них ставляться вихори. Далі це правило розміщення дискретних вихорів та розрахункових точок біля країв будемо називати *B-умовою методу дискретних вихорів* [1,7].

Важливим етапом розв’язання задач аеродинаміки є побудова форми вихрового сліду. В лінійних стаціонарних та нестационарних задачах вона задається найбільш природним чином. В

нелінійних задачах слід вибудовується, причому при усталеному русі методом ітерацій, а при неусталеному – конструюється за часовими кроками. Циркуляція перших дискретних вільних вихорів за тілом обчислюється. Далі вихори зносяться струменем без зміни величини циркуляції.

Указаним способом задовольняються всі умови поставлених задач аерогідродинаміки. Розв'язання їх зводиться в загальному випадку до виконання (ітерації в просторі та за кроками в часі) таких обчислювальних операцій:

- а) розв'язанню систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які впливають із крайових умов на тілі;
- б) побудові вихрового сліду за тілом.

### 3.3. Основні дискретні вихрові системи

Розглянемо спочатку поле швидкостей від вихрового відрізка  $A_1A_2$  постійної інтенсивності  $\Gamma$  з напрямком від точки  $A_1$  до точки  $A_2$ . Довільну точку  $A$  цього відрізка можна записати у вигляді радіус-вектора

$$\bar{r}_A = \bar{r}_1 + t\bar{r}_{12}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.3.1)$$

де  $\bar{r}_A = \overline{OA}$ ,  $\bar{r}_1 = \overline{OA_1}$ ,  $\bar{r}_{12} = \overline{A_1A_2}$  та  $O$  – деяка точка простору. Тому для елемента дуги  $d\bar{s}$  матимемо

$$d\bar{s} = \bar{r}_{12} dt. \quad (3.3.2)$$

Розмістимо тепер елемент  $d\bar{s}$  в точці  $A$ . Тоді для вектора  $\bar{r}$  отримаємо

$$\bar{r} = \bar{r}_0 - \bar{r}_A = \bar{r}_{10} - t\bar{r}_{12}, \quad (3.3.3)$$

де  $\bar{r}_0 = \overline{OM_0}$ ,  $\bar{r}_{10} = \overline{A_1M_0}$ . Зауважимо також, що

$$r = \left[ \left( t\bar{r}_{12} - \frac{\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{12}} \right)^2 + \alpha \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha = r_{10}^2 - \left( \frac{\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{12}} \right)^2. \quad (3.3.4)$$

З формул (3.2.1), (3.3.2)–(3.3.4) отримуємо формулу для індукованої швидкості  $\bar{V}$  в точці  $M_0$  від вихрового відрізка  $A_1A_2$ :

$$\bar{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^1 \frac{(\bar{r}_{12} \times \bar{r}_{10}) dt}{\left[ \left( t\bar{r}_{12} - \frac{\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{12}} \right)^2 + \alpha \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.3.5)$$

Первісна для підінтегральної функції у формулі (3.3.5) легко знаходиться:

$$\bar{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\bar{r}_{12} \times \bar{r}_{10}}{r_{12} \alpha} \frac{t\bar{r}_{12} - \frac{\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{12}}}{\sqrt{\left( t\bar{r}_{12} - \frac{\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{12}} \right)^2 + \alpha}} \Bigg|_{t=0}^1 \quad (3.3.6)$$

або

$$\begin{aligned}\bar{V} &= \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\bar{r}_{12} \times \bar{r}_{10}}{r_{12} \alpha} \left[ \frac{r_{12} - \frac{\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{12}}}{\sqrt{r_{12}^2 - 2\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12} + r_{10}^2}} + \frac{\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{10} r_{12}} \right] = \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\bar{r}_{12} \times \bar{r}_{10}}{r_{12}^2 r_{10}^2 - (\bar{r}_{12} \cdot \bar{r}_{10})^2} \left( \frac{-\bar{r}_{12} \cdot \bar{r}_{20}}{r_{20}} + \frac{\bar{r}_{12} \cdot \bar{r}_{10}}{r_{10}} \right).\end{aligned}\quad (3.3.7)$$

Зауважимо, що

$$r_{12}^2 \cdot r_{10}^2 - (\bar{r}_{12} \cdot \bar{r}_{10})^2 = |\bar{r}_{12} \times \bar{r}_{10}|^2.$$

Розглянемо тепер різні окремі випадки формул (3.3.6) і (3.3.7).

Нехай у просторі введена декартова система координат  $OXYZ$  як на рис. 3.1.1, тобто трійка векторів  $\bar{i}$ ,  $\bar{k}$ ,  $\bar{j}$  – права. Розглянемо окремий випадок, коли точка  $M_0$  та вихровий відрізок лежать у площині  $OXZ$ , причому відрізок паралельний одній з осей координат, наприклад  $A_1 A_2 \parallel OZ$ . У цьому випадку маємо

$$\begin{aligned}M_0 &= (x_0, z_0, 0), \quad A_1 = (x_1, z_1, 0), \quad A_2 = (x_2, z_2, 0), \\ \bar{r}_{12} &= (z_2 - z_1)\bar{k}, \quad \bar{r}_{10} = (x_0 - x_1)\bar{i} + (z_0 - z_1)\bar{k}, \\ \bar{r}_{12} \times \bar{r}_{10} &= -\bar{j}(x_0 - x_1)(z_2 - z_1), \\ r_{12}^2 &= (z_2 - z_1)^2, \quad \bar{r}_{20} = (x_0 - x_2)\bar{i} + (z_0 - z_2)\bar{k}, \\ \bar{r}_{12} \cdot \bar{r}_{20} &= (z_2 - z_1)(z_0 - z_2), \\ \bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12} &= (z_2 - z_1)(z_0 - z_1), \quad r_{10}^2 = (x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_1)^2,\end{aligned}$$

та з формули (3.3.7) отримуємо

$$\bar{V} = -\bar{j} \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{x_0 - x_1} \left( \frac{-(z_0 - z_2)}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_2)^2}} + \frac{z_0 - z_1}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}} \right).\quad (3.3.8)$$

Тепер розглянемо прямолінійний вихор напівнескінченного розмаху, який починається в точці  $A_1 = (x_1, z_1, y_1)$  і через точку  $A_2 = (x_2, z_2, y_2)$  йде в нескінченність.

Тоді у формулі (3.3.1) параметр  $t$  буде змінюватися від 0 до  $+\infty$ . Отже, у формулі (3.3.6) верхня границя буде  $+\infty$ , і тому при підстановці границь отримаємо

$$\bar{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\bar{r}_{12} \times \bar{r}_{10}}{r_{12} \alpha} \left[ 1 + \frac{\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{10} \cdot r_{12}} \right].\quad (3.3.9)$$

Якщо напрямок на вихорі іде з нескінченності через точку  $A_2$  до точки  $A_1$ , то у формулі (3.3.2) для  $d\bar{s}$ , треба поставити знак мінус, тому матимемо

$$\bar{V} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\bar{r}_{12} \times \bar{r}_{10}}{r_{12} \alpha} \left[ 1 + \frac{\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{10} \cdot r_{12}} \right].\quad (3.3.10)$$

Наприклад, нехай вихор починається в точці  $A_1(x_1, z_1, 0)$  і через точку  $A_2(x_2, z_1, 0)$  йде в нескінченність. Точка  $M_0(x_0, z_0, 0)$  також лежить у площині  $OXZ$ . Тоді маємо:  $\bar{r}_{12} = (x_2 - x_1)\bar{i}$ ,  $\bar{r}_{10} = (x_0 - x_1)\bar{i} + (z_0 - z_1)\bar{k}$ ,  $\bar{r}_{12} \times \bar{r}_{10} = \bar{j}(x_2 - x_1)(z_0 - z_1)$ ,  $r_{12} = x_2 - x_1$  (припускаємо  $x_2 > x_1$ ),  $\bar{r}_{12} \cdot \bar{r}_{10} = (x_2 - x_1)(x_0 - x_1)$ ,  $\alpha = (z_0 - z_1)^2$ , та

$$\vec{V} = j \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{z_0 - z_1} \left( 1 + \frac{x_0 - x_1}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}} \right). \quad (3.3.11)$$

Розглянемо тепер прямолінійний вихор нескінченного розмаху. Будемо припускати, що напрямок на вихорі визначається параметром у формулі (3.3.1), тобто формула (3.3.2) зберігає свій вигляд. У цьому випадку границі інтегрування у формулі (3.3.5) будуть  $-\infty$  і  $+\infty$ . Отже, з формули (3.3.6) при підстановці  $t = -\infty$  і  $t = +\infty$  отримаємо

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{10}}{r_{12}\alpha}. \quad (3.3.12)$$

У формулах (3.3.1) і (3.3.3) під  $\vec{r}_{12}$  можна розуміти будь-який вектор, спрямований однакою з напрямком на вихорі.

Наприклад, нехай вихор проходить через точку  $A_1 = (x_1, z_1, 0)$  паралельно осі  $OZ$  і однакою з нею спрямований. За спрямовуючий вектор  $\vec{r}_{12}$  візьмемо вектор  $\vec{k}$ . Швидкість від цього вихору будемо підраховувати в точці  $M_0 = (x_0, z_0, 0)$ . У цьому випадку  $\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{10} = -j(x_0 - x_1)$ ,  $\alpha = (x_0 - x_1)^2$ ,

$$\vec{V} = -j \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{x_0 - x_1}. \quad (3.3.13)$$

У задачах для тілесного профілю треба, щоб  $A_1 = (x_1, 0, y_1)$ ,  $\vec{r}_{12} = \vec{k}$  і  $M_0 = (x_0, 0, y_0)$ . Тоді  $\vec{r}_{10} = (x_0 - x_1)\vec{i} + (y_0 - y_1)\vec{j}$ ,  $\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{10} = -j(x_0 - x_1) + i(y_0 - y_1)$ ,  $\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{10} = 0$ . Таким чином, отримуємо

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(y_0 - y_1)\vec{i} - (x_0 - x_1)\vec{j}}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}. \quad (3.3.14)$$

Перейдемо тепер до розгляду прямого та косою підковоподібних вихорів.

*Прямим підковоподібним вихором* [1,4,5,7,10] будемо називати (рис. 3.3.1, а) вихор постійної інтенсивності  $\Gamma$ , який складається з відрізка  $[A_1(x_1, z_1, 0), A_2(x_1, z_2, 0)]$  та двох напівнескінченних прямолінійних вихорів  $(A_1, +\infty)$  і  $(A_2, +\infty)$ , паралельних осі  $OX$ . Напрямок на цьому вихорі будемо задавати вектором  $\vec{r}_{12}$  і позначати його  $\Pi(A_1, A_2)$ . Знайдемо швидкість  $\vec{V}$ , яку індукує цей вихор у точці  $M_0 = (x_0, z_0, 0)$ , яка не лежить на вихорі. Позначимо  $\vec{V}_{12}$ ,  $\vec{V}_1$  і  $\vec{V}_2$  – швидкості в точці  $M_0$ , які індукують відповідно вихори  $(A_1, A_2)$ ,  $(A_1, +\infty)$  і  $(A_2, +\infty)$ . Використовуючи формули (3.3.8)–(3.3.10), отримуємо

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}_{12} + \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = j \frac{\Gamma}{4\pi} \left[ \frac{1}{z_0 - z_2} - \frac{1}{z_0 - z_1} + \right. \\ &+ \left. \frac{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_2)^2}}{(x_0 - x_1)(z_0 - z_2)} - \frac{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}}{(x_0 - x_1)(z_0 - z_1)} \right] = \\ &= j \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{(z_0 - z)^2} \left( 1 + \frac{x_0 - x_1}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z)^2}} \right) dz = \\ &= j \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{+\infty} \frac{dx dz}{[(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

*Косий підковоподібний вихор* (рис. 3.3.1, б) відрізняється від прямого тільки тим, що відрізок  $[A_1, A_2]$  не паралельний осі  $OZ$ , тобто  $A_1 = (x_1, z_1, 0)$ ,  $A_2 = (x_2, z_2, 0)$  і  $x_2 \neq x_1$ .

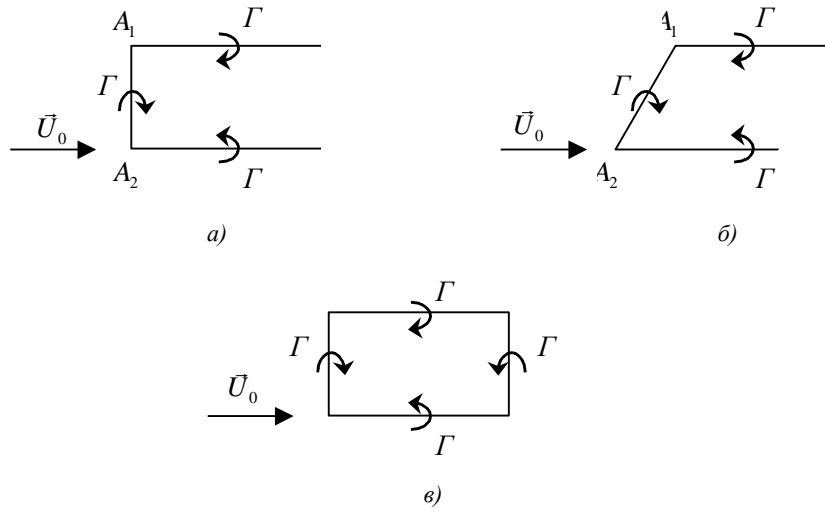


Рис. 3.3.1

Нехай рівняння лінії вихору  $(A_1, A_2)$  має вигляд

$$x(z) = a + zb, \quad (3.3.16)$$

тобто  $x_1 = x(z_1) = a + z_1b$ ,  $x_2 = x(z_2) = a + z_2b$ . Тоді для цієї самої точки  $M_0 = (x_0, z_0, 0)$  маємо:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{12} &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (z_2 - z_1)\vec{k} = (z_2 - z_1)b\vec{i} + (z_2 - z_1)\vec{k} = (z_2 - z_1)(b\vec{i} + \vec{k}), \\ \vec{r}_{10} &= (x_0 - x_1)\vec{i} + (z_0 - z_1)\vec{k}, \\ \vec{r}_{12} \times \vec{r}_{10} &= \vec{j}[(x_2 - x_1)(z_0 - z_1) - (x_0 - x_1)(z_2 - z_1)] = \vec{j}[b(z_0 - z_1) - (x_0 - x_1)], \\ r_{12} &= (z_2 - z_1)\sqrt{1 + b^2}, \\ \vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{10} &= (z_2 - z_1)[b(x_0 - x_1) + (z_0 - z_1)], \\ \vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{20} &= (z_2 - z_1)[b(x_0 - x_2) + (z_0 - z_2)]. \end{aligned}$$

Звідси за формулою (3.3.7)

$$\begin{aligned} \vec{V}_{12} &= \vec{j} \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\lambda(x_0, z_0)} \left[ \frac{(x_0 - x_2)b + (z_0 - z_2)}{\sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (z_0 - z_2)^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(x_0 - x_1)b + (z_0 - z_1)}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}} \right], \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

де  $\lambda(x_0, z_0) \equiv x_0 - a - z_0b \equiv x_0 - x(z_0)$ .

Для вихорів  $(A_1, +\infty)$  і  $(A_2, +\infty)$  формули зберігаються, тому маємо

$$\vec{V} = \vec{j} \frac{\Gamma}{4\pi} \left[ \frac{1}{z_0 - z_2} - \frac{1}{z_0 - z_1} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{\sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (z_0 - z_2)^2}}{\lambda(x_0, z_0)(z_0 - z_2)} - \frac{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}}{\lambda(x_0, z_0)(z_0 - z_1)} \right] = \\
& = j \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{(z_0 - z)^2} \left( 1 + \frac{x_0 - x(z)}{\sqrt{(x_0 - x(z))^2 + (z_0 - z)^2}} \right) dz = \\
& = j \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{x(z)}^{+\infty} \frac{dx dz}{\left[ (x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2 \right]^{3/2}}. \tag{3.3.18}
\end{aligned}$$

Зауважимо, якщо  $b=0$ , тобто  $\Pi(A_1, A_2)$  – прямий підковоподібний вихор, то формула (3.3.18) збігається з формулою (3.3.15), тому що в цьому випадку  $x(z) = x_1$ ,  $\lambda = x_0 - x(z_0) = x_0 - x_1$ . Відзначимо ще, що якщо точка  $M_0$  лежить на лінії відрізка  $[A_1, A_2]$ , то формули (3.3.15) і (3.3.18) треба використовувати в інтегральній формі. Тоді отримаємо, що

$$\bar{V} = j \frac{\Gamma}{4\pi} \left[ \frac{1}{z_0 - z_2} - \frac{1}{z_0 - z_1} \right], \tag{3.3.19}$$

оскільки в цьому випадку або  $x_0 - x_1 = 0$ , або  $x_0 - x(z) = 0$ .

Нарешті, розглянемо вихор постійної інтенсивності  $\Gamma$ , який має вигляд контуру прямокутника в площині  $OXZ$  із сторонами, паралельними осям координат (рис. 3.3.1, в). Нехай цей вихор своїми кутовими точками має точки  $A_1 = (x_1, z_1, 0)$ ,  $A_2 = (x_1, z_2, 0)$ ,  $z_2 > z_1$ ,  $A_3 = (x_2, z_2, 0)$ ,  $x_2 > x_1$ ,  $A_4 = (x_2, z_1, 0)$ . Напрямок на цьому вихорі задамо вектором  $\vec{r}_{12}$ . Позначимо  $\bar{V}_{12}$ ,  $\bar{V}_{23}$ ,  $\bar{V}_{34}$  та  $\bar{V}_{41}$  – швидкості, які індукують у точці  $M_0(x_0, z_0, 0)$  вихори  $(A_1, A_2)$ ,  $(A_2, A_3)$ ,  $(A_3, A_4)$  та  $(A_4, A_1)$  відповідно. Використовуючи формулу (3.3.7) (див. також (3.3.8)) і ураховуючи напрямки вихорів, для швидкості  $\bar{V}$ , яку індукує в точці  $M_0$  увесь вихор, отримуємо формулу

$$\begin{aligned}
\bar{V} & = \bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{34} + \bar{V}_{41} = \\
& = j \frac{\Gamma}{4\pi} \left[ \frac{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_2)^2}}{(x_0 - x_1)(z_0 - z_2)} - \frac{\sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (z_0 - z_2)^2}}{(x_0 - x_2)(z_0 - z_2)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (z_0 - z_1)^2}}{(x_0 - x_2)(z_0 - z_1)} - \frac{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}}{(x_0 - x_1)(z_0 - z_1)} \right]. \tag{3.3.20}
\end{aligned}$$

Формулу (3.3.20) можна записати ще й у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
\bar{V} & = -j \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{(z_0 - z)^2} \left( 1 + \frac{x_0 - x_2}{\sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (z_0 - z)^2}} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{x_0 - x_1}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z)^2}} \right) dz = \\
& = j \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx dz}{\left[ (x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2 \right]^{3/2}}. \tag{3.3.21}
\end{aligned}$$

З а у в а ж е н н я 3.3.1. Відзначимо, що формули (3.3.15), (3.3.18) і (3.3.21) є окремими випадками загальної формули [1,3,7,9] для потенціалу поля швидкостей замкненої вихрової нитки, за якою *поле швидкостей від замкненої вихрової нитки  $L$  постійної циркуляції  $\Gamma$  збігається з полем*

швидкостей від подвійного шару, розміщеного на поверхні  $\sigma$ , яка опирається на контур  $L$ , постійної щільності стрибка  $g = \Gamma$  (рис. 3.3.2). Ця формула має вигляд

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{s} \times \vec{r}_{MM_0}}{r_{MM_0}^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \text{grad}_{M_0} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_M} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) d\sigma, \quad (3.3.22)$$

бо система координат ліва.

Якщо контур  $L$  складається із скінченного числа прямолінійних частин, то швидкість  $\vec{V}$ , яка індукується цією вихровою ниткою, надається сумою швидкостей від кожної з цих частин, які потім обчислюються за одною з наведених у даному параграфі формул.

З а у в а ж е н н я 3.3.2. Якщо поверхня  $\sigma$  являє собою смугу у площині  $Oxz$ , обмежену прямими  $x = x_1$  і  $x = x_2$  ( $x_2 > x_1$ ), то формула (3.3.22) показує: поле швидкостей від шару диполів постійної інтенсивності  $\Gamma$ , розміщених на цій смугі, дорівнює полю швидкостей від системи двох вихрових прямолінійних ниток, розміщених на прямих  $x = x_1$  і  $x = x_2$ , які мають циркуляції  $\vec{\Gamma}$  та  $-\vec{\Gamma}$  відповідно, тобто (рис. 3.3.3)

$$\vec{V} = \vec{j} \frac{\vec{\Gamma}}{2\pi} \left[ \frac{1}{x_0 - x_2} - \frac{1}{x_0 - x_1} \right] = \vec{j} \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x_0 - x)^2}. \quad (3.3.23)$$

При цьому точка  $M_0(x_0, 0)$  лежить на осі  $Ox$ .

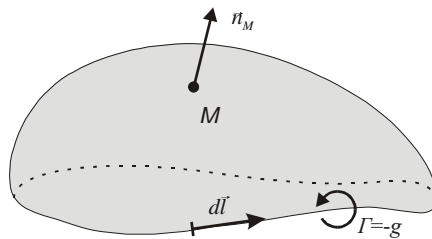


Рис. 3.3.2

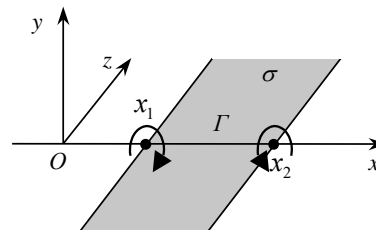


Рис. 3.3.3

## Розділ 4. Метод дискретних особливостей для плоских стаціонарних задач

### 4.1. Задачі для профілю. Задачі для ґратки профілів

Розглянемо, згідно з [1,5,7] плоскопаралельне обтікання ізольованого профілю сталим потоком ідеальної нев'язкої нестисливої рідини, швидкість якого  $\vec{U}_0 = u_{0x}\vec{i} + u_{0y}\vec{j}$ . Сам профіль вважаємо нерухомим. Під профілем розуміємо циліндричну поверхню з твірною, яка паралельна осі  $Oz$ , і напрямною кривою  $L$  у площині  $Oxy$  (рис. 4.1.1). Оскільки всі параметри потоків, один з яких набігає, а другий збурений, не залежать від координати  $z$ , то далі профіль будемо зображати тільки кривою  $L$  у площині  $Oxy$ . Якщо крива  $L$  є простою розімкненою (рис. 4.1.1, а), то такий профіль називатимемо тонким, а якщо крива  $L$  є простою замкненою кусково-гладкою (рис. 4.1.1, б), то такий профіль будемо називати тілесним. Оскільки розглядаємо стаціонарну задачу, то сліду за профілем немає, і збурена течія буде потенціальною всюди поза профілем  $L$ .

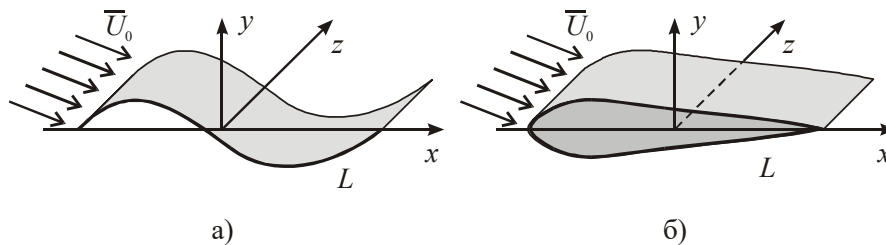


Рис. 4.1.1

Позначимо  $\Phi = \Phi(x, y)$  – потенціал швидкостей збуреної течії, а  $\vec{V} = \text{grad } \Phi$  – швидкість цієї течії в точці поза профілем або на його поверхні. Представимо потенціал швидкостей у вигляді потенціалу подвійного шару по профілю  $L$  із щільністю  $g(M)$

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\vec{r}_{MM_0}, \vec{n}_M)}{r_{MM_0}^2} g(M) ds_M = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{-(x_0 - x)y'_s + (y_0 - y)x'_s}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} g(M) ds_M \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

для точок  $M_0(x_0, y_0)$ , які не лежать на  $L$  ( $M_0 \notin L$ ), й у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi^\pm(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\vec{r}_{MM_0}, \vec{n}_M)}{r_{MM_0}^2} g(M) ds_M \pm \frac{1}{2} g(M_0) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{-(x_0 - x)y'_s + (y_0 - y)x'_s}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} g(M) ds_M \pm \frac{1}{2} g(M_0) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

для точок  $M_0$ , які лежать на  $L$  ( $M_0 \in L$ ).

При цьому знак плюс (+) береться для значення потенціалу, одержаного при підході до точки  $M_0$  з того боку від профілю  $L$ , куди спрямований вектор  $\vec{n}_M$ , а знак мінус (–) – для протилежного боку (див. рис. 4.1.2, де показана схема стаціонарного обтікання розімкненого гладкого профілю (а) та замкненого профілю з гострою задньою кромкою (б)).

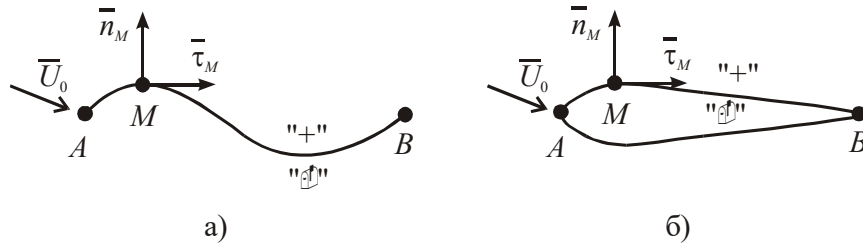


Рис. 4.1.2

У формулах (4.1.1), (4.1.2) і далі в задачах про профілі припускаємо, що крива  $L$  задана параметрично.

Оскільки швидкість точки при потенціальній течії є градієнтом потенціалу поля швидкостей, тобто  $\vec{V} = \nabla\Phi$ , то використовуючи формулу градієнта від потенціалу подвійного шару в плоскому випадку [1,7,12] та позначаючи  $g'_s(M)$  через  $\gamma(M)$ , отримуємо, що швидкість  $\vec{V}$  збуреної течії тепер запишеться у вигляді

$$\vec{V} = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(y_0 - y)\vec{i} - (x_0 - x)\vec{j}}{r_{MM_0}^2} \gamma(M) ds_M \quad (4.1.3)$$

для точок  $M_0$ , які не лежать на профілі  $L$ , або у вигляді

$$\vec{V}^\pm = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(y_0 - y)\vec{i} - (x_0 - x)\vec{j}}{r_{MM_0}^2} \gamma(M) ds_M \pm \frac{1}{2} (x'_{0s}\vec{i} + y'_{0s}\vec{j}) \gamma(M_0) \quad (4.1.4)$$

для точок  $M_0$  на профілі  $L$ .

Отже, бачимо, що поле швидкостей для вибраного нами потенціалу таке саме [3,9,12] як від розподіленого на профілі  $L$  вихрового шару з розподіленою інтенсивністю  $\gamma(M)$  цього шару в точці  $M \in L$ .

З іншого боку, вибраний потенціал у кожній точці  $M_0 \notin L$  задовольняє рівняння Лапласа, а швидкості від нього прямують до нуля на нескінченності. Таким чином, поле швидкостей від вихрового шару, розташованого на профілі  $L$ , задовольняє умови (6.2.5) потенціальної поза  $L$  течії ідеальної нев'язкої рідини. Залишилось виконати тільки крайову умову (6.2.2) про перетворення в нуль нормальної складової відносно швидкості частинок на поверхні профілю (тобто виконати на поверхні профілю  $L$  умову непротікання). Оскільки профіль  $L$  нерухомий, то

$$\vec{V}_{відн} = \vec{V} + \vec{U}_0, \quad (4.1.5)$$

і тому задачу про знаходження поля збурених швидкостей можна розв'язати, якщо  $\gamma(M)$ ,  $M \in L$ , буде задовольняти рівність

$$\vec{V}\vec{n}_{M_0} = -\vec{U}_0\vec{n}_{M_0}, \quad M_0 \in L, \quad (4.1.6)$$

або

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{y'_{0s}(y_0 - y) + x'_{0s}(x_0 - x)}{r_{MM_0}^2} \gamma(M) ds_M = f(M_0), \quad M_0 \in L, \quad (4.1.7)$$

де  $f(M_0) = \vec{U}_0\vec{n}_{M_0}$ .

Про зручність моделювання профілю і, взагалі, несучої поверхні вихровим шаром при розгляді задач обтікання їх потоком ідеальної нев'язкої рідини зрозумів ще М.Є. Жуковський. Це дає спеціалісту з аеродинаміки фізично ясний образ для вивчення таких задач.

Тепер розглянемо докладніше рівняння (4.1.7) і особливо його розв'язки для різних профілів.

Нехай спочатку  $L$  – гладка розімкнена крива, яка задана параметрично –  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [-1, 1]$ , тобто функція  $r'_M = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$  неперервна на  $[-1, 1]$  і не перетворюється в нуль. У цьому випадку рівняння (4.1.7) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{K(t_0, t)}{t_0 - t} \gamma(t) dt &= f(t_0), \quad t_0 \in [-1, 1], \\ K(t_0, t) &= \frac{x'(t_0)x_2(t_0, t) + y'(t_0)y_2(t_0, t)}{r_{2,MM_0}^2 r'_{M_0}}, \\ x_2(t_0, t) &= \frac{x_1(t_0, t)}{t_0 - t}, \quad y_2(t_0, t) = \frac{y_1(t_0, t)}{t_0 - t}, \\ x_1(t_0, t) &= x(t_0) - x(t), \quad y_1(t_0, t) = y(t_0) - y(t), \\ r_{2,MM_0}^2 &= x_2^2(t_0, t) + y_2^2(t_0, t). \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Природно, що функції  $x_2(t_0, t)$ ,  $y_2(t_0, t)$  можна до визначити як  $x_2(t_0, t_0) = x'(t_0)$ ,  $y_2(t_0, t_0) = y'(t_0)$  і тому  $K(t_0, t_0) = 1$ ,  $t_0 \in [-1, 1]$ . Тепер рівняння (4.1.8) можна записати у вигляді [1,7]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(t) dt}{t_0 - t} + \int_{-1}^1 K_1(t_0, t) \gamma(t) dt &= f(t_0), \quad t_0 \in [-1, 1], \\ K_1(t_0, t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{K(t_0, t) - 1}{t_0 - t} = \frac{1}{2\pi} \frac{K_2(t_0, t) + K_3(t_0, t)}{r_{2,MM_0}^2 r'_{M_0}}, \\ K_2(t_0, t) &= [x'(t_0)x_2(t_0, t) + y'(t_0)y_2(t_0, t)] \frac{r'_M - r'_{M_0}}{t_0 - t}, \\ K_3(t_0, t) &= r'_{M_0} [x_2(t_0, t)x_3(t_0, t) + y_2(t_0, t)y_3(t_0, t)], \\ x_3(t_0, t) &= \frac{x(t) - x(t_0) - x'(t_0)(t - t_0)}{(t - t_0)^2}, \\ y_3(t_0, t) &= \frac{y(t) - y(t_0) - y'(t_0)(t - t_0)}{(t - t_0)^2}. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Вид функції  $K_2(t_0, t)$  і  $K_3(t_0, t)$  дозволяє стверджувати, що якщо  $x''(t), y''(t) \in H$  на  $[-1, 1]$ , то  $K_1(t_0, t)$  також належить  $H$  на  $[-1, 1]$  (див. [1,7,12]).

Якщо при цьому  $x''(t)$  і  $y''(t)$  на всьому відрізку  $[-1, 1]$  за модулем малі (у розумінні допустимої в даній задачі точності), то і ядро  $K_1(t_0, t)$  за модулем мале, і тому для знаходження інтегральних характеристик достатньо розглянути рівняння

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(t) dt}{t_0 - t} = f(t_0), \quad t_0 \in [-1, 1], \quad (4.1.10)$$

яке й називається рівнянням тонкого слабко зігнутого профілю.

Нагадаємо [1,7,12,15], що рівняння (4.1.9), а отже, й (4.1.7) для гладкої розімкненої кривої не має єдиного розв'язку. При цьому з фізичного змісту задачі випливає, що якщо точка  $A$  є передньою кромкою профілю  $L$  (див. рис. 4.1.2, а), то в загальному випадку частинка середовища при плавному обтіканні профілю повинна миттєво повернутися навколо цієї точки, і швидкість  $V$  збуреного потоку повинна прямувати до нескінченності поблизу цього кінця. На задньому кінці

профілю в точці  $B$  потік має плавно сходити, і тому швидкість частинок, які сходять з верхнього боку профілю  $L$  (позначеній на рис. 4.1.2, а знаком "+"), повинна збігатися із швидкістю частинок, які сходять з нижнього боку профілю, тобто швидкість потоку повинна бути в точці  $B$  скінченною, або, точніше,  $\bar{V}^+(B) = \bar{V}^-(B)$ . Це і є знаменита гіпотеза Кутта–Жуковського [1,3,4,9,10].

З формули (4.1.4) відразу отримуємо, що  $\bar{V}^+ - \bar{V}^- = (x'_{0s}\bar{i} + y'_{0s}\bar{j})\gamma(M_0)$  і тому при підході по кривій  $L$  до точки  $B$  величина  $\gamma(M_0)$  прямує до нуля.

**Висновок 1.** При плавному обтіканні тонкого профілю  $L$  (циркуляційна задача) треба взяти розв'язок рівняння (4.1.9) або (4.1.7), який перетворюється в нуль у точці  $B$ . Такий розв'язок єдиний і записується у вигляді

$$\gamma(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\psi(t), \quad (4.1.11)$$

де функція  $\psi(t)$  не має особливостей на  $L$ .

Якщо на тонкий профіль, який стоїть на місці, набігають легкі пориви вітру, які швидко змінюються, то можна вважати, що навколо профілю немає циркуляції, тобто інтеграл від  $\gamma(M)$  по профілю  $L$  дорівнює нулю (це саме справедливе і для тілесного профілю  $L$ ) [1,7,16]. При цьому обидві кромки профілю знаходяться в однаковому положенні.

**Висновок 2.** При безциркуляційному обтіканні тонкого профілю розв'язок  $\gamma(M)$  перетворюється в нескінченність на обох кінцях профілю, тобто має вигляд

$$\gamma(t) = \frac{\psi(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (4.1.12)$$

і задовольняє умову

$$\int_L \gamma(M) ds = 0. \quad (4.1.13)$$

Нарешті, якщо потік набігає на профіль так, що відбувається плавне обтікання профілю і при цьому й передня кромка обтікається плавно, тобто швидкість потоку і на передній кромці скінченна, то *таке обтікання називається безударним*. При цьому потік, який набігає, і профіль повинні бути приладжені спеціальним чином один до одного. На крилах літаків для цього існують передкрилки, за допомогою яких профіль крила приладжується під потік, який набігає (процес такого прилаштування описано в [16]).

**Висновок 3.** Для безударного обтікання тонкого профілю розв'язок  $\gamma(M)$  перетворюється в нуль на обох кромках профілю і має вигляд

$$\gamma(t) = \sqrt{1-t^2}\psi(t). \quad (4.1.14)$$

Зауваження 4.1.1. Нехай тепер тонкий профіль  $L$  є простим кусково-гладким (рис. 4.1.3, а), і нехай точка  $K$  є однією з кутових точок. Будемо припускати, що локально цей кут є лінійним і найбільший розмір цього кута дорівнює  $\beta$ ,  $\pi < \beta < 2\pi$ . Тоді, як впливає з результатів [1,7], *вихрова інтенсивність*  $\gamma(M)$  має в точці  $K$  особливість виду  $\rho^{\pi/\beta-1}$ , де  $\rho$  – відстань від точки  $M$  до точки  $K$ . При цьому рівняння (4.1.7) записується для всіх точок  $M_0 \in L$ , за винятком кінців і вузлів кривої  $L$ , а чисельні значення рівняння (4.1.9) не збігаються зі значеннями, які відповідають кінцівкам та вузлам кривої  $L$ . Функція  $f(t_0)$  має розрив першого роду в точці  $K$ , а ядро  $K_1(t_0, t)$  має неінтегровальну особливість у цій точці.

Приклад 4.1.1. Нехай  $L$  є об'єднанням відрізків  $[0, 1]$  за осями  $Oy$  та  $Ox$  (рис. 4.1.3, б), тобто  $x=0, y=-t, t \in [-1, 0]$  і  $x=t, y=0, t \in [0, 1]$ . Нехай  $\bar{U}_0 = \bar{i}$ . Тоді  $f(t_0) = \bar{U}_0 \bar{n}_{M_0} = 1, t_0 \in (-1, 0)$  і  $f(t_0) = 0, t_0 \in (0, 1)$ . Розглянемо ядра  $K(t_0, t)$  і  $K_1(t_0, t)$  в околі початку координат, коли  $t_0 \in (1, 0)$ , а  $t \in (0, 1)$ . Тоді отримуємо

$$K(t_0, t) = \frac{-t_0(t_0 - t)}{t_0^2 + t^2}, \quad K_1(t_0, t) = \left( \frac{-t_0}{t_0^2 + t^2} - \frac{1}{t_0 - t} \right) \frac{1}{2\pi}. \quad (4.1.15)$$

Тепер видно, що функція  $K(t_0, t)$  обмежена в околі точки  $O(0, 0)$ , але не є неперервною, а функція  $K_1(t_0, t)$  неінтегровна в околі цієї точки. Розв'язки  $\gamma(t)$  рівняння (4.1.7) мають у точці  $O$  для даного прикладу особливість виду  $\rho^{-1/3}$ .

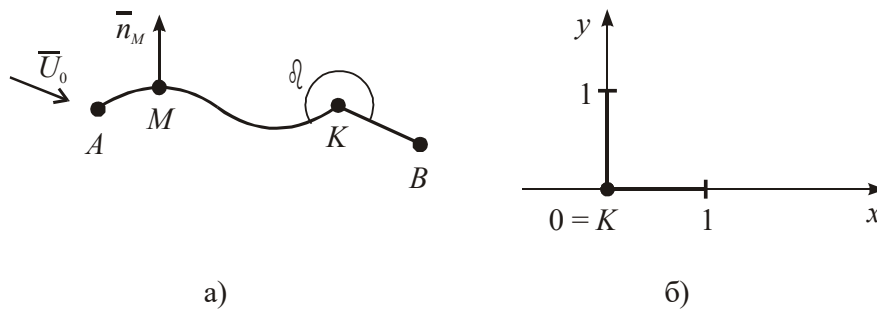


Рис. 4.1.3

Зауваження 4.1.2. Якщо формально використати рівняння (4.1.10) для слабко зігнутого профілю стосовно профілю із закрилком, тобто коли закрилок  $[q, B]$  (рис. 4.1.4) відхилений на малий кут і знаходиться під малим кутом атаки, то отримуємо, що в рівнянні (4.1.10) права частина матиме розрив першого роду в точці  $q$ . Тому розв'язок  $\gamma(t)$  цього рівняння матиме в точці  $q$  логарифмічну особливість, що випливає із результатів [1,7,12,19].

Розглянемо тепер обтікання тонкого профілю  $L$  біля екрану (рис. 4.1.5) потоком, паралельним до даного екрану. Тоді треба побудувати такий вихровий шар, щоб збурені ним швидкості задовольняли умову непротікання на профілі та на екрані.

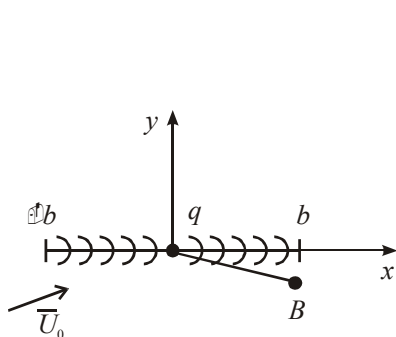


Рис. 4.1.4

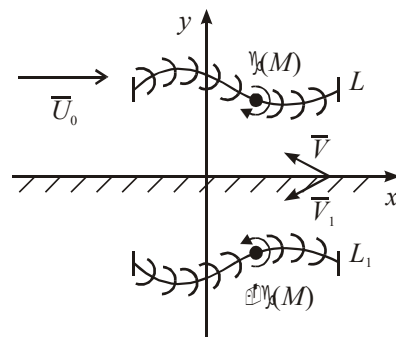


Рис. 4.1.5

Оскільки течія, що розглядається, не має нормальної складової на екрануючій поверхні, то необхідний вихровий шар будується таким чином. Нехай рівнем плоского екрану буде вісь  $Ox$ . Розглянемо профіль  $L_1$  у площині  $Oxy$ , симетричний профілю  $L$  відносно осі  $Ox$ . Якщо параметричне представлення для  $L$  буде  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $s \in [0, l]$ , то для  $L_1$  маємо  $x_1 = x(s)$ ,  $y_1 = -y(s)$ . Розташуємо на профілі  $L$  вихровий шар інтенсивності  $\gamma(s)$ , а на профілі  $L_1$  – шар інтенсивності  $-\gamma(s)$ . Тоді згідно з формулою (4.1.3) швидкість, збурена профілем  $L$  в точці  $M_0 \notin L$ , має вигляд

$$\bar{V}(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{[y_0 - y(s)]\bar{i} - [x_0 - x(s)]\bar{j}}{[y_0 - y(s)]^2 - [x_0 - x(s)]^2} \gamma(s) ds, \quad (4.1.16)$$

а швидкість, збурена профілем  $L_1$  у точці  $M_0 \notin L_1$ , – вигляд

$$\bar{V}_1(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{[y_0 + y(s)]\bar{i} - [x_0 - x(s)]\bar{j}}{[y_0 + y(s)]^2 - [x_0 - x(s)]^2} (-\gamma(s)) ds. \quad (4.1.17)$$

Тоді для точок осі  $Ox$  ( $M_0(0, x_0)$ ) отримаємо

$$\bar{V}(M_0) + \bar{V}_1(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{-2y(s)\bar{i}}{[y(s)]^2 + [x_0 - x(s)]^2} \gamma(s) ds. \quad (4.1.18)$$

Таким чином, вибраний вихровий шар на профілях  $L$  і  $L_1$  дає збурену швидкість, яка задовольняє умову непротікання землі. Отже, залишилося виконати умову непротікання на профілі  $L$ . Для цього функція  $\gamma(s)$  має бути розв'язком рівняння

$$[\bar{V}(x(s_0), y(s_0)) + \bar{V}_1(x(s_0), y(s_0))]\bar{n}_{M_0} = -\bar{U}_0 \bar{n}_M, \quad (4.1.19)$$

тобто рівняння

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{y'(s_0)[y(s_0) - y(s)] + x'(s_0)[x(s_0) - x(s)]}{[y(s_0) - y(s)]^2 + [x(s_0) - x(s)]^2} \gamma(s) ds + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{y'(s_0)[y(s_0) + y(s)] + x'(s_0)[x(s_0) - x(s)]}{[y(s_0) + y(s)]^2 + [x(s_0) - x(s)]^2} \gamma(s) ds = \\ & = f(s_0), \quad s_0 \in (0, l). \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Рівняння (4.1.20) також має нескінченно багато розв'язків, і тому знов можна розглядати циркуляційне, безциркуляційне та, якщо існує, безударне обтікання.

Нарешті, розглянемо *гратку профілів*, яка складається із системи відрізків  $[-b, b] \times y_k$ , де  $y_k = kl$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $l$  – фіксоване додатне число, а  $[-b, b]$  – відрізок осі  $Ox$ . Нехай потік, що набігає, буде плоскопаралельним та необмеженим. Оскільки при цьому умови обтікання будь-якого профілю однакові, інтенсивність вихрового шару на профілях залежить тільки від координати  $x$  і не залежить від  $y_k$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$ . Тому умову непроникнення достатньо виконати на одному з профілів, наприклад для профілю, розташованого на осі  $Ox$ . Якщо позначити  $\bar{V}_k$  – швидкість у точці  $M_0$  від  $k$ -го профілю, то умова непроникнення  $0$ -го профілю матиме вигляд

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-b}^b \frac{x_0 - x}{(x_0 - x)^2 + y_k^2} \gamma(x) dx = f(x_0), \quad x_0 \in (-b, b). \quad (4.1.21)$$

Використовуючи поняття комплексного потенціалу [1,7,9,19], можна показати, що

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_0 - x}{(x_0 - x)^2 + y_k^2} = \frac{1}{2l} \operatorname{cth} \frac{\pi}{l} (x_0 - x). \quad (4.1.22)$$

Тому рівняння (4.1.21) запишемо так:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma(x) dx}{x_0 - x} + \frac{1}{2l} \int_{-b}^b K(x_0, x) \gamma(x) dx = f(x_0), \quad (4.1.23)$$

де функція  $K(x_0, x) = \frac{(x_0 - x) \operatorname{cth} \frac{\pi}{l} (x_0 - x) - \frac{l}{\pi}}{x_0 - x}$  є аналітичною. Для цього рівняння також можна шукати розв'язки, які відповідають циркуляційному, безциркуляційному та безударному обтіканням.

Нехай тепер профіль  $L$  є тілесним без гострої кромки, тобто крива  $L$  є простою замкненою гладкою. Будемо припускати, що параметр  $t$  змінюється на відрізку  $[0, 2\pi]$ . Тоді рівняння (4.1.7) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K(t_0, t)}{\sin \frac{t_0 - t}{2}} \gamma(t) dt &= f(t_0), \quad t_0 \in [0, 2\pi], \\ K(t_0, t) &= \frac{x'(t_0) \tilde{x}_2(t_0, t) + y'(t_0) \tilde{y}_2(t_0, t)}{\tilde{r}_{2, MM_0}^2 r'_{M_0}} r'_M, \\ \tilde{x}_2(t_0, t) &= \frac{x(t_0) - x(t)}{\sin \frac{t_0 - t}{2}}, \quad \tilde{y}_2(t_0, t) = \frac{y(t_0) - y(t)}{\sin \frac{t_0 - t}{2}}, \\ \tilde{r}_{2, MM_0}^2 &= \tilde{x}_2^2(t_0, t) + \tilde{y}_2^2(t_0, t). \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Функції  $\tilde{x}_2(t_0, t)$  та  $\tilde{y}_2(t_0, t)$  мають розриви першого роду, тому що  $\tilde{x}_2(t_0, t) \rightarrow 2x'(t_0)$  при  $t \rightarrow t_0$  і  $\tilde{x}_2(t_0, t) \rightarrow -2x'(t_0)$  при  $t \rightarrow t_0 + 2\pi$ , але функція  $\tilde{r}_{2, MM_0}$  неперервна в точці  $t_0$  і не перетворюється в нуль на  $[0, 2\pi]$ , якщо  $x'(t)$  та  $y'(t)$  неперервні на  $[0, 2\pi]$  та  $r'_M \neq 0$  на  $[0, 2\pi]$ .

Розглянемо функції

$$\begin{aligned} x_3(t_0, t) &= \tilde{x}_2(t_0, t) - 2 \cos \frac{t_0 - t}{2} x'(t_0), \\ y_3(t_0, t) &= \tilde{y}_2(t_0, t) - 2 \cos \frac{t_0 - t}{2} y'(t_0). \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Оскільки  $2 \cos \frac{t_0 - t}{2} x'(t_0) \rightarrow 2x'(t_0)$  для  $t \rightarrow t_0$  і  $2 \cos \frac{t_0 - t}{2} x'(t_0) \rightarrow -2x'(t_0)$  для  $t \rightarrow t_0 + 2\pi$ , то функції  $x_3(t_0, t)$  і  $y_3(t_0, t)$  неперервні в точці  $t_0$ . Таким чином, рівняння (4.1.24), а отже, й (4.1.7) може бути записано у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{t_0 - t}{2} \gamma(t) dt + \int_0^{2\pi} \tilde{K}_1(t_0, t) \gamma(t) dt &= f(t_0), \quad t_0 \in [0, 2\pi], \\ \tilde{K}_1(t_0, t) &= \frac{1}{2\pi} \left[ A(t_0, t) - \frac{1}{2} \right] \operatorname{ctg} \frac{t_0 - t}{2} + B(t_0, t), \\ A(t_0, t) &= \frac{2r'_{M_0} r'_M}{\tilde{r}_{2, MM_0}^2}, \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

$$B(t_0, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{y'(t_0)\tilde{y}_3(t_0, t) + x'(t_0)\tilde{x}_3(t_0, t)}{\tilde{r}_{2,MM_0}^2 r'_{M_0}} r'_M,$$

$$\tilde{x}_3(t_0, t) = \frac{x_3(t_0, t)}{\sin \frac{t_0 - t}{2}}, \quad \tilde{y}_3(t_0, t) = \frac{y_3(t_0, t)}{\sin \frac{t_0 - t}{2}}.$$

Якщо  $x''(t), y''(t) \in H$  на  $[0, 2\pi]$ , то  $\tilde{K}_1(t_0, t) \in H$  на  $[0, 2\pi]$ .

Якщо на кривій  $L$  є точки порушення гладкості (гострі кромки), то орт дотичної має в цих точках розриви першого роду, а ядро  $\tilde{K}_1(t_0, t)$ , як і в наведеному вище прикладі, може мати в цих точках неінтегровні особливості.

Відзначимо, що оскільки потік, що набігає, є потенціальним у всій площині, то для будь-якого тілесного профілю виконується рівність

$$\int_L f(M) ds = 0 \quad (4.1.27)$$

для правої частини рівнянь (4.1.7), (4.1.26), отже, будуть виконуватися рівності

$$\int_L \frac{y'(s_0)[y(s_0) - y(s)] + x'(s_0)[x(s_0) - x(s)]}{[y(s_0) - y(s)]^2 + [x(s_0) - x(s)]^2} ds_0 = 0, \quad (4.1.28)$$

$$\int_0^{2\pi} \tilde{K}_1(t_0, t) dt_0 = 0. \quad (4.1.29)$$

Перше з них виконується для будь-якого  $s \in [0, l]$ , а друге – у тому випадку, якщо  $t_0 = \frac{2\pi}{l} s_0$  для будь-якого  $t$ .

Покажемо, що для тілесного профілю розв'язок рівняння (4.1.7) визначено з точністю до константи, тобто в цьому рівнянні константа є власним розв'язком. Дійсно, нехай  $\gamma(M) = C$ , а функція  $f(M_0)$  не дорівнює нулю. Тоді, як випливає з (4.1.26), функція  $f(M_0)$  належить класу  $H$  на  $L$  (припускаємо, що  $x''$  і  $y'' \in H$  на  $L$ ). Отже, з точністю до константи рівняння для стрибка потенціалу подвійного шару має гладкий розв'язок, який не дорівнює нулю і не дорівнює константі  $\gamma(M) = g'_s(M)$ , і тому  $\gamma(M)$  не може бути константою. Одержали протиріччя.

Таким чином, маємо рівність

$$\int_L \frac{y'_{0s}(y_0 - y) + x'_{0s}(x_0 - x)}{r_{MM_0}^2} ds_M = 0, \quad M_0 \in L. \quad (4.1.30)$$

Як показують систематичні розрахунки обтікання різних тілесних контурів, рівності (4.1.27), (4.1.28), (4.1.30) виконуються для будь-якого замкнутого кусково-гладкого контуру.

Доведемо тепер таке твердження.

**Т в е р д ж е н н я 4.1.1.** Якщо тілесний профіль моделюється вихровим шаром, то поле швидкостей, яке дорівнює сумі швидкостей від набігаючого потоку і збурених швидкостей, дорівнює нулю всередині профілю.

**Д о в е д е н н я .** Як відомо [7,12], розв'язок зовнішньої задачі Неймана за допомогою потенціалу подвійного шару одночасно дає розв'язок внутрішньої задачі Неймана для цього самого замкнутого контуру з тими самими крайовими умовами. Оскільки в задачах обтікання

$f(M_0) = -\bar{U}_0 \bar{n}_{M_0}$ , то розв'язком внутрішньої задачі Неймана буде також потенціал  $-\Phi_0(M)$  від набігаючого потоку. Розв'язки внутрішньої задачі Неймана можуть відрізнятися тільки на константу [12,19] у класі абсолютно інтегровних функцій, тому

$$\Phi(M) = -\Phi_0(M) + C, \quad M \in D^{(-)}. \quad (4.1.31)$$

Отже,

$$\text{grad } \Phi(M) = -\text{grad } \Phi_0(M), \quad M \in D^{(-)}. \quad (4.1.32)$$

або

$$\bar{V}(M) + \bar{U}_0(M) \equiv 0, \quad M \in D^{(-)}, \quad (4.1.33)$$

що й доводить твердження.

Зауважимо, що рівність (4.1.33) дозволяє звести задачу обтікання тілесного профілю при моделюванні його вихровим шаром до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно інтенсивності вихрового шару  $\gamma(M)$ . Дійсно, зробивши в рівності (4.1.33) перехід до точок профілю  $L$ , отримаємо в границі ( $\bar{U}_0^-(M_0) = \bar{U}_0(M_0)$ )

$$\bar{V}^-(M) + \bar{U}_0(M) \equiv 0, \quad M_0 \in L. \quad (4.1.34)$$

Проектуючи рівність (4.1.34) на орт дотичного вектора  $\tau(M_0) = x'_{0s}\bar{i} + y'_{0s}\bar{j}$  до  $L$  в точці  $M_0$  і враховуючи формулу (4.1.4), отримуємо

$$-\frac{1}{2}\gamma(s_0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^l \omega(s_0, s) \gamma(s) ds = f_1(s_0), \quad s_0 \in [0, l], \quad (4.1.35)$$

$$\omega(s_0, s) = \frac{x'(s_0)[y(s_0) - y(s)] - y'(s_0)[x(s_0) - x(s)]}{[y(s_0) - y(s)]^2 + [x(s_0) - x(s)]^2},$$

$$f_1(s_0) = -\bar{U}_0 \tau_{M_0}.$$

Зробимо перетворення функції  $\omega(s_0, s)$  таким чином:

$$\omega(s_0, s) = \frac{x'(s_0) \frac{y_3(s_0, s)}{s_0 - s} - y'(s_0) \frac{x_3(s_0, s)}{s_0 - s}}{x_2^2(s_0, s) + y_2^2(s_0, s)}, \quad (4.1.36)$$

$$y_3(s_0, s) = y_2(s_0, s) - y'(s_0), \quad x_3(s_0, s) = x_2(s_0, s) - x'(s_0),$$

$$y_2(s_0, s) = \frac{y(s_0) - y(s)}{s_0 - s}, \quad x_2(s_0, s) = \frac{x(s_0) - x(s)}{s_0 - s}.$$

Формула (4.1.36) показує, що якщо  $x''(s)$  і  $y''(s)$  належать класу  $H$  на  $L$ , то ядро  $\omega(s_0, s_0)$  також належить цьому класу на  $L$ , і

$$\omega(s_0, s_0) = \frac{y'(s_0)x''(s_0) - x'(s_0)y''(s_0)}{2}. \quad (4.1.37)$$

Оскільки

$$f_1(s_0) = -\bar{U}_0 \tau_{M_0} = -\text{grad } \Phi_0(s_0) \tau(s_0) = -\frac{\partial \Phi_0(s_0)}{\partial \tau_{M_0}} = -\frac{\partial \Phi_0(s_0)}{\partial s_0},$$

то виконується рівність

$$\int_L f(s) ds = 0. \quad (4.1.38)$$

Міркування, аналогічні міркуванням при отриманні формули (4.1.30), показують, що константа є власним розв'язком рівняння (4.1.35), тобто справедлива рівність

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_L \omega(s_0, s) ds = 0. \quad (4.1.39)$$

Приклад 4.1.2. Нехай  $L$  – коло одиничного радіуса з центром у початку координат:  $x = \cos s$ ,  $y = -\sin s$ , і потік, який набігає, має швидкість  $U_0 = \vec{i}$ . Тоді рівняння (4.1.26) набуде вигляду

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{s_0 - s}{2} \gamma(s) ds = \cos s_0, \quad s_0 \in [0, 2\pi], \quad (4.1.40)$$

а рівняння (4.1.35) – вигляду

$$-\frac{1}{2} \gamma(s_0) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(s) ds = \sin s_0. \quad (4.1.41)$$

Як впливає із спектральної формули для ядра Гільберта, для рівняння (4.1.40) (а для рівняння (4.1.41) перевіряється безпосередньо) розв'язком буде функція

$$\gamma(s) = -2 \sin s + C, \quad (4.1.42)$$

де  $C$  – довільна константа.

## 4.2. Виділення класу розв'язків. Б-умова методу дискретних особливостей

Якщо тілесний профіль  $L$  є гладким (не має гострих кромки), то для усталеного обтікання повинен виконуватися парадокс Даламбера [3,9] про відсутність циркуляції навколо такого профілю. Тому єдиний розв'язок рівнянь (4.1.7) і (4.1.35), який вимагається в задачах обтікання, буде визначатися рівністю

$$\int_L \gamma(s) ds = 0. \quad (4.2.1)$$

А взагалі для цих рівнянь єдиний розв'язок можна виділити, задаючи значення інтеграла від розв'язку

$$\int_L \gamma(s) ds = C, \quad (4.2.2)$$

або значення розв'язку  $\gamma(s)$  в деякій точці  $M^*$  на кривій  $L$ , тобто

$$\gamma(s^*) = C. \quad (4.2.3)$$

Нехай тепер тілесний профіль має одну гостру кромку  $B$ . При умові плавного обтікання відносні швидкості частинок середовища при підході до точки  $B$  зверху і знизу профілю (рис. 4.1.2, б) повинні бути однаковими (умова Кутта–Жуковського), тобто  $\bar{V}_{\text{відн}}^+(s_B - 0) = \bar{V}_{\text{відн}}^+(s_B + 0)$ , а отже, швидкість повинна бути скінченною. Однак згідно з рівністю (4.1.34) і формулою (4.1.4) для будь-якої точки тілесного профілю можна записати

$$\begin{aligned} \bar{V}_{\text{відн}}^+(M_0) &= \bar{V}_{\text{відн}}^+(M_0) - \bar{V}_{\text{відн}}^-(M_0) = \\ &= \bar{V}^+(M_0) - \bar{V}^-(M_0) = \frac{1}{2} \gamma(M_0) \tau(M_0). \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Отже, з умови Кутта–Жуковського в точці  $B$  отримуємо, що скінченне значення в цій точці повинна мати інтенсивність вихрового шару  $\gamma(B)$ . Нехай зовнішній кут у точці  $B$  не дорівнює  $2\pi$ , тоді як показано у [1,7] функція  $\gamma(M) = g'_s(M)$  перетворюється або в нескінченність, або в нуль у точці  $B$ . Через те що  $\gamma(B)$  скінченне, з попереднього отримаємо  $\gamma(B) = 0$ .

**В и с н о в к .** Умовою плавного обтікання гострої кромки  $B$  тілесного профілю є рівність

$$\gamma(B) = 0. \quad (4.2.5)$$

Розв'язавши рівняння (4.1.7) при умові (4.2.5), зможемо потім обчислити циркуляцію, яку створює профіль, а також інші аеродинамічні характеристики.

Якщо тілесний профіль  $L$  має кілька гострих кромок (наприклад, його контур є трикутником, ромбом або іншою аналогічною фігурою), то єдиний розв'язок рівняння (4.1.7) можна виділити, або задаючи значення інтеграла від  $\gamma(M)$  по  $L$  (наприклад, взяти умову безциркуляційності (4.2.1)), або вказуючи, яка гостра кромка обтікається плавно, тобто на якій кромці  $\gamma(M)$  перетворюється в нуль.

Застосування методу дискретних вихорів до чисельного розв'язання задач обтікання профілів та ґратки профілів у даному параграфі демонструється на прикладі тонкого слабо зігнутого профілю та ґратки таких профілів.

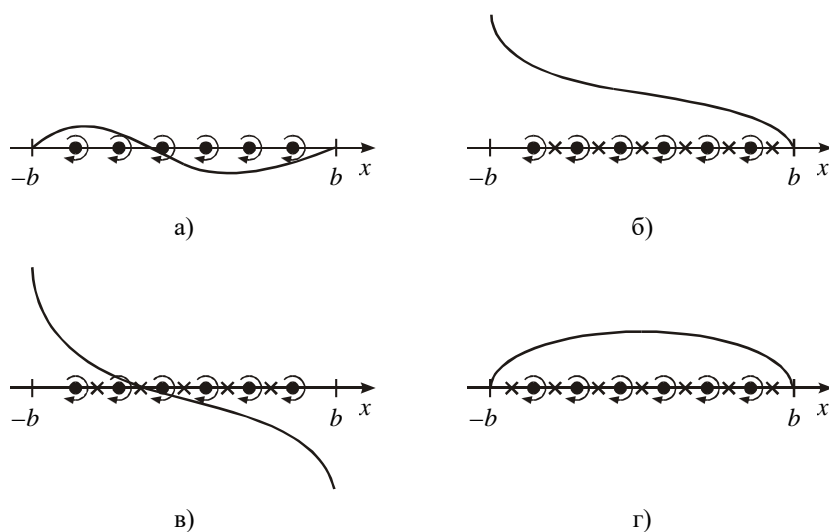
Для зручності запишемо *рівняння тонкого слабо зігнутого профілю* у вигляді (див. (4.1.10))

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma(x) dx}{x_0 - x} = f(x_0), \quad x_0 \in [-b, b], \quad (4.2.6)$$

де  $f(x_0) = -U_0 \bar{n}_{M_0}$ ,  $U_0$  – швидкість набігаючого потоку,  $\bar{n}_{M_0}$  – орт нормалі до верхнього боку профілю в точці  $M(x_0, y(x_0))$ , якщо  $y = y(x)$ ,  $x \in (-b, b)$ , є рівнянням цього профілю.

*Б-умова методу дискретних особливостей* полягає у визначенні характеру точки (точки колокації з виконанням умови непроникнення, або дискретної особливості), в залежності від характеру поведінки функції  $\gamma(x)$  в околі даної точки.

Метод дискретних вихорів у даному випадку будується так, що профіль замінюють вихровим шаром, який розташовують на відрізку  $[-b, b]$  осі  $Ox$  (рис. 4.2.1, а). Його інтенсивність не залежить від координати  $z$ , і її позначають  $\gamma(x)$ .



**Рис. 4.2.1**

Умову про непротікання профілю виконують у точках відрізка  $[-b, b]$ , тобто сума нормальних складових швидкості в точках відрізка від вихрового шару та знесеної в цю точку швидкості набігаючого потоку в точці профілю, яка проектується в дану точку смуги, дорівнює нулю. Вихровий шар, який моделює профіль, замінюється нескінченно довгими прямолінійними вихровими шнурами постійної інтенсивності  $\Gamma_k$ , рівняння яких  $x = x_k = -b + kh$ ,  $h = 2b/(n+1)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , а крайова умова (4.1.6) непротікання профілю виконується в розрахункових точках  $x_{0m} = x_m + h/2$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$ . Нормальна складова швидкості, яка індукується  $k$ -м вихором в  $m$ -й розрахунковій точці, записується у вигляді

$$V_{km} = \Gamma_k \omega_k^m = -\frac{\Gamma_k}{2\pi(x_{0m} - x_k)}. \quad (4.2.7)$$

Нормальна складова  $V_m$  швидкості від всієї системи дискретних вихорів в  $m$ -й розрахунковій точці має вигляд

$$V_m = \sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m. \quad (4.2.8)$$

Розглянемо циркуляційне обтікання профілю (рис. 4.2.6, б). У цьому випадку із експерименту випливає [1,7], що вихрова інтенсивність повинна бути необмеженою біля передньої кромки (точка  $-b$ ) і обмеженою біля задньої кромки (точка  $b$ ). Отже, в силу Б-умови методу дискретних вихорів найближчим до передньої кромки повинен розміщуватися вихор, а до задньої кромки – розрахункова точка, тому для розрахункових точок беруться номери  $m = 1, \dots, n$ . Виконуючи в цих точках умову непротікання (4.1.6), отримуємо систему рівностей

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m = V_m^*, \quad V_m^* = -\bar{U}_0 \bar{n}_{M_{0m}}, \quad m = 1, \dots, n, \quad (4.2.9)$$

або, враховуючи формулу (4.2.7)

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{x_{0m} - x_k} = V_m^*, \quad m = 1, \dots, n. \quad (4.2.10)$$

З результатів розділу 2.3 випливає, що якщо взяти  $\Gamma_k = \gamma_n(x_k)h$  ( $\gamma_n$  – наближене значення  $\gamma$ ), то система лінійних алгебраїчних рівнянь (4.1.10) апроксимує сингулярне інтегральне рівняння (4.2.6).

При безциркуляційному обтіканні (рис. 4.2.1, в), коли інтенсивність  $\gamma(x)$  не обмежена на обох кромках, Б-умова вимагає, щоб крайніми до обох кромок розміщувалися дискретні вихори, тобто в цьому випадку для розрахункових точок треба брати  $m = 1, \dots, n-1$ . Використання умови непротікання в цих точках дасть  $n-1$  рівнянь для  $n$  невідомих циркуляцій дискретних вихорів. Отримаємо недовизначену систему. Довизначається ця система за допомогою умови безциркуляційного обтікання. В результаті цього отримуємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m = V_m^*, \quad m = 1, \dots, n-1, \quad \sum_{k=1}^n \Gamma_k = 0, \quad (4.2.11)$$

яку необхідно розв'язувати при  $C=0$ .

При безударному обтіканні (рис. 4.2.1, г), коли інтенсивність обмежена на обох кромках, Б-умова вимагає, щоб крайніми до обох кромок розміщувалися розрахункові точки, тобто в цьому

випадку треба для розрахункових точок брати  $m=0,1,\dots,n$ . Використання умови непротікання в цих точках дасть  $n+1$  рівнянь для  $n$  невідомих циркуляцій дискретних вихорів. Отримаємо пере-визначену систему, причому, як правило, несумісну. Визначеною її зробимо за допомогою введення регуляризуючого фактора  $\gamma_{0n}$  (нової додаткової невідомої), тобто розглянемо систему

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m = V_m^*, \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (4.2.12)$$

Таким чином, маємо [1,7] повне математичне обґрунтування для тонкого профілю в стаціо-нарному безмежному потоці. Ця ж теорема дає обґрунтування Б-умови методу дискретних вихорів (дискретного аналога гіпотези Кутта–Жуковського), приклади чисельних розрахунків у деяких кон-кретних випадках розглядалися вище.

Відзначимо, що сумарні аеродинамічні характеристики за методом дискретних вихорів зна-ходяться з будь-якою наперед заданою точністю.

Важливою особливістю методу дискретних вихорів є те, що вид функції  $\gamma(x)$ , до якої має привести розв'язання відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, визначається тільки взає-мним розміщенням дискретних вихорів і розрахункових точок, а не задається апіорі. Це особливо важливо, коли доводиться розв'язувати нові задачі аеродинаміки, які не досліджені ще математи-чно.

З а у в а ж е н н я 4.2.1. Якщо тонкий слабо зігнутий профіль моделювати не вихровим ша-ром, а шаром диполів, тобто розглянути безциркуляційну задачу, і рівняння (4.2.6) записати у ви-гляді

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{g(x)dx}{(x_0 - x)^2} = f(x_0), \quad (4.2.13)$$

де  $\gamma(x) = g'(x)$ ,  $x \in (-b, b)$ , то чисельно його треба розв'язувати за допомогою методу дискретних вихрових пар. Розглянемо цей метод.

Візьмемо точки  $x_k = -b + (k-1)h$ ,  $h = 2b/n$ ,  $k = 1, \dots, n+1$ , і точки  $x_{0m} = x_m + h/2$ ,  $m = 1, \dots, n$ . У кожній точці з пари точок  $(x_k, x_{k+1})$ ,  $k = 1, \dots, n$ , розмістимо по дис-кретному вихору інтенсивності  $\hat{\Gamma}_k$  і  $-\hat{\Gamma}_k$ , відповідно,  $\hat{\Gamma}_k = g_n(x_{0k})$  (рис. 4.2.2). Тоді виконання умови непроникнення в точках  $x_{0m}$ ,  $m = 1, \dots, n$ , дає систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^n \hat{\Gamma}_k \hat{\omega}_k^m = V_m^*, \quad m = 1, \dots, n, \quad (4.2.14)$$

де

$$\hat{\Gamma}_k = g_n(x_{0k}),$$

$$\hat{\omega}_k^m = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x_{0m} - x)^2} = -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{x_{0m} - x_{k+1}} - \frac{1}{x_{0m} - x_k} \right].$$

Маємо, що значення  $\hat{\Gamma}_k = g_n(x_{0k})$ , які дає система (4.2.14), рівномірно збігаються до значень точ-ного розв'язку  $g(x_0)$  рівняння (4.2.13), тобто отримаємо математичне обґрунтування методу дис-кретних вихрових пар.

Якщо систему (4.2.14) перетворити в систему (4.2.11), то для інтенсивностей дискретних вихорів  $\Gamma_k$  одержимо формулу

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \hat{\Gamma}_k - \hat{\Gamma}_{k-1} = g_n(x_{0k}) - g_n(x_{0k-1}) = \\ &= \int_{x_{0k-1}}^{x_{0k}} g'_n(x) dx, \quad k = 1, \dots, n+1, \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

де покладаємо  $x_{0-1} = -b$ ,  $x_{0n+1} = b$ ,  $g_n(x_{0-1}) = g_n(x_{0n+1}) = 0$ .

З а у в а ж е н н я 4.2.2. Міркування попереднього зауваження показують, що в методі дискретних вихорів, за допомогою якого записані системи (4.2.9), (4.2.11), (4.2.12), можна покласти

$$\Gamma_k = \int_{x_{0k-1}}^{x_{0k}} \gamma_n(x) dx, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.2.16)$$

При такому підході до розгляду  $\Gamma_k$  стає зрозумілим, що в методі дискретних вихорів важливо тільки взаємне розміщення множини дискретних вихорів та розрахункових точок. Крайні дискретні вихори можуть знаходитися і на кінцівках профілю (гострих кромках) (рис. 4.2.3 для безциркуляційної задачі і рис. 4.2.1, в).

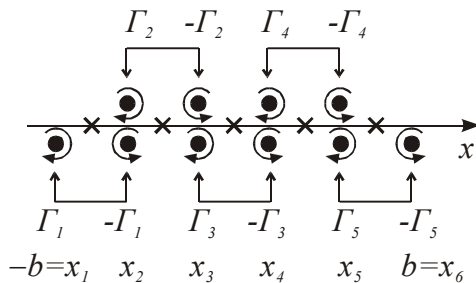


Рис. 4.2.2

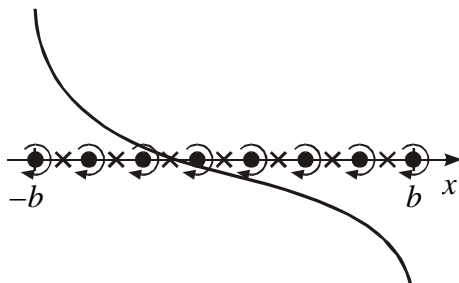


Рис. 4.2.3

З а у в а ж е н н я 4.2.3. Із системи (4.2.10) видно, що метод дискретних вихорів є спеціальним методом чисельного розв'язання відповідних сингулярних або гіперсингулярних (див. (4.2.13)) інтегральних рівнянь. Тому далі в даному розділі для задач аеродинаміки будемо давати відповідне інтегральне рівняння, описувати відповідну систему дискретних вихорів і записувати необхідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо тепер тонкий профіль із закритком (рис. 4.1.4). У цьому випадку нормальна складова швидкості набігаючого потоку до поверхні профілю має в точці  $q$  відхилення закритку розрив першого роду. Тому в рівнянні (4.2.6) права частина має розрив першого роду в точці  $q$ , а функція  $\gamma(x)$  має в цій точці логарифмічну особливість. Використовуючи вищевведені зауваження, бачимо, що знайти інтенсивність дискретних вихорів у даній задачі можна такими способами.

1. Дискретні вихори та розрахункові точки розмістити так, щоб точка  $q$  знаходилася посередині між найближчими до неї дискретним вихором та розрахунковою точкою. Після цього залежно від типу задачі розглянути одну із систем (4.2.9), (4.2.11) або (4.2.12).

2. Розрахунки показують, що результати в околі точки  $q$  виходять точнішими, якщо розрахункові точки брати так, щоб точка  $q$  була однією з них, і в цій точці взяти півсуму  $(V^*(q-0) + V^*(q+0))/2$  нормальних складових швидкості від набігаючого потоку в точці зліва і справа. Математичного доведення цього факту поки що немає.

Тепер розглянемо обтікання стаціонарним плоскопаралельним потоком тонкого профілю, який знаходиться біля поверхні екрану (рис. 4.2.4). При цьому профіль розміщується, як і раніше, на прямій  $y=0$ , а земля описується прямою  $y=-H$ . Метод дискретних вихорів у даному випадку застосовується таким чином [1,4,7,10]. На профілі беремо дискретні вихори та розрахункові точки

так само, як і раніше, ще беремо дискретні вихори в точках  $A_{kH} = (x_k, -2H)$  на площині  $Oxy$  з інтенсивностями  $\Gamma_{kH} = -\Gamma_k$  для забезпечення непротікання лінії  $y = -H$ . Виконуючи умову непротікання в розрахункових точках і застосовуючи формулу (3.3.13), одержимо, що рівняння (4.2.20) для профілю біля землі, яке в даному конкретному випадку набуває вигляду

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \gamma(x) \left[ \frac{1}{x_0 - x} - \frac{x_0 - x}{(x_0 - x)^2 + 4H^2} \right] dx = V^*(x_0), \quad (4.2.17)$$

для циркуляційної задачі заміниться такою системою лінійних алгебраїчних рівнянь (рис. 4.2.4):

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m - \sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^{Hm} = V_m^*, \quad m = 1, \dots, n, \quad (4.2.18)$$

де  $\omega_k^m$  визначено в (4.2.7), а

$$\omega_k^{Hm} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x_{0m} - x_k}{(x_{0m} - x_k)^2 + 4H^2}.$$

Для безциркуляційного та безударного обтікань отримаємо системи (4.2.20), (4.2.21). Таким чином, маємо обґрунтування методу дискретних вихорів для стаціонарного обтікання профілю біля землі.

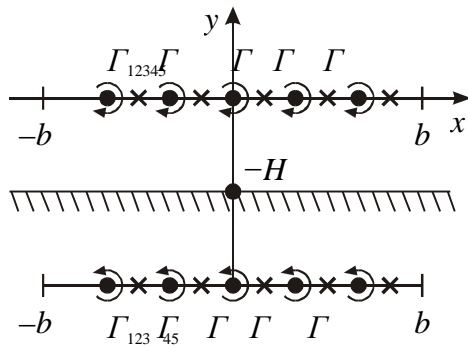


Рис. 4.2.4

При бажанні отримати точніші розрахунки біля країв треба скористатися інтерполяційними методами, тобто нерівномірним розташуванням дискретних вихорів та розрахункових точок. При цьому краще спочатку розташувати профіль на відрізку  $[-1, 1]$  за допомогою заміни змінної  $x = bt$ .

Нарешті, розглянемо ґратку профілів, яка складається із системи відрізків  $[-b, b] \times y_k$ , де  $y_k = kl$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$ ,  $l > 0$ ,  $[-b, b]$  – відрізок осі  $Ox$ . Як впливає з формул (4.1.22) і (4.1.23), задача обтікання плоскопаралельним потоком цієї ґратки при моделюванні поверхонь профілів вихровим шаром зведеться до розв'язку такого сингулярного інтегрального рівняння:

$$\frac{1}{2l} \int_{-b}^b \gamma(x) \operatorname{cth} \frac{\pi}{l} (x_0 - x) dx = V^*(x_0). \quad (4.2.19)$$

Тепер неперервний вихровий шар замінимо системою дискретних вихрових ниток, розміщених у точках  $(x_i, y_k)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$ , інтенсивність яких дорівнює  $\Gamma_i = \gamma(x_i)h$ , а точки  $x_i$  вибрані, як і в (4.2.10). Умову непротікання будемо виконувати в точках  $x_{0i} = x_i + h/2$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , на осі  $Ox$ . Тоді для циркуляційного обтікання рівняння (4.2.19) замінимо системою

$$\frac{1}{2l} \sum_{k=1}^n \Gamma_i \operatorname{cth} \frac{\pi}{l} (x_{0i} - x_i) = V_j^*, \quad j = 1, \dots, n; \quad (4.2.20)$$

для безциркуляційного обтікання – системою

$$\frac{1}{2l} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \operatorname{cth} \frac{\pi}{l} (x_{0i} - x_i) = V_j^*, \quad j=1, \dots, n-1,$$

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k = 0, \quad j=n;$$

для безударного обтікання – системою

$$\gamma_{0n} + \frac{1}{2l} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \operatorname{cth} \frac{\pi}{l} (x_{0i} - x_i) = V_j^*, \quad j=0, 1, \dots, n. \quad (4.2.21)$$

Тобто маємо математичне обґрунтування методу дискретних вихорів для ґратки профілів.

### 4.3. Тілесний та проникний профілі

Нехай контур  $L$  профілю, який обтікається, задається параметрично:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [0, l]$ , і знаходиться в стаціонарному потоці ідеальної нестисливої рідини. Виконуючи умову непротікання в точках  $M_0(x_0, y_0) = M_0(x(t_0), y(t_0))$  контуру  $L$ , приходимо до рівняння (див. (4.1.7))

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{x'_{0,t}(x_0 - x) + y'_{0,t}(y_0 - y)}{\sqrt{x'^2_{0,t} + y'^2_{0,t}} \cdot r_{MM_0}^2} \gamma(t) \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} dt =$$

$$= -\bar{U}_0 \bar{n}_{M_0} = f(t_0). \quad (4.3.1)$$

Якщо контур  $L$  є гладким розімкненим (див. рис. 4.1.2, а), то рівняння (4.3.1) є сингулярним інтегральним рівнянням першого роду на відрізку виду (4.1.9), й, отже, метод дискретних вихорів у цьому випадку будується таким чином. На відрізку  $[0, l]$  параметра  $l$  беруть канонічне розбиття, яке складається з множин:  $E = \{t_k, k=1, \dots, n\}$ ,  $t_k = kh$ ,  $k=1, \dots, n$ ,  $h=l/(n+1)$ , та  $E_0 = \{t_{0m}, m=0, 1, \dots, n\}$ ,  $t_{0m} = t_m + h/2$ ,  $m=0, 1, \dots, n$ . У точках  $M_k = (x_k, y_k)$ ,  $k=1, \dots, n$ ,  $x_k = x(t_k)$ ,  $y_k = y(t_k)$  контуру  $L$  розміщуємо дискретні вихори інтенсивності  $\Gamma_k$ , а точки  $M_{0m} = (x_{0m}, y_{0m})$ ,  $m=0, 1, \dots, n$ ,  $x_{0m} = x(t_{0m})$ ,  $y_{0m} = y(t_{0m})$  беремо розрахунковими. Тепер так само, як для тонкого слабо зігнутого профілю, тобто для рівняння (4.2.6) залежно від задачі, яка розглядається, – циркуляційної, безциркуляційної або безударної (якщо вона є здійсненою) – рівняння (4.3.1) замінюємо відповідно системою лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m = f_m, \quad m=1, \dots, n, \quad (4.3.2)$$

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m = f_m, \quad m=1, \dots, n-1, \quad (4.3.3)$$

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k = 0, \quad m=n,$$

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m = f_m, \quad m=0, 1, \dots, n, \quad (4.3.4)$$

де

$$\omega_k^m = -\frac{1}{2\pi} \frac{x'_{0m,t}(x_{0m} - x_k) + y'_{0m,t}(y_{0m} - y_k)}{r_{M_k M_{0m}}^2 \sqrt{x'^2_{0m,t} + y'^2_{0m,t}}},$$

$$r_{M_k M_{0m}}^2 = (x_{0m} - x_k)^2 + (y_{0m} - y_k)^2, \quad f_m = -\bar{U}(M_{0m}) \bar{n}_{M_{0m}}.$$

Система (4.3.2) дає розв'язок рівняння (4.3.1), необмежений на кромці профілю, яка відповідає значенню параметра  $t = 0$ . Ознакою існування безударного обтікання є прямування до нуля при  $n \rightarrow \infty$  регуляризуючої змінної  $\gamma_{0n}$ .

У розглядуваному випадку маємо математичне обґрунтування методу дискретних вихорів для гладкого розімкнутого профілю, який описується системами (4.3.2)–(4.3.4). Ці системи отримуються з виконання умови непротікання від системи дискретних вихорів і набігаючого потоку в розрахункових точках, вибір яких диктується Б-умовою методу дискретних вихорів.

З а у в а ж е н н я 4.3.1. Після розв'язання систем (4.3.2)–(4.3.4) можна шукати всі аеродинамічні характеристики профілю, який обтікається, використовуючи в дискретному вигляді відповідні формули [1,4,7]. При цьому, якщо в цих формулах використовується функція  $\gamma(x)$ , то дискретизацію формули зручніше здійснювати за точками  $M_k$  і припускати  $\gamma_k = \gamma(t_k) = \Gamma_k / \Delta S_k$ , де  $\Delta S_k$  – відстань на контурі  $L$  між точками  $M_{0k-1}$  і  $M_{0k}$ , а якщо використовується функція  $g(t)$  ( $\gamma = g'_S$ ), то дискретизацію формули зручніше здійснювати за точками  $M_{0k}$  і покласти  $g_{0k} = \sum_{\lambda=1}^k \Gamma_\lambda$ , оскільки  $g(0) = 0$  у циркуляційній задачі і  $g(0) = g(l) = 0$  – в безциркуляційній.

З а у в а ж е н н я 4.3.2. Якщо контур  $L$  є простим розімкненим, але кусково-гладким, то точки  $M_k$  розміщення дискретних вихорів треба вибирати так, щоб кутові точки контуру  $L$  входили в їх число (рис. 4.3.1).

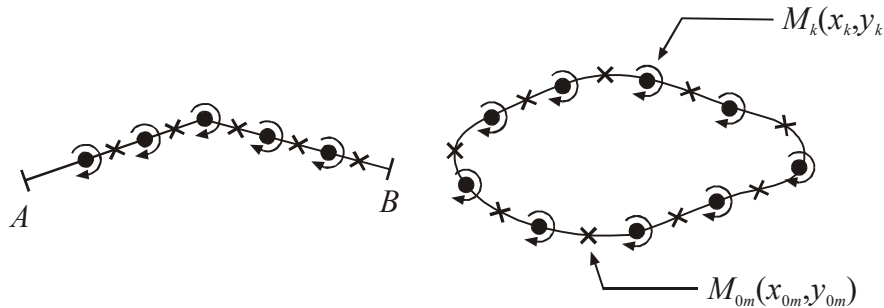


Рис. 4.3.1

Рис. 4.3.2

Нехай тепер контур  $L$  є гладким замкненим (рис. 4.3.2), тобто  $x(0) = x(l)$ ,  $y(0) = y(l)$  і орт дотичного вектора неперервний. Тоді рівняння (4.3.1) є сингулярним інтегральним рівнянням з ядром Гільберта виду (4.1.26). Його розв'язок знайдено з точністю до константи, яка визначається тим, що в аеродинаміці в цьому випадку розглядається безциркуляційна задача, й тому

$$\int_L \gamma ds = 0. \quad (4.3.5)$$

Згідно з результатами даного розділу, для рівняння з ядром Гільберта метод дискретних вихорів у цьому випадку будується таким чином. На відрізку  $[0, l]$  беремо такі дві множини точок:  $E = \{t_k, k = 1, \dots, n\}$ ,  $t_k = (k-1)h$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $h = l/n$ , і  $E_0 = \{t_{0m}, m = 1, \dots, n\}$ ,  $t_{0m} = t_m + h/2$ ,  $m = 1, \dots, n$ . Тепер знову в точках  $M_k(x_k, y_k)$  розташовуємо дискретні вихори інтенсивності  $\Gamma_k$ , а за розрахункові точки беремо точки  $M_{0m}(x_{0m}, y_{0m})$ . Дотримуючись результатів даного розділу, рівняння (4.3.1) замінюємо такою системою лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m = f_m, \quad m=1, \dots, n, \quad \sum_{k=1}^n \Gamma_k = 0, \quad (4.3.6)$$

де  $\omega_k^m$  – така сама, як і в системах (4.3.2)–(4.3.4).

У цьому випадку також справедливі зауваження 4.3.1, 4.3.2.

Як демонстрацію зауваження 4.3.2 для даного випадку на рис. 4.3.3, 4.3.4, на рис. 4.3.5 показана збіжність обчислення коефіцієнтів приєднаних мас еліпса за числом дискретних вихорів. Безперервна та пунктирна лінії відповідають обчисленим результатам і точному розв'язку. Дія екрана на приєднанні маси квадрата показана на рис. 4.3.6. Обчислені результати і точний розв'язок помічено хрестиками і безперервною лінією відповідно.

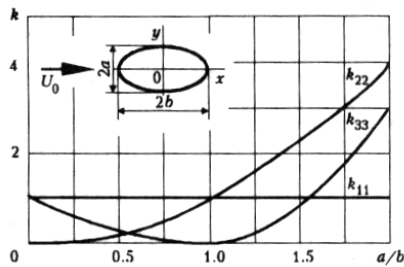


Рис. 4.3.3

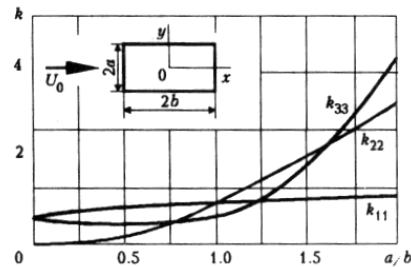


Рис. 4.3.4

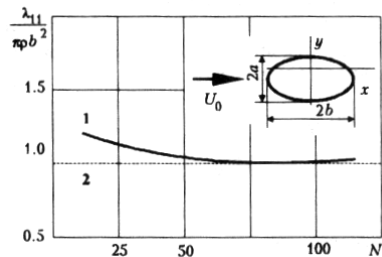


Рис. 4.3.5

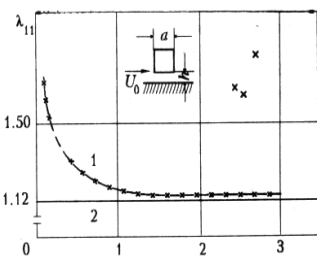


Рис. 4.3.6

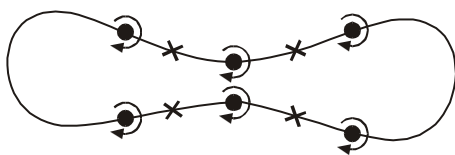


Рис. 4.3.7

(рис. 4.3.7). Якщо таке відбувається, то треба збільшувати кількість дискретних вихорів і розрахункових точок до тих пір, поки ця ситуація не зміниться.

В силу останнього зауваження, якщо тілесний профіль має "вузькі" місця (див. рис. 4.3.7) або гостру кромку (див. рис. 4.1.2, б), то можливо, що безпосередньо застосувати метод дискретних вихорів буде важко – треба брати досить велику кількість дискретних вихорів і розрахункових точок. У цьому випадку іноді зручніше скористатися методом знесення крайових умов на деяку середину поверхню [1,4,5,7]. Тоді задача знаходження поля швидкостей зводиться до розв'язання системи двох сингулярних інтегральних рівнянь другого роду зі змінними коефіцієнтами на відрізку відносно невідомих інтенсивностей вихрового шару  $\gamma(t)$  і потенціалу простого шару  $\mu(t)$ ,

розміщених на цій серединній поверхні. При цьому, якщо профіль симетричний, а серединна поверхня є відрізком, то ця система розпадається на систему двох незалежних рівнянь, в одному з яких невідомою функцією є  $\gamma(t)$ , а в другому –  $\mu(t)$ . Отримані рівняння можна чисельно розв'язувати інтерполяційними методами. До сингулярного інтегрального рівняння другого роду зводиться також задача для проникного профілю, яка має велике значення при дослідженні парашутів та дельтапланів, де потрібно врахувати проникність тканин, з яких вони зроблені.

Тому тепер умову непротікання профілю (4.1.6) буде замінено на умову

$$V\bar{n}_{M_0} + U\bar{m}_{M_0} = W, \quad M_0 \in L, \quad (4.3.7)$$

де  $W(M_0)$  – місцева швидкість протікання (проникнення) потоку через поверхню профілю за нормаллю  $\bar{n}_{M_0}$  в точці  $M_0$ .

Щоб замкнути дану задачу, будемо вважати, що швидкість протікання залежить тільки від перепаду тиску на поверхні [1,7], тобто

$$W(M_0) = f_0(\Delta P(M_0)). \quad (4.3.8)$$

З теореми Жуковського “в малому” [1,7] після лінеаризації випливає

$$\Delta p = \rho U \gamma(M_0), \quad (4.3.9)$$

де  $\rho$  – густина середовища,  $\gamma$  – інтенсивність вихрового шару, який моделює поверхню профілю, що обтікається. Таким чином, виконуючи крайову умову (4.3.7) проникнення профілю, знов приходимо до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння

$$f_1(\gamma(t_0)) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(t) dt}{t_0 - t} + \int_{-1}^1 K_1(t_0, t) dt = f(t_0), \quad t_0 \in (-1, 1). \quad (4.3.10)$$

Функція  $f_1(\gamma(t_0))$ , точніше  $f_0(\Delta p(M_0))$ , як правило, знаходиться експериментально для даного матеріалу, який досліджується і з якого зроблено профіль. Можна виділити такі три випадки:

1)  $f_1(\gamma(t_0)) \equiv 0$ , коли поверхня непроникна, і рівняння (4.3.10) набуває вигляду, добре відомого в аеродинаміці крила [3,8,9], тобто вигляду (4.1.9);

2)  $f_1(\gamma(t_0)) = a\gamma(t_0)$ , де  $a$  – деяка функція, яка характеризує локальну ступінь протікання тіла. Експериментальні дані показують, що для парашутних тканин співвідношення (4.3.8) досить добре описується лінійною залежністю [3,4]. Це зумовлює підвищений інтерес до даного випадку;

3)  $f_1(\gamma(t_0))$  – нелінійна функція. Тоді чисельно рівняння (4.3.10) розв'язують ітераційно за допомогою методу дискретних вихорів. У джерелах [4,10,16] наведені деякі розрахункові дані. Питання обґрунтування розрахункової схеми, яка там використовується, поки що залишаються відкритими.

## Розділ 5. Метод дискретних особливостей для плоских нестационарних задач

### 5.1. Лінійна нестационарна задача обтікання тонкого профілю.

У даному параграфі контур (профіль)  $\sigma_1$ , який обтікається, є слабо зігнутим, проектується у відрізок  $[-1,1]$  на осі  $Ox$  і на нього набігає такий нестационарний потік під малим кутом атаки  $\alpha$ , що із задньої кромки цього профілю ( $x = 1$ ) сходять пелена вільних вихорів інтенсивності  $\sigma(t)$ , які рухаються з середньою швидкістю  $\bar{U}_0$  по осі  $Ox$  у додатному напрямку. Якщо припустити, що  $U_0$  (величина швидкості) є константою, яка не залежить від часу, то вільний вихор, який зійде з профілю в момент  $\tau < t$ , до моменту часу  $t$  пройде відстань  $U_0(t - \tau)$  і буде на осі  $Ox$  в точці  $1 + U_0(t - \tau)$ . Далі для спрощення будемо припускати, що  $U_0 = 1$ . При зроблених припущеннях умова непротікання має вигляд [1,3,7,10]

$$\int_{-1}^1 \frac{\gamma(x,t)dx}{x_0 - x} + \int_0^t \frac{\delta(\tau)d\tau}{x_0 - 1 - (t - \tau)} = 2\pi f(x_0, t), \quad x_0 \in (-1,1), \quad t \geq 0, \quad (5.1.1)$$

а умова безциркуляційності – вигляд

$$\int_{-1}^1 \gamma(x,t)dx + \int_0^t \delta(\tau)d\tau = 0. \quad (5.1.2)$$

Як і в [1,7,10] покажемо, що система рівнянь (5.1.1), (5.1.1) має єдиний розв'язок. З фізичних міркувань ясно, що рівняння (5.1.1) відносно функції  $\gamma(x,t)$  при даному  $t$  треба розглядати в класі функцій, які перетворюються в нескінченність у точці  $x = -1$  і обмежені в точці  $x = 1$  (потік повинен плавно сходити із задньої кромки, і тому  $\gamma(1,t)$  не може бути необмеженою), тобто рівняння (5.1.1) треба розглядати відносно функції  $\gamma(x,t)$  як сингулярне інтегральне рівняння індексу  $\kappa = 0$ . Тому, розв'язуючи це рівняння відносно  $\gamma(x,t)$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \gamma(x,t) &= f_1(x,t) + \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}} \frac{dx_0}{x-x_0} \int_0^t \frac{\delta(\tau)d\tau}{x_0 - 1 - (t - \tau)}, \\ f_1(x,t) &= -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}} \frac{f(x_0,t)}{x-x_0} dx_0. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Після перестановки інтегралів та спрощень (див. [1,7]) одержимо

$$\gamma(x,t) = f_1(x,t) + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_0^t \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}} \frac{\delta(\tau)d\tau}{1+(t-\tau)-x}. \quad (5.1.4)$$

Підставляючи вираз для  $\gamma(x,t)$  з (5.1.4) у рівняння (5.1.2), після перетворень отримаємо таке інтегральне рівняння для  $\delta(t)$ :

$$\int_0^t \frac{\sqrt{2}\delta(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_0^t \frac{\sqrt{t-\tau}}{\sqrt{2+\sqrt{2+t-\tau}}} \delta(\tau)d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}} f(x_0,t) dx_0. \quad (5.1.5)$$

Рівняння (5.1.5) має єдиний розв'язок, і якщо припустити неперервну диференційовність функції  $f(x_0,t)$  по  $t$ , то  $\delta(t) = \frac{\psi(t)}{\sqrt{t}}$ , де  $\psi(t)$  – абсолютно неперервна функція. Таким чином, якщо функція  $f(x_0,t)$  задовольняє умову Гольдера на множині  $[-1,1] \times [0,T]$  і неперервно диференційовна по  $t$  на цій множині, то система рівнянь (5.1.1), (5.1.2) має єдиний розв'язок.

Нагадаємо тепер, що функція  $\gamma(x, t)$  у рівнянні (5.1.1) є інтенсивністю сумарного вихрового шару на профілі, який складається з приєднаного вихрового шару інтенсивності  $\gamma_+(x, t)$  і вільного вихрового шару інтенсивності  $\gamma_-(x, t)$ , що пливе з місцевою швидкістю над профілем і переходить у вільний вихровий шар сліду за профілем інтенсивності  $\delta(\tau)$ . При цьому ясно, що  $\gamma(x, t) = \gamma_+(x, t) + \gamma_-(x, t)$ ,  $\delta(t) = \lim_{x \rightarrow 1} \gamma_-(x, t)$ .

**О з н а ч е н н я .** У нестационарній задачі гіпотезою Кутта–Жуковського для приєднаного вихрового шару називають припущення про перетворення в нуль інтенсивності приєднаного вихрового шару в тій кутовій точці профілю  $\sigma_1$ , з якої сходять вихрова пелена вільних вихорів.

У даній лінійній нестационарній задачі гіпотеза Кутта–Жуковського полягає в тому, що виконується умова  $\gamma_+(x, t) \equiv 0$  при  $t > 0$ , а це справедливо, якщо буде доведена рівність

$$\delta(t) = \lim_{x \rightarrow 1} \gamma(x, t), \quad t > 0. \quad (5.1.6)$$

Останню рівність доведемо, дотримуючись [7]. Для цього зауважимо, що з результатів [7] випливає перетворення в нуль при  $x \rightarrow 1$  функції  $f_1(x, t)$  у рівності (5.1.4). Розглянемо тепер інтеграл

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_0^t \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}} \frac{\psi(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau[1+(t-\tau)-x]}}.$$

Введемо функцію

$$I_2(x, \tau, t) = \int_0^\tau \frac{d\lambda}{\sqrt{t-\lambda} \sqrt{\lambda[1+(t-\tau)-x]}} = \frac{1}{\sqrt{1-x} \sqrt{1-x+t}} \left\{ \arcsin A(x, \tau, t) - \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$A(x, \tau, t) = \frac{\frac{t^2}{4} + \left(\frac{t}{2} + 1 - x\right) \left(\frac{t}{2} - \tau\right)}{\frac{t}{2}(t-\tau+1-x)}.$$

Виконуючи інтегрування в  $I_1$  за частинами, одержимо

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}\psi(t)}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x+t}} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x+t}} \int_0^t \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin A(x, \tau, t) \right] \left[ \psi(\tau) \sqrt{2+t-\tau} \right]_\tau d\tau. \quad (5.1.7)$$

Далі маємо

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\psi(t) \sqrt{2}}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x+t}} = \frac{\psi(t)}{\sqrt{t}} = \delta(t). \quad (5.1.8)$$

Доведемо, що другий доданок у (5.1.7) прямує до нуля при  $x \rightarrow 1$ . Для цього приймемо, що для заданого довільного числа  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке число  $\delta_2 > 0$ , що буде виконуватися нерівність

$$\left| \frac{1}{\pi\sqrt{1+x}\sqrt{1-x+t}} \int_{t-\delta_2}^t \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin A(x, \tau, t) \right] \left[ \psi(\tau)\sqrt{2+t-\tau} \right]'_{\tau} d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.1.9)$$

Запишемо тепер  $A(x, \tau, t)$  у такому вигляді:

$$A(x, \tau, t) = \frac{\frac{t}{2}[t-\tau+(1-x)] - (1-x)\tau}{\frac{t}{2}[t-\tau+(1-x)]}. \quad (5.1.10)$$

Звідси видно, що для  $\tau \in [0, t - \delta_2]$  можна взяти таке близьке до 1 число  $x_0(\varepsilon)$ , що для всіх  $x \in (x_0(\varepsilon), 1)$  величина  $A(x, \tau, t)$  настільки близька до 1, що буде справедлива нерівність

$$\left| \frac{1}{\pi\sqrt{1+x}\sqrt{1-x+t}} \int_0^{t-\delta_2} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin A(x, \tau, t) \right] \left[ \psi(\tau)\sqrt{2+t-\tau} \right]'_{\tau} d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.1.11)$$

З формул (5.1.4), (5.1.7)–(5.1.9), (5.1.11) випливає, що для заданого числа  $\varepsilon > 0$  існує таке число  $x_0(\varepsilon)$ , що для всіх  $x \in (x_0(\varepsilon), 1)$  буде справедлива нерівність

$$\left| \frac{1}{\pi\sqrt{1+x}\sqrt{1-x+t}} \int_0^t \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin A(x, \tau, t) \right] \left[ \psi(\tau)\sqrt{2+t-\tau} \right]'_{\tau} d\tau \right| < \varepsilon$$

і, отже, виконується рівність (5.1.6).

Таким чином, доведено, що в лінійній нестационарній задачі для тонкого профілю на кромці, з якої сходять вихрова пелена, накопичується тільки вільний вихровий шар. З цього випливає, що при дискретизації задачі в методі дискретних вихорів перший вільний дискретний вихор вважається таким, що зійшов з профілю. Тому дискретна вихрова схема буде будуватися наступним чином. Нехай профіль займає відрізок  $[-1, 1]$  на осі  $Ox$ . Розмістимо дискретні вихори на ньому в точках  $x_i = -1 + (i-1)h$ ,  $h = 2/n$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ , а розрахункові точки – в точках  $x_{0j} = x_j + h/2$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Оскільки припускається, що вільні вихори, які сходять з точки  $x = 1$ , рухаються в сліді вздовж осі  $Ox$  із середньою постійною швидкістю  $U_0$ , то зміну всього вихрового шару будемо спостерігати через такі проміжки часу  $\Delta t$ , за які вільний дискретний вихор проходить відстань  $h$ , тобто вимагаємо виконання рівності

$$U_0 \Delta t = h, \quad (5.1.12)$$

і, отже,  $\Delta t = h/U_0$ . Для простоти припускаємо, що  $U_0 = 1$ . Тому координата вільного вихору, який зійшов із профілю в момент  $t_s$  в розрахунковий момент  $t_r$  визначається як

$$\xi_{sr} = 1 + (t_r - t_s). \quad (5.1.13)$$

Нехай циркуляція дискретного вихору в точці  $x_i$  в розрахунковий момент  $r$  буде  $\Gamma_{ir}$ , а циркуляції вільних вихорів, які зійшли до цього часу з профілю, будуть  $\Lambda_s$ ,  $s = 1, \dots, r$ . Таким чином, отримаємо, що  $\Lambda_r = \Gamma_{n+1,r}$ ,  $r = 1, 2, \dots$ . Виконуючи умову про непротікання профілю в розрахункових точках  $x_{0j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , одержуємо систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n+1} \Gamma_{ir} \omega_i^j + \sum_{s=1}^{r-1} \Lambda_s \omega_{sr}^j = -V_j^*, \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (5.1.14)$$

де  $\omega_i^j$  – нормальна складова швидкості в розрахунковій точці, що індукується вихором одиничної інтенсивності, розташованим у точці  $x_i$ , а  $\omega_{sr}^j$  – складова, що індукується вихором одиничної інтенсивності, який лежить у точці  $\xi_{sr}$ .

У системі (5.1.14) невідомими в розрахунковий момент  $r \in \Gamma_{ir}$ ,  $i=1, \dots, n+1$ , тому що  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{r-1}$  будуть визначені в попередні розрахункові моменти і потім протягом деякого часу не змінюються (це вільні вихори). Отже, в цій системі є  $n+1$  невідомих та  $n$  рівнянь. Доповнимо систему, що розглядається, рівнянням, яке є дискретним аналогом умови Томсона про незмінність циркуляції по рідкому контуру, який охоплює профіль та слід. Якщо профіль почав рухатися із стану спокою, то це рівняння матиме вигляд

$$\sum_{i=1}^{n+1} \Gamma_{ir} + \sum_{s=1}^{r-1} \Lambda_s = 0, \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.1.15)$$

Таким чином, для розв'язання задачі треба розглядати систему рівнянь (5.1.14) і (5.1.15).

Покладаючи  $\Gamma_{ir} = \gamma_{ir} h$ ,  $\Lambda_s = \delta(t_s) \Delta t$ , цю систему рівнянь записуємо у вигляді

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_{ir} h}{x_{0j} - x_i} + \sum_{s=1}^{r-1} \frac{\delta(t_s) \Delta t}{x_{0j} - 1 - (t_r - t_s)} = -2\pi V_j^*, \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, \\ \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_{ir} h + \sum_{s=1}^{r-1} \delta(t_s) \Delta t = 0, \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

Згідно з результатами про квадратурні формули для сингулярного інтеграла на відрізку система (5.1.16) апроксимує систему інтегральних рівнянь (5.1.1) та (5.1.2), яка має єдиний розв'язок. Перепишемо систему (5.1.16) у вигляді

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_{ir} h}{x_{0j} - x_i} = -2\pi V_j^* - \sum_{s=1}^{r-1} \frac{\delta(t_s) \Delta t}{x_{0j} - 1 - (t_r - t_s)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots \\ \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_{ir} h = - \sum_{s=1}^{r-1} \delta(t_s) \Delta t, \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

Матриця системи (5.1.17) має такий самий вигляд, як у безциркуляційному обтіканні тонкого профілю, і тому вона розв'язна при будь-якому  $r = 1, 2, \dots$ . Розв'язуючи систему (5.1.17) та пригадуючи, що  $\gamma_{n+1,r} = \delta(t_r)$ , а  $h = \Delta t$ , отримуємо, що система (5.1.17) еквівалентна системі лінійних алгебраїчних рівнянь, яка апроксимує систему рівнянь [1,4,7,10]

$$\begin{aligned} \gamma(x, t) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}} \frac{f(x_0, t) dx_0}{x-x_0} + \\ + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_0^t \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}} \frac{\delta(\tau) d\tau}{1+(t-\tau)-x}, \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

$$\delta(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t K(t, s) \delta(s) ds = -\sqrt{2} \frac{U_y(0)}{\sqrt{t}} - \sqrt{2} \int_0^t \frac{U_y'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

$$K(t, s) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)} \sqrt{2+z(t-s)} [\sqrt{2+z(t-s)} + \sqrt{2}]}. \quad (5.1.19)$$

Рівняння (5.1.19) має єдиний розв'язок, тому що воно є рівнянням Вольтерра другого роду. У [4,15] доведена збіжність розв'язку системи (5.1.17) до розв'язку  $\gamma(x, t)$ ,  $\delta(t)$  системи інтегральних рівнянь (5.1.18) та (5.1.19).

## 5.2. Нелінійна нестационарна задача для довільного кусково-гладкого контуру

Розглянемо обтікання простого кусково-гладкого контуру  $L$ , який може бути розімкненим або замкненим. Оскільки розглядається обтікання ідеальною рідиною, то місця сходу вихрових пелен будемо вважати фіксованими в деяких його кутових точках (включаючи, можливо, його кінці). Нехай це будуть точки  $M_1^*, \dots, M_p^*$ . Моделювати контур  $L$ , який обтікається, будемо вихровим шаром.

Оскільки для лінійної нестационарної задачі доведено виконання гіпотези Кутта–Жуковського [1,7] про те, що *приєднаний вихровий шар на контурі, який обтікається, перетворюється в нуль при підході до точки, з якої сходить вихрова пелена вільних вихорів*, то будемо вважати, що ця гіпотеза виконується і в нелінійній нестационарній задачі. Згідно з цим контур  $L$  будемо замінювати системою дискретних вихорів так, щоб усі кутові точки (а отже, й точки  $M_1^*, \dots, M_p^*$ ) були б точками розташування дискретних вихорів. Дискретні вихори, які розташовані в точках  $M_1^*, \dots, M_p^*$ , будемо вважати вільними. Нестационарну задачу, що розглядається, будемо дискретизувати не тільки за простором, але й за часом. Нехай крок за часом буде  $\Delta\tau$ . Тоді в цілому розрахункова схема для нелінійної нестационарної задачі буде виглядати таким чином (рис. 5.2.1).

У перший розрахунковий момент дискретні вихори розташовуються тільки на контурі, а їх інтенсивності невідомі. Виконуючи умову непротікання в розрахункових точках (яких на одиницю менше, ніж невідомих дискретних вихорів, якщо контур простий розімкнений (рис. 5.2.1, а) і яких стільки ж, скільки дискретних вихорів, якщо контур простий замкнений (рис. 5.2.1, б)) та додаючи умову Томсона, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (додаючи регуляризуючу змінну, якщо контур простий замкнений, щоб число рівнянь та число невідомих у системі лінійних рівнянь було однаковим), із розв'язку якої знайдемо інтенсивності дискретних вихорів на контурі.

У другий розрахунковий момент вільні дискретні вихори (які розташовані в точках  $M_1^*, \dots, M_p^*$ , на рис. 5.2.1 вони позначені кружечками) зсуваються в потік за місцевою швидкістю  $\vec{V}$  на величину  $|\vec{V}|\Delta\tau$  без зміни своєї циркуляції, яка вже відома. Таким чином, у другий розрахунковий момент дискретні вихори невідомої інтенсивності розташовуються на контурі, та по одному дискретному вільному вихору відомої інтенсивності розташовується поблизу кожної з точок  $M_1^*, \dots, M_p^*$ . Виконуючи знову умову непротікання в розрахункових точках та додаючи умову Томсона, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих циркуляцій дискретних вихорів на контурі, після розв'язання якої і знайдемо ці невідомі величини.

У третій розрахунковий момент знову всі вільні дискретні вихори зсуваються за місцевою швидкістю  $\vec{V}$  на величину  $|\vec{V}|\Delta\tau$ , а на контурі розташовуються дискретні вихори невідомої інтенсивності, і весь обчислювальний процес повторюється. Такий процес повторюється до тих пір, поки не буде досягнуто бажаних результатів.

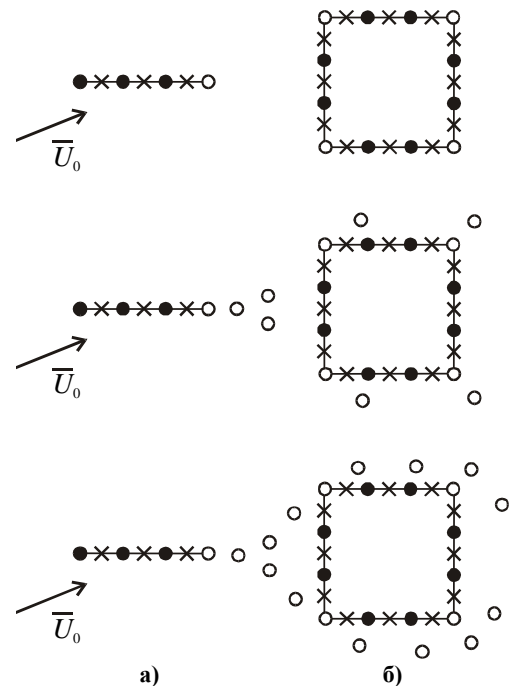


Рис. 5.2.1

Для написання конкретного алгоритму введемо такі позначення. Позначимо  $\Gamma_{ir}$ ,  $i=1, \dots, n$ , – циркуляції дискретних вихорів на контурі в  $r$ -й розрахунковий момент, а  $\Lambda_{vs}$ ,  $v=1, \dots, p$ ,  $s=1, \dots, r-1$ , – циркуляції вільних дискретних вихорів, які розташовувалися в точках  $M_1^*, \dots, M_p^*$  відповідно в  $s$ -й розрахунковий момент ( $\Lambda_{vs} = \Gamma_{is}$ ,  $i=k_1, \dots, k_p$ , де  $k_1, \dots, k_p$  – номери дискретних вихорів на контурі, які розташовувалися в точках  $M_1^*, \dots, M_p^*$  в момент  $s$ ). Тоді з умови непроникнення контуру в розрахункових точках та умови Томсона про зберігання циркуляції за рідким контуром, що охоплює контур та слід, отримуємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \eta_L \gamma_{0n} + \sum_{i=1}^n \Gamma_{ir} \omega_i^j &= -\bar{U}_0(M_{0j}) \bar{n}_{M_{0j}} - \sum_{v=1}^p \sum_{s=1}^{r-1} \Lambda_{vs} \omega_{vs}^{jr}, \\ j=1, \dots, n-1 \quad \text{при} \quad \eta_L &= 0, \quad j=1, \dots, n \quad \text{при} \quad \eta_L = 1, \quad r=1, 2, \dots, \\ \sum_{i=1}^n \Gamma_{ir} &= -\sum_{v=1}^p \sum_{s=1}^{r-1} \Lambda_{vs}, \quad r=1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

де  $\eta_L = 0$ , якщо контур  $L$  – простий розімкнений, та  $\eta_L = 1$ , якщо  $L$  – простий замкнений,  $\omega_i^j$  – нормальна складова швидкості  $\bar{V}_i^j$  від дискретного вихору інтенсивності одиниця, розташованого в точці  $M_i$  на контурі  $L$  у розрахунковій точці  $M_{0j}$ , а  $\omega_{vs}^{jr}$  – нормальна складова швидкості  $\bar{V}_i^j$  в цій самій точці  $M_{0j}$  від вільного дискретного вихору інтенсивності одиниця, який розташований у точці  $M_{vs}^r$  в  $r$ -й розрахунковий момент і який зійшов з точки  $M_v^*$  в  $s$ -й розрахунковий момент,  $s=1, 2, \dots, r-1$ . Для знаходження радіус-вектора  $\bar{r}_{M_{vs}^r}$  точки  $M_{vs}^r$ , отримуємо рівняння

$$\bar{r}_{M_{vs}^r} = \bar{r}_{M_{vs}^{r-1}} + \Delta t \left( \sum_{i=1}^n \Gamma_{ir-1} \bar{V}_i^{M_{vs}^{r-1}} + \sum_{\mu=1}^p \sum_{\lambda=1}^{r-2} \Lambda_{\mu\lambda} \bar{V}_{M_{\mu\lambda}^{r-1}} \right), \quad (5.2.2)$$

$$\bar{r}_{M_{vs}^s} = \bar{r}_{M_v^*}, \quad v=1, \dots, p; \quad s=1, \dots, r-1; \quad r=s+1, s+2, \dots$$

При цьому припускаємо, що дискретний вихор у точці свого розташування індукує нульову швидкість.

З міркувань для безциркуляційного обтікання контуру випливає, що система (5.2.1) є невідродженою для будь-якого  $r=1, 2, \dots$

Якщо припустити, що слід також є кусково-гладкою кривою, а розподілена інтенсивність вихорового шару на ньому належить класу  $H^*$  на кривій розташування сліду, то тоді система (5.2.1) апроксимує при  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  ( $t$  – фіксовано) систему інтегральних рівнянь

$$\int_L \gamma(M, t) \omega^*(M_0, M) ds_M + \int_{\sigma} \delta(\mu) \omega^*(M_0, M(t, \mu)) ds_{\mu} = -\bar{U}_0 \bar{n}_{M_0}, \quad M_0 \in L, \quad (5.2.3)$$

$$\int_L \gamma(M, t) ds_M + \int_{\sigma} \delta(\mu) ds_{\mu} = 0, \quad (5.2.4)$$

де

$$\begin{aligned} \omega^*(M_0, M) &= \bar{\omega}(M_0, M) \cdot \bar{n}_{M_0}, \\ \bar{\omega}(M_0, M) &= \frac{1}{2\pi} \frac{(y_0 - y)\bar{i} - (x_0 - x)\bar{j}}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}, \end{aligned}$$

а  $\bar{n}_{M_0}$  – орт нормалі до кривої  $L$  у точці  $M_0$ , а система (5.2.2) – диференціальне рівняння

$$\frac{d\bar{r}(t, \tau)}{dt} = \bar{V}(t, \tau), \quad \bar{r}(\tau, \tau) = \bar{r}(M^*), \quad t \geq \tau, \quad (5.2.5)$$

де  $\bar{r}(t, \tau)$  – радіус-вектор точки, в якій розташовується вільний вихор у момент  $t$ , що зійшов з відповідної кутової точки в момент  $\tau$ .

Однак строгих математичних доведень цих тверджень про структуру сліду, про поведінку розподіленої інтенсивності вихрового сліду немає, так само, як немає ніяких математичних доведень збіжності чисельного розв'язку задачі, яка розглядається, до точного (якщо він існує). Будь-яке просування теорії в цих питаннях було б дуже цікавим та корисним. Надію на те, що таке просування теорії можливе, дає великий за обсягом чисельний експеримент, проведений багатьма дослідниками [1,7,10].

Наведемо тепер деякі результати, отримані на основі описаної в даному параграфі математичної моделі.

На рис. 5.2.2 і 5.2.3 зображено поле швидкостей течії навколо нерухомого квадрата при симетричному та несиметричному відривному обтіканні [1,5,7] відповідно; на рис. 5.2.4 – ефект інтерференції різноповерхових споруд (поле швидкостей вітру та розподіл тиску навколо системи різновисотних будівель; на рис. 5.2.5 та 5.2.6 наведені розподіли тиску по поверхнях квадрата та ромба відповідно. На рис. 5.2.5 неперервною лінією позначено обчислені значення [6,17,18], • – експериментальні дані з [1,5,7,16], о – експериментальні дані з [1,5,7,16], а на рис. 5.2.6 неперервна лінія – обчислені значення, • – експериментальні дані з [1,5,7,16].

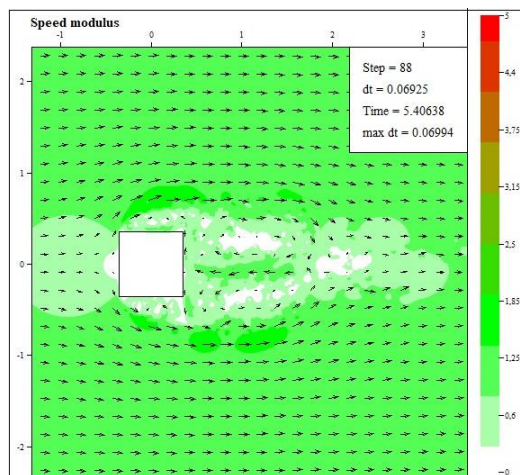


Рис. 5.2.2

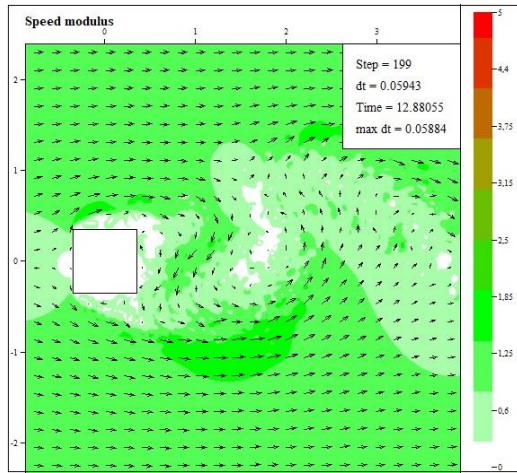


Рис. 5.2.3

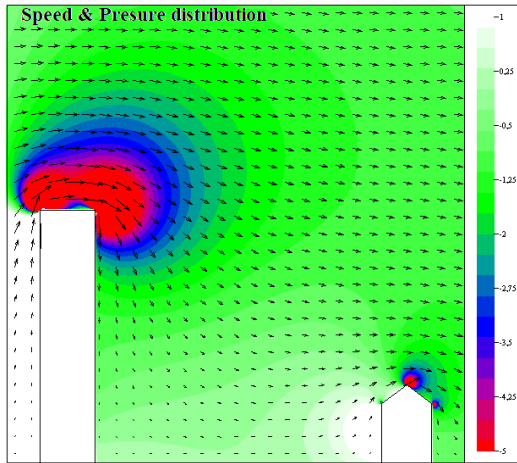


Рис. 5.2.4

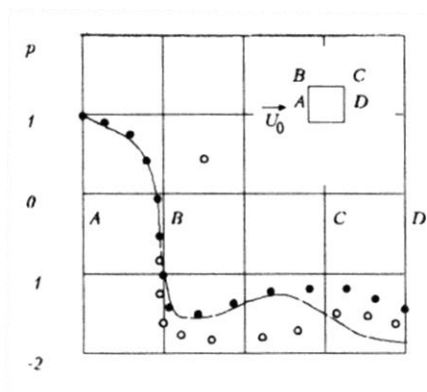


Рис. 5.2.1. [16,18]

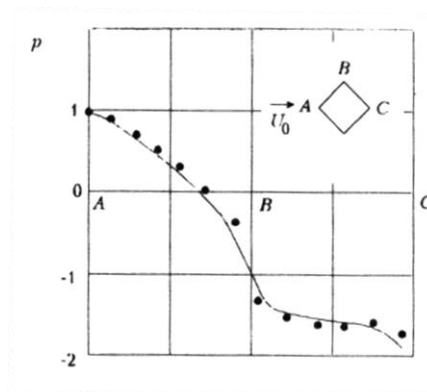


Рис. 5.2.2. [16,18]

### 5.3. Математичне моделювання обтікання профілю з ежекцією

Розглянемо нелінійну задачу знаходження аеродинамічних характеристик крила літака, який знаходиться в потенціальному потоці ідеальної нестисливої невагомої рідини. Будемо вивчати плавне обтікання непроникного профілю (крила нескінченного розмаху), який миттєво починає рухатися з постійною швидкістю  $\bar{U}_0$  із стану спокою. Збурення, спричинені в рідині крилом, яке рухається, і струменем, що видувається, повинні згаснути при нескінченному віддаленні від поверхні крила та струменя. Пристрій відсмоктування зовнішнього потоку будемо моделювати стоком інтенсивності  $Q_1$ , який розміщений у точці  $M_q$  на контурі профілю. Припускаємо, що задана витрата  $Q_2$  рідини через поверхню  $\sigma$  вихідного отвору сопла, з якого витікає струмінь, який має своїми межами криві  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  (нагадуємо, що розглядається плоска нестационарна задача).

Тепер опишемо математично задачу аеродинаміки, яка поставлена вище в даному параграфі.

Оскільки потік, що набігає, припускається потенціальним у всій площині, то збурене контуром  $L$  і струменем поле швидкостей теж будемо припускати потенціальним у зовнішній до контуру  $L$  та струменя області  $D^+$  [1,7,8,9,16] (рис. 5.3.1).

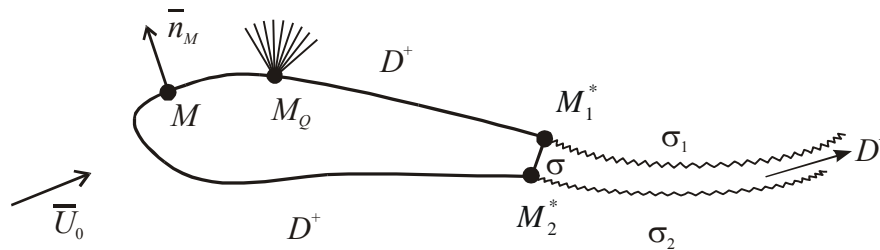


Рис. 5.3.1

Тоді задача знаходження збуреного поля швидкостей зводиться до знаходження функції  $\Phi(M, t)$ , для якої виконуються такі умови:

1) вона задовольняє рівняння Лапласа в області  $D^+$ :

$$\Delta\Phi(M, t) = 0, \quad M \in D^+; \quad (5.3.1)$$

2) збурені потенціал та поле швидкостей прямують до нуля при віддаленні на велику відстань від контуру  $L$  та кривих  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ :

$$\Phi(M, t), |\nabla\Phi(M, t)| \rightarrow 0 \quad (5.3.2)$$

при  $\rho(M, L \cup \sigma_1 \cup \sigma_2) \rightarrow \infty$ ;

3) стік інтенсивності  $Q_1$  в точці  $M_q \in L$  індукує швидкості

$$V_q(M, t) = \frac{Q_1(t)}{2\pi} \frac{\bar{r}_{MM_q}}{r_{MM_q}^2}; \quad (5.3.3)$$

4) на контурі  $L$  повинна виконуватися умова непротікання

$$\left. \frac{\partial \Phi(M_0, t)}{\partial \bar{n}_{M_0}} \right|_L = -\bar{U}_0(M_0) \cdot \bar{n}_{M_0} - \bar{V}_q(M_0, t) \cdot \bar{n}_{M_0}, \quad M_0 \in L, \quad M_0 \neq M_q; \quad (5.3.4)$$

5) межі струменя – криві  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  повинні задовольняти умову відсутності перепаду тиску  $P$  та нормальних складових швидкостей

$$P^+(M_0) = P^-(M_0), \quad \frac{\partial \Phi^+(M_0, t)}{\partial \bar{n}_{M_0}} = \frac{\partial \Phi^-(M_0, t)}{\partial \bar{n}_{M_0}}, \quad M_0 \in \sigma_1 \cup \sigma_2, \quad (5.3.5)$$

де знаки “+” та “-” визначаються напрямком вектора  $\bar{n}_{M_0}$ ;

6) на гострих кромках вихідного сопла, з яких сходять вихрові пелени  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ , повинна виконуватися умова Кутта–Жуковського про скінченність швидкостей, тобто  $\nabla \Phi(M, t)$  обмежений в околі точок  $M_1^*$  і  $M_2^*$ , які є гострими кромками, у будь-який момент  $t > 0$ ;

7) повинна виконуватися умова заданої витрати  $Q_2(t)$  рідини через поверхню (криву)  $\sigma$  вихідного сопла:

$$\int_{\sigma} \left[ \frac{\partial \Phi(M, t)}{\partial \bar{n}_M} + (\bar{U}_0(M) + \bar{V}_q(M)) \cdot \bar{n}_M \right] ds_M = Q_2(t) \quad (5.3.6)$$

для  $t \geq 0$ , де  $ds_M$  – диференціал довжини дуги кривої  $\sigma$  за координатами точки  $M$ .

Функцію  $\Phi(M, t)$  будемо шукати у вигляді потенціалу подвійного шару на кривих  $L$  і  $\sigma_1, \sigma_2$ :

$$\begin{aligned} \Phi(M_0, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} g(M, t) ds_M + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \int_{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_i}} \ln \frac{1}{r_{MM_i(t, \tau)}} g_i(M_i(t, \tau), t) ds_{i, M_i(t, \tau)}, \quad 0 \leq \tau \leq t, \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

де  $g(M, t)$  – щільність потенціалу в точці  $M$  контуру  $L$  у момент  $t$  (контур  $L$  не змінюється з часом), а  $g_i(M_i(t, \tau), t)$  – щільність потенціалу в точці  $M_i(t, \tau)$  кривої  $\sigma_i$  в момент  $t$ . Точка  $M_i(t, \tau)$  – це точка розташування в момент  $t$  частинки рідини, яка зійшла з точки  $M_i^*$  в момент  $\tau$ , тобто повинна задовольнятися умова

$$M_i(\tau, \tau) = M_i^*, \quad i = 1, 2. \quad (5.3.8)$$

У двовимірних задачах аеродинаміки зручно ввести поняття розподіленої вихрової інтенсивності  $\gamma$  на кривій  $L$  і  $\delta_i$  на кривих  $\sigma_i, i = 1, 2$ , які є похідними за довжиною дуги відповідних кривих від щільності потенціалів, тобто

$$\gamma(M, t) = g'_s(M, t), \quad \delta_i(M_i(t, \tau), t) = g'_{s_i}(M_i(t, \tau), t). \quad (5.3.9)$$

При цьому зручно при розв’язанні задач аеродинаміки розглядати поверхні розриву дотичних швидкостей як граничний випадок вихрового шару. Таким чином, контур  $L$  профілю моделюється вихровим шаром інтенсивності  $\gamma(M, t)$ ,  $M \in L$ ,  $M \neq M_q$ . Оскільки за визначенням і за фізичними міркуваннями межі струменя  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  не створюють перепаду тиску (на них задовольняються

умови (5.3.5)) та густина рідини поза та всередині струменя однакова, то криві  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  можна замінити вільними вихровими шарами, в яких вільні вихори, які зійшли з точок  $M_1^*$  і  $M_2^*$ , рухаються по траєкторіях частинок рідини, з якими вони збігаються без зміни своєї інтенсивності [3,9]. Тому для вихрової інтенсивності на пеленах  $\delta_i$ ,  $i=1,2$ , маємо

$$\delta_i(M_i(t, \tau), t) = \delta_i(\tau). \quad (5.3.10)$$

Для швидкості руху вільного вихору  $\delta_i(\tau)$ , який розташований у точці  $M_i(t, \tau)$  з радіус-вектором  $\bar{r}_i(t, \tau) = x_i(t, \tau)\bar{i} + y_i(t, \tau)\bar{j}$  і рухається за місцевою швидкістю частинки рідини, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}_i(t, \tau)}{dt} = & \int_L \bar{V}_\gamma(M, M_i(t, \tau)) \cdot \gamma(M, t) ds_M + \\ & + \sum_{j=1}^2 \int_0^t \bar{V}_{\sigma_j}(M_j(t, \tau'), M_i(t, \tau)) \delta_j(\tau') \sqrt{x_{j,\tau'}'^2(t, \tau') + y_{j,\tau'}'^2(t, \tau')} d\tau' + \\ & + \bar{U}_0(M_i(t, \tau)) + \bar{V}_q(M_i(t, \tau), t), \quad i=1,2, \quad 0 \leq \tau \leq t, \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

при виконанні початкової умови (див. (5.3.8))

$$\bar{r}_i(\tau, \tau) = \bar{r}(M_i^*), \quad i=1,2, \quad (5.3.12)$$

де  $\bar{r}(M_i^*)$  – радіус-вектор точки  $M_i^*$ , а вектор  $\bar{V}_\gamma(M, M_0)$  визначається за законом Біо - Савара [3,7,9]

$$\bar{V}_\gamma(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{y_1(M, M_0)\bar{i} - x_1(M, M_0)\bar{j}}{r_{MM_0}^2},$$

де  $x_1(M, M_0) = x(M_0) - x(M)$ ,  $y_1(M, M_0) = y(M_0) - y(M)$ .

Аналогічно визначаються вектори  $\bar{V}_{\delta_i}(M, M_0)$ . У позначеннях формули (5.3.11) умова неперотікання (5.3.4) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \bar{n}_{M_0} \cdot \int_L \bar{V}_\gamma(M, M_0) \gamma(M, t) ds_M = & -\bar{U}_0(M_0) \bar{n}_{M_0} - \bar{V}_q(M_0, t) \bar{n}_{M_0} - \\ & - \bar{n}_{M_0} \cdot \sum_{i=1}^2 \int_0^t \bar{V}_{\delta_i}(M_i(t, \tau), M_0) \delta_i(\tau) \sqrt{x_{i,\tau}''^2(t, \tau) + y_{i,\tau}''^2(t, \tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

$$M_0 \in L, \quad M_0 \neq M_q \in L.$$

Оскільки профіль почав рух із стану спокою, то за теоремою Томсона [3,9] про зберігання циркуляції швидкості по будь-якому контуру, що охоплює вихрові шари, отримаємо, що в будь-який момент  $t$  має виконуватися рівність

$$\int_L \gamma(M, t) ds_M + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \delta_i(\tau) \sqrt{x_{i,\tau}''^2(t, \tau) + y_{i,\tau}''^2(t, \tau)} d\tau = 0, \quad t \geq 0. \quad (5.3.14)$$

Умова заданої витрати рідини (5.3.6) тепер набуде вигляду

$$\int_L \left[ \bar{n}_{M_0} \cdot \int_L \bar{V}_\gamma(M, M_0) \gamma(M, t) ds_M + \bar{U}_0(M_0) \bar{n}_{M_0} + \bar{V}_q(M_0, t) \bar{n}_{M_0} + \right. \\ \left. + \bar{n}_{M_0} \cdot \sum_{i=1}^2 \int_0^t \bar{V}_{\delta_i}(M_i(t, \tau), M_0) \delta_i(\tau) \sqrt{x_{i,\tau}'^2(t, \tau) + y_{i,\tau}'^2(t, \tau)} d\tau \right] ds_{M_0} = Q_2(t). \quad (5.3.15)$$

У [1,7] показано, що в момент  $\tau$  сходу вільного вихору з точки  $M_i^*$ ,  $i=1,2$ , його інтенсивність визначається рівністю

$$\delta_i(\tau) = \gamma(M_i^*, \tau). \quad (5.3.16)$$

Таким чином, система інтегро-диференціальних рівнянь (5.3.11)–(5.3.16) повинна бути розв'язаною відносно інтенсивності вихорового шару  $\gamma(M, t)$  на  $L$  та невідомих кривих  $\sigma_i$ ,  $i=1,2$ , які є межами струменя. Потрібно підкреслити, що в [1,7] показана необхідність знаходження функції  $\gamma(M, t)$  у класі функцій, які мають у точці  $M_q$  особливість виду  $1/(s-q)$  у будь-який момент  $t$ , коли  $Q_1 \neq 0$ .

Оскільки система рівнянь (5.3.11)–(5.3.16) аналітично не розв'язується, її можна розв'язати чисельно. Для задач аеродинаміки є застосовним метод чисельного розв'язання таких систем – метод дискретних особливостей (вихорів) [1,5,7]. Неперервний нестационарний процес буде представлено у вигляді послідовності дискретних моментів часу  $t_\nu = \nu \Delta t$ , де  $\nu$  – розрахунковий момент часу і  $\Delta t$  – крок за часом. У кожний розрахунковий момент  $\nu$  вихоровий шар, що моделює профіль  $L$ , замінюється системою з  $N$  дискретних вихорів  $\Gamma_{i,\nu} = \gamma(M_i, t_\nu) h$ , де  $h$  – відстань по кривій між точками розташування вихорів. Бічні межі струменя  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  моделюються двома системами вільних дискретних вихорів  $\Delta_{1,m}, \Delta_{2,m}$ ,  $m=1, \dots, \nu$ , кожний з яких відривається від кромок вихідного сопла в розрахункові моменти  $m=1, \dots, \nu$ . Оскільки вільні дискретні вихори не змінюють свою інтенсивність з часом, то в розрахунковий момент  $\nu$  невідомими є тільки циркуляції вихорів  $\Gamma_{i,\nu}$ ,  $i=1, \dots, N$ , і  $\Delta_{1,\nu}, \Delta_{2,\nu}$ , тому що циркуляції вихорів  $\Delta_{1,m}, \Delta_{2,m}$ ,  $m=1, \dots, \nu-1$ , відомі з попередніх розрахункових кроків. Дискретні вихори  $\Gamma_{i,\nu}$ ,  $i=1, \dots, N$ , розподіляються на контурі профілю за законом, який забезпечує їх щільніше розташування на ділянках контуру профілю з маленьким радіусом кривизни [1,3,4,7,11]. Розрахункові точки  $M_{0j}$ ,  $j=1, \dots, N+1$ , в яких виконується умова непротікання (5.3.4), розташовані між сусідніми дискретними вихорами на профілі. Точки  $M_i$  розташування дискретних вихорів та розрахункові точки  $M_{0j}$  вибираються так, що точка  $M_q$  є однією з розрахункових точок  $M_{0j_q}$ , і відповідні квадратурні суми збігаються до значень інтегралів. Для того, щоб виконати умову (5.3.6), переріз  $\sigma$  вихідного сопла розбивається на  $p$  однакових ділянок довжини  $\Delta\sigma_j$ ,  $j=1, \dots, p$ . Розрахункова точка  $A_{0j}$ ,  $j=1, \dots, p$ , вибирається в геометричному центрі кожної ділянки  $\Delta\sigma_j$ . У цій точці нормальна до  $\Delta\sigma_j$  компонента швидкості від потоку, який набігає, та системи особливостей є визначеною. Для того, щоб знайти невідомі циркуляції в кожний розрахунковий момент, ми повинні розв'язати таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь, які відповідають інтегральним рівнянням (5.3.11)–(5.3.16):

$$\sum_{i=1}^N \omega(M_i, M_{0j}) \Gamma_{i,v} + \sum_{k=1}^2 \omega(M_{k,v}^v, M_{0j}) \Delta_{k,v} = -2\pi \bar{U}_0 \bar{n}_{M_{0j}} - Q_{1,v} \omega(M_{0j_q}, M_{0j}) - \sum_{i=1}^2 \left[ \sum_{m=1}^{v-1} \omega(M_{k,m}^v, M_{0j}) \Delta_{k,m} \right], \quad j = 1, \dots, N+1, \quad j \neq j_q, \quad v = 1, 2, \dots, \quad (5.3.17)$$

$$\sum_{j=1}^p \left[ \sum_{i=1}^N \omega(M_i, A_{0j}) \Gamma_{i,v} + \sum_{k=1}^2 \omega(M_{k,v}^v, A_{0j}) \Delta_{k,v} \right] \Delta \sigma_j = 2\pi Q_{2,v} - \sum_{j=1}^p \left[ \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{m=1}^v \omega(M_{k,m}^v, A_{0j}) \Delta_{k,m} \right) + 2\pi \bar{U}_0 \bar{n}_{A_{0j}} + Q_{1,v} \omega(M_{0j_q}, A_{0j}) \right] \Delta \sigma_j, \quad (5.3.18)$$

$$A_{0j} \in \sigma, \quad v = 1, 2, \dots,$$

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_{i,v} + \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{m=1}^v \Delta_{k,m} \right) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, \quad (5.3.19)$$

де  $Q_{1,v}, Q_{2,v}$  – безрозмірні коефіцієнти інтенсивностей відсмоктування та витрати в струмені відповідно в момент  $v = 1, 2, \dots$ ;  $\omega(M_i, M_{0j}), \omega(M_i, A_{0j})$  – нормальні компоненти безрозмірних швидкостей у розрахункових точках профілю  $M_{0j}$  та вихідного сопла  $A_{0j}$  відповідно, які індуковані дискретними вихорами  $\Gamma_{i,v}$ ;  $\omega(M_{k,m}^v, M_{0j}), \omega(M_{k,m}^v, A_{0j})$  – нормальні компоненти безрозмірної швидкості в тих самих точках  $M_{0j}$  і  $A_{0j}$ , які індуковані вільними дискретними вихорами  $\Delta_{k,m}$  в момент  $v$ ;  $\omega(M_{0j_q}, M_{0j}), \omega(M_{0j_q}, A_{0j})$  – нормальні компоненти безрозмірної швидкості в точках  $M_{0j}$  і  $A_{0j}$  відповідно, які індуковані джерелом інтенсивності  $Q_{1,v}$ ;  $\bar{U}_0$  – швидкість набігаючого потоку.

Коли всі циркуляції  $\Gamma_{i,v}, i = 1, \dots, N$ , і  $\Delta_{k,m}, k = 1, 2, m = 1, 2, \dots, v$ , визначені в момент  $t = t_v$ , швидкість у довільній точці  $M_0$  простору визначена суперпозицією відомих швидкостей  $\bar{U}_0, \bar{V}_q(M_0, t_v)$  і швидкостей, індукованих дискретними вихорами:

$$\bar{V}(M_0, t) = \bar{U}_0 + \bar{V}_q(M_0, t) + \sum_{i=1}^N \bar{V}_\gamma(M_i, M_0) \Gamma_{i,t} + \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{m=1}^v \bar{V}_{\delta_k}(M_{k,m}^v, M_0) \Delta_{k,m} \right). \quad (5.3.20)$$

Якщо відома абсолютна швидкість потоку в довільній точці поверхні профілю, то, використовуючи інтеграл Коші–Лагранжа, визначаємо коефіцієнт тиску в цій точці

$$P(M_0, t) = \frac{P^*(M_0, t) - P_0}{\rho \frac{\bar{U}_0^2}{2}} = 1 - \bar{V}^2(M_0, t) - 2 \frac{\partial \Phi(M_0, t)}{\partial t}. \quad (5.3.21)$$

Підкреслимо, що в додаток до представлених гідродинамічних ефектів енергетичної механізації обтікання профілю дана задача супроводжується впливом сили реакції струменя, що дає внесок у моменти

$$R_j(t) = -2 \int_{\sigma} \bar{V}(M, t) \bar{V}_{n\sigma}(M, t) ds_M, \quad M \in \sigma, \quad (5.3.22)$$

і в сили реакції відсмоктування

$$\bar{R}_{qj}(t) = -Q_1(t) \cdot \bar{V}(M_q, t), \quad (5.3.23)$$

де  $M_q$  – точка розміщення відсмоктувача.

Описаний тут метод є логічним продовженням методів, розглянутих у роботах [1,5,7,9], в яких наведено побудову математичних моделей, систем інтегро-диференціальних рівнянь обтікання профілю з пристроями відсмоктування та методи їх чисельного розв'язання. Для відпрацювання методів розв'язання цього класу задач з метою перевірки їхньої надійності ми одержали точний розв'язок задачі стаціонарного обтікання ідеальною нестисливою рідиною циліндра одиничного радіуса з відсмоктуванням зовнішнього потоку на ньому. На основі результатів [1,7,16] можна показати, що цей розв'язок задається формулою

$$\gamma(\varphi) = 2 \sin \varphi + \frac{Q_1}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_q - \varphi}{2} + C, \quad (5.3.24)$$

де  $\varphi_q$  – точка одиничного кола, в якій розташований відсмоктувач. Якщо обтікання циліндра безциркуляційне, то отримуємо  $C = 0$  у (5.3.24). Використовуючи формулу (5.3.24), отримуємо вираз для визначення циркуляції дискретних вихорів, які моделюють поверхню циліндра

$$\Gamma_i = 2 + 2 \cos(\alpha - \psi_i) - \frac{Q_1}{\pi} \ln \left| \sin \frac{\psi_i - \psi_{0jq}}{2} \right|, \quad (5.3.25)$$

де  $\psi_i$  – кут у напрямку годинникової стрілки між додатним напрямком осі  $Ox$  та радіус-вектором, направленим в  $i$ -й дискретний вихор,  $\psi_{0jq}$  – кутова координата точки розташування відсмоктувача з інтенсивністю  $Q_1$ ,  $\alpha$  – кут атаки потоку, який набігає.

На рис. 5.3.2 показана розподілена інтенсивність вихрового шару  $\gamma(\psi)$  на нескінченному циліндрі – інтенсивності, що визначені за формулою (5.3.24) (неперервна крива) і за методом розрахунку обтікання двовимірному тіла з відсмоктувачем [16] (експериментальні точки) при куті атаки зовнішнього потоку  $\alpha = 6^\circ$  і при рівномірному розбиванні контуру циліндра на  $N = 71$  частин без відсмоктувача ( $Q_1 = 0$ ) (рис. 5.3.2, а) та з відсмоктувачем відомої інтенсивності  $Q_1 = 0,05$ , розташованого в розрахунковій точці  $\psi_{0jq} = 305^\circ$  (рис. 5.3.2, б). Видно, що розв'язок, отриманий за методом дискретних вихорів, добре узгоджується з точним розв'язком.

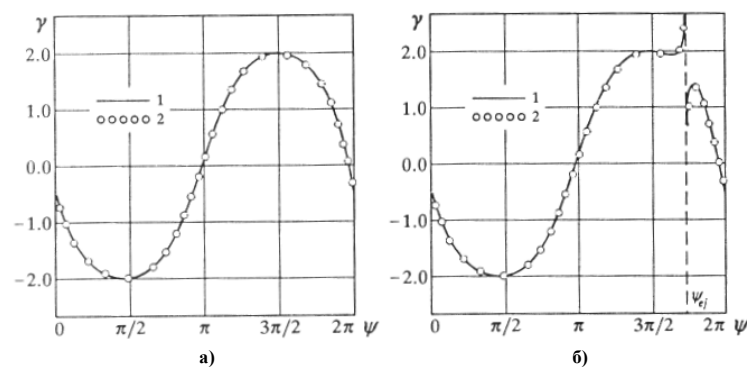


Рис. 5.3.2

Тепер опишемо метод розрахунку характеристик обтікання профілю нестационарним потоком, коли повітря, яке відсмоктується, проходить крізь сопло в струмінь, і цей струмінь діє як рідкий закрилок. Як приклад використання описаного вище методу, ми розрахували аеродинамічні характеристики симетричного профілю NASA-0012 для версій: 1) без використання енергетичної

механізації; 2) з використанням тільки відсмоктування на верхній поверхні; 3) з використанням комбінації відсмоктувача та струменя. Дослідження були виконані на докритичних кутах атаки, щоб оцінити ефективність пристроїв, які використовувалися, визначити коефіцієнт підйомної сили  $C_y$  у швидкісних координатах при наявності точки відсмоктування  $x_{0jq}$  інтенсивності  $Q_1$ , кута нахилу видуву струменя в області задньої кромки  $\theta$  та коефіцієнта витрати струменя  $Q_2$ . На рис. 5.3.3, а, показано залежності  $C_y = f(\alpha)$  для профілю без енергетичної механізації (крива 1), з відсмоктуванням зовнішнього потоку в точці  $x_{0jq} = 0,94$  інтенсивності  $Q_1 = 0,05$  (крива 2) та комбінації відсмоктування з видувом струменя із задньої кромки під кутом  $\theta = 30^\circ$  для  $Q_1 = 0,05$  і  $\theta = 0,05$  (крива 3). Бачимо, що пристрій відсмоктувач-струмінь найефективніший. Найбільший коефіцієнт підйомної сили в цьому випадку є наслідком спільного сприятливого впливу відсмоктування та струменя на обтікання верхньої поверхні.

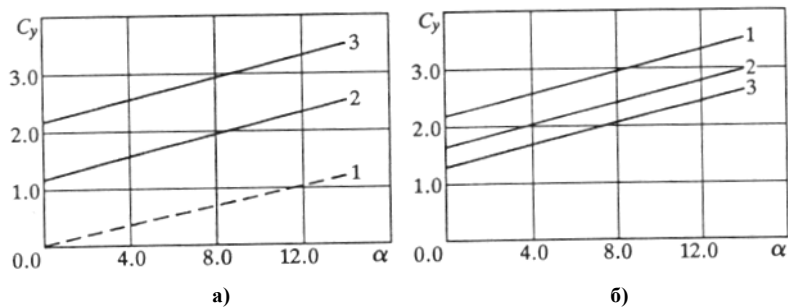


Рис. 5.3.3

Потік сповільнюється на поверхні профілю за точкою відсмоктування, і його додатний градієнт тиску різко збільшується. Витікання струменя із задньої кромки змінює течію головного потоку і змінює локальний кут атаки внаслідок дії підсмоктування струменя, частково зменшуючи уповільнення потоку за точкою відсмоктування на верхній поверхні профілю, а також збільшує тиск на нижній поверхні. Ефект відсмоктування потоку та утворення струменя, які впливають на характер обтікання профілю NASA-0012 можна побачити із структури розподілу тиску на його поверхні (рис. 5.3.4). Крива 1 відповідає розподілу тиску на поверхні профілю при наявності відсмоктування та струменя, криві 2 і 3 – розподілу тиску на поверхні профілю при наявності тільки відсмоктування та без енергетичної механізації відповідно. Очевидно, що придатним розташуванням точки відсмоктування потоку на докритичних кутах атаки є область поблизу задньої кромки, тому що додатна дія відсмоктування існує в більшій частині верхньої поверхні профілю (рис. 5.3.3., б, крива 1 відповідає  $x_{0jq} = 0,94$ , криві 2 і 3 –  $x_{0jq} = 0,43$  та  $x_{0jq} = 0,09$ ). Збільшення коефіцієнта витрати відсмоктування та видуву струменя веде до підвищення стійкості течії на верхній поверхні профілю внаслідок прискорення потоку.

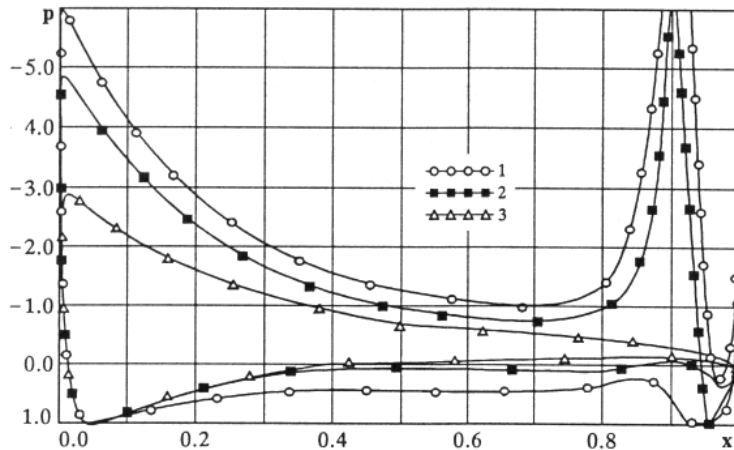


Рис. 5.3.4

Крім того, зростання  $Q_2$  збільшує енергетичні властивості струменя, веде до зміни форми струменя, і, отже, до зміни течії головного потоку у великому степені, особливо в кормовій частині профілю. Рис. 5.3.5 дає залежності  $C_y = f(x)$  для значень коефіцієнтів витрати:  $Q_1 = 0,0$  і  $Q_2 = 0,0$ ;  $Q_1 = 0,05$  і  $Q_2 = 0,05$ ;  $Q_1 = 0,1$  і  $Q_2 = 0,1$  (криві 1, 2 і 3 відповідно).

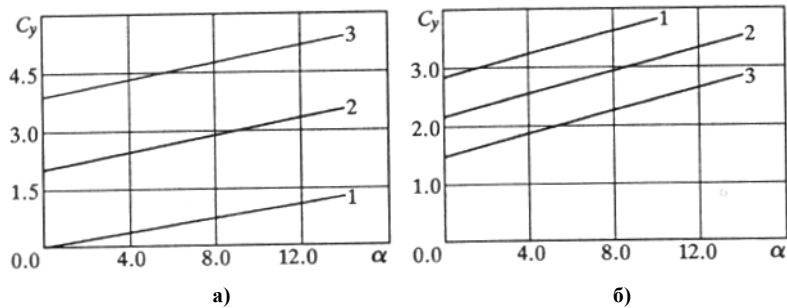


Рис. 5.3.5

Як було зазначено вище, течія струменя діє в області задньої кромки як рідкий закриток з його типовим ефектом на структуру обтікання тіла. Результати дослідження залежності несучих властивостей профілю від кута видуву струменя дано на рис. 5.3.5, б (крива 1 відповідає куту видуву  $\theta = 45^\circ$ , криві 2 і 3 – кутам  $\theta = 30^\circ$  і  $\theta = 15^\circ$ ).

Таким чином, описана математична модель обтікання профілю з енергетичною механізацією для двовимірному потоку ідеальної рідини та чисельний метод дозволяють нам досить акуратно оцінити ефективність цих пристроїв для збільшення підйомної сили і визначення геометричних і кінематичних параметрів профілю в широкій області польотних режимів.

#### 5.4. Математичне моделювання руху профілю, який коливається, поблизу меж

Колівальні рухи крилових поверхонь зустрічаються в багатьох галузях техніки. Серед найбільш важливих – коливання лопаток турбомашин, колівальні рухи лопаток несучих гвинтів вертольотів, а також реактивних закрилків і механічних сервозакрилків. Дуже важливим є розрахунок та запобігання флатеру в авіації та ракетобудуванні, а в суднобудуванні великий інтерес становить флатер гідрокрил. У багатьох випадках коливання відбуваються поблизу твердих меж. Задача про крило, яке коливається, актуальна також у зв'язку з вирішенням проблеми створення рушія, що рухається під впливом махів.

Більшість існуючих у даний час теоретичних методів розрахунку нестационарних гідроаеродинамічних характеристик крил і крилових систем засновані на лінеаризованих теоріях, які припускають малість робочих кутів атаки, амплітуд коливань, деформацій поверхні крила. Тим часом для практики істотний інтерес становлять дані з області поза застосовністю лінеаризованої теорії.

Розглянемо плоску задачу про нестационарний колівальний рух тонкого профілю в ідеальній нестисливій рідині [3,9,12]. Профіль рухається в площині  $xOy$  прямолінійно в горизонтальному напрямку з постійною швидкістю і одночасно здійснює вертикальні коливання за гармонічним законом, крім того, профіль може здійснювати обертальні коливання навколо деякої точки.

Із задньої гострої кромки профілю сходять вихрова пелена. За рахунок коливань профіль може створювати силу, спрямовану в бік поступального руху – силу тяги.

Теоретична модель течії будується за такими припущеннями:

- поверхні профілю і твердих меж передбачаються непроникними;
- на задній кромці виконується постулат Кутта-Жуковського: швидкість рідини скінченна, а тиск неперервний;
- вихрова пелена, що сходить із задньої кромки профілю, вважається нескінченно тонкою поверхнею тангенціального розриву швидкості рідини; форма цієї поверхні заздалегідь невідома;
- на нескінченній відстані від профілю і вихрової пелени рідина є спокійною; збурення швидкості, які внесені рухомим профілем та вихровою пеленою, убувають у міру віддалення від профілю та пелени і прямують до нуля на нескінченності;
- до початку руху профілю вихорів у рідині не було, тобто течія була безвихровою.

Згідно з останньою умовою при зроблених припущеннях щодо рідини справедлива теорема Лагранжа про те, що течія всюди поза профілем і вихровою пеленою буде залишатися безвихровою і в усі наступні моменти часу. Таким чином, фізична постановка задачі дозволяє використовувати математичний апарат теорії потенціальних течій.

Нехай  $D$  – область простору поза профілем, вихровою пеленою та твердими межами. Сукупність меж області  $D$  у момент часу  $\tau$  позначимо як  $\Sigma(\tau) = L_s(\tau) \cup \sigma(\tau) \cup L_t$ , де  $L_s(\tau)$  – межа профілю,  $\sigma(\tau)$  – вихрова пелена,  $L_t$  – тверді межі. Швидкість руху точок профілю відносно нерухомої системи координат позначимо  $\bar{W}(M, \tau)$  ( $M \in L_s$ ).

Оскільки течія в  $D$  безвихрова, то при будь-якому  $\tau$  існує потенціал швидкості  $\Phi(x, y, \tau)$ , такий, що

$$\bar{V}(M, \tau) = \nabla \Phi(M, \tau), \quad M \in D,$$

і, як впливає з рівняння нерозривності,

$$\nabla^2 \Phi(M, \tau) = 0, \quad M \in D. \quad (5.4.1)$$

Потенціал  $\Phi$  повинен задовольняти такі крайові умови:

– умову непроникнення на межі профілю

$$(\nabla \Phi, \bar{n}) = (\bar{W}, \bar{n}), \quad M \in L_s(\tau); \quad (5.4.2)$$

– умову непроникнення на твердих межах

$$(\nabla \Phi, \bar{n}) = 0, \quad M \in L_t; \quad (5.4.2')$$

– умову неперервності тиску та нормальної складової швидкості на вихровій пелені

$$(\nabla \Phi, \bar{n})_+ = (\nabla \Phi, \bar{n})_-, \quad P_+ = P_-, \quad M \in \sigma(\tau); \quad (5.4.3)$$

– умову загасання збурень швидкості на нескінченному віддаленні від профілю і вихрової пелени

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |\nabla \Phi| = 0, \quad (5.4.4)$$

де  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$  ;

– умову Кутта–Жуковського на задній вихідній кромці профілю

$$(\nabla \Phi, \bar{n})_+ = (\nabla \Phi, \bar{n})_-, \quad P_+ = P_-, \quad M \in L_k. \quad (5.4.5)$$

З фізичної постановки задачі випливають початкові умови:

– у початковий момент часу вихрової пелени немає, тобто повністю відомі всі межі області течії:

$$\Sigma(\tau_0) = L_s \cup L_t \quad (5.4.6)$$

– у початковий момент часу відомий потенціал на межах

$$\Phi(M, \tau_0) = \Phi_0(M), \quad M \in \Sigma(\tau_0). \quad (5.4.7)$$

Оскільки рух починається із стану спокою, то можна припустити, що  $\Phi_0 = 0$ .

Нехай  $\bar{r}(M, \tau)$ ,  $M \in \sigma(\tau)$ , – радіус-вектор точок вихрової пелени при  $\tau > \tau_0$ , а  $\bar{r}_0(M, \tau_0)$ ,  $M \in \sigma(\tau_0)$ , описує точку появи пелени в початковий момент часу. Тоді можна записати

$$\frac{d\bar{r}}{d\tau}(M, \tau) = \bar{V}_{\Sigma_f}, \quad \tau > \tau_0, \quad (5.4.8)$$

$$\bar{r}(M, \tau) = \bar{r}_0(M, \tau_0), \quad \tau = \tau_0, \quad (5.4.9)$$

де  $\frac{d\bar{r}}{d\tau} = \bar{i} \frac{dx}{d\tau} + \bar{j} \frac{dy}{d\tau}$ , а  $\bar{V}_{\Sigma_f}$  – швидкість частинок рідини, які належать вихровій пелені. Задача Коші (5.4.8), (5.4.9) використовується для визначення шуканих координат вільної вихрової поверхні.

Якщо потенціал збуреної швидкості знайдено з розв'язку сформульованої вище нелінійної початково-крайової задачі (5.4.1)–(5.4.9), то тиск у будь-якій точці  $M$  області  $D$  визначається, як відомо, інтегралом Коші–Лагранжа рівнянь руху Ейлера. У нерухомій системі координат у безрозмірному вигляді та при відсутності зовнішніх масових сил можна записати

$$P(M, \tau) = -V^2(M, \tau) - 2 \frac{\partial \Phi(M, \tau)}{\partial \tau}, \quad M \in D. \quad (5.4.10)$$

Визначивши перепад тиску на поверхні профілю, можна знайти всі необхідні динамічні характеристики – коефіцієнти сил, моментів, а також коефіцієнт потужності і коефіцієнт корисної дії (ККД).

Потенціал швидкості будемо шукати за методом особливостей у вигляді потенціалу

$$\Phi(M_0, \tau) = \int_{\Sigma(\tau)} q(M, \tau) G(r_{MM_0}) dS_M, \quad M_0 \in D, \quad (5.4.11)$$

де  $g$  – щільність потенціалу, функція  $G$  задовольняє рівняння Лапласа,  $M$  – точка на межі  $\Sigma$ ,  $r_{MM_0} = |\vec{r}_{MM_0}|$  – довжина вектора  $\vec{r}_{MM_0}$ . Функція  $G$  є в загальному випадку суперпозицією потенціалів гідродинамічних особливостей. Вона повинна забезпечити всі властивості шуканого потенціалу швидкості, що випливають з фізичної постановки задачі. У число необхідних властивостей потенціалу в нашому випадку входять наявність тангенціального розриву швидкості на межах профілю і вільній вихровій пелені, а також загасання збурень швидкості на нескінченності. Такі властивості мають потенціали подвійного шару (шару диполів) і шару вихорів. Виконання всіх інших умов задачі можна домогтися завдяки щільності потенціалу – функції  $g$ . Підстановка (5.4.11) у крайові умови дасть для знаходження розподілу щільності  $g$  за сукупністю меж  $\Sigma$  інтегральні рівняння. Оскільки  $\Sigma$  містить і тверді межі поділу середовищ  $L_t$ , то інтегральні рівняння необхідно записувати і на  $L_t$ , що в силу нескінченності  $L_t$  значно ускладнює задачу. Через це умову на твердій межі (5.4.2') у випадку прямолінійних меж будемо задовольняти за допомогою методу дзеркальних відображень. При цьому відпадає необхідність у розподілі потенціалу за твердою межею, а функція  $G$  буде побудована таким чином, щоб умова (5.4.2') задовольнялась автоматично при будь-якій щільності  $g$  на  $L_s \cup \sigma$ .

Розглянемо для спрощення викладання спочатку задачу (5.4.1)–(5.4.7) без урахування умови (5.4.2'), тобто ізольований профіль у нескінченній рідині. Шуканий потенціал швидкості (5.4.11) будемо подавати у вигляді потенціалу подвійного шару

$$\Phi(M_0, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_s \cup \sigma} g(M, \tau) \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) dS_M, \quad M_0 \in D. \quad (5.4.12)$$

Потенціал (5.4.12) та його похідні мають такі граничні властивості на межах:

$$\Phi_{\pm}(M_0, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_s \cup \sigma} g(M, \tau) \frac{(\vec{r}_{MM_0}, \vec{n}_M)}{r_{MM_0}^2} dS_M \pm \frac{1}{2} g(M_0, \tau), \quad M_0 \in L_s \cup \sigma, \quad (5.4.13, a)$$

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_{\pm}(M_0, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{L_s \cup \sigma} g'_{S_M}(M, \tau) \frac{(y_0 - y)\vec{i} - (x_0 - x)\vec{j}}{r_{MM_0}^2} dS_M \pm \\ &\pm \frac{1}{2} (x'_{S_{M_0}} \vec{i} + y'_{S_{M_0}} \vec{j}) g'_{S_{M_0}}(M_0, \tau), \quad M_0 \in L_s \cup \sigma. \end{aligned} \quad (5.4.13, б)$$

Тут припускається, що межі  $L_s$  та  $\sigma$  задані параметрично:  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ , а  $x'_{S_{M_0}}$ ,  $y'_{S_{M_0}}$  і  $g'_{S_{M_0}}$  – похідні по параметру  $s$  в точці  $M_0$ .

Далі будемо використовувати позначення

$$\gamma(M, \tau) = g'_{S_M}(M, \tau). \quad (5.4.14)$$

Відзначимо, що вираз для градієнта  $\varphi$  збігається з виразом для градієнта потенціалу вихрового шару інтенсивності  $\gamma(M, \tau) = q'_{S_M}(M, \tau)$ , який неперервно розподілений по тих самих межах.

Запишемо крайову умову (5.4.2) у вигляді інтегрального рівняння відносно функції  $\gamma$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L_s \cup \sigma} \gamma(M, \tau) \frac{(x_0 - x)x'_{S_{M_0}} + (y_0 - y)y'_{S_{M_0}}}{r_{MM_0}^2} dS_M = (\bar{W}(M_0, \tau), \bar{n}_{M_0}), \quad M_0 \in L_s. \quad (5.4.15)$$

Розв'язок сингулярного інтегрального рівняння виду (5.4.15), як відомо [1,5,7,19], не єдиний. Для виділення єдиного розв'язку необхідно вказати клас функцій, в якому шукається розв'язок. Клас функцій визначається фізичною постановкою задачі.

Як умову, що забезпечує єдиний розв'язок, використовуємо умову постійності циркуляції швидкості по будь-якому замкнутому рідкому контуру, що охоплює профіль і слід (теорема Томсона (лорда Кельвіна)). З урахуванням (5.4.13, б) одержимо

$$\int_{L_s \cup \sigma} q'_{S_M}(M, \tau) dS_M = \text{const}, \quad (5.4.16)$$

або

$$\int_{L_s \cup \sigma} \gamma(M, \tau) dS_M = \text{const}. \quad (5.4.17)$$

Оскільки рух почався із стану спокою, то  $\text{const} = 0$ .

Відзначимо, що виконання постулату Кутта–Жуковського (5.4.5) призводить до однозначного задання циркуляції за будь-яким контуром, який охоплює обтічний профіль. Отже, при виконанні (5.4.17) умова Кутта–Жуковського буде виконуватися при будь-якому  $\tau > \tau_0$ .

Перед тим, як почати розв'язувати рівняння (5.4.15), відзначимо одну важливу властивість функції  $g$ , яка впливає із загальної постановки задачі для потенціалу швидкості.

Через довільну точку  $M_0$  на межі вихрової пелени  $\sigma$  проведемо довільний замкнений рідкий контур. У відповідності з теоремою Томсона, при зроблених нами припущеннях про характер руху рідини, циркуляція швидкості по цьому контуру з часом не змінюється. Тому можна записати

$$\frac{d}{d\tau} \oint \vec{V} \cdot \delta\vec{r} = \frac{d}{d\tau} \oint \nabla\Phi \cdot \delta\vec{r} = \frac{d}{d\tau} \oint \delta\Phi = \frac{d}{d\tau} (\Phi_- - \Phi_+) = 0,$$

або

$$\frac{d}{d\tau} [\Phi] = 0, \quad M_0 \in \sigma(\tau).$$

Ця рівність означає, що в точках вихрової пелени стрибок потенціалу не залежить від часу і є функцією тільки координат цих точок.

Але з (5.4.13, а) випливає, що

$$[\Phi(M, \tau)] = g(M, \tau).$$

Таким чином, можна записати, що

$$\frac{dg}{d\tau} = 0, \quad M \in \sigma(\tau), \quad (5.4.18)$$

тобто щільність подвійного шару на вільній межі залежить тільки від геометричних координат точок вихрової пелени.

Це означає, що  $g$  для кожної рухомої точки вихрової пелени, яка пов'язана з фіксованими рідкими частинками, досить визначити один раз у момент сходу цієї точки з крила. У всі наступні моменти часу  $g$  для цих частинок будуть мати попередні значення. Функція  $\gamma$  для точок  $M \in \Sigma_f(\tau)$  може бути визначеною диференціюванням  $\gamma(M, \tau) = g'_{S_M}(M, \tau)$  по довжині дуги вихрової пелени, якщо остання визначена.

Таким чином, у рівнянні (5.4.15) та співвідношенні (5.4.17) інтеграли можна розбити на суми інтегралів за профілем та вихровою пеленою, останні з яких можна винести в праву частину, як відомі в кожний момент часу. Одержимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{L_s} \gamma(M, \tau) \frac{(x_0 - x)x'_{S_{M_0}} + (y_0 - y)y'_{S_{M_0}}}{r_{MM_0}^2} dS_M = (\bar{W}(M_0, \tau), \bar{n}_{M_0}) - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \gamma(M, \tau) \frac{(x_0 - x)x'_{S_{M_0}} + (y_0 - y)y'_{S_{M_0}}}{r_{MM_0}^2} dS_M, M_0 \in \Sigma_s, \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

$$\int_{L_s} \gamma(M, \tau) dS_M = - \int_{\sigma} \gamma(M, \tau) dS_M. \quad (5.4.20)$$

Отже, розв'язання крайової задачі (5.4.1)–(5.4.7) для рівняння Лапласа зводиться до сингулярного інтегрального рівняння виду (5.4.19) (для нескінченної рідини). Розв'язання його при умові (5.4.20) дозволяє однозначно визначити функцію  $\gamma$ , яка є вихровою інтенсивністю. Усі кінематичні та динамічні характеристики течії можуть бути визначені потім через  $\gamma$ .

Щільність потенціалу  $g$  визначається інтегруванням рівняння (5.4.14):

$$g(M, \tau) = \int_0^{s(M)} \gamma(M_0, \tau) ds_{M_0}, \quad (5.4.21)$$

де  $s(M)$  – дугова абсциса поточної точки  $M$ , яка відраховується для визначеності від вхідної кромки профілю.

Вихровий шар на профілі за загальноприйнятою термінологією в нестационарній теорії крила називатимемо сумарним, а на вихровій пелені – вільним. Динамічні характеристики профілю, які визначаються перепадом тиску, залежать від інтенсивності сумарного вихрового шару.

Розрахунок перепаду тиску на профілі на основі інтеграла Коші–Лагранжа зручніше вести в рухомій системі координат, яка пов'язана з профілем. Застосовуючи вираз (5.4.10) до різних боків профілю, отримуємо

$$\Delta P(M, \tau) = V_{e+}^2(M, \tau) - V_{e-}^2(M, \tau) - 2 \frac{\partial'}{\partial \tau} [\Phi],$$

або

$$\Delta P(M, \tau) = (\bar{V}_{e+}(M, \tau) + \bar{V}_{e-}(M, \tau))(\bar{V}_{e+}(M, \tau) - \bar{V}_{e-}(M, \tau)) - 2 \frac{\partial'}{\partial \tau} g(M, \tau), \quad (5.4.22)$$

де  $\frac{\partial'}{\partial \tau}$  означає диференціювання в рухомій системі координат, а  $\bar{V}_e$  – відносна швидкість рідини.

З урахуванням формул (5.4.13) рівність (5.4.22) набуде вигляду

$$\Delta P(M, \tau) = 2(\bar{V}_{eL_s}(M, \tau), \gamma(M, \tau)\bar{\xi}) - 2 \frac{\partial'}{\partial \tau} g(M, \tau), \quad M \in L_s, \quad (5.4.23)$$

де  $\bar{V}_{eL_s} = \frac{1}{2}(\bar{V}_{e+}(M, \tau) + \bar{V}_{e-}(M, \tau))$ ,  $\bar{\xi}$  – одиничний вектор дотичної до кривої  $L_s$ , а перший доданок у правій частині – скалярний добуток.

Для урахування впливу меж поділу середовищ у гідроаеродинаміці крила застосовуються різні методи залежно від умов задачі. Найчастіше використовуються методи побудови функцій впливу точкових особливостей – метод розкладу за фундаментальними розв'язками, метод розкладу за власними функціями та метод конформних відображень. У випадку руху крила поблизу плоскої твердої поверхні (екрана) функція впливу точкового вихору найпростіше може бути отримана за методом дзеркальних відображень, що належить до методів розкладу за фундаментальними розв'язками рівняння Лапласа. Крайова умова непротікання на твердій межі буде виконуватися, якщо в точці, яка є дзеркальним відображенням відносно вихору, розташувати такий само вихор, але з інтенсивністю протилежного знаку.

Таким чином, при розгляді руху профілю поблизу твердої плоскої стінки необхідно побудувати симетричний відносно стінки вихровий шар з такою ж за величиною щільністю, як і в початкового профілю, але протилежною за знаком, та розглядати рух двох симетричних вихрових шарів у нескінченній рідині. Інтегральне рівняння (5.4.19) записано для профілю в нескінченному потоці. З використанням методу дзеркальних відображень відповідне рівняння для профілю поблизу твердої плоскої стінки матиме вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{L_s} \gamma(M, \tau) \left[ \frac{(x_0 - x)x'_{SM_0} + (y_0 - y)y'_{SM_0}}{r_{MM_0}^2} - \right. \\ & \left. - \frac{(x_0 - x)x'_{SM_0} + (y_0 - y^*)y'_{SM_0}}{r_{M_0M^*}^2} \right] dS_M = (\bar{W}(M_0, \tau), \bar{n}_{M_0}) - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma(\tau)} \gamma(M, \tau) \left[ \frac{(x_0 - x)x'_{SM_0} + (y_0 - y)y'_{SM_0}}{r_{MM_0}^2} - \right. \\ & \left. - \frac{(x_0 - x)x'_{SM_0} + (y_0 - y^*)y'_{SM_0}}{r_{M_0M^*}^2} \right] dS_M, \quad M_0 \in L_s, \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

де  $M^*$  – точка, симетрична точці  $M$  відносно стінки.

На відміну від рівняння (5.4.19) ядро рівняння (5.4.24) містить додатковий регулярний доданок, який не ускладнює загальний розв'язок.

## 5.5. Моделювання струменевих течій методом дискретних особливостей.

На площині  $XOY$  розглянемо область  $\Omega$ , обмежену твердою межею  $\sigma = \bigcup \sigma_i$ :

$$\sigma_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2$$

і заповнену ідеальною нестисливою рідиною (рис. 5.5.1). Із сопла діаметром  $d$  витікає струмінь, межі якого будемо моделювати вихровими пеленами  $\sigma_1^*$  і  $\sigma_2^*$ , що сходять з гострих кромки  $A_1$  і  $A_2$ . Нехай пелени задані рівняннями:

$$\begin{aligned} \sigma_i^*(x, y, t) &= 0, \quad i = 1, 2, \\ \sigma^* &= \bigcup \sigma_i^*. \end{aligned}$$

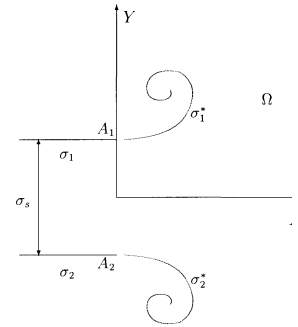


Рис. 5.5.1

В області  $\Omega$  всюди, крім вихрових пелен  $\sigma_i^*$ , існує потенціал швидкості  $\Phi$ , який задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta \Phi(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \setminus (\sigma \cup \sigma^*). \quad (5.5.1)$$

Крайовими умовами для рівняння (5.5.1) будуть умови на межах  $\sigma$ ,  $\sigma^*$  і на рідкій межі  $\sigma_s$  в деякому перерізі сопла, а також на нескінченності:

1) умова непротікання на твердих межах  $\sigma_i$

$$(\nabla \Phi(x, y, t), \vec{n}_i) = 0, \quad (x, y) \in \sigma_i, \quad i = 1, 2, \quad (5.5.2)$$

2) витрата рідини через сопло  $d$

$$\int_{\sigma_s} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy = Q(t); \quad (5.5.3)$$

3) незмінність у часі потенціалу на нескінченності і згасання швидкості, збудженої межею

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \infty} \nabla \Phi = 0, \quad \lim_{\vec{r} \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0; \quad (5.5.4)$$

4) відсутність перепаду нормальної швидкості на вихрових пеленах  $\sigma_i^*$ :

$$[\nabla \Phi(x, y, t) \cdot \vec{n}] = 0, \quad (x, y) \in \sigma_i^*; \quad (5.5.5)$$

5) умова незмінності циркуляції по довільному рідинному контуру  $l_0$  (теорема Томсона):

$$\int_{l_0} \nabla \Phi \cdot d\vec{r} = \text{const}. \quad (5.5.6)$$

Додатковою умовою буде умова скінченності швидкості в точках  $A_1$  і  $A_2$ :

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_{A_i}, y_{A_i})} \nabla \Phi(x, y, t) = \vec{W}_{A_i}, \quad i = 1, 2. \quad (5.5.7)$$

Початкову умову задамо у вигляді

$$\nabla\Phi = 0, \quad t = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (5.5.8)$$

Покладемо

$$\begin{aligned} Q(t) &= 0, \quad t < 0, \\ Q(t) &= Q_\infty, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Сформульована задача є задачею Неймана для потенціалу  $\Phi$  і має єдиний (із врахуванням (5.5.7)) розв'язок  $\Phi = \Phi(x, y, t)$ , звідки однозначно визначається поле швидкості:

$$\bar{W} = \nabla\Phi.$$

З умови руху вихрових пелен по траєкторіях частинок рідини для знаходження їх координат матимемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx_i^*(t, t^*)}{dt} &= W_x(x_i^*(t, t^*), y_i^*(t, t^*)) \\ \frac{dy_i^*(t, t^*)}{dt} &= W_y(x_i^*(t, t^*), y_i^*(t, t^*)), \quad (x_i^*, y_i^*) \in \sigma_i^*, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Початковими умовами для системи (5.5.9) є такі умови:

$$x_i^*(t^*, t^*) = x_{A_i}, \quad y_i^*(t^*, t^*) = y_{A_i}, \quad i = 1, 2. \quad (5.5.10)$$

Вихровий шар  $\sigma$  моделюється системою  $N$  приєднаних вихорів інтенсивності  $\Gamma_{\Sigma\mu}^r$ , які рівномірно (з кроком  $\Delta l$ ) розміщуються на межі, а вихрові пелени  $\sigma_i^*$  – вільними вихорами  $\delta_i^{(1)s}$ , що сходять у потік у кожен розрахунковий момент часу  $\tau_s$  із точок  $A_1$  і  $A_2$  і далі рухаються, не змінюючи своєї циркуляції.

Задача розв'язується в безрозмірному вигляді. За характерні параметри береться витрата рідини  $Q_\infty$  і діаметр сопла  $d$ . Безрозмірні величини мають вигляд

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{tQ_\infty}{d^2}, \quad \bar{w} = \frac{Wd}{Q_\infty}, \quad x' = \frac{x}{d}, \quad y' = \frac{y}{d}, \quad \varphi = \frac{\Phi}{Q_\infty}, \\ \Gamma_{\Sigma\mu}^{r'} &= \frac{\Gamma_{\Sigma\mu}^r}{Q_\infty}, \quad \delta_i^{(1)s'} = \frac{\delta_i^{(1)s}}{Q_\infty} \end{aligned}$$

(далі штрихи будемо опускати).

Виконання умови непротікання в будь-який момент часу  $\tau_r$  будемо вимагати в контрольних точках  $(x_r, y_r)$ , розміщених посередині між приєднаними вихорами. Вважаємо, що вихори в початковий момент часу в потоці відсутні, а за рідинний контур  $l_0$  візьмемо контур, що охоплює всі вихори в потоці. Тоді константа в умові (5.5.6) дорівнюватиме нулю. З умов (5.5.2), (5.5.3) і (5.5.6) одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно циркуляції приєднаних вихорів  $\Gamma_{\Sigma\mu}^r$  для кожного розрахункового моменту часу  $\tau_r$ :

$$\sum_{\mu=1}^{N+2} \Gamma_{\Sigma\mu}^r a_{\mu\nu} = -(w_{Lx\nu}^r n_{x\nu} + w_{Ly\nu}^r n_{y\nu}), \quad \nu = \overline{1, N},$$

$$\sum_{\mu=1}^{N+2} \Gamma_{\Sigma\mu}^r = \sum_{i=1}^2 \sum_{s=1}^r \delta_i^{(1)s},$$

$$\sum_{j=1}^m \left( \sum_{\mu=1}^{N+2} w_{x\mu}(B_j) \Gamma_{\Sigma\mu}^r + \sum_{s=1}^r \sum_{i=1}^2 w_{xsi}(B_j) \delta_i^{(1)s} \right) \Delta S_j = Q(\tau_r),$$

де  $a_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi}(v_{x\mu\nu} n_{x\nu} + v_{y\mu\nu} n_{y\nu})$ ;  $v_{x\mu\nu}, v_{y\mu\nu}$  – функції координат;  $w_{Lx\nu}^r, w_{Ly\nu}^r$  – відповідно поздовжня і поперечна швидкості в контрольній точці  $\nu$ , які генеруються вільними вихорами;  $B_j$  – точки в перерізі  $\sigma_s$  (рис. 5.5.2);  $w_{x\mu}(B_j)$  – поздовжня швидкість у точці  $B_j$ , яка збуджується системою вихорів  $\Gamma_{\Sigma\mu}^r$ ;  $w_{isx}(B_j)$  – поздовжня швидкість у точці  $B_j$  від системи вихорів  $\delta_i^{(1)s}$ .

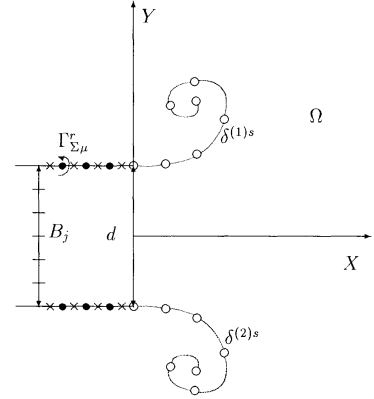


Рис. 5.5.2

Для знаходження нових координат вільних вихорів розв'язується система

$$\frac{dx_i^s(\tau, \tau_s)}{d\tau} = w_{isx}^r(x^s(\tau, \tau_s), y^s(\tau, \tau_s)),$$

$$\frac{dy_i^s(\tau, \tau_s)}{d\tau} = w_{isy}^r(x^s(\tau, \tau_s), y^s(\tau, \tau_s)), \quad s = \overline{1, r}, \quad i = 1, 2,$$

$\bar{w}_{is}^r = (w_{isx}^r, w_{isy}^r)$  – швидкість вільного вихору  $\delta_i^{(1)s}$  в момент часу  $\tau_r$ , збуджена всією системою вихорів. Початковими умовами для рівняння (5.5.13) є такі умови:

$$x_i^s(\tau_s, \tau_s) = x_{A_i}, \quad y_i^s(\tau_s, \tau_s) = y_{A_i}, \quad s = \overline{1, r}, \quad i = 1, 2.$$

Функція течії в будь-якій точці потоку є сумою функцій течії всіх вихорів і обчислюється за формулою

$$\psi(x, y, \tau) = - \sum_{i=1}^{N+2+2r} \frac{\Gamma_i(\tau)}{4\pi} \ln((x - x_i(\tau))^2 + (y - y_i(\tau))^2).$$

У будь-якій точці потоку, що не є точкою вихору, можна визначити тиск за інтегралом Коші-Лагранжа

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{W^2}{2} + \frac{p}{\rho} = F(t),$$

де  $F(t)$  – функція, що залежить від часу й однакова для всієї області. Для її визначення задамо умови на нескінченності

$$p \rightarrow p_\infty, \quad \text{при} \quad |\bar{r} - \bar{r}_{\text{гп}}| \rightarrow \infty.$$

З огляду на (5.5.4), одержуємо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{W^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho}. \quad (5.5.16)$$

Відсутність перепаду тиску на вихровій пелені  $\sigma^*$  є наслідком її руху по траєкторіях частинок рідини:

$$[p] = 0, \quad (x, y) \in \sigma^*.$$

Введемо коефіцієнт тиску  $c_p = (p - p_\infty) d^2 / \left( \frac{1}{2} \rho Q_\infty^2 \right)$  і, врахувавши безрозмірні значення потенціалу і швидкості, одержимо:

$$c_p(x, y, \tau) = -w^2(x, y, \tau) - 2 \frac{\partial \varphi(x, y, \tau)}{\partial \tau}. \quad (5.5.17)$$

У кожен момент часу  $\tau_r$  в потоці знаходяться  $N + 2$  приєднаних вихорів  $\Gamma_{\Sigma\mu}^r$ , що моделюють тверду межу  $\sigma$ , і  $2r$  вільних вихорів  $\delta_i^{(1)s}$ , що зійшли в потік у попередні моменти часу з точок  $A_1$  і  $A_2$ . Циркуляція приєднаних вихорів залежить від часу. Вільні вихори змінюють тільки свої координати.

Для знаходження частинної похідної за часом від потенціалу запишемо даний потенціал у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, \tau) = & \sum_{\mu=1}^{N+2} \frac{\Gamma_{\Sigma\mu}^r(\tau)}{2\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{x - x_\mu}{y - y_\mu} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^2 \sum_{s=1}^r \frac{\delta_i^{(1)s}}{2\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{x - x_i^s(\tau)}{x - x_i^s(\tau)} \right) + C. \end{aligned}$$

Знайдемо частинну похідну від потенціалу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y, \tau)}{\partial \tau} = & \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=1}^{N+2} \frac{\partial \Gamma_{\Sigma\mu}^r(\tau)}{\partial \tau} \left( \operatorname{arctan} \frac{x - x_\mu}{y - y_\mu} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^2 \sum_{s=1}^r \frac{\delta_i^{(1)s}}{2\pi} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \operatorname{arctan} \frac{x - x_i^s(\tau)}{x - x_i^s(\tau)} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

З огляду на те, що  $\partial x_i^s(\tau) / \partial \tau = w_{ix}^s(\tau)$ , а  $\partial y_i^s(\tau) / \partial \tau = w_{iy}^s(\tau)$  ( $\bar{w}_i^r = (w_{ix}^r, w_{iy}^r)$  – швидкість вільного вихору  $\delta_i^{(1)s}$ ), маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = & \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=1}^{N+2} \frac{\partial \Gamma_{\Sigma\mu}^r}{\partial \tau} \left( \operatorname{arctg} \frac{x - x_\mu}{y - y_\mu} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^2 \sum_{s=1}^r \delta_i^{(1)s} \left\{ - \frac{y - y_i^s(\tau)}{(x - x_i^s(\tau))^2 + (y - y_i^s(\tau))^2} w_{ix}^s + \frac{x - x_i^s(\tau)}{(x - x_i^s(\tau))^2 + (y - y_i^s(\tau))^2} w_{iy}^s \right\}. \end{aligned} \quad (5.5.19)$$

Тиск у будь-який момент часу  $\tau$ , знаходився для попереднього моменту часу  $\tau_{r-1}$  за формулою (5.5.17).

Наведемо деякі результати розрахунків. На рис. 5.5.3 зображені вихрові пелени, що моделюють межі струменя при  $\tau = 5$ . Вони цілком симетричні відносно осі  $OX$ . Картина тиску при  $\tau = 10$  (ізобари) зображена на рис. 5.5.4. Вихори створюють область розрідження, що поширюється разом із розвитком течії. Коефіцієнт тиску  $c_p$  в усій області струменя від'ємний, тобто тиск менший від тиску на нескінченності. На рисунку ізобари зображені з кроком 0.05. Градієнт тиску зменшується в напрямку  $OX$  (зменшується густина ізобар). В області вільної вихрової пелени утворюються замкнуті структури з постійним тиском, причому на межах цих структур спостерігається значна зміна тиску. Вона буде тим більшою, чим ближче до осі  $OX$  структура. При переході через вільні вихрові пелени тиск не змінюється. На твердій границі  $\sigma$  відбувається стрибок тиску. В центральній частині струменя тиск дорівнює тиску в незбуреному потоці.

Симетрія розподілу тиску і картини вихорів з часом порушується. На рис. 5.5.5 зображений розподіл вільних вихорів при  $\tau = 40$ . Утворюються концентровані області завихреності різного знаку. Шар змішування, що моделюється дискретними вихорами, розширюється вздовж осі  $OX$ . В середній ділянці струменя течія безвихрова. Розподіл ізобар теж втрачає симетричний характер (рис. 5.5.6). В середині струменя утворюються періодичні області розрідження, що відповідають згинам струменя (рис. 5.5.5). Масштаби цих періодичних структур мають порядок діаметра сопла. На внутрішній частині шару змішування градієнт тиску буде найбільшим. Картина вихорів в момент часу  $\tau = 120$  зображена на рис. 5.5.7. На початковій ділянці концентровані області від'ємної і додатної завихреності чергуються, не змішуючись між собою. Ближче до фронту струменя відбувається активне перемішування вихорів протилежної циркуляції. На значних ділянках струменя завихреність відсутня взагалі. Струмінь сильно розширився по осі  $OY$  завдяки інжекції нерухомої рідини. Інжекція відбувається внаслідок зниження тиску в струмені порівняно з тиском у навколишній рідині. Тому рідина переходить з області з вищим тиском в область нижчого тиску.

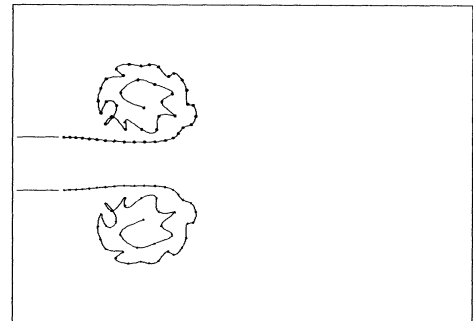


Рис. 5.5.3

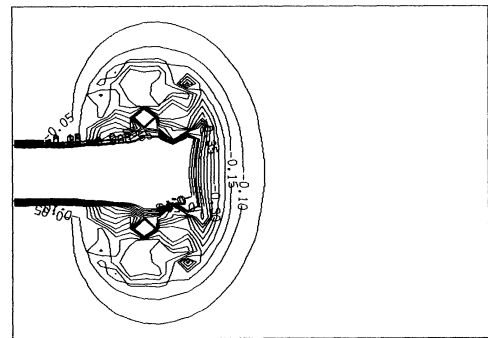


Рис. 5.5.4

На рис. 5.5.6 зображені ізолінії модуля швидкості течії затопленого струменя в момент часу  $\tau = 20$ . Вихрові пелени, що моделюють межі струменя, є нестійкими. Вони розпадаються на окремі вихори, що скупчуються з обох боків від сопла в концентровані області завихреності. Ця завихреність закручує навколишню рідину в два великомасштабних симетричних вихори з протилежною циркуляцією. Вихори, що утворилися, мають форму неправильних циліндрів, спрямованих поперек потоку, причому рідина всередині них рухається з різною швидкістю (це видно із густини ліній течії). Ближче до осі струменя ( $OX$ ) швидкість руху буде найбільшою.

Вихрові структури, що сформувалися, переміщуються вглибину потоку. При цьому їх форма зазнає деформації: вихори збільшуються за рахунок втягування рідини з навколишнього простору. В подальшому, внаслідок коливання струменя, симетрія таких вихрових утворень порушується. Поступальна швидкість великомасштабних вихорів з часом неперервно зменшується. Якщо на проміжку часу від  $\tau = 30$  до  $\tau = 40$  середня швидкість руху найбільших вихорів наближено становить  $u_c \approx 0.5W_\infty$ , то в межах часу від  $\tau = 60$  до  $\tau = 70$  –  $u_c \approx 0.35W_\infty$ .

На великих проміжках часу відбувається процес інжекції нерухомої рідини в струмінь. Рух середньої частини струменя набуває коливального характеру. В коливальний процес втягується також рідина, що надходить у струмінь із навколишнього простору. В областях впадин, завдяки коливанням струменя, із збільшенням амплітуди, утворюються нові вихрові структури. Таким чином, частина рідини, що знаходиться біля межі струменя, втягується в коливальний процес, а інша частина закручується у великі вихори, які відходять від осі струменя і переміщуються вглибину потоку.

На рис. 5.5.6 зображені ізолінії рівних швидкостей течії при  $\tau = 90$ . Вздовж струменя амплітуда коливань наростає. Кількість рідини, що бере участь у коливаннях, збільшується за рахунок інжекції. В областях із значною кривизною ліній течії утворюються нові вихрові структури різного масштабу. Рух рідини, одержаний у межах такого моделювання, не є хаотичним, спостерігається періодичність у коливаннях струменя і розміщенні великомасштабних вихорів, що чергуються по обидва боки від центральної частини. Така періодичність і регулярність з часом порушується, значне розширення струменя і зменшення швидкості руху великих вихорів приводить до затухання частоти коливань струменя.

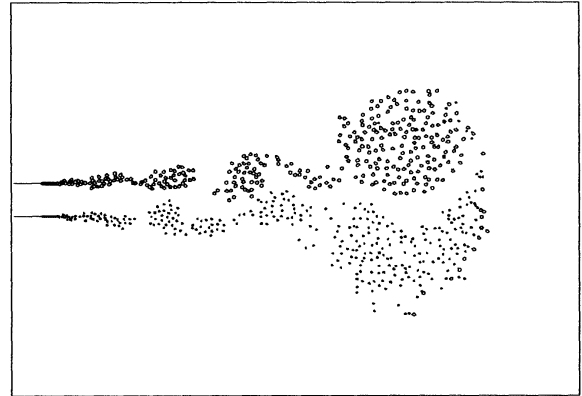


Рис. 5.5.5

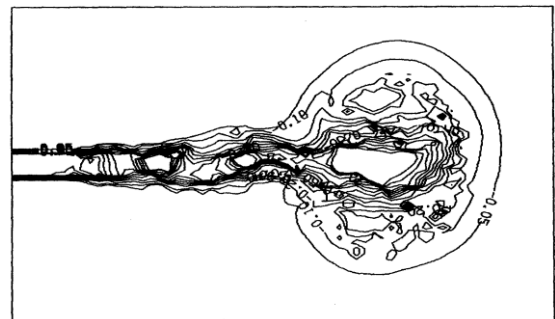


Рис. 5.5.6

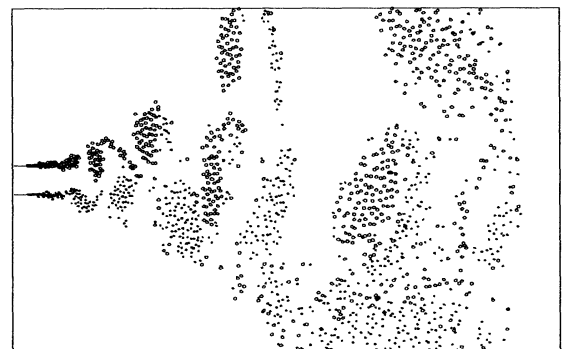


Рис. 5.5.7

## Розділ 6. Обчислювальні технології для плоских задач

### 6.1. Фізичні аспекти задач гідроаеродинаміки

У загальному випадку рух рідини поза рухомими непроникними межами  $L_d(t)$  супроводжується виникненням на гострих (кутових та кінцевих) кромках непроникної межі вихорів та їх відривом [3,16,18]. У тому випадку, коли вихрові структури, що сходять, є тонкими вихровими шарами (товщина яких набагато менше характерного розміру задачі), вони можуть бути формалізовані як нескінченно тонкі непроникні вихрові пелени – поверхні розриву поля дотичних швидкостей. При такій формалізації розглядається вже не вихрова течія в області, а течія з поверхнями розриву дотичної швидкості. У такому разі вихрова течія наближається (в інтегральному сенсі) циркуляційною течією, а поверхні розриву поля швидкості інтерпретуються як новоутворені непроникні рухомі межі області течії. Наведені вище традиційні постановки початково-крайової задачі є більш фізичними, аніж математичними. Для побудови обчислювальних технологій потрібна не тільки більш загальна, але й більш строга постановка задач (з виділенням класів функцій), що враховує основні фактори фізичного (аеродинамічного) процесу:

- Відривна течія у всіх точках сполучення обтічних меж з новоствореними відривними реалізується відповідно до умови відриву Бріллюена-Вілла [14,15]: «...Крива, що складається з контуру перешкоди та вільної межі в точці відриву, має точку повернення або неперервну дотичну (з кривизною рівною кривизні контуру перешкоди), залежно від того, збігається чи не збігається точка відриву з критичною точкою потоку...»
- При відривному обтіканні умова Жуковського-Чаплигіна задовольняється природним чином, що виключає нефізичні нескінченні значення швидкостей на гострих кінцевих та кутових кромках непроникної обтічної межі (загальна межа, що вже складається з обтічної поверхні та відривної, тепер є гладкою);
- Виконується теорема Кельвіна [3,9]: «При баротропному русі ідеальної рідини під дією поля об'ємних сил з однозначним потенціалом циркуляція швидкості за замкненим рідким контуром не змінюється»;
- Постулюється [3,9] «вмороженість» вихорів у середовище, що передбачає при виникненні відриву «стікання» у слід складок вихрової поверхні, тим самим породжуючи нові елементи межі;
- В умовах теореми Кельвіна [3,5,9] зміна циркуляції поза замкненого контуру, що охоплює тільки обтічну межу, викликає зміну циркуляції в сліді завдяки породженню нових елементів сліду на обтічній межі;
- Умова неперервності тиску при переході через поверхню розриву швидкості зводиться до диференціальної умови для шуканої функції на невідомій рухомій поверхні розриву швидкості.

### 6.2. Про постановки математичних задач гідроаеродинаміки

Для визначення циркуляційної течії ідеальної нестисливої рідини для всіх точок  $\vec{r} = (x, y, z)$  області  $D^+$  поза рухомими межами  $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$  (де  $L_d(t)$  – обтічна межа, рух якої задається,  $L_v(t)$  – вільна межа з вихрових шарів у сліді у вигляді поверхонь розриву дотичних швидкостей) ставиться задача для знаходження функції (від координат та часу) – потенціалу  $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ , для якого швидкість  $\vec{V} = \nabla \varphi$ , а також потенціал задовольняє рівняння та крайові умови



з початковими умовами при

$$t = t_0 : L_d(t_0) = L_{0d}, \quad (6.2.9)$$

а зміна вільної межі  $L_v(t)$  визначається з розв'язку задачі Коші для частинок  $\vec{r}_v = (x_v(t), y_v(t), z_v(t))$ , які й формують межу  $L_v(t)$  та визначають її рух:

$$\frac{d\vec{r}_v}{dt} = \vec{W}_v(\vec{r}_v, t), \quad (6.2.10)$$

з початковими умовами при

$$t = t_0 : L_v(t_0) = L_{0v}, \quad (6.2.11)$$

де права частина (6.2.11)

$$\vec{W}_v(\vec{r}_v, t) = \frac{1}{2} (\nabla \varphi^+(\vec{r}_v, t) + \nabla \varphi^-(\vec{r}_v, t)) \quad (6.2.12)$$

задовольняє умову (6.2.3), оскільки визначається з розв'язку задачі (6.2.1)–(6.2.11).

Розв'язання задач (6.2.1)–(6.2.7) та (6.2.8)–(6.2.9) у виділеному класі функцій (6.2.7) можливе при виконанні умов гладкості меж. Гладкість меж області в задачі забезпечується врахуванням основного фактору фізичного процесу – виникненням відриву, що задовольняє критерій Віля: сформована поверхня розриву швидкостей в точці відриву від обтічної поверхні має дотичну, що збігається з дотичною до обтічної поверхні. Таким чином, умова Кутта-Жуковського на всіх зламах та кінцях меж виконується за природного виникнення відривів.

Розв'язок задач (6.2.1)–(6.2.9) відносно потенціалу  $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$  в деформованій області  $D^+(t)$  з рухомою межею  $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$  дозволяє визначити розподіл тиску в області течії та обчислювати динамічні характеристики на її межах, використовуючи інтегральне співвідношення Коші-Лагранжа:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} \quad (6.2.13)$$

## 6.3. Математичні моделі плоских нестационарних течій

### 6.3.1. Інтегральні представлення моделей

Розв'язок плоскої математичної задачі (6.2.1)–(6.2.9) про нестационарне обтікання непроникних рухомих меж  $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$  в деформованій області  $D^+(t)$  має математичну модель, яка (у термінах ТФКЗ) має інтегральні представлення (з параметричною залежністю від  $t$ ):

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) = \\ &= \bar{U}_\infty z + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} f(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} f(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

$$\begin{aligned}\bar{V}(z,t) &= u(x,y,t) - iv(x,y,t) = \frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial z} = \\ &= \bar{U}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{f(\omega,t)}{z-\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega,t)}{z-\omega} d\omega,\end{aligned}\quad (6.3.2)$$

Математична модель (6.3.1), (6.3.2) є розв'язком для задач (6.2.1)–(6.2.9) і буде розглядатися як наближений (в інтегральному сенсі) розв'язок для вихрової течії.

### 6.3.2. Математичні постановки задач для моделей в інтегральних представленнях

Математична модель у вигляді інтегральних представлень (6.3.1), (6.3.2) визначається підінтегральною функцією та формою меж – контурів  $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ , на яких вони визначені. Для знаходження підінтегральних функцій та кінематики рухомих меж необхідно задовольнити крайові умови (6.2.2), (6.2.3), (6.2.4) на відповідних елементах межі  $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ .

Отже, крайові умови (6.2.2) та задача Коші (6.2.8), (6.2.9) зводяться до системи інтегро-диференціальних рівнянь (6.3.4), (6.3.5), які мають вирішуватися спільно.

На  $L_d(t)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \omega_d(t) \in L_d, t \geq t_0: \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f_d(\omega,t)n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)} d\omega \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \bar{W}_d n(\omega_d) - \bar{U}_\infty n(\omega_d) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f_v(\omega,t)n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)} d\omega \right\}, \\ \int_{L_d(t)} f(\omega_d,t) d\omega_d = - \int_{L_v(t)} f(\omega_v,t) d\omega_v \end{array} \right. \quad (6.3.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \omega_d(t) \in L_d(t), t > t_0, \\ \frac{d\bar{\omega}_{dv}}{dt} = \bar{W}_d(\omega_d(t)), \\ t = t_0 : L_d(t_0) = L_{d0}. \end{array} \right. \quad (6.3.4)$$

На  $L_v(t)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \omega_v(t) \in L_v(t), t > t_0, \\ \frac{d\bar{\omega}_v}{dt} = \bar{U}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{f_d(\omega,t)d\omega}{\omega_v - \omega} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f_v(\omega,t)}{\omega_v - \omega} d\omega, \\ t = t_0 : L_v(t_0) = L_{v0}, \\ \text{в точці спряження } L_v \text{ і } L_d : \text{ виконується } f_v(\omega_d,t) = f_d(\omega_v,t), \end{array} \right. \quad (6.3.5)$$

Розв'язок задач (6.3.3)–(6.3.5) дозволяє для всіх  $z \in \bar{D}^+(t)$  визначити тиск з інтегралу Коші-Лагранжа (6.2.10):

$$P(z,t) = P_\infty - \rho \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z,t) + \frac{\bar{V}(z,t) \cdot \overline{\bar{V}(z,t)}}{2} - \frac{U_\infty \cdot \bar{U}_\infty}{2} \right\}, \quad (6.3.6)$$

З огляду на мінливість області із задалегідь невідомою формою частини меж, одержати розв'язок задачі можливо лише чисельним методом.

## 6.4. Дискретизовані математичні моделі та елементи обчислювальних технологій для плоских нестационарних течій

### 6.4.1. Дискретизація інтегральних представлень

У плоскому випадку будуть розглядатися аналітичні функції в області з кусково-гладкою межею, що допускає розбиття на сукупності крайових елементів  $L = \sum_{j=1}^M L_j$  інтегральне представлення вигляду

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega, \quad (6.4.1)$$

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega, \quad \text{де } n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (6.4.2)$$

Стверджується, що справедлива [2,5] така теорема:

**Теорема 6.4.1.** Нехай аналітична по  $z$  функція має інтегральне представлення вигляду (6.4.1), (6.4.2), де  $f$  – неперервна функція точок кусково-гладкого контуру  $L$ . Стверджується, що для  $\forall z \in D^+$ , яка знаходиться на відстані  $\rho_0 = \min_{\omega \in L} |z - \omega|$  від контуру  $L$ ,

$\exists M$  (число) і  $\exists E, E_0$  узгоджене розбиття контуру  $L$  (точками  $\omega_j, j=0, \dots, M$ ; та  $\omega_{0j} \in L_j, j=1, \dots, M$ ) так, що  $L = \sum_{j=1}^M L_j$ ,  $L_j = \overline{\omega_{j-1}\omega_j}$ ,  $\omega_{0j} \in L_j$ , у якому  $\Delta = \max_j |\overline{\omega_{j-1}\omega_j}| < \rho_0$  так, що для (6.4.1) та (6.4.2) буде справедливе дискретизоване (квадратурне) представлення:

$$\Phi_0(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) + O(\varepsilon) \quad (6.4.3)$$

$$\Phi_n(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i (z - \omega_{0j})^n} + O\left(\frac{\varepsilon}{\rho_0^n}\right), \quad (6.4.4)$$

де  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

$$\Gamma_j = \int_{L_j} f(\omega) d\omega, \quad j = \overline{1, M}. \quad (6.4.5)$$

**Доведення.** Дійсно, маємо тотожності

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z-\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \ln(z-\omega_{0j}) \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \int_{L_j} f(\omega) \ln\left(1 - \frac{\omega-\omega_{0j}}{z-\omega_{0j}}\right) d\omega, \quad (6.4.6)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z-\omega)^n} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z-\omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z-\omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) \left( \left(1 - \frac{\omega-\omega_{0j}}{z-\omega_{0j}}\right)^{-n} - 1 \right) d\omega, \quad (6.4.6')$$

При виконанні умови  $\Delta = \max_j |\overline{\omega_{j-1}} \omega_j| < \rho_0$  для кожного  $L_j$  виконується

$$\left| \frac{\omega-\omega_{0j}}{z-\omega_{0j}} \right| \leq \frac{\Delta}{\rho_0} = \varepsilon < 1, \quad (6.4.7)$$

тому для останніх членів правої частини (6.4.6) і (6.4.6') справедливі оцінки

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \int_{L_j} f(\omega) \ln\left(1 - \frac{\omega-\omega_{0j}}{z-\omega_{0j}}\right) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left( \ln^2\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right) + \left(\frac{\Delta}{\rho_0}\right)^2 \right)^{1/2}, \quad (6.4.8)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z-\omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) \left( \left(1 - \frac{\omega-\omega_{0j}}{z-\omega_{0j}}\right)^{-n} - 1 \right) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi\rho_0^n} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left( \left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right)^{-n} - 1 \right). \quad (6.4.9)$$

В силу чого для  $L = \sum_{j=1}^M L_j$ , при  $A = \frac{M\Delta}{2\pi} \max_{\omega \in L} |f(\omega)|$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  справедливо

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z-\omega) d\omega - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \ln(z-\omega_{0j}) \int_{L_j} f(\omega) d\omega \right| \leq A \left( \ln^2\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right) + \left(\frac{\Delta}{\rho_0}\right)^2 \right)^{1/2}, \quad (6.4.10)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega) d\omega}{(z-\omega)^n} - \sum_{j=1}^M \frac{1}{2\pi i (z-\omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) d\omega \right| \leq \frac{A}{\rho_0^n} \left( \left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right)^{-n} - 1 \right). \quad (6.4.11)$$

Якщо врахувати, що  $\Gamma_j = \int_{L_j} f(\omega) d\omega$ ,  $j = \overline{1, M}$ . то

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z-\omega) d\omega - \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z-\omega_{0j}) \right| \leq A \left( \ln^2\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right) + \left(\frac{\Delta}{\rho_0}\right)^2 \right)^{1/2}, \quad (6.4.12)$$

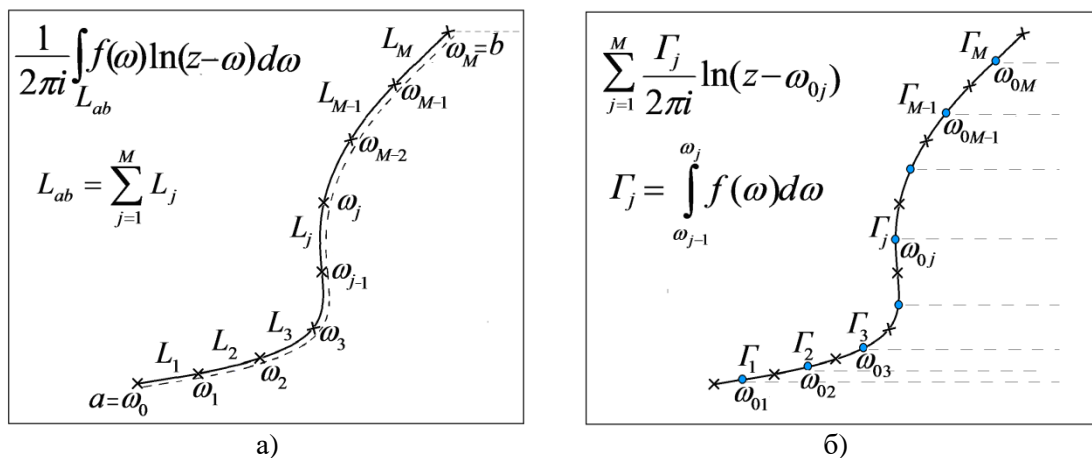
$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega) d\omega}{(z-\omega)^n} - \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i (z-\omega_{0j})^n} \right| \leq \frac{A}{\rho_0^n} \left( \left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right)^{-n} - 1 \right). \quad (6.4.12')$$

Що і доводить теорему.

**З а у в а ж е н н я:** При  $n = 1$  та  $f \in H(\lambda)$ ,  $0 < \lambda < 1$ , інтегральне представлення (6.4.2) є інтегралом типу Коші, для якого на контурі справедливі вимоги теореми, яка використовується для обґрунтування побудови методу дискретних особливостей.

### 6.4.2. Елементи обчислювальних технологій для плоских течій

Варто звернути увагу на інтегральне представлення з логарифмічним ядром у лівій частині (6.4.1), де підінтегральний вираз є багатозначною функцією з точкою розгалуження  $\omega \in L_{ab}$ . У правій частині рівності (6.4.3) представлено суму комплексних логарифмів (похибкою нехтуємо). Рівність для будь-якої точки  $z$  вважається цілком визначеною та має місце за умови, що для багатозначних функцій  $\ln(z - \omega)$  обрано її гілку та заданий розріз, що проходить уздовж контуру  $L_{ab}$ . Для виділення обраної гілки форма розрізу неважлива, але для виділення неперервного (в області значення функції зручно, щоб розріз проходив вздовж модельованого контуру. Однак, якщо для лівої частини рівності можна домовитися – вважати розрив таким, що проходить уздовж контуру  $L_{ab}$  (рис. 6.4.1, а), то для системи вихорів система розрізів проходить по променях (рис. 6.4.1, б), що з'єднують точки  $\omega_{0j} \in L_{ab}$  з нескінченно віддаленою точкою ( $z \infty$ ).



**Рис. 6.4.1.** Лінія (лінії) розрізу, що виділяє область однозначності: а) – вздовж контуру, для інтегрального представлення; б) – по променях, для дискретного представлення.

Одна з проблем методу дискретних вихорів полягає у неможливості визначення неперервного значення характеристичної функції у всій області поза модельованим (системою дискретних вихорів) контуром (залишаючись при цьому в «термінології» методу дискретних вихорів).

Якщо для інтегрального представлення (6.4.1) (яке має сенс потенціалу характеристичної функції) і можна домовитися, що розріз області співпадає з контуром, то при обчисленні потенціалу характеристичної функції в адитивному представленні (6.4.3), рис. 6.4.1, б, напрямки розрізів представляють систему променів для всієї системи дискретних вихорів.

Проблема методу дискретних вихорів – система розривів значень функції у значній частині області поза контуром, яку неможливо усунути зміною числа дискретних вихорів. Проблема розривності значень функції поза контуром може бути вирішена перетворенням, що дозволяє виділяти однозначну гілку і положення єдиного розрізу в області для багатозначної функції, визначеної на довільному криволінійному контурі [2,5].

### 6.4.3. Алгоритм виділення області однозначності багатозначної функції, яка визначена на лінійному контурі

Для впорядкованої системи дискретних вихорів (які апроксимують інтегральне представлення (6.4.3)) допустимо перетворення вигляду (6.4.9) – перехід до представлення у вигляді системи вихрових пар [1,2,5,7] та сумарного вихору:

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\sum_{k=1}^j \Gamma_k}{2\pi i} (\ln(z - \omega_{0j}) - \ln(z - \omega_{0j+1})) + \frac{\sum_{j=1}^M \Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M}) \quad (6.4.13)$$

Вважається (умовно), що лінія розрізу (яка збігається з лінією контуру), що виділяє область однозначності для функції, породженої системою вихрових пар (рис. 6.4.2, а), формується із системи розривів між елементами кожної вихрової пари.

В результаті перетворення системи вихрових пар та сумарного вихору

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{(\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) \sum_{k=1}^j \Gamma_k}{2\pi i} \left( \frac{\ln(z - \omega_{0j+1} + \omega_{0j+1} - \omega_{0j}) - \ln(z - \omega_{0j+1})}{\omega_{0j+1} - \omega_{0j}} \right) + \frac{\sum_{j=1}^M \Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M}) \quad (6.4.14)$$

до системи диполів та сумарного вихору

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{(\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) \sum_{k=1}^j \Gamma_k}{2\pi i (z - \omega_j)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M}) \quad (6.4.15)$$

отримаємо

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{D_j}{2\pi i (z - \omega_j)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M}) \quad (6.4.16)$$

де

$$\omega_j = 0.5(\omega_{0j+1} + \omega_{0j}), \quad \Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j, \quad D_j = (\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) \sum_{k=1}^j \Gamma_k \quad (6.4.17)$$

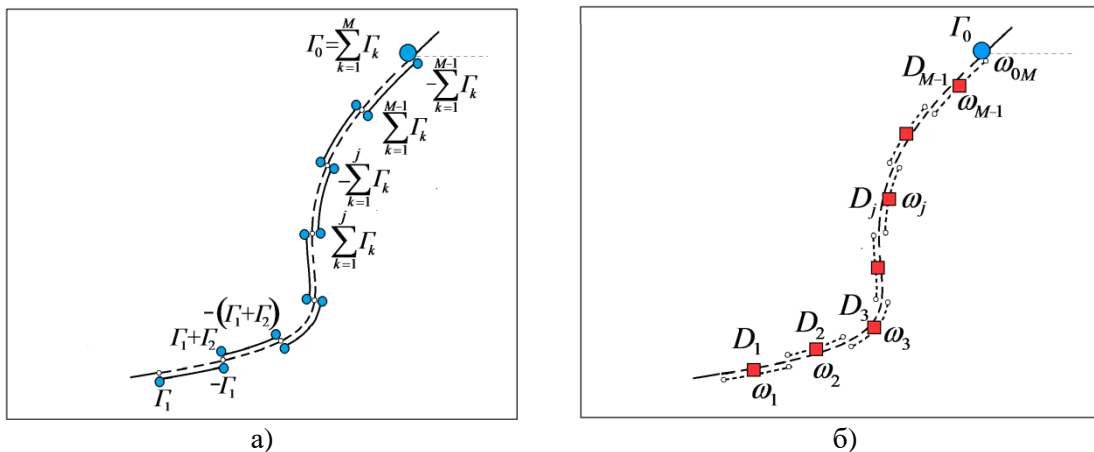


Рис. 6.4.2. Лінія розрізу, яка виділяє область однозначності:

а) – для системи вихрових пар та сумарного вихору; б) – для системи диполів та сумарного вихору

Для суми дискретних вихорів

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (6.4.18)$$

дійсна частина має вигляд суми багатозначних функцій з точками розгалуження  $(x_{0j}, y_{0j})$ ,  $j = \overline{1, M}$

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}}. \quad (6.4.19)$$

Уявна частина має вигляд суми однозначних функцій з логарифмічними особливостями в точках  $(x_{0j}, y_{0j})$ ,  $j = \overline{1, M}$  (або логарифмічною функцією від добутку з особливостями в тих самих точках)

$$\psi(x, y) = \operatorname{Im} \Phi(z) = -\sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi} \ln \left( (x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 \right)^{0.5} = \ln \left( \prod_{j=1}^M \left( (x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 \right)^{\frac{\Gamma_j}{4\pi}} \right) \quad (6.4.20)$$

Для тієї ж функції з представленням у вигляді суми диполів та логарифму

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{D_j}{2\pi i(z - \omega_j)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - \omega_{0M}) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (6.4.21)$$

дійсна частина має вигляд суми однозначних функцій з особливостями (полюси) та одним багатозначним арктангенсом з точкою розгалуження  $(x_{0M}, y_{0M})$ :

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \left( \frac{(y_{0j+1} - y_{0j})(x - x_j) - (x_{0j+1} - x_{0j})(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \right) + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_{0M}}{x - x_{0M}} \quad (6.4.22)$$

Уявна частина має представлення у вигляді суми диполів та логарифму:

$$\psi(x, y) = \operatorname{Im} \Phi(z) = -\sum_{j=1}^{M-1} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \left( \frac{(x_{0j+1} - x_{0j})(x - x_j) + (y_{0j+1} - y_{0j})(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \right) - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln \left( (x - x_{0M})^2 + (y - y_{0M})^2 \right)^{0.5} \quad (6.4.23)$$

#### 6.4.4. Алгоритм перетворення для виділення лінії розриву у області однозначності багатозначної функції (заданої на довільному контурі).

Випадок довільного контуру може бути зведений до системи зв'язних «гіллястих» контурів. «Гіллястий» контур відрізняється від попереднього випадку (простого контуру) перенумерацією дискретних вихорів на контурі залежно від індексу «гілки».

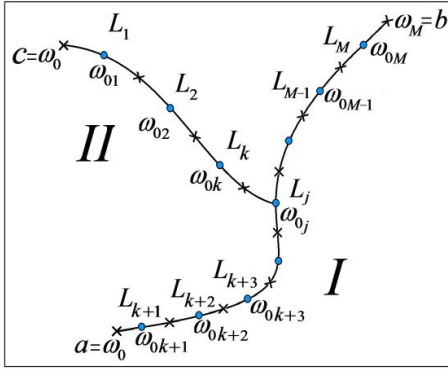


Рис. 6.4.3. а) – Розбиття «гіллястого контуру»

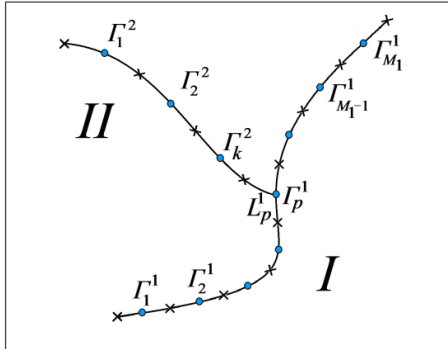


Рис. 6.4.3. б) – Перенумерація вихорів на «гіллястому контурі»

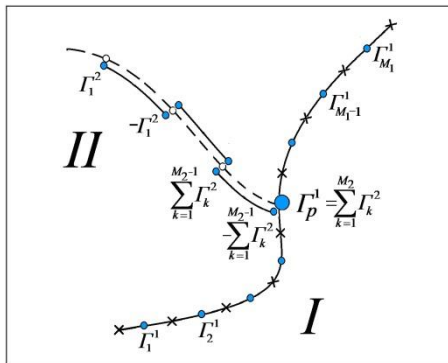


Рис. 6.4.3. в) – Перетворення від вихорів до вихрових пар на вторинній гілці

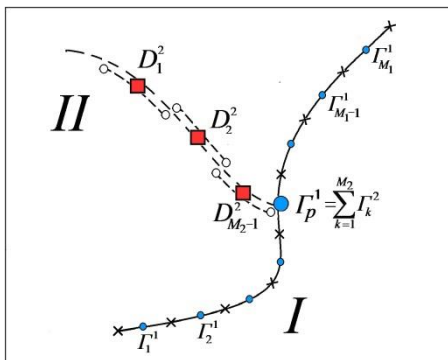


Рис. 6.4.3. г) – Перетворення від вихрових пар до диполів на вторинній гілці

Гілки на «гіллястому контурі» поділяються за рівнями: I – первинний (основний) та II – вторинний. Початково задану нумерацію вихорів на «гіллястому контурі» необхідно змінити в залежності від індексу гілки таким чином, щоб вихор у точці розгалуження входив до числа вихорів як на основному, так і на вторинному контурі.

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) \quad (6.4.24)$$

Перенумерація вихорів на «розгалуженому контурі» (рис. 6.4.3, б) виконана таким чином, щоб вузловий вихор (у точці розгалуження) входив до числа вихорів на вторинному контурі. Число вихорів на кожній гілці визначається числами  $M_j, j=1,2$ . Причому загальна кількість вихорів  $M = M_1 + M_2 - 1$  (оскільки вузловий вихор рахується двічі).

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2} \frac{\Gamma_j^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_j^2) \quad (6.4.25)$$

На рис. 6.4.3, в, представлено перетворення від вихорів до вихрових пар на вторинній гілці «гіллястого контуру»

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \\ & + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{\sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i} \left( \ln(z - \omega_{0j}^2) - \ln(z - \omega_{0j+1}^2) \right) + \\ & + \frac{\sum_{j=1}^{M_2} \Gamma_j^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_2}^2) \end{aligned} \quad (6.4.26)$$

Далі, перетворення від вихрових пар до диполів на вторинній гілці «гіллястого контуру»

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \\ & + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i} \left( \frac{\ln(z - \omega_{0j+1}^2 + \omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) - \ln(z - \omega_{0j+1}^2)}{\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2} \right) + \\ & + \frac{\sum_{j=1}^{M_2} \Gamma_j^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_2}^2) \end{aligned} \quad (6.4.27)$$

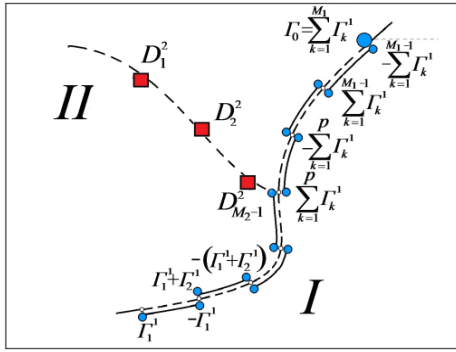


Рис. 6.4.3. г) – Перетворення від вихорів до вихрових пар на основній гілці «гіллястого контуру»

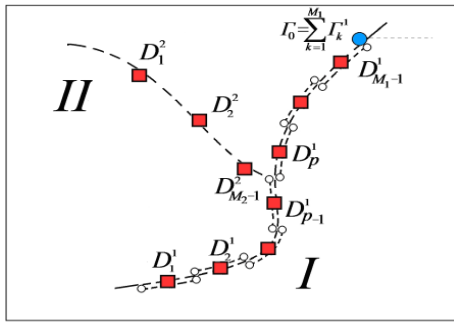


Рис. 6.4.3. д) – Перетворення від вихрових пар до диполів основної гілки «гіллястого контуру»

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{(\omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1) \sum_{k=1}^{M_1} \Gamma_k^1}{2\pi i} \left( \frac{\ln(z - \omega_{0j+1}^1 + \omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1) - \ln(z - \omega_{0j+1}^1)}{\omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1} \right) + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^{M_2} \Gamma_k^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)} \quad (6.4.32)$$

приводить до виразу для  $\Phi(z)$  у вигляді

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{(\omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1) \sum_{k=1}^{M_1} \Gamma_k^1}{2\pi i(z - \omega_j^1)} + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^{M_2} \Gamma_k^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)}, \quad (6.4.33)$$

$$\text{де } \omega_j^1 = 0.5(\omega_{0j+1}^1 + \omega_{0j}^1), \omega_{0p}^1 = \omega_{0M_2}^2 \text{ та } \Gamma_0^1 = \sum_{j=1}^{M_1} \Gamma_j^1. \quad (6.4.34)$$

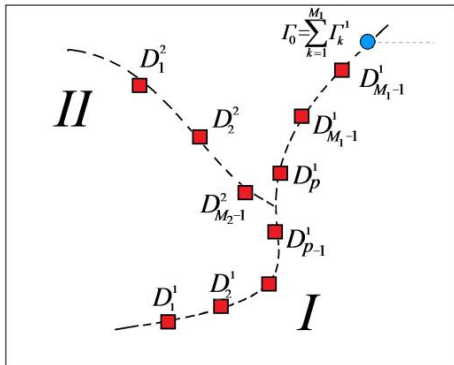


Рис. 6.4.3. ж) – Розподіл диполів та сумарного вихору

Або інакше

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)} + \frac{\Gamma_0^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_2}^2) \quad (6.4.28)$$

Причому через те що

$$\omega_j^2 = 0.5(\omega_{0j+1}^2 + \omega_{0j}^2), \omega_{0p}^1 = \omega_{0M_2}^2 \text{ та} \quad (6.4.29)$$

$$\Gamma_p^1 = \Gamma_0^2 = \sum_{j=1}^{M_2} \Gamma_j^2,$$

сумарний вихор потрапляє в другий доданок правої частини (6.4.28):

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)} \quad (6.4.30)$$

Далі, виконуються перетворення від вихорів до вихрових пар на основній гілці «гіллястого контуру»

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{\sum_{k=1}^{M_1} \Gamma_k^1}{2\pi i} (\ln(z - \omega_{0j}^1) - \ln(z - \omega_{0j+1}^1)) + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)} \quad (6.4.31)$$

Подальші перетворення від вихрових пар до диполів основної гілки «гіллястого контуру»

Остаточне представлення у вигляді суми диполів та сумарного вихору на «гіллястому контурі» набуває вигляду

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{D_j^1}{2\pi i(z - \omega_j^1)} + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{D_j^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)}, \quad (6.4.35)$$

де

$$\Gamma_0^1 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j^1 = \Gamma_0^1 = \sum_{j=1}^{M_1} \Gamma_j^1, D_j^p = (\omega_{0j+1}^p - \omega_{0j}^p) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^p \quad (6.4.36)$$

$p = 1, 2, \dots$ , а загальна кількість диполів дорівнюватиме  $M_1 + M_2 - 2$ .

Для адитивного представлення у вигляді суми диполів та логарифму

$$\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{D_j^1}{2\pi i(z - \omega_j^1)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{D_j^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)} \quad (6.4.37)$$

дійсна частина може бути представлена у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z) = & \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{\sum_{k=1}^j \Gamma_k^1}{2\pi} \left( \frac{(y_{0j+1}^1 - y_{0j}^1)(x - x_j^1) - (x_{0j+1}^1 - x_{0j}^1)(y - y_j^1)}{(x - x_j^1)^2 + (y - y_j^1)^2} \right) + \\ & + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_{0M_1}^1}{x - x_{0M_1}^1} + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{\sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi} \left( \frac{(y_{0j+1}^2 - y_{0j}^2)(x - x_j^2) - (x_{0j+1}^2 - x_{0j}^2)(y - y_j^2)}{(x - x_j^2)^2 + (y - y_j^2)^2} \right) \end{aligned} \quad (6.4.38)$$

Уявна частина може бути представлена у вигляді:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = \operatorname{Im} \Phi(z) = & - \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{\sum_{k=1}^j \Gamma_k^1}{2\pi} \left( \frac{(x_{0j+1}^1 - x_{0j}^1)(x - x_j^1) + (y_{0j+1}^1 - y_{0j}^1)(y - y_j^1)}{(x - x_j^1)^2 + (y - y_j^1)^2} \right) - \\ & - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln \left( (x - x_{0M_1}^1)^2 + (y - y_{0M_1}^1)^2 \right)^{0.5} - \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{\sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi} \left( \frac{(x_{0j+1}^2 - x_{0j}^2)(x - x_j^2) + (y_{0j+1}^2 - y_{0j}^2)(y - y_j^2)}{(x - x_j^2)^2 + (y - y_j^2)^2} \right) \end{aligned} \quad (6.4.39)$$

У наведеному алгоритмі поділ гілок контуру на основну та вторинну умовний. Його можна виконати і будь-яким іншим способом. Довільність у виборі гілок на контурі, виборі початку та напрямку обходу контурів впливають лише на чисельні значення розподілених диполів та положення сумарного вихору (від якого виконується розріз). Замкнутість контуру також не впливає на алгоритм перетворення системи дискретних вихорів у систему диполів та сумарний вихор, але вибір початку та кінця контурів визначає положення сумарного вихору і, як наслідок, положення лінії розрізу в області.

#### 6.4.5. Дискретні представлення моделей (як функцій комплексної змінної)

Для чисельного розв'язання задач аерогідромеханіки у постановці (6.3.3), (6.3.4) може бути використаний метод дискретних особливостей, заснований на дискретизації (відповідно до умов Теорема 6.4.1) інтегральних представлень (6.3.1), (6.3.2):

$$\Phi(z, t) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) = \bar{U}_\infty z + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}(t)) + \sum_p^P \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0s}^p(t)) \quad (6.4.40)$$

$$\bar{V}(z, t) = u(x, y, t) - iv(x, y, t) = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \bar{U}_\infty + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi i(z - \omega_{0j}(t))} + \sum_p^P \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi i(z - \omega_s^p(t))}, \quad (6.4.41)$$

### 6.4.6. Дискретні представлення моделей (як функцій дійсних змінних)

Метод дискретних особливостей (МДО) в термінах дійсних змінних дозволяє виділити потенціал течії (як суму потенціалу потоку, що набігає, потенціалу обтічного контуру та потенціалу вихрового сліду), функцію течії (як суму функцій течії від потоку, що набігає, від обтічного контуру та від вихрового сліду), вектор швидкості (як суму швидкостей від потоку, що набігає, від обтічного контуру та від вихрового сліду) та дискретне представлення для теореми Кельвіна:

$$\varphi(x, y, t) = xu_\infty + yv_\infty + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}} \right) + \sum_p \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{y - y_s^p(t)}{x - x_s^p(t)} \right), \quad (6.4.42)$$

$$\psi(x, y, t) = yu_\infty - xv_\infty - \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi} \ln \left( (x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \sum_p \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi i} \ln \left( (x - x_s^p(t))^2 + (y - y_s^p(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.4.43)$$

$$\vec{V}(x, y, t) = \vec{U}_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t) \vec{V}_j(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^n \delta_i^p \vec{V}_i^p(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t)), \quad (6.4.44)$$

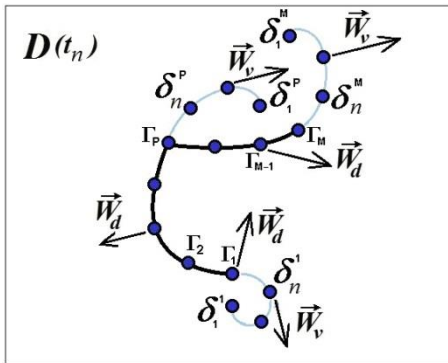
$$\sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \delta_i^p = \Gamma_0 = \text{const} \quad (6.4.45)$$

де

$$\vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t), y_{0j}(t)) = \left( \frac{y_{0j}(t) - y}{2\pi R_j^2}, \frac{x - x_{0j}(t)}{2\pi R_j^2} \right), \quad (6.4.46)$$

$$R_j = \max \left\{ r_j, \sqrt{(x - x_{0j}(t))^2 + (y - y_{0j}(t))^2} \right\} \quad (6.4.47)$$

### 6.4.7. Математичні постановки задач для дискретизованих моделей



**Рис. 6.4.4.** Система дискретних особливостей (вихорів) розподілена на «гіллястому контурі»

Математична модель у вигляді дискретних представлень (6.4.42) – (6.4.47) визначається дискретними вихорами, розподіленими на межі  $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ . Для визначення їх інтенсивностей та їх розташування в області необхідно задовольнити крайові умови (6.2.2) у вигляді системи інтегральних рівнянь (6.3.3) спільно з розв'язанням задач Коші (6.3.4), (6.3.5).

Отже, при  $t \geq t_0$  на  $L_d(t)$  система інтегральних рівнянь (6.3.3) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}
\sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) (\vec{V}_j(x_k(t_n), y_k(t_n), x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n)), \vec{n}(x_k, y_k))) = \\
= -(\vec{W}_d, \vec{n}(x_k, y_k)) - (\vec{V}_\infty, \vec{n}(x_k(t_n), y_k(t_n))) - \\
- \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \delta_i^p (V_i^p(x_k(t_n), y_k(t_n), x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)), \vec{n}(x_k(t_n), y_k(t_n))), k = \overline{1, M-1} \\
\sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) = - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \delta_i^p
\end{cases} \quad (6.4.48)$$

Зміна контуру  $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$  та зміна правої частини в (6.4.42–6.4.44) визначається з розв'язку задач Коші.

На  $L_d(t)$ :

$$\begin{cases}
npu \quad t > t_0 : \\
\left( \frac{dx_{0j}(t)}{dt}, \frac{dy_{0j}(t)}{dt} \right) = \vec{W}_d(x_{0j}(t), y_{0j}(t)), \quad j = \overline{1, M}, \\
\vec{W}_d(x_{0j}(t), y_{0j}(t)) = \vec{V}(x_{0j}(t), y_{0j}(t), t), \\
npu \quad t = t_0 : (x_{0j}(t_0), y_{0j}(t_0)) \in L_d(t_0).
\end{cases} \quad (6.4.49)$$

На  $L_v(t)$ :

$$\begin{cases}
npu \quad t > t_0 : \\
\left( \frac{dx_i^p(t)}{dt}, \frac{dy_i^p(t)}{dt} \right) = \vec{W}_v(x_i^p(t), y_i^p(t)), \quad i = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, P}, \\
\vec{W}_v(x_i^p(t), y_i^p(t)) = \frac{1}{2} (\vec{V}^+(x_i^p(t), y_i^p(t), t) + \vec{V}^-(x_i^p(t), y_i^p(t), t)), \\
\text{для } m = \overline{1, i}, \quad npu \quad t = t_{m-1} : (x_m^p(t_m), y_m^p(t_m)) = (x_{0p}(t_{m-1}), y_{0p}(t_{m-1})), \delta_m^p = \Gamma_p(t_{m-1}).
\end{cases} \quad (6.4.50)$$

Розв'язок задач (6.4.48)–(6.4.50) знаходиться чисельними методами. В результаті для кожного моменту часу  $t = t_n$  визначаються положення та геометрична форма меж  $L(t_n) = L_d(t_n) + L_v(t_n)$ , визначається розподіл інтенсивностей вихорів  $\Gamma_j(t_n)$ ,  $j = \overline{1, M}$ . на контурі та вихорів у сліді. Через розподіл кінематичних характеристик (6.4.42)–(6.4.44) визначається безрозмірний тиск, отриманий з інтегралу Коші-Лагранжа (6.3.6)

$$c_p(x, y, t_n) = 1 - \frac{V^2(x, y, t_n)}{U_\infty^2} - \frac{2}{U_\infty^2} \frac{\partial \phi(x, y, t_n)}{\partial t}, \quad (6.4.51)$$

а також розподіл усіх необхідних динамічних характеристик.

Нижче наведено алгоритм розв'язання задачі із заданою послідовністю обчислень.

## 6.5. Алгоритми обчислювальних технологій для математичних моделей плоских нестационарних течій

### 6.5.1. Послідовність обчислень при моделюванні нестационарного відривного обтікання рухомого деформівного контуру (етапи I-VI)

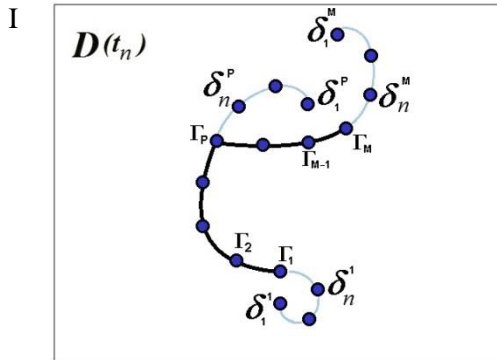


Рис. 6.5.1.

Нехай для моменту часу  $t = t_n$  відомі положення та геометрична форма меж  $L(t_n) = L_d(t_n) + L_v(t_n)$ , розподіл інтенсивностей вихорів  $\Gamma_j(t_n)$ ,  $j = \overline{1, M}$ . на контурі та вихорів  $\delta_i^p$   $i = \overline{1, n}$ ;  $p = \overline{1, P}$ . у сліді та розподіл всіх кінематичних і динамічних характеристик  $\varphi(x, y, t_n) = const$ ,  $\psi(x, y, t_n) = const$ ,  $\vec{V}(x, y, t_n)$ ,  $c_p(x, y, t_n)$  у відповідності з (6.4.42)–(6.4.44).

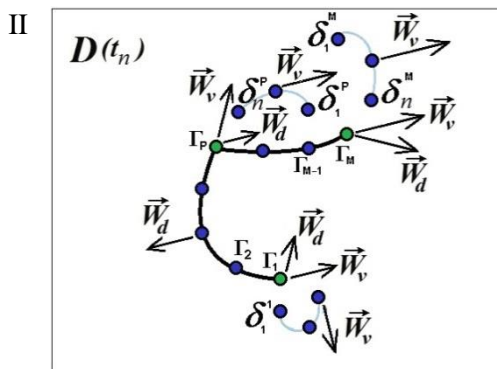


Рис. 6.5.2.

Далі, для того ж моменту часу  $t = t_n$  обчислюються швидкості  $\vec{W}_d(x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n))$ , що визначають переміщення всіх точок контуру  $L_d(t_n)$  та, у відповідності з (6.4.44), швидкості  $\vec{W}_v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) = \vec{V}(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)$  переміщення всіх точок контуру  $L_v(t_n)$ . При визначенні швидкостей в усіх  $p$ -точках відриву – кінцевих та кутових точках контуру  $L_d(t_n)$  (що є точками спряження контурів  $L_d(t_n)$  та  $L_v(t_n)$ ) – потрібно врахувати те, що  $\vec{W}_v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) \neq \vec{W}_d(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)$ .

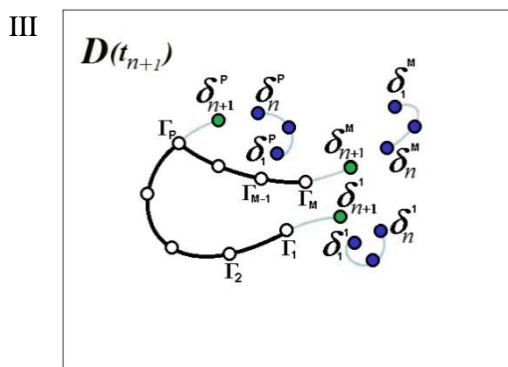


Рис. 6.5.3.

Далі, для моменту часу  $t = t_{n+1}$  визначається нове положення та форма меж  $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$ , тобто для всіх точок  $\vec{r}$  межі  $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$  чисельно розв'язуються задачі Коші (6.4.49), (6.4.50), причому крок за часом  $\tau_{n+1} = t_{n+1} - t_n$  вибирається так, щоб «сітка розбиття» на  $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$  в  $p$ -точках відриву зберігала рівномірність  $\max |d\vec{r}_{n+1}^p| = |\vec{r}_{n+1}^p - \vec{r}_n^p| \leq \Delta = \max_p \Delta_p$ .

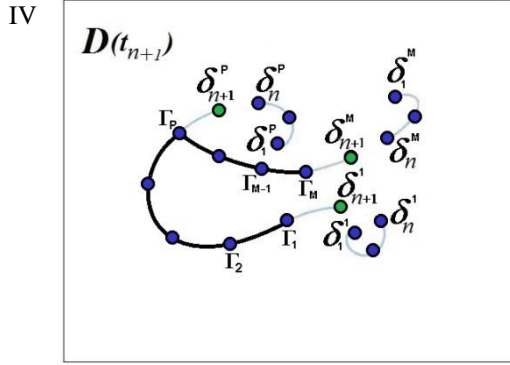


Рис.6.5.4.

Для того ж моменту часу ( $t = t_{n+1}$ ) при вже відомому положенні та формі меж  $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$ , відомих значеннях інтенсивностей  $\delta_i^p$  ( $i = \overline{1, n+1}$ ;  $p = \overline{1, P}$ .) з розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь (6.4.48) визначаються нові значення інтенсивностей вихорів  $\Gamma_j(t_{n+1})$ , ( $j = \overline{1, M}$ .) , що знаходяться на зміщеному контурі.

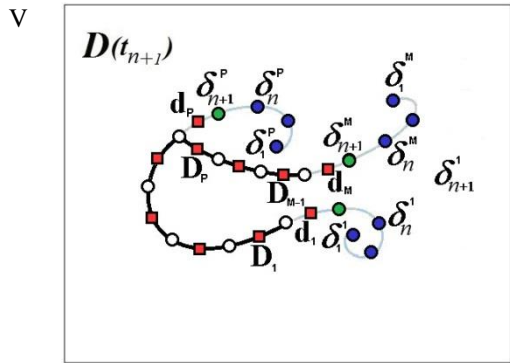


Рис. 6.5.5.

На даному етапі (при  $t = t_{n+1}$ , при вже відомих параметрах задачі для цього моменту часу), виконуються перетворення (представлені в розділі 6.4) вихрової системи (6.4.25) (на контурі) в дипольну (6.4.32), що дозволяє обчислювати кінематичні характеристики

$$\varphi(x, y, t_{n+1}) = const, \quad \psi(x, y, t_{n+1}) = const,$$

$$\vec{V}(x, y, t_{n+1})$$

та динамічні (6.4.51) характеристики  $c_p(x, y, t_n)$ .

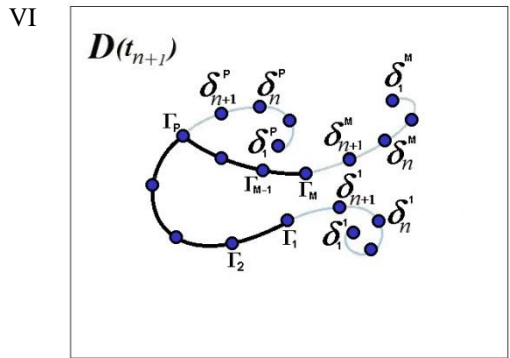


Рис. 6.5.6.

Оскільки на момент часу  $t = t_{n+1}$ , після всіх необхідних розрахунків, стають відомі всі параметри задачі (даний етап аналогічний етапу I) для продовження моделювання на наступному часовому проміжку виконується перехід до етапу I.

З а у в а ж е н н я . Обчислення інтенсивностей вихорів  $\Gamma_j(t_n)$ , ( $j = \overline{1, M}$ .) та вихорів  $\delta_i^p$ , ( $i = \overline{1, n}$ ;  $p = \overline{1, P}$ .) на контурі  $L(t_n) = L_d(t_n) + L_v(t_n)$  дозволяють отримати представлення (6.4.43)–(6.4.45) та формальне представлення похідної від потенціалу за часом:

$$\frac{\partial \varphi(x, y, t_{n+1})}{\partial t} = \sum_{j=1}^M \frac{\dot{\Gamma}_j(t_{n+1})}{2\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{y - y_j(t_{n+1})}{x - x_j(t_{n+1})} \right) + \sum_{p=1}^P \frac{\dot{\delta}_n^p}{2\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{y - y_i^p(t_{n+1})}{x - x_i^p(t_{n+1})} \right) -$$

$$- \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \left( \vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})), \vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})) \right) -$$

$$- \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \left( \vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})), \vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \right)$$

що входять у вираз для визначення безрозмірного тиску (6.4.51). Обчислення характеристик течії з використанням виразів (6.4.42) можливе лише для обмеженої множини задач – задач обтікання меж із простою (прямолінійною) геометрією (рис. 6.4.2). Для задач обтікання меж більш складної форми (рис. 6.5.1) виникають проблеми з неусувними розривами значень функції поза контуром  $L = L_d + L_v$ , які описані в Розділі 6.4. Дісно, перші дві складові у правій частині виразу (6.5.1) містять розривні функції, що не дозволяє використовувати його для обчислення похідної в (6.5.1).

Через наявність неоднозначних функцій-арктангенсів у (6.5.1) за обтічним контуром довільної форми утворюється «зона тіні» (що складається з системи неусувних розривів, рис.6.4.1, б), в якій не можуть бути обчислені похідні та залежні від їх значень динамічні й кінематичні характеристики течії.

Для вирішення цієї проблеми необхідно виконати перетворення в (6.5.1), що базуються на вимогах теореми Кельвіна:

«При баротропному русі ідеальної рідини під дією поля об’ємних сил з однозначним потенціалом циркуляція швидкості замкненого рідкого контуру не змінюється». Внаслідок чого для дискретних представлень (6.4.42)–(6.4.44) маємо:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^M \Gamma_j + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \right) = 0. \quad (6.5.2)$$

У такому формулюванні враховується постулат про «вмерзання» вихорів у середовище, що передбачає «стікання» у слід складок вихрової поверхні (поверхні розривів швидкостей), що породжують нові елементи межі. Новий (вихровий) елемент, що породжується обтічною межею, є елементом розриву в полі швидкості – збільшення циркуляції. В умовах теореми Кельвіна зміна циркуляції за замкненим контуром, що охоплює лише обтічну межу, викликає зміну циркуляції у сліді завдяки породженню відриву нових елементів сліду на обтічній межі. Циркуляція швидкості за контуром, що охоплює фіксований матеріальний об’єм з уже сформованим слідом, при баротропному русі ідеальної рідини під дією поля об’ємних сил з однозначним потенціалом не змінюється. Через що справедливо

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^M \Gamma_j + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \right) = \sum_{j=1}^M \dot{\Gamma}_j(t) + \sum_{p=1}^P \dot{\delta}_n^p = 0. \quad (6.5.3)$$

Наведене вище можна сформулювати у вигляді наслідку:

**Н а с л і д о к:** При відривному обтіканні в умовах теореми Кельвіна зміна циркуляції в сліді компенсується зміною циркуляції швидкості замкненого рідкого контуру, що охоплює тільки обтічну межу.

$$\sum_{j=1}^M \dot{\Gamma}_j(t_n) = - \sum_{p=1}^P \dot{\delta}_n^p \quad (6.5.4)$$

Вирішити проблему обчислення похідної (6.5.1) дозволить теорема:

**Т е о р е м а 6. 5. 1.** Неперервне значення похідної за часом (6.5.1) від дискретного представлення (6.4.42) з розривними функціями має представлення вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y, t_{n+1})}{\partial t} = & \sum_{j=1}^{M-1} (\bar{D}_j, \bar{V}_j(x, y, \bar{x}_j(t_{n+1}), \bar{y}_j(t_{n+1}))) + \sum_p (\bar{d}_p, \bar{V}_p(x, y, \bar{x}_n^p(t_{n+1}), \bar{y}_n^p(t_{n+1}))) - \\ & - \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) (\bar{V}_j(x, y, x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})), \bar{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1}))) - \\ & - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \left( \vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})), \vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \right) \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

де

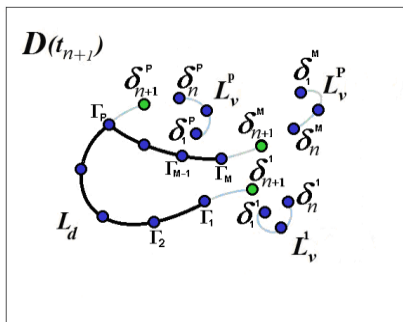
$$\begin{cases} \bar{D}_j = (x_{j+1} - x_j, y_{j+1} - y_j) Q_j, & \begin{cases} \bar{x}_j = 0.5(x_{0j+1} + x_{0j}) \\ \bar{y}_j = 0.5(y_{0j+1} + y_{0j}) \end{cases}, & \begin{cases} \bar{x}_n^p = 0.5(x_n^p + x_{0p}) \\ \bar{y}_n^p = 0.5(y_n^p + y_{0p}) \end{cases} \end{cases} \quad (6.5.5')$$

Отже, похідна (6.5.1) від потенціалу (6.4.43) має дипольне представлення (6.5.4) з векторними інтенсивностями. У якості доведення розглядається перетворення (6.4.16).

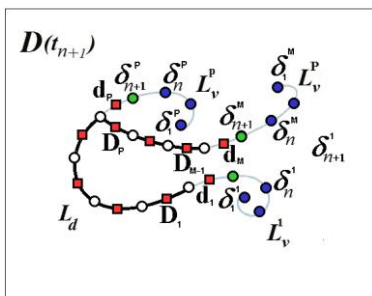
### 6.5.2. Алгоритм перетворення дискретних особливостей.

Алгоритм перетворення потенціалу системи дискретних вихорів у потенціал системи диполів наведено у Розділі 6.4. З (6.5.1) видно, що можливим є представлення для похідної, в якому зміна циркуляції на обтічному контурі компенсується породженням нових циркуляцій у сліді, викликаних відривом (6.5.3).

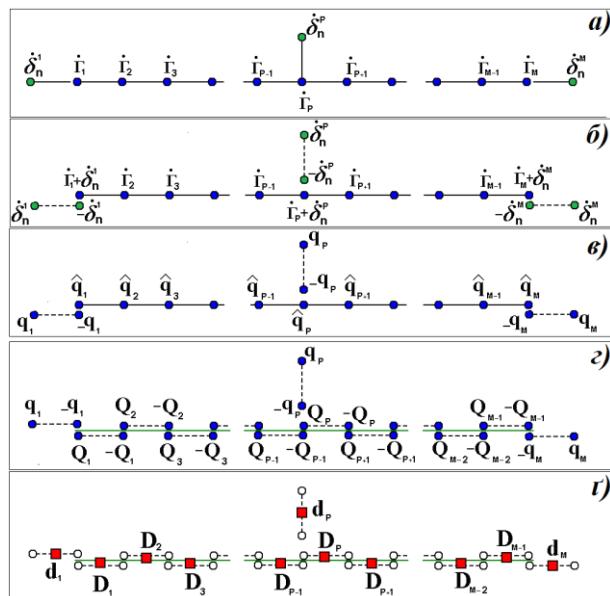
На рис. 6.5.9 представлено перетворення «вихорів-похідних» до системи «диполів» через систему «дискретних вихрових пар». У перетвореннях враховано рух (деформацію) меж, збереження циркуляції у сліді та породження нової циркуляції у сліді завдяки відриву.



**Рис. 6.5.7.** Розподіл вихорів на  $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$  при відриві.



**Рис. 6.5.8.** Розподіл вихорів та диполів на  $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$  при відриві.



**Рис. 6.5.9.** Схема перетворення системи вихорів у систему диполів при відриві на  $L_d(t_{n+1})$  в розгортці.

У відповідності з (6.5.3)

Рис. 6.5.9, а) Визначаються значення похідних від інтенсивностей новоутворених вихорів, розподілених на контурі  $L_d(t_{n+1})$ , відірваних від  $L_d(t_{n+1})$  та таких, що поповнили  $L_v(t_{n+1})$ :

$$\dot{\Gamma}_j(t_{n+1}) = (\Gamma_j(t_{n+1}) - \Gamma_j(t_n)) / (t_{n+1} - t_n), \quad \dot{\delta}_{n+1}^p = \delta_{n+1}^p / (t_{n+1} - t_n).$$

Рис. 6.5.9, б) Формуються «дискретні вихрові пари» з вихорів, що відірвалися, та вносяться «поправки» у значення похідних від інтенсивностей вихорів на контурі  $L_d(t_{n+1})$ :

$$\hat{q}_j = \hat{q}_i(t_{n+1}) = \dot{\Gamma}_j(t_{n+1}) \hat{q}_p(t_{n+1}) = \dot{\Gamma}_p(t_{n+1}) + \dot{\delta}_{n+1}^p$$

Рис. 6.5.9, в) Перепозначення: виділення «вихрових пар», що відірвалися, та приєднаних «вихорів» на контурі  $L_d(t_{n+1})$ .

Рис. 6.5.9, г) Формування «дискретних вихрових пар» із похідних від вихорів на контурі

$$L_d(t_{n+1}): \quad Q_1 = \hat{q}_1, \quad Q_i = \sum_{k=1}^i \hat{q}_k \quad i=1,2,\dots,M-1.$$

Рис. 6.5.9, ґ) Формування системи «диполів» із «дискретних пар» похідних від вихорів на контурі  $L_d(t_{n+1})$ .

При такій побудові вираз (6.5.1) для похідної від потенціалу набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y, t_{n+1})}{\partial t} = & \sum_{j=1}^{M-1} \left\{ \frac{Q_j}{2\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{y - y_j(t_{n+1})}{x - x_j(t_{n+1})} \right) - \frac{Q_j}{2\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{y - y_{0j+1}(t_{n+1})}{x - x_{0j+1}(t_{n+1})} \right) \right\} + \\ & + \sum_{p=1}^P \left\{ \frac{q_p}{2\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{y - y_i^p(t_{n+1})}{x - x_i^p(t_{n+1})} \right) - \frac{q_p}{2\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{y - y_{0p}(t_{n+1})}{x - x_{0p}(t_{n+1})} \right) \right\} - \\ & - \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) (\vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})), \vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1}))) - \\ & - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \left( \vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})), \vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \right) \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

При заміні перших двох доданків (6.5.6) їх дипольним еквівалентом з урахуванням (6.5.5) отримаємо:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi(x, y, t_n)}{\partial t} = & \sum_{j=1}^{M-1} \left\{ \frac{Q_j (\bar{y}_j - y)(x_{0j+1} - x_{0j}) + (x - \bar{x}_j)(y_{0j+1} - y_{0j})}{2\pi (x - \bar{x}_j)^2 + (y - \bar{y}_j)^2} \right\} + \\
& + \sum_{p=1}^P \left\{ \frac{q_p (\bar{y}_n^p - y)(x_{0p} - x_n^p) + (x - \bar{x}_n^p)(y_{0p} - \bar{y}_n^p)}{2\pi (x - \bar{x}_n^p)^2 + (y - \bar{y}_n^p)^2} \right\} - \\
& - \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) \left( \vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n)), \vec{W}_d(x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n)) \right) - \\
& - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \left( \vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)), \vec{W}_v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) \right)
\end{aligned} \tag{6.5.7}$$

що в позначеннях (6.5.5) дає вираз для похідної (6.5.1) у вигляді (6.5.4).

Проведені перетворення дозволяють визначати значення динамічних характеристик через (6.4.52) для моменту часу  $t = t_{n+1}$ .

Представлені перетворення складають основу обчислювальних технологій для дискретних особливостей.

## Розділ 7. Завдання до лабораторних робіт

### 7.1. Лабораторна робота №1.

#### Моделювання стаціонарої течії навколо перешкоди заданої форми

##### 7.1.1. Математична постановка задачі

$$\exists \varphi = \varphi(x, y) : \vec{V} = \nabla \varphi, \vec{V}(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \vec{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty).$$

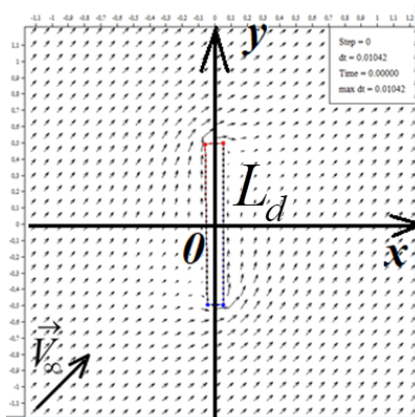


Рис. 7.1.1.

$$\Delta \varphi = 0 \text{ для } \vec{r} \in D^+, \quad (7.1.1)$$

з крайовими умовами на непроникних межах (рис. 7.1.1):

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\vec{r}_d} = 0 \text{ для } \vec{r} = \vec{r}_d \in L_d, \quad (7.1.2)$$

$$\oint_C \nabla \varphi \cdot d\vec{r} = \Gamma_0, \text{ де } C \text{ охоплює } L, \quad (7.1.3)$$

з умовами для зовнішньої задачі:

$$\lim_{|r-r_0| \rightarrow \infty} \nabla \varphi = \vec{V}_\infty. \quad (7.1.4)$$

Аналітичний розв'язок (в термінах ТФКЗ) для течії навколо довільного контуру  $L_d$  має аналітичне представлення в інтегральному вигляді

$$\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = z\vec{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \gamma(\omega) \ln(z - \omega) d\omega + Const, \quad (7.1.5)$$

$$\bar{V}(z) = u(x, y) - iv(x, y) = \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} = \vec{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{\gamma(\omega)}{z - \omega} d\omega, \quad (7.1.6)$$

$$\bar{V}_\infty = u_\infty - iv_\infty, \quad (7.1.7)$$

$$\Gamma_0 = \int_{L_d} \gamma(\omega) d\omega. \quad (7.1.8)$$

Дійсна та уявна частини характеристичної функції (7.1.5) задовольняють умову Коші-Рімана та мають зв'язок з (7.1.6):

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{cases} \quad (7.1.9)$$

$$\begin{cases} v(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (7.1.10)$$

Аналітичний розв'язок (7.1.6) задовольняє рівняння (7.1.1) та умову (7.1.4). Для знаходження підінтегральної функції  $\gamma(\omega)$  для (7.1.5) та (7.1.6) розв'язуємо систему інтегральних рівнянь, яка утворюється підставленням (7.1.6) в умови (7.1.2) та (7.1.3):

$$\begin{cases} z = \omega_d \in L_d : \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{\gamma(\omega) n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)} d\omega \right\} = -\operatorname{Re} \left\{ \bar{V}_\infty n(\omega_d) \right\} \end{cases} \quad (7.1.11)$$

$$\int_{L_d} \gamma(\omega_d) d\omega_d = \Gamma_0 \quad (7.1.12)$$

де знаходження аналітичного розв'язку системи інтегральних рівнянь заданих на довільному контурі можливе тільки на канонічних контурах: відрізках, дугах, частинах кіл і т.д. Тому буде застосовано обчислювальний метод – метод дискретних особливостей (МДО).

### 7.1.2. Параметри дискретизації задачі

1) Контур в системі координат:  $L = \sum_{j=1}^M L_j$ .

Контур – впорядкований масив точок розташування дискретних особливостей (рис. 7.1.2):

$$\{\omega_{0j} = x_{0j} + iy_{0j}\}, \quad j = 1, \dots, M, \quad \{x_{0j}, y_{0j}\}, \quad j = 1, \dots, M.$$

Впорядкований масив точок колокацій, розташованих між дискретних особливостей:  $\{\omega_k = x_k + iy_k\}, \quad k = 1, \dots, M-1,$

$$\{x_k = (x_{0k} + x_{0k+1})/2, y_k = (y_{0k} + y_{0k+1})/2\}$$

$k = 1, \dots, M-1$

Масив нормалей, розташованих в точках колокацій  $\bar{n}_k(x_k, y_k) = (n_{xk}, n_{yk}), \quad k = 1, \dots, M-1$  (рис. 7.1.3):

$$n_{xk} = -(y_{0k+1} - y_{0k}) / \sqrt{(x_{0k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0k+1} - y_{0k})^2},$$

$$n_{yk} = (x_{0k+1} - x_{0k}) / \sqrt{(x_{0k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0k+1} - y_{0k})^2}.$$

- 2)  $M$  – кількість дискретних особливостей.
- 3)  $\Gamma_0$  – константа, для визначення єдиного розв'язку.
- 4)  $\bar{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty), \quad |\bar{V}_\infty| = 1.$

Дискретизований розв'язок (7.1.5)–(7.1.8) задачі (7.1.1)–(7.1.4), при відомих  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_M$  має вигляд:

- в термінах ТФКЗ:

$$\Phi(z, t) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) = z\bar{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) + Const \quad (7.1.5')$$

$$\bar{V}(z) = u(x, y) - iv(x, y) = \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} = \bar{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i(z - \omega_{0j})} \quad (7.1.6')$$

$$\bar{V}_\infty = u_\infty - iv_\infty \quad (7.1.7')$$

$$\Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j \quad (7.1.8')$$

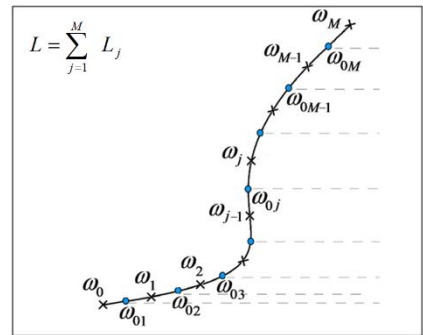


Рис. 7.1.2

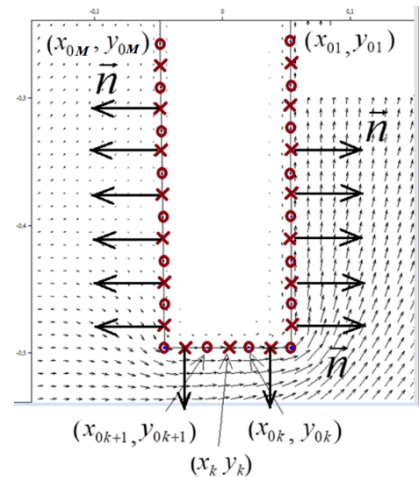


Рис. 7.1.3

- в термінах функції дійсної змінної:

$$\varphi(x, y) = xu_\infty + yv_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j \theta_j(x, y, x_{0j}, y_{0j}), \quad (7.1.13)$$

$$\theta_j(x, y, x_{0j}, y_{0j}) = \frac{1}{2\pi} \arg(z - \omega_{0j}) = \begin{cases} 0; & x=x_{0j}, y=y_{0j} \\ \frac{1}{2\pi} \arctg \frac{y-y_{0j}}{x-x_{0j}}; & x-x_{0j} > 0, y-y_{0j} \geq 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arctg \frac{x-x_{0j}}{y-y_{0j}}; & x-x_{0j} \leq 0, y-y_{0j} > 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \arctg \frac{y-y_{0j}}{x-x_{0j}}; & x-x_{0j} < 0, y-y_{0j} \leq 0 \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{2\pi} \arctg \frac{x-x_{0j}}{y-y_{0j}}; & x-x_{0j} \geq 0, y-y_{0j} < 0 \end{cases}, \quad (7.1.14)$$

скалярне поле від якої має вигляд, представлений на рис. 7.1.4.

$$\psi(x, y) = yu_\infty - xv_\infty - \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi} \ln \left( (x-x_{0j})^2 + (y-y_{0j})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.1.15)$$

$$\vec{V}(x, y) = \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j \vec{V}_j(x, y, x_{0j}, y_{0j}), \quad (7.1.16)$$

$$\vec{V}_j(x, y, x_{0j}, y_{0j}) = \left( \frac{y_{0j} - y}{2\pi \left( (x-x_{0j})^2 + (y-y_{0j})^2 \right)}, \frac{x-x_{0j}}{2\pi \left( (x-x_{0j})^2 + (y-y_{0j})^2 \right)} \right), \quad (7.1.17)$$

$$\Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j \quad (7.1.8')$$

Регуляризація дискретизованих функцій (7.1.15)–(7.1.17) має вигляд

$$\varphi(x, y) = xu_\infty + yv_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j \theta_j(x, y, x_{0j}, y_{0j}), \quad (7.1.13')$$

$$\theta_j(x, y, x_{0j}, y_{0j}) = \frac{1}{2\pi} \arg(z - \omega_{0j}) = \begin{cases} 0; & x=x_{0j}, y=y_{0j} \\ \frac{1}{2\pi} \arctg \frac{y-y_{0j}}{x-x_{0j}}; & x-x_{0j} > 0, y-y_{0j} \geq 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arctg \frac{x-x_{0j}}{y-y_{0j}}; & x-x_{0j} \leq 0, y-y_{0j} > 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \arctg \frac{y-y_{0j}}{x-x_{0j}}; & x-x_{0j} < 0, y-y_{0j} \leq 0 \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{2\pi} \arctg \frac{x-x_{0j}}{y-y_{0j}}; & x-x_{0j} \geq 0, y-y_{0j} < 0 \end{cases}, \quad (7.1.14')$$

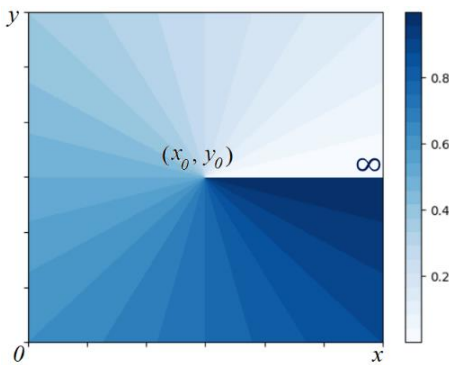


Рис. 7.1.4

$$\psi(x, y) = yu_\infty - xv_\infty - \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi} \ln R_j, \quad (7.1.15')$$

$$\vec{V}(x, y) = \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j \vec{V}_j(x, y, x_{0j}, y_{0j}), \quad (7.1.16')$$

$$\vec{V}_j(x, y, x_{0j}, y_{0j}) = \left( \frac{y_{0j} - y}{2\pi R_j^2}, \frac{x-x_{0j}}{2\pi R_j^2} \right), \quad (7.1.17')$$

$$R_j = \max \left\{ r_j, \sqrt{(x-x_{0j})^2 + (y-y_{0j})^2} \right\}, \quad (7.1.18)$$

де  $r_j$  – параметр регуляризації.

Для знаходження  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_M$ , змість інтегральних рівнянь (7.1.11) та (7.1.12) (які забезпечують виконання умов (7.1.2) та (7.1.3)) будеться система алгебраїчних рівнянь (які є дискретним аналогом системи інтегральних рівнянь) з умовою виконанням непроникнення (7.1.2) в точках колокації та умовою збереження циркуляції (7.1.3):

$$\sum_{j=1}^M \Gamma_j (\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}_j(x_k, y_k, x_{0j}, y_{0j})) = -\vec{n}_k \cdot \vec{V}_\infty, \quad k=1, M-1 \quad (7.1.19)$$

$$\sum_{j=1}^M \Gamma_j = \Gamma_0, \quad (7.1.20)$$

Вектор-розв'язок  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_M$  системи СЛАР (7.1.19)–(7.1.20), при підстановці в (7.1.13')–(7.1.17'), надає розв'язок задачі (7.1.1)–(7.1.4) у дискретизованому вигляді (7.1.13)–(7.1.17), (7.1.8') або (7.1.13')–(7.1.17'), (7.1.18).

Для коректного представлення дискретизованого розв'язку задачі (7.1.1)–(7.1.4) в усій області, обчислення доцільно виконувати за перетвореними формулами:

$$\Phi(z) = z\bar{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) \Rightarrow \Phi(z) = z\bar{V}_\infty + \sum_{j=1}^{M-1} \frac{(\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) \sum_{k=1}^j \Gamma_k}{2\pi i (z - \omega_j)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M}) \quad (7.1.21)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z) = & x u_\infty + y v_\infty + \Gamma_0 \theta_{0M}(x, y, x_{0M}, y_{0M}) + \\ & + \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\Gamma_j}{2\pi} \left( \frac{(y_{0j+1} - y_{0j})(x - x_j) - (x_{0j+1} - x_{0j})(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \right), \end{aligned} \quad (7.1.22)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = \operatorname{Im} \Phi(z) = & y u_\infty - x v_\infty - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln((x - x_{0M})^2 + (y - y_{0M})^2)^{0.5} - \\ & - \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\Gamma_j}{2\pi} \left( \frac{(x_{0j+1} - x_{0j})(x - x_j) + (y_{0j+1} - y_{0j})(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \right), \end{aligned} \quad (7.1.23)$$

де

$$\begin{cases} x_j = 0.5(x_{0j+1} + x_{0j}) \\ y_j = 0.5(y_{0j+1} + y_{0j}) \end{cases}, \quad (7.1.24)$$

$$\Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j = \text{const}. \quad (7.1.25)$$

Застосування регуляризації (7.1.18) у формулах (7.1.22), (7.1.23) призводить до коректного представлення розв'язку задачі (7.1.1)–(7.1.4) в усій області:

$$R_j = \max \left\{ r_j, \sqrt{(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2} \right\}, \quad (7.1.18')$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z) = & x u_\infty + y v_\infty + \Gamma_0 \theta_{0M}(x, y, x_{0M}, y_{0M}) + \\ & + \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\Gamma_j}{2\pi} \left( \frac{(y_{0j+1} - y_{0j})(x - x_j) - (x_{0j+1} - x_{0j})(y - y_j)}{R_j^2} \right), \end{aligned} \quad (7.1.22')$$

$$\psi(x, y) = \text{Im } \Phi(z) = yu_\infty - xv_\infty - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln R_j^2 - \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \left( \frac{(x_{0j+1} - x_{0j})(x - x_j) + (y_{0j+1} - y_{0j})(y - y_j)}{R_j^2} \right), \quad (7.1.23')$$

де

$$\begin{cases} x_j = 0.5(x_{0j+1} + x_{0j}) \\ y_j = 0.5(y_{0j+1} + y_{0j}) \end{cases}, \quad (7.1.24')$$

$$\Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j = \text{const}. \quad (7.1.25')$$

### 7.1.3. Завдання до лабораторної роботи №1

#### Вхідні дані:

- 1)  $L_d$  – контур в системі координат (задається впорядкованим масивом точок  $\{\omega_{0j} = x_{0j} + iy_{0j}\}, j = 1, \dots, M$ ,  $\{x_{0j}, y_{0j}\}, j = 1, \dots, M$ );
- 2)  $M$  – задана кількість дискретних особливостей;
- 3)  $\Gamma_0$  – задана циркуляція течії навколо перешкоди (заданого контуру  $L_d$ );
- 4)  $\vec{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty)$ ,  $|\vec{V}_\infty| = 1$ .

#### Завдання:

- 1) Побудувати векторне поле швидкостей (рис. 7.1.5)

$$\vec{V}(x, y) = \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j \vec{V}_j(x, y, x_{0j}, y_{0j}).$$

- 2) Побудувати ізолінії скалярного поля модуля швидкості  $|\vec{V}|$  (рис. 7.1.5).
- 3) Побудувати ізолінії скалярного поля функції потенціалу (рис. 7.1.6)
- 4) Побудувати ізолінії скалярного поля функції течії (рис. 7.1.7)

$$\psi(x, y) = \text{const}$$

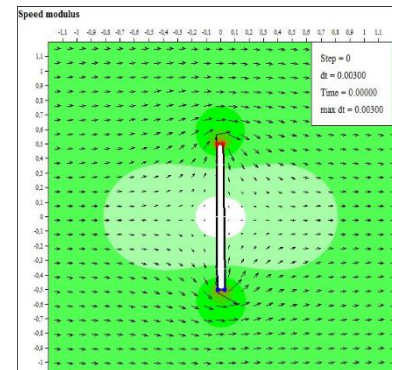


Рис. 7.1.5

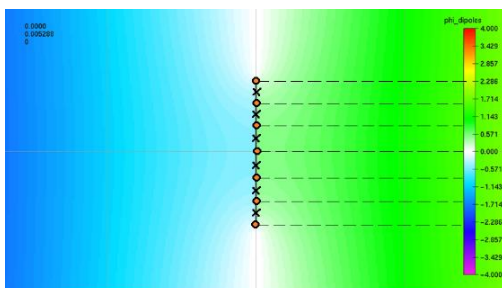


Рис. 7.1.6

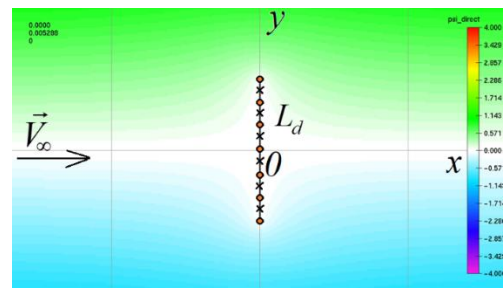


Рис. 7.1.7

Результати обчислення функцій (7.1.13)–(7.1.17) та (7.1.22')–(7.1.23') повинні мати графічне представлення подібне до рис. 7.1.5 – рис. 7.1.7.

## 7.2. Лабораторна робота №2.

### Моделювання нестационарної течії навколо перешкоди заданої форми

#### 7.2.1. Математична постановка задачі

Для відривної течії ідеальної нестисливої рідини навколо перешкоди (рис. 7.2.1) маємо задачу щодо визначення функції  $\varphi = \varphi(r, t)$ :  $\vec{V} = \nabla \varphi$ , такої що

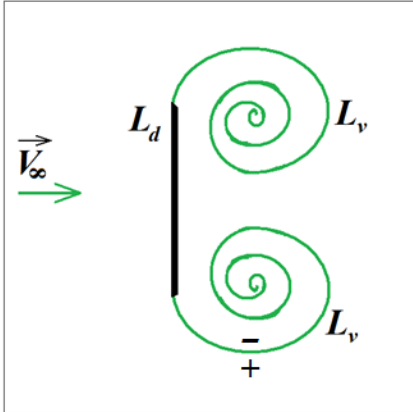


Рис. 7.2.1

$$\text{при } t \geq t_0 : \Delta \varphi = 0 \text{ для } \vec{r} \notin L_d, L_v, \quad (7.2.1)$$

з крайовими умовами на нерухомих межах:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ для } \vec{r} = \vec{r}_d \in L_d(t), \quad (7.2.2)$$

з крайовими умовами на невідомій вільній межі:

$$\frac{d}{dt}(\varphi^+ - \varphi^-)_{|r_v} = 0 \text{ для } \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t), \quad (7.2.3)$$

з умовами для зовнішньої задачі:

$$\lim_{|r-r_L| \rightarrow \infty} \nabla \varphi = V_\infty. \quad (7.2.4)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} = \vec{V}(\vec{r}_v, t) \text{ для } \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t), \quad (7.2.5)$$

$$\text{при } t = t_0 : L_0 = L_d(t_0) + L_v(t_0). \quad (7.2.6)$$

Інтегральне представлення розв'язку ( $\bar{V}_\infty = u_\infty - iv_\infty$ ):

$$\Phi(z, t) = \varphi + i\psi = \bar{V}_\infty z + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} f(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} f(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + Const, \quad (7.2.7)$$

$$\bar{V}(z, t) = u - iv = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \bar{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{f(\omega, t)}{z - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t)}{z - \omega} d\omega. \quad (7.2.8)$$

Умова на детермінованій межі  $L_d$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \omega_d(t) \in L_d, \quad t \geq t_0: \\ \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f(\omega, t) n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)} d\omega \right\} = -\text{Re} \left\{ \bar{V}_\infty n(\omega_d) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t) n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)} d\omega \right\} \\ \int_{L_{d_j}} f(\omega_d, t) d\omega_d = - \int_{L_{v_j}(t)} f(\omega_v, t) d\omega_v + C_j, \quad j = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (7.2.9)$$

Умова на вільній межі  $L_v$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \omega_v(t) \in L_v(t), \quad t > t_0: \\ \frac{d\bar{\omega}_v(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f(\omega, t) d\omega}{(\omega_v - \omega)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t) d\omega}{(\omega_v - \omega)} + \bar{V}_\infty, \\ \omega_v = \omega_d \Rightarrow f(\omega_v, t) = f(\omega_d, t), \\ t = t_0: \\ L_v(t_0) = L_{v0} \end{array} \right. \quad (7.2.10)$$

Визначення поля розподіленого тиску

$$P(z, t) = P_\infty - \rho \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) + \frac{\bar{V}(z, t) \cdot \overline{\bar{V}(z, t)} - V_\infty \cdot \bar{V}_\infty}{2} \right\}. \quad (7.2.11)$$

## 7.2.2. Параметри дискретизації задачі

Вхідні дані для дискретизованої моделі:

1) Контур в системі координат визначається масивом маркованих точок, в яких розташовано систему дискретних особливостей:

- Впорядкований масив точок  $\{\omega_{0j} = x_{0j} + iy_{0j}\}$ ,  $j = 1, \dots, M$   
розташування дискретних особливостей:

$$\{x_{0j}, y_{0j}\}, \quad j = 1, \dots, M$$

- Впорядкований масив точок колокацій  $\{\omega_k = x_k + iy_k\}$ ,  $k = 1, \dots, M-1$  розташованих між дискретних особливостей:

$$\{x_k = (x_{0k} + x_{0k+1})/2, y_k = (y_{0k} + y_{0k+1})/2\}$$

$$k = 1, \dots, M-1$$

- Масив нормалей, розташованих в точках колокацій  $\vec{n}_k(x_k, y_k) = (n_{xk}, n_{yk})$ ,  $k = 1, \dots, M-1$  (рис. 7.2.2):

$$n_{xk} = -(y_{0k+1} - y_{0k}) / \sqrt{(x_{0k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0k+1} - y_{0k})^2},$$

$$n_{yk} = (x_{0k+1} - x_{0k}) / \sqrt{(x_{0k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0k+1} - y_{0k})^2}.$$

2)  $M$  – кількість дискретних особливостей;

3)  $\Gamma_0$  – константа для визначення єдиного розв'язку;

4)  $\bar{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty)$ ,  $|\bar{V}_\infty| = 1$ .

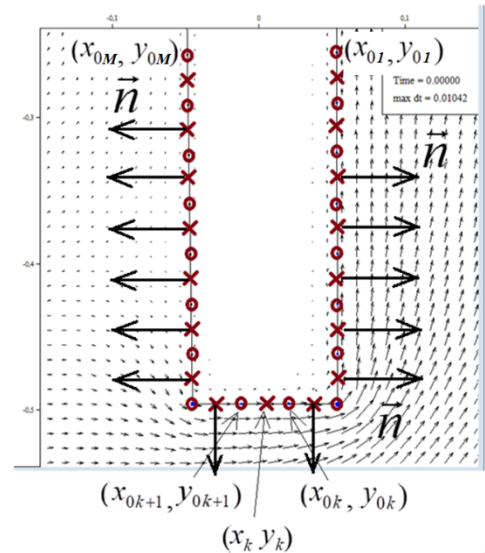


Рис. 7.2.2

Дискретизована модель (при  $t = t_{n+1}$ ,  $\vec{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ):

$$\varphi(x, y, t_{n+1}) = (xu_\infty + yv_\infty) + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t_{n+1})}{2\pi} \theta_j(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_i^p}{2\pi} \theta_i(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \quad (7.2.12)$$

$$\vec{V}(x, y, t_{n+1}) = (u_\infty, v_\infty) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})), \quad (7.2.13)$$

Умова на детермінованій межі  $L_d$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) (\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}_j(x_k, y_k, x_{0j}, y_{0j})) = \\ & = -(\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}_\infty) - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p (\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}(x_k, y_k, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}))), \quad (7.2.14) \\ & \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) = -\sum_p \sum_{i=1}^n \gamma_i^p, \quad k = \overline{1, M-1} \end{aligned}$$

Умова на недетермінованій межі  $L_v$ :

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{V}_n \tau_n, \quad (7.2.15)$$

$$C_p(x, y, t) = 2 \frac{p - p_\infty}{\rho \vec{V}_\infty^2} = 1 - \frac{(\nabla \varphi)^2}{V_\infty^2} - \frac{2}{V_\infty^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (7.2.16)$$

Визначення  $\Gamma_1(t_{n+1}), \dots, \Gamma_M(t_{n+1})$  для векторного поля швидкостей:

$$\vec{V}(x, y, t_{n+1}) = (u_\infty, v_\infty) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})). \quad (7.2.17)$$

Із умови

$$\left( \vec{V}(x_k, y_k, t_{n+1}) \cdot \vec{n}(x_k, y_k) \right) = 0, \quad k = \overline{1, M-1} \quad (7.2.18)$$

маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) (\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}_j(x_k, y_k, x_{0j}, y_{0j})) = \\ & = -(\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}_\infty) - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p (\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}(x_k, y_k, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}))), \quad (7.2.19) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) = -\sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p, \quad k = \overline{1, M-1}. \quad (7.2.20)$$

Розв'язок:

$$\Gamma_1(t_{n+1}), \dots, \Gamma_M(t_{n+1}) \quad (7.2.21)$$

Чисельний розв'язок початково-крайової задачі відривного обтікання окремого незамкненого контуру

$$\begin{aligned} \vec{V}(x, y, t_n) &= \nabla \varphi(x, y, t_n) = (u(x, y, t_n), v(x, y, t_n)) = \\ &= \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)). \end{aligned} \quad (7.2.22)$$

Вектор швидкості

$$\vec{V}(x, y, x_{0i}, y_{0i}) = (u(x, y, x_{0i}, y_{0i}), v(x, y, x_{0i}, y_{0i})), \quad (7.2.23)$$

визначений в точці  $(x, y)$ , індукований вихором з одиничною інтенсивністю, розташованим в точці  $(x_{0i}, y_{0i})$ :

$$u(x, y, x_{0i}, y_{0i}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{y_{0i} - y}{R_{0i}^2} \quad (7.2.24)$$

$$v(x, y, x_{0i}, y_{0i}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x - x_{0i}}{R_{0i}^2} \quad (7.2.25)$$

$$R_{0i} = \begin{cases} \sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2}, & \sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2} > \delta \\ \delta, & \sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2} \leq \delta \end{cases} \quad (7.2.26)$$

Крок по часу обирається із умови

$$\tau_n = \frac{\min(\delta_k)}{\max_{D^+}(|V|)}. \quad (7.2.27)$$

Послідовність кроків при моделюванні кінематики:

1) (рис. 7.2.3, а):

$$\vec{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty) = (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad (7.2.28)$$

$$\varphi(x, y, t_n) = (xu_\infty + yv_\infty) + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t_n)}{2\pi} \theta_j(x, y, y_{0j}, x_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_i^p}{2\pi} \theta_j(x, y, x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) \quad (7.2.29)$$

$$\vec{V}(x, y, t_n) = (\cos \alpha, \sin \alpha) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) \quad (7.2.30)$$

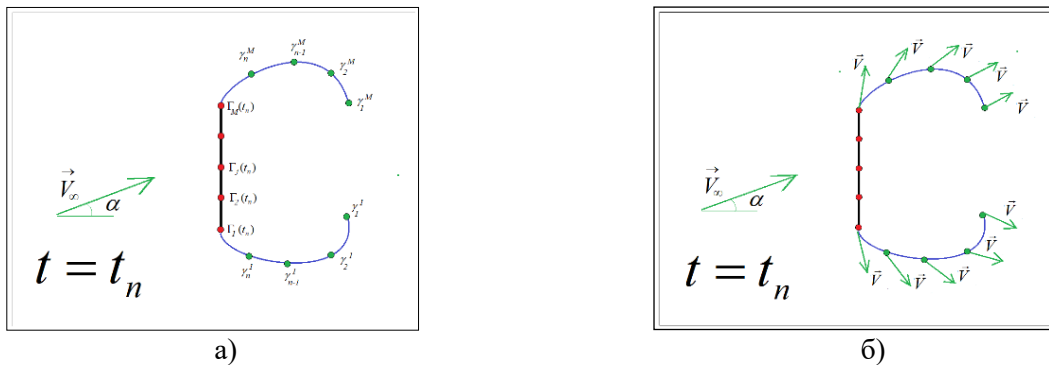


Рис. 7.2.3

2) Визначення швидкості всіх вихорів, які визначають контур  $L_v^p$ , що відірвався від  $P$ -вихора (рис. 7.2.3, б):

$$\begin{aligned} \vec{V}(x, y, t_n) &= \nabla \varphi(x, y, t_n) = (u(x, y, t_n), v(x, y, t_n)) = \\ &= \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)). \end{aligned} \quad (7.2.31)$$

3) Пересування за час  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  всіх вихорів, які визначають контур  $L_v^p$ , що відірвався від  $P$ -вихора:

$$\begin{aligned} \forall p, i = 1, \dots, n \\ \begin{cases} x_i^p(t_{n+1}) = x_i^p(t_n) + u(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)(t_{n+1} - t_n) \\ y_i^p(t_{n+1}) = y_i^p(t_n) + v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)(t_{n+1} - t_n) \end{cases} \end{aligned} \quad (7.2.32)$$

$\gamma_{n+1}^p = \Gamma_p(t_n)$  – визначення інтенсивності нового вихора, що відірвався від  $P$ -вихора (рис. 7.2.4, а).

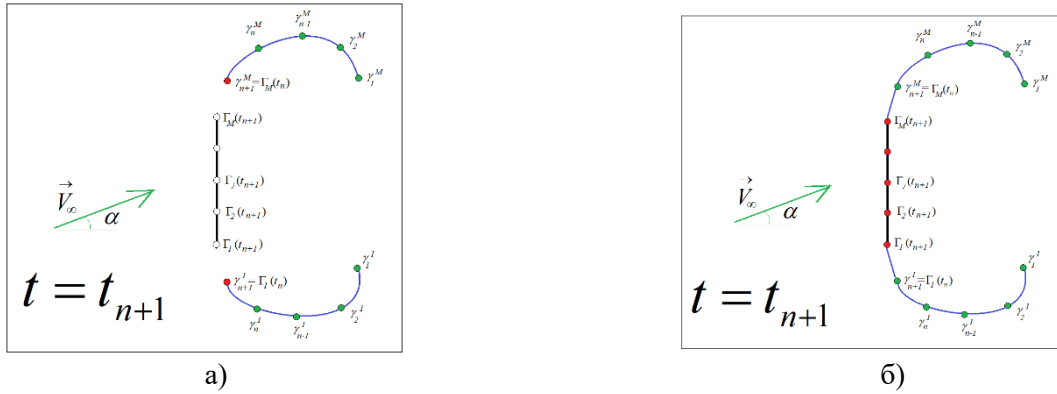


Рис. 7.2.4

4) Розв'язування СЛАР для визначення  $\Gamma_1(t_{n+1}), \dots, \Gamma_M(t_{n+1})$  (рис. 7.2.4, б):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) (\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}_j(x_k, y_k, x_{0j}, y_{0j})) = \\ = -(\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}_\infty) - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p (n(x_k, y_k) \cdot \vec{V}(x_k, y_k, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}))) \end{aligned} \quad (7.2.33)$$

$$\sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) = -\sum_p \sum_{i=1}^n \gamma_i^p, \quad k = \overline{1, M-1} \quad (7.2.34)$$

$$\varphi(x, y, t_{n+1}) = (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t_{n+1})}{2\pi} \text{Arctg} \left( \frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}} \right) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_i^p}{2\pi} \text{Arctg} \left( \frac{y - y_i^p(t_{n+1})}{x - x_i^p(t_{n+1})} \right) \quad (7.2.35)$$

$$\varphi(x, y, t_{n+1}) = (xu_\infty + yv_\infty) + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t_{n+1})}{2\pi} \theta_j(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_i^p}{2\pi} \theta_i(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \quad (7.2.35)$$

$$\vec{V}(x, y, t_{n+1}) = (\cos \alpha, \sin \alpha) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \quad (7.2.36)$$

### 7.2.3. Приклади графічного відображення

$$\vec{V}(x, y, t) = (u_\infty, v_\infty) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n(t)} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t)), \quad (7.2.37)$$

$$\varphi(x, y, t) = (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi} \theta_j(x, y, y_{0j}, x_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_i^p}{2\pi} \theta_j(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t)) \quad (7.2.38)$$

$$C_p(x, y, t) = 2 \frac{p - p_\infty}{\rho \vec{V}_\infty^2} = 1 - \frac{(\nabla \varphi)^2}{\vec{V}_\infty^2} - \frac{2}{\vec{V}_\infty^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (7.2.39)$$

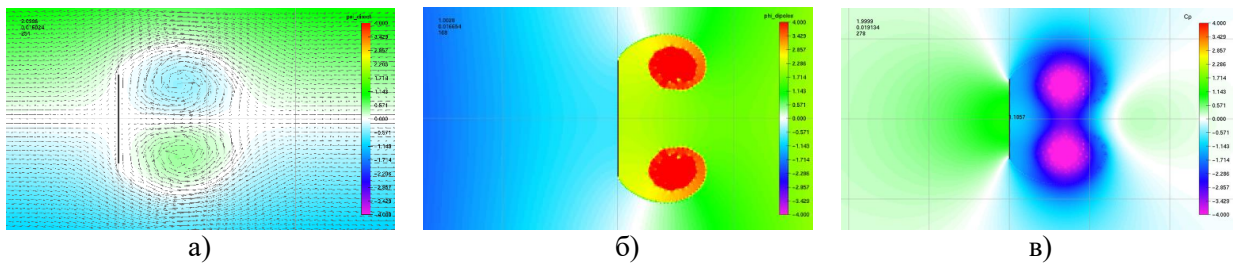


Рис. 7.2.5. а)  $\vec{V}$ , б)  $\varphi$ , в)  $C_p$

Вплив нестационарності (поелементне відображення):

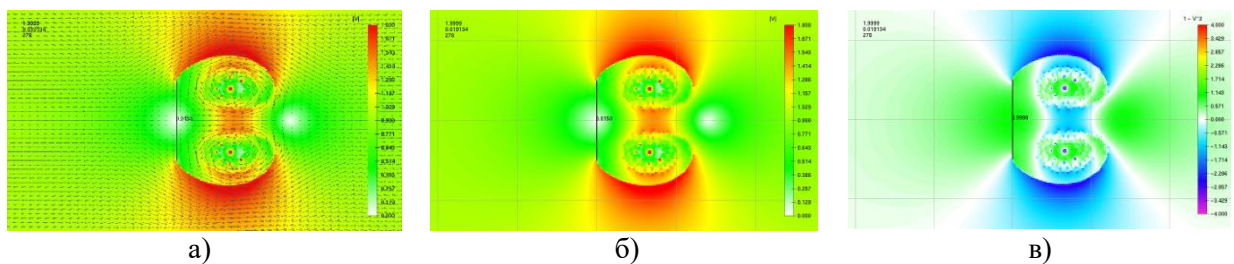


Рис. 7.2.6. а)  $\vec{V}$ , б)  $|\vec{V}|$ , в)  $1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}$

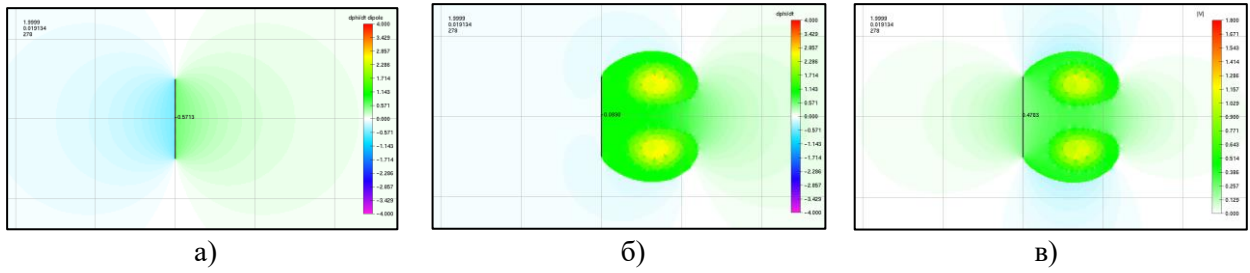


Рис. 7.2.7. а)  $\frac{\partial \varphi_{\text{диполь}}}{\partial t}$ , б)  $\frac{\partial \varphi_{\text{конвект}}}{\partial t}$ , в)  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$

$$C_p(x, y, t) = 1 - \frac{(\vec{V}(x, y, t))^2}{V_\infty^2} - \frac{2}{V_\infty^2} \left( \frac{\partial \varphi_{\text{диполь}}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{\text{конвект}}}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial t} \right)$$

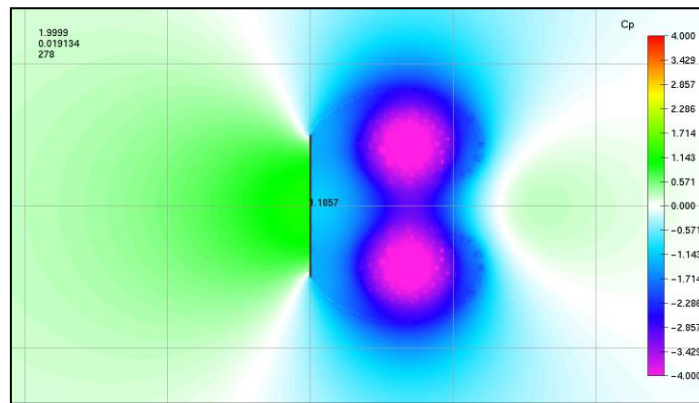


Рис. 7.2.8.  $C_p$

Розвиток течії навколо перешкоди (лінійний контур):

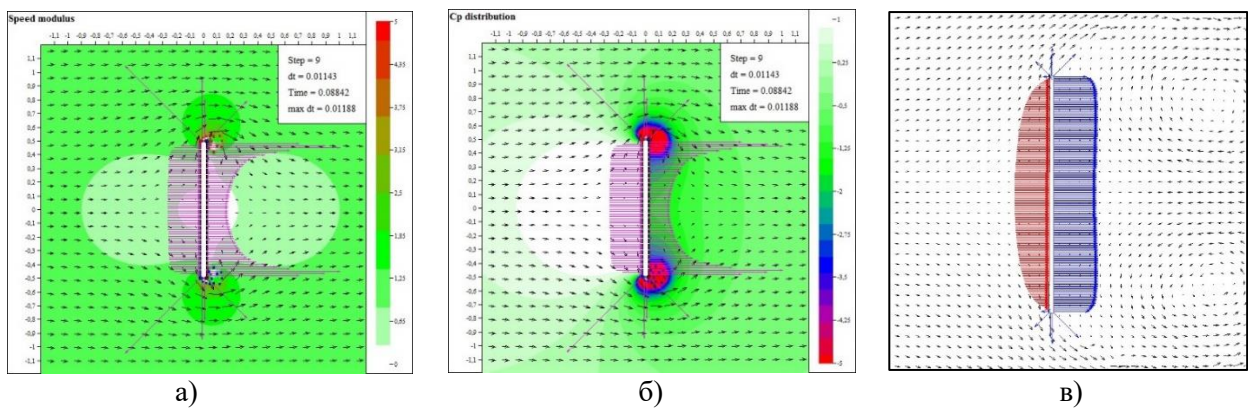
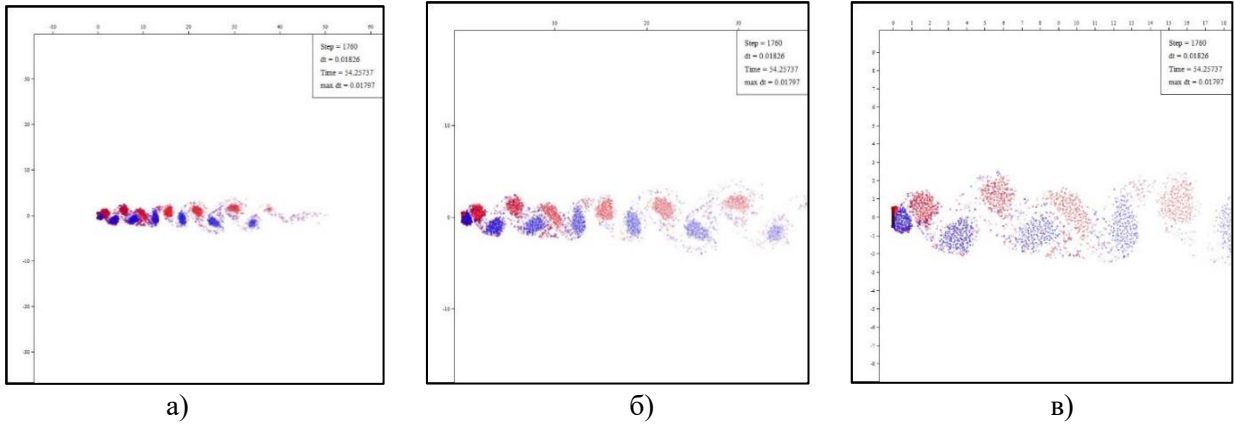


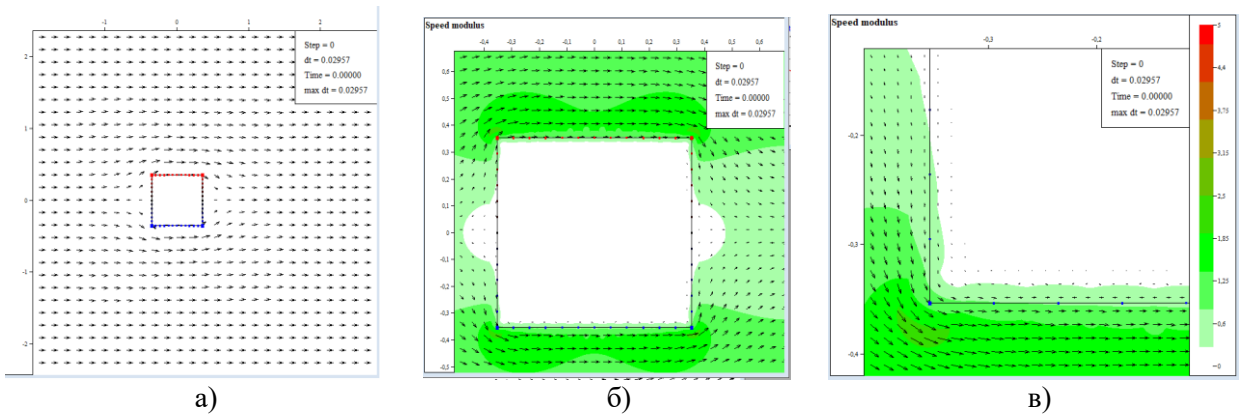
Рис. 7.2.9

Епюри сил, що визначають навантаження

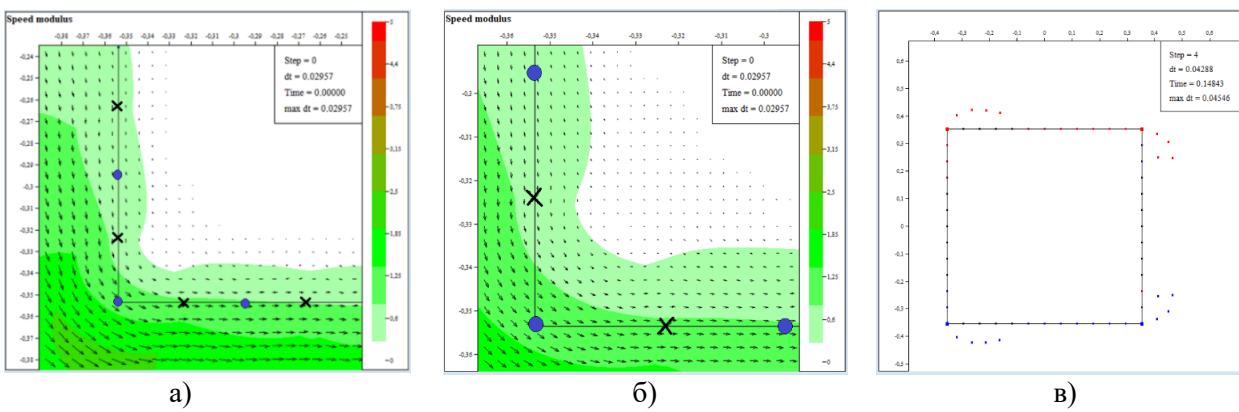


**Рис. 7.2.10**  
«Дорожка Кармана» за перешкодою

Локальні особливості дискретної моделі:



**Рис. 7.2.11**



**Рис. 7.2.12**

Параметри для забезпечення виконання умови непроникнення для нестационарних процесів:

$$\Delta = 2\delta, \Delta = \frac{L}{M}, \delta = \frac{L}{2M}.$$

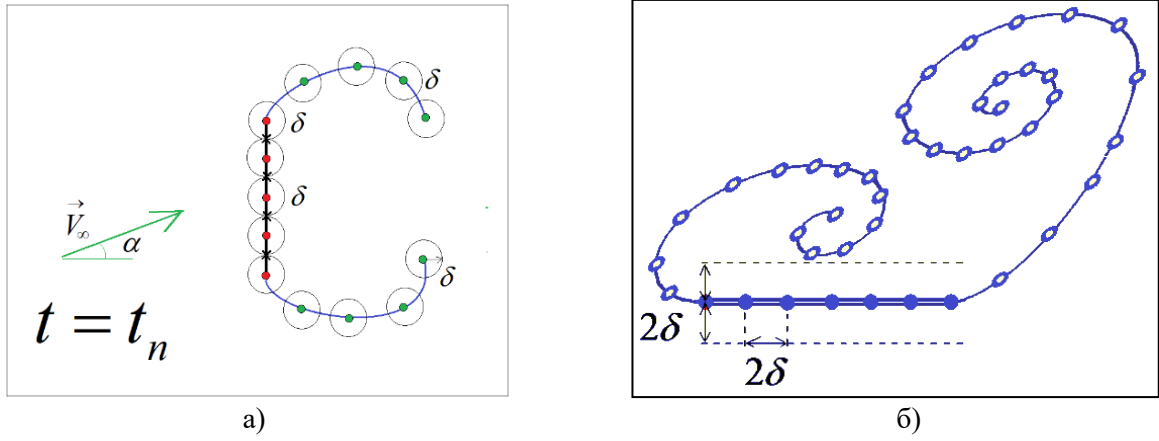


Рис. 7.2.13

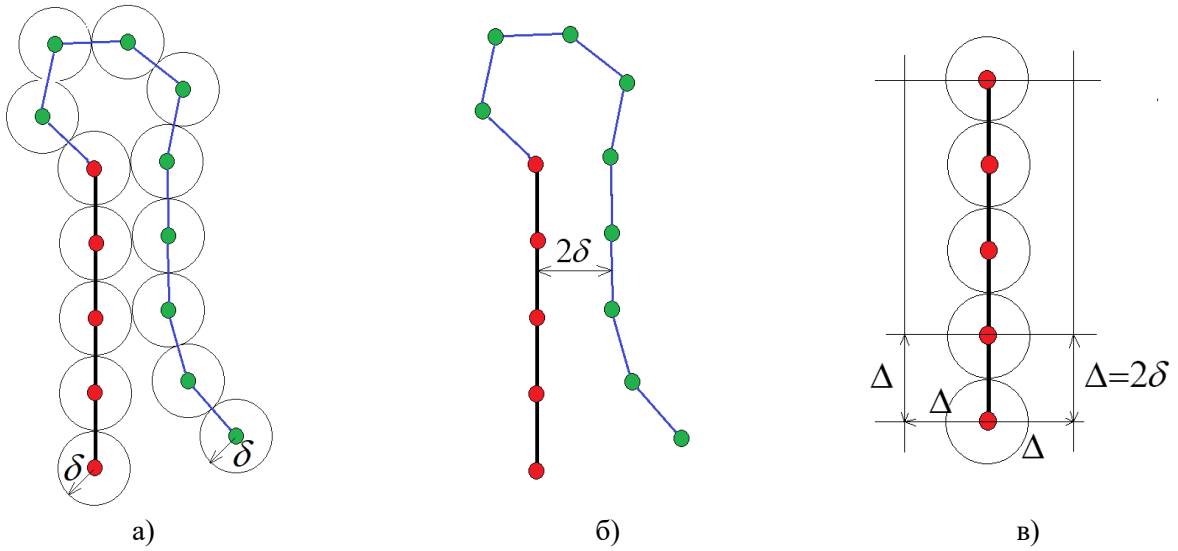


Рис. 7.2.14

#### 7.2.4. Схеми для умови непроникнення

Визначення положення маркованої рухомої точки відносно боку елемента контуру:

$$\text{sign}(\vec{R}_1 \times \vec{R}_2) > 0 \Rightarrow r \in D^+,$$

$$\text{sign}(\vec{R}_1 \times \vec{R}_2) < 0 \Rightarrow r \in D^-.$$

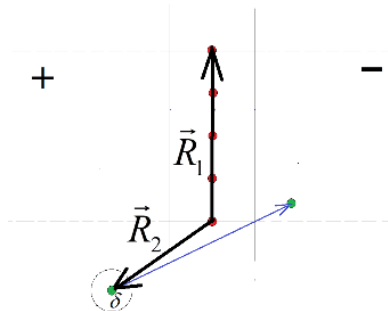


Рис. 7.2.15

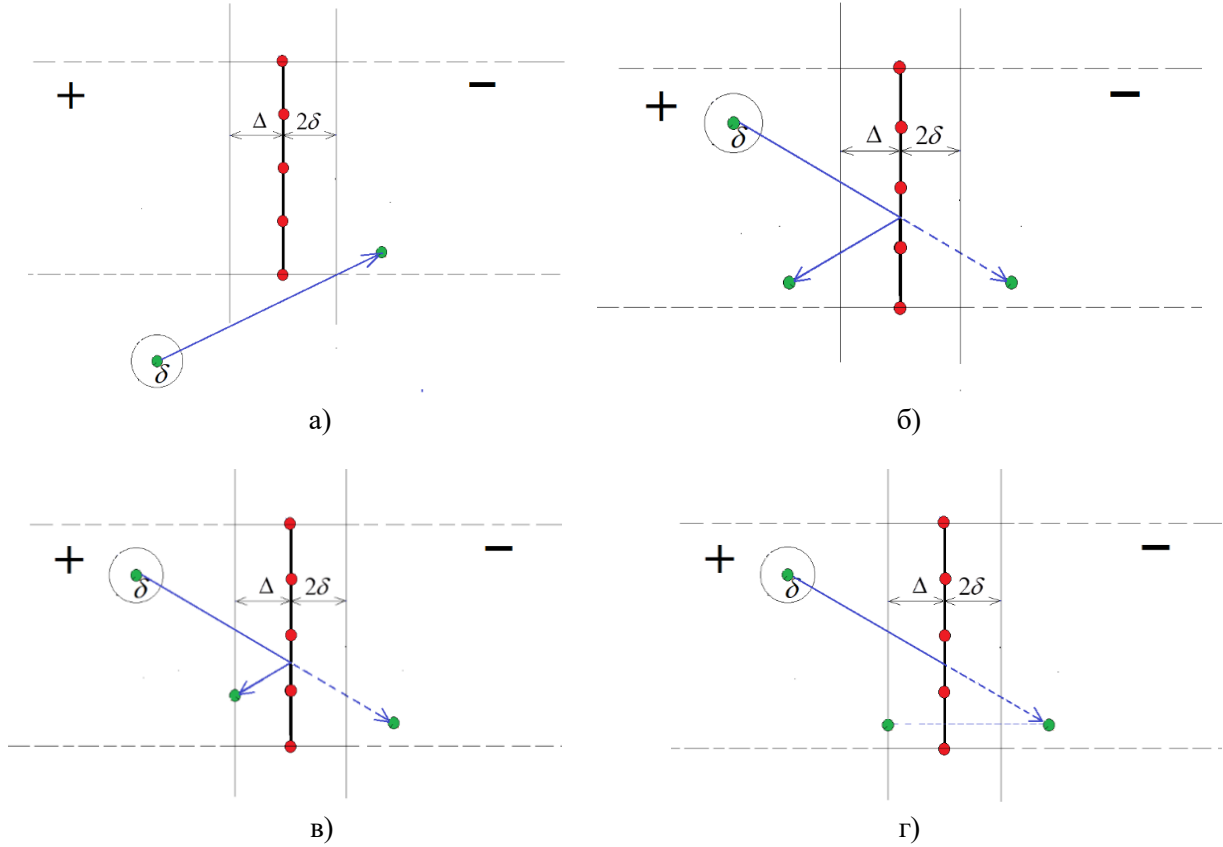


Рис. 7.2.16. Забезпечення непроникнення маркованої рухомої точки відносно боку елемента контуру

Розвиток течії навколо перешкод довільної форми (замкнені контури) – квадратний та круговий циліндр:

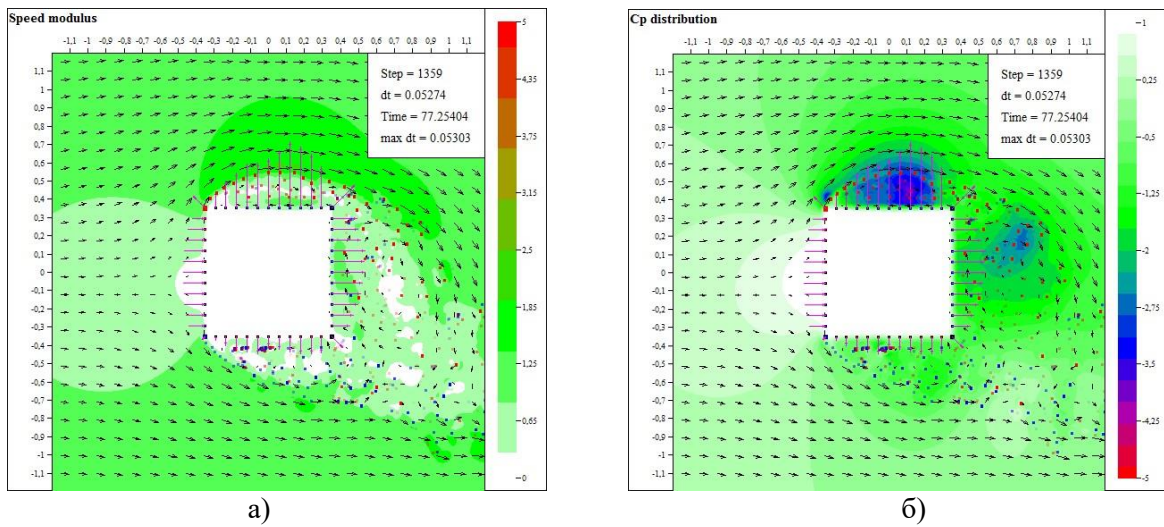
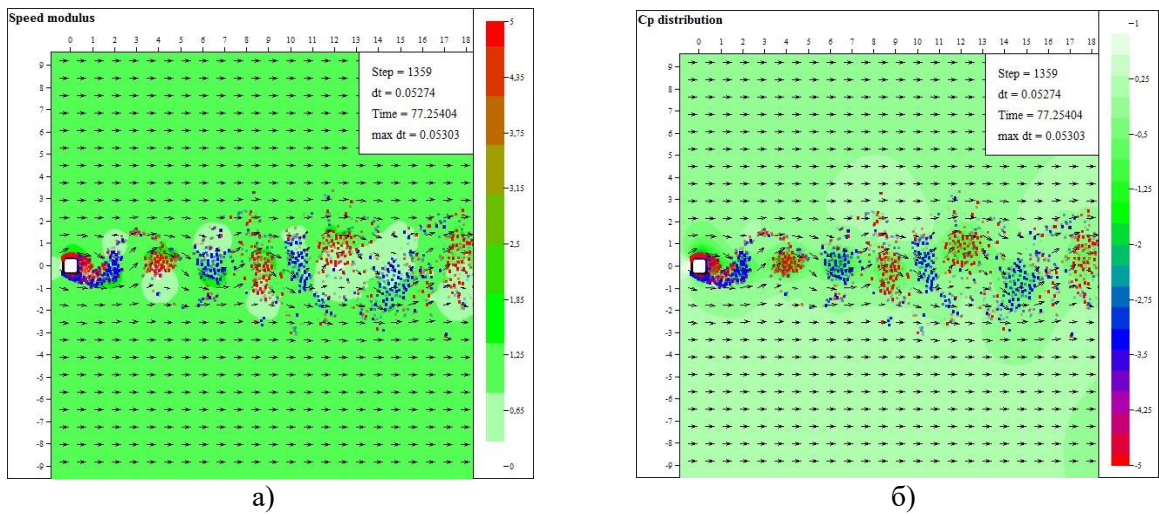
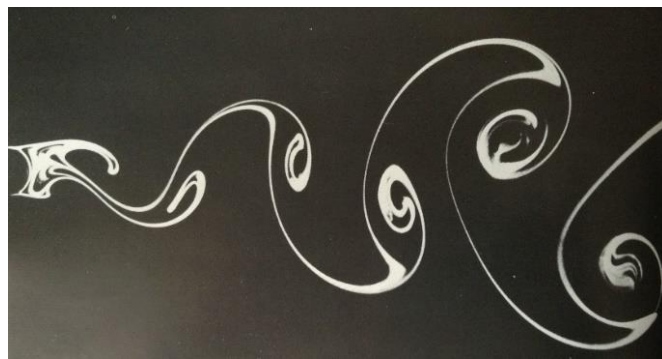


Рис. 7.2.17. Течія навколо циліндра з квадратним перерізом



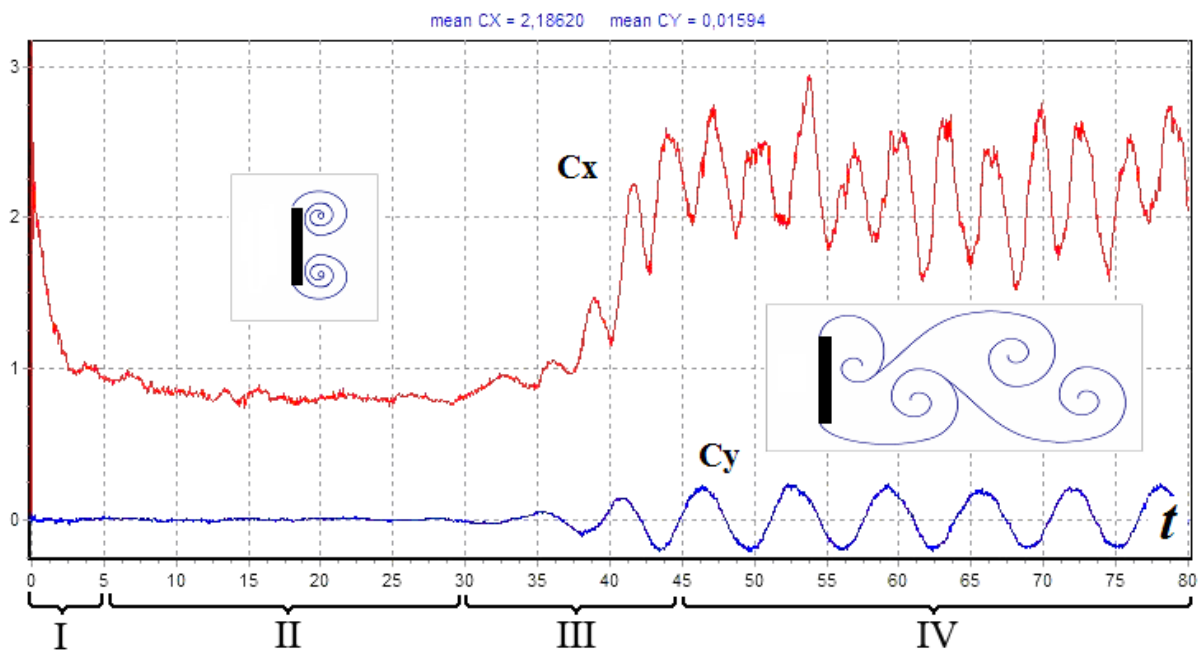
**Рис. 7.2.18.** Течія навколо циліндра з квадратним перерізом («Дорожка Кармана» за перешкодою )



**Рис. 7.2.19.** Течія за круговим циліндром – «Дорожка Кармана» за перешкодою [3,9,16]

### 7.2.5. Проблеми визначення часових інтервалів

Алгоритм визначення станів аеродинамічного процесу та домінуючого тривалого режиму відривного обтікання при його моделюванні із застосуванням методу дискретних особливостей базується на аналізі поведінки інтегральних характеристик навантажень.



**Рис. 7.2.20.** I – Стартовий режим.  
 II – Режим формування нестационарної симетричної відривної течії.  
 III – Перехідний режим.  
 IV – Суттєво нестационарна течія, як правило з періодичним відривом вихорів (актуальний режим).

### 7.2.6. Завдання

1. Змоделювати течію навколо перешкоди у вигляді контуру  $L_d$  в системі координат;
2. Змоделювати нестационарний режим течії з періодичним вихороутворенням у вигляді «доріжки Кармана» (рис. 7.2.10, рис. 7.2.18, рис. 7.2.19).

## Заключення

В межах курсу «Технології чисельного моделювання» передбачено побудову обчислювальних технологій на основі різних обчислювальних методів, у тому числі зі спектру методів розв'язування граничних інтегральних рівнянь. Виходячи з теоретичних положень методу дискретних особливостей та досвіду його системного застосування (метод дискретних вихорів, зокрема), можна побачити, що він є зручним для побудови обчислювальних технологій завдяки

- можливості дискретизованого представлення аналітичних моделей із заданою точністю;
- універсальності опису різнотипних меж області течії – обтічної поверхні та «вихрового» сліду (з циркуляційними течіями [6,17,18]);
- зручністю переходу (без додаткових перетворень та обчислень) від вихрових особливостей, що моделюють обтічну непроникну поверхню, до особливостей, що визначають модель циркуляційної течії у сліді;
- широкому спектру розв'язуваних задач, завдяки можливості застосування методу для розв'язання задач про обтікання системи об'єктів складної форми з великою кількістю (групами) елементів.

У лабораторних роботах з курсу «Технології чисельного моделювання» студенти мають отримати навички зі створення обчислювальних технологій та проведення комплексу досліджень, результати яких повинні засвідчити адекватність побудованих студентами моделей та алгоритмів. Лабораторна робота №1 спрямована на ознайомлення студентів з методом дискретних особливостей. Лабораторна робота №2 спрямована на отримання студентами досвіду та навичок з побудови обчислювальних технологій та проведення досліджень з виявлення окремих відомих гідродинамічних ефектів.

В даному навчальному посібнику наведено основні відомості щодо теорії та представлено схеми побудови обчислювальних технологій, що ґрунтуються на застосуванні методу дискретних особливостей, який є методом чисельного розв'язання сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь та належить до сімейства методів з розв'язування граничних інтегральних рівнянь. Представлено метод та алгоритм перетворень, що змінює порядок особливостей та властивості системи дискретних особливостей, що становлять основу обчислювальних технологій. Наведено приклади використання особливостей та вихрових елементів різних типів для плоских задач аерогідродинаміки, а також представлено результати чисельного моделювання з їх застосуванням. Наведено приклади побудови обчислювальних технологій та їх застосування для вирішення завдань з комп'ютерного моделювання складних систем та досліджень гідродинамічних процесів. У подальшому, при розгляді тривимірних задач [13] буде доцільно розглянути застосування вже інших дискретних особливостей – вортонів (точкових вихрових елементів з класу вихрових методів) та буде представлена побудова обчислювальних технологій вже на їх основі. Але така постановка питання вимагає більш поглибленого математичного обґрунтування збіжності вже нових обчислювальних методів і моделей для тривимірних задач.

## Список використаних літературних джерел

### Рекомендована література:

1. Довгий С.О., Ліфанов І.К. Метод сингулярних інтегральних рівнянь. Теорія та застосування. Київ : «Наукова думка», 2004. 510 с.
2. Довгий С.О., Ляшко С.І., Черній Д.І. Алгоритми методу дискретних особливостей для обчислювальних технологій. *Кібернетика та системний аналіз*. 2017. № 6. С. 147–159.
3. Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 1970. 750 p.
4. Cottet G.H., Koumoutsakos P.D. Vortex Methods. Theory and Practice. Cambridge University Press, 2004. 327 p.
5. Dovgiy S.O., Lifanov I.K., Cherniy D.I. The method of singular integral equations and computational technologies. Kyiv : Publishing house “Yuston”, 2016. 380 p.
6. Kordas O., Gourjii A., Nikiforovich E., Cherniy D. A study on mathematical short-term modelling of environmental pollutant transport by sea currents: The Lagrangian approach. *Journal of Environmental Accounting and Management*. 2017. Vol. 5, No 2. P. 87–104. DOI: 10.5890/JEAM.2017.06.002
7. Lifanov I.K., Poltavskii L.N., Vainikko G.M. Hypersingular integral equations and their application. Chapman & Hall/CRC Press Company, 2004. 398 p.
8. Hemsch M.J., Nielsen J.N. Tactical missile aerodynamics. N.Y. : American Institute of Aeronautics, Inc., V1, V2. 1986. 502 p.
9. Milne-Thomson L.M. Theoretical Hydrodynamics. London : “Macmillan and Co. LTD”, 1960. 656 p.
10. Sarpkaya T. Computational Methods with Vortices – The 1988 Freeman Scholar Lecture. *Journal of Fluids Engineering*. March, 1989. Vol. 111. P. 5–52.
11. Walsh J.L. Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain. Harvard University : Published by the American Mathematical Society, 1960. 500 p.
12. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. New York, London, 1962. 830 p.

### Додаткова література:

13. Arnold V. Mathematical methods of classical mechanics. Springer, 2010. 530 p.
14. Birkhoff Garrett Hydrodynamics a study in logic, fact and similitude. Princeton, New Jersey : Princeton university press, 1960. 184 p
15. Birkhoff G., Zarantonello E.H. Jets, Wakes and Cavities. N.Y. : Publishers “Academic Press, Inc.”, 1957. 466 p.
16. Chang P.C. Control of Flow Separation. Washington, D.C. : “Hemisphere Publishing, Corporation”, 1979. 552 p.
17. Voskoboinick A., Voskoboinick V., Turick V., Voskoboinyk O., Cherniy D., Tereshchenko L. Interaction of Group of Bridge Piers on Scour. In: Advances in Computer Science for Engineering and Education III. ICCSEEA, 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 1247. Springer, Cham. P. 3–17. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-55506-1\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-55506-1_1)
18. Pozrikidis C. Fluid Dynamics Theory, Computation, and Numerical Simulation. Springer Science + Business Media LLC, 2001, 2009, 2017. 901 p.
19. Muskhelishvili N.I. Singular Integral Equations. New York: Dover Publishings Inc., 2011. 464 p.