ФАКУЛЬТЕТ КОМПЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

А.О. Пашко

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ФІНАНСОВИХ ДАНИХ

Навчальний посібник. Частина 1.

Київ - 2024

УДК 519.2:007.004.94

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, проф. Є.В. Івохін
доктор фізико-математичних наук, доцент І.В. Розора

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол №12 від 19 квітня 2024)

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол №12 від 18 квітня 2024 року)

Інтелектуальний аналіз фінансових даних. Навчальний посібник / А.О. Пашко – Київ:2024. – 113 с.

Приведено теоретичні та практичні основи побудови й інтелектуального аналізу моделей фінансових даних. Розглянуто моделі грошових потоків, оцінка інвестиційних проектів, моделі банківських рахунків, ринок з дискретним часом. Розглянуто хедж-стратегії інвесторів та розрахунок вартості хедж-стратегії для опціонів європейського та американського типів.

Для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які навчаються за освітньо-професійною програмою «Інформатика» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки».

Передмова

Посібник є розширеним конспектом лекцій з дисципліни «Інтелектуальний аналіз фінансових даних».

Мета дисципліни – вивчення інтелектуальних алгоритмів аналізу фінансових даних, оволодіння технікою використання та реалізації алгоритмів інтелектуального аналізу фінансових даних.

В основу дисципліни покладено основні стохастичні моделі в страховій, фінансовій математиці та економіці, інтелектуальні методи та алгоритми обробки і аналізу даних, принципи їх реалізації та застосування в прикладних задачах.

Розглядаються методи та алгоритми інтелектуального аналізу фінансових даних, розв'язування навчальних та практичних задач.

Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни

Знати: дискретну математику, структури даних і алгоритми, теорію імовірностей та математичну статистику, теорію випадкових процесів в об'ємі стандартних університетських курсів.

Вміти: застосовувати знання з вказаних вище дисциплін до розв'язання задач.

Володіти елементарними навичками: роботи з комп'ютером

Зміст

Вступ

Сучасна фінансова система розвиненої держави є складним механізмом, функціонування якого неможливе без повсякденного аналізу ситуації, коротко- і довгострокового прогнозу та передбачення основних тенденцій.

У свою чергу, вміння аналізувати, прогнозувати та передбачати неможливе без володіння основними математичними методами та базовими поняттями, що пов’язані з фінансами і кредитно-банківською системою.

Математичними основами теорії фінансів повинен володіти в повному обсязі кожний фінансовий аналітик та актуарій. Як відомо, найкращий шлях оволодіти деяким математичним апаратом — розв’язати певну кількість відповідних задач.

Згідно з науковою традицією, термін “фінансовий аналіз” належить до тієї частини розрахунків з фінансами, яка стосується відсоткових і кредитних ставок, ануїтетів, сучасних вартостей і теорії імунізації.

А терміни “фінансова математика” і “фінансова стохастика” характеризують розрахунки на фінансовому ринку, що пов’язані з випадковістю цін фінансових активів, первинними і вторинними цінними паперами, фінансовою рівновагою.

В посібнику розглянуто питання, що пов’язані з функціонуванням фінансових ринків, купівлею та продажем цінних паперів, обрахуванням справедливих цін в умовах, коли зміна цін основних активів відбувається залежно від випадку.

Подано основні фінансові інструменти на біржі —опціони, детально проаналізовано, як правильно оцінити Американські та Європейські платіжні зобов’язання. Розглянуто фінансові ринки з неперервним часом, наведено ряд задач, що стосуються знаменитої формули Блека – Шоулса.

Наведені необхідні математичні поняття — мартингалу, броунівського руху, стохастичного диференціального рівняння. Стохастичні моделі опираються на теорію випадкових процесів [1]. Елементи теорії статистичного моделювання випадкових величин та випадкових процесів, а також необхідні результати з теорії випадкових процесів винесені в додатки.

Основні підходи до аналізу фінансових даних, що опираються на стохастичні моделі досліджувались в роботах [2-3]. Необхідні означення і теоретичні результати у вигляді лем та теорем взяті з цих джерел.

Розділ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА БАЗОВІ ПРИНЦИПИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ФІНАНСОВИХ ДАНИХ.

1.1. Основні поняття.

Кожен з учасників економічної діяльності має обмежену кількість грошей, тобто обмежені фінансові ресурси.

Але для реалізації деяких планів (це може бути купівля будинку, розширення чи переобладнання виробництва, розрахунки за борги та інше) потрібно більше фінансових ресурсів, ніж є у наявності.

В такому разі можна:

- звернутися до фінансового посередника, до банку, інвестиційної компанії, іншої фінансової структури, зі своїм запитом;
- взяти кошти у борг шляхом випуску в обіг цінних паперів.

При зверненні до фінансових посередників необхідні кошти можуть надаватися на певних умовах — строках виплати, гарантіях, процентних ставках (плати за надання коштів).

Отже, фінансові посередники - це інститут, який займається акумулюванням і перерозподілом фінансових ресурсів.

Фінансові посередники стоять між тими, хто надає кошти (кредиторами), та тими, хто їх позичає. Посередник позичає гроші у їх власників, а далі виступає як кредитор, надаючи кошти від свого імені. З метою акумуляції коштів, або капіталу, фірми та фінансові посередники випускають в обіг цінні папери двох основних видів: акції та облігації. Випускаючи акції, фірма одержує за них кошти, які будуть використані у подальшій діяльності.

Покупці акцій стають співвласниками фірми, вклавши (інвестувавши) в неї свої кошти. Власник акції одержує право на участь у роботі фірми (через збори акціонерів) і на одержання дивідендів — регулярних (як правило) виплат, шо їх робить фірма своїм акціонерам.

Існує багато видів акцій: звичайні акції, неоплачувані акції, акції зі знижкою, акції з фіксованим процентом, акції з додатковою виплатою дивідендів та багато інших.

Але всі види акцій можна розділити на 2 основні типи — звичайні та привілейовані.

Привілейовані акції гарантують виплати з фіксованими дивідендами, звичайні акції не мають такої гарантії. Але не обмежуються і розміри дивідендів, що їх одержують власники звичайних акцій.

Вартість (ціна) акції визначається не тільки діяльністю фірми, шо випускає акції, але також загальним станом ринку цінних паперів.

Інший вид цінних паперів-облігацій — являють собою боргові зобов’язання емітентів (тих інститутів, банків, компаній, держав, які випускають облігації).

Облігації — це довгострокові цінні папери, що мають певний визначений термін боргового зобов'язання, у який боржник (тобто той, хто випустив облігації) мас повернути кредитору повну ціну облігації.

Протягом цього строку власники облігацій одержують певні суми грошей як відсоток. Розмір цього відсотку, або купонна ставка, може бути фіксованим або плаваючим в залежності від типу облігації.

Прикладом найпростішої облігації с банківський рахунок з фіксованою відсотковою ставкою.

Вартість облігації визначається фінансовою структурою інституту, що випускає облігації (фірма, комерційний банк, уряд тощо), величиною ризику часткової або повної втрати коштів, рівнем процентних ставок на ринку.

Існує фундаментальна залежність між ціною (вартістю) цінних паперів та прибутком (доходом) від них. Якщо падає ціна, то зростає прибуток, і якщо ціна зростає, то прибуток падає. При зміні процентних ставок (тобто норм процента, яка відображає доход покупця цінного паперу) змінюються і ціни на цінні папери.

Оскільки покупець цінних паперів не може знати, як зміняться процентні ставки у майбутньому, завжди існує ризик втрати вкладених у цінні папери коштів.

Цей тип ризику називається процентним ризиком, тому що він зумовлений можливістю збільшення норми проценту (при збільшенні норми проценту збільшується і ціна паперів, а прибуток може зменшитись до нуля або стати від'ємним — тобто стати втратою коштів).

Інший тип ризику — ризик неплатежів. Цей тип ризику називається кредитним ризиком. Не всі цінні папери несуть в собі кредитний ризик. Наприклад, урядові цінні папери, як правило, не мають такого ризику (при умові стабільності держави). Проблеми страхування коштів, вкладених у цінні папери, є предметом окремих досліджень.

Одною з основних моделей фінансового аналізу є моделі грошових потоків,

моделі дисконтування та акумулювання грошових сум,

розклад боргу на капітальну і відсоткову складові,

оцінки та порівняння між собою інвестиційних проектів, зміни відсоткової ставки в часі,

підрахунки, пов'язані з різними видами ануїтетів,

і найпростіші стохастичні, тобто випадкові, моделі відсоткової ставки.

1.2. Моделі грошових потоків

Потоки платежів (cash flows) — суми грошей, які виплачують або отримують у різні моменти часу. Розміри платежів і моменти сплати можуть бути відомими або невизначеними.

Платежі можуть надходити в окремі моменти часу або неперервно протягом певного періоду.

З точки зору інвестора, гроші, які він одержує, утворюють додатний потік платежів (inflows), а гроші, які він сплачує — від'ємний потік платежів (outflows).

Приклади потоків платежів:

1. **Облігація з нульовим купоном** (zero-coupon bond) — цінний папір або угода, за якими виплачується визначена сума грошей (номінальна вартість)

у визначений момент часу (час погашення). Для такої облігації визначається її вартість на умовах дисконтування її номінальної вартості.

Для інвестора це від'ємний потік платежів у момент інвестування та одиничний додатний потік платежів у момент погашення.

2. **Цінні папери з фіксованим відсотком** (fixed-interest securities) випускаються як облігації з визначеною номінальною вартістю. Власник облігації одержує суму, що складається з номінальної вартості, яка виплачується в час погашення, і серії регулярних виплат (купонні виплати) до часу погашення.

Для інвестора це від'ємний грошовий потік у момент придбання облігації та додатні грошові потоки, що складаються з виплати номінальної вартості у момент погашення і з купонних виплат до погашення.

3. **Індексовані цінні папери** (index-linked securities) — облігації, у яких купонні виплати й остаточна виплата пов'язані з "індексом", що відображає рівень інфляції. При цьому за початковим від'ємним грошовим потоком слідує ряд додатних грошових потоків у зазначені дати. Розміри виплат залежать від індексу інфляції (індексу цін), тому такі грошові потоки називають відомими "в реальному часі". Як правило, індексація відбувається із запізненням, тому що для підрахунку індексу цін потрібен час.

4. **Депозитні вклади** (cash on deposit). Якщо гроші покладено на депозит, то інвестор може вибирати, в який момент часу зняти гроші і одержати відсотковий приріст капіталу за період інвестування. Відсотковий приріст капіталу залежить від дати і тому відомий лише в день зняття. Отже, розміри і моменти платежів невизначені.

5. **Звичайна акція** (equity) — цінний папір без фіксованого терміну дії, який випускається компаніями і засвідчує право власності на підприємство, а також дає право власнику на отримання дивідендів.

Дивіденди — регулярні виплати власнику, які визначаються доходами компанії. Оскільки ці доходи заздалегідь невідомі, то і дивіденди є змінними.

Щоб побудувати модель грошового потоку для звичайної акції, слід зробити припущення про зростання у майбутньому дивідендів.

Таким чином, моменти виплати і розміри платежів невідомі. Оскільки термін дії акції невизначений, то терміни виплат невизначені і майбутні додатні грошові потоки можуть виявитися меншими у сумі, ніж початковий від'ємний грошовий потік.

6. **Ануїтет** (annuity) забезпечує ряд регулярних виплат у відповідь на одиничний початковий внесок.

Найпростіший ануїтет — потік платежів протягом життя людини, яка тримає поліс (довічний ануїтет, life annuity). Для інвестора це від'ємний грошовий потік на початку і ряд менших додатних грошових потоків протягом життя. Після смерті виплати припиняються.

Можливі інші типи ануїтетів, наприклад, виплати відбуваються протягом життя людини і визначено максимум кількості платежів.

Такий контракт називають тимчасовим довічним ануїтетом (temporary life annuity). З іншого боку, виплати можуть провадитися протягом життя власника, але з гарантованою мінімальною кількістю платежів.

Такі ануїтети називають ануїтетами з гарантованим періодом.

Для того, хто забезпечує ануїтет, маємо додатний грошовий потік на початку, а потім — невизначену кількість регулярних відомих від'ємних потоків платежів.

Строкове страхування (term assurance). Поліс строкового страхування — контракт, який забезпечує виплату страхової суми у випадку смерті власника поліса, якщо смерть настала у період дії поліса. Період може бути як досить довгим (20 років), так і коротким (1 рік).

Поліс строкового страхування забезпечується рядом щорічних виплат (premiums) з боку власника поліса, які можуть бути сталими або змінними, і припиняються після смерті власника поліса.

Іноді премії можуть виплачуватися протягом більш короткого періоду, ніж дія поліса, або поліс можна придбати за умови разової виплати премії.

Для компанії, яка забезпечує поліс, маємо невідому, але обмежену кількість регулярних, відомих за розміром додатних грошових потоків, за якими або слідує від'ємний грошовий потік відомого обсягу, але з невідомим терміном платежу, або від'ємного потоку платежів не буде, якщо власник поліса залишається живим протягом дії поліса.

Страхування із забезпеченням (endowment assurance). Поліс страхування із забезпеченням — контракт, який гарантує виплату загальної суми (її називають сумою страхування) у випадку смерті власника поліса протягом дії контракту або після закінчення його дії, якщо власник залишається живим.

Такі поліси викупаються регулярними виплатами премій, які припиняються у випадку смерті або закінчення терміну дії поліса. Грошові потоки подібні до потоків при тимчасовому страхуванні, за винятком того, що від'ємний грошовий потік для страхової компанії є обов'язковим, а для власника поліса страхові внески (премії) є вищими.

Позика за відсотки (interest-only loan) — позика, яка повертається серією виплат за відсотками і виплатою позиченої суми наприкінці терміну дії.

У найпростішому випадку грошові потоки будуть протилежними до потоків платежів для облігації з фіксованим відсотком.

Кредитор купує облігацію з фіксованим відсотком у того, хто бере позику.

На практиці, однак, відсоткові ставки не завжди фіксуються.

Отже, розмір регулярних потоків платежів буде невідомим.

Існує можливість повернути позику раніше, тому кількість платежів і термін остаточної виплати невідомі.

Поліс повернення капіталу (capital redemption policy) — поліс з регулярними преміями і єдиною виплатою при закінченні дії. Такі поліси можуть використовуватися разом з позиками за відсотки.

Застава (позика з виплатою, іпотека, позика під заставу нерухомості, mortgage). Позика з виплатою — позика, яка повертається серією виплат, що включають виплати за відсотками і часткову виплату суми позики. У найпростішому варіанті відсоткову ставку фіксовано, однакові за величиною виплати провадяться регулярно у фіксовані моменти часу.

Потоки платежів аналогічні потокам для ануїтету, за виключенням того, що кількість платежів фіксована і не пов’язана з тим, що власник поліса залишається живим (у разі смерті решта платежів передається у спадок).

Як і для позики “за відсотки”, можливі зміни у відсотковій ставці, а також допускається дострокове повернення позики.

Додатково можна встановити, що регулярні виплати зростають або спадають з часом.

Важливо зауважити, що при виплаті позики поділ попереднього платежу на “відсотки” і “капітал” суттєво змінюється протягом періоду позики.

Перша виплата, в основному, складається з відсоткового платежу і невеликого повернення капіталу, а остання виплата — майже повністю з повернення частини капіталу і незначноїсуми відсотків.

Страхування автомобіля (motor insurance) — частковий випадок загального страхування. (Термін “загальне страхування” використовується для всіх страхових операцій, які відмінні від страхування життя.)

Зазвичай страхування автомобіля провадиться щороку. На початку року страхова компанія отримує внесок (премію) і приймає на себе фінансові ризики власника поліса. Для компанії початковий додатний грошовий потік відомий, а наступні грошові потоки невідомі як за величиною, так і за часом.

Далі використовуються поняття доходу та прибутку.

Прибуток — різниця між доходами та витратами фінансової організації.

Часова вартість грошей. Вартість грошей змінюється з часом. Сто гривень, отриманих зараз, коштують більше, ніж сто гривень, отриманих через рік, і для будь-якої людини вибір, отримати одну і ту саму суму зараз чи через рік, є очевидним.

Це явище зменшення вартості грошей, яке називається часовою вартістю грошей, пояснюється не лише інфляцією.

Інші фактори, що зумовлюють цю зміну у вартості, включають: ризик неотримання суми у майбутній час (який називають *кредитним* ризиком, або ризиком дефолту),

ризик втрати ліквідності, який полягає у тому, що активи, уякі можна вкласти гроші зараз, будуть недоступними через певний проміжок часу.

Врешті, гроші, які ми отримаємо лише у майбутньому, не можуть використовуватися за своїм прямим призначенням і тому не мають для нас миттєвої цінності.

Тобто, позичаючи гроші, ми тимчасово передаємо право їхнього використання іншому, і за це потрібно платити, як за оренду. Винагороду, яку боржник сплачує кредитору за користування позикою, називають відсотками, або іноді відсотком, коли йдеться про єдиний платіж.

Про розмір відсотків зазвичай домовляються заздалегідь, це може бути, наприклад, певна сума, що виплачується разом із поверненням позики, або серія платежів, після якої відбувається повернення позиченої суми. Разом із позикою, основним прикладом у теорії відсотка буде депозит: сума вкладається у банк на певний термін, і наприкінці цього терміну повертається разом з відсотками. Тому часто ми будемо казати не про позичання, а про інвестування.

Якщо відсотки виплачуються наприкінці терміну позичання, то розмір відсотків зазвичай виражають через *відсоткову ставку*, що дорівнює частці суми позики, яку потрібно виплатити у вигляді відсотків; при цьому вказують період, за який нараховуються відсотки, частіше за все це рік.

Наприклад, якщо кажуть, що річна відсоткова ставка $i = 0.1$, то при позичанні суми у 100 грн через рік потрібно повернути 100 грн (повернення капіталу, або основного капіталу) і відсоток $100*0.1 = 10$ грн. У загальному випадку, якщо позичається сума C, а річна відсоткова ставка дорівнює i, то через рік потрібно повернути суму $C(1+i)$. Відзначимо також, що i частіше подається не в абсолютних одиницях, а у процентах, наприклад, замість $i = 0{,}06$ пишуть $i = 6\ \%$.

Припустимо, що відсоткова ставка є річною, тобто сторони домовилися про те, якою має бути сума відсотків при поверненні позики через рік. Якою має бути ця сума при поверненні грошейчерез декілька років?

Залежність вартості грошових сум від часу надходження.

Відсотки (interest) — винагорода, яку сплачує той, хто отримує позику, за використання капіталу, що належить іншій особі або організації (кредитору). Капітал і відсотки мають вимірюватися в однакових одиницях. Якщо вимірювання провадиться у грошових одиницях, то капітал називають основним (principal).

Прості відсотки (simple interest). Якщо суму ***C*** покладено на депозитний рахунок під прості відсотки з відсотковою ставкою $\boldsymbol{i} \cdot \mathbf{100}$ **%** річних і рахунок закривається через ***n*** років, то за умови відсутності поповнення рахунку і зняття грошей матимемо суму ***C*(1+*ni*)**, в якій ***C*** — повернення початкового вкладу; ***niC*** — розмір відсоткового прибутку.

Складні відсотки (compound interest). Нехай ***C*** — початкова сума, яку покладено на депозит під складні відсотки з відсотковою ставкою $\boldsymbol{i}\cdot\mathbf{100}$ **%** річних, а A_n — сума, яку інвестор одержить при закритті рахунку наприкінці ***n***-го року. Тоді

$$A_n = A_{n-1} + iA_{n-1} = A_{n-2}(1+i)^2 =\ldots= C(1+i)^n.$$

При цьому накопичений відсотковий прибуток дорівнює $C(1+i)^n - C$.

Нехай маємо два моменти $t_1 \leq t_2$, тоді за умови інвестування у момент t_1 суми $C(1+i)^{t_1-t_2}$ у момент t_2 одержимо капітал ***C***.

Тому говорять, що дисконтована вартість у момент часу t_1 капіталу ***C*** відносно моменту часу t_2 дорівнює $C(1+i)^{t_1-t_2}$.

Зокрема, дисконтоване значення в момент $t = 0$ капіталу C відносно моменту часу $t \geq 0$ називається його сучасною вартістю (або дисконтованою сучасною вартістю) і дорівнює $C(1+i)^{-t}$.

Якщо визначити дисконтний множник $v = \frac{1}{1+i}$, то сучасна вартість дорівнюватиме Cv^t .

Дисконтування (Discounting) :

1. Застосування коефіцієнта дисконтування або відсоткової ставки до суми капіталу або до права на такий капітал. Розрахунок ціни або поточної вартості векселя до настання строку плати шляхом зменшення його вартості з використанням поточної відсоткової ставки.

2. Використання дебіторської заборгованості (рахунків до одержання) як забезпечення при одержанні позики.

3. Коригування поточних цін в зв'язку з очікуваними змінами прибутку або з якихось інших причин згідно з очікуваними майбутніми змінами цін на товари, курсів цінних паперів та валютних курсів.

Дисконтування – основна процедура фінансових операцій, лежить в основі доходності фінансових ринків.

Дисконтування є єдиною методикою, яка порівнює вартість різних об‘єктів у часі. Дисконтування приводить теперішню вартість до майбутньої і навпаки. Дисконтування може проводитися різними методами.

Просте дисконтування. Нехай d — річна ставка простого дисконтування. Тоді для того, щоб одержати суму C через n років, ми повинні інвестувати зараз $C(1 - nd)$. На практиці звичайно розглядають період менше року. Тоді кредитор, щоб одержати суму X через період $t<1$, при простому дисконтуванні повинен у початковий момент надати позику $X(1 - td)$. При цьому d ще називають номінаційним дисконтом.

Розглянемо інвестицію однієї грошової одиниці на період в одну часову одиницю, що починається в момент t. Нехай ми одержали дохід $1+i(t)$ у момент $t+1$. Тоді $i(t)$ називають ефективною відсотковою ставкою для цього періоду часу. Якщо відсоткова ставка не залежить від суми інвестованих грошей, то інвестиція капіталу розміром C у момент t дасть дохід $C[1 + i(t)]$ у момент $(t + 1)$.

Тому накопичений інвестицією розміром C капітал за період від 0 до n дорівнює

$$C[1 + i(0)][1 + i(1)] \ldots [1 + i(n - 1)].$$

Якщо ефективна ставка не залежить від t, то накопичений капітал за цей період дорівнює $C(1+i)^n$.

Прості та складні відсотки. Якщо людина вкладає в банк гроші на суму C, відсотки нараховуються щороку і річна відсоткова ставка дорівнює i, то через рік на її рахунку буде сума $C(1 + i)$. Якщо ж відсотки нараховуються n разів на рік з номінальною річною ставкою i, то через рік відповідна величина дорівнюватиме $C\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$. При неперервному нарахуванні відсотків матимемо суму

$$\lim_{n\to\infty} C\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = Ce^i.$$

Банківський рахунок ще іноді називатимемо безризиковим активом, або облігацією.

Якщо річний банківський відсоток (відсоткова ставка) дорівнює i, то власник банківського рахунку розміром C (або банківської облігації вартістю C) для будь-якого $t \geq 0$ через t років матиме на рахунку суму $C(1+i)^t$ (або зможе продати облігацію за $C(1+i)^t$).

Якщо річна дисконтна банківська ставка дорівнює d, то власник банківського рахунку розміром C на початку року отримує авансом відсотки розміром dC, і через рік може зняти з рахунку суму C.

Має місце рівність $d = i/(1 + i)$.

Нехай відсоткові нарахування провадяться за однією ставкою n разів на рік наприкінці кожного періоду тривалістю $1/n$ року.

Тоді говорять, що ставка конвертується n разів на рік, і розглядається номінальний банківський відсоток $i^{(n)}$ такий, що сума C на рахунку через $1/n$ року дасть суму $C\left(1+\frac{i^{(n)}}{n}\right)$.

Має місце рівність $\left(1+\frac{i^{(n)}}{n}\right)^n = 1+i$.

Аналогічним чином для нарахувань на початку кожного періоду тривалістю $1/n$ року вводяться дисконтні ставки $d^{(n)}$, $\left(1-\frac{d^{(n)}}{n}\right)^n = 1-d$.

Якщо номінальна ставка відсотка при депозитуванні грошей у момент часу t_0 на строк h дорівнює $i_h(t_0)$, то сума, накопичена інвестицією в C одиниць за строк h, дорівнює $C[1 + hi_h(t_0)]$.

Ефективна відсоткова ставка r_{eff} на внесок L обчислюється за формулою

$$r_{eff} = \frac{D}{L} - 1,$$

де D — розмір виплати через один рік.

Вартість на даний момент суми v, що виплачуватиметься через t років, дорівнює $v(1+i)^{-t}$.

Дисконтування та акумулювання грошових потоків. Швидкість i одержання прибутку від інвестицій обчислюється як $i = b/a-1$, де b — прибуток, отриманий через рік; a — початковий внесок.

Якщо прибуток було отримано в кілька етапів, причому через k років після інвестиції суму $b_k, k = 1,2,\ldots,n$, то швидкість одержання прибутку визначається як корінь i^* рівняння $L(i) = 0$, де

$L(i) = -a + \sum_{k=1}^{n} b_k(1+i)^{-k}$.

Припустимо, що відсоткова ставка $i(t)$ є неперервною функцією від часу $t \geq 0$. Нехай у момент $t = 0$ ми поклали на рахунок одиницю; через $D(t)$ позначимо суму, що лежатиме на рахунку в момент t.

Має місце формула

$$D(t) = exp\left(\int_0^t i(s)ds\right).$$

Середнє значення

$$\bar{\imath}(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \frac{1}{t}\int_0^t i(s)ds, & t > 0 \end{cases}$$

називається кривою доходів.

При цьому $D(t) = exp(\bar{\imath}(t)t)$.

Нехай $\delta(t)$ — інтенсивність відсотка,

$v(t) = exp\left(-\int_0^t \delta(s)ds\right)$— дисконтна функція,

$\rho(t)$— інтенсивність платежів, що здійснюються неперервно до моменту часу T,

$\{C_{t_k}\}$ — потоки платежів, що провадяться у моменти часу $t_k, k = 1, \ldots, n$.

Тоді сучасна вартість, або сучасне значення (present value), дискретного і неперервного потоків платежів дорівнює

$$\sum_{k=1}^{n} C_{t_k} v(t_k) + \int_0^T v(t)\rho(t)dt.$$

Вартість у момент часу t_1 суми C на момент часу t_2

$$V(t_1, t_2) = C\, exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \delta(s)ds\right) = C\frac{v(t_2)}{v(t_1)}.$$

Вартість у момент часу t_1 суми C на момент часу t_2 називається:

а) накопиченням із суми C з моменту t_2 до моменту t_1, якщо $t_1 \geq t_2$;

б) дисконтованим значенням суми C у момент часу t_1 відносно моменту часу t_2, якщо $t_1 < t_2$.

Нехай інвестор вкладає капітал C і неперервно одержує дохід за відсотками, зберігаючи капітал C сталим до моменту вилучення T.

Тоді сучасна вартість доходу за відсотками дорівнює $C\int_0^T \delta(t)v(t)dt$, а сучасна вартість капіталу — $Cv(t)$.

Отже,

$$C = C\int_0^T \delta(t)v(t)dt + Cv(T).$$

1.3. Використання складних відсотків для підрахунку вартостей грошових потоків

Ануїтет (рента) — регулярні виплати, що провадяться на початку або наприкінці кожного відповідного періоду.

Сталий ануїтет (level annuity) складається з одиничних виплат, які виплачуються щороку протягом *n* років.

Сталий ануїтет постнумерандо (level deferred annuity) виплачується наприкінці кожного року, тобто із заборгованістю, сучасна вартість сталого ануїтету постнумерандо позначається

$$a_{\bar{n}} = v + v^2 + \ldots + v^n = \begin{cases} (1 - v^n)/i, & i \neq 0, \\ n, & i = 0 \end{cases}$$

Сталий ануїтет постнумерандо застосовується найчастіше, тому його називають просто ануїтетом (або звичайним ануїтетом), і його значення є табульованими.

За **сталим ануїтетом пренумерандо** (level annuity due) перша виплата здійснюється негайно, тобто авансом. Сучасна вартість ануїтету пренумерандо позначається

$$\ddot{a}_{\bar{n}} = v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = (1 + i)a_{\bar{n}}.$$

Коли виплата після i-го року дорівнює i, ануїтет називається зростаючим і його сучасна вартість позначається

$$(Ia)_{\bar{n}} = v + 2v^2 + 3v^3 + \ldots + nv^n.$$

Зростаючі ануїтети застосовуються, коли виплати утворюють арифметичну прогресію: якщо перша виплата дорівнює P, друга $P + Q$, i-та $P + Q(i - 1)$, то сучасна вартість такого ануїтету

$(P - Q)a_{\bar{n}} + Q(Ia)_{\bar{n}}$.

Зростаючий ануїтет пренумерандо позначається $(I\ddot{a})_{\bar{n}} = (1 + i)(Ia)_{\bar{n}}$.

Зростаючі ануїтети використовуються також при підрахунку тривалості активів.

Сталий ануїтети постнумерандо і пренумерандо, що сплачуються протягом n років p разів на рік, позначаються відповідно $a_{\bar{n}}^{(p)}$ та $\ddot{a}_{\bar{n}}^{(p)}$. Неважко переконатися, що

$$a_{\bar{n}}^{(p)} = \frac{i}{i^{(p)}} a_{\bar{n}}, \quad \ddot{a}_{\bar{n}}^{(p)} = \frac{i}{d^{(p)}} a_{\bar{n}}.$$

Вартості ануїтетів на кінець дії ануїтету відрізняються від відповідних сучасних вартостей множником $(1 + i)^n$ і позначаються $s_{\bar{n}}$, $\ddot{s}_{\bar{n}}$, $(Is)_{\bar{n}}$.

Якщо $n = \infty$, то відповідний ануїтет називається безстроковим (довічним, без обмежень у часі) і позначається $a_{\bar{\infty}}$, $\ddot{a}_{\bar{\infty}}$.

Визначення банківського відсотка та інтенсивності відсоткової ставки. Нехай існують два грошових потоки, яким відповідають виплати, що відбуваються в моменти часу $t_1, t_2, \ldots, t_n$. У першому потоці виплати дорівнюють відповідно $C_1, C_2, \ldots, C_n$, у другому — $D_1, D_2, \ldots, D_n$ (можливо, деякі з цих виплат дорівнюють нулю).

Якщо відомо, що вартості цих грошових потоків однакові, то можемо записати рівняння вартостей

$$C_1 v^{t_1} + C_2 v^{t_2} + \ldots + C_n v^{t_n} = D_1 v^{t_1} + D_2 v^{t_2} + \ldots + D_n v^{t_n},$$

з якого можна визначити значення дисконтного множника v і відсоткової ставки i, а у випадку неперервного дисконтування — значення інтенсивності відсотка δ.

Виплата боргу. Нехай у момент часу $t = 0$ взято в борг суму X. Для повернення боргу в моменти часу $t_1, t_2, \ldots, t_n$ виплачуються суми $C_1, C_2, \ldots, C_n$ відповідно. Тоді має виконуватись рівність

$$X = C_1 v^{t_1} + C_2 v^{t_2} + \ldots + C_n v^{t_n}.$$

Ставка відсотка, при якій ліві і праві частини однакові, називається річною фактичною вартістю кредиту (РФВ, annual percentage rate of return, APR), її значення заокруглюють до десятих частин відсотка у менший бік (наприклад, 1,283 % заокруглюють до 1,2 %). Якщо це рівняння задовольняють декілька значень відсоткової ставки, річною фактичною вартістю кредиту називається найменше додатне з цих значень.

Після виплати в момент t_k сума несплаченого боргу дорівнюватиме

$$L_k = C_{k+1} v^{t_{k+1} - t_k} + C_{k+2} v^{t_{k+2} - t_k} + \ldots + C_n v^{t_n - t_k}.$$

Відсоткова складова виплати в момент t_{k+1} дорівнює величині відсотка, нарахованого за час $t_{k+1} - t_k$ на суму L_k.
Тому вона становитиме

$$b_k = [(1+i)^{t_{k+1} - t_k} - 1] L_k.$$

Капітальна складова відповідної виплати йде власне на погашення боргу і дорівнює $C_{k+1} - b_k$.

Припустимо, що борг розміром P повертається рівними частинами $(P+D)/n$ із заборгованістю протягом n років, і боржник хоче повернути борг завчасно, за t років до закінчення кредиту. Тоді він не має сплачувати відсотків за користування кредитом, і, в чому неважко пересвідчитися, справедлива відсоткова компенсація (interest redemption) за раннє повернення становить kD, де $k = \frac{t - a_{\bar{t}}}{n - a_{\bar{n}}}$, причому відсоткова ставка, що застосовується при підрахунку, дорівнює РФВ кредиту.

Але нерідко для підрахування відсоткової компенсації використовується інша формула, так зване правило 78, що полягає в наступному: борг умовно розділяють на однакові частини, з яких n частин у першому платежі, $(n - 1)$ — у другому, і так далі (для річної позики і щомісячних виплат буде якраз $1+2+\cdot\cdot\cdot+12 = 78$ частин, звідси походить назва цього правила). Тоді відсоткова компенсація за раннє повернення дорівнює $k'D$, де $k' = \frac{t(t+1)}{n(n+1)}$.

Можна пересвідчитися, що при цьому $k' < k$, тобто кредитор перебуває в кращому становищі. Зважаючи на те, що раннє повернення відбувається завжди за ініціативою *боржника*, таку схему не вважають несправедливою і широко застосовують. З іншого боку, різниця між k і k' звичайно невелика.

Якщо повернення позики відбувається між датами платежів, іноді використовують змінену версію правила 78, за якою, якщо залишаються t платежів, компенсація становить $k''D$, де

$$k'' = \frac{(t-\alpha)(t-\alpha+1)}{n(n+1)}, \quad t > \alpha$$

і $k'' = 0$ при $t \leq \alpha$. Звичайно α покладають рівним 1, 2 або 3.

Якщо позика повертається за допомогою єдиного платежу розміром $(P+D)$ через n років, і боржник хоче повернути її завчасно, за t років до строку, то справедлива сума, яку він має повернути, є $P\left(1+\frac{D}{P}\right)^{1-\frac{t}{n}}$.

Але на практиці, як і для випадку кількох платежів, звичайно використовують пропорційне нарахування відсотка, тобто компенсація за раннє повернення дорівнює *tD*/*n*.

З метою врахувати операційні витрати, нерідко використовують запізнення (lag) дати повернення, тобто операція завчасного повернення вважається такою, що її здійснено через місяць або два, і замість компенсації *tD*/*n* боржник отримує компенсацію *t*′*D*/*n* з *t*′ < *t*.

1.4. Оцінка інвестиційних проектів

Розглянемо інвестиційний проект на інтервалі часу (0, *T*). Нехай прибутки від проекту складаються з надходжень $C_{t_1}, C_{t_2}, \ldots, C_{t_n}$ у моменти $t_1, t_2, \ldots, t_n$, відповідно, та неперервного грошового потоку з інтенсивністю $\rho(t)$ (величини C_{t_i}, ρ можуть бути і від'ємними). Тоді чиста зведена вартість проекту дорівнює

$$\sum_{i=1}^{n} C_{t_i} v^{t_i} + \int_0^T \rho(t) v^t dt.$$

Значення *i*, при якому чиста зведена вартість проекту дорівнює нулю, називається внутрішньою нормою прибутку проекту.

(Нагадаємо, що $\boldsymbol{v} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})}$, $\boldsymbol{i} = \frac{(\mathbf{1}-\boldsymbol{v})}{\boldsymbol{v}}$).

Нехай у моменти часу 0 і T вартість деякого фонду дорівнює $F0$ і FT відповідно, прибуток від проекту складається з грошових надходжень розміром $C_{t_1}, C_{t_2}, \ldots, C_{t_n}$ у моменти $t_1, t_2, \ldots, t_n$ відповідно. Тоді нормою прибутку, зваженою грошима, називається значення *i*, що задовольняє рівняння

$$F_0(1+i)^T + C_{t_1}(1+i)^{T-t_1} + \ldots + C_{t_n}(1+i)^{T-t_n} = F_T.$$

Через $F_{t_1-}, F_{t_2-}, \ldots, F_{t_n-}$ позначимо вартість фонду безпосередньо перед моментами часу $t_1, t_2, \ldots, t_n$ відповідно.

Річною нормою прибутку, зваженою часом, називається значення i, що задовольняє рівняння

$$(1+i)^T = \frac{F_{t_1-}}{F_0 + C_0} \cdot \frac{F_{t_2-}}{F_{t_1-} + C_{t_1}} \cdot \frac{F_{t_3-}}{F_{t_2-} + C_{t_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{F_T}{F_{t_n-} + C_{t_n}}.$$

Якщо задано розбиття інтервалу часу (0, T) на k підінтервалів (0, s_1), (s_1, s_2), …, (s_{k-1}, T), то зв'язана внутрішня норма прибутку визначається так. На всіх підінтервалах визначимо ефективні річні відсоткові ставки $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Шукана ставка i визначається з рівності

$$(1+i)^T = (1+i_1)^{s_1}(1+i_2)^{s_2-s_1}\ldots(1+i_k)^{T-s_{k-1}}.$$

Способи інвестування. Урядова облігація (government bond) — облігація, що випускається урядом або урядовою організацією. Її можна погасити за номіналом, також вище або нижче номіналу. Ставка виплачуваного відсотка є фіксованою. Дата повернення вартості облігації може бути невизначеною.

Урядовий вексель (government bill) випускається на короткий термін з метою задовольнити термінові потреби держави в грошах. Погашається за номіналом без виплат за купонами. Урядові облігації та векселі абсолютно захищені державою і дуже високоліквідні. Часто використовуються як еталонна безризикова короткотривала інвестиція.

Корпоративна облігація (corporate bond) менш захищена, ніж урядова. Рівень захисту залежить від виду облігації, компанії, що її випускала і строку дії. Корпоративна облігація менш ліквідна, ніж урядова, тому що обсяги випуску таких облігацій набагато менші.

Боргова облігація (debenture stock) — боргове зобов'язання загального характеру, є частиною боргового капіталу компанії. Вона більш ризикова за урядову облігацію і, як правило, менш ліквідна. Дохід інвестора вищий, ніж за урядовою облігацією. Видається на досить довгий строк. Відсоток фіксовано.

Незабезпечена облігація (unsecured loan stock) видається певною компанією і не захищена від ризику збитків. Прибуток вищий за боргову облігацію.

Єврооблігація (eurobond) — одна з форм довгострокової позики, що полягає у виданні облігації, за якою регулярно сплачуються відсотки, а потім відбувається погашення за номіналом. Єврооблігації видаються великими компаніями, урядовими або міжнародними організаціями і розповсюджуються поза межами країни, у валюті якої їх деноміновано. Дохід залежить від того, яка організація видала облігацію, але, як правило, він нижчий від доходу за незахищеними облігаціями.

Депозитний сертифікат (certificate of deposit) — документ, що засвідчує наявність грошей на депозиті. Видається банком або будівельною компанією. Термін погашення депозитного сертифікату — від 28 днів до 6 місяців. Відсоток сплачується в момент погашення. Міра захищеності та ліквідності залежить від банку або компанії, що видає сертифікат. Існує чималий вторинний ринок вторинних сертифікатів на депозити.

Привілейована акція (preference stock) має характеристики, ближчі до незабезпечених облігацій, ніж до звичайних акцій. Основна різниця між звичайними і привілейованими акціями полягає в тому, що фіксована сума дивідендів за останніми виплачується майже завжди. Власники привілейованих акцій зберігають право голосу навіть у випадку, коли дивіденди не сплачуються. Якщо компанія має борг за привілейованими акціями, вона не сплачує дивідендів за звичайними. Дохід за привілейованими акціями менший, ніж за звичайними, бо вони менш ризикові. Ліквідність їх є подібною до ліквідності незахищених облігацій.

Власність (property) може бути об’єктом інвестування, це, наприклад, заводи, магазини тощо. Дохід від інвестицій у власність складається з виплати ренти та коштів, що можуть надійти від її продажу. Інвестиції у власність, як правило, більші, ніж в акції, тому менш гнучкі. Власність важко оцінити, бо вона є унікальною. Оцінка власності дорого коштує. Дохід від її продажу є невизначеним. Витрати на купівлю і продаж вищі, ніж для акцій. Власність у деякі періоди може бути нічиєю, тоді і доходів від неї нема. Ліквідність власності невелика. Доходи від інвестування у власність вищі, ніж в акції, причому вони зростають з часом.

Дериватив, або похідний цінний папір (derivative) — фінансовий інструмент, вартість якого залежить від вартості іншого первинного паперу. Опишемо наступні деривативи.

Ф'ючерс (future) — контракт (угода) між двома сторонами, який полягає в тому, що фіксований актив буде продано у деякий момент у майбутньому за фіксованою ціною. Ф'ючерси поділяються на 4 основні категорії: ф'ючерси на облігацію, ф'ючерси на короткострокові відсоткові ставки, ф'ючерси на біржові індекси, ф'ючерси на валюту.

Опціон (option) — дериватив, що дає інвестору право, але не зобов'язує його, купити або продати фіксований актив за фіксованою ціною у фіксований момент часу в майбутньому. Бувають опціони купівлі та опціони продажу. Опціон Американського типу можна подати до виконання в будь-який момент від 0 до T, де T — кінцева дата виконання. Опціон Європейського типу має фіксовану дату виконання.

Своп (swap) — угода між двома сторонами, за якою вони погоджуються обмінятися серією виплат за формулою, обумовленою в момент підписання угоди. Найбільш поширена форма — своп на відсоткову ставку, в якому одна сторона погоджується виплатити іншій деяку кількість фіксованих сум у фіксовані моменти часу. Натомість, інша сторона погоджується зробити певну кількість виплат невизначеного обсягу, залежного від рівня відсоткової ставки. Фіксовані виплати можна трактувати як відсоткові виплати за депозитом з фіксованим відсотком, а змінні виплати — як виплати за тим самим депозитом, але з плаваючою ставкою. Бувають також валютні свопи. Кожний учасник свопу зазнає два види ризику. Ринковий ризик (market risk) полягає у тому, що ринкові умови зміняться так, що сучасне значення чистих витрат, зумовлених проектом, зросте. Ринковий ризик треба намагатися хеджувати, включаючи його в компенсаційну угоду. Кредитний ризик (credit risk) полягає у тому, що партнер може збанкрутувати і буде не в змозі зробити виплати за контрактом.

Конвертовані активи (convertible assets) — як правило, незахищені облігації або привілейовані акції, які конвертуються у звичайні акції тієї самої компанії. За конвертованими активами сплачується фіксований відсоток. Дата конвертування може бути фіксованою або, за вибором власника активу, одною з множини фіксованих дат. Дохід за конвертованими активами, як правило, нижчий, ніж за звичайними акціями, але вищий, ніж за привілейованими акціями або незахищеними облігаціями. Конвертовані активи зазнають менших змін у ціні. Вони обіцяють інвестору менший ризик з потенційно високими прибутками. "Платою" за це є менший поточний дохід.

1.5. Використання складних відсотків у підрахунку прибутку та ефективної відсоткової ставки

Норма грошового прибутку, або **внутрішня норма прибутку** — ставка дисконтування, яка прирівнює початкове інвестування до суми усіх дисконтованих надходжень за інвестицією. Якщо i — норма грошового прибутку, то відповідний дисконтний множник $v = \frac{1}{(1+i)}$ визначається з рівняння

$$P = \sum_{k=1}^{n} X_k v^{t_k},$$

де P — початкове інвестування; X_k — надходження за інвестицією в момент t_k.

Це рівняння звичайно розв'язується наближено: вибираються два достатньо близькі значення i_1 та i_2 норми прибутку, для одного з яких значення правої частини менше за P, для іншого — більше, тоді наближене значення

$$i = i_1 + (P - P_1)\frac{i_2 - i_1}{P_2 - P_1}.$$

Реальна норма прибутку обчислюється з урахуванням сталої інфляції

$$r = \frac{(1+i)}{(1+\xi)} - 1,$$

де i — норма грошового прибутку; ξ — рівень інфляції.

Надходження інвестора зазвичай обкладаються податками, які поділяються на податок на прибуток (прибутковий податок, income tax) і податок на приріст капіталу (capital gains tax). Податку на прибуток підлягають регулярні відсоткові виплати (купонні виплати, виплати відсотків за позикою, дивідендів, тощо).

Натомість податок на приріст капіталу сплачується не більш одного разу для кожного контракту — оподатковується різниця між виплатою при погашенні акції чи іншого активу та її ціною (якщо ця різниця додатна).

Корисною при розгляді оподаткування може бути формула Мейкема, що полягає в наступному. Нехай відсоткові виплати за позикою здійснюються p разів на рік із заборгованістю, а саму позику буде повернуто після n (не обов'язково ціле число, але кратне $1/p$) років виплатою розміром C.

Якщо податок на прибуток інвестора дорівнює t_1, податок на приріст капіталу відсутній, річні відсоткові виплати становлять g, а ефективним чистим (без податків) річним доходом інвестора є i, то ціна, яку має сплатити інвестор у день відсоткової виплати (якої він не отримає), дорівнює

$$P = K + (C - K)\frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}},$$

де $K = Cv^n$ — сучасна вартість капітальної виплати;

$g(1-t_1)\frac{(C-K)}{i^{(p)}}$ — сучасна вартість відсоткових виплат.

Ця формула відома як формула Мейкема.

Зауважимо, що формула Мейкема залишається вірною, якщо позика повертається кількома виплатами, що здійснюються в моменти відсоткових виплат (відразу після останніх).

З формули Мейкема, зокрема, випливає, що приріст капіталу буде в тому і тільки в тому випадку, коли $g(1-t_1) < i^{(p)}$.

При цьому цінний папір найвигідніше для позичальника погашати в останній можливий момент (якщо він має можливість вибирати дату погашення).

Якщо $g(1-t_1) \geq i^{(p)}$, то немає приросту капіталу (відповідно й податок на приріст капіталу не сплачується), а цінний папір найвигідніше погашати при першій нагоді.

Зауважимо також, що, взагалі кажучи, формула Мейкема не є вірною, якщо позичання або капітальна виплата здійснюється не в момент відсоткової виплати.

1.6. Визначення ціни форвардних контрактів за припущення відсутності арбітражу

Форвардний контракт — угода між двома сторонами, за якої одна сторона погоджується придбати в іншої зазначену кількість активу за зазначеною ціною (ціною при доставці) у зазначений момент часу. Інвестор, що погоджується продати актив, займає “форвардну коротку позицію” за цим активом, а покупець — “форвардну довгу позицію”. Ціна при доставці на момент укладання форвардного контракту дорівнює форвардній ціні, що котирується. Припущення про безарбітражність, або відсутність арбітражу, означає, що інвестор не може досягти прибутку без ризику для себе. Якщо не сказано супротивне, припускають, що форвардний контракт є безкоштовним.

За такого припущення, якщо сучасна ціна активу дорівнює P, а безризикова відсоткова ставка i, то безарбітражна форвардна ціна дорівнює $f_t = P(1+i)^t$, де t — час виконання контракту. Якщо за активом сплачуються дивіденди розміром X_i у момент часу $t_i < t$, то значення дивідендів на момент виконання контракту віднімається від форвардної ціни.

У такому разі форвардна ціна

$f_t = P(1+i)^t - \sum_{i=1}^{n}(1+i)^{t-t_i}X_i = (1+i)^t(P - \sum_{i=1}^{n} v^{t_i}X_i)$.

Другий вираз у цій формулі природно інтерпретувати як перераховану на момент t сучасну вартість грошового потоку до моменту t. Якщо форвардний контракт не є безкоштовним, його вартість за припущення відсутності арбітражу дорівнює дисконтованій різниці між котируванням форвардної ціни активу і безарбітражною форвардною ціною.

Часова структура відсоткової ставки. Одинична облігація з нульовим купоном і терміном погашення n років є угодою виплатити 1 грн наприкінці n-го року без виплати купонів. Позначимо через P_n ціну випуску цієї облігації; n-річною дискретною спотовою відсотковою ставкою назвемо таку відсоткову ставку y_n, що $P_n = (1+y_n)^{-n}$.

Довільну інвестицію з фіксованим відсотком можна розглядати як комбінацію облігацій з нульовим купоном. Наприклад, облігацію, що виплачує наприкінці кожного року купони на суму D протягом n років і з сумою погашення R наприкінці n-го року, можна розглядати як комбінацію n облігацій з нульовим купоном з сумою погашення D і з термінами погашення відповідно в 1, 2, . . ., n років плюс облігація з нульовим купоном з сумою погашення R і з терміном погашення n років.

Позначимо $v_{y_t} = (1 + y_t)^{-1}$, тоді сучасна вартість облігації дорівнює

$A = D(P_1 + P_2 + \ldots + P_n) + RP_n = D\left(v_{y_1} + v_{y_2}^2 + \ldots + v_{y_n}^n\right) + Rv_{y_n}^n$.

Дискретна форвардна ставка $f_{t,r}$ — річна відсоткова ставка, яку узгоджено в початковий момент часу $t = 0$ і яка стосується інвестиції, що буде зроблено в момент часу $t > 0$ на термін у r років. Таким чином, якщо в нульовий момент часу інвестор погодився інвестувати капітал C у момент t на r років, то накопичена в момент $t + r$ сума дорівнюватиме $C\left(1 + f_{t,r}\right)^r$. Маємо співвідношення $(1 + y_t)^t\left(1 + f_{t,r}\right)^r = (1 + y_{t+r})^{t+r} = P_{t+r}^{-1}$.

Отже, $\left(1 + f_{t,r}\right)^r = \frac{P_t}{P_{t+r}}$.

Одноперіодну форвардну ставку позначимо $f_t = f_{t,1}$, тоді $(1 + y_t)^t = (1 + f_0)(1 + f_1)\ldots(1 + f_{t-1})$.

Неперервна t-річна спотова відсоткова ставка Y_t визначається із співвідношення $P_t = exp(-Y_t t)$, звідки $Y_t = \frac{-\ln P_t}{t}$.

Із означення випливає, що $(1 + y_t)^t = exp(Y_t t)$.

Неперервна форвардна ставка $F_{t,r}$ — інтенсивність відсотка, еквівалентна річній дискретній форвардній ставці $f_{t,r}$, тобто $\left(1 + f_{t,r}\right)^r = exp\left(F_{t,r} r\right)$.

Звідси $f_{t,r} = exp\left(F_{t,r}\right) - 1$.

Мають місце співвідношення

$$exp(Y_t t)\, exp(F_{t,r} r) = exp((t+r)Y_{t+r}) \Rightarrow F_{t,r} = \frac{1}{r}[(t+r)Y_{t+r} - tY_t].$$

Оскільки $Y_t = \frac{-\ln P_t}{t}$, то $F_{t,r} = \frac{ln(P_t/P_{t+r})}{r}$.

Миттєва форвардна ставка F_t визначається як $F_t = \lim_{r \to 0} F_{t,r}$.

Отже,

$$F_t = \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} ln(P_t/P_{t+r}) = -\frac{d}{dt} \ln P_t \Rightarrow P_t = exp\left(-\int_0^t F_s ds\right).$$

Номінальний *n*-річний дохід yc_n — розмір купонних виплат за облігацією номіналом у 1 грн терміном на *n* років з ціною в 1 грн. Таким чином, має місце співвідношення $1 = yc_n\left(v_{y_1} + v_{y_2}^2 + \ldots + v_{y_n}^n\right) + v_{y_n}^n$, де $v_{y_t} = (1 + y_t)^{-1}$.

Нехай $\{C_{t_k}\}, k = 1, \ldots, n$ — грошовий потік і нехай *A* — сучасна вартість цього грошового потоку відносно ставки доходності до погашення i.

Тоді $A = \sum_{k=1}^{n} C_{t_k} v_i^{t_k}$, де $v_i = \frac{1}{1+i}$.

Волатильністю *v* називають таку міру зміни сучасної вартості *A* відносно *i*:

$$v = -\frac{1}{A}\frac{d}{di}A = \frac{\sum_{k=1}^{n} C_{t_k} t_k v_i^{t_k+1}}{\sum_{k=1}^{n} C_{t_k} v_i^{t_k}}.$$

Дисконтованим середнім часом, або тривалістю, грошового потоку називається величина $\tau = \frac{\sum_{k=1}^{n} C_{t_k} t_k v_i^{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} C_{t_k} v_i^{t_k}}$.

Таким чином, $\tau = (1 + i)v$.

Дисконтований середній час для облігації, виданої на *n* років з річними купонними виплатами D і з сумою погашення *R*, дорівнює

$$\tau = \frac{D(Ia)_{\bar{n}} + Rnv^n}{Da_{\bar{n}} + Rv^n}.$$

Опуклість c грошового потоку визначається як

$$c = \frac{1}{A}\frac{d^2}{di^2}A = \frac{\sum_{k=1}^{n} C_{t_k} t_k (t_k + 1) v_i^{t_k+2}}{\sum_{k=1}^{n} C_{t_k} v_i^{t_k}}.$$

Нехай деякий фонд має грошовий потік по активах $\{A_{t_k}\}$ і грошовий потік по зобов'язаннях (пасивах) $\{L_{t_k}\}$.

Позначимо через V_A, V_L сучасну вартість грошових потоків за активами і пасивами відповідно.

Нехай v_A, v_L— волатильності, а c_A, c_L — опуклості відповідних грошових потоків.

При відсотковій ставці i_0 фонд імунізовано відносно малих змін ε відсоткової ставки тоді і тільки тоді, коли $V_A(i_0) = V_L(i_0)$ і $V_A(i_0 + \varepsilon) \geq V_L(i_0 + \varepsilon)$.

Умови імунізації Редінгтона:

$V_A(i_0) = V_L(i_0)$,

$v_A(i_0) = v_L(i_0)$,

$c_A(i_0) > c_L(i_0)$.

Розділ 2. СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ ФІНАНСОВИХ ПРОЦЕСІВ

2.1. Моделі банківських рахунків

В процесі економічної діяльності кожен з учасників має обмежену кількість грошей, тобто обмежені фінансові ресурси.

Але для реалізації деяких планів (це може бути купівля будинку, розширення чи переобладнання виробництва, розрахунки за борги та інше) потрібно більше фінансових ресурсів, ніж є у наявності.

В такому разі можна:

- звернутися до фінансового посередника, до банку, інвестиційної компанії, іншої фінансової структури, зі своїм запитом;
- взяти кошти у борг безпосередньо шляхом випуску в обіг цінних паперів.

При зверненні до фінансових посередників необхідні кошти можуть надаватися на певних умовах — строках виплати, гарантіях, процентних ставках (плати за надання коштів).

Отже, фінансові посередники - це інститут, який займається акумулюванням і перерозподілом фінансових ресурсів. Фінансові посередники стоять між тими, хто надає кошти (кредиторами), та тими, хто їх позичає.

Посередник позичає гроші у їх власників, а далі виступає як кредитор, надаючи кошти від свого імені. З метою акумуляції коштів, або капіталу, фірми та фінансові посередники випускають в обіг цінні папери двох основних видів: акції та облігації. Випускаючи акції, фірма одержує за них кошти, які будуть використані у подальшій діяльності.

Покупці акцій стають співвласниками фірми, вклавши (інвестувавши) в неї свої кошти. Власник акції одержує право на участь у роботі фірми (через збори акціонерів) і на одержання дивідендів — регулярних (як правило) виплат, шо їх робить фірма своїм акціонерам.

Потоки платежів (cash flows). Приклади потоків платежів:

1. Облігація з нульовим купоном (zero-coupon bond)

2. Цінні папери з фіксованим відсотком (fixed-interest securities)

3. Індексовані цінні папери (index-linked securities)

4. Депозитні вклади (cash on deposit)

5. Звичайна акція (equity)

6. Ануїтет (annuity)

Часова вартість грошей. Якщо відсотки виплачуються наприкінці терміну позичання, то розмір відсотків зазвичай виражають через *відсоткову ставку*, що дорівнює частці суми позики, яку потрібно виплатити у вигляді відсотків; при цьому вказують період, за який нараховуються відсотки, частіше за все це рік.

Власник акції одержує право на участь у роботі фірми (через збори акціонерів) і на одержання дивідендів — регулярних (як правило) виплат, шо їх робить фірма своїм акціонерам.

Існує багато видів акцій:

- звичайні акції,
- неоплачувані акції,
- акції зі знижкою,
- акції з фіксованим процентом,
- акції з додатковою виплатою дивідендів

та багато інших.

Всі види акцій можна розділити на 2 основні типи — звичайні та привілейовані.

Привілейовані акції гарантують виплати з фіксованими дивідендами, звичайні акції не мають такої гарантії.

Але не обмежуються і розміри дивідендів, що їх одержують власники звичайних акцій.

Вартість (ціна) акції визначається не тільки діяльністю фірми, шо випускає акції, але також загальним станом ринку цінних паперів.

Інший вид цінних паперів-облігацій — являють собою боргові зобов’язання емітентів (тих інститутів, банків, компаній, держав, які випускають облігації).

Облігації — це довгострокові цінні папери, що мають певний визначений термін боргового зобов'язання, у який боржник (тобто той, хто випустив облігації) мас повернути кредитору повну ціну облігації.

Протягом цього строку власники облігацій одержують певні суми грошей як відсоток. Розмір цього відсотку, або купонна ставка, може бути фіксованим або плаваючим в залежності від типу облігації.

Прикладом найпростішої облігації с банківський рахунок з фіксованою відсотковою ставкою.

Вартість облігації визначається фінансовою структурою інституту, що випускає облігації (фірма, комерційний банк, уряд тощо), величиною ризику часткової або повної втрати коштів, рівнем процентних ставок на ринку.

Розглянемо найпростішу облігацію — банківський рахунок. На покладені у банк гроші нараховується постійний процент $a > 0$. Сума грошей на рахунку змінюється з часом за формулою складних процентів: маючи початковий капітал B_0, в кінці першого розрахункового періоду (тобто відрізку часу, за який нараховується обіцяний банком процент — місяць, квартал, півроку, рік) на поточному рахунку вкладника буде

$$B_1 = B_0(1 + a)$$

грошових одиниць.

В кінці другого періоду: $B_2 = B_0(1 + a)^2$, і так далі, в кінці t–го періоду маємо вже

$$B_t = B_0(1 + a)^t \qquad (2.1)$$

Щоб одержати формулу для неперервного підрахунку, розіб’ємо кожний розрахунковий період на k частин і спрямуємо k до нескінченності.

Тепер треба знайти границю величин

$$B_t = B_0 \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{a}{k}\right)^{tk}.$$

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{a}{k}\right)^{tk} = exp(at)$,

то остаточно одержуємо $B_t = B_0\, exp(at)$.

Цю формулу можна записати у еквівалентному вигляді через прирости за час t

$$dB_t = aB_t dt$$

або

$$\frac{dB_t}{B_t} = adt. \qquad (2.2)$$

Ще на початку XX-го сторіччя вченим Башельє була запропонована дуже природна модель для визначення ціни акції S_t в період t.

Ця модель використовувала поняття геометричного броунівського руху або вінерівського процесу.

Вартість акції на момент t становить величину S_t, яка визначається за формулою

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \qquad (2.3)$$

де μ — коефіцієнт росту,

σ — коефіцієнт мінливості (волатильності),

W_t — стандартний вінерівський процес.

Величину μ можна розглядати як значення тренду (зміни) процентних ставок по акціях.

Якщо $\mu = a$, то вартість акції S_t дорівнює $(B_t = B_0\, exp(at))$

$$S_t = S_0\, exp(at)\, exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right) = \frac{S_0}{B_0} B_t\, exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right).$$

З точки зору теорії випадкових процесів ця формула є мультиплікативним розкладом Дуба-Мейєра з процесом B_t, $t \geq 0$, що передбачається, та мартингалом

$$\frac{S_0}{B_0} B_t\, exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right), \quad t \geq 0.$$

Розглянемо детальніше, як геометричний броунівський рух описує вартість акцій.

Нехай спочатку час t приймає дискретні значення: $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots$ Обчислимо в логарифмічній шкалі залишок (приріст) вартості акцій за одиницю часу:

$$R_t = ln(S_{t+\Delta t}) - ln(S_t) = ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right),$$

$ln(x)$— натуральний логарифм числа $x > 0$.

Тут R_t має чисто випадковий характер.

Причина — дія великого числа незалежних економічних факторів.

Але дія багатьох незалежних факторів, в силу центральної граничної теореми, призводить до так званого ”ефекту $\sqrt{\Delta t}$“ характерного для нормального розподілу, тобто до того, що дисперсія залишку R_t дорівнює $DR_t = \sigma\sqrt{\Delta t}$, $\sigma > 0$ — деякий коефіцієнт.

Якщо врахувати чисто випадковий характер R_t, то R_t можна замінити на приріст броунівського руху $\sigma\Delta W_t$.

Тоді

$$ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) = ln\left(1 + \frac{\Delta S_t}{S_t}\right) = \sigma\Delta W_t,$$

де $\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t$.

При малих значеннях x, $ln(1 + x) \cong x$, отже, $\frac{\Delta S_t}{S_t} \cong \sigma\Delta W_t$.

При $\Delta t \to 0$ ліва частина переходить в стохастичний диференціал $\frac{dS_t}{S_t}$, тобто,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma dW_t. \qquad (2.4)$$

Розв’язком рівняння (2.4) є випадковий процес $S_t = S_0\, exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$.

Якщо на приріст R_t, крім випадкових, впливає ще деякий лінійний фактор, наприклад, інфляція з деяким коефіцієнтом росту μ, то $R_t = \sigma\Delta W_t + \mu\Delta t$, звідки $\frac{\Delta S_t}{S_t} \cong \mu\Delta e + \sigma\Delta W_t$,

а тоді перехід до границі при $\Delta t \to 0$ дає формулу (2.2).

Порівнюючи нормований стохастичний диференціал $\frac{dS_t}{S_t}$ і невипадковий диференціал $\frac{dB_t}{B_t}$, бачимо, що прирости вартостей як акцій, так і облігацій, містять лінійні частини, пропорціональні dt, але акції містять ще стохастичний член σdW_t порядок якого є $o(\sqrt{\Delta t})$, що відповідає швидким змінам (флуктуаціям), у вартості акції.

2.2. Прямий та посередній методи визначення цін облігацій

Вартість акцій повністю визначається початковою ціною S_0, та параметрами μ і σ.

У моделях, наближених до реальності, складніше порахувати вартість облігації, оскільки у загальному випадку ця величина залежить не тільки від сплачуваної процентної ставки, яка с випадковою величиною, але і від строку T, на який була випущена облігація, тобто терміну, в який кредитор одержить позичені в нього гроші (найпростіший випадок, коли процентна ставка детермінована, а залежності від T немає вже було розглянуто).

Узагальнюючи цей приклад банківського рахунку з постійною відсотковою ставкою (формула (2.1)), знайдемо величину $B_t(T)$, яка буде на рахунку при деякій детермінованій процентній банківській ставці $a(t)$.

Відсоткова ставка змінюється з часом, але припустимо, що нам відомо, яким чином, тобто відомий вигляд функції $a(t),\ \ t \geq 0$.

Тоді в момент t на поточному банківському рахунку буде сума $B_t(T)$, яка визначається за формулою

$$B_t(T) = B_0\, exp\left(-\int_t^T a(u)du\right),$$

де B_0 — фіксована вартість, яка сплачується в момент T згідно з домовленістю.

Бачимо, що величина $B_t(T)$ залежить від поточного значення t, від строку T, на який вкладено гроші, і вигляду функції $a(t),\ t \geq 0$ зміни банківського проценту.

Розглянемо тепер загальний випадок, коли $a(t)$ може бути випадковим процесом.

Для визначення ціни облігації на деякий момент використовуються два основні підходи — прямий та посередній.

При прямому підході вартість $B_t(T)$ облігації вважається розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dB_t(T) = B_t(T)(a_t(T,\omega)dt + \sigma_t(T,\omega)dW_t), \ \ B_T(T) = B_0,$$

де a_t, σ_t— коефіцієнти росту (зносу) та мінливості (дифузії).

Тобто маємо формулу, яка описує поведінку функції $B_t(T)$, заданої в явному вигляді:

$$B_t(T) = \int_t^T B_s(T)a_s(T)ds + \int_t^T B_s(T)\,\sigma_s(T)dW_s + B_0.$$

Існує ще один підхід до визначення ціни облігації.

Вважається, що значення функції $B_t(T)$ залежить від деякого випадкового процесу $a_t(\omega)$, $0 \le t \le T$, причому цей процес має просту економічну інтерпретацію, а саме: процес α_t інтерпретується як "миттєве значення випадкової відсоткової ставки".

Припускається, що процес a_t задовольняє стохастичне диференціальне рівняння $$da_t = \mu(t, a_t)dt + \beta(t, a_t)dW_t,$$

де W_t, $0 \le t \le T$ — вінерівський процес.

При такому посередньому підході значення $B_t(T)$ є випадковим через величину a_t, $0 \le t \le T$.

Таким чином, для $B_t(T) = B_t(T, a_t)$ має місце рівняння

$$dB_t(T, a_t) = B_t(T, a_t)(\alpha_t(T, a_t)dt + \beta_t(T, a_t)dW_t),$$

$$B_T(T, a_T) = B_0.$$

Якщо припустити неможливість арбітражу, тобто неможливість різниці цін, або процентних ставок, або курсів валют на ринку, за рахунок якої можна одержати прибуток без ризику — купивши дешевше і відразу і продавши дорожче, то для $B_t(T, a_t)$ можна одержати вираз

$$B_t(T, a_t) = E^*\left(\frac{exp\left\{-\int_t^T a_u du\right\}}{a_t}\right),$$

де E^*— умовне математичне сподівання, або середнє, відносно деякої міри, шо є локально еквівалентною до вихідної ймовірнісної міри.

Арбітра́ж (arbitrage — вирішення спору посередником)— це термін, що може використовуватися в одному з таких значень:

Арбітраж як спосіб вирішення спорів— розв'язання спорів недержавними арбітрами (третейськими суддями) з винесенням рішення, обов'язкового для сторін. Включає внутрішньодержавні третейські суди, міжнародний комерційний арбітраж, міжнародний інвестиційний арбітраж, міждержавний арбітраж

Арбітражний суд— державний судовий орган, що вирішує господарські спори

2.3. Похідні цінні папери.

Крім основних цінних паперів — акцій та облігацій, на міжнародному ринку протягом останніх 10-20 років все ширше розповсюджуються так звані похідні цінні папери, що їх інколи називають *дерівативами* (англ. derive).

До них належить опціони, варанти, ваучери та ф’ючерсні контракти.

Опціон дає право власнику цього цінного паперу купити або продати визначену кількість певного товару на деяких вказаних умовах: за визначену ціну на або до певного строку.

Остання умова є ознакою, за якою опціони поділяються на два основних типи: опціони Європейського і Американського типів. Опціон Європейського типу мас фіксовану дату виконання.

На відміну від нього опціон Американського типу може бути використаний в будь-який момент часу до деякої фіксованої дати.

IIо праву, яке надається опціоном, вони поділяються на опціони купівлі (або опціон покупця), що надає право покупати, і опціони продажу (опціони продавця), що надає право продавати.

Варант - це цінний папір, що випускається компанією або фірмою, і надає його власнику право придбати вказану кількість акцій даної фірми чи компанії по фіксованій ціні. Варант може бути використаний у будь- який момент часу до фіксованої дати.

Ваучер — не цінний папір, що дає його власнику право придбати будь-яку акцію по номінальній вартості (позначеній на акції).

Ф'ючерс, або ф'ючерсний контракт — це угода про купівлю або продаж деякого товару в майбутній фіксований момент часу по визначеній ціні. Ф'ючерсні контракти укладаються як на купівлю-продаж товарів чи сировини — руди, пшениці і т.д., так і на купівлю-продаж валюти.

Особливістю таких контрактів є те, що вони укладаються на біржі і контрактні ціни ф'ючерсних операцій визначаються відкритими ринковими аукціонами. Ф'ючерсні контракти відрізняються від строкових контрактів тим, що клірингова (розрахункова) палата здійснює реєстрацію, контроль і відповідний розрахунок між покупцем і продавцем.

Клірингова палата є покупцем для продавця і продавцем для покупця. Зазначимо, що ф'ючерсні контракти на продаж-купівлю валюти в більшості втрачають силу і не реалізуються.

Слід зауважити, що іноді виникають питання про те, до якого виду — основних чи похідних — віднести ті чи інші цінні папери.

Розглянемо деякі моделі ринку цінних паперів, виведемо формули для визначення вартості опціонів Європейського та Американського типів.

Розглянемо один з видів похідних цінних паперів - варанти, та наведемо деякі співвідношення для визначення вартості цих паперів.

П. Самуельсоном була запропонована така модель для визначення ціни варанту.

Припустимо, що прибуток від вкладених у варант коштів дорівнює β, а від коштів, що вкладено у звичайну акцію, дорівнює α, причому ці величини вважаються відомими.

Нехай S_t— ціна звичайної акції у момент часу t, причому ціна S_{t+n} через n проміжків часу задовольняє закону

$$P\{S_{t+n} = S \mid S_t = S_0\} = P(S, S_0, n) = P\left(\frac{S}{S_0}, n\right).$$

Якщо позначати відношення початкової та кінцевої цін через Z: $\frac{S}{S_0} = Z$, то Z може бути представлено як добуток $Z = Z_1 Z_2 \ldots Z_n$ однаково розподілених незалежних величин, причому

$$P\{Z_1 \leq X\} = P(X, 1)$$

де функція розподілу $P(\cdot,\cdot)$ та ж сама, що і в попередньому рівнянні.

Зауважимо, що $P(\cdot,\cdot)$ задовольняє рівнянню Чепмена-Колмогорова:

$P(X, n+m) = \int_0^\infty P\left(\frac{X}{Y}, n\right) dP(Y, m),$

тобто величини S_t є геометричним броунівським рухом.

Нехай $W_t(n)$ — це ціна варанту в момент часу t, і до кінцевої дати використання є n проміжків часу.

Припустимо, що відома початкова ціна варанту:

$W_t(0) = max(0, S_t - 1) = F_0(S_t).$

Тоді, якщо варант використовується, тобто його власник купує акції, ми можем знайти величину $W_t(1) = F_1(S_t)$ з рівняння

$exp(\beta) = E\{F_0(S_t Z)[F_1(S_t)]^{-1} | S_t\} = \int_0^\infty F_0(S_t Z) dP(Z, 1)/F_1(S_t).$

Отже, величина $F_1(S_t)$ дорівнює:

$F_1(S_t) = max\left[0, S_t - 1, exp(-\beta) \int_0^\infty F_0(S_t Z) dP(Z, 1)\right].$

Таким чином можна знайти послідовно всі значення $F_n(S_t) = W_t(n)$. Для знаходження значення $F_\infty(S_t)$ треба покласти: $n \to \infty$.

У частинному випадку $\alpha = \beta$ можна оцінити вартість варантів будь- якого терміну використання за такими формулами:

$$F_n(S_t) = exp(-\alpha T) \int_0^\infty F_{n-1}(S_t Z) dP(Z, T) =$$

$$= exp(-\alpha n)\int_0^{\infty} F_0(S_t Z)dP(Z,n) =$$

$$= exp(-\alpha n)\int_{\frac{1}{S_t}}^{\infty} (S_t Z - 1)dP(Z,n).$$

У спеціальній літературі читач може знайти повну теорію, що описує динаміку ціни варанту у неперервному часі.

Наведемо загальну формулу для визначення ціни варанту:

$F_{n+1}(S_t) = exp(-r)\int_0^{\infty} F_n(S_t Z)dQ(Z,1),$

де

$$dQ(Z,1) = \frac{U'[(1-\omega)\, exp(-r)+\omega Z]dP(Z,1)}{\int_0^{\infty} U'[(1-\omega)\, exp(-r)+\omega Z]dP(Z,1)},$$

U — функція корисності; а величина r є такою, що кошти, покладені на банківський рахунок, дають прибуток $exp(r) - 1$ за кожен проміжок часу.

Значення ω знаходиться зі співвідношення

$$\int_0^{\infty} \{ZU'[(1-\omega)+\omega Z] - U'[(1-\omega)+\omega Z]\}\, dP(Z,n) = 0.$$

До похідних цінних паперів відносяться також форвардні контракти.

Ці контракти є двосторонніми угодами про продаж-купівлю товару за визначеною фіксованою ціною у фіксований момент часу.

На відміну від опціону купівлі покупець зобов'язується придбати товар за визначеною контрактом ціною, а продавець повинен продати за цією фіксованою ціною.

Дуже схожий до форвардного ф'ючерсний контракт. Відмінності полягають у тому, що весь інтервал часу *T*, на який укладено контракт, поділяється на k проміжків, *k=1,2,…,n* і в кожен момент часу майбутній покупець сплачує продавцю різницю між ф'ючерсними цінами в даний момент часу t_kі в попередній момент t_{k-1}, якщо ф'ючерсна ціна зменшується. Якщо ф'ючерсна ціна зростає, то різницю сплачує продавець.

У кінцевий момент масу продавець постачає товар, а покупець сплачує йому обумовлену контрактом ціну.

Динаміка зміни ціни у ф'ючерсних контрактів може бути визначена з таких міркувань. Нехай ф'ючерсний контракт укладено на акцію, яке дає сталий прибуток r. Зміна ціни акції описується рівнянням

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\alpha - r)dt + \sigma dW_t,$$

де α — очікуваний рівень прибутку (тут коефіцієнт росту $\mu = \alpha - r$),

$W_t, \quad t \in [0, T]$ — вінерів процес.

Якщо рівень відсотку a є постійним, то ф'ючерсна ціна дорівнює

$$F_t = F(t_k, T) = S(t_k)\, exp\big(-(r - a)(T - t_k)\big).$$

Застосувавши до останнього рівняння формулу Іто, одержуємо таке співвідношення для ціни ф'ючерса

$$dF_t = (\alpha - r)F_t dt + \sigma S_t dW_t, \qquad (2.5)$$

де F_t — ф'ючерсна ціна, S_t — ціна акції в момент $t = t_k$.

Зауваження. Звернемо увагу на те, що динаміка зміни ф'ючерсних цін не залежить від рівня відсоткової ставки.

При $r = a$ можна в явному вигляді виписати розв'язок рівняння (2.5) для ф'ючерсного контракту на опціони. Наприклад, для опціону купівлі ціна ф'ючерса буде

$$F_t = F(S_t, t, P, T) = exp\big(-a(T - t)\big)\,[S_t \Phi(b_1) - P\Phi(b_2)], \qquad (2.6)$$

де $F(\cdot)$ — ціна ф'ючерса, P — договірна ціна купівлі; T_1 — час виконання опціону Європейського типу,

$$b_1 = \frac{\left\{ln\left(\frac{S_t}{P}\right) + \sigma^2 \frac{T - t}{2}\right\}}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T - t},$$

$\Phi(x)$ — функція розподілу стандартного нормального розподілу.

Співвідношення, аналогічні до (2.6), справедливі для ф'ючерсів на опціони Американського типу та опціон продажу Європейського типу.

2.4. Ринок з дискретним часом. Модель Кокса-Росса-Рубінштейна

Обговоримо два варіанти однієї з можливих моделей функціонування ринку цінних паперів.

Цю модель називають моделлю Кокса - Росса - Рубінштейна, або скорочено CRR-моделлю за ім'ям її авторів.

Припустимо, що операції на ринку проводяться в деякі дискретні фіксовані моменти часу $t = n = 0,1, \ldots, N$.

Всі показники, що характеризують стан ринку, змінюються також дискретно: система миттєво переходить зі стану 1 в стан 2 і так далі.

Початковий стан, який умовно позначимо X_0, характеризується певними вихідними (початковими) даними.

Вважаємо також, що ринок цінних паперів складається лише з двох активів:

- банківського рахунку $B = \{B_n, 0 \leq n \leq N\}$
- і акції $S = \{S_n, 0 \leq n \leq N\}$.

Такий ринок носить назву (B, S)-ринку.

Розглянемо тепер інвестора, який має початковий капітал $X_0 = x > 0$ і бажає збільшити його в майбутньому, причому він може користуватися можливостями (B, S) - ринку.

Інвестор може розмістити (тобто інвестувати) свій капітал $X_0 = x$ на банківський рахунок.

Тоді його капітал в момент часу $t = n$ буде дорівнювати $X_n = x(1 + a)^n$, де a — постійна процентна ставка.

Якщо інвестор хоче розмістити свій капітал на банківському рахунку і отримати в фіксований момент часу $t = N$ майбутньому суму грошей, рівну Y_N, то його початковий капітал повинен дорівнювати

$X_0 = x = (1 + a)^{-N} Y_N$.

З другого боку, інвестор може вкласти свій початковий капітал $X_0 = x$ в акції. Це є ризикованою справою, оскільки вартість акції змінюється (еволюціонує, здійснює флуктуації), але є надія на підвищення вартості акції.

І, нарешті, найчастіше виникає ситуація, коли інвестор частину коштів вкладає без ризику, а на решту купує акції.

Розглянемо цю ситуацію детальніше.

Зрозуміло, що інвестор в моменти часу $t = n$**,** в залежності від ситуації на ринку, буде продавати або купувати акції і змінювати банківський рахунок, тобто проводити певну стратегію.

Ця стратегія складається з кількості β_n банківських облігацій в момент часу $t = n$ і кількості γ_n акцій в той же момент часу.

Числову сукупність $\pi = \pi_n = \{\beta_n, \gamma_n, 0 \leq n \leq N\}$ ще називають портфелем інвестора.

Метою інвестора може бути такий вибір стратегії, або портфеля, щоб можна було в певний момент часу мати капітал, не менший, ніж задана величина, або в кожний момент часу мати капітал не менший, ніж задана функція, або в деякий момент часу виконати певні договірні умови, тощо.

Розглянемо такі варіанти.

Варіант 1. Метою інвестора є те, щоб його капітал в кожний момент часу дорівнював виграшу від придбання опціону.

Припустимо, що в початковий момент часу $t = 0$ ціна акції дорівнює S_0. На першому кроці при $t = 1$ ціна акції може стати або S_1, або S_2. Далі, при $t = 2$, зі стану S_1 ціна може змінитися або на S_{11}, або на S_{12}, зі стану S_2, ціна може стати або S_{21}, або S_{22}, і так далі.

Важливим є припущення, що ймовірності переходу зі стану S_0 в будь-який наступний станS_1, S_2, S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}, … - більше нуля. Припустимо також, що за даною акцією не сплачуються дивіденди, тобто ціна змінюється без виплати по акції.

Крім купівлі акції, у інвестора (кредитора) є ще можливість безризикового вкладання коштів (наприклад, купівля банківських облігацій), і це вкладання дає деякий постійний фіксований прибуток ***B*** (наприклад, при процентній ставці a цей прибуток є a на одну облігацію).

Щоб виключити можливість арбітражу (можливість скористатися тимчасовою різницею цін на різних ринках, різницею процентних ставок або курсів валют), повинні бути виконані умови

$S_1 < S_0 B < S_2$,

$S_{11} < S_1 B < S_{12}$

$S_{21} < S_2 B < S_{22}$

Тобто завжди повинні існувати (бути додатними): ймовірність того, що можна більше виграти, купивши акції, і ймовірність того, що більше виграєш при безризиковому вкладанні грошей.

Позначимо через $\gamma(S,t)$ кількість акцій, що їх має інвестор в момент часу t при вартості однієї акції S, і через $B(S,t)$ позначимо розмір вкладу (інвестиції) в безризикові цінні папери (наприклад, облігації державної позики, банківський рахунок, тощо).

Якщо $X(S,t)$ - це загальний грошовий "об'єм" портфеля цінних паперів, тобто капітал інвестора, в момент часу t, то

$$X(S,t) = \gamma(S,t)S + B(S,t) \qquad (2.7)$$

Припустимо, що ціна опціону, що залежить від вартості акції, відома і визначається деякою невід'ємною функцією $H(S)$, причому в перший момент часу нічого не сплачується, і ціна акції дорівнює S_1.

Тоді, щоб портфель інвестора відповідав виграшу від придбання опціону, в точці $t = 2$ повинні виконуватись умови:

$\gamma(S_1,1)S_{11} + B(S_1,1)B = H(S_{11})$ в разі ціни на акції S_{11},

і

$\gamma(S_1,1)S_{12} + B(S_1,1)B = H(S_{12})$ в разі ціни на акції S_{12}.

Розв'язавши цю систему рівнянь відносно $\gamma(S_1,1)$ і $B(S_1,1)$ і підставивши їх до формули (2.7) визначення вартості портфеля, одержимо

$X(S_1, 1) = \frac{1}{B}\big(\alpha_1 H(S_{12}) + (1 - \alpha_1)H(S_{11})\big)$ (2.8)

де $\alpha_1 = \frac{BS_1 - S_{11}}{S_{12} - S_{11}} > 0$.

Аналогічно одержуємо вираз для $X(S_2, 1)$ (тобто для випадку, коли ціна акції в момент $t = 1$ стане дорівнювати S_2):

$X(S_2, 1) = \frac{1}{B}\big(\alpha_2 H(S_{22}) + (1 - \alpha_2)H(S_{21})\big)$ (2.9)

де $\alpha_2 = \frac{BS_2 - S_{21}}{S_{22} - S_{21}}$.

Оскільки $X(S, t)$-вартість портфеля в момент часу t, то в момент часу $t = 2$ повинна виконуватись така система рівнянь:

$$\gamma(S_0, 0)S_1 + B(S_0, 0)B = X(S_1, 1)$$
$$\gamma(S_0, 0)S_2 + B(S_0, 0)B = X(S_2, 1)$$

звідки

$$\gamma(S_0, 0) = \frac{X(S_2, 1) - X(S_1, 1)}{S_2 - S_1},$$
$$B(S_0, 0) = \frac{S_2 X(S_2, 1) - S_1 X(S_2, 1)}{B(S_2 - S_1)},$$

та

$X(S_0, 0) = \frac{1}{B}\big(\alpha_0 X(S_2, 1) + (1 - \alpha_0)X(S_1, 1)\big),$ (2.10)

де $\alpha_0 = \frac{BS_0 - S_1}{S_2 - S_1}$.

Формули (2.7)-(2.10) є біноміальними формулами Кокса-Росса-Рубінштейна для визначення стратегії інвестора.

Аналогічні формули можна записати для будь-якого моменту часу $t = n$.

Варіант 2. Розглянемо еволюцію вартості акцій, яка описується біноміальним деревом, у більш простому вигляді.

А саме, нехай початкова вартість акції, як і раніше, дорівнює S_0.

В момент часу $t = 1$ її вартість змінюється на величину $\rho_1 S_0$, де випадкова величина ρ_1 може приймати два значення α і β такі, що $-1 < \alpha < a < b$ з додатними ймовірностями q і $p = 1 - q$, відповідно.

Аналогічно, в момент часу $t = 2$ вартість зміниться на $\rho_2 S_1$, де випадкова величина ρ_2 не залежить від ρ_1, має той самий розподіл, і так далі.

Тоді можна вписати рекурентну формулу

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

де S_n - вартість акції в момент часу $t = n$,

звідки

$$S_n = (1+\rho_1)(1+\rho_2)\dots(1+\rho_n)S_0,$$

де випадкові величини $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ незалежні в сукупності.

Спочатку припустимо, що інвестор вкладає гроші лише в акції.

Оскільки математичне сподівання, тобто середнє значення випадкової величини ρ_n дорівнює $\alpha q + \beta p$, то середнє значення Y_N суми його грошей в фіксований момент часу N в майбутньому дорівнює

$$Y_N = (1 + \alpha q + \beta p)^N x.$$

де $x = X_0$ - початковий капітал.

Отже, для одержання в середньому суми Y_N в майбутній момент часу $t = N$, початковий капітал повинен дорівнювати

$$x = X_0 = (1 + \alpha q + \beta p)^{-N} Y_N.$$

Розглянемо тепер ситуацію із вкладанням грошей як на банківський рахунок, так і в акції, причому вартість банківської облігації змінюється за формулою $B_t = B_0(1+a)^t$.

Нехай B_0 - вартість однієї банківської облігації,

S_0- вартість однієї акції в момент t=0.

Припустимо, що інвестор в момент часу t=0 має β_0 облігацій і γ_0 акцій (можливі дробові значення як β_0, так і γ_0, а також від'ємні значення; від'ємне значення β_0 означає взяття позики, а від'ємне значення γ_0 означає взяття акції в позику).

Таким чином, портфель інвестора при t=0 дорівнює $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$, а початковий капітал дорівнює

$$x = X_0 = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0.$$

Інвестор має можливість перерозподілити свій портфель в проміжку між моментами часу $t=0$ і $t=1$.

Нехай до моменту $t=1$, тобто перед тим, як буде оголошено нову випадкову вартість акції $S_1 = S_0(1+\rho_1)$, інвестор перетворив свій початковий портфель $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ в новий портфель $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$, керуючись тільки початковою інформацією про значення B_0 і S_0 і не допускаючи ні припливу додаткового капіталу (наприклад, у вигляді дивідендів з акцій, або прибутків від підприємницької діяльності), ні його відпливу (наприклад, у вигляді платежів за придбання товарів).

Портфель, що його перерозподілили вказаним чином, дає для початкового капіталу X_0 нове зображення

$$X_0 = \beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0.$$

В момент часу $t=1$ відбувається "оголошення" нових вартостей на ринку, тобто стають відомими значення B_1 і S_1, а тоді початковий капітал інвестора, з врахуванням нового портфеля $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$, перетворюється на величину

$$X_1 = \beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1.$$

Позначимо через $\Delta X_1 = X_1 - X_0$ приріст капіталу, $\Delta B_1 = B_1 - B_0$, $\Delta S_1 = S_1 - S_0$ - зміну вартостей облігацій і акцій.

Тоді приріст капіталу визначається формулою

$$\Delta X_1 = \beta_1 \Delta B_1 + \gamma_1 \Delta S_1.$$

Аналогічно, в будь-який момент часу $t=n$ приріст капіталу дорівнює

$$\Delta X_n = X_n - X_{n-1},$$

де

$$X_{n-1} = \beta_{n-1} N_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}.,$$

$$X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n.$$

Отже,

$$\Delta X_n = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n =$$

$$= (\beta_n B_n - \beta_{n-1} B_{n-1}) + (\gamma_n S_n - \gamma_{n-1} S_{n-1}) \qquad (2.11)$$

При цьому портфель $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ складається лише на основі попередньої інформації про вартості.

Формально це означає, що випадкові величини β_nі γ_nє F_{n-1} -вимірними, де σ -алгебра $F_{n-1} = \sigma(S_1, \dots, S_{n-1})$ - найменша σ - алгебра, відносно якої є вимірними випадкові величини $S_1, \dots, S_{n-1}$ (σ -алгебра, породжена величинами $S_1, \dots, S_{n-1}$).

Сумарний капітал X_n в момент t=n дорівнює

$$X_n = (X_n - X_{n-1}) + (X_{n-1} - X_{n-2}) + \dots + (X_1 - X_0) + X_0 =$$

$$= X_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta X_i = X_0 + \sum_{i=1}^{n} (\beta_i \Delta B_i + \gamma_i \Delta S_i) \qquad (2.12)$$

Зміст формул (2.11) і (2.12) полягає в тому, що формування капіталу відбувається лише за рахунок змін вартостей облігацій і акцій.

Перетворимо тепер праву частину (2.11):

$$(\beta_n B_n - \beta_{n-1} B_{n-1}) + (\gamma_n S_n - \gamma_{n-1} S_{n-1}) =$$

$$= \Delta\beta_n B_{n-1} + \Delta\gamma_n S_{n-1} + \gamma_n \Delta S_n + \beta_n \Delta B_n, \qquad (2.13)$$

де $\Delta\beta_n = \beta_n - \beta_{n-1}, \quad \Delta\gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$.

Порівняємо (2.13) із центральною частиною (2.11) і одержимо:

$$\Delta\beta_n B_{n-1} + \Delta\gamma_n S_{n-1} = 0. \qquad (2.14)$$

Формула (2.14) означає, що зміна $\Delta\beta_n B_{n-1}$ банківського капіталу відбувається тільки в результаті відповідної зміни $\Delta\gamma_n S_{n-1}$ капіталу в акціях, і навпаки.

Формулу (2.14) називають умовою самофінансування портфеля $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n), \quad 0 \le n \le N$.

Оскільки портфель ще називають стратегію, то рівняння (2.14) відповідає стратегії, що само фінансується (self-financing).

Клас всіх стратегій, що самофінансуються, позначимо $\boldsymbol{SF}$.

Нехай $X^* = \{X_n^*, 0 \le n \le N\}$ - капітал, що відповідає стратегії $\pi \in SF$.

Враховуючи, що

$$\Delta B_n = B_n - B_{n-1} = aB_{n-1},$$

$$\Delta S_n = \rho_n S_{n-1}$$

перепишемо формулу (2.11) у вигляді

$$\Delta X_n = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n =$$
$$= \beta_n (aB_{n-1} + \gamma_n \rho_n S_{n-1}) =$$
$$= a(\beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}) + \gamma_n S_{n-1}(\rho_n - a) =$$
$$= aX_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}(\rho_n - a). \qquad (2.15)$$

Покладемо $M_n = \frac{X_n}{B_n}, \quad 0 \le n \le N.$

Величину M_n називають нормованим, або дисконтованим капіталом.

Тоді з (2.15)

$$\Delta M_n = \frac{X_n}{B_n} - \frac{X_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{X_n}{B_{n-1}(1+a)} - \frac{X_{n-1}}{B_{n-1}} =$$
$$= \frac{X_n - (1+a)X_{n-1}}{(1+a)B_{n-1}} = \frac{X_n - aX_{n-1}}{(1+a)B_{n-1}} =$$
$$= \frac{\gamma_n S_{n-1}(\rho_n - a)}{(1+a)B_{n-1}} == \frac{\gamma_n S_{n-1}(\rho_n - a)}{B_n}. \qquad (2.16)$$

Нехай $m_n = \sum_{i=1}^{n}(\rho_i - a)$ та $\Delta m_n = \rho_n - a.$

Тоді з (2.16) $M_n = M_0 + \sum_{i=1}^{n}(M_i - M_{i-1}) = M_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta M_i =$

$$= M_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i S_{i-1}}{B_i} \Delta m_i. \qquad (2.17)$$

При цьому

$$E(\rho_1 - a) = \alpha q + \beta p - a = (\beta - \alpha)p - (a - \alpha).$$

Якщо вибрати ймовірності $p = P\{\rho_n = \beta\}$ спеціальним чином, а саме, покласти $p = p^* = \frac{a-\alpha}{b-\beta}$,

то $E^*(\rho_1 - a) = E^*(\rho_2 - a) =\ldots= 0$

(E^* - математичне сподівання відносно такої ймовірнісної міри P^*, для якої $P^*\{\rho_n = a\} = p^*, \quad 1 \le n \le N$).

Послідовність $\{m_n, F_n, 1 \le n \le N\}$ утворює мартингал, як сума незалежних випадкових величин з нульовим середнім.

Тоді і послідовність M_n, також утворює мартингал.

Справді,

$$E(M_n - M_{n-1}/F_{n-1}) = E\left(\frac{\gamma_n S_{n-1}}{B_n}\Delta m_n/F_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{\gamma_n S_{n-1}}{B_n}(\Delta m_n/F_{n-1}) = 0. \qquad (2.18)$$

(тут використали F_{n-1}- вимірність випадкових величин γ_nпа і S_{n-1}).

Отже,

$$EM_N = EM_0 = M_0 = \frac{X_0}{B_0} = \frac{X}{B_0}.$$

Оскільки

$$M_N = \frac{X_N}{B_N} = \frac{X_N}{B_0(1+a)^N},$$

то
$$E^*X_N = x(1+a)^N. \qquad (2.19)$$

Формула (2.19) дає середнє значення капіталу X_N відносно міри P^*.

Зверніть увагу на те, що середнє значення E^*X_N не залежить від вартості акцій.

Яку мету може поставити перед собою інвестор і як досягти цієї мети в рамках даної моделі.

Розділ 3. ХЕДЖ-СТРАТЕГІЯ ІНВЕСТОРА. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ.

3.1. Опціони Європейського типу. Дискретний час.

Останнім часом на міжнародних ринках все ширше розповсюджуються ф'ючерсні операції - тобто операції, що пов'язані не з поточними цінами, а з цінами на товар, які будуть в деякий момент у майбутньому (нагадаємо, що товаром може бути не тільки руда, пшениця, цукор, кофе, а й цінні папери, валюта різних країн і та інше)

З точки зору економічної ефективності такі угоди можуть до певної міри знизити рівень ризику, що пов'язаний з невизначеністю майбутніх цін (звичайно, ціни можна до деякої міри спрогнозувати, але неможливо точно вказати їх майбутні значення).

Якщо можна буде якимось чином знизити цей ризик або якщо зменшиться невизначеність цін, то в більшості випадків буде недоцільним звертатися на ф'ючерсні ринки.

Але в сучасних умовах такі можливості дуже обмежені, тому є потреба у ф'ючерсних угодах.

Інвестор, що виходить на ф'ючерсний ринок, може спробувати за рахунок оптимізації операцій на біржі вкласти свої кошти найкращим (з певної точки зору) чином.

Така оптимальна поведінка називається хеджем, або хедж-стратегією.

Призначення хедж-стратегії - найкращим чином застрахуватися від можливих збитків, викликаних можливою зміною цін.

Чи будуть ціни у майбутньому такими, як вказано у ф'ючерсних угодах?

Частково так, частково ні. Але в середньому ф'ючерсні ціни такі самі, як прогнозовані за допомогою математичних методів майбутні ціни.

Спеціалісти (економісти, менеджери, виробничники та інші) іноді кажуть, що ф'ючерсні ціни є ринковим прогнозом майбутніх цін.

За рахунок чого біржові спекулянти можуть мати прибуток, іноді дуже значний?

За рахунок значної невизначеності і змінності реальних цін, а також ризику.

Слід зазначити, що хеджування не всесильне.

Тобто повної гарантії на майбутнє одержати неможливо, завжди існує ймовірність втрати чистини коштів.

Розглянемо хедж-стратегію інвестора, що виходить на біржу з опціонами купівлі або продажу (ситуація з інвестуванням купівлі або продажу товарів аналогічна).

Йому необхідно розрахувати оптимальну (раціональну, справедливу) ціну, яку покупець повинен заплатити за придбання опціону, і знайти оптимальні біржеві операції (хедж-стратегії), які повинен проводити продавець опціону, якщо він ставить перед собою мету виконати гарантовані платежі, зафіксовані умовами контракту.

В моделі Блека-Шоулса контракти з опціонами відбуваються на *(B,S)*-ринку, який складається:

- з банківського рахунку $B = (B_t, t \geq 0)$ з невипадковим диференціалом $dB_t = aB_t dt, \quad B_0 > 0$ (звідки $B_t = B_0 \, exp(at)$)

- і акцій $S = (S_t, t \geq 0)$ із стохастичним диференціалом $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 > 0$.

Звідки $S_t = S_0 \, exp(\mu t) \, exp\left\{\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right\}$.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1) відсоткова ставка a в банківському рахунку B_t постійна;

2) коефіцієнти росту μ і змінності (волатильності) σ також постійні;

3) нема "сторонніх" платежів, тобто платежів податків, виплат дивідендів тощо.

Ці умови є обмеженнями, тому що відсоткова ставка a може залежати від часу *t*, а коефіцієнти μ і σ можуть залежати як від часу *t*, так і від вартості акцій S_t.

Нехай "покупець" придбав контракт з опціоном купівлі і сплатив за це *X* умовних грошових одиниць.

"Продавець", який одержав цю платню (премію) x, стає на *(B,S)*-ринку інвестором і хоче розмістити свій "початковий капітал" x з найбільшим прибутком.

Зокрема, він знає, що в момент часу T в майбутньому "покупець" зможе купити акції за фіксованою вартістю K, обумовленою в момент заключення контракту, а потім миттєво продати їх тому ж продавцеві за вартістю S_T, якщо $S_t > K$. Таким чином, в момент T "продавець" повинен мати, принаймні, суму грошей $S_t - K$.

Якщо $S_t \leq K$, то "покупець" не буде купувати акцій, і "продавець" не буде сплачувати гроші.

Введемо позначення:

$$a^+ = max(a, 0) = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a \leq 0. \end{cases}$$

З попереднього випливає, що в момент часу T "продавець" повинен мати, принаймні, суму грошей $f_T = (S_T - K)^+$.

Інвестор діє на *(B,S)*-ринку таким чином, що в момент часу t він має β_t банківських облігацій і γ_t акцій.

Означення 1. Сукупність $\pi = \pi_t = (\beta_t, \gamma_t), \quad t \geq 0$ називається портфелем цінних паперів, або стратегією інвестора.

Стратегії π відповідає капіталу інвестора $X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t$, де B_t- вартість облігації, S_t - вартість акції в момент часу t, $\beta_t B_t$ - сума на банківському рахунку, $\gamma_t S_t$ - сума в акціях.

Означення 2. Стратегія π називається **хеджем** (hedge), якщо з ймовірністю 1 $X_T \geq f_T$ при умові, що $X_0 = x$ (нагадаємо, що $f_T = (S_T - K)^+$).

Означення 3. Те мінімальне значення x, для якого можлива побудова хедж-стратегії, називається раціональною (справедливою) вартістю контракту з опціоном, а відповідна хедж-стратегія (або просто хедж) називається мінімальною.

Основна задача розрахунку опціонів полягає у відшуканні мінімального значення x (воно позначається C_T) і мінімального хеджу (він позначається π^*).

Блек і Шоулс одержали результат, згідно з яким для стандартного опціону купівлі Європейського типу раціональна вартість дорівнює

$$C_T = S_0\Phi(d_+) - K\,exp(-aT)\,\Phi(d_-),$$

де $$d_\pm = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+T\left(a\pm\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}},$$

$\Phi(x)$ - функція стандартного нормального розподілу,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy.$$

Зауважимо, що цей розрахунок зроблено при додатковому припущенні

4) величини і знаки β_t і γ_t можуть бути довільними (від'ємні знаки відповідають взяттю позики).

Розглянемо детальніше, з точки зору хеджу, *(B,S)*-ринок з дискретним часом.

Нехай X_n, $n=0,1,2,\ldots,N$ - капітал інвестора в момент часу $t=n$.

Інвестор розв'язує таку задачу: в деякий фіксований момент часу $t=N$ в майбутньому довести свій капітал до величини не меншої, ніж значення відомої функції

$$f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N),$$

де S_i - значення вартості акції в момент $t=i$.

Для цього він обирає стратегію $\pi = \pi_n = (\beta_n, \gamma_n), \quad 0 \le n \le N.$

Припускаємо, що формування капіталу інвестора $X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$ відбувається тільки за рахунок зміни в цінах акцій і облігацій, тобто, виконується умова 3).

Далі розглядаємо лише самофінансовані стратегії.

Для того щоб підкреслити залежність капіталу X_n від стратегії π, ставимо відповідний індекс: X_n^π.

Оскільки вартості акцій S_n є випадковими величинами, то і капітал X_n^{π} також є випадковою величиною.

Тому вважаємо, що є ймовірнісний простір (Ω, F, P) і $X_n^{\pi} = X_n^{\pi}(\omega),\ \omega \in \Omega.$

Означення 4. Кажуть, що для фіксованого *x>0* невід'ємної функції $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ самофінансована стратегія $\pi = (\pi_n),\ 0 \le n \le N$ є (x, f_N)-хеджем, якщо для будь-якого $\omega \in \Omega$ виконуються дві умови:

1) початковий капітал X_0^{π} дорівнює x;

2) в момент часу $t=N$ капітал не менший, ніж f_N:

$$X_N^{\pi}(\omega) \ge f_N\big(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega)\big),$$

де $S_n(\omega)$ змінюється за правилом $S_n(\omega) = \big(1 + \rho_1(\omega)\big)\ldots\big(1 + \rho(\omega)\big)S_0,$

а випадкові величини $\rho_i(\omega)$ можуть приймати два значення α і $\beta,\ -1 < \alpha < \beta$ з ймовірностями $0 < q < 1,\quad 0 < p = 1 - q < 1$ відповідно;

S_0 - невипадкова, додатна постійна.

Означення 5. Якщо в умові 2) означення 4 має місце рівність $X_N^{\pi}(\omega) = f_N\big(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega)\big)$ для всіх $\omega \in \Omega$, то кажуть, що стратегія π є мінімальним (x, f_N)-хеджем.

Позначимо $\Pi(x, f_N)$ сукупність всіх самофінансованих хеджів π.

Ясно, що чим менша величина початкового капіталу x, тим вужча множина $\Pi(x, f_N)$ хеджів. Для занадто малих *x* може статися так, що (x, f_N)-хеджів просто нема, тобто $\Pi(x, f_N) = \emptyset$ ($\varnothing$ - символ порожньої множини).

Означення 6. Величина $C_N = inf\{x > 0 : \Pi(x, f_N) \ne \emptyset\}$ називається інвестиційною вартістю (ціною), що гарантує в момент $t=N$ одержання капіталу не меншого, ніж $f_N\big(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega)\big)$ в будь-якому випадку.

Зміст величини C_N очевидний - це мінімальний початковий капітал, який гарантує інвестору можливість так обрати портфель, щоб в момент $t=N$ капітал перевищував або принаймні дорівнював запланованій величині f_N.

Все вищесказане відносилось до опціонів Європейського типу, в яких фіксуються як момент виконання N, так і вигляд платіжної функції f_N.

Але в фінансовій практиці розповсюджені також опціони Американського типу, в яких момент виконання опціону може бути довільним з множини моментів часу $t \in \{0,1,2,\dots,N\}$, які обумовлені заздалегідь.

3.2. Розрахунок вартості та хедж-стратегій для опціонів європейського типу. Дискретний час.

Нагадаємо, що розглядається *(B,S)*-ринок облігацій та акцій, вартість яких є $B = \{B_n, 0 \le n \le N\}$ (банківський рахунок) та $S = \{S_n, 0 \le n \le N\}$, початкові значення - B_0 та S_0 відповідно і на *Ω* задано сімейство ймовірнісних мір $P = \{P\}$ причому відносно кожної з мір P послідовність $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N)$ - це незалежні однаково розподілені випадкові величини

$P(\rho_1 = \beta) = p, \quad P(\rho_1 = \alpha) = q = 1 - p,$

$0 < p < 1, \quad -1 < \alpha < a < \beta.$

Нехай $\pi = (\pi_n,\ 0 \le n \le N)$ - самофінансована стратегія, $x^\pi = (x_n^\pi,\ 0 \le n \le N)$ - капітал, що відповідає цій стратегії, $f_N = f_N\big(S_0, S_1(\omega), \dots, S_N(\omega)\big)$ - фіксована невід'ємна функція.

Нехай також E^* позначає математичне сподівання (середнє) відносно міри P^* такої, що

$p = p^* = \frac{a-\alpha}{\beta-\alpha}, \ \ P(\rho_1 = \beta) = p^*.$

Теорема 1.[2] Для того, щоб самофінансована стратегія π була мінімальним (x, f_N)-хеджем, необхідно і достатньо, щоб початковий капітал *x* дорівнював

$$x = (1+a)^{-N} E^* f_N\big(S_0, S_1(\omega), \dots, S_N(\omega)\big).$$

Доведення. Необхідність. Нормований капітал $M_n = \frac{X_n}{B_n}$ утворює мартингал.

Але мартингал має постійне математичне сподівання, отже,

$$E^* M_N = E^* M_0 = M_0 = \frac{x}{B_0}.$$

Крім того,

$$M_N = \frac{X_N}{B_N} = \frac{X_N}{B_0 (1+a)^N},$$

звідки для будь-якого (x, f_N)-хеджу $(1+a)^{-N} E^* \times X_N = x$.

Оскільки $f_N \leq X_N$, то $(1+a)^{-N}E^* f_N \leq x$.

Якщо ж (x, f_N)-хедж є мінімальним, тобто $f_N = X_N$, то маємо рівність: $(1+a)^{-N}E^* f_N = x$. Необхідність доведено.

Достатність доводиться складніше, тому пропустимо.

Наслідок. В умовах *(B,S)*-ринку справедлива ціна опціону Європейського типу дорівнює

$$C_N = (1+a)^{-N}E^* f_N,$$

де N -- фіксований момент виконання опціону,

$f_N = f_N(S_0, S_1, \dots, S_N)$ - фіксована функція платежів.

Тут E^* - математичне сподівання відносно такої міри P^*, що

$$P^*(\rho_1 = \beta) = p^* = \frac{a-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

Мартингал $Y_n = M_n^* - M_0^*$, з нульовим середнім допускає розклад за "базисним" мартингалом $m_n = \sum_{k=1}^{n}(\rho_k - a)$, у якого $\Delta m_n = \rho_n - a$:

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\rho_1, \dots, \rho_{k-1})\, \Delta m_k, \qquad (3.1)$$

Існує мінімальний самофінансований (C_N, f_N)- хедж

$$\pi^* = (\pi_n^*, \quad 0 \leq n \leq N) = (\beta_n^*, \gamma_n^*, \quad 0 \leq n \leq N)$$

такий, що $\gamma_n^* = \frac{\alpha_n B_n}{S_{n-1}}, \quad \beta_n^* = \frac{x_{n-1}^{\pi^*} - \gamma_n^* S_{n-1}}{B_{n-1}},$

α_n береться з розкладу (3.1), і при цьому значення капіталу в момент часу $t=n$ дорівнює

$$X_n^{\pi^*} = (1+a)^{n-N}E^*[f_N | F_n].$$

де функції α_k є F_{k-1}-вимірними випадковими функціями, α_1 - стала.

Розглянемо тепер частковий і більш простий випадок, коли функція платежів f_N залежить не від всієї "траєкторії" $S_0, S_1, \dots, S_N$, а лише від вартості акції S_N в момент виконання опціону, тобто $f_N = f(S_N)$.

Наприклад, для Європейського опціону купівлі $f_N = (S_N - k)^+ = max(S_N - K, 0)$, а для відповідного опціону продажу $f_N = (k - S_N)^+ =$

$max(k - S_N, 0)$, де K - договірна вартість, що її обумовлено в момент придбання опціону, і за якою в момент N будуть купуватися або продаватися акції.

В цьому випадку можна, за допомогою біноміального розподілу, безпосередньо підрахувати $E^* f_N$ і, таким чином, спростити формулу справедливої ціни опціону: $C_N = (1 + a)^{-N} E^* f_N$.

Сформулюємо відповідний результат без доведення.

Розглянемо функцію

$$F_n(x, p) = \sum_{k=0}^{n} f(x(1+\beta)^k (1+\alpha)^{n-k}) C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}, \qquad (3.2)$$

C_n^k- це число комбінацій з n по k, $C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$, $C_n^0 = 1$.

Теорема 2.[2] Для опціону Європейського типу з функцією платежів $f_N = f(S_N)$ мають місце наступні твердження:

1. Справедлива ціна опціону дорівнює $C_N = (1 + a)^{-N} F_N(S_0, p^*)$, де $p^* = \frac{a-\alpha}{\beta-\alpha}$.

2. Існує самофінансований мінімальний хедж

$$\pi^* = (\pi_n^*, \quad 0 \le n \le N) = (\beta_n^*, \gamma_n^*, \quad 0 \le n \le N),$$

причому

$$\gamma_n^* = \frac{(1+a)^{n-N}}{S_{n-1}(\beta-\alpha)} [F_{N-n}(S_{n-1}(1+\beta), p^*) - F_{N-n}(S_{n-1}(1+\alpha), p^*)],$$

$$\beta_n^* = \frac{1}{B_N} (F_{N-n+1}(S_{n-1}, p^*) -$$

$$-(1+a)[F_{N-n}(S_{n-1}(1+\beta), p^*) - F_{N-n}(S_{n-1}(1+\alpha), p^*)]).$$

3. Капітал X_n^* в момент n, $(0 \le n \le N)$ для мінімального хеджу дорівнює $X_n^* = (1 + a)^{n-N} F_{N-n}(S_n, p^*)$.

Розглянемо тепер той випадок, коли $f(S_N) = (S_N - K)^+$, тобто,

$f(x) = (x - K)^+$.

Тоді в формулі (3.2)

$$f(S_0(1+\beta)^k (1+\alpha)^{N-k}) = \left[S_0(1+\alpha)^N \left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^k - K\right]^+,$$

отже,

$F_N(S_0, p^*) = \sum_{k=0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \left[S_0(1+\alpha)^N \left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^k - K \right]^+.$

Зауважимо, що оскільки $\beta > \alpha$, тобто $\frac{1+\beta}{1+\alpha} > 1$, то $\left[S_0(1+\alpha)^N \left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^k - K \right]$ - це вираз, що монотонно зростає при зростанні k.

Тому можливі два випадки.

Випадок 1. Починаючи з деякого числа k_0, яке не перевищує N,

$S_0(1+\alpha)^N \left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^k > K.$

Тоді

$$\left[S_0(1+\alpha)^N \left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^k - K \right]^+ =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad 0 \le k < k_0, \\ S_0(1+\alpha)^N \left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^k - K, \quad k_0 \le k \le N, \end{cases}$$

і за теоремою 2

$$C_N = (1+a)^{-N} F_N(S_0, p^*) =$$

$$= (1+a)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \left[S_0(1+\alpha)^N \left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^k - K \right] =$$

$$= S_0 \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \left(\frac{1+\alpha}{1+a}\right)^N \left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^k -$$

$$-K(1+a)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k}. \tag{3.3}$$

Введемо позначення

$\tilde{p} = \frac{1+\beta}{1+a} p^*,$

$B(j, N, p^*) = \sum_{k=j}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k}.$

Тоді перший доданок в правій частині (3.3) дорівнює

$A1 = S_0 \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k \left(\left(\frac{1+\beta}{1+a}\right) p^* \right)^k \left[\left(\frac{1+\alpha}{1+a}\right)(1-p^*) \right]^{N-k}.$

Зробимо ще деякі перетворення

$$\frac{1+\alpha}{1+a}(1-p^*)=\frac{1+\alpha}{1+a}\left(1-\frac{a-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\frac{1+\alpha}{1+a}-\frac{1+\alpha}{1+a}\left(\frac{a-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=$$

$$=1+\frac{\alpha-a}{1+a}-\frac{1+\alpha}{1+a}\left(\frac{a-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=1-\frac{a-\alpha}{1+a}\left(1+\frac{1+\alpha}{\beta-\alpha}\right)=$$

$$=1-\frac{a-\alpha}{1+a}\left(\frac{1+\beta}{\beta-\alpha}\right)=1-p^*\frac{1+\beta}{1+a}=1-\tilde{p}.$$

Нарешті, одержимо, що

$$A1=S_0\sum_{k=k_0}^{N}C_N^k(\tilde{p})^k[(1-\tilde{p})]^{N-k}=S_0B(k_0,N,\tilde{p})$$

Другий доданок в правій частині (3.3) дорівнює

$$A2=K(1+a)^{-N}B(k_0,N,p^*),$$

отже,

$$C_N=S_0B(k_0,N,\tilde{p})-K(1+a)^{-N}B(k_0,N,p^*).$$

Знайдемо формулу для обчислення k_0.

За нашими міркуваннями k_0 - це найменше ціле число, для якого

$$S_0(1+\alpha)^N\left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^{k_0}>K. \tag{3.3}$$

Логарифмуючи обидві частини (3.3), одержимо, що

$$ln(S_0(1+\alpha)^N)+k_0\,ln\left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)>ln(K),$$

звідки
$$k_0>\frac{ln(K)-ln\left(S_0(1+\alpha)^N\right)}{ln\left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)}.$$

Але найменше ціле число, яке перевищує задане число *x*, дорівнює *([x]+1)*, де *[x]* - ціла частина числа *x*, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує *x*.

Тому

$$k_0=1+\left[\frac{ln(K)-ln(S_0(1+\alpha)^N)}{ln(1+\beta)-ln(1+\alpha)}\right].$$

Випадок 2. Для всіх $k,\quad (0 \le k \le N)$ виконується нерівність

$$S_0(1+\alpha)^N\left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^k < K.$$

Тоді $F_N(S_0, p^*) = 0$, отже, справедлива ціна опціону C_N дорівнює нулю.

Це означає, що опціон просто не варто купувати.

Зведемо тепер результати випадків 1 і 2 в теорему.

Теорема 3.[2] Справедлива ціна C_N Європейського опціону купівлі з функцією платежів $f(S_N) = (S_N - K)^+$ дорівнює

1. $C_N = S_0 B(k_0, N, \tilde{p}) - K(1+a)^{-N} B(k_0, N, p^*),$

якщо число $k_0 = 1 + \left[\frac{ln(K) - ln\left(S_0(1+\alpha)^N\right)}{ln(1+\beta) - ln(1+\alpha)}\right].$

не перевищує N.

2. $C_N = 0$, якщо $k_0 > N$.

Встановимо тепер зв'язок між справедливою ціною C_N розглянутого вище опціону купівлі і ціною стандартного Європейського опціону продажу з функцією платежів $f(S_N) = (K - S_N)^+$.

Для цього запишемо таку тотожність;

$(-x)^+ = max(-x, 0) = max(x, 0) - x = x^+ - x.$

звідки $(K - S_N)^+ = (S_N - K)^+ - S_N + K.$

Якщо позначити справедливу ціну опціону продажу через P_N, то

$P_N = E^*(K - S_N)^+(1+a)^{-N} =$

$= (1+a)^{-N}[E^*((S_N - K)^+ - S_N) + K] =$

$= (1+a)^{-N}K + C_N - (1+a)^{-N}E^*S_N.$

Оскільки $S_N = S_0(1+\rho_1)(1+\rho_2)\ldots(1+\rho_N)$, то зважаючи на незалежність і однаковий розподіл випадкових величин $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$, маємо, що

$$E^*S_N = S_0[E^*(1+\rho_1)]^N =$$

$$= S_0\left(1 + \beta\frac{a-\alpha}{\beta-\alpha} + \alpha\left(1 - \frac{a-\alpha}{\beta-\alpha}\right)\right)^N = S_0(1+a)^N.$$

Остаточно

$$P_N = (1+a)^{-N}K + C_N - S_0. \tag{3.5}$$

Рівність (3.5), що пов'язує справедливі ціни опціонів купівлі та продажу, називають паритетом "к о л л - п у т" (купівлі-продажу).

3.3. Приклад розрахунку справедливої ціни опціону і хедж-стратегії Європейського типу.

Розглядаємо опціони на іноземну валюту.

Нехай S_n, $(0 \le n \le N)$ - це випадкова еволюція вартості 100 доларів США (USA), що вимірюється у шведських кронах.

Нехай $S_0=900$ шведських крон (SKR) за 100 доларів і в момент $n=1$ ціна може дорівнювати 1050 SKR (тобто курс долара підвищився) або 600 SKR (тобто курс долара зменшився).

Тоді $S_1 = S_0(1+\rho_1)$, звідки $(1+\rho_1) = \frac{S_1}{S_0}$, $\rho_1 = \frac{S_1}{S_0} - 1$, тобто випадкова величина ρ_1 може мати два значення: $\rho_1 = \frac{1050}{900} - 1 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$ (курс долара підвищився) або $\rho_1 = \frac{600}{900} - 1 = -\frac{1}{3}$ (курс долара зменшився).

Нехай банківський рахунок не змінюється: $B_n = B_0 = 1$, $a = 0$ (з фінансової точки зору це означає, що банк не нараховує процентів на внесок і не бере процентів за позику).

1. Розрахунок справедливої ціни. Нехай $N = 1$, $K = 900\ SKR$, $f(S_1) = (S_1 - K)^+ = (S_1 - 900)^+$.

Це означає, що при підвищенні курсу долара покупець Європейського опціону купівлі одержить (1050 – 900)=150 SKR, при падінні курсу

$$f(S_1) = max(0{,}600 - 900) = 0.$$

а) припустимо, що

$$p = P\left\{\rho_1 = \frac{1}{6}\right\} = q = P\left\{\rho_1 = -\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Тоді справедлива ціна опціону дорівнює

$$C_N = C_1 = Ef(S_1) = 150 * \frac{1}{2} + 0 * \frac{1}{2} = 75 \rightleftarrows \ SKR.$$

б) в нашому прикладі $\beta = \frac{1}{6}, \quad \alpha = -\frac{1}{3}, \quad a = 0.$

Тому ймовірність

$$p^* = \frac{a-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{0-\left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Якщо припустити, що $P\left\{\rho_1 = \frac{1}{6}\right\} = p^* = \frac{2}{3}$, $P\left\{\rho_1 = -\frac{1}{3}\right\} = 1 - p^* = \frac{1}{3}$, то справедлива ціна опціону дорівнює

$$C_N^* = C_1^* = Ef(S_1) = 150 * \frac{2}{3} + 0 * \frac{1}{3} = 100 \rightleftarrows \ SKR.$$

Той самий результат одержуємо, використавши формулу

$$C_N = (1+a)^{-N} F_N(S_0, p^*) =$$

$$= (1+a)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \left[S_0 (1+\alpha)^N \left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^k - K\right] =$$

$$= S_0 \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \left(\frac{1+\alpha}{1+a}\right)^N \left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right)^k -$$

$-K(1+a)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k}$.,

при цьому $k_0=1$ і отримаємо

$$C_1^* = S_0 \rho^* (1+\beta) - Kp^* = S_0 p^* \beta = 900 * \frac{2}{3} * \frac{1}{6} = 100 \rightleftarrows \ SKR.$$

2. **Розрахунок хедж-стратегії інвестора**. В даному випадку інвестор - це продавець опціону купівлі. Якщо справедливу ціну розраховано за ймовірністю p^*, то в початковий момент часу інвестор одержав від покупця суму в 100 SKR, і це його початковий капітал X_0.

Точніше, $X_0=100$, $\beta_0 = 0, \quad B_0 = 1, \quad S_0 = 900, \quad \gamma_0 = \frac{X_0}{S_0} = \frac{100}{900} = \frac{1}{9}.$

Перед моментом часу $n=1$ продавець повинен перетворити свій портфель (β_0, γ_0) в портфель (β_1, γ_1) таким чином, щоб після об'яви значення була б можливість виконати умови контракту, тобто заплатити гроші покупцю і повернути борг (борг відповідає від'ємним значенням (β_n) і (γ_n), якщо борг мав місце).

Підрахуємо тепер β_1^* і γ_1^*, що відповідають мінімальному самофінансованому хеджу(теорема 2).

Одержимо:

$$\gamma_1^* = \frac{F_0(S_0(1+\beta);p^*) - F_0(S_0(1+\alpha);p^*)}{S_0(\beta-\alpha)} =$$

$$= \frac{f\big(S_0(1+\beta)\big) - f\big(S_0(1+\alpha)\big)}{S_0(\beta-\alpha)} = \frac{f\big(S_0(1+\beta)\big)}{S_0(\beta-\alpha)} =$$

$$= \frac{max\{0, S_0(1+\beta)-K\}}{S_0(\beta-\alpha)} = \frac{\beta}{\beta-\alpha} = \frac{1/_6}{1/_6 + 1/_3} = \frac{1}{3}.$$

Оскільки $X_0 = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0$, $B_0 = 1$, то можна знайти

$$\beta_1^* = X_0 - \gamma_1^* S_0 = 100 - \tfrac{1}{3}900 = -200.$$

Пояснимо зміст цих значень $\beta_1^* = -200$ та $\gamma_1^* = \frac{1}{3}$.

Від'ємність величини β_1^* означає, що інвестор (тобто продавець опціону) бере позику в розмірі 200 SKR.

Таким чином, він має $X_0 - \beta_1^* B_0 = 100 + 200 = 300 SKR$. Значення $\gamma_1^* = \frac{1}{3}$ означає, що на ці 300 SKR він може придбати $33\frac{1}{3} USD$ (за курсом *100 USD = 900 SKR*).

Портфель інвестора: $\left(0, \frac{1}{9}\right) \to \left(-200, \frac{1}{3}\right)$.

Розглянемо тепер, що відбувається після моменту *N=1*, коли було оголошено новий курс долара.

Можливі два варіанти (в зв'язку з попередніми припущеннями).

а) курс долара піднявся $\left(\rho_1 = \beta = \frac{1}{6}\right)$, тобто в момент часу *N=1:* 100 USD дорівнюють 1050 SKR.

В цьому випадку інвестор повинен виплатити покупцю суму в розмірі $f(S_1) = max(0{,}1050) = 150 SKR$.

І він справді може це зробити, оскільки його капітал в момент часу *N=1* дорівнює $X_1 = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1 = -200 + \frac{1}{3}1500 = 150 SKR$.

Тобто капітал $\gamma_1^* S_1 = 350SKR$ є достатнім для сплати 150 SKR покупцю і повернення боргу в 200 SKR на банківський рахунок.

b) курс долара зменшився $\left(\rho_1 = \alpha = -\frac{1}{3}\right)$, тобто в момент часу $N=1$ маємо що 100 USD дорівнюють 600 SKR. В цьому випадку інвестор нічого не сплачує покупцю, тому що $f(S_1) = max(0{,}600 - 900) = 0$, але повинен перегнути борг 200 SKR на банківський рахунок.

Він знову ж таки може це зробити, оскільки його капітал дорівнює

$$X_1 = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1 = -200 + \frac{1}{3}600 = 0.$$

Тобто інвестор одержує $\gamma_1^* S_1 = 200SKR$ і, повернувши такий самий борг, має нульовий капітал.

3.4. Розрахунок вартості, хедж-стратегії та моменту виконання для опціонів американського типу. Дискретний час.

В фінансовій практиці розповсюджені також опціони Американського типу, в яких момент виконання опціону може бути довільним з множини моментів часу $t \in \{0,1,2,\ldots,N\}$, які обумовлені заздалегідь.

Цей момент виконання залежить від випадкових обставин, і значить, є випадковою величиною.

Позначимо через $r = r(\omega)$ цей випадковий момент подання опціону Американського типу до виконання, $r \in \{1,2,\ldots,N\}$.

Оскільки рішення "покупця" опціону чи йому подавати опціон до виконання в момент часу n (тобто прийняти $r(\omega) = n$), чи почекати ще і продовжити його дію (тобто прийняти $r(\omega) > n$), може залежати тільки від ситуації на ринку до моменту n включно, то випадкова величина r "не залежить від майбутнього", тобто є моментом зупинки.

Зауважимо, що "випадковість" *(B,S)*-ринку полягає у тому, що випадковими є вартості акцій $S_0, S_1, \dots, S_N$, тому можна вважати, що $F = \sigma\{S_0, S_1, \dots, S_N\}$ (найменша σ-алгебра, породжена випадковими величинами $S_0, S_1, \dots, S_N$).

Якщо позначити

$F_n = \sigma\{S_0, S_1, \dots, S_n\}, \quad 0 \le n \le N,$

то для будь-якого $n \in \{0,1, \dots, N\}$ подія $\{r \le n\} \in F_n$.

Крім того, в умові контракту з опціоном Американського типу задається послідовність функцій $f = (f_0, f_1, \dots, f_N)$, де $f_n = f_n(S_0, S_1, \dots, S_n)$ - це виплата "покупцю" опціону, якщо той подає опціон до виконання в момент часу n, а ціни на акції у відповідні моменти дорівнюють $S_0, S_1, \dots, S_n$.

Таким чином, в момент $r = r(\omega)$ подання опціону до виконання, згідно з контрактом, продавець повинен бути готовим до платежу, який дорівнює $f_r = f_{r(\omega)}\left(S_0, S_1(\omega), \dots, S_{r(\omega)}(\omega)\right)$ (замість n ми всюди підставили $r = r(\omega)$).

Тому він повинен обирати свою стратегію π таким чином, щоб в будь-який момент $r = r(\omega)$ капітал $X_{r(\omega)}^{\pi}$ був би не менше ніж f_r.

Оскільки r може прийняти будь-яке значення з множини $\{0,1,2, \dots, N\}$, то фактично вимагається, щоб

$X_n^{\pi} \ge f_n, \ 0 \le n \le N.$

Означення 7. Стратегія $\pi = (\pi_n, \ 0 \le n \le N)$ називається (x, f, N)-хеджем (хеджем Американського типу) для фіксованого *x>0* і фіксованого набору функцій платежів $f_n = f_n(S_0, S_1, \dots, S_n), \ 0 \le n \le N,$ якщо для будь-яких $\omega \in \Omega$

1) початковий капітал X_0^{π} дорівнює *x*;

2) для будь-якого моменту часу $0 \le n \le N$ капітал не менший ніж f_n:

$$X_n(\omega) \ge f_n(S_0, S_1(\omega), \dots, S_n(\omega)), \quad \omega \in \Omega, \quad 0 \le n \le N \cdot$$

Сукупність (x, f, N)-хеджів позначатимемо $\Pi(x, f, N)$.

Якщо стратегія π задовольняє умову 2), то для будь-якого моменту зупинки $r = r(\omega) \le N$

$x_{r(\omega)} \ge f_{r(\omega)}\left(S_0, S_1(\omega), \dots, S_{r(\omega)}(\omega)\right).$

Якщо існує такий момент зупинки r, що має місце рівність: $X_{r(\omega)}(\omega) = f_{r(\omega)}\left(S_0, S_1(\omega), \dots, S_{r(\omega)}(\omega)\right)$, то (x, f, N)-хедж називають мінімальним.

Означення 8. Число C_N^*, яке визначається рівністю

$C_N^* = inf\{x > 0: \Pi(x, f, N) \neq \emptyset\}$,

називається справедливою вартістю опціону Американського типу з крайнім строком виконання N і функціями платежів $\{f_n,\ 0 \leq n \leq N\}$.

Якщо ми маємо справу з опціоном Американського типу, в якому "покупець" може подати опціон до виконання в будь-який момент від 0 до N, то постає питання: а в який же момент найвигідніше для "покупця" подати опціон до виконання?

Якщо покупець подає опціон до виконання в момент r, то він одержить від продавця плату f_r.

Нехай на *(B,S)*- ринку існує самофінансована стратегія π з початковим капіталом C_N^*, яка приводить в момент τ до капіталу $X_r > f_r$.

Тоді це означає, що «покупець» робить нерозумно, якщо подає опціон до виконання в момент r, оскільки замість покупки опціону йому було краще самому проводити стратегію π і в момент r одержати капітал X_r, більший ніж f_r.

В зв'язку з цим дамо таке означення раціонального моменту подання опціону до виконання.

Означення 9. Момент зупинки $r^*(\omega)$ будемо називати раціональним, або розумним, моментом виконання Американського опціону, якщо при початковому капіталі C_N^*, для будь-якої самофінансованої стратегії $\pi \in SF$, яка має властивість

$$X_{r^*(\omega)}(\omega) \geq f_{r^*(\omega)}\left(S_0, S_1(\omega), \dots, S_{r^*(\omega)}(\omega)\right), \quad \omega \in \Omega,$$

насправді виконується рівність

$$X_{r^*(\omega)}(\omega) = f_{r^*(\omega)}\left(S_0, S_1(\omega), \dots, S_{r^*(\omega)}(\omega)\right), \quad \omega \in \Omega.$$

Зауваження. Всі випадкові величини, що розглядаються $(r(\omega), S_i(\omega)$ тощо), задані на одному ймовірнісному просторі (Ω, F, P).

Як найпростішим чином задати Ω?

Розглянемо послідовність випадкових величин:

$S_0 > 0,$

$S_1 = (1+\rho_1)S_0,$

$S_2 = (1+\rho_1)(1+\rho_2)S_0,$

$\ldots,$

$S_N = (1+\rho_1)(1+\rho_2)\ldots(1+\rho_N)S_0.$

Тут випадкові величини $\rho_1, \ldots, \rho_N$ незалежні в сукупності, однаково розподілені і приймають кожна лише два значення α і β з ймовірностями q та p=*1*-q, відповідно.

Тому з кожною випадковою величиною ρ_n логічно пов'язати два випадки, або два елементи імовірнісного простору $\{\omega_1, \omega_2\}$ так, що $\rho_n(\omega_1) = \alpha,\ \rho_n(\omega_2) = \beta.$

Для спрощення покладемо $\omega_1 = -1,\quad \omega_2 = 1.$ З усім ланцюгом $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N)$ тоді буде пов'язаний елемент ймовірнісного простору, що складається з N плюс або мінус одиниць.

Тому далі вважаємо, що

$\Omega = \{-1,1\} \times \{-1,1\} \times \ldots \times \{-1,1\} = \{-1,1\}^N.$

Крім того, на практиці задати наперед значення ймовірностей p і q=*1*-p досить важко.

Тому вважаємо, що на Ω задано не один розподіл ймовірностей P, а цілу сім'ю таких розподілів $\boldsymbol{P}$.

Припущення $0 < P\{\rho = \alpha\} < 1$, $0 < P\{\rho_n = \beta\} < 1$ зберігаються.

Згідно з означенням, покупець може подати опціон до виконання в будь-який випадковий момент часу $r = r(\omega),\quad 0 \le r \le N$, причому момент r повинен бути моментом зупинки, тобто для будь-якого $0 \le r \le N$ подія $\{r \le n\}$ належить до σ -алгебри

$$F_n = \sigma\{S_0, S_1, \ldots, S_n\},\quad S_k = S_k(\omega)$$

- це випадкова вартість акції в момент t=k.

Для опціонів американського типу задається ще послідовність невід'ємних функцій платежів

$f_n = f_n(S_0, S_1, \ldots, S_n), \quad 0 \le n \le N.$

Умови контракту з опціоном такі, що при поданні опціону до виконання в момент часу $r = r(\omega)$ продавець повинен сплатити покупцеві суму $f_r = f_r\left(S_0, S_1, \ldots, S_{r(\omega)}\right)$.

Нагадаємо, що метою продавця є вибір такої стратегії π, що він справді зможе заплатити зумовлену суму, тобто його капітал X_r^π буде задовольняти умову $X_r^\pi \ge f_r(S_0, S_1, \ldots, S_r)$ для будь-якого моменту зупинки r.

Очевидно, що для виконання останньої нерівності достатньо, щоб для кожного $0 \le n \le N$

$X_n^\pi \ge f_r(S_0, S_1, \ldots, S_n).$ (3.6)

Знайдемо тепер достатні умови на початковий капітал x та послідовність функцій $\{f_n,\ 0 \le n \le N\}$ для того, щоб існувала стратегія π, при якій виконується (3.6).

Оскільки вибір моменту r повинен бути оптимальним в деякому сенсі, то потрібно звернутись до теорії оптимальних моментів зупинки.

В подальшій роботі потрібні наступні результати.

Лема 1.[2] Нехай випадкова послідовність $R_n, \quad 0 \le n \le N$ має вигляд

$R_n = \sup\limits_{n \le r \le N} E(X_r | F_n),$

де $\{X_n,\ 0 \le n \le N\}$ - послідовність інтегрованих випадкових величин,

sup береться по всіх моментах зупинки $r, \quad n \le r \le N.$

Тоді:

1) R_n - супермартингал,

2) $R_n = max\{X_n,\ E(R_{n+1} | F_n)\}.$

Лема 2.[2] Визначимо такий момент зупинки: $r_n = (\textit{першому} \quad i = n \quad \textit{такому, що}\ R_i = x_i).$

Тоді $E\left(X_{r_n} \middle| F_n\right) = \sup\limits_{n \le r \le N} E(X_r | F_n) = R_n.$

Визначимо тепер необхідні та достатні умови на початковий капітал x, при яких існує мінімальний (x, f, N)-хедж, тобто стратегія, для якої виконується нерівність (1) і, крім того, існує момент зупинки такий, що

$X_{r_0}^{\pi} = f_{r_0}\big(S_0, S_1, \ldots, S_{r_0}\big)$.

Теорема 3.[2] Нехай a — процентна ставка банківського рахунку, x — початковий капітал. Тоді умова

$$x = \sup_{r} E^*(1 + a)^{-r} f_r, \qquad (3.7)$$

де $(f_n, \quad 0 \leq n \leq N)$ — послідовність функцій платежів,

sup знаходиться по всіх моментах зупинки $0 \leq r \leq N,$

а E^* - математичне сподівання (середнє значення) відносно міри P^*, є необхідною та достатньою умовою для існування мінімального хеджу для опціону Американського типу, тобто існує така самофінансована стратегія π, для якої

$$X_n^{\pi*} \geq f_n(S_0, S_1, \ldots, S_n)$$

для будь-якого $0 \leq n \leq N$ і існує такий момент зупинки $0 \leq r_0 \leq N$, що

$$X_{r_0}^{\pi*} = f_{r_0}\big(S_0, S_1, \ldots, S_{r_0}\big). \qquad (3.8)$$

Зауваження. Теорема 1, зокрема формули (3.7) та (3.8), означає, що справедлива вартість опціону Американського типу дорівнює

$$C_N^{\pi*} = \sup_{n \leq r \leq N} E^*(1 + a)^{-r} f_r = E^*(1 + a)^{-r_0} f_{r_0}. \qquad (3.9)$$

Нехай тепер σ - раціональний момент подання опціону до виконання (означення 3).

Тоді $X_\sigma^{\pi*} = f_\sigma$, тобто з урахуванням (3.7)

$$C_N^{\pi*} = X_0^{\pi*} = E(1 + a)^{-\sigma} X_\sigma^{\pi*} = E(1 + a)^{-\sigma} f_\sigma. \qquad (3.10)$$

Формула (3.10) визначає раціональні моменти подання опціону до виконання.

Разом з тим вона означає, що справедлива ціна опціону і раціональні моменти зупинки пов'язані між собою.

Справедливу ціну опціону і раціональні моменти зупинки можна знайти одночасно, розв'язуючи задачу про "оптимальний момент зупинки", тобто такий момент σ, для якого

$$E^*(1+a)^{-\sigma} f_\sigma = \sup_{n \le r \le N} E^*(1+a)^{-r} f_r.$$

Зокрема, момент r_0 є раціональним.

Розглянемо тепер деякі приклади відшукання раціональних моментів зупинки (обчислення базуються на теорії оптимальної зупинки).

Приклад 1. Нехай функції виплат задовольняють умову

(A^0) $\quad f_n(S_0, S_1, \dots, S_n) = \delta^n g(S_n),$

де $0 < \delta \le 1$.

Вважаємо також, що $S_n = S_{n-1}(1+\rho_n)$,

де $\rho_1, \dots, \rho_n$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини, що приймають два значення α і β, $-1 < \alpha < a < \beta$, з ймовірностями $q = \frac{\beta - a}{\beta - \alpha}$ і $p = 1 - q = \frac{a-\alpha}{\beta-\alpha}$, відповідно, причому значення α і β задовольняють умову

(B^0) $\quad 1+\beta = \lambda, \quad 1+\alpha = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 1.$

Позначимо символом E_x математичне сподівання, яке береться за умови, що початкове значення S_0 ціни акцій дорівнює x, символом $V_n(x)$ таку величину

$$V_n(x) = \sup_{0 \le r \le n} E_x(\varepsilon\delta)^r g(S_r), \quad \varepsilon = \frac{1}{1+a},$$

де sup береться по всіх моментах зупинки r, що не перевищують x.

Якщо відомо, що початкове значення S_0 справді дорівнює x, то E_x співпадає з E^* з формули (3.7), а тоді з формули (3.9) випливає, що справедлива ціна опціону C_n^* дорівнює $V_n(x)$.

Ще позначимо $\quad Ag(x) = E_x g(S_1).$

Тоді

$$Ag(x) = E_x g\big(x(1+\rho_1)\big) = g(x\lambda)p + g\left(\frac{x}{\lambda}\right)q,$$

причому $p = \frac{a-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\lambda - \varepsilon}{\varepsilon(\lambda^2-1)}$.

Покладемо

$$T_{\varepsilon\delta}g(x) = max\{g(x), \varepsilon\delta A(x)\}.$$

Тоді $T_{\varepsilon\delta}$ - це деякий оператор, що діє на функцію $g(x)$.

Для кожного оператора можна визначити його степені за такою рекурентною формулою

$$T_{\varepsilon\delta}^{n}g(x) = T_{\varepsilon\delta}\left(T_{\varepsilon\delta}^{n-1}g(x)\right) = max\{T_{\varepsilon\delta}^{n-1}g(x), \varepsilon\delta A(x)\}, \quad n \geq 2.$$

Використовуючи результати теорії оптимальної зупинки, одержимо:

1) $V_n(x) = T_{\varepsilon\delta}^{n}g(x)$;

2) момент зупинки $r_n = min\{0 \leq m \leq n : V_{n-m}(S_m) = g(S_m)\}$

є раціональним моментом подання опціону до виконання (оптимальним моментом), тому що

$V_n(x) = E_x(\varepsilon\delta)^{r_n}g\left(S_{r_n}\right)$.

Пояснимо, як послідовно шукати момент r_n.

Якщо $V_n(S_0) = g(S_0)$, то $r_n=0$, тобто опціон фактично не треба купувати.

Якщо $V_n(S_0) > g(S_0)$, то з опціоном треба почекати

(протилежної нерівності, в силу визначення $V_n(x)$, бути не може).

Якщо $V_{n-1}(S_1) = g(S_1)$, то $r_1=1$, тобто оптимальним є пред'явлення опціону до виконання в момент часу, рівний 1.

Якщо ж $V_{n-1}(S_1) > g(S_1)$, то треба почекати, і так далі.

Приклад 2. Нехай виконуються умови (A^0) і (B^0), і, крім того, $g(x) = (x-1)^+$, тобто $K=1$.

Таким чином, ми розглядаємо стандартний опціон купівлі Американського типу з функціями виплат $f_n(x) = \beta^n(x-1)^+, \quad 0 \leq n \leq N < \infty, \quad 0 < \beta \leq 1$ (це припущення на β відповідає реальній економічній ситуації).

Розглянемо два випадки:

а) $\beta=1$. Тоді $f_n(x) = (x-1)^+$ і не залежить від n, тобто ми маємо справу з опціоном Європейського типу, час виконання якого дорівнює N.

Далі потрібне таке твердження.

Лема 3.[2] Послідовність $\{\varepsilon^n(S_n-1)^+, \quad 0 \le n \le N\}$ є субмартингалом для будь-якого $x > 0$.

З леми 3 і теореми 1 випливає, що для будь-якого моменту зупинки $0 \le r \le N$

$E_x\varepsilon^r(S_r-1)^+ \le E_x\varepsilon^N(S_N-1)^+$,

тобто, момент $r_N = N$ є оптимальним.

Але є і інші оптимальні моменти.

Справді, якщо $S_0 = x < \frac{1}{\lambda_{n-1}^N}$, то для будь-якого $1 \le n \le N$

$$V_n(S_0) = V_n(x) = T_{\varepsilon\delta}^n g(x) =$$
$$= max\{T_{\varepsilon\delta}^{n-1}g(x),\ \varepsilon\delta ATg(x)\} = 0,$$

оскільки

$Ag(x) = pg(\lambda x) + (1-p)g\left(\frac{x}{\lambda}\right) = p*0 + (1-p)*0 = 0,$

звідки $T_{\varepsilon\delta}g(x) = 0$, і далі, аналогічно, $T_{\varepsilon\delta}^n g(x) = 0$.

Таким чином, момент $r=0$ також є оптимальним.

б) $0 < \beta \le 1$.

Тепер зручно припустити, що $x = \lambda^k$, де k будь-яке ціле число.

Тоді всі суми S_n також будуть приймати значення λ^m, де m -- деяке ціле число.

Обчислення, подібні до попередніх, приводять до такої рекомендації: позначимо

$$k_1^* = \left[\frac{ln\left(\frac{1-\alpha\beta}{1-\beta}\right)}{ln(\lambda)}\right]$$

.

Тоді, якщо $x = S_0 = \lambda^k$, причому $k<0$ або $k \ge k_1^*$, то треба зупинитися відразу, тобто подати опціон до виконання, якщо $0 \le k < k_1^*$, то треба почекати.

ДОДАТОК. СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ТА ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Д1. Статистичне моделювання випадкових подій та випадкових величин

При дослідженні складних систем методом статистичних випробувань необхідно мати можливість отримувати за допомогою комп'ютера вибіркові значення випадкових величин, які мають різні закони розподілу.

Випадкові величини зазвичай моделюють за допомогою перетворення одного або кількох незалежних значень випадкової величини α, рівномірно розподіленої в інтервалі [0, 1], що позначаються як

α_i , i =1, 2, 3,... ($\alpha_i \in [0,1]$).

Значення α_i, генерують за допомогою програмних генераторів випадкових чисел.

При статистичних випробуваннях необхідно

1. Моделювати:
- Випадкові події
- Дискретні випадкові величини
- Неперервні випадкові величини
- Випадкові процеси
- Випадкові поля.
2. Оцінювати якість отриманих реалізацій

Моделювання випадкових подій. Припустимо, що ймовірність настання деякої елементарної випадкової події A в одному випробуванні дорівнює $P(A) = p$.

Вважається, що умови проведення кожного випробування однакові і його можна повторити нескінченну кількість разів.

Якщо α_i, - це значення рівномірно розподіленої в інтервалі [0, 1] величини, то можна стверджувати, що за умови $\alpha_i \le p$ (рис. D1) настане подія A, а якщо $\alpha_i > p$, то подія A не відбудеться.

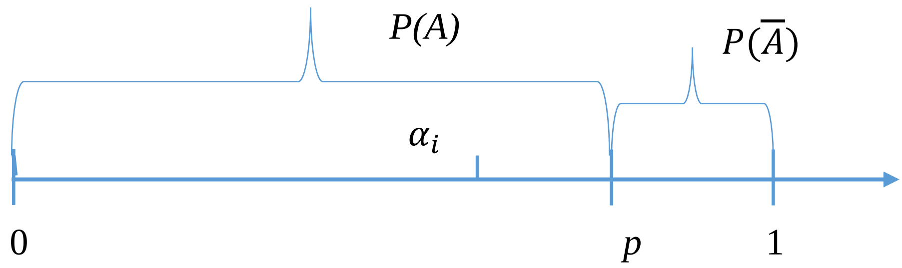


Рис. D1. Моделювання настання випадкових подій

Дійсно, якщо *f(x)* - функція щільності рівномірно розподіленої випадкової величини α, то

$$P\{\alpha < p\} = \int_0^p f(x)dx = p = P(A).$$

Ця модель добре описує такі події, як обслуговування вимоги в пристроях СМО, що може бути вільним або зайнятим, успішну або ні спробу виконання деякого завдання, влучення або ні в ціль, розгалуження потоків інформації у двох і більше напрямках.

Група несумісних подій

Нехай є група несумісних подій $A_1, A_2, \ldots, A_k$ настання яких необхідно дослідити.

Відомі ймовірності настання цих подій

$p_1 = P(A_1), p_2 = P(A_2), p_3 = P(A_3), \ldots, p_k = P(A_k).$

Якщо події несумісні, то $\sum_i p_i = 1$. Припустимо, що $p_0 = 0$.

На відрізку [0, 1] числової осі відкладемо значення цих імовірностей (рис. D2).

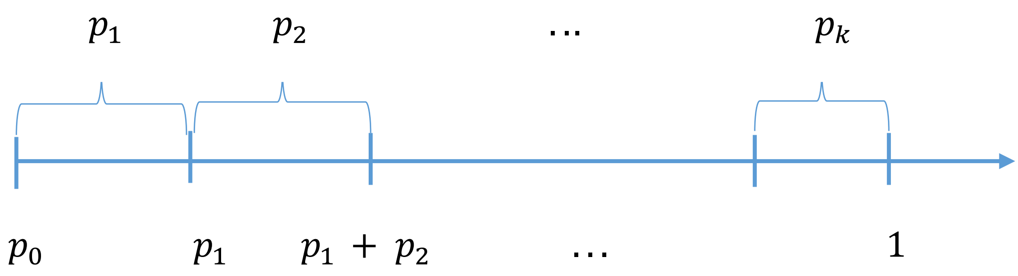


Рис. D2. Моделювання групи несумісних подій

Якщо отримане від генератора випадкових чисел значення r_i, потрапляє в інтервал від $\sum_{k=0}^{i-1} p_k$ до $\sum_{k=0}^{i} p_k$ вважаємо, що відбулася подія A_i.

Таку процедуру називають визначенням результату випробування за жеребом. Вона ґрунтується на формулі

$$P\left(\sum_{k=0}^{i-1} p_k < \alpha_i \leq \sum_{k=0}^{i} p_k\right) = p_i = P(A_i),$$

де $p_0 = 0$.

Ця модель часто використовується в теорії прийняття рішень і добре відтворює процеси вибору однієї з багатьох альтернатив у комп'ютерних іграх, наприклад, при підкиданні грального кубика, для розгалуження потоків інформації у вузлах мережі в кількох напрямках, вибір одного з багатьох пристроїв для обслуговування в СМО і т. ін.

Умовна подія

Умовна подія A - це подія, яка відбувається з імовірністю $P(A/B)$ тільки за умови, що настала подія B (рис. D3.). У цьому разі має бути задана ймовірність $P(B)$ настання події B. Моделювання настання умовної події A провадиться таким чином.

Спочатку випадкове число α_i отримане від генератора випадкових чисел, використовується для моделювання настання події B.

Подія B настає в тому випадку, якщо справджується нерівність $\alpha_1 \leq P(B)$.

Настання події A моделюється за допомогою числа α_2. Для цього перевіряється умова $\alpha_2 \leq P(A)$, за виконання якої приймається рішення, що подія A

відбулася. Якщо ж подія *B* не відбулася, то настання події *A* моделювати не потрібно. Таким чином, можна скоротити загальну кількість випробувань.

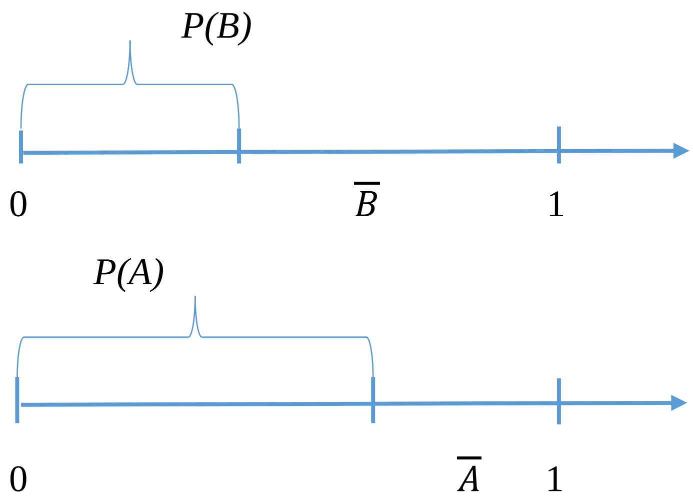


Рис. D3. Моделювання настання умовної події

Моделювання дискретної випадкової величини

Розподіл дискретної випадкової величини може бути поданий у вигляді таблиці

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Тут p_j — імовірність того, що випадкова величина x набуває значення x_j, j=1, …,n.

Накладається також умова: $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$.

Поділимо інтервал (0;1) на *n* відрізків, довжини котрих дорівнюють заданим імовірностям. Якщо випадкове число x, що формується генератором випадкових чисел, котрі відповідають рівномірному закону розподілу на інтервалі (0;1), потрапляє до інтервалу p_k, то випадкова величина x набуває значення x_k. Отже, під час моделювання дискретної випадкової величини фактично використовується та сама процедура, що й за моделювання повної групи несумісних подій.

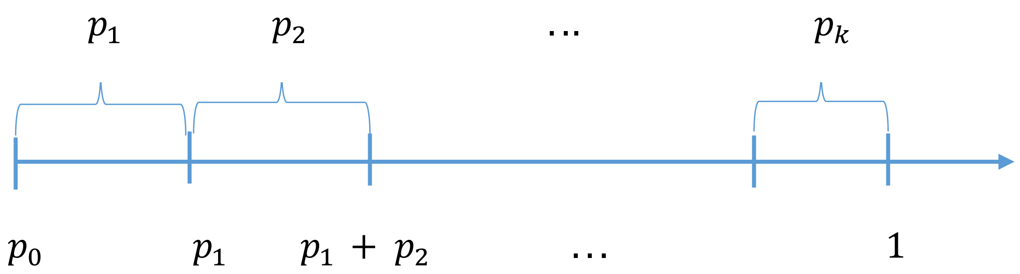


Рис. D4. Моделювання дискретної випадкової величини

Моделювання неперервних випадкових величин. Існує кілька методів моделювання значень неперервних випадкових величин з довільним законом розподілу на основі випадкових чисел, рівномірно розподілених у інтервалі [0, 1]:

метод оберненої функції,

метод відсіювання,

наближені методи,

спеціальні методи тощо.

Метод оберненої функції. Розглянемо метод моделювання випадкової величини, яка має функцію щільності ймовірностей $f(x)$ і монотонно зростаючу функцію розподілу $F(x)$ (рис. D5).

Суть методу така. За допомогою генератора випадкових чисел генеруємо значення випадкової величини r_i, якому відповідає точка на осі ординат. Значення випадкової величини x_i з функцією розподілу $F(x)$ можемо одержати з рівняння $F(x_i) = \alpha_i$.

$$P(X < x) = P(\alpha < F(x)) = \int_0^{F(x)} f(u)du = F(x)$$

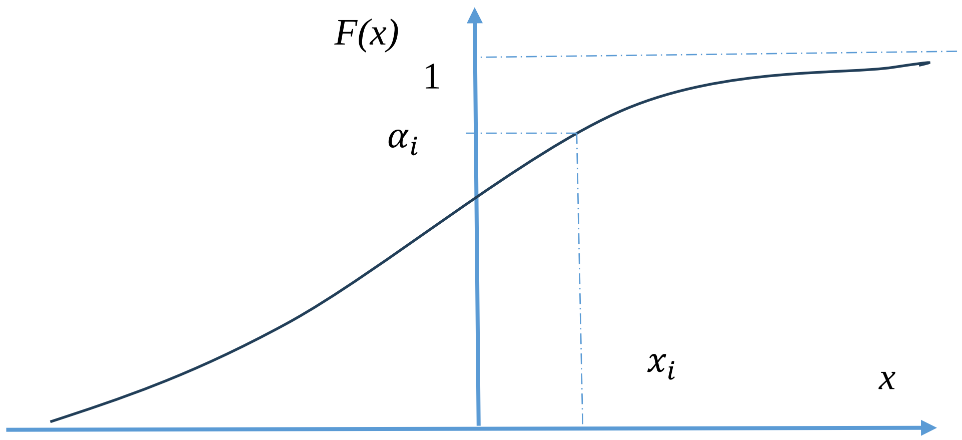


Рис. D5. Використання методу оберненої функції для генерування неперервної випадкової величини

Дійсно, якщо на осі ординат відкласти значення r_i випадкової величини, розподіленої рівномірно в інтервалі [0, 1], і на осі абсцис знайти значення x_i випадкової величини (рис. D5), при якому $F(x_i) = \alpha_i$, то випадкова величина $X = F^{-1}(\alpha)$ буде мати функцію розподілу $F(x)$.

За визначенням функція розподілу $F(x)$ випадкової величини X дорівнює ймовірності $P(X < x)$:

Таким чином, послідовність випадкових чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ перетворюється на послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$, яка має задану функцію щільності розподілу $f(x)$.

Звідси випливає загальний алгоритм моделювання випадкових неперервних величин, що мають задану функцію розподілу ймовірностей:

- генерується випадкове число α_i є [0, 1];
- обчислюється випадкове число x_i, яке є розв'язком рівняння

$$\alpha_i = \int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx.$$

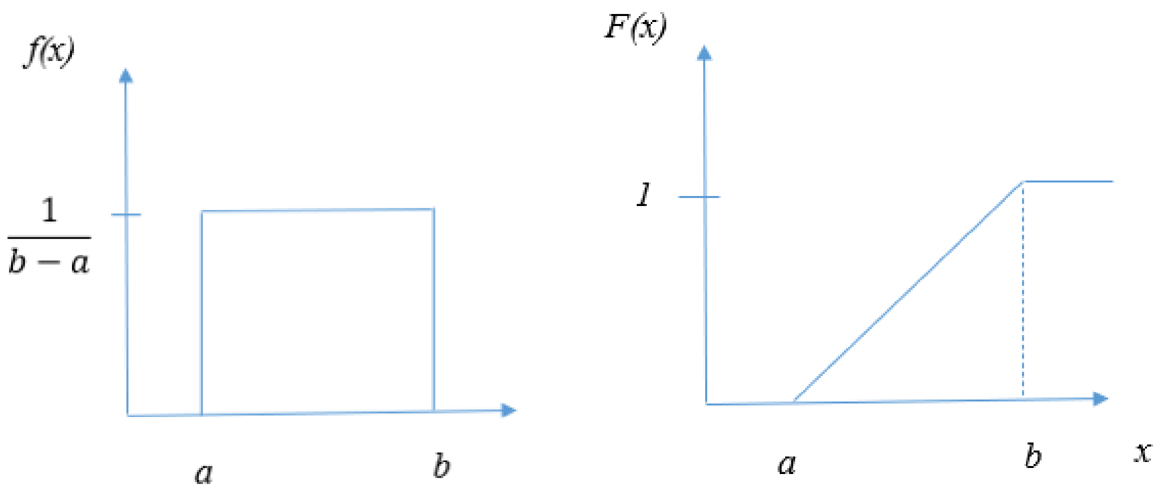
Рівномірний розподіл

У загальному випадку випадкова величина X є рівномірно розподіленою на відрізку $[a, b]$, якщо її щільність розподілу ймовірностей та функція розподілу мають вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}.$$

Графіки функцій щільності *f(x)* та ймовірності *F(x)* зображено на рис. D6.



а) б)

Рис. D6. Функції щільності (а) і розподілу (б) рівномірно розподіленої випадкової величини

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини *X* визначаються як

$$EX = \frac{a+b}{2}, \qquad DX = \frac{b-a}{12}.$$

Для моделювання випадкової рівномірно розподіленої на відрізку *[a,b]* величини можна скористатись методом оберненої функції.

$$\alpha_i = \int_a^{x_i} \frac{dx}{b-a} = \frac{x_i - a}{b-a}.$$

Обчислимо функцію розподілу випадкової величини та прирівняємо її до значення r_i*:*

Звідси знаходимо значення випадкової величини з функцією розподілу *f(x):*

$$x_i = (b - a)\alpha_i + a.$$

Цю формулу також можна отримати, якщо виконати лінійне перетворення інтервалу [0,1] у відрізок *[a, b].*

Для цього потрібно змінити масштаб функції рівномірного розподілу, помноживши її на *(b - a),* а потім змістити її на величину *a.*

Експоненціальний розподіл. Експоненціальний закон розподілу набув широкого використання в теорії надійності

$$f(x) = \lambda\, exp(-\lambda x).$$

Для її моделювання скористаємося методом оберненої функції. Маємо

$$\alpha_i = \int_0^{x_i} f(x)dx = \int_0^{x_i} \lambda\, exp(-\lambda x)dx = 1 - exp(-\lambda x_i).$$

З попереднього виразу знаходимо значення x_i

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} ln(1 - \alpha_i)$$

Можна показати, що випадкові величини ($1 - \alpha_i$) мають такий самий розподіл, що і величини α_i. Тоді, замінивши ($1 - \alpha_i$) на α_i отримаємо

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} ln(\alpha_i).$$

Випадкові величини з експоненціальним розподілом широко застосовуються в задачах моделювання та аналізу СМО, наприклад, під час моделювання процесів виходу з ладу та ремонту обладнання, які виникають у складних системах, у разі визначення інтервалів часу між послідовними викликами абонентів у телефонній мережі або замовлень від незалежних клієнтів у будь-якій мережі обслуговування (швидка допомога, служби ремонту, виклик таксі і т. ін.)

Гауссівський (нормальний) розподіл. Щільність розподілу гауссівської випадкової величини ξ з математичним сподіванням a і дисперсією σ^2 (позначають $N(a,\sigma^2)$)

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

При $a = 0, \quad \sigma^2 = 1$ щільність розподілу $N(0,1)$

$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

Випадкові величини

$\xi_1 = \sqrt{-2\, ln(\alpha_1)}\, sin(2\pi\alpha_2)$ та $\xi_2 = \sqrt{-2\, ln(\alpha_1)}\, cos(2\pi\alpha_2)$,

де (α_1, α_2)- пара незалежних випадкових чисел, що рівномірно розподілені в (0;1), є незалежними і мають закон розподілу $N(0,1)$.

Стандартну нормальну випадкову величину можна моделювати за формулою

$$\xi = \xi^{(n)} = \sqrt{\frac{12}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i - \frac{1}{2}\right)}.$$

Згідно з центральною граничною теоремою, величина $\xi^{(n)}$ асимптотично нормальна, і $E\xi^{(n)} = 0, \quad D\xi^{(n)} = 1$.

Формула зручна при *n=12*

$$\xi = \xi^{(12)} = \sum_{i=1}^{12}\alpha_i - 6.$$

Вказана формула має недолік, оскільки, наприклад, $\left|\xi^{(12)}\right| \leq 6$ то кажуть, що співвідношення обрубує хвости стандартної нормальної випадкової величини.

Такі формули, як правило, використовуються, коли великі значення $|\xi|$ не грають суттєвої ролі.

Недоліком є також необхідність великої кількості рівномірно розподілених випадкових величин.

Стандартну нормальну випадкову величину можна моделювати за формулою

$$\eta_n = \xi_n - \frac{41}{12440n^2}(\xi_n^5 - 10\xi_n^3 + 15\xi_n),$$

де ξ_n моделюється за вище наведеною формулою.

Доведено, що випадкова величина η_n є асимптотично нормальною величиною з більш високим порядком збіжності ніж в центральній граничній теоремі, а формула дає хороше наближення ужи при $n = 2$.

Безперечно, якість генераторів випадкових чисел впливає на якість результатів моделювання. Неправильно побудований генератор випадкових чисел спричиняє низку помилок, що призводить не тільки до значної похибки у результатах моделювання, але й до алгоритму імітації, що не відповідає алгоритму функціонування реальної системи.

Отже, моделювання гауссівського розподілу можливе за основними алгоритмами:

1. $$\xi_1 = \sqrt{-2\,ln(\alpha_1)}\,cos(2\pi\alpha_2)$$
   $$\xi_2 = \sqrt{-2\,ln(\alpha_1)}\,sin(2\pi\alpha_2)$$
2. $$\xi_n = \sqrt{\frac{12}{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i - \frac{1}{2}\right)$$
3. $$\eta_n = \xi_n - \frac{41}{12440n^2}(\xi_n^5 - 10\xi_n^3 + 15\xi_n)$$

де ξ_n моделюється за вказаною формулою.

Доведено, що випадкова величина η_n є асимптотично нормальною величиною з більш високим порядком збіжності ніж в центральній граничній теоремі, а формула із 3) дає хороше наближення ужи при $n = 2$.

Генератор псевдовипадкових чисел. Можна створити таку послідовність чисел, властивості якої будуть схожі на властивості послідовності випадкових чисел. Такі послідовності називаються псевдовипадковими.

Вперше запропонував їх використовувати Джон фон Нейман у 1946р. Його метод полягав в наступному: n-розрядне число підносилось до квадрата і з нього вибиралися середні n цифр.

Метод був дуже недосконалий, послідовності майже завжди вироджувалися в нуль або зациклювалися з коротким періодом.

Пізніше було запропоновано багато різних алгоритмів отримання псевдовипадкових чисел.

В основі програмних генераторів як правило лежать рекурентні формули. Як правило, вони генерують цілі числа рівномірно розподілені на відрізку від 0, до деякого максимального *M*.

Щоб отримати числа з плаваючою комою, рівномірно розподілені на [0,1), кожен отриманий результат ділять на *M*.

Лінійна змішана форма

$$x_i = \left(a_0 + \sum_{j=1}^{i} a_j x_{i-j}\right) \quad mod \quad m$$

Ця формула має багато часткових випадків:

Мультиплікативний конгруентний метод

$$x_i = (a_1 x_{i-1}) \quad mod \quad m$$

Змішаний конгруентний метод

$$x_{i+1} = (a x_i + c) \quad mod \quad m$$

Лінійний конгруентний метод. Основна обчислювальна формула:

$$x_{i+1} = (a x_i + c) \quad mod \quad m$$

Алгоритм зациклюється з періодом, що не перевищує деякого m. Коефіцієнти a, m і *x(0)* можуть приймати довільні цілі значення, за винятком 0. Параметр *c* може бути також і 0, але в цьому випадку скорочується період. Число ітерацій m звичайно вибирається рівним максимальному значенню типу, що робить непотрібною операцію ділення, яка автоматично виконається при переповненні.

Число a можна взяти рівним, наприклад, 1664525,

c — рівним 1013904223.

Такий метод часто реалізують в сучасних системах програмування, хоча він майже непридатний у галузі статистики чи криптографії, де вимоги до «випадковості» значно вищі.

Лінійний конгруентний метод — один із методів генерації псевдовипадкових чисел. Застосовується в простих випадках і не володіє криптографічною стійкістю. Входить в стандартні бібліотеки різних компіляторів.

Лінійний конгруентний метод був запропонований Д. Г. Лемером в 1949 році.

«Mother-of-All» random number generator

Запропонований Джорджем Марсалією (Marsaglia), професором університету Флориди. Обчислювальна формула:

$$\begin{cases} S = 21111111111x_{n-4} + 1429x_{n-3} + 1776x_{n-2} + 5115x_{n-1} + C \\ x_n = \dfrac{S}{2^{32}} \\ C = \left[\dfrac{S}{2^{32}}\right] \end{cases}$$

Цей алгоритм є узагальненням попереднього і позбавлений його головного недоліку— короткого періоду. Його період— 2^{250}.

Випадкове число x_i належатиме проміжку [0, 1). Початкові значення можна задавати довільні. Алгоритм може бути застосований в прикладних науках, але він має нижчу швидкість.

Вихор Мерсенна

Вихор Мерсенна запропонований у 1997 Макуто Матсумото і Такеджі Нушиміро. Основна ідея полягає в тому, що до початкової ітерації, яка ініціює процедуру, застосовується серія бітових операцій. Після їх виконання отримують нову послідовність, перший член якої вважається псевдовипадковим числом. Цей алгоритм має величезний період: $2^{19937}-1$ ітерації (це більше ніж 43×10^{6000}).

Алгоритм дуже швидкий через відсутність множень, але не має достатньої випадковості. Тому галузь застосування алгоритму дещо обмежена.

Функції для моделювання випадкових величин в Python.

1. Функція **random.random().** Отримати випадкове число в діапазоні [0; 1].
2. Функція **random.uniform().** Отримати випадкове число в заданому інтервалі
3. Функція **random.triangular().** Отримати випадкове число в заданому інтервалі та заданому режимі
4. Функція **random.betavariate().** Отримати випадкове число в межах [0; 1] на підставі бета-розподілу
5. Функція **random.expovariate().** Отримати випадкове число на основі експоненціального розподілу
6. Функція **random.gammavariate().** Отримати випадкове число на основі Гамма-розподілу
7. Функція **random.gauss().** Отримати випадкове число на основі розподілу Гауса
8. Функція **random.normalvariate().** Отримати випадкове число на основі нормального розподілу
9. Функція **random.lognormvariate().** Отримати випадкове число на основі логарифмічного нормального розподілу
10. Функція **random.vonmisesvariate().** Круговий розподіл даних
11. Функція **random.paretovariate().** Отримати випадкове число на основі розподілу Парето
12. Функція **random.weibullvariate().** Отримати випадкове число на основі розподілу Вейбулла

Д2. Стохастичні інтеграли. Моделювання випадкових процесів.

Інтеграл в середньому квадратичному.

Означення. Випадковий процес другого порядку $\xi\ (\omega, t),\ t \in T = [a, b]$ називається інтегрованим в середньому квадратичному на відрізку $[a, b]$, якщо існує в середньому квадратичному границя інтегральних сум $\sum_{k=0}^{n-1} \xi(c_k)(t_{k+1} - t_k)$, де $a = t_0 \le c_0 \le t_1 \le \ldots \le t_{n-1} \le c_{n-1} \le t_n = b$, коли $\max_k (t_{k+1} - t_k) \to 0$ при $t \in T$ і границя не залежить від способу вибору точок $t \in T$.

Ця границя позначається $\int_a^b \xi(t)dt = \underset{n\to\infty}{l.i.m.} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \xi(c_k)(t_{k+1} - t_k)\right)$ і називається інтегралом в середньому квадратичному від випадкового процесу $\xi(t)$.

Позначимо $a(t) = E\xi(t),\ B(t, s) = E\xi(t)\xi(s)$.

Теорема (критерій інтегрованості випадкового процесу).

Якщо існують інтеграли Рімана $\int_a^b a(t)dt,\quad \int_a^b \int_a^b B(t, s)dtds,$ то випадковий процес $\xi\ (\omega, t)$ *інтегрований на* $[a, b]$ і м*ає місце*

$$E \int_a^b \xi(t)dt = \int_a^b a(t)dt, \tag{D1}$$

$$E \int_a^b \xi(t)dt \int_a^b \xi(s)ds = \int_a^b \int_a^b B(t, s)dtds. \tag{D2}$$

Інтеграл за процесом з некорельованими приростами.

Означення. Випадковий процес $Z(\lambda)$ на $[a, b]$ називається процесом з ортогональними приростами, якщо $Z(a) = 0$ з ймовірністю одиниця та для будь-яких $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ з відрізку $[a, b]$ має місце $E\big(Z(\lambda_3) - Z(\lambda_2)\big)Z(\lambda_1) = 0$.

Позначимо $E\big(Z(\lambda)\big)^2 = F(\lambda)$. Для процесів з ортогональними приростами $E\big(Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1)\big)^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$.

Напишемо $Z(\lambda_2) = Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1) + Z(\lambda_1)$, тоді, в силу ортогональності,

$E(Z(\lambda_2))^2 = E(Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1) + Z(\lambda_1))^2 = E(Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1))^2 + E(Z(\lambda_1))^2$,

отже, $E(Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1))^2 = E(Z(\lambda_2))^2 - E(Z(\lambda_1))^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1) \geq 0.$

$F(\lambda)$ - неспадна функція.

Функція $F(\lambda)$ називається структурною функцією процесу $Z(\lambda)$.

Нехай $g(\lambda)$ - невипадкова функція на $[a, b]$, розглянемо розбиття відрізка $[a, b]$ таке, що $a = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = b$.

$Z(\lambda)$ - випадковий процес з ортогональними приростами.

Виберемо в кожному інтервалі $(\lambda_{j-1}, \lambda_j)$ точку λ_j^* і утворимо суму $S_n = \sum_{j=1}^{n-1} g(\lambda_j^*)\left(Z(\lambda_j) - Z(\lambda_{j-1})\right)$.

Нехай $\delta = \max\limits_{1 \leq j \leq n}(\lambda_j - \lambda_{j-1})$. Якщо існує границя в середньому квадратичному $\underset{\delta \to 0}{l.i.m.} \sum_{j=1}^{n-1} g(\lambda_j^*)\left(Z(\lambda_j) - Z(\lambda_{j-1})\right)$, яка не залежить від способу вибору точок λ_j^*, то ми будемо називати її **стохастичним інтегралом** від функції $g(\lambda)$ по процесу з ортогональними приростами $Z(\lambda)$.

$$\int_a^b g(\lambda) dZ(\lambda) = \underset{\delta \to 0}{l.i.m.} \sum_{j=1}^{n-1} g(\lambda_j^*)\left(Z(\lambda_j) - Z(\lambda_{j-1})\right).$$

Достатньою умовою існування такого інтегралу є неперервність $g(\lambda)$ і обмеженість варіації $Z(\lambda)$.

Але визначити такий інтеграл для окремої реалізації $Z(\lambda)$ не можна, бо процеси з ортогональними приростами мають, як правило, необмежену варіацію.

Теорема.[1] Якщо $g(\lambda)$ неперервна функція на $[a, b]$, $Z(\lambda)$ -процес з ортогональними приростами з обмеженою структурною функцією $F(\lambda)$, то існує стохастичний інтеграл $\int_a^b g(\lambda) dZ(\lambda)$, який має такі властивості

1. $\int_a^b [A g_1(\lambda) + B g_2(\lambda)] dZ(\lambda) = A \int_a^b [g_1(\lambda)] dZ(\lambda) + B \int_a^b [g_2(\lambda)] dZ(\lambda)$, (D3)
2. $E \int_a^b g_1(\lambda) dZ(\lambda) \int_a^b g_2(\lambda) dZ(\lambda) = \int_a^b g_1(\lambda) g_2(\lambda) dF(\lambda)$. (D4)

Це в деякій мірі інтеграл Рімана-Стільтєса.

Стохастичний інтеграл по стохастичній мірі

Означення. Нехай T – скінчений чи нескінчений відрізок дійсної прямої і на його напівінтервалах виду $\Delta = (s, t]$ задана випадкова функція $\eta(\omega, \Delta)$ із значеннями в гільбертовому просторі H випадкових величин ξ:$E[|\xi(\omega)|^2] < \infty$.

Нехай далі $\eta(\omega, \Delta)$ має наступні властивості:

1) для двох напівінтервалів Δ_1 та Δ_2, що не перетинаються, випадкові величини $\eta(\Delta_1)$ і $\eta(\Delta_2)$ є ортогональними, тобто, $(\eta(\Delta_1)$,$\eta(\Delta_2))$=0 або $E[\eta(\Delta_1) \cdot \eta^*(\Delta_2)] = 0$;
2) з ймовірністю одиниця $\eta(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \eta(\Delta) = \eta(\Delta_1) + \eta(\Delta_2)$, де

$\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset, \Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ (диз'юнктивне об'єднання);

3) $\|\eta(\Delta)\|^2 = |\Delta| = t - s$.

Узагальнимо співвідношення в 3).

Розглянемо

$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_N$ $\qquad\qquad (\Delta_i \cap \Delta_j = \acute{\emptyset} \quad i \neq j)$.

$$\|\eta(\Delta)\|^2 = (\eta(\Delta), \eta(\Delta)) = \left(\sum_k \eta(\Delta_k), \sum_p \eta(\Delta_p) \right) =$$

$$= \sum_{k,p} \big(\eta(\Delta_k), \eta(\Delta_p)\big) = \sum_{k,p} \|\eta(\Delta_k)\|^2 \delta_{kp} = \sum_{k=1}^{N} \|\eta(\Delta_k)\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} |\Delta_k| = \int_\Delta dt.$$

Звідси

$$\|\eta(dt)\|^2 = E(|\eta(dt)|^2) = dt.$$

Стохастичний інтеграл від невипадкової функції $\phi(t)$ по стохастичній мірі визначається як границю послідовності інтегралів від кусочно-постійних функцій $\{\phi_n(t)\}$, що апроксимують $\phi(t)$.

Довільну невипадкову функцію $\phi(t) \in L_2$ на Т, ($\phi^2(t)$ інтегрована на T) можна апроксимувати кусочно-неперервними функціями $\phi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi(t)$

$$\int_T |\phi_n(t) - \phi(t)|^2 dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{D5}$$

Означення. Стохастичним інтегралом від невипадкової функції по стохастичній мірі $\eta(\omega, \Delta)$ будемо називати границю

$$\int_T \varphi(t)\eta(dt) = \lim_{\substack{k\to\infty \\ \gamma\to 0}} \sum_k \varphi(t_k)\eta(\Delta_k), \tag{D6}$$

де γ - діаметр розбиття, $\gamma = max\{|\Delta_k|\}$.

Розповсюдимо поняття стохастичного інтеграла (D6) на випадкову функцію

$$\phi(t) \to \phi(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T.$$

Крім того, стохастичну міру $\eta(\omega, \Delta)$ будемо вибирати так, щоб виконувалась умова

$$E[\eta(\omega, \Delta)] = 0. \tag{D7}$$

Для цього:

1) Введемо випадкову кусочно-постійну функцію на напівінтервалах Δ_k:

$$\phi(\omega, t) = \xi_k(\omega), t \in \Delta_k \subset T. \tag{D8}$$

Тоді визначимо для функцій (8) стохастичний інтеграл як суму

$$\int_T \phi(\omega, t)\eta(\omega, dt) = \sum_k \xi_k(\omega)\eta(\omega, \Delta_k). \tag{D9}$$

2) Розглянемо випадкову функцію $\phi(\omega, t)$, яку можна апроксимувати послідовністю $\{\phi_k(\omega, t)\}$ кусочно-постійних функцій.

Для таких функцій маємо

$$\int_T \|\phi(\omega, t) - \phi_n(\omega, t)\|^2 dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_T \|\phi_n(\omega, t) - \phi_m(\omega, t)\|^2 dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Розглянемо послідовність інтегралів $\left\{\int_T \phi_n(\omega, t)\eta(\omega, dt)\right\}$.

Для неї справедливо:

$$\left\|\int_T \phi_n(\omega, t)\eta(\omega, dt) - \int_T \phi_m(\omega, t)\eta(\omega, dt)\right\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Дійсно, можна показати, що

$$\left\|\int_T[\phi_n-\phi_m]\,\eta(dt)\right\|^2=\int_T\|\phi_n-\phi_m\|^2dt\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0.$$

А це значить, що послідовність інтегралів є фундаментальна, і у відповідності з стохастичним критерієм Коші, має границю.

Ця границя і називається **стохастичним інтегралом** від випадкової функції по стохастичній мірі з ортогональними значеннями

$$\int_T\varphi(t)\eta(dt)=\lim_{n\to\infty}\int_0^T\varphi_n(\omega,t)\eta(\omega,dt). \qquad \text{(D10)}$$

Нехай стохастична міра визначена співвідношенням

$$\eta(\Delta_k)=w(t_k)-w(t_{k-1}), \qquad \text{(D11)}$$

тобто, рівна приросту вінерівського процесу.

Якщо в (D10) замінити $\eta(dt)$ на $dw(t)$, то інтеграл в (D10) буде називатися **стохастичним інтегралом від випадкової функції по вінерівському процесу.**

Стохастичний інтеграл від стохастичного процесу. Розглянемо інтеграл $\int_0^T w(t)dw(t)$, де $w(t)$, $t\in[0,T]$ - вінерівський процес з одиничним параметром дисперсії.

Розділимо інтервал $(0,T)$ точками $0=t_1<t_2<\ldots<t_N<t_{N+1}=T$ на N підінтервалів. Стохастичний інтеграл можна визначити будь-яким із двох виразів:

$$I_0=lim\left(\sum_{i=1}^N w(t_i)[w(t_{i+1})-w(t_i)]\right),$$

або

$$I_1=lim\left(\sum_{i=1}^N w(t_{i+1})[w(t_{i+1})-w(t_i)]\right).$$

Ці інтеграли не рівні, оскільки, за визначенням вінерівського процесу:

$$I_1-I_0=lim\left(\sum_{i=1}^N[w(t_{i+1})-w(t_i)]^2\right)=t. \qquad \text{(D12)}$$

Довільний стохастичний інтеграл можна визначити як зважену по параметру λ суму інтегралів I_0 і I_1 наступною формулою:

$$I_\lambda=(1-\lambda)I_0+\lambda I_1=$$

$$=lim\left(\sum_{i=1}^N[(1-\lambda)w(t_i)+\lambda w(t_{i+1})][w(t_{i+1})-w(t_i)]\right). \qquad \text{(D13)}$$

При $0 \le \lambda \le 1$.

Інтеграл I_0 називається інтегралом Іто, а $I_{0.5}$ називається інтегралом Стратоновича.

Стохастичний інтеграл від вінерівського процесу, що визначений по Іто і Стратоновичу має значення

$$\int_0^t w(s)dw(s) = \frac{1}{2}w^2(t) - \frac{1}{2}t \qquad \text{(}\textit{для інтеграла Іто}\text{)},$$

$\int_0^t w(s)dw(s) = \frac{1}{2}w^2(t)$ (*для інтеграла Стратоновича*).

Еволюцію стану детермінованої динамічної системи при заданих зовнішніх впливах $\vec{f}$ записують у вигляді задачі Коши для вектору стану $\vec{X}$, компонентами якого є параметри системи, що змінюються з часом:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{X}} &= \vec{f}(\vec{X}, t) \\ \vec{X}(0) &= \vec{X}_0 \end{aligned} \tag{D14}$$

В реальних задачах часто не вдається с достатньою точністю описати зовнішні впливи. Відхилення реальних впливів від їх модельних значень задають у вигляді випадкової функції – шуму $n(t)$, динамічне рівняння (D14) записується у вигляді

$$\dot{\vec{X}} = \vec{f}(\vec{X}, t) + \vec{n}(t). \tag{D15}$$

Далі будуємо модель шуму. Найбільш поширена модель білого шуму – випадковий процес, інтеграл по інтервалу часу

$$\int_{t_1}^{t_1+\Delta t} n(\tau)\, d\tau = w(t_1 + \Delta t) - w(t_1)\ . \tag{D16}$$

Об’єднуючи (D15) та (D16), для малих Δt отримуємо

$$d\vec{X} = \vec{f}(\vec{X}, t)dt + d\vec{w} \tag{D17}$$

Рівняння, що отримали, називається *стохастичним диференціальним рівнянням або стохастичним диференціалом.*

Означення. Говорять, що випадкова функція $\xi(\omega, t), t > t_0$ має стохастичний диференціал $d\xi(\omega, t) = \alpha(\omega, t)dt + \beta[w(\omega, t), t]dw(\omega, t)$,

якщо $\xi(\omega, t)$ можна зобразити у вигляді

$\xi(\omega,t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(\omega,\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} \beta[w(\omega,\tau),\tau]dw(\omega,\tau).$ (D18)

Спектральне представлення стаціонарних випадкових процесів

Будемо розглядати стаціонарні в широкому сенсі випадкові процеси, що можна зобразити у вигляді (інтегральне або спектральне зображення)

$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} g(\lambda)\eta(d\lambda) - \infty < t < +\infty,$ (D19)

де $\eta(d\lambda)$ - стандартна стохастична міра з ортогональними значеннями на прямій $-\infty < \lambda < +\infty$ та

$E[\eta(d\lambda)] = 0,\ E[|\eta(d\lambda)|^2] = d\lambda.$ (D20)

Невипадкова функція $g(\lambda)$ задовольняє умові

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$$

Таким чином, (D19) – стохастичний інтеграл, являє собою суму гармонік $e^{i\lambda t}$, що взяті з невипадковою вагою $g(\lambda)$. Випадковість для $\xi(t)$ породжує стохастична міра $\eta(d\lambda)$.

Означення. $S(\lambda) = |g(\lambda)|^2$- регулярна функція параметра λ називається *спектральною щільністю* випадкового процесу $\xi(t)$.

Якщо $E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} g(\lambda) E[\eta(d\lambda)] = 0,$

тобто, $\xi(t)$ - центрований випадковий процес, то

$$E[\xi(t_1)\cdot\xi^*(t_2)] = R_\xi(t_1,t_2) = K_\xi(t_1,t_2) = K_\xi(t_2-t_1) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t_2-t_1)} \underbrace{|g(\lambda)|^2}_{S(\lambda)} d\lambda.$$

Рівність отримана за допомогою (D19) та (D20), і є комплексним перетворенням Фур'є для спектральної щільності випадкового процесу $\xi(t)$. Або, кореляційна функція та спектральна щільність випадкового процесу зв'язані перетворенням Фур'є

$$K_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\tau} S(\lambda) d\lambda,$$

$S(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\tau} K_\xi(\tau)d\tau.$ (D21)

Якщо випадковий процес є дійсним, то $K_{\xi}(\tau) = K_{\xi}(-\tau)$ і

$$S(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos(\lambda\tau)K_{\xi}(\tau)d\tau. \qquad \text{(D22)}$$

Формули (D20) та (D22) це про теорему Вінера-Хінчина про зв'язок кореляційної функції і спектру.

Моделювання випадкових процесів. Нехай випадковий процес $\xi(t)$ визначено на $t \in [0, T]$.

Для процесу $\xi(t)$ бажано мати представлення

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \phi_k(t), \quad t \in [0, T],$$

де $\{\phi_k(t)\}, k = 12\ldots$ базисні функції, вони детерміновані, $\{\eta_k\}, k = 1,2,\ldots$ - деякі випадкові величини.

Для такого представлення в деякому лінійному просторі необхідно мати повну систему базисних функцій $\{\phi_k(t)\}, k = 12\ldots$

Умова ортогональності дійсних базисних функцій має вигляд $\int_0^E \phi_i(t)\phi_j(t)dt = \delta_{ij}$, де δ_{ij} - символ Кронекера.

Для простоти будемо вважати, що $E\xi(t) = m(t) = 0$.

Позначимо $\xi_1^n(t) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \phi_k(t), \quad t \in [0, T]$

Означення. Ряд $\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \phi_k(t)$ збігається в середньому квадратичному в $L_2([0, T])$, якщо

$$E\int_0^T (\xi(t) - \xi_1^n(t))^2 dt = E\|\xi(t) - \xi_1^n(t)\|^2_{L_2([0,T])} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Теорема.[1] Для того, щоб ряд $\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \phi_k(t)$ збігався в середньому квадратичному в $L_2([0, T])$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$E\|\xi_m^n(t)\|^2_{L_2([0,T])} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=m}^{n} E\eta_i\eta_j \int_0^T \phi_i(t)\phi_j(t)dt \to 0 \quad \text{при } m, n \to \infty,$$

або щоб збігався ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} E\eta_i\eta_j \int_0^T \phi_i(t)\phi_j(t)dt < \infty.$$

В загальному випадку має місце теорема.

Теорема Карунена. Нехай на $[0,T]$ задано випадковий процес $\xi(t)$ такий, що $E\xi(t)=0$, $E|\xi(t)|^2<\infty$, $t\in[0,T]$. Нехай $f(t,\lambda)$ - функція на $[0,T]\times[0,\Lambda]$ така, що $f(t,\cdot)\in L_2([0,\Lambda])$ при кожному $t\in[0,T]$. Для того щоб мало місце зображення

$\xi(t)=\int_0^\Lambda f(t,\lambda)dZ(\lambda)$,

де $Z(\lambda)$ випадкова міра з ортогональними значеннями, що підпорядкована мірі $F(\lambda)$ необхідно і достатньо, щоб кореляційна функція $K(t,s)=E\xi(t)\xi(s)$ процесу $\xi(t)$ мала зображення

$K(t,s)=E\xi(t)\xi(s)=\int_0^\Lambda f(t,\lambda)f(s,\lambda)dF(\lambda)$.

Зображення Карунена-Лоєва. Нехай $\xi(t)$ – неперервний у середньому квадратичному випадковий процес на $[0,T]$, $E\xi(t)=0$, $E\xi(t)\xi(s)=K(t,s)$ - кореляційна функція.

Якщо базисні функції $\phi_k(t)$, $t\in[0,T]$ є власними функціями кореляційного оператора

$$\phi(t)=\lambda\int_0^T K(t,s)\phi(s)\,ds$$

Тобто, вони задовольняють інтегральному рівнянню

$\int_0^T K(t,s)\phi_k(s)\,ds=\lambda_k\phi_k(t)$,

λ_k - власні значення кореляційного оператора.

Теорема.[4] Випадковий процес $\xi(t)$ можна зобразити у вигляді ряду $\xi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\phi_k(t)$. При цьому ряд збігається в середньому квадратичному, $\{\eta_k\}$ - некорельовані випадкові величини, та

$$E\eta_k=0,\quad E\eta_k^2=\lambda_k^{-2}\quad,\quad k=1,2,\ldots$$

Зображення $\xi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\phi_k(t)$ називають зображенням Карунена-Лоєва, кореляційна функція має вигляд $K(t,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\phi_k(t)\phi_k(s)$.

Зображення Фур'є. Нехай випадковий процес $\xi(t)$ визначено на $t\in[0,T]$, процес неперервний в середньому квадратичному.

Кореляційна функція процесу $K(t,s)=E\xi(t)\xi(s)$ неперервна, тому вона може бути зображена у вигляді ряду Фур'є, що збігається в $L_2([0,T]\times[0,T])$

$$K(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_{nm}\cos\left(\frac{\pi mt}{T}\right)\cos\left(\frac{\pi ns}{T}\right),$$

де $a_{nm}=\frac{4b_{nm}}{T^2}\int_0^T\int_0^T B(t,s)\cos\left(\frac{\pi mt}{T}\right)\cos\left(\frac{\pi ns}{T}\right)dtds,$

$$b_{nm}=\begin{cases}\frac{1}{4}, & m=n=0\\ \frac{1}{2}, & (m>0,n=0)\vee(m=0,n>0)\\ 1, & m>0,n>0\end{cases}$$

Оскільки $K(t,s)$ невід'ємно визначена, то $a_{mm}\geq 0$ для всіх m, а тому $\xi(t)$ можна зобразити і вигляді ряду, що збігається в середньому квадратичному $\xi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k\cos\left(\frac{\pi kt}{T}\right)$, де $\{\eta_k\}$ такі випадкові величини, що $E\eta_k=0$, $E\eta_m\eta_n=a_{mn}$.

Таке зображення називають зображенням Фур'є.

Нехай $\xi(t)$ неперервний в середньому квадратичному стаціонарний випадковий процес, що визначено на $t\in R$.

Нехай на інтервалі $[0,2T]$ його кореляційну функцію $K(\tau)$ можна зобразити у вигляді ряду Фур'є за косинусами

$$K(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}g_k^2\cos\left(\frac{\pi k\tau}{2T}\right),$$

так, що коефіцієнти $g_k^2=\frac{\gamma_k}{T}\int_0^{2T}K(\tau)\cos\left(\frac{\pi k\tau}{2T}\right)d\tau$ невід'ємні,

$$\gamma_k=\begin{cases}1, & k\geq 1\\ \frac{1}{2}, & k=0\end{cases}.$$

Теорема.[4] Стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ можна зобразити у вигляді ряду

$$\xi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\eta_{1k}\cos\left(\frac{\pi kt}{2T}\right)+\eta_{2k}\sin\left(\frac{\pi kt}{2T}\right)\right),$$

де $\{\eta_{1k}\}$ та $\{\eta_{2k}\}$ незалежні випадкові величини такі, що $E\eta_{1k}=E\eta_{2k}=0$, $k=0,1,\ldots$, $E\eta_{1k}^2=E\eta_{2k}^2=g_k^2$.

Ряд збігається в середньому квадратичному.

Таке зображення називається зображенням Фур'є стаціонарного випадкового процесу.

Зображення вінерівського процесу. Будемо розглядати вінерівський процес на відрізку $T = [0,1]$, кореляційна функція $K_W(t,s) = min(t,s)$,

Власні функції $\phi_k(t) = \sqrt{2}\, sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi t\right)$

Власні числа $\lambda_k^{-2} = \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}$

Зображення $W(t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \frac{sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi t\right)}{\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)}$

$\{\eta_k\}$ - незалежні стандартні гауссівські випадкові величини.

Ряд збігається в середньому квадратичному.

Зображення Вінерівського процесу за власними функціями кореляційного оператора броунівського мосту

$$\xi_1(t) = t\eta_0 + \sqrt{2}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{sin(i\pi t)}{i\pi}\eta_i$$

де $\{\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots\}$ - незалежні стандартні гауссівські випадкові величини,

$\lambda_i = i\pi$ - власні числа кореляційного оператора

Зображення Вінерівського процесу - розклад у ряд Фур'є на $t \in [0,1]$

$\xi_2(t) = t\eta_0 + \sqrt{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\eta_{1i}\frac{sin(2\pi i t)}{2\pi i} + \eta_{2i}\frac{1-cos(2\pi i t)}{2\pi i}\right)$,

де $\{\eta_{1i}, \eta_{2i}\}$ - незалежні стандартні гауссівські випадкові величини.

Алгоритми моделювання випадкових процесів. Розглянемо алгоритмам побудови моделей гауссівських випадкових процесів, що зображуються у вигляді рядів.

Методи моделювання та оцінки точності та надійності моделювання таких процесів в різних функціональних просторах та для різних зображень випадкових процесів розглядаються в роботах [2-6].

Серед зображень виділяються:

- зображення Карунена-Лоєва,
- зображення у вигляді рядів Фур'є,
- випадкові процеси з дискретним спектром.

В цих же роботах досліджено оцінки точності та надійності моделювання вінерівського випадкового процесу.

Алгоритм моделювання. Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ може бути зображений у вигляді ряду $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(t)$, який збігається у середньому квадратичному.

Моделлю процесу X називатимемо суму $X_M(t) = \sum_{k=1}^{M} \xi_k f_k(t)$.

Нехай випадковий процес X та всі X_M, $M = 1,2,\ldots$ належать деякому функціональному банаховому простору $A(T)$ з нормою $\|\cdot\|$. Нехай задано два числа α та δ $(0 < \alpha < 1,\ \delta > 0)$.

Говоритимемо, що модель X_M наближає X з надійністю $1 - \alpha$ та точністю δ у нормі простору $A(T)$, якщо для цієї моделі має місце нерівність

$$P\{\|X(t) - X_M(t)\| > \delta\} \leq \alpha. \qquad \text{(D23)}$$

Отже, для побудови моделі потрібно знайти такі M, для яких при заданих δ та α виконується нерівність (D23).

Теорема.[4] *Випадковий процес X_M є моделлю Карунен – Лоєва (К.Л. – моделлю), що наближає процес X з надійністю $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$ та точністю $\delta > 0$ в $L_2(T)$,*

$$P\left\{\left(\int_0^b (X(t) - X_M(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} > \delta\right\} \leq \alpha,$$

якщо M задовольняє нерівності: $\delta^2 > \hat{J}_{(M+1)1}$ та

$$\left(\frac{\delta^2 - \hat{J}_{(M+1)1}}{\hat{J}_{(M+1)2}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} exp\left\{-\frac{\delta^2 - \hat{J}_{(M+1)1}}{2\hat{J}_{(M+1)2}}\right\} \leq \alpha, \qquad \text{(D24)}$$

де $\hat{J}_{(M+1)1} = \sum_{k=M+1}^{\infty} \lambda_k^{-2}$, $\hat{J}_{(M+1)2} = (\sum_{k=M+1}^{\infty} \lambda_k^{-4})^{\frac{1}{2}}$.

В роботах [4-8] наведені аналогічні оцінки для різних функціональних просторів, і для різних зображень, а саме, для гауссівських випадкових процесів, що базуються на розкладі у ряд Фур'є, для випадкових процесів з дискретним спектром.

Окремо розглядаються оцінки для вінерівського процесу в різних функціональних просторах.

Статистичне моделювання вінерівського випадкового процесу.

Нехай (Ω, B, P)- стандартний ймовірнісний простір.

Будемо розглядати вінерівський процес на відрізку $T = [0,1]$ і використовувати зображення

за власними функціями кореляційного оператора

$$\xi_1(t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \frac{sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi t\right)}{\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)},$$

де $\{\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots\}$ - незалежні стандартні гауссівські випадкові величини,

$\lambda_k^{-2} = \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}$ - власні числа кореляційного оператора

за власними функціями кореляційного оператора броунівського мосту

$$\xi_2(t) = t\eta_0 + \sqrt{2}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{sin(i\pi t)}{i\pi}\eta_i,$$

де $\{\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots\}$ - незалежні стандартні гауссівські випадкові величини,

$\lambda_i = i\pi$ - власні числа кореляційного оператора

або розклад у ряд Фур'є на $t \in [0,1]$

$$\xi_3(t) = t\eta_0 + \sqrt{2}\sum_{i=1}^{\infty} \left(\eta_{1i}\frac{sin(2\pi it)}{2\pi i} + \eta_{2i}\frac{1-cos(2\pi it)}{2\pi i}\right),$$

де $\{\eta_{1i}, \eta_{2i}\}$ - незалежні стандартні гауссівські випадкові величини.

Модель Вінерівського процесу будується у першому випадку

$$W1(M,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{M} \eta_k \frac{sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi t\right)}{\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)},$$

у другому випадку

$$W2(M,t) = t\eta_0 + \sqrt{2}\sum_{i=1}^{M} \frac{sin(i\pi t)}{i\pi}\eta_i,$$

у третьому випадку

$W3(M,t) = t\eta_0 + \sqrt{2}\sum_{i=1}^{M}\left(\eta_{1i}\frac{sin(2\pi it)}{2\pi i} + \eta_{2i}\frac{1-cos(2\pi it)}{2\pi i}\right)$.

Кількість доданків M визначається в залежності від заданої точності та надійності моделювання в деякому функціональному просторі.

При побудові реалізацій вінерівських процесів використовуються гауссівські випадкові величини.

Моделювання гауссівського розподілу проводиться за алгоритмами:

1. $\xi_1 = \sqrt{-2\,ln(\alpha_1)}\,cos(2\pi\alpha_2)$, $\xi_2 = \sqrt{-2\,ln(\alpha_1)}\,sin(2\pi\alpha_2)$

2. $\xi_n = \sqrt{\frac{12}{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i - \frac{1}{2}\right)$

3. $\eta_n = \xi_n - \frac{41}{12440n^2}(\xi_n^5 - 10\xi_n^3 + 15\xi_n)$

де ξ_n моделюється за алгоритмом 2.

Алгоритм моделювання вінерівського процесу.

Для моделювання реалізацій вінерівського процесу використаємо алгоритм:

1. Задаємо значення точності моделювання $\delta > 0$ і надійності моделювання $0 < \alpha < 1$.

2. Для заданих точності $\delta > 0$ і надійності $0 < \alpha < 1$знаходимо кількість доданків M у зображенні

$W1(M,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{M}\eta_k\frac{sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi t\right)}{\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)}$,

або у зображенні

$$W2(M,t) = t\eta_0 + \sqrt{2}\sum_{i=1}^{M}\frac{sin(i\pi t)}{i\pi}\eta_i,$$

або у зображенні

$$W3(M,t) = t\eta_0 + \sqrt{2}\sum_{i=1}^{M}\left(\eta_{1i}\frac{sin(2\pi it)}{2\pi i} + \eta_{2i}\frac{1-cos(2\pi it)}{2\pi i}\right).$$

З формули (D24) порядок значення M у просторі $L_2([0,1])$ рівне $M = 3000$.

3. Моделюємо послідовності випадкових величин $\{\eta_i\}_{i=0}^{M}$з нормальним розподілом $N(0,1)$.

4. Перевіряємо гіпотезу про закон розподілу.

5. Для заданого кроку Δt моделюємо реалізація вінерівського випадкового процесу за відповідною формулою. Можна використовувати всі зображення вінерівського випадкового процесу

6. Крок 3- 4 повторюємо необхідне число разів.

На рис. D7-D11 зображені реалізації вінерівського процесу на інтервалі *T=[0,1]*.

Реалізації отримані за формулою

$$W2(M,t) = t\eta_0 + \sqrt{2}\sum_{i=1}^{M}\frac{sin(i\pi t)}{i\pi}\eta_i$$

для точності $\delta = 0.1$ і надійності $\alpha = 0.05$, M=10000.

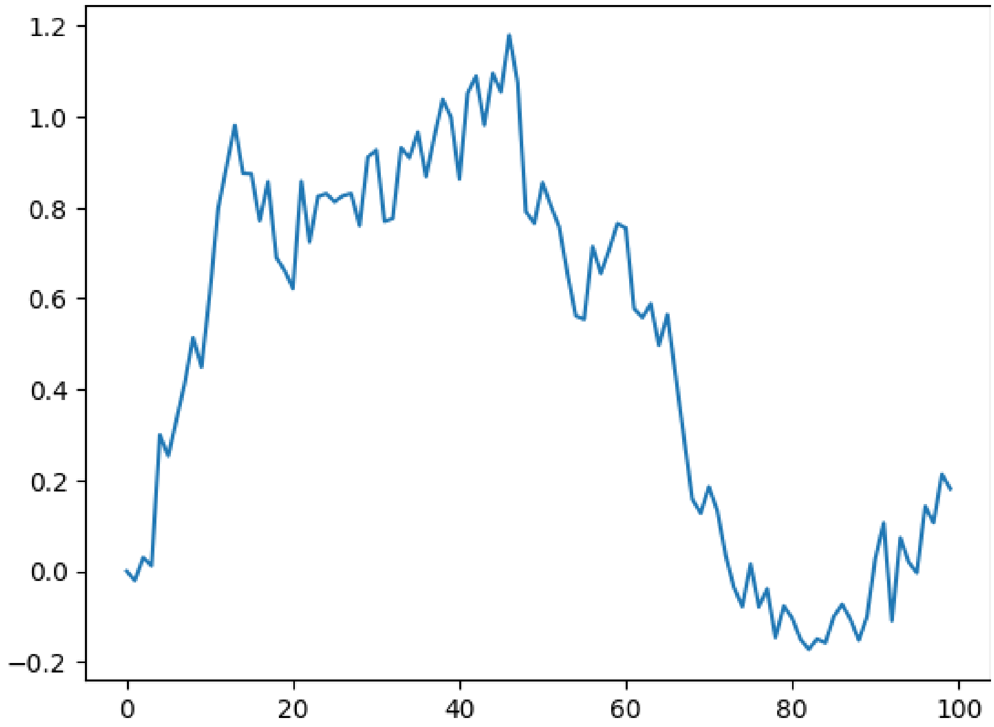


Рис. D7. Реалізація вінерівського процесу, T=1.

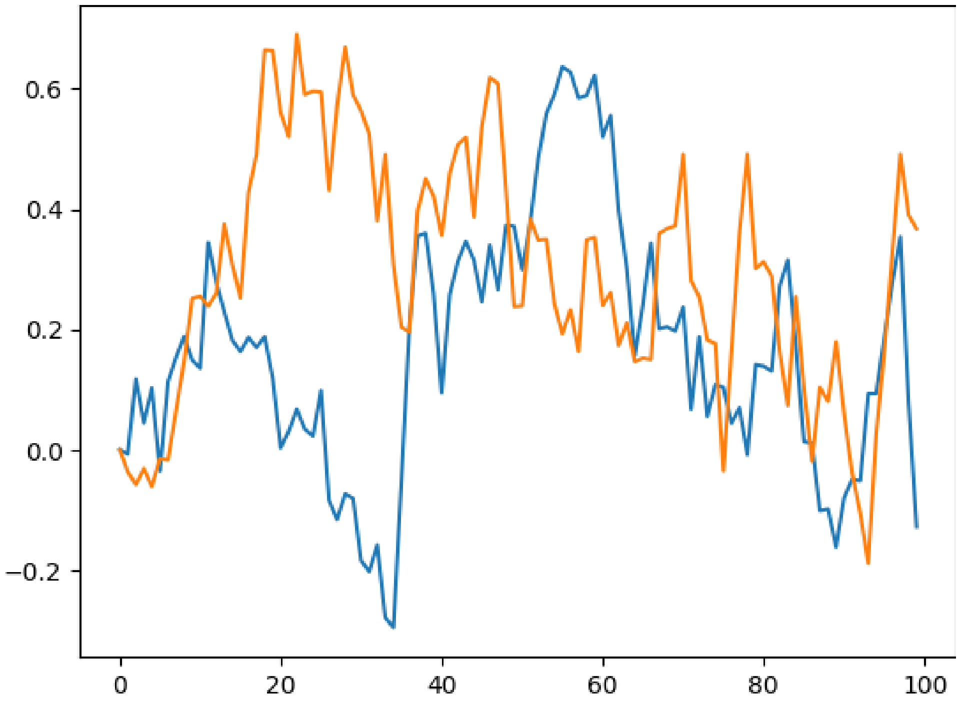


Рис. D8. Реалізація вінерівського процесу, T=1.

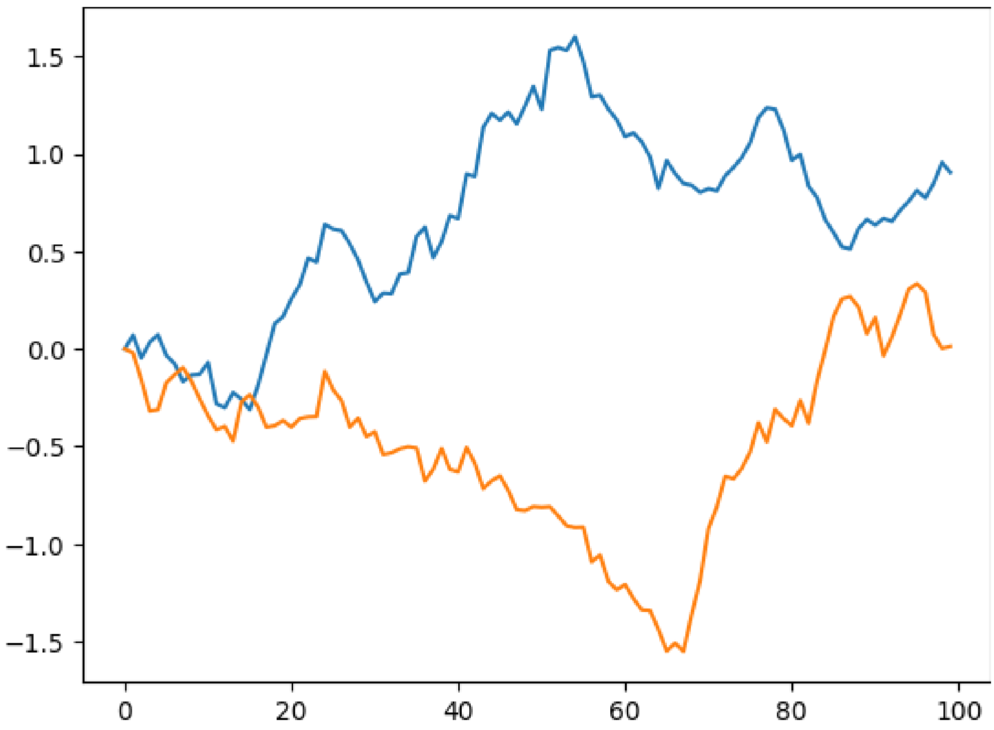


Рис. D9. Реалізація вінерівського процесу, T=1.

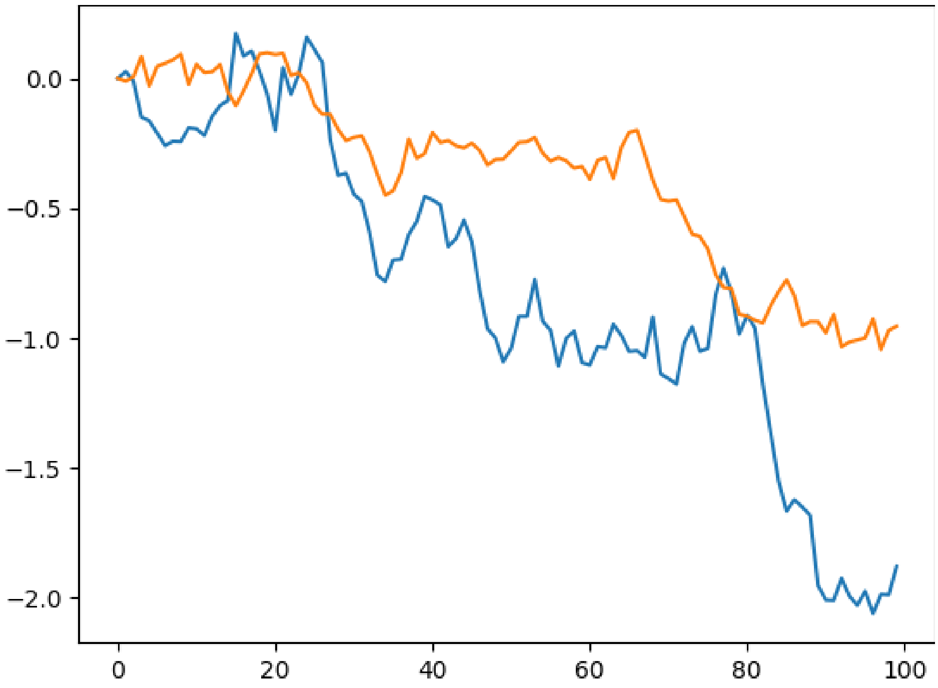


Рис. D10. Реалізація вінерівського процесу, T=1.

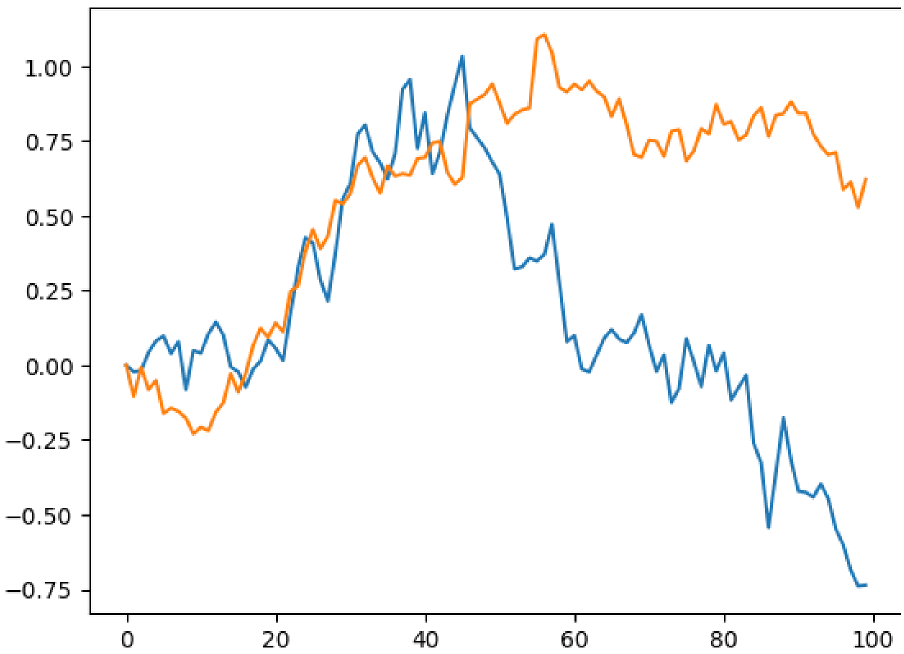


Рис. D11. Реалізація вінерівського процесу, T=1.

На рис. D12–D14 зображені реалізації вінерівського процесу на інтервалі *T=[0,1]* та *T=[0,2]*.

Реалізації отримані за формулою

$$W3(M,t) = t\eta_0 + \sqrt{2}\sum_{i=1}^{M}\left(\eta_{1i}\frac{sin(2\pi it)}{2\pi i} + \eta_{2i}\frac{1 - cos(2\pi it)}{2\pi i}\right).$$

для точності $\delta = 0.1$ і надійності $\alpha = 0.05$, M=30000.

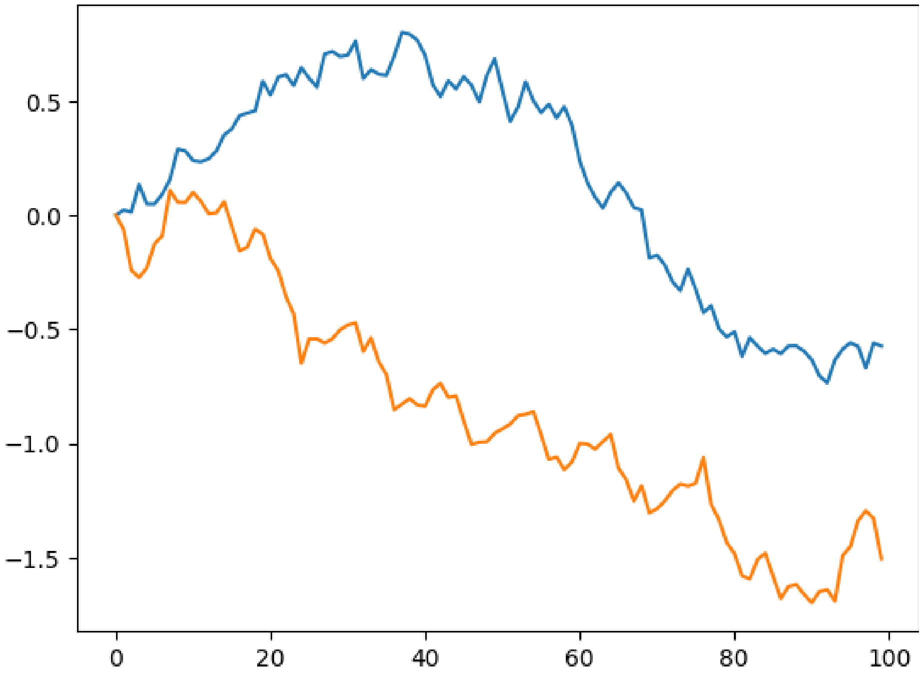


Рис. D12. Реалізація вінерівського процесу, T=1.

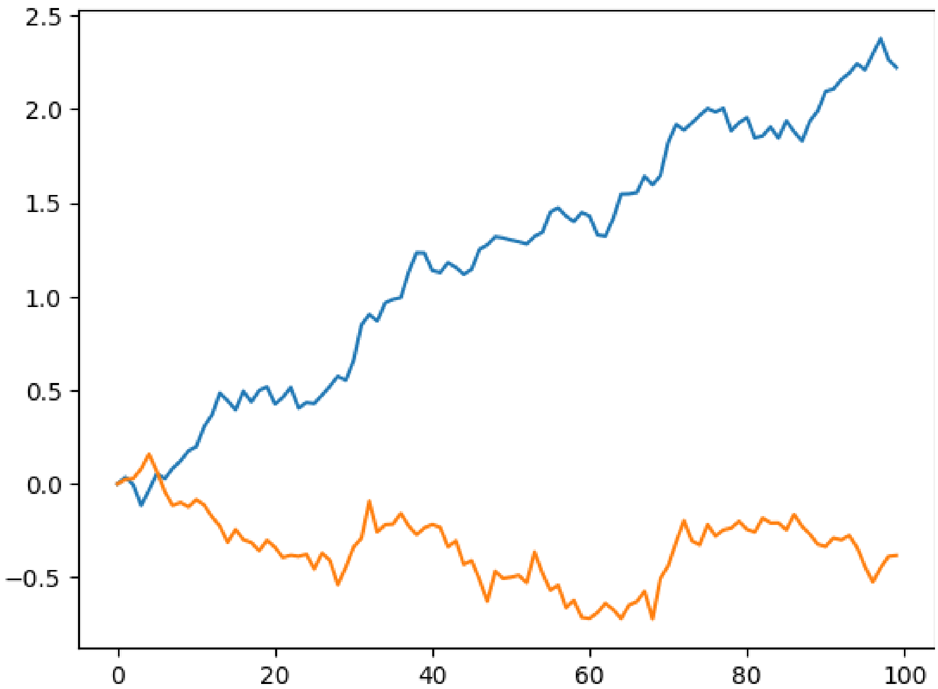


Рис. D13. Реалізація вінерівського процесу, T=1.

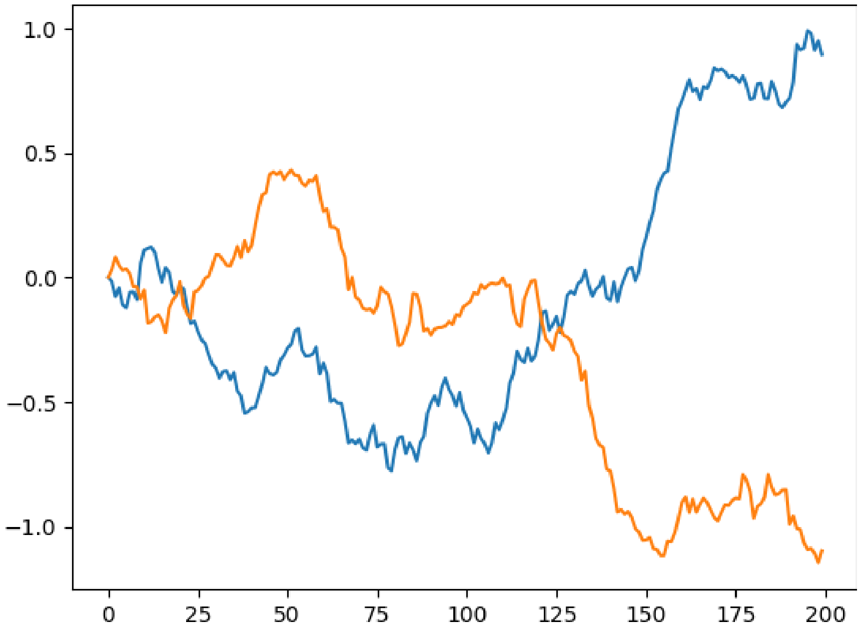


Рис. D14. Реалізація вінерівського процесу, T=2.

Як видно з графіків зображень реалізацій вінерівського процесу – поведінка реалізацій, що отримані за першою формулою, аналогічна поведінці реалізацій, що отримані за другою формулою.

Тестування реалізацій вінерівського процесу. Із властивостей вінерівського процесу випливає, що прирости реалізацій вінерівського процесу є незалежними гауссівськими випадковими величинами.

На рис. D15-D16 наведені графіки приростів реалізацій вінерівського процесу, що отримані за формулою

$$W2(M,t) = t\eta_0 + \sqrt{2}\sum_{i=1}^{M}\frac{sin(i\pi t)}{i\pi}\eta_i.$$

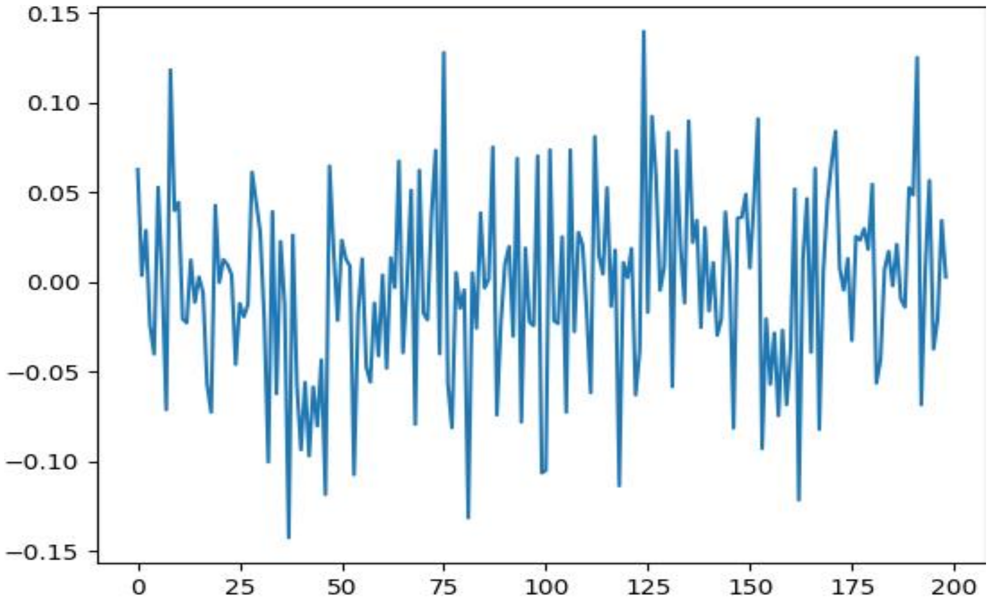


Рис. D15. Реалізація приростів вінерівського процесу, T=2.

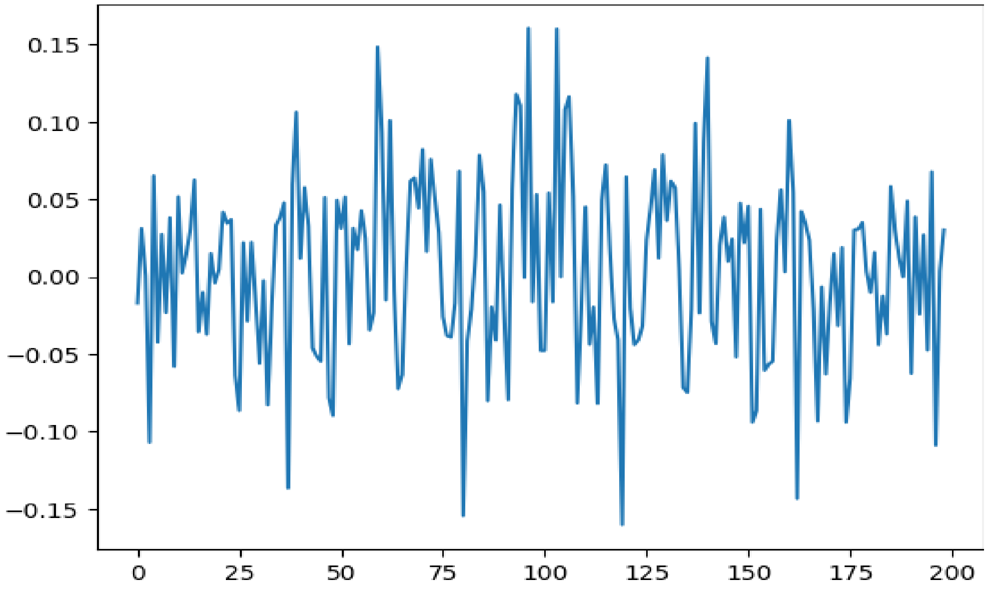


Рис. D16. Реалізація приростів вінерівського процесу, T=2.

Для перевірки гіпотези про закон розподілу скористаємось критерієм Шапіро-Вілка. Тест Шапіро-Вілка використовується для перевірки гіпотези про нормальний закон розподілу.

Тест реалізовано на мові Python. Для цього використовується функція shapiro() з бібліотеки scipy.stats.

Синтаксис

t1, t2 =shapiro(w)

де t1 – статистика Шапіро-Вілка

t2 - значення p_value.

Для проходження тесту потрібно, щоб значення p_value > 0.05.

Нижче наведено значення статистика Шапіро-Вілка та значення p_value для реалізації, що зображена на рис. 12.

t1= 0.9895495772361755

t2= 0.15589863061904907

Отже, прирости реалізацій вінерівського процесу мають нормальний закон розподілу.

На рис. D19 наведено графік приростів реалізацій вінерівського процесу, що отримані за формулою

$$W3(M,t) = t\eta_0 + \sqrt{2}\sum_{i=1}^{M}\left(\eta_{1i}\frac{sin(2\pi it)}{2\pi i} + \eta_{2i}\frac{1-cos(2\pi it)}{2\pi i}\right).$$

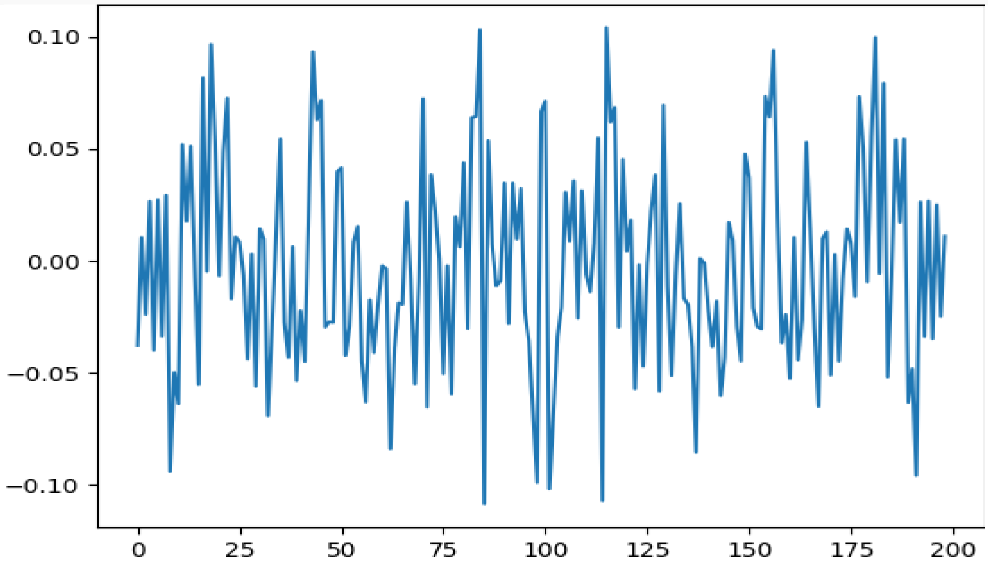


Рис. D17. Реалізація приростів вінерівського процесу, T=2.

Для перевірки гіпотези про закон розподілу скористаємось критерієм Шапіро-Вілка.

Нижче наведено значення статистика Шапіро-Вілка та значення p_value для реалізації, що зображена на рис. D19.

t1= 0.9918841123580933

t2= 0.33362793922424316

Отже, прирости реалізацій вінерівського процесу, що отримані за другою формулою, також мають нормальний або гауссівський закон розподілу.

Серед задач, де використовується вінерівський процес, слід відмітити побудову стохастичних інтегралів за вінерівським процесом. На використанні цього інтегралу побудована теорія стохастичних диференціальних рівнянь.

А моделювання реалізацій вінерівського процесу дозволяє чисельними методами розв'язувати стохастичні диференціальні рівняння.

Ще одна галузь використання вінерівського процесу – фінансова та актуарна математика.

Статистичне моделювання реалізацій вінерівського процесу дозволяє досліджувати стохастичні моделі поведінки акцій на фінансових ринках, в задачах страхування життя.

ЛІТЕРАТУРА

1. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. Навчальний посібник. - К.: Либідь, 1990. -168с.
2. Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. К.: Інформтехніка, 1995. 380 с.
3. Збірник задач з фінансової математики. Борисенко О.Д., Ю.С. Мішура, В.М. Радченко, Г.М. Шевченко. Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008.
4. Козаченко Ю.В., Пашко А.О. Моделювання випадкових процесів. - Київ. Видавничий центр 'Київський університет',1999. - 223с.
5. Козаченко Ю.В., Пашко А.О., Розора І.В. Моделювання випадкових процесів та полів. Монографія. - Київ. ВПЦ Задруга, 2007. - 230с.
6. Козаченко Ю.В., Пашко А.О. Точність і надійність моделювання випадкових процесів та полів в рівномірній метриці: монографія. – Київ, ТОВ СІК ГРУП Україна, 2016. -216с.
7. Kozachenko Yu.V., Pogorilyak O.O., Rozora I.V., Tegza A.M. Simulation of Stochastic Processes with given Accuracy and Realiability. – Elsevier. 2016.-392p.
8. Kozachenko Yu.V. Accuracy of Simulation of the Gaussian random processes with continuous spectrum / Yu.V. Kozachenko, A. A. Pashko // Computer Modelling and New Technologies. — 2014. – Vol.18, №3. — P. 7–12.
9. Pashko A.A. Simulations of standart Brownian motion / A.A. Pashko // Computer modelling and new Technologies. - 2014. Vol. 18, №10. - P. 516 – 521.

10. Козаченко Ю.В., Погоріляк О.О., Тегза А.М. Моделювання гауссівських випадкових процесів та процесів Кокса. – Ужгород: Карпати, 2012. – 194 с.

11. Томашевський В.М. Імітаційне моделювання систем і процесів. – К.: ІСДО, 1994. – 124 с.

12. Томашевський В.Н., Жданова О.Г., Жолдаков О.О. Вирішення практичних завдань методами комп'ютерного моделювання: Навч. посібник. - К.: "Корнійчук", 2001. — 268 с.

13. Ясинський В.К., Ясинська Л.І., Ясинський С.В. Детерміновані та стохастичні моделі фінансової математики. – Чернівці: Прут, 2003. -512 с.

14. Адамчук В.В. та ін. Планування проектів вирощування культур на основі статистичного імітаційного моделювання. – Ніжин: Видавець ПП Лисенко М.М., 2014. -224с.