**ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

С.О. Мащенко

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕЧІТКОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Лінійні моделі

Навчальний посібник

Київ 2024

УДК 681.513

Рецензенти: доктор фіз.-мат. наук, проф. О.Г. Наконечний;
доктор фіз.-мат. наук, проф. О.О. Марченко

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол №11 від 20.03. 2024 року)

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол №10 від 18.03. 2024 року)

д.ф.-м.н., проф. Мащенко Сергій Олегович

Мащенко С.О. Прийняття рішень в умовах нечіткої інформації. Лінійні моделі: навчальний посібник / С.О. Мащенко. – Київ: 2024. – 138 с.

Містить основи теорії розв'язання задач прийняття рішень в умовах нечіткої інформації, які описуються лінійними моделями. Викладено базові поняття теорії нечітких множин, нечіткої арифметики, основні підходи до розв'язання нечітких задач лінійного програмування, лінійних багатокритеріальних задач, основи теорії нечіткої двоїстості, основні методи розв'язання матричних ігор з нечіткими цілями та сплатами. Методи ілюструються численними прикладами застосувань та навчальними вправами.

Посібник розраховано на студентів та аспірантів, які навчаються за спеціальностями галузі знань 12 Інформаційні технології, та фахівців, які цікавляться подібними питаннями.

ЗМІСТ

ВСТУП

Традиційні методи прийняття рішень успішно застосовуються на практиці для розв’язання проблем з чітко визначеною моделлю. Такі задачі прийняття рішень зазвичай добре формалізуються в термінах конкретних чітких цілей та чіткої множини альтернатив та розв'язуються методами чіткої математики. На жаль, ситуації, які можуть виникати у реальному світі, часто не є детермінованими. Існують різні типи невизначеності у соціальних та економічних системах, такі як випадковість виникнення подій, неточність і неоднозначність вихідних даних, лінгвістична невизначеність і т. п., які відбуваються по багатьох причинах, включаючи помилки вимірювань, неповне та неточне вираження знань, суб'єктивність суджень людини. Серед різних видів невизначеності можна виділити стохастичну невизначеність і нечіткість.

Стохастична невизначеність пов’язана з невизначеністю виникнення подій (явищ). Ці події, як правило, задані чітко, проте вони різняться за частотою появи. Системи з таким типом невизначеності називаються стохастичними. Вони досліджуються за допомогою методів стохастичної оптимізації з використанням теорії ймовірностей. У деяких ситуаціях методи теорії ймовірностей застосовувати не можна. Наприклад, коли рішення приймається лише один раз або маленьку кількість разів. Також іноді особа, що приймає рішення (ОПР), може не вважати відомий розподіл ймовірностей на множині подій адекватним інструментом опису невизначеності, яка виникає в процесі прийняття рішень. Це може відбутися особливо тоді, коли інформація невизначена, стосується людської мови і поведінки, неточних та (або) неоднозначних даних, коли інформація може не бути точно заданою через обмежені знання та (або) нестачу знань. Такий тип невизначеності класифікують як нечіткість. Нечіткість пов'язана з ситуаціями прийняття рішень, в яких вибір між двома або більше альтернативами є невизначеним і виникнення кожної альтернативи невідоме через брак знань.

Система з нечіткою та неоднозначною інформацією має так звану погано визначену структуру, яка відображає людську суб'єктивність, неоднозначність та неточність. Задачі, які виникають в таких системах, не можуть бути сформульовані та ефективно розв’язані за допомогою традиційних математичних методів оптимізації чи ймовірнісних підходів стохастичної оптимізації. Проте теорія нечітких множин, яка була розроблена Заде, та методи прийняття рішень в умовах нечіткої інформації надають ефективний інструмент для дослідження таких систем.

Прийняття рішень в умовах нечіткої інформації включає в себе теорії: нечіткого математичного програмування, нечіткої багатокритеріальної оптимізації, нечітких ігор, прийняття рішень за нечітким відношенням переваги. В цьому начальному посібнику розглядаються основні з відомих методів розв’язання лінійних задач нечіткого математичного програмування, нечіткої багатокритеріальної оптимізації, нечітких ігор. В розділі 1 подані основи теорії нечітких множин, які присвячені нечітким множинам, принципам декомпозиції та узагальнення, нечітким відображенням, опуклим нечітким множинам, нечітким відношенням, серед яких нечіткі відношення переваги, подібності, строгої переваги та байдужості. Розділ 2 присвячено нечіткій арифметиці. В ньому розглядаються основи інтервальної арифметики, поняття нечіткого числа, операції над нечіткими числами, типи і порівняння нечітких чисел. В розділі 3 «Нечіткі задачі оптимізації» розглядається класифікація підходів до розв’язання задач нечіткої оптимізації та оптимізація чіткої або нечіткої цільової функції при чітких або нечітких обмеженнях. Розділ 4 присвячено нечітким задачам багатокритеріального лінійного програмування. Розглянуто підходи Циммермана, максимінний та «чіткий». Моделі нечіткої двоїстості (Рьоддера-Циммермана, модифікована та Вердегая) розглянуті в розділі 5. В розділах 6 та 7 вивчаються матричні ігри з нечіткими цілями (узагальнена модель та модель Нішізакі та Сакави) та з нечіткими сплатами.

РОЗДІЛ 1. Нечіткі множини та відношення

1.1. Нечіткі множини

У класичній математиці під множиною розуміють сукупність елементів (об'єктів), які мають деяку загальну властивість. Наприклад, множина чисел, щонайменше заданого числа; множина векторів, сума компонент яких більше за одиницю тощо. При цьому для будь-якого елемента множини розглядаються лише дві можливості: або цей елемент належить множині (тобто має дану властивість), або не належить (тобто не має даної властивості). Таким чином, при описі множини у звичайному сенсі необхідно дотримуватися чіткого критерію, який дозволяє судити про належність або неналежність будь-якого елемента до цієї множини.

В основі поняття нечіткої множини лежить уявлення про те, що елементи, що становлять дану множину і мають деяку спільну властивість, можуть мати цю властивість різною мірою і, отже, належати даній множині з "різним ступенем". При такому підході висловлювання типу "елемент належить цій множині" втрачає сенс, оскільки необхідно ще вказати, "наскільки сильно" або з яким ступенем він належить множині.

Одним із найпростіших способів математичного опису нечіткої множини є характеризування ступеня належності елемента множині числами з інтервалу [0,1]. Нехай X є множиною (у звичайному сенсі) елементів. Надалі називатимемо X універсальною множиною і розглядатимемо підмножини цієї множини.

Визначення 1.1. Нечіткою множиною C на множині X називається сукупність пар $(x, \mu_C(x))$, де $x \in X$, а $\mu_C(x)$ є функцією, $\mu_C : X \to [0,1]$, яка називається функцією належності нечіткої множини C.

Значення $\mu_C(x)$ для конкретного x називається ступенем належності цього елемента нечіткій множині C. Нечітку множину C можна представити у вигляді $C = \{(x, \mu_C(x)) : x \in X\}$

.

Чіткі (звичайні) множини становлять підклас класу нечітких множин. Дійсно, функцією належності чіткої множини $B \subseteq X$ є її характеристична функція:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B. \end{cases}$$

Відповідно до визначення нечіткої множини чітку множина B можна також визначити як сукупність пар виду $B = \{(x, \mu_B(x)) : x \in X\} = \bigcup_{x \in X} (x, \mu_B(x))$. Таким чином, нечітка множина є більш широким поняттям, ніж чітка множина, в тому сенсі, що функція належності нечіткої множини може бути, взагалі кажучи, довільною функцією або навіть довільним відображенням.

Визначення 1.2. Носієм нечіткої множини A з функцією належності $\mu_A(x)$ (позначимо його $\mathrm{supp}(A)$) називається множина (у звичайному сенсі) виду $\mathrm{supp}(A) = \left\{ x : x \in X,\ \ \mu_A(x) > 0 \right\}$.

Визначення 1.3. Величина $h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$ називається висотою нечіткої множини A.

Визначення 1.4. Нечітка множина A називається нормальною, якщо виконується рівність $h(A) = 1$. В іншому випадку вона називається субнормальною.

Слід відмітити, що перетин нечітких множин часто виявляється субнормальним. Субнормальна множина може бути перетвореною до нормальної (нормалізованою), якщо розділити функцію належності $\mu(x)$ цієї множини на величину $h(A)$. Однак варто врахувати, що при застосуванні такого перетворення у конкретній задачі необхідно враховувати сенс нечіткої множини у предметній області, що розглядається.

Приклад 1.1. Нехай $X = \{18, 20, 22, 24\}$ можливі значення температури (в град. С) в приміщенні. Тоді нечітку множина A «Комфортна температура в приміщенні», яку може визначити особа, може задаватися функцією належності $\mu_A(18) = 0.5$, $\mu_A(20) = 0.8$, $\mu_A(22) = 1$, $\mu_A(24) = 0.7$. Цю нечітку множину можна представити як

$$A = \{(18, 0.5), (20, 0.8), (22, 1), (24, 0.7)\}.$$

Нечітка множина A є нормальною. Якщо б, наприклад, $\mu_A(22) = 0.9$, то така множина була б субнормальною.

Операції над нечіткими множинами. Розглянемо стандартні операції над нечіткими множинами.

Нечітка множина $\varnothing$ називається порожньою, якщо її функція належності дорівнює нулю на всій множині X, тобто $\mu_{\varnothing}(x) = 0$, $\forall x \in X$.

Універсальну множину X також можна описати функцією належності виду $\mu_X(x) = 1$, $\forall x \in X$.

Нехай A і B є нечіткими множинами на X, а $\mu_A(x)$ й $\mu_B(x)$ відповідно їхні функції належності.

Будемо говорити, що A містить у собі B (включає) (тобто $B \subseteq A$), якщо для будь-якого $x \in X$ виконується нерівність $\mu_B(x) \le \mu_A(x)$. Слід зазначити, якщо $B \subseteq A$, то й $\operatorname{supp}(B) \subseteq \operatorname{supp}(A)$.

Нечіткі множини A і B дорівнюють одна іншій ($A = B$), якщо $A \subseteq B$ та $B \subseteq A$, тобто $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, $\forall x \in X$.

Об'єднанням нечітких множин $A, B \subseteq X$ називається нечітка множина $A \bigcup B$ з функцією належності:

$$\mu_{A \bigcup B}(x) = \max\left\{\mu_A(x), \mu_A(x)\right\},\ x \in X.$$

Операція об'єднання дозволяє представити задану нечітку множину $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ у вигляді $A = \bigcup\limits_{x \in X} (x, \mu_A(x))$ об'єднання пар $(x, \mu_A(x))$, $x \in X$.

Перетином нечітких множин $A, B \subseteq X$ називається нечітка множина $A \bigcap B$ з функцією належності:

$$\mu_{A \bigcap B}(x) = \min\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\},\ x \in X.$$

Доповненням нечіткої множини A називається нечітка множина $\overline{A}$ з функцією належності $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$, $\forall x \in X$.

Цікаво, що при такому визначенні можливо, що $\overline{A} \bigcap A \ne \varnothing$ та $\overline{A} \bigcup A \ne X$.

Різницею множин A і B називається нечітка множина $A \setminus B$ з функцією належності

$$\mu_{A \setminus B} = \max\{\mu_A(x) - \mu_B(x), 0\}.$$

Декартовим добутком нечітких множин A_i на X_i, $i = 1, 2, ..., n$ називається нечітка множина $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ на $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ з функцією належності

$$\mu_A(x) = \min\left\{\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\right\}, \ x = (x_1, ..., x_n) \in X.$$

Для носіїв нечітких множин справедливі такі властивості:

$$\text{supp } (A \bigcup B) = (\text{supp } A) \bigcup (\text{supp } B),$$

$$\text{supp } (A \bigcap B) = (\text{supp } A) \bigcap (\text{supp } B),$$

$$\text{supp } (\overline{A}) = \overline{\text{supp } A},$$

$$\text{supp } (A \setminus B) = (\text{supp } A) \setminus (\text{supp } B),$$

$$\text{supp } (A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) = \text{supp } A_1 \times \text{supp} A_2 \times ... \times \text{supp} A_n.$$

1.2. Декомпозиція нечітких множин

В основі принципу декомпозиції нечітких множин лежить поняття множини рівня.

Визначення 1.5. Множиною $A_\alpha = \left\{x : x \in X, \ \mu_A(x) \geq \alpha\right\}$ рівня α, $\alpha \in [0,1]$ нечіткої множини A на X називається множина (у звичайному сенсі), яка складається з елементів $x \in X$ із ступенями належності нечіткій множині A не меншими за число α.

Операції над множинами рівня аналогічні операціям над самими нечіткими множинами:

- об'єднання $(A \bigcup B)_\alpha = A_\alpha \bigcup B_\alpha$
- перетин $(A \bigcap B)_\alpha = A_\alpha \bigcap B_\alpha$,
- доповнення $(\overline{A})_\alpha = \overline{A}_\alpha$,
- різниця $(A \setminus B)_\alpha = A_\alpha \setminus B_\alpha$,
- декартів добуток

$$(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n)_\alpha = (A_1)_\alpha \times (A_2)_\alpha \times ... \times (A_n)_\alpha.$$

Одним з основних інструментів дослідження в теорії нечітких множин є декомпозиція (розклад) нечіткої множини на її множини рівня, що дозволяє представити (подати) її у вигляді $A = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha A_\alpha$, де $\alpha A_\alpha = \{(x,\alpha) : x \in A_\alpha\}$ є нечіткою множиною, що складається з елементів чіткої множини A_α рівня α, яким наданий ступінь належності α, $\alpha \in [0,1]$, тобто

$$\mu_{\alpha A_\alpha} = \begin{cases} \alpha, \ x \in A_\alpha; \\ 0, \ x \notin A_\alpha. \end{cases}$$

Приклад 1.2. Нехай на $X = \{1,...,6\}$ задана нечітка множина

$A = \{(0, 0.2), (1, 0.4)(2, 0.7), (3,1), (4, 0.7), (5, 0.4), (6, 0.2)\}$.

Тоді A можна декомпозувати на такі множини рівня:

$$A_{0,2} = \{0,...,6\}, \ A_{0.4} = \{1,...,5\}, \ A_{0.7} = \{2,3,4\}, \ A_1 = \{3\}$$

і представити A у вигляді:

$$A = \{(0, 0.2),...,(6, 0.2)\} \bigcup \{(1, 0.4),...,(5, 0.4)\} \bigcup$$
$$\bigcup \{(2, 0.7), (3, 0.7), (4, 0.7)\} \bigcup \{(3,1)\}.$$

1.3. Принцип узагальнення

Принцип узагальнення Заде для нечітких множин, по суті, є засобом, що дозволяє розширити область визначення будь-якого відображення на всі її підмножини, також і нечіткі. Формально принцип узагальнення можна сформулювати так.

Нехай $\phi : X \to Y$ є чітким відображенням, A є нечіткою множиною на універсальній множині X з функцією належності $\mu_A(x)$. Принцип узагальнення стверджує, що образ нечіткої множини A при відображенні ϕ є нечіткою множиною

$$B = \phi(A) = \phi(\bigcup_{x\in X} (x, \mu_A(x)) \equiv \bigcup_{x\in X} (\phi(x), \mu_A(x)) = \bigcup_{y\in Y} (y, \mu_B(y)) \quad (1.1)$$

універсальної множини Y. Ця множина є сукупністю пар виду $(y, \mu_B(y))$, де $\mu_B : Y \to [0,1]$ - функція належності образу. Очевидно, що

$$\mu_B(y) = \sup_{x\in\phi^{-1}(y)} \mu_A(x), \ y \in Y, \quad (1.2)$$

де $\phi^{-1}(y) = \{x \in X : \phi(x) = y\}$ є множиною всіх елементів $x \in X$, образом кожного з яких при відображенні ϕ є елемент $y \in Y$. Іноді зручно застосовувати інше подання функції належності

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X : y = \phi(x)} \mu_A(x), \ y \in Y.$$

У деяких випадках зручно використовувати принцип узагальнення в іншій формі, яка випливає з (1.1) шляхом розкладання A на множині рівня. Таким чином, із представлення $A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha$, де A_α є відповідною множиною рівня α нечіткої множини A, $\alpha \in [0,1]$, отримаємо принцип узагальнення у вигляді:

$$\phi(A) = \phi(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha) \equiv \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \phi(\alpha A_\alpha). \qquad (1.3)$$

Принцип узагальнення у формі (1.3) дозволяє розширити область визначення X відображення ϕ, включивши до неї поряд із звичайними чіткими підмножинами X також нечіткі множини на X. Слід зазначити, що формули (1.1) і (1.3) еквівалентні через те, що одна випливає з іншої перегрупуванням членів розкладу множини A.

Для n-вимірного відображення $\phi : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to Y$ принцип узагальнення приймає такий вигляд. Нехай задані нечіткі множини A_i на X_i, $i = 1, 2, ..., n$ з функціями належності $\mu_i(x_i)$, $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, ..., n$, відповідно. Принцип узагальнення Заде дозволяє розширити область визначення $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ чіткої функції $y = \phi(x_1, ..., x_n)$ на декартів добуток $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ нечітких множин A_i, $i = 1, 2, ..., n$ так, що $B = \phi(A_1, ..., A_n)$. Тут нечітка множина

$$B = \{(y, \mu_B(y)) : y = \phi(x_1, ..., x_n), \ x = (x_1, ..., x_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n\}$$

має функцію належності

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X : y = \phi(x)} \min\{\mu_1(x_1), ..., \mu_n(x_n)\}, \ y \in Y.$$

Приклад 1.3. Нехай на $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ задана нечітка множина $A = \{(-1, 0.5), (0, 0.8), (1, 1), (2, 0.4)\}$ і відображення $y = x^2$. За (1.2) образом A є нечітка множина B на $Y = \{0, 1, 4\}$ із значеннями функції належності:

$$\mu_B(0) = \mu_A(0) = 0.8\,,$$
$$\mu_B(1) = \max\{\mu_A(-1), \mu_A(1)\} = \max\{0.5, 1\} = 1\,,$$
$$\mu_B(4) = \mu_A(2) = 0.4\,.$$

1.4. Нечітке відображення множин

Нечітке відображення $\tilde{\phi}$ чіткої множини можна задати як відображення, при якому елементу $x \in X$ ставиться у відповідність не конкретний елемент множини Y, а нечітка підмножина множини Y. Таке нечітке відображення $\tilde{\phi}$ задається функцією належності $\mu_{\tilde{\phi}} : X \times Y \to [0,1]$ так, що функція $\mu_{\tilde{\phi}}(x, y)$ (при фіксованому $x = x_0$) є функцією належності нечіткої множини на Y і є нечітким образом елемента x_0. У рамках цієї концепції можна визначити поняття нечіткого відображення нечіткої множини.

Визначення 1.6. Нехай $\mu_{\tilde{\phi}} : X \times Y \to [0,1]$ є нечітким відображенням нечіткої множини A на X з функцією належності $\mu_A(x)$. Образом на Y нечіткої множини A при нечіткому відображенні $\mu_{\tilde{\phi}} : X \times Y \to [0,1]$ називається нечітка множина B з функцією належності

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min\left\{\mu_{\tilde{\phi}}(x, y), \mu_A(x)\right\}. \qquad (1.4)$$

У випадку, коли $\mu_{\tilde{\phi}}(x, y)$ є чітким відображенням, тобто

$$\mu_{\phi}(x, y) = \begin{cases} 1, & y = \phi(x); \\ 0, & y \neq \phi(x); \end{cases}$$

то формула (1.4) приймає вигляд $\mu_B(y) = \sup\limits_{x \in \phi^{-1}(y)} \mu_A(x),\ y \in Y,$ який співпадає з (1.1).

Приклад 1.4. В табл. 1.1 задане нечітке відображення $\tilde{\phi}$ з функцією належності $\mu_{\tilde{\phi}}(x, y)$, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

Таблиця 1.1.

Нечітке відображення $\tilde{\phi}$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.7	1	0.1	0.3
x_2	0.7	0.4	0.7	0.5
x_3	0.3	0.4	0.1	0.2

Також на $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ задана нечітка множина $A = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.6), (x_3, 1)\}$. Тоді за (1.4) образом A є нечітка множина B на $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ з функцією належності

$$\mu_B(y_1) = \max\{\min\{0.7, 0.4\}, \min\{0.7, 0.6\}, \min\{0.3, 1\}\} = 0.6,$$

$$\mu_B(y_2) = \max\{\min\{1, 0.4\}, \min\{0.4, 0.6\}, \min\{0.4, 1\}\} = 0.4,$$

$$\mu_B(y_3) = \max\{\min\{0.1, 0.4\}, \min\{0.7, 0.6\}, \min\{0.1, 1\}\} = 0.6,$$

$$\mu_B(y_4) = \max\{\min\{0.3, 0.4\}, \min\{0.5, 0.6\}, \min\{0.2, 1\}\} = 0.5.$$

1.5. Опуклі нечіткі множини

Поняття опуклості чітких множин відіграє важливу роль у математичному програмуванні та теорії ігор. Тому узагальнення поняття опуклості на випадок нечітких множин є важливим в теорії прийняття рішень в умовах нечіткої інформації.

Визначення 1.7. Нечітка множина A на $\mathbb{R}^n$ називається опуклою нечіткою множиною, якщо множини A_α її α-рівнів є (чіткими) опуклими множинами для всіх $\alpha \in (0,1]$.

Визначення 1.8. Нечітка множина A на $\mathbb{R}^n$ називається обмеженою нечіткою множиною, якщо множини A_α її α-рівнів є (чіткими) обмеженими множинами для всіх $\alpha \in (0,1]$.

Теорема 1.1. Нечітка множина A на $\mathbb{R}^n$ є опуклою нечіткою множиною тоді і тільки тоді, коли її функція належності μ_A є квазі-опуклою вгору, тобто для всіх $x, y \in \mathbb{R}^n$ і $\lambda \in [0,1]$ має місце нерівність

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} . \qquad (1.5)$$

Доведення. Нехай A є опуклою нечіткою множиною. Припустимо, що $\alpha = \mu_A(x) \leq \mu_A(y)$. Тоді для $x, y \in A_\alpha$ з опуклості A_α випливає включення $\lambda x + (1-\lambda) y \in A_\alpha$. Тому $\mu_A(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \alpha = \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$.

Навпаки, якщо μ_A задовольняє нерівності (1.5), то для $\alpha = \mu_A(x)$ множину A_α можна розглядати у вигляді $\{y : \mu_A(y) \geq \alpha = \mu_A(x)\}$. Тому для $\forall x, y \in A_\alpha$ має місце нерівність $\mu_A(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} = \alpha$, з якої випливає включення $\lambda x + (1-\lambda) y \in A_\alpha$. Отже, A_α є опуклою множиною для кожного $\alpha \in (0,1]$.

На рис. 1.1. та 1.2. зображено опуклу та неопуклу нечіткі множини відповідно. Жирною лінією виділені множини рівня 0.6. На рис. 1.1. ця множина є відрізком [2.6,4.4], який є опуклою множиною, а на рис. 1.2. множина рівня 0.6 є неопуклою множиною $[2.6, 4.4] \bigcup [4.6, 5.4]$.

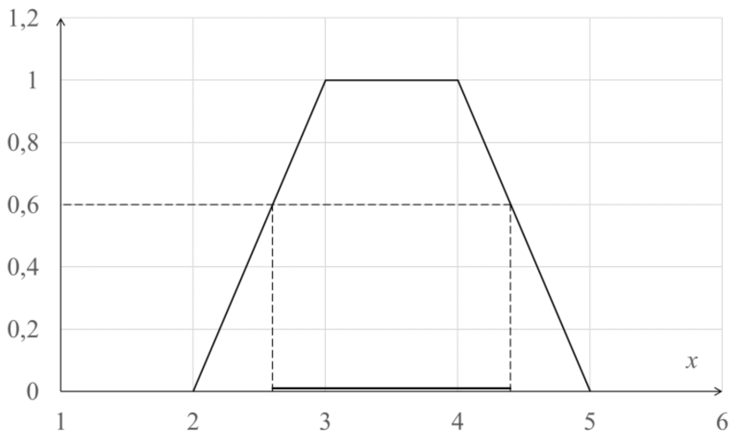

Рис. 1.1. Опукла нечітка множина.

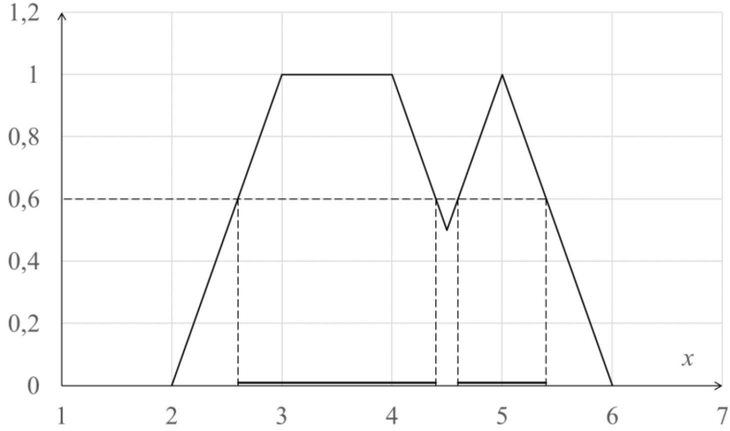

Рис. 1.2. Неопукла нечітка множина.

Одним із важливих результатів теорії опуклих чітких множин є теорема відокремлення, яка стверджує, що якщо A і B є опуклими множинами в $\mathbb{R}^n$, які не перетинаються, то існує поділяюча гіперплощина H така, що A і B знаходяться по різні боки від H. Поняття поділяючої гіперплощини узагальнюється в теорії нечітких множин так.

Нехай A і B є обмеженими нечіткими множинами на $\mathbb{R}^n$. Також нехай H є гіперплощиною в $\mathbb{R}^n$, для якої існує число K_H, що з одного боку від H виконується нерівність $\mu_A(x) \le K_H$, а з іншого боку від H виконується нерівність $\mu_B(x) \le K_H$. Позначимо Η сімейство всіх таких гіперплощин H. Тоді $D = 1 - \inf\limits_{H \in \mathrm{H}} K_H$ називається ступенем подільності A і B.

Теорема 1.2. Нехай A і B є обмеженими нечіткими множинами на $\mathbb{R}^n$ з висотами $h(A)$ і $h(B)$ відповідно. Припустимо, що D є ступенем подільності A і B. Тоді $D = 1 - h(A \bigcap B)$.

1.6. Нечіткі бінарні відношення

Аналогічно «звичайним» чітким бінарним відношенням можна запровадити поняття нечіткого бінарного відношення.

Визначення 1.9. Нечітким бінарним відношенням R на універсальній множині X називається нечітка підмножина декартового добутку $X \times X$ з функцією належності $\mu_R(x, y)$, $x, y \in X$.

Для нечітких бінарних відношень операції об'єднання, перетину, різниці та доповнення, а також поняття носія та множини рівня нечіткого відношення вводяться аналогічно відповідним поняттям для нечітких множин. Нехай R і S є нечіткими відношеннями на універсальній множині X з функціями належності $\mu_R(x, y)$ і $\mu_S(x, y)$, $x, y \in X$ відповідно. Тоді:

- об'єднанням $R \bigcup S$ нечітких відношень R і S називається нечітке відношення з функцією належності

$$\mu_{R \cup S}(x, y) = \max\left\{\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)\right\},\ x, y \in X\ ;$$

- перетином $R \bigcap S$ нечітких відношень R і S називається нечітке відношення з функцією належності

$$\mu_{R \cap S}(x, y) = \min\left\{\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)\right\},\ \ x, y \in X\ ;$$

- різницею $R \setminus S$ нечітких відношень R і S називається нечітке відношення з функцією належності

$$\mu_{R \setminus S}(x, y) = \max\{\mu_R(x, y) - \mu_S(y, x), 0\}\ ;$$

- доповненням нечіткого бінарного відношення R на множині X називається нечітке відношення $\overline{R}$ з функцією належності

$$\mu_{\overline{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y),\ \ x, y \in X\ ;$$

- оберненим до нечіткого бінарного відношення R називається нечітке відношення R^{-1} з функцією належності

$$\mu_{R^{-1}}(x, y) = \mu_R(y, x),\ \ x, y \in X\ ;$$

- носієм нечіткого відношення R на множині X називається чітка множина

$$\operatorname{supp}(R) = \{(x, y) \in X \times X : \mu_R(x, y) > 0\}\ ;$$

- множиною рівня α нечіткого відношення R на множині X називається чітка множина

$$R_\alpha = \left\{(x,y) \in X \times X \,\middle|\, \mu_R(x,y) \geq \alpha\right\}.$$

Операція композиції (добутку) вводиться різними способами:

- для максимінної композиції нечітких відношень R і S

$$\mu_{R \times S}(x,y) = \sup_{z \in X} \min(\mu_R(x,z), \mu_S(z,y));$$

- для мінімаксної композиції

$$\mu_{R \times S}(x,y) = \inf_{z \in X} \max(\mu_R(x,z), \mu_S(z,y));$$

- для максимультиплікативної композиції

$$\mu_{R \times S}(x,y) = \sup_{z \in X}(\mu_R(x,z) \circ \mu_S(z,y)).$$

Оскільки для $\forall x, y, z \in X$ виконуються нерівності:

$$\max(\mu_R(x,z),\ f_S(z,y)) \geq$$

$$\min(\mu_R(x,z), \mu_S(z,y)) \geq$$

$$\mu_R(x,z) \circ \mu_S(z,y),$$

то, якщо позначити через R_1^2, R_2^2, R_3^2 - відповідно максимінну, мінімаксну та максимультиплікативну композиції відношення R самого на себе, матимемо: $R_1^2 \supseteq R_2^2 \supseteq R_3^2$.

У разі скінченої універсальної множини $X = \{x_1, ..., x_n\} = \{x_i\}_{i \in N}$, де $N = \{1, ..., n\}$, бінарне відношення R можна задавати матрицею $A(R) = \{a_{ij}\}_{i,j \in N}$, елементами якої можуть бути довільні числа з інтервалу [0,1]. По суті, ця матриця аналогічна матриці, що описує «звичайне» бінарне відношення, оскільки її елементи набувають значення не тільки 0 або 1, а й проміжні між ними значення. Факт, що елемент a_{ij} матриці дорівнює $\alpha \in [0,1]$, означає, що ступінь, з яким $x_i \in X$ знаходиться у відношенні R з $x_j \in X$, дорівнює α. Інтерпретація операцій над нечіткими бінарними відношеннями в термінах матриць, які їх задають, така сама, як і у випадку «звичайних» бінарних відношень.

Розглянемо основні властивості нечітких бінарних відношень, що використовуються в теорії прийняття рішень:

- рефлексивність ($\mu_R(x,x)=1, \quad \forall x \in X$);
- антирефлексивність ($\mu_R(x,x)=0, \quad \forall x \in X$);
- симетричність ($\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x), \quad \forall x,y \in X$);
- асиметричність ($\min((\mu_R(x,y),\mu_R(y,x))=0, \quad \forall x,y \in X$);
- антисиметричність ($\min((\mu_R(x,y),\mu_R(y,x))=0, \quad \forall x \neq y \in X$);
- транзитивність ($R \circ R \subseteq R$).

1.7. Нечіткі відношення переваги, подібності, строгої переваги та байдужості

Нечітким відношенням нестрогої переваги R на універсальній множині X з функцію належності $\mu_R(x,y)$, $x,y \in X$ називатимемо будь-яке задане на цій множині рефлексивне нечітке бінарне відношення. Рефлексивність нечіткого відношення переваги відбиває той природний факт, що будь-який $x \in X$ не гірше самого себе, тобто $\mu_R(x,x)=1$ для $\forall x \in X$. Для будь-якої пари $x, y \in X$ значення $\mu_R(x,y)$ розуміють як ступінь переваги x у порівнянні з y. Рівність $\mu_R(x,y)=0$ може означати або те, що має місце зворотна перевага з деяким позитивним ступенем, тобто $\mu_R(y,x)>0$, або те, що x і y не можна порівняти між собою з жодним позитивним ступенем, тобто $\mu_R(y,x)=0$.

За заданим на множині X нечітким відношенням переваги аналогічно звичайним відношеннями переваги можна однозначно визначити відповідні нечіткі відношення:

- строгої переваги $S = R \setminus R^{-1}$ з функцією належності

$$\mu_S(x,y)=\max\{\mu_R(x,y)-\mu_R(y,x),0\}.$$

- подібності (квазіеквівалентності) $Q = R \cap R^{-1}$ з функцією належності $\mu_Q(x,y)=\min\left\{\mu_R(x,y),\ \mu_R(y,x)\right\}$.

- байдужості $I = (\overline{R \cup R^{-1}}) \cup (R \cap R^{-1})$ з функцією належності $\mu_I(x,y)=\max\{1-\max\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\},\min\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\}\}$, де R^{-1} є оберненим відношенням до R.

Строга перевага є асиметричною частиною відношення переваги, тому в цьому відношенні знаходяться такі елементи $x, y \in X$, що x краще за y, але y не краще за x.

Відношення подібності є симетричною частиною відношення переваги, тобто у цьому відношенні знаходяться пари елементів $x,\ y \in X$, які взаємно переважають (не строго) один іншого.

Відношення байдужості можна охарактеризувати ступенем відсутності строгої переваги.

Нечіткі відношення байдужості, подоби та строгої переваги успадковують властивості їх чітких прототипів:

- нечітке відношення строгої переваги є антирефлексивним та асиметричним;
- нечіткі відношення байдужості та подібності є рефлексивними та симетричними;
- якщо нечітке відношення нестрогої переваги є транзитивним, то нечіткі відношення подібності та строгої переваги є також транзитивними.

Питання для самоперевірки до Розділу 1

1. Дайте означення нечіткої множини.
2. Наведіть приклад нечіткої нормальної множини.
3. Чи може перетин нечіткої множин з її доповненням бути непорожньою множиною?
4. Які множини рівня має нечітка множина
$$A = \{(0, 0.3), (1, 0.5)(2, 0.8), (3,1), (4, 0.8), (5, 0.8), (6, 0.5)\}\ ?$$
5. В чом полягає принцип узагальнення Заде?
6. Чи повинна бути опуклою функція належності опуклої нечіткої множини?
7. Дайте означення нечіткого відношення переваги.

РОЗДІЛ 2. Нечітка арифметика

Нечітка арифметика (арифметика нечітких чисел) є узагальненням інтервальної арифметики. В цьому узагальненні замість інтервалів одного рівня розглядаються сукупність множин рівнів нечітких чисел, які є замкненими та обмеженими інтервалами.

2.1. Інтервальна арифметика

Нехай $A=[a_1,a_2]$ і $B=[b_1,b_2]$ є замкненими інтервалами на $\mathbb{R}$. Сумою (різницею) інтервалів A і B називають замкнений інтервал

$$A+B=[a_1,a_2]+[b_1,b_2]=[a_1+b_1,a_2+b_2]$$

$$(A-B=[a_1,a_2]-[b_1,b_2]=[a_1-b_1,a_2-b_2]).$$

Віддзеркаленням інтервалу $A=[a_1,a_2]$ називають замкнений інтервал $\overline{A}=\overline{[a_1,a_2]}=[-a_2,-a_1]$.

Добутком інтервалів A і B називають замкнений інтервал

$$A\cdot B=[a_1,a_2]\cdot[b_1,b_2]=$$
$$[\min\{a_1b_1,a_2b_2,a_2b_1,a_2b_2\},$$
$$\max\{a_1b_1,a_2b_2,a_2b_1,a_2b_2\}].$$

Якщо інтервали $A,B\in\mathbb{R}_+$, де $\mathbb{R}_+$ є множиною невід'ємних дійсних чисел, то формула добутку приймає вигляд $A\cdot B=[a_1,a_2]\cdot[b_1,b_2]=[a_1b_1,a_2b_2]$.

Нехай $A=[a_1,a_2]$ є замкненим інтервалом на $\mathbb{R}_+$ та $k\in\mathbb{R}_+$. Якщо вважати скаляр k замкненим інтервалом $[k,k]$, то добуток $A\cdot k$ визначається як $A\cdot k=[a_1,a_2]\cdot k=[a_1k,a_2k]$.

Оберненим інтервалом до $A=[a_1,a_2]\subset\mathbb{R}_+$ за умовою $0\notin[a_1,a_2]$ називається замкнений інтервал $A^{-1}=[a_1,a_2]^{-1}=[1/a_1,1/a_2]$.

Операція ділення інтервалів A і B за умовою $0\notin[b_1,b_2]$ визначається як добуток інтервалів $[a_1,a_2]$ і $[1/b_1,1/b_2]$. Тому

$$A:B=[a_1,a_2]:[b_1,b_2]=$$
$$[\min\{a_1/b_1,a_2/b_2,a_2/b_1,a_2/b_2\},$$
$$\max\{a_1/b_1,a_2/b_2,a_2/b_1,a_2/b_2\}].$$

Якщо інтервали $A,B\in\mathbb{R}_+$ і $0\notin[b_1,b_2]$, то формула ділення приймає простіший вигляд $A:B=[a_1,a_2]:[b_1,b_2]=[a_1/b_1,a_2/b_2]$.

Операції max ($\vee$) та min ($\wedge$) над інтервалами A і B визначаються як

$$A\vee B=[a_1,a_2]\vee[b_1,b_2]=[\max\{a_1,b_1\},\max\{a_2,b_2\}],$$
$$A\wedge B=[a_1,a_2]\wedge[b_1,b_2]==[\min\{a_1,b_1\},\min\{a_2,b_2\}].$$

Зауваження 2.1. Операції суми (+) та добутку (·) замкнених інтервалів є комутативними та асоціативними, але різниця (-) та ділення (:) не є ні комутативними, ні асоціативними. Крім того, $A+\overline{A}=[a_1,a_2]+[-a_2,-a_1]\neq[0,0]\equiv 0$. У випадку, коли $A=[a_1,a_2]\subset\mathbb{R}_+$ та $0\notin[a_1,a_2]$, маємо $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A\neq[1,1]\equiv 1$.

2.2. Поняття нечіткого числа

В реальних життєвих ситуаціях замість чітких дійсних чисел іноді доводиться мати справу з «приблизними» числами типу «числа, близькі до заданого дійсного числа *a*». Оскільки дійсне число *a* близьке до самого себе, то будь-яка нечітка множина *A* на $\mathbb{R}$, яка моделює це нечітке твердження, повинна бути нормальною нечіткою множиною, тобто $\mu_A(a)=1$. Окрім цього, властивості цієї множини повинні забезпечити коректність арифметичних операцій. Ці ідеї приводять до такого визначення.

Визначення 2.1. Нечітка множина *A* на $\mathbb{R}$ називається нечітким числом, якщо вона задовольняє умовам:

- *A* є нормальною нечіткою множиною;
- множина A_α рівня α для будь-якого $\alpha\in(0,1]$ є замкненим інтервалом;
- носій $\mathrm{supp}(A)$ нечіткої множини *A* є обмеженим.

Наступна теорема дає повну характеристику нечіткого числа.

Теорема 2.1. Нечітка множина *A* на $\mathbb{R}$ є нечітким числом тоді й лише тоді, коли існує замкнений інтервал $[a,b]\neq\varnothing$

такий, що

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b]; \\ l(x), & x \in (-\infty, a); \\ r(x), & x \in (b, +\infty); \end{cases}$$

де $l:(-\infty,a) \to [0,1]$ є функцією, яка монотонно не зменшується, неперервною справа і $l(x)=0$ для $x \in (-\infty, w_1)$, $w_1 < a$ та $r:(b,+\infty) \to [0,1]$ є функцією, яка монотонно не збільшується, неперервною зліва і $r(x)=0$ для $x \in (w_2, +\infty)$, $w_2 > b$.

Зауваження 2.2. Якщо A є чітким дійсним числом a, тобто $A=\{a\}$, то функція належності множини A набуває вигляду $\mu_A(a)=1$ і $\mu_A(x)=0$ для $x \neq a$, $x \in \mathbb{R}$; вона є характеристичною функцією одноелементної множини $\{a\}$ і, отже, представляє дійсне число a.

Нагадаємо, що нечітка множина A на X є опуклою нечіткою множиною тоді й лише тоді, коли всі її множини A_α рівня α, $\alpha \in (0,1]$ є опуклими (чіткими) множинами. Оскільки єдиними опуклими множинами на $\mathbb{R}$ є інтервали, то приходимо до альтернативного визначення нечіткого числа.

Визначення 2.2. Нечітка множина A на $\mathbb{R}$ називається нечітким числом, якщо

- A є нормальною нечіткою множиною;
- A є опуклою нечіткою множиною;
- функція належності $\mu_A(x)$ є напівнеперервною зверху і
- носій $\mathrm{supp}(A)$ нечіткої множини A є обмеженим.

2.3. Операції над нечіткими числами

У цьому розділі розглядається арифметика нечітких чисел на основі двох різних, але еквівалентних між собою підходів. Перший підхід базується на декомпозиції (див. Розділ 1.2) нечітких чисел на множини рівнів і застосуванні інтервальної арифметики для них (див. Розділ 2.1). Другий підхід засновано на принципі узагальнення Заде (див. Розділ 1.3).

Декомпозиційний підхід. Позначимо через $*$ будь-яку з арифметичних операцій (+), (−), (·), (:), ($\vee$), ($\wedge$) над нечіткими числами. Нехай A і B є нечіткими числами та $A_\alpha = [a_\alpha^L, a_\alpha^H]$ і $B_\alpha = [b_\alpha^L, b_\alpha^H]$ відповідно є їхніми множинами рівня α, $\alpha \in (0,1]$. Результатом операції $A * B$ є нечітке число

$$A * B = \bigcup_\alpha \alpha (A * B)_\alpha$$

на $\mathbb{R}$ з функцією належності

$$\mu_{A*B}(r) = \sup\{\alpha \in (0,1] : r \in [a_\alpha^L * b_\alpha^L, a_\alpha^H * b_\alpha^H]\}, \qquad (2.1)$$

де $(A * B)_\alpha = A_\alpha * B_\alpha = [a_\alpha^L * b_\alpha^L, a_\alpha^H * b_\alpha^H]$ для $\alpha \in (0,1]$.

Слід зазначити, що $A * B$ є нечітким числом, а не просто нечіткою множиною, оскільки A і B є нечіткими числами, а множини A_α, B_α, $(A * B)_\alpha$ рівнів є замкненими інтервалами для будь-якого $\alpha \in (0,1]$. Для кожного $\alpha \in (0,1]$ замкнений інтервал $(A * B)_\alpha = A_\alpha * B_\alpha = [a_\alpha^L * b_\alpha^L, a_\alpha^H * b_\alpha^H]$ є результатом застосування операції «$*$» інтервальної арифметики до замкнених інтервалів A_α, B_α. Зокрема,

$$A_\alpha + B_\alpha = [a_\alpha^L + b_\alpha^L, a_\alpha^H + b_\alpha^H] \text{ та } A_\alpha - B_\alpha = [a_\alpha^L - b_\alpha^L, a_\alpha^H - b_\alpha^H],$$

$(k \cdot A)_\alpha = k \cdot A_\alpha = [ka_\alpha^L, ka_\alpha^H]$ для $k > 0$. Для нечітких чисел A і B на $\mathbb{R}_+$ одержимо

$$A_\alpha \cdot B_\alpha = [a_\alpha^L \cdot b_\alpha^L, a_\alpha^H \cdot b_\alpha^H],\ A_\alpha : B_\alpha = [a_\alpha^L / b_\alpha^L, a_\alpha^H / b_\alpha^H]$$

за умовою $0 \notin [b_\alpha^L, b_\alpha^H]$.

Підхід, заснований на принципі узагальнення. Нехай A і B є нечіткими числами, а $*$ є будь-якою з арифметичних операцій (+), (−), (·), (:), ($\vee$), ($\wedge$) над нечіткими числами. Тоді, за принципом узагальнення Заде, нечітке число $A * B$ задається функцією належності

$$\mu_{A*B}(r) = \sup\{\min\{\mu_A(s), \mu_B(t)\} : r = s * t;\ s, t \in \mathbb{R}\},\ r \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Варто зазначити, що значення функції належності $\mu_{A*B}(r)$ за формулами (2.1) та (2.2) співпадають для кожного $r \in \mathbb{R}$.

2.4. Типи нечітких чисел

Розглянемо кілька спеціальних типів нечітких чисел, які використовуються на практиці. Врахування їхньої специфіки дозволяє суттєво спростити розрахунки і методи розв'язання задач, моделі яких використовують ці числа.

Трикутні нечіткі числа. Уведемо поняття трикутного нечіткого числа.

Визначення 2.3. Нечітке число A називається трикутним нечітким числом, якщо його функція належності має вигляд

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a_l) \bigcup (a_u, +\infty); \\ (x - a_l) / (a - a_l), & x \in [a_l, a]; \\ (a_u - x) / (a_u - a), & x \in (a, a_u]. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Трикутне нечітке число A позначається трійкою $A = (a_l, a, a_u)$. Графік функції належності $\mu_A(x)$ має форму трикутника, як показано на Рис. 2.1 на прикладі трикутного нечіткого числа $(4, 5, 6)$.

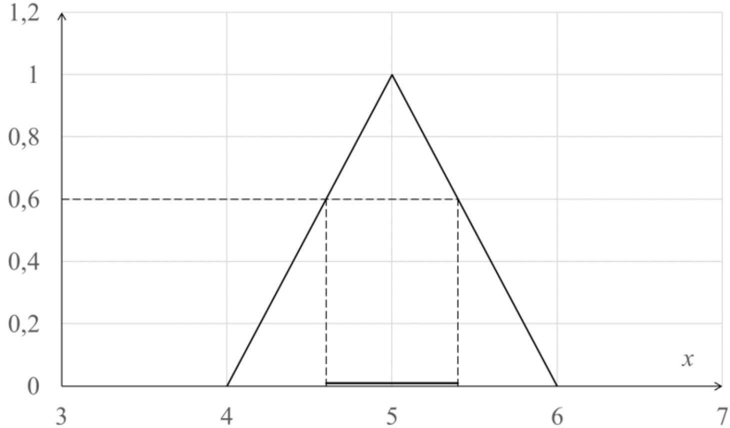

Рис. 2.1. Функція належності трикутного нечіткого числа $(4, 5, 6)$.

Множиною рівня α трикутного нечіткого числа $A = (a_l, a, a_u)$ є замкнений інтервал

$$A_\alpha = [a_\alpha^L, a_\alpha^H] = [a_l + \alpha(a - a_l), a_u - \alpha(a_u - a)] \ , \ \alpha \in (0,1]. \qquad (2.4)$$

Використання цієї формули сприяє спрощенню розрахунків і моделей задач з трикутними нечіткими числами. На Рис. 2.1 для трикутного нечіткого числа $A = (4,5,6)$ жирною лінією виділена множина $A_{0.6}$ рівня 0.6, яка є замкненим інтервалом $[4.6, 5.4]$.

Якщо $*$ є будь-якою з арифметичних операцій (+), (−), (·), (:), ($\vee$), ($\wedge$) над нечіткими числами, то, як і в загальному випадку, результатом операції $A * B$ є нечітким числом

$$A * B = \bigcup_\alpha \alpha (A * B)_\alpha \qquad (2.5)$$

на $\mathbb{R}$ з функцією належності

$$\mu_{A*B}(r) = \sup\{\alpha \in (0,1] : r \in [a_\alpha^L * b_\alpha^L, a_\alpha^H * b_\alpha^H]\}, \qquad (2.6)$$

де $(A * B)_\alpha = A_\alpha * B_\alpha = [a_\alpha^L * b_\alpha^L, a_\alpha^H * b_\alpha^H]$ для $\alpha \in (0,1]$.

Якщо $*$ є операцією (+), (−) або множення на скаляр, то результатом операції $A * B$ є трикутним нечітким числом

$$A * B = (a_l * b_l, a * b, a_u * b_u), \qquad (2.7)$$

тобто формула (2.5) суттєво спрощується. Зокрема,

$$A + B = (a_l + b_l, a + b, a_u + b_u), \ -A = (-a_u, -a, -a_l),$$

$$A - B = (a_l - b_u, a - b, a_u - b_l), \ k \cdot A = (ka_l, ka, ka_u), \ k > 0$$

є трикутними нечіткими числами. Але нечіткі числа A^{-1}, $A \cdot B$, $A : B$, $A \vee B$, $A \wedge B$ не обов'язково повинні бути трикутними, і для них потрібно використовувати формулу (2.5).

Приклад 2.1. Нехай $A = (-3, 2, 4)$ і $B = (-1, 0, 5)$ є трикутними нечіткими числами. Тоді за (2.3) та (2.7) отримаємо трикутне нечітке число $A + B = (-3, 2, 4) + (-1, 0, 5) = (-4, 2, 9)$ з функцією належності

$$\mu_{A+B}(x) = \begin{cases} 0, \ x \in (-\infty, -4) \cup (9, +\infty); \\ (x+4)/6, \quad x \in [-4, 2]; \\ (9-x)/7, \quad x \in (2, 9]. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Перевіримо отриманий результат за формулою (2.6). Маємо множини α-рівня:

$$A_\alpha = [a_\alpha^L, a_\alpha^H] = [a_l + \alpha(a - a_l), a_u - \alpha(a_u - a)] =$$

$$[\alpha(2+3) - 3, -2\alpha + 4] = [5\alpha - 3, -2\alpha + 4],$$

$$B_\alpha = [b_\alpha^L, b_\alpha^H] = [b_l + \alpha(b - b_l), b_u - \alpha(b_u - b)] = [\alpha - 1, -5\alpha + 5].$$

Тому $(A+B)_\alpha = A_\alpha + B_\alpha = [5\alpha - 3, -2\alpha + 4] + [\alpha - 1, -5\alpha + 5] =$ $= [6\alpha - 4, -7\alpha + 9]$. В цьому випадку формула (2.6) матиме вигляд $\mu_{A+B}(x) = \sup\{\alpha \in (0,1] : x \in [6\alpha - 4, -7\alpha + 9]\}$. Звідси випливає, що $\mu_{A+B}(x) = 0$ для $x \in (-\infty, -4) \cup (9, +\infty)$,

$$\mu_{A+B}(x) = \sup\{\alpha \in (0,1] : x \geq 6\alpha - 4\} =$$
$$= \sup\{\alpha \in (0,1] : \alpha \leq (x+4)/6\} = (x+4)/6$$

для $x \in [-4, 2]$,

$$\mu_{A+B}(x) = \sup\{\alpha \in (0,1] : x \leq -7\alpha + 9\} =$$
$$= \sup\{\alpha \in (0,1] : \alpha \leq (9-x)/7\} = (9-x)/7$$

для $x \in (2, 9]$. Отриманий результат співпадає з (2.8). Графіки функцій належності $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$, $\mu_{A+B}(x)$ представлені на Рис.2.2.

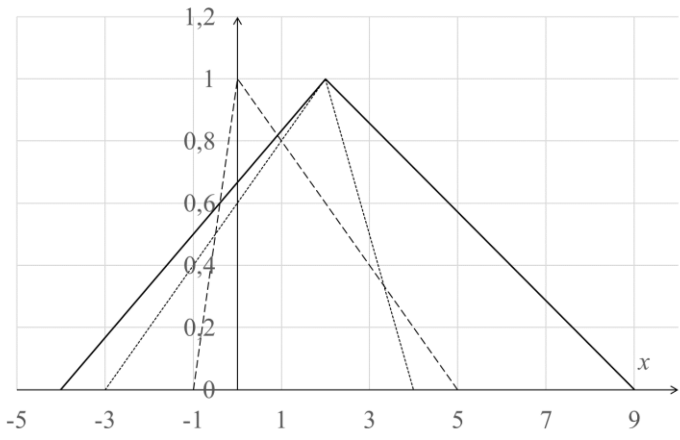

Рис.2.2. Графіки функцій належності $\mu_A(x)$ (точками), $\mu_B(x)$ (пунктиром), $\mu_{A+B}(x)$ (суцільною лінією).

Наступний приклад ілюструє те, що добуток трикутних нечітких чисел взагалі необов'язково має бути трикутним нечітким числом.

Приклад 2.2. Нехай $A=(2,3,5)$ і $B=(1,4,8)$ є трикутними нечіткими числами на $\mathbb{R}_+$. Розрахуємо добуток $A\cdot B$. За формулою (2.4) маємо:

$$A_\alpha = [\alpha+2, -2\alpha+5],$$
$$B_\alpha = [3\alpha+1, -4\alpha+8],$$
$$C_\alpha = A_\alpha + B_\alpha =$$
$$=[(\alpha+2)(3\alpha+1),(-2\alpha+4)(-4\alpha+8)]=$$
$$=[3\alpha^2+7\alpha+2, 8\alpha^2-36\alpha+40].$$

В цьому випадку, формула (2.6) матиме вигляд

$$\mu_{A\cdot B}(x)=\sup\{\alpha\in(0,1]: x\in[3\alpha^2+7\alpha+2, 8\alpha^2-36\alpha+40]\}.$$

Звідси випливає, що $\mu_{A\cdot B}(x)=0$ для $x\in(-\infty,2)\bigcup(40,+\infty)$,

$$\mu_{A+B}(x)=\sup\{\alpha\in(0,1]: x\ge 3\alpha^2+7\alpha+2\}=$$
$$=\sup\{\alpha\in(0,1]: \alpha\le(-7+\sqrt{25+12x})/6\}=$$
$$=(-7+\sqrt{25+2x})/6$$

для $x\in[2,12]$,

$$\mu_{A+B}(x)=\sup\{\alpha\in(0,1]: x\le 8\alpha^2-36\alpha+40\}=$$
$$=\sup\{\alpha\in(0,1]: \alpha\le(9-\sqrt{1-2x})/4\}=$$
$$=(9-\sqrt{1+2x})/4$$

для $x\in(12,40]$. Отже, функція належності $A\cdot B$ має вигляд

$$\mu_{A\cdot B}(x)=\begin{cases} 0, \; x\in(-\infty,2)\bigcup(40,+\infty); \\ (-7+\sqrt{25+12x})/6, \quad x\in[2,12]; \\ (9-\sqrt{1-2x})/4, \quad x\in(12,40]; \end{cases}$$

який явно не відповідає трикутному нечіткому числу. Графіки функцій належності $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$, $\mu_{A\cdot B}(x)$ представлені на Рис.2.3.

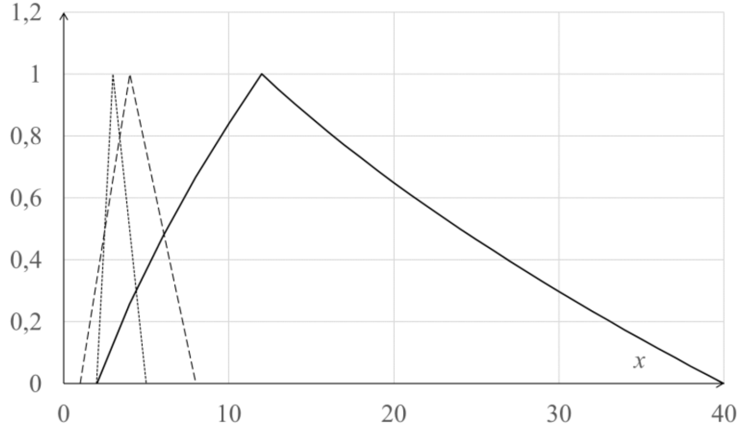

Рис.2.3. Графіки функцій належності $\mu_A(x)$ (точками), $\mu_B(x)$ (пунктиром), $\mu_{A+B}(x)$ (суцільною лінією).

Трапецієподібні нечіткі числа. Уведемо поняття трапецієподібного нечіткого числа.

Визначення 2.4. Нечітке число A називається трапецієподібним нечітким числом, якщо його функція належності має вигляд

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a_l) \cup (b_u, +\infty); \\ (x - a_l)/(\underline{a} - a_l), & x \in [a_l, \underline{a}]; \\ 1, & x \in [\underline{a}, \overline{a}]; \\ (a_u - x)/(a_u - \overline{a}), & x \in (\overline{a}, a_u]. \end{cases}$$

Трапецієподібне нечітке число A позначається четвіркою $A = (a_l, \underline{a}, \overline{a}, a_u)$. Графік функція належності $\mu_A(x)$ має форму трапеції, як показано на Рис. 2.4. на прикладі трапецієподібного нечіткого числа $(2,3,4,5)$.

Множиною рівня α трапецієподібного нечіткого числа $A = (a_l, \underline{a}, \overline{a}, a_u)$ є замкнений інтервал

$$A_\alpha = [a_\alpha^L, a_\alpha^H] = [a_l + \alpha(\underline{a} - a_l), a_u - \alpha(a_u - \overline{a})], \; \alpha \in (0,1]. \quad (2.9)$$

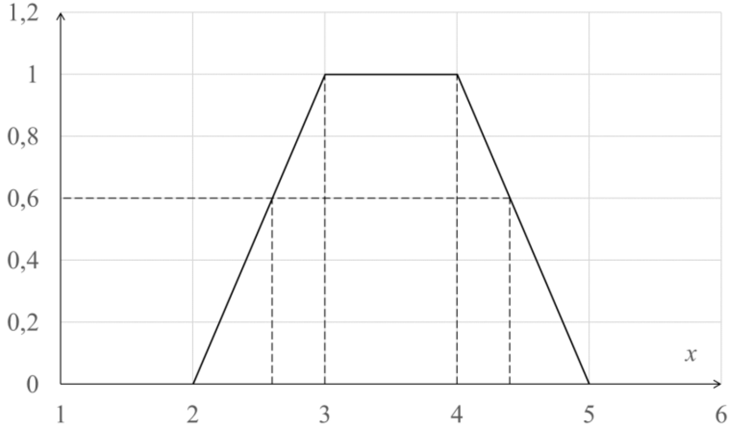

Рис. 2.4. Функція належності трапецієподібного нечіткого числа $(2,3,4,5)$.

Використання цієї формули сприяє спрощенню розрахунків і моделей задач з трапецієподібними нечіткими числами. На Рис. 2.4 для трапецієподібного нечіткого числа $A=(2,3,4,5)$ жирною лінією виділена множина $A_{0.6}$ рівня 0.6, яка є замкненим інтервалом $[2.6, 4.4]$.

Нехай $A=(a_l, \underline{a}, \overline{a}, a_u)$ і $B=(b_l, \underline{b}, \overline{b}, b_u)$ є трапецієподібним нечітким числом. Якщо $*$ є будь-якою арифметичною операцією $(+)$, $(-)$, $(\cdot)$, $(:)$, $(\vee)$, $(\wedge)$ над нечіткими числами, то, як і в загальному випадку, результатом операції $A*B$ є нечітке число

$$A*B=\bigcup_{\alpha}\alpha(A*B)_{\alpha} \qquad (2.10)$$

на $\mathbb{R}$ з функцією належності

$$\mu_{A*B}(r)=\sup\{\alpha\in(0,1]: r\in[a_{\alpha}^{L}*b_{\alpha}^{L}, a_{\alpha}^{H}*b_{\alpha}^{H}]\}, \qquad (2.11)$$

де $(A*B)_{\alpha}=A_{\alpha}*B_{\alpha}=[a_{\alpha}^{L}*b_{\alpha}^{L}, a_{\alpha}^{H}*b_{\alpha}^{H}]$ для $\alpha\in(0,1]$.

Якщо $*$ є операцією $(+)$, $(-)$ або множення на скаляр, то результатом операції $A*B$ є трапецієподібне нечітке число

$$A*B=(a_l*b_l, \underline{a}*\underline{b}, \overline{a}*\overline{b}, a_u*b_u), \qquad (2.12)$$

тобто формула (2.10) суттєво спрощується. Зокрема,

$$A+B=(a_l+b_l,\underline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b},a_u+b_u),\ -A=(-a_u,-\overline{a},-\underline{a},-a_l),$$

$$A-B=(a_l-b_u,\underline{a}-\overline{b},\overline{a}-\underline{b},a_u-b_l),\ k\cdot A=(ka_l,k\underline{a},k\overline{a},ka_u),\ k>0$$

є трапецієподібними нечіткими числами. Але нечіткі числа $A^{-1}, A\cdot B, A:B, A\vee B, A\wedge B$ не обов'язково повинні бути трапецієподібними, і для них потрібно використовувати формули (2.9)-(2.11).

Нечітке *L*-*R* число. Уведемо наступне поняття.

Визначення 2.5. Число *A* називається нечітким *L*-*R* числом, якщо його функція належності $\mu_A(x)$ має такий вигляд:

$$\mu_A(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right), & x\le m;\\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right), & x\ge m;\end{cases}$$

де L і R є кусково-неперервними функціями, L є монотонно неспадною, R є монотонно незростаючою і $L(0)=R(0)=1$. Нечітке *L*-*R* число *A*, представляється у вигляді $A=(m,\alpha,\beta)_{LR}$, Дійсне число *m* називається середнім значенням або піком *A*, а α і β називаються лівим та правим розкидами відповідно. Графік функції належності $\mu_A(x)$ нечіткого *L*-*R* числа $A=(m,\alpha,\beta)_{LR}$ має характерну форму, що показана на Рис. 2.5 на прикладі *L*-*R* нечіткого числа $A=(4,2,3)_{LR}$, де $L(x)=\max\{0,1-x\}$, $R(x)=e^{-x}$, $\alpha=2,\ \beta=3,\ m=4$. В цьому випадку функція належності має вигляд

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2;\\ x/2-1, & 2<x\le 4;\\ e^{(4-x)/3}, & x\ge 4.\end{cases}$$

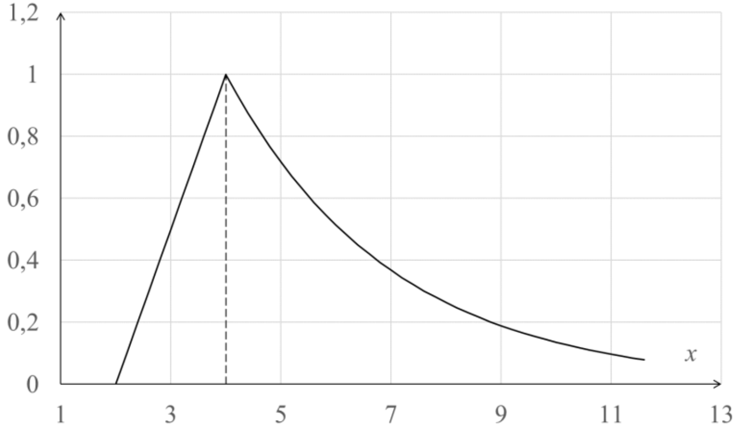

Рис. 2.5. Функція належності *L-R* числа $A=(4,2,3)_{LR}$.

Нехай $A_1=(m_1,\alpha_1,\beta_1)_{LR}$ і $A_2=(m_2,\alpha_2,\beta_2)_{LR}$ є нечіткими L-R числами. Тоді

$$A_1+A_2=(m_1+m_2,\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)_{LR},$$

$$-A=-(m,\beta,\alpha)_{LR}=(-m,\beta,\alpha)_{LR},$$

$$A-B=A_1+A_2=(m_1-m_2,\alpha_1-\beta_2,\beta_1-\alpha_2)_{LR},$$

$$k\cdot A=k\cdot(m,\beta,\alpha)_{LR}=(km_2,k\alpha,k\beta)_{LR},\ k>0$$

є нечіткими L-R числами. Ця властивість не має місця для $A^{-1},\ A\cdot B,\ A:B,\ A\vee B,\ A\wedge B$.

2.5. Порівняння нечітких чисел

Використання нечітких чисел в математичному програмуванні та іграх неминуче призводить до потреби їх порівняння. Відомо багато методів порівняння нечітких чисел. Всі вони мають як переваги, так і недоліки. Тому вибір конкретного методу залежить від ОПР та предметної області. В цьому розділі розглядаються лише три простих методи порівняння нечітких чисел, які часто використовують на практиці.

Використання функції ранжування (індексу). Нехай $\mathbb{N}(\mathbb{R})$ є множиною усіх нечітких чисел на $\mathbb{R}$ і $A, B \in \mathbb{N}(\mathbb{R})$. Ідея підходу полягає у визначенні так званої функції $F : \mathbb{N}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ранжування (індексу ранжування) такої, що $F(A) \le F(B)$ тоді й лише тоді, коли B не менше за A. Далі ми будемо позначати це відношення нестрогої переваги на $\mathbb{N}(\mathbb{R})$ як $A \preceq B$.

Перша функція ранжування (індекс) Ягера має вигляд

$$F_1(A) = \frac{\int_{a_l}^{a_u} x\mu_A(x)dx}{\int_{a_l}^{a_u} \mu_A(x)dx}, \qquad (2.13)$$

де a_l і a_u є нижньою і верхньою границями носія $\text{supp}(A)$ нечіткого числа A. Значення $F_1(A)$ ще називають центроїдом нечіткого числа $A \in \mathbb{N}(\mathbb{R})$. Якщо, зокрема, $A = (a_l, a, a_u)$ є трикутним нечітким числом, то при підстановці функції належності $\mu_A(x)$ в (2.13) можна переконатися, що $F_1(A) = (a_l + a + a_u)/3$. Отже, для двох ТФН $A = (a_l, a, a_u)$ і $B = (b_l, b, b_u)$ відношення $A \precsim B$ за індексом F_1 має місце тоді й лише тоді, коли $a_l + a + a_u \le b_l + b + b_u$.

Друга функція ранжування (індекс) Ягера має вигляд

$$F_1(A) = \int_0^{\alpha_{\max}} m[a_\alpha^L, a_\alpha^R] d\alpha, \qquad (2.14)$$

де $\alpha_{\max}$ є висотою $h(A)$ нечіткого числа A, $A_\alpha = [a_\alpha^L, a_\alpha^R]$ є множиною α-рівня, $\alpha \in (0,1]$, а $m[a_\alpha^L, a_\alpha^R]$ є середнім значенням елементів множини A_α. Для трикутного нечіткого числа $A = (a_l, a, a_u)$ маємо $A_\alpha = [a_\alpha^L, a_\alpha^H] = [a_l + \alpha(a - a_l), a_u - \alpha(a_u - a)]$ та $\alpha_{\max} = 1$. Тому $m[a_\alpha^L, a_\alpha^R] = (\alpha(2a - a_l - a_u) + a_l + a_u)/2$, $F_2(A) = (a_l + 2a + a_u)/4$. Таким чином, для двох трикутних нечітких чисел $A=(a_l,a,a_u)$ і $B=(b_l,b,b_u)$ відношення $A \precsim B$ за індексом F_2 має місце тоді й лише тоді, коли $a_l+2a+a_u \le b_l+2b+b_u$.

Індекс *k*-переваги. Нехай A є нечітким числом і $k\in[0,1]$. Індекс *k*-переваги нечіткого числа A визначається як

$$F_k(A)=\max\{x:\mu_A(x)\ge k\}.$$

Визначення 2.6. Будемо говорити, що нечіткі числа $A,B\in\mathbb{N}(\mathbb{R})$ знаходяться у відношенні $A \preceq B$ зі ступенем $k\in[0,1]$, якщо $F_k(A)\le F_k(B)$.

У випадку, коли $A=(a_l,a,a_u)$ і $B=(b_l,b,b_u)$ є трикутними нечіткими числами, то для $k\in[0,1]$ індекси *k*-переваги A і B приймають вигляд $F_k(A)=ka+(1-k)a_u$ та $F_k(B)=kb+(1-k)b_u$, відповідно. Отже, $A \preceq B$ за індексом *k*-переваги тоді і тільки тоді, коли $ka+(1-k)a_u \le kb+(1-k)b_u$.

Підхід теорії можливостей. Нехай A і B є нечіткими числами. Відповідно до принципу узагальнення Заде область визначення чіткої нерівності $x\le y$ можна розширити з множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ на множину $\mathbb{N}(\mathbb{R})$ всіх нечітких чисел для того, щоб отримати значення

$$T(A\preceq B)=\sup_{x\le y}\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}$$

ступеня належності відношення нестрогої переваги '$\preceq$' на $\mathbb{N}(\mathbb{R})$. Значення $T(A\preceq B)$ також називається ступенем можливості домінування (строгої переваги) B над A і позначається $Poss(A\preceq B)$. Аналогічно визначимо ступень $T(A\preceq B)=\sup\limits_{x\ge y}\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}$ можливості домінування (строгої переваги) B над A та ступень $T(A=B)=\sup\limits_{x}\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$ можливості подібності (рівності) A і B. Ці поняття приводять до думки вважати, що $A\preceq B$ тоді і тільки тоді, коли $Poss(A\preceq B)\ge Poss(A\preceq B)$.

Якщо $A=(a_l,a,a_u)$ і $B=(b_l,b,b_u)$ є трикутними нечіткими числами, можна легко перевірити, що нерівність $a \le b$ дає $Poss(A \preceq B)=1$ і $Poss(A \preceq B)=height(A \bigcap B) \le 1$. Отже, у випадку трикутного нечіткого числа відношення $A \preceq B$ в сенсі $Poss(A \preceq B)$ має місце тоді й лише тоді, коли $a \le b$.

З числом $Poss(A \preceq B)$ пов'язане ще одне число $Ness(A \preceq B)=1-Poss(A \preceq B)$, яке відповідає ступеню необхідності домінування (строгої переваги) *B* над *A*. Число $Ness(A \preceq B)$ також можна використовувати для ранжування нечітких чисел. Відповідно до цієї думки, будемо вважати, що $A \preceq B$ тоді і лише тоді, коли $Ness(A \preceq B) \ge Ness(A \preceq B)$.

Якщо $A=(a_l,a,a_u)$ і $B=(b_l,b,b_u)$ є трикутними нечіткими числами, можна легко перевірити, що відношення $A \preceq B$ в сенсі $Ness(A \preceq B)$ має місце тоді й лише тоді, коли $a_l + a \le b_l + b$.

2.6. Мінімум нечітких чисел з нечіткою множиною операндів

Нехай на числовій прямій $\mathbb{R}$ задані n нечітких чисел F_j, $j \in N=\{1,2,...,n\}$ з відповідними носіями $X_j=\mathrm{supp}(F_j)$ та функціями належності $\mu_{F_j}(x_j)$, $x_j \in X_j$, $j \in N$.

Зауваження 2.3. Будемо вважати, що множини $X_j=[a_j,b_j]$, $j \in N$ є замкненими інтервалами на $\mathbb{R}$, а функції $\mu_{F_j}(x_j)$, $x_j \in X_j$, $j \in N$ є неперервними.

Спочатку розглянемо «звичайну» операцію min з чіткою множиною N індексів операндів для нечітких чисел F_j, $j \in N$. Мінімум $F=\min\limits_{j \in N} F_j$ визначається як нечітке число $F=\{(z,\mu_F(z)) : z \in \mathbb{R}\}$ з функцією належності

$$\mu_F(z)=\max_{x \in X:\, z=\min\limits_{j \in N} x_j} \ \min_{j \in N} \mu_{F_j}(x_j),\ z \in \mathbb{R},$$

де $x=(x_1,...,x_n)$ є вектором операндів та $X=\prod_{j\in N} X_j$ є множиною цих векторів (max в цій формулі існує в силу Зауваження 2.3).

Нехай I є деякою нечіткою множиною на N з функцією належності $\mu_I(j)$, $j\in N$. Далі будемо називати I нечіткою множиною індексів операндів. Визначимо і дослідимо мінімум нечітких чисел F_j, $j\in N$ у разі, коли вони беруть участь в операції мінімізації з відповідними ступенями належності $\mu_I(j)$, $j\in N$. Іншими словами, для нечіткого числа F_j, $j\in N$ визначимо результат операції знаходження мінімуму з нечіткою множиною I індексів операндів. Узагальнимо мінімум $F=\min_{j\in N} F_j$ нечітких чисел на випадок нечіткої множини I індексів операндів. Результатом такої операції буде множина, яку позначимо $MIN=\min_{(j,\mu_I(j))\in I} F_j$, з функцією належності

$$M_{MIN}(z)=\max_{x\in X:\, z=\min\limits_{(j,\mu_I(j))\in I} x_j} \ \min_{(j,\mu_I(j))\in I} \mu_{F_j}(x_j),\ z\in\mathbb{R}. \qquad (2.15)$$

В (2.15) вирази $\min_{(j,\mu_I(j))\in I} x_j$ і $\min_{(j,\mu_I(j))\in I} \mu_{F_j}(x_j)$ є позначеннями того, що значення відповідно x_j і $\mu_{F_j}(x_j)$, $j\in N$ беруть участь в операції min з відповідними ступенями належності $\mu_I(j)$, $j\in N$ (тобто індекси $j\in N$ операндів операції min утворюють нечітку множину $I=\{(j,\mu_I(j)):j\in N\}$). Щоб зрозуміти сенс (2.15) використаємо представлення нечіткої множини її α-перерізами. Позначимо

$$I_\alpha=\{j\in N:\ \mu_I(j)\ge\alpha\} \qquad (2.16)$$

α-переріз, $\alpha\in(0,1]$, нечіткої множини $I=\{(j,\mu_I(j)):j\in N\}$ індексів операндів. Для фіксованого $z^*\in\mathbb{R}$ і заданого $\alpha\in(0,1]$ також позначимо

$$G_\alpha(z^*)=\{x\in X:\ \min_{j\in I_\alpha} x_j=z^*\} \qquad (2.17)$$

множину векторів $x=(x_1,...,x_n)$, у яких мінімальна компонента з індексом, що належить множині I_α, дорівнює z^*. Далі позначимо $G(z^*)=\{(G_\alpha(z^*),\alpha):\alpha\in(0,1]\}$ нечітку множину з функцією належності $\mu_{G(z^*)}(x)=\max\{\alpha\in(0,1]:\ x\in G_\alpha(z^*)\}$, $x\in X$. Оскільки $G_\alpha(z^*)$ є α-перерізом нечіткої множини $G(z^*)$ для кожного $\alpha\in(0,1]$, то отримаємо $G(z^*)=\{(x,\mu_{G(z^*)}(x)):\ \min\limits_{(j,\mu_I(j))\in I} x_j = z^*,\ x\in X\}$.

Зауваження 2.4. Нехай $A=\{\mu_I(j): j\in N\}$ є множиною значень $\mu_I(j),\ j\in N$ ступенів належності нечіткої множини $I=\{(j,\mu_I(j)): j\in N\}$ індексів операндів. Оскільки ступені належності різних індексів операндів можуть збігатися, то $|A|\le n$. Цілком зрозуміло, що для того щоб отримати різні α-перерізи $I_\alpha=\{j\in N:\ \mu_I(j)\ge\alpha\}\ne\varnothing$ нечіткої множини I, умову $\alpha\in(0,1]$ можна замінити на $\alpha\in A$. Далі будемо називати I_α множиною індексів операндів рівня α.

Зауваження 2.5. Слід зазначити, що Зауваження 2.3 дозволяє звузити область визначення значення z мінімуму до множини

$$Z=\{z\in\mathbb{R}:\ z=\min_{j\in I_\alpha} x_j,\ x_j\in X_j,\ j\in I_\alpha,\ \alpha\in A\}=$$

$$=[\min_{\alpha\in A}\min_{j\in I_\alpha} a_j, \max_{\alpha\in A}\min_{j\in I_\alpha} b_j]$$

його можливих значень. Тому далі будемо писати $z\in Z$.

Для фіксованого значення $z^*\in Z$ і заданого $\alpha\in A$ розглянемо множину

$$D_\alpha(z^*)=\{(x(\alpha),j(\alpha)):\ \mu_{F_{j(\alpha)}}(x_{j(\alpha)}(\alpha))=\max_{x\in G_\alpha(z^*)}\ \min_{j\in I_\alpha}\mu_{F_j}(x_j)\} \quad (2.18)$$

оптимальних розв’язків максмінної задачі $\max\limits_{x\in G_\alpha(z^*)}\ \min\limits_{j\in I_\alpha}\mu_{F_j}(x_j)$.

Вона складається з пар $(x(\alpha),j(\alpha))$, в яких вектор $x(\alpha)=(x_1(\alpha),...,x_n(\alpha))\in G_\alpha(z^*)$ максимізує функцію $\mu_{F_{j(\alpha)}}(x_{j(\alpha)})$ за $x=(x_1,...,x_n)\in G_\alpha(z^*)$ та індекс $j(\alpha)$ мінімізує $\mu_{F_j}(x_j(\alpha))$ за $j\in I_\alpha$. При цьому оптимальне значення (максмін) дорівнює $\mu_{F_{j(\alpha)}}(x_{j(\alpha)}(\alpha))$.

Зауваження 2.6. Відповідно до Зауваження 2.4 $I_\alpha\ne\varnothing$. Із

Зауваження 2.3 випливає, що нечіткі числа F_j, $j \in N$ мають компактні носії X_j, $j \in N$ і неперервні функції належності $\mu_{F_j}(x_j)$, $x_j \in X_j$, $j \in N$. Звідси можна зробити висновок про те, що множина $X = \prod_{j \in N} X_j$ векторів операндів і, отже, множина $G_\alpha(z^*) = \{x \in X : \min_{j \in I_\alpha} x_j = z^*\}$ є компактами. Тому, якщо $G_\alpha(z^*) \neq \varnothing$, то множина $D_\alpha(z^*)$ оптимальних розв'язків максмінної задачі (2.15) не є порожньою, тобто $D_\alpha(z^*) \neq \varnothing$.

При фіксованому $z^* \in Z$ вираз (2.15) можна класифікувати як максмінну задачу оптимізації (в певному сенсі) функції $\mu_{F_j}(x_j)$ на нечітких множинах $G(z^*)$ на X і I на N. Тому для побудови функції належності нечіткої множини розв'язків цієї задачі необхідно кожній парі $(x, j) \in X \times N$ приписати ступінь належності. Таким чином, розв'язком задачі (2.15) будемо називати нечітку множину $D(z^*)$ на $X \times N$ з функцією належності

$$\mu_{D(z^*)}(x, j) = \begin{cases} \max\{\alpha \in A : (x, j) \in D_\alpha(z^*)\}, (x, j) \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} D_\alpha(z^*) \\ 0, \qquad (x, j) \notin \bigcup\limits_{\alpha \in A} D_\alpha(z^*). \end{cases} \qquad (2.19)$$

Нечіткому розв'язку $D(z^*)$ відповідає нечітка множина значень

$$M_{MIN}(z^*) = \max_{x \in X :\, z^* = \min\limits_{(j, \mu_I(j)) \in I} x_j} \; \min_{(j, \mu_I(j)) \in I} \mu_{F_j}(x_j) \qquad (2.20)$$

з функцією належності $\mu_{M_{MIN}(z^*)}(u)$, $u \in [0,1]$, де закритий інтервал $[0,1]$ є універсальною множиною нечіткої множини $M_{MIN}(z^*)$ значень максміна (2.15). Нечітка множина $M_{MIN}(z^*)$ є образом нечіткої множини $D(z^*)$ при відображенні $(x, j) \to \mu_{F_j}(x_j)$ з $X \times N$ в $[0,1]$. Відповідно до принципу узагальнення Заде отримаємо

$$\mu_{M_{MIN}(z^*)}(u) = \max_{(x, j) \in [\mu_{F_j}(x_j)]^{-1}(u)} \mu_{D(z^*)}(x, j),$$

де $[\mu_{F_j}(x_j)]^{-1}(u)=\{(x,j)\in X\times N:\ \mu_{F_j}(x_j)=u\}$, або в іншій формі

$$\mu_{M_{MIN}(z^*)}(u)=\begin{cases}\max\limits_{x\in X,\,j\in N}\{\mu_{D(z^*)}(x,j):\ \mu_{F_j}(x_j)=u\},\\ \exists(x,j)\in X\times N:\ \mu_{F_j}(x_j)=u;\\ 0, \qquad\qquad \text{otherwise.}\end{cases} \tag{2.21}$$

Підведемо підсумок. З одного боку, відповідно до (2.15) $M_{MIN}(z)$ є функцією належності мінімуму $MIN=\min\limits_{(j,\mu_I(j))\in I}F_j$ з нечіткою множиною $I=\{(j,\mu_I(j)):j\in N\}$ індексів операндів для нечітких чисел F_j, $j\in N$. З іншого боку, формули (2.20) і (2.21) вказують на те, що для фіксованих $z^*\in Z$ значення $M_{MIN}(z^*)$ утворюють нечіткі множини на $[0,1]$ з функцією належності $\mu_{M_{MIN}(z^*)}(u)$. Тому ми можемо зробити висновок про те, що MIN є нечіткою множиною на $Z\subset\mathbb{R}$ з функцією належності, значення якої також утворюють нечіткі множини на $[0,1]$. Отже, MIN є нечіткою множиною типу-2 (НМТ-2), яка має вигляд

$MIN=\{(z,M_{MIN}(z)):z\in Z\}=\{(z,\{(u,\mu_{M_{MIN}(z)}(u)):\ u\in J_z\}):\ z\in Z\}$,

де $\mu_{M_{MIN}(z)}(u)$, $u\in[0,1]$ є функцією належності нечіткої множини $M_{MIN}(z)=\{(u,\mu_{M_{MIN}(z)}(u)):u\in[0,1]\}$ значень нечіткого ступеня належності елемента $z\in Z$ НМТ-2 MIN, а $J_z=\mathrm{supp}(M_{MIN}(z))$ є множиною первинних ступенів належності, де $\mathrm{supp}(M_{MIN}(z))$ є носієм нечіткої множини $M_{MIN}(z)$ для $z\in Z$. НМТ-2 MIN на $Z\subset\mathbb{R}$ можна також характеризувати функцією належності типу-2

$$\mu_{MIN}(z,u)=\begin{cases}\mu_{M_{MIN}(z)}(u), & u\in J_z;\\ 0, & u\notin J_z.\end{cases}$$

Тоді $MIN=\{((z,u),\mu_{MIN}(z,u)):\ u\in[0,1],\ z\in Z\}$. Таку форму ми і будемо використовувати далі.

Зроблений висновок дозволяє увести таке поняття.

Визначення 2.7. Нехай на числовій прямій $\mathbb{R}$ задано нечіткі числа F_j, $j \in N$ з відповідними носіями $X_j = \mathrm{supp}(F_j)$ та функцією належності $\mu_{F_j}(x_j)$, $x_j \in X_j$, $j \in N$. Також на N задано нечітку множину $I = \{(j, \mu_I(j)) : j \in N\}$ індексів операндів з функцією належності $\mu_I(j)$, $j \in N$. Мінімумом $\min\limits_{(j,\mu_I(j))\in I} F_j$ з нечіткою множиною I індексів операндів для нечітких чисел F_j, $j \in N$, будемо називати НМТ-2

$$MIN = \{((z,u), \mu_{MIN}(z,u)) : \ u \in [0,1], \ z \in Z\} \qquad (2.22)$$

на $Z = [\min\limits_{\alpha\in A} \min\limits_{j\in I_\alpha} a_j, \max\limits_{\alpha\in A} \min\limits_{j\in I_\alpha} b_j]$ (див. Зауваження 2.5) з функцією належностіТ-2

$$\mu_{MIN}(z,u) = \begin{cases} \mu_{M_{MIN}(z)}(u), \ u \in J_z; \\ \quad 0, \qquad\quad u \notin J_z. \end{cases} \qquad (2.23)$$

У цьому визначенні для $z \in Z$ функція $\mu_{M_{MIN}(z)}(u)$ задається (2.21), $I(\alpha) = \{j \in N : \ \mu_I(j) \ge \alpha\}$ є множиною індексів операндів рівня α, $\alpha \in A$ (див. (2.16) і Зауваження 2.4) та

$$J_z = \mathrm{supp}(M_{MIN}(z)) \subseteq [0,1] \qquad (2.24)$$

є множиною первинних ступенів належності $u \in [0,1]$ з позитивними вторинними оцінками $\mu_{MIN}(z,u)$, де $\mathrm{supp}(M_{MIN}(z))$ є носієм нечіткої множини $M_{MIN}(z)$ значень максміна (2.15).

Слід зазначити, що використовувати для обчислень Визначення 2.7 досить незручно, тому розглянемо його у іншому вигляді. Позначимо

$$MIN(\alpha) = \{(z, \mu_{MIN(\alpha)}(z)) : \ z \in Z\} \qquad (2.25)$$

нечітку множину з функцією належності

$$\mu_{MIN(\alpha)}(z) = \begin{cases} \max\limits_{x\in G_\alpha(z)} \ \min\limits_{j\in I_\alpha} \mu_{F_j}(x_j), \ G_\alpha(z) \ne \varnothing; \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad G_\alpha(z) = \varnothing; \end{cases} \qquad (2.26)$$

де згідно (2.17) $G_\alpha(z) = \{x \in X : \ \min\limits_{j\in I_\alpha} x_j = z\}$ є множиною векторів, у яких мінімальна компонента з індексом, що належить множині I_α, дорівнює $z \in Z$. З (2.16) і (2.17) випливає, що

$$MIN(\alpha) = \min_{j \in I_\alpha} F_j \tag{2.27}$$

є мінімумом нечітких чисел F_j з індексами j з множини операндів I_α рівня $\alpha \in A$. Тому $MIN(\alpha)$ це нечітке число. Далі будемо називати його мінімумом рівня α. Доведемо наступну теорему.

Теорема 2.2. НМТ-2

$$MIN = \{((z,u), \mu_{MIN}(z,u)):\ u \in [0,1],\ z \in Z\}$$

має функцією належності типу-2

$$\mu_{MIN}(z,u) = \begin{cases} \max\limits_{\alpha \in A}\{\alpha :\ u = \mu_{MIN(\alpha)}(z)\}, & u \in J_z; \\ 0, & u \notin J_z; \end{cases} \tag{2.28}$$

де

$$J_z = \{u \in [0,1]:\ \ u = \mu_{MIN(\alpha)}(z),\ \alpha \in A\}. \tag{2.29}$$

Доведення. Спочатку перевіримо (2.29). Для цього на підставі (2.24) досить показати, що для довільного $z \in Z$ нерівність $\mu_{M_{MIN}(z)}(u) > 0$ (див. (2.21)) виконується тоді й лише тоді, коли $\exists \alpha \in A$, для якого $u = \mu_{MIN(\alpha)}(z)$. Припустимо, що $\mu_{M_{MIN}(z)}(u) > 0$. Тоді з (2.21) випливає, що $\exists x \in X$, $\exists j \in N$, для яких

$$\mu_{F_j}(x_j) = u \tag{2.30}$$

і $\mu_{D(z)}(x, j) > 0$. Звідси з урахуванням (2.19) $\exists \alpha \in A$, для якого $(x, j) \in D_\alpha(z)$. Тоді на підставі (2.18) і (2.26) маємо $\mu_{F_j}(x_j) = \mu_{MIN(\alpha)}(z)$ і тому завдяки (2.30) отримаємо $u = \mu_{MIN(\alpha)}(z)$. Тепер нехай

$$\mu_{M_{MIN}(z)}(u) = 0. \tag{2.31}$$

Припустимо супротивне, що $\exists \alpha^* \in A$, для якого

$$u = \mu_{MIN(\alpha^*)}(z). \tag{2.32}$$

Із Зауваження 2.4 випливає, що множина $I_{\alpha^*} \neq \varnothing$. Також з урахуванням Зауваження 2.6 $D_{\alpha^*}(z) \neq \varnothing$. Тому за допомогою (2.26) можна зробити висновок, що $\exists x \in X$ і $\exists j \in I_{\alpha^*}$, для яких

$\mu_{F_j}(x_j) = \mu_{MIN(\alpha^*)}(z)$. З огляду на (2.32), отримаємо (2.30). З (2.21), (2.30) і (2.31) одержимо $\mu_{D(z)}(x, j) = 0$. Тоді з (2.19) випливає $(x, j) \notin \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha(z)$. Тому $\forall \alpha \in A \; \mu_{F_j}(x_j) \neq \mu_{MIN(\alpha)}(z)$ згідно (2.18) і (2.26). Отже, на підставі (2.30) $\forall \alpha \in A \;\; u \neq \mu_{MIN(\alpha)}(z)$. Отримали суперечність з (2.32). Формулу (2.29) доведено.

Тепер перевіримо (2.28). Нехай $z \in Z$. Припустимо, що $u^* \in J_z \neq \varnothing$. Позначимо $\alpha^* = \max_{\alpha \in A}\{\alpha : \; u^* = \mu_{MIN(\alpha)}(z)\}$. Значення α^* існує згідно із Зауваженням 2.4 і (2.29). Покажемо, що з (2.21) випливає $\mu_{M_{MIN}(z)}(u) = \alpha^*$. Порівнюючи формулу (2.29) з (2.19) і (2.21), доведемо рівність $S_1 = \{\alpha \in [0,1] : \; u^* = \mu_{MIN(\alpha)}(z)\}$ та $S_2 = \{\alpha \in [0,1] : \; \mu_{F_j}(x_j) = u^*, \; (x, j) \in D_\alpha(z), \; x \in X, \; j \in N\}$. Спочатку перевіримо включення $S_1 \subseteq S_2$. Припустимо, що $a^* \in S_1$. Тоді $u^* = \mu_{MIN(\alpha^*)}(z)$. Звідси $\exists x(\alpha^*) \in X$ і $\exists j(\alpha^*) \in I_{\alpha^*}$, для яких $\mu_{F_j}(x_j) = \mu_{MIN(\alpha^*)}(z) = u^*$ згідно (2.26) і $(x(\alpha^*), j(\alpha^*)) \in D_{\alpha^*}(z)$ відповідно до (2.18). Отже $a^* \in S_2$. Тепер покажемо включення $S_2 \subseteq S_1$. Припустимо, що $a^* \in S_2$. Тоді $\exists x^* \in X$ і $\exists j^* \in I_{\alpha^*}$, для яких $\mu_{F_{j^*}}(x^*_{j^*}) = u^*$ і $(x^*, j^*) \in D_{\alpha^*}(z)$. Звідси $\mu_{MIN(\alpha^*)}(z) = u^*$ відповідно до (2.26) і тому $a^* \in S_1$. Таким чином, $S_1 = S_2$. Тоді з (2.28) випливає $\mu_{MIN}(z,u) == \alpha^*$.

Теорему доведено.

Для представлення НМТ-2 MIN в більш зручній формі застосуємо декомпозиційний підхід. Використаємо відомі поняття вкладених нечітких множин типів 1 та 2 і формалізуємо їх для НМТ-2 $MIN = \{((z,u), \mu_{MIN}(z,u)) : \; u \in [0,1], \; z \in Z\}$.

Нехай для $\forall z \in Z$ заданий єдиний первинний ступінь належності $u_z \in [0,1]$ НМТ-2 MIN, тоді $MIN_2^e = \{((z,u_z), \mu_{MIN}(z,u_z)) : \;\; z \in Z\}$ будемо називати вкладеною НМТ-2 в MIN.

Зауваження 2.7. Кожен елемент (z,u) нечіткого набору типу-2 $MIN=\{((z,u),\mu_{MIN}(z,u)):\ u\in[0,1],\ z\in Z\}$ слід розглядати як підмножину, тому ця сукупність представляється як класичне об'єднання її елементів в сенсі «звичайних» нечітких множин типу-1. Повторювані елементи враховуються тільки один раз, як в будь-якому об'єднанні. Для елементів (z,u) з різними вторинними оцінками α' і α'' (див. (2.28)) в сукупності активується лише тільки один член с максимальною вторинною оцінкою $\max\{\alpha',\alpha''\}$. Крім цього, елементи з нульовими вторинними оцінками вилучаються.

Вкладеною нечіткою множиною типу-1 в НМТ-2 MIN назвемо $MIN_1^e=\{(z,u_z):\ z\in Z\}$. Її функція належності має вигляд $\mu_{MIN_1^e}(z)=u_z$, $z\in Z$.

Використаємо уведені вище поняття для окремого випадку НМТ-2, яку визначимо нижче. Нехай A є скінченою множиною позитивних значень $\mu_I(j),\ j\in N$ ступенів належності нечіткої множини $I=\{(j,\mu_I(j)): j\in N\}$ індексів операндів (див. Зауваження 2.4). На підставі (2.28) A включає в себе множину всіх можливих позитивних значень вторинних оцінок для НМТ-2 MIN. Нехай також для $\forall z\in Z$ існує єдиний первинний ступінь належності $u_z\in[0,1]$ НМТ-2 MIN.

Визначення 2.8. Будемо говорити, що вкладена НМТ-2 $MIN_2^e=\{((z,u_z),\mu_{MIN}(z,u_z)):\ z\in Z\}$ в MIN має постійну вторинну оцінку $\alpha\in A$, якщо для $\forall z\in Z$ існує єдиний первинний ступінь належності $u_z\in[0,1]$, для якої $\mu_{MIN}(z,u_z)\equiv\alpha$.

Позначимо $MIN_2^e(\alpha)=\{((z,u_z),\alpha):\ z\in Z\}$ вкладену НМТ-2 з постійною вторинною оцінкою $\alpha\in A$. Очевидно, що для НМТ-2 $MIN_2^e(\alpha)$ існує єдина вкладена в неї нечітка множина типу-1 $MIN_1^e(\alpha)=\{(z,u_z):\ z\in Z\}$. Тому вкладену НМТ-2 $MIN_2^e(\alpha)$ з постійною вторинною оцінкою $\alpha\in A$ ми можемо завжди записати у формі $MIN_2^e(\alpha)=\{(MIN_1^e(\alpha),\alpha)\}$. Подання MIN у вигляді сукупності вкладених НМТ-2 з постійними вторинними оцінками обґрунтовує Теорема 2.3.

Теорема 2.3. НМТ-2 MIN може бути представленою у формі сукупності $MIN = \{MIN_2^e(\alpha):\ \alpha \in A\}$ вкладених НМТ-2 $MIN_2^e(\alpha) = \{(MIN_1^e(\alpha), \alpha)\}$ з постійними вторинними оцінками $\alpha \in A$, де вкладена нечітка множина типу-1 $MIN_1^e(\alpha) \equiv MIN(\alpha) = \min\limits_{j \in I_\alpha} F_j$ є мінімумом рівня $\alpha \in A$. Іншими словами,

$$MIN = \{(MIN(\alpha), \alpha):\ \alpha \in A\}. \qquad (2.33)$$

Доведення. Згідно (2.22) НМТ-2 MIN має вигляд $MIN = \{((z,u), \mu_{MIN}(z,u)):\ u \in [0,1],\ z \in Z\}$. Звідси, використовуючи (2.23), отримаємо

$$MIN = \{\{((z,u), \max_{\alpha \in A}\{\alpha:\ u = \mu_{MIN(\alpha)}(x)\}):\ u \in J_z\} \cup$$
$$\cup \{((z,u), 0):\ u \notin J_z\}:\ z \in Z\}.$$

Оскільки Зауваження 2.7 дозволяє не враховувати пари (x,u), які мають вторинну оцінку, що дорівнює 0, то $MIN = \{((z,u), \max\limits_{\alpha \in A}\{\alpha:\ u = \mu_{MIN(\alpha)}(x)\}):\ u \in J_z,\ z \in Z\}$. На підставі (2.29) цей вираз є еквівалентним $MIN = \{(z, \{(\mu_{MIN(\alpha)}(z), \alpha):\ \alpha \in A\}):\ z \in Z\}$. Відзначимо, що набір $\{(\mu_{MIN(\alpha)}(z), \alpha):\ \alpha \in A\}$ є нечіткою множиною типу-1, яку утворено єдиним значенням $u = \mu_{MIN(\alpha)}(z)$ нечіткого ступеня належності значення $z \in Z$, якому можуть відповідати різні $\alpha \in A$. Тому

$$\{(\mu_{MIN(\alpha)}(z), \alpha):\ \alpha \in A\} = \{(u, \max_{\alpha \in A}\{\alpha:\ u = \mu_{MIN(\alpha)}(x)\})\}.$$

Далі, після перегрупування елементів $MIN = \{(z, \{(\mu_{MIN(\alpha)}(z), \alpha):\ \alpha \in A\}):\ z \in Z\}$, отримаємо

$$MIN = \{(z, (\mu_{MIN(\alpha)}(z), \alpha)):\ \alpha \in A,\ z \in Z\} =$$
$$= \{\{((z, \mu_{MIN(\alpha)}(z)), \alpha):\ z \in Z\}:\ \alpha \in A\}.$$

Нарешті, використовуючи (2.25), отримаємо (2.33). Теорему доведено.

Отже, результуючу НМТ-2 MIN можна розкласти за вторинними оцінками на набір відповідних їм нечітких чисел, що спрощує побудову та інтерпретацію MIN.

Приклад 2.3. Знайдемо НМТ-2 MIN для нечіткого числа $Z = [\min_{\alpha \in A} \min_{j \in I_\alpha} a_j, \max_{\alpha \in A} \min_{j \in I_\alpha} b_j] = [0,16]$ $F_1 = \tilde{8}$ (приблизно 8), $F_2 = \tilde{6}$ (приблизно 6) і $F_3 = 10$ (приблизно 10) «трикутного» типу відповідно з носіями $X_1 = [0,16]$, $X_2 = [2,10]$ і $X_3 = [4,16]$ (згідно із Зауваженням 2.3 тут $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $b_1 = b_3 = 16$, $b_2 = 10$) та функціями належності:

$$\mu_{F_1}(x) = \begin{cases} x/8, & x \in [0,8]; \\ 2 - x/8, & x \in [8,16]; \end{cases} \quad \mu_{F_2}(x) = \begin{cases} (x-2)/4, & x \in [2,6]; \\ (10-x)/4, & x \in [6,10]; \end{cases}$$

$$\mu_{F_3}(x) = \begin{cases} (x-4)/6, & x \in [4,10]; \\ (16-x)/6, & x \in [10,16]. \end{cases}$$

На Рис. 2.6 графіки функцій $u = \mu_{F_1}(x)$, $u = \mu_{F_2}(x)$ і $u = \mu_{F_3}(x)$ представлені відповідно точками, пунктиром і суцільною лінією. Нехай $I = \{(1;0,5),(2;0,8),(3;1,0)\}$ — задана нечітка множина на множині $N = \{1,2,3\}$ індексів операндів з функцією належності $\mu_I(1) = 0,5$; $\mu_I(2) = 0,8$ і $\mu_I(3) = 1,0$. Множина значень ступенів належності нечіткої множини I індексів операндів згідно із Зауваженням 2.4 має вигляд $A = \{0,5;0,8;1,0\}$. Сформуємо множину можливих значень мінімуму відповідно до Зауваження 2.5.

Побудуємо множину $I_{0,5} = \{1,2,3\}$ рівня $\alpha = 0,5$ нечіткої множини I індексів операндів, використовуючи (2.16). За допомогою (2.27) знайдемо нечітке число $MIN(0,5) = \min_{j \in I_{0,5}} F_j = \min\{F_1, F_2, F_3\}$ — мінімум рівня $\alpha = 0,5$. Згідно (2.17) множина векторів $x = (x_1, x_2, x_3)$, для яких мінімальна компонента з індексом з множини $I_{0,5} = \{1,2,3\}$ індексів операндів дорівнює $z \in Z$, має вигляд $G_{0,5}(z) = \varnothing$ для $z \in (10,16]$ і

$$G_{0,5}(z)=\{x=(x_1,x_2,x_3):\min\{x_1,x_2,x_3\}=z,$$
$$x_1\in[0,16],\ x_2\in[2,10],\ x_3\in[4,16]\}$$

для $z\in[0,10]$. Далі за допомогою (2.26) сформуємо функцію належності $\mu_{MIN(0,5)}(z)=0$, $z\in(10,16]$ і

$$\mu_{MIN(0,5)}(z)=\max_{x\in G_{0,5}(z)}\ \min_{j\in I_{0,5}}\mu_{F_j}(x_j)=$$
$$=\max_{x\in G_{0,5}(z)}\min\{\mu_{F_1}(x_1),\mu_{F_2}(x_2),\mu_{F_3}(x_3)\},$$

для нечіткого числа $MIN(0,5)=\{(z,\mu_{MIN(0,5)}(z)):\ z\in[0,16]\}$. Звідки остаточно отримаємо

$$\mu_{MIN(0,5)}(z)=\begin{cases} z/8, & z\in[0,4];\\ (z-2)/4, & z\in[4,6];\\ (10-z)/4, & z\in[6,10];\\ 0, & z\in(10,16].\end{cases}$$

Легко перевірити, що $MIN(0,5)=\min\{F_1,F_2,F_3\}=\min\{\tilde{8},\tilde{6}\}$. Тому $MIN(0,5)$ назвемо — «мінімум $\tilde{8}$ і $\tilde{6}$». На Рис. 2.7 графік функції $u=\mu_{MIN(0,5)}(z)$, $z\in[0,16]$ представлено точками. Слід зазначити, що можна використовувати і інші методи побудови функції належності нечіткого числа $MIN(0,5)=\min\{F_1,F_2,F_3\}$. Також $MIN(0,8)=\min\limits_{j\in I_{0,8}}F_j=\min\{F_2,F_3\}$ і $MIN(1,0)=\min\limits_{j\in I_{1,0}}F_j=F_3$ є мінімумами відповідно рівнів $\alpha=0,8$ і $\alpha=1,0$. Їхні функції належності мають відповідно вигляд:

$$\mu_{MIN(0,8)}(z)=\begin{cases} (z-2)/4,\ z\in[2,6];\\ (10-z)/4,\ z\in[6,10];\\ 0,\ z\in[0,2)\bigcup(10,16];\end{cases}$$

$$\mu_{MIN(1,0)}(z)=\begin{cases} (z-4)/6,\ z\in[4,10];\\ (16-z)/6,\ z\in[10,16];\\ 0,\ z\in[0,4).\end{cases}$$

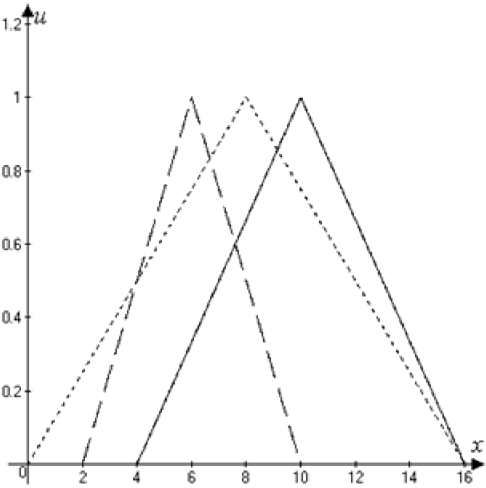

Рис. 2.6. Графіки функцій належності $u = \mu_{F_j}(x),\ j = 1, 2, 3$.

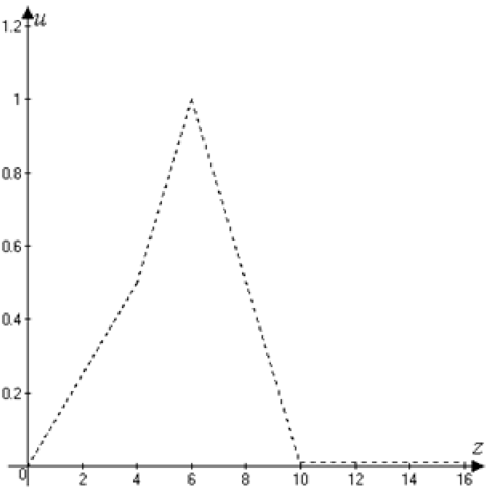

Рис. 2.7. Графік функції належності $u = \mu_{MIN(0,5)}(z)$.

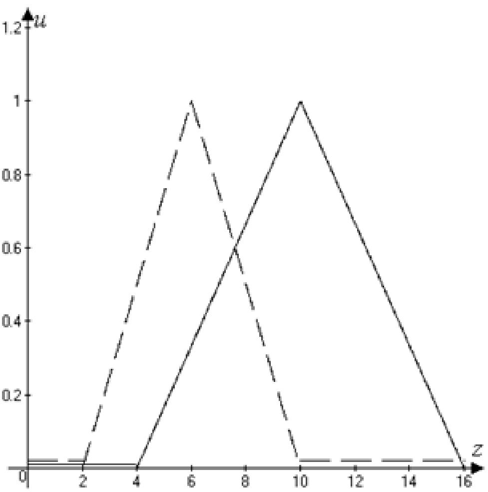

Рис. 2.8. Графіки функцій $u = \mu_{MIN(0,8)}(z)$, $u = \mu_{MIN(1,0)}(z)$.

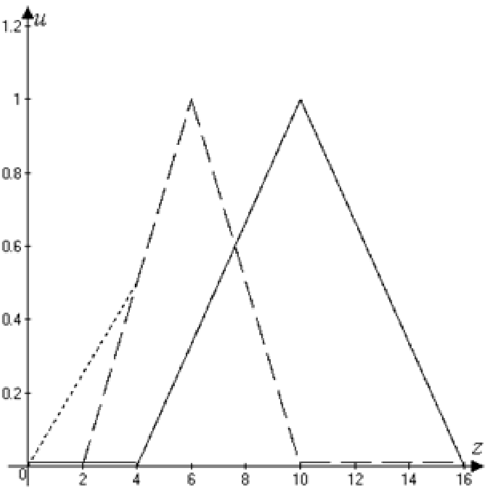

Рис. 2.9. Лінії рівня функції належності типу-2 $\mu_{MIN}(z,u)$.

На Рис. 2.8 графіки функції $u=\mu_{MIN(0,8)}(z)$ і $u=\mu_{MIN(1,0)}(z)$ представлені відповідно пунктиром і суцільною лінією. Неважко перевірити, що $MIN(0,8)=F_2=\tilde{6}$ і $MIN(1,0)=F_3=10$.

Тепер за формулою (2.28) обчислимо значення функції належності типу -2 $\mu_{MIN}(z,u)$, $z\in Z,\ u\in J_z$. Для цього спочатку за (2.29) побудуємо множину

$$J_z=\{u\in[0,1]:\ u=\mu_{MIN(\alpha)}(z),\ \alpha\in A\},\ z\in Z=[0,16]$$

первинних ступенів $u\in[0,1]$ зі строго позитивними значеннями $\mu_{MIN}(z,u)$. Отримаємо:

$$J_z=\{0,z/8\} \text{ для } z\in[0,2);$$
$$J_z=\{0,z/8,(z-2)/4\} \text{ для } z\in[2,4);$$
$$J_z=\{(z-2)/4,(z-4)/6\} \text{ для } z\in[4;6];$$
$$J_z=\{(10-z)/4,(z-4)/6\} \text{ для } z\in[6;10] \text{ і}$$
$$J_z=\{0,(16-z)/6\} \text{ для } z\in(10;16].$$

Таким чином, відповідно до (2.28) маємо:

$$\begin{gathered}MIN=\{((z,u),\mu_{MIN}(z,u)):\ u\in[0,1],\ z\in Z\}=\\ \{((z,z/8);0,5),\ ((z,0);1,0):\ z\in[0,2)\}\cup\\ \{((z,z/8);0,5),\ ((z,(z-2)/4);0,8),\ ((z,0);1,0):\ z\in[2;4)\}\cup\\ \{((z,(z-2)/4);0,8),\ ((z,(z-4)/6);1,0):\ z\in[4;6]\}\cup\\ \{((z,(10-z)/4);0,8),\ ((z,(z-4)/6);1,0):\ z\in[6;10]\}\cup\\ \{((z,0);0,8),\ ((z,(16-z)/6);1,0):\ z\in(10;16]\}.\end{gathered}\tag{2.34}$$

Відзначимо, що згідно із Зауваженням 2.7 в нечіткому наборі MIN типу-2 повторювані елементи враховуються лише один раз, як в об'єднанні множин. Для елементів (z,u) з різними вторинними оцінками α' і α'' в сукупності активується тільки один член с максимальною вторинною оцінкою $\max\{\alpha',\alpha''\}$. Крім цього, елементи з нульовими вторинними оцінками вилучаються. Тому в (2.34) вторинні ступені належності $\mu_{MIN}(z,u)$ визначаються за (2.28) так:

$$\mu_{MIN}(z,0)=\max\{0,8;1,0\}=1,0 \text{ для } z\in[0;2);$$
$$\mu_{MIN}(z,(z-2)/4)=\max\{0,5;0,8\}=0,8 \text{ для } z\in[2;4);$$

$$\mu_{MIN}(z,(10-z)/4)=\max\{0,5;0,8\}=0,8 \text{ для } z\in[6;10);$$
$$\mu_{MIN}(38/5,3/5)=\max\{0,8;1,0\}=1,0\ .$$
На Рис. 2.9 рівні функції належності типу -2 $\mu_{MIN}(z,u)$ НМТ-2 MIN представлені трьома лініями (суцільна лінія відповідає значенню $\mu_{MIN}(z,u)=1,0$; пунктир — $\mu_{MIN}(z,u)=0,8$, а точки — $\mu_{MIN}(z,u)=0,5$). Отриману НМТ-2
$$MIN=\{((z,u),\mu_{MIN}(z,u)):\ u\in[0,1],\ z\in Z\}$$
можна інтерпретувати в такий спосіб.

Мінімум нечітких чисел F_1, F_2 і F_3 з нечіткою множиною I операндів дорівнює z зі ступенем належності (первинним) u із вторинною оцінкою (ступенем істинності цього висловлювання) $\mu_{MIN}(z,u)$. Наприклад, для $z\in[2;4)$ мінімум F_1, F_2 і F_3 з нечіткою множиною $I=\{(1;0,5),(2;0,8),(3;1,0)\}$ операндів дорівнює z зі ступенями належності:

- $u=z/8$ зі ступенем істинності $\mu_{MIN}(z,z/8)=0,5$;
- $u=(z-4)/6$ зі ступенем істинності $\mu_{MIN}(z,(z-4)/6)=0,8$;
- $u=0$ зі ступенем істинності $\mu_{MIN}(z,0)=1,0$.

Більш наочну інтерпретацію НМТ-2 MIN забезпечує декомпозиційний підхід. Оскільки згідно зробленим розрахункам
$$MIN(1,0)=10\ ,\ MIN(0,8)=\tilde{6} \text{ і } MIN(0,5)=\min\{\tilde{8},\tilde{6}\}\ ,$$
то з Теореми 2.3 випливає представлення
$$MIN=\{(MIN(0,5);0,5),(MIN(0,8);0,8),(MIN(1,0);1,0)\}\ .$$
Тому отриману НМТ-2 MIN можна інтерпретувати в такий спосіб. Мінімум трьох нечітких чисел F_1, F_2 і F_3 з нечіткою множиною I індексів операндів дорівнює:

- 10 зі ступенем істинності (цього висловлювання) 1,0;
- $\tilde{6}$ зі ступенем істинності 0,8;
- $\min\{\tilde{8},\tilde{6}\}$ зі ступенем істинності 0,5.

Питання для самоперевірки до Розділу 2

1. Які операції над замкненими інтервалами є комутативними та асоціативними?

2. Дайте означення нечіткого числа.

3. На яких підходах заснована арифметика нечітких чисел?

4. Які ви знаєте типи нечітких чисел?

5. Знайдіть суму трикутних нечітких чисел $A=(2,5,7)$ і $B=(-2,0,3)$.

6. Знайдіть добуток трапецієподібних нечітких чисел $A=(2,5,6,8)$ і $B=(1,2,3,4)$.

7. Порівняйте трикутні нечіткі числа $A=(1,3,5)$ і $B=(2,3,4)$ за допомогою 1-ї та 2-ї функціями ранжування (індексами) Ягера.

РОЗДІЛ 3. Нечіткі задачі оптимізації

Завдяки простоті формулювання лінійного програмування та наявності деякого розробленого програмного забезпечення для оптимізації лінійне програмування є важливою та найбільш часто застосовуваною технікою дослідження операцій для реальних життєвих проблем. Задача лінійного програмування (ЗЛП) у чіткій постановці полягає у максимізації або мінімізації лінійної цільової функції за лінійних обмежень і може бути сформульованою так:

$$\max\ c^T x$$
$$s.t.$$
$$Ax \le b,\ x \ge 0,$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ є вектором змінних, $c \in \mathbb{R}^n$ є вектором коефіцієнтів цільової функції, $b \in \mathbb{R}^m$ є вектором правих частин обмежень, $A \in \mathbb{R}^{n+m}$ є матрицею обмежень. У наведеному вище формулюванні передбачається, що всі параметри задачі задані чіткими числами, також на множині дійсних чисел чітко визначені відношення '$\le$' нестрогого порядку і оператор максимізації 'max'. Але в деяких практичних ситуаціях ОПР, може лише «нечітко» вказати цілі та/або функції обмежень. В цьому розділі розглядаються різні постановки нечітких ЗЛП та методи їх розв'язання.

3.1. Класифікація підходів

Формулювання нечіткої ЗЛП залежить від ОПР, наприклад:

1) ОПР може насправді не хотіти максимізувати або мінімізувати цільову функцію, а лише досягти її певного значення, яке ОПР навіть не може чітко визначити. Наприклад, «значно покращити поточні доходи».

2) Обмеження можуть бути нечіткими, зокрема відношення '$\le$' нестрогого порядку на $\mathbb{R}$ може відрізнятися від класичного. Наприклад, ОПР може обмежувати витрати величиною 1000 у.о., але може погодитися і на 1500 у.о.

3) Параметри задачі (матриця A та вектори b і c) можуть бути заданими нечіткими числами, а нерівності в обмеженнях формалізовані в термінах відношення переваги на множині $\mathbb{N}(\mathbb{R})$ нечітких чисел.

Таким чином, моделі нечітких ЗЛП залежать від характеру нечіткості так, як її розуміє ОПР. Можна виділити такі типи нечітких ЗЛП:

1) ЗЛП з нечіткими обмеженнями та чіткою цільовою функцією;

2) ЗЛП з чіткими обмеженнями та нечіткою цільовою функцією;

3) ЗЛП з нечіткими обмеженнями та нечіткою цільовою функцією;

4) ЗЛП з нечіткими параметрами (матриця A та вектори b і c) у формі нечітких чисел.

Типи 1) та 2) відносяться до класу асиметричних моделей, а типи 3) та 4) до класу симетричних моделей.

Серед методів розв'язання ЗЛП можна також виділити так звані симетричні та асиметричні.

Симетричний підхід. Симетричні методи лінійного програмування спочатку розроблялися для розв'язання задач прийняття рішень із нечіткими цілями і нечіткими обмеженнями з урахуванням концепції нечіткого розв'язку, що був запропонований Беллманом і Заде. За їхнім підходом задача прийняття рішень з нечітко визначеною ціллю характеризується нечіткими множинами цілей G_i, $i = 1,..., p$ і допустимих альтернатив F_i, $j = 1,...,m$, які задані на універсальній множині альтернатив X. Нечіткий розв'язок D такої задачі визначається перетином всіх цих множин $D = (G_1 \cap ... \cap G_p) \cap (F_1 \cap ... \cap F_m)$ з функцією належності

$$\mu_D(x) = \min\{\min_{k=1,p} \mu_{G_k}(x), \min_{i=1,m} \mu_{F_i}(x)\}, \ x \in X .$$

Головною особливістю цього підходу є симетрія інформації в постановці задачі і в її розв'язку про цілі та обмеження, що визначають множину допустимих альтернатив. «Оптимальним» розв'язком $x^* \in X$ вважають будь-яку альтернативу, яка максимізує $\mu_D(x)$ і називають максимізуючою альтернативою, тобто $\mu_D(x^*) = \max_{x \in X} \mu_D(x)$. Симетричний підхід може бути застосованим як для симетричних, так і асиметричних моделей нечітких ЗЛП.

Асиметричний підхід. На відміну від симетричного підходу, основною рисою асиметричного підходу є несиметрична щодо нечіткості процедура обробки цілі (або цільової функції) та системи обмежень. Це означає, що лише одна із двох складових моделі задачі сприймається нечітко, а інша чітко, незалежно від того, якого виду нечіткість пов'язана із задачею. У цьому сенсі за допомогою асиметричного підходу можна не тільки розв'язати асиметричну задачу виду 1) та 2), але також розв'язувати симетричні задачі виду 3).

3.2. ЗЛП з нечіткими нерівностями та чіткою цільовою функцією

Загальна модель ЗЛП з нечіткими нерівностями та чіткою цільовою функцією має вигляд:

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &s.t. \\ &A_i x \lesssim b_i,\ 1 = 1, 2, \ldots, m; \\ &x \geq 0, \end{aligned} \qquad (3.1)$$

де нечітке відношення '$\lesssim$' називається «нечітким менше або дорівнює» і його слід розуміти в термінах відповідним чином заданої функції належності. Оскільки в (3.1) лише обмеження є нечіткими, то ця модель належить до класу асиметричних. Відомі як асиметричні, так і симетричні підходи до розв'язання задачі (3.1).

Підхід Вердегая (асиметричний підхід). Відповідно до цього методу для кожного $i = 1, 2, \ldots, m$ нечітке обмеження $A_i x \lesssim b_i$ задачі (3.1) заміняється чітким обмеженнями $\mu_i(x) \geq \alpha$, на значення функцій належності

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & A_i x < b_i; \\ 1 - \dfrac{A_i x - b_i}{p_i}, & b_i \le A_i x \le b_i + p_i; \\ 0, & A_i x > b_i + p_i \end{cases} \qquad (3.2)$$

нечіткої множини $\{(x, \mu_i(x)) : \mu_i(x) \ge \alpha,\ x \in \mathbb{R}\}$ альтернатив, що задовольняє обмеженню $A_i x \underset{\sim}{\le} b_i$, де $\alpha \in [0,1]$ є параметром, A_i є i-м рядком матриці A. Сенс функції належності $\mu_i(x)$ пояснюється так:

- якщо $A_i x \le b_i$, то i-те обмеження виконується повністю;

- якщо $A_i x \ge b_i + p_i$, то i-те обмеження повністю не виконується, де p_i є максимальним допуском (величиною максимально допустимого порушення або похибки) для правої частини b_i обмеження за думкою ОПР;

- якщо $A_i x \in (b_i, b_i + p_i)$, то функція належності лінійно спадає від 1 до 0.

Позначимо через $X_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : x \ge 0,\ \mu_i(x) \ge \alpha,\ i = 1,\dots,m\}$ множину рівня α, $\alpha \in [0,1]$ нечіткої множини допустимих альтернатив. Тоді задача (3.1) матиме вигляд

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &s.t. \\ &x \in X_\alpha. \end{aligned}$$

Звідси після підстановки (3.2) отримаємо задачу параметричного лінійного програмування:

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &s.t. \\ &A_i x \le b_i + (1-\alpha) p_i,\ i = 1,2,\dots,m; \\ &x \ge 0,\ \alpha \in [0,1]. \end{aligned}$$

Позначимо її розв'язок $\hat{x}_\alpha$. Тоді за принципом декомпозиції нечіткої множини на множини рівня отримаємо нечіткий розв'язок задачі (3.1) в формі $x^* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \hat{x}_\alpha$.

Підхід Вернерса (симетричний підхід). Оскільки в (3.1) цільова множина значень цільової функції явно не задана, то за підходом Вернерса вона формується «штучно». Розв'язуються такі ЗЛП:

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &s.t. \\ &Ax \le b, \\ &x \ge 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

та

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &s.t. \\ &Ax \le b + p, \\ &x \ge 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

де $p = (p_1, ..., p_m)^T$ є вектором допусків для вектору $b = (b_1, ..., b_m)^T$ правих частин обмежень задачі (3.1). Нехай Z_0 і Z_1 є оптимальними значеннями цільових функцій задач (3.3) та (3.4), відповідно. Тоді неперервна неспадна лінійна функція належності μ_0 нечіткої цільової множини значень цільової функції приймає вид:

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1, & cx^T > Z_1; \\ 1 - \dfrac{Z_1 - cx^T}{Z_1 - Z_0}, & Z_0 \le cx^T \le Z_1; \\ 0, & cx^T < Z_0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Функції належності нечітких множин обмежень задаються у формі

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & A_i x < b_i; \\ 1 - \dfrac{A_i x - b_i}{p_i}, & b_i \le A_i x \le b_i + p_i; \\ 0, & A_i x > b_i + p_i; \end{cases} \tag{3.6}$$

$i = 1, 2, ..., m$. Далі, задача (3.1) розв’язується за принципом

Беллмана і Заде за допомогою наступної чіткої ЗЛП:

$$\begin{aligned}
&\max\ \alpha\\
&s.t.\\
&\mu_0(x)\ge\alpha,\\
&\mu_i(x)\ge\alpha,\ i=1,2,...,m;\\
&x\ge 0,\ \alpha\in[0,1];
\end{aligned}$$

яка за (3.5) та (3.6) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
&\max\ \alpha\\
&s.t.\\
&cx^T\ge Z_1-(1-\alpha)(Z_1-Z_0);\\
&A_i x\le b_i+(1-\alpha)p_i,\ 1=1,2,...,m;\\
&x\ge 0,\ \alpha\in[0,1].
\end{aligned}\tag{3.7}$$

Оскільки нечіткість цілі і обмежень враховуються симетрично в процесі розв’язання, то метод належить до класу симетричних підходів.

3.3. ЗЛП з чіткими обмеженнями та нечіткими коефіцієнтами цільової функції

ЗЛП з чіткими обмеженнями та нечіткими коефіцієнтами цільової функції формалізується у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\max\ \tilde{c}^T x\\
&s.t.\\
&A_i x\le b_i,\ i=1,2,...,m;\\
&x\ge 0,
\end{aligned}\tag{3.8}$$

де $\tilde{c}=(\tilde{c}_1,...,\tilde{c}_n)$ є вектором нечітких коефіцієнтів $\tilde{c}_j$, $j=1,2,...,n$ з функціями належності $\phi_j(c_j)$, $c_j\in\mathbb{R}$, $j=1,2,...,n$, відповідно. Оскільки в (3.1) лише коефіцієнти цільової функції є нечіткими, то ця модель належить до класу асиметричних.

Підхід Вердегая (асиметричний підхід). Позначимо $\phi(c)=\min\limits_j \phi_j(c_j)$, $c=(c_1,...,c_n)\in\mathbb{R}^n$ функцію належності вектора

$\tilde{c} = (\tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_n)$ нечітких коефіцієнтів цільової функції. Нечіткий розв'язок (3.8) можна знайти шляхом розв'язання чіткої задачі оптимізації

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &s.t. \\ &\phi(c) \geq 1-\alpha, \\ &Ax \leq b, \\ &c = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n, \\ &x \geq 0,\ \alpha \in [0,1] \end{aligned} \tag{3.9}$$

із змінними коефіцієнтами $c = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ цільової функції. Для розв'язання (3.9) розглянемо допоміжну задачу:

$$\begin{aligned} &\max\ \eta(\beta)^T x \\ &s.t. \\ &Ax \leq b, \\ &x \geq 0,\ \beta \in [0,1], \end{aligned} \tag{3.10}$$

де $\eta(\beta) = (\eta_1(\beta), ..., \eta_n(\beta))$ є вектор-функцією з компонентами $\eta_j : [0,1] \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, ..., n$.

Теорема 3.1. Нехай функції належності $\phi_j : \mathbb{R} \to [0,1]$, $j = 1, 2, ..., n$ коефіцієнтів цільової функції задачі (3.8) є неперервними і строго монотонними. Тоді нечіткий розв'язок (3.8) задається розв'язком задачі параметричного лінійного програмування (3.9).

Доведення. Для розв'язання задачі (3.8) нам потрібно розв'язати задачу (3.9). Оскільки кожна функція належності ϕ_j є неперервним і строго монотонним відображенням, то існує обернене відображення ϕ_j^{-1} і тоді з нерівності $\phi_j(c_j) \geq 1-\alpha$ випливає $c_j \geq \phi_j^{-1}(1-\alpha)$, $j = 1, 2, ..., n$. Тому задачу (3.9) можна записати у вигляді

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&s.t. \\
&c_j \ge \phi_j^{-1}(1-\alpha),\ j = 1, 2, \ldots, n; \\
&Ax \le b, \\
&c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \\
&x \ge 0,\ \alpha \in [0,1],
\end{aligned}
$$

який є еквівалентним задачі

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&s.t. \\
&c_j = \phi_j^{-1}(1-\alpha),\ j = 1, 2, \ldots, n; \\
&Ax \le b, \\
&x \ge 0,\ \alpha \in [0,1].
\end{aligned}
$$

Таким чином, задача (3.8) може бути розв'язаною за допомогою чіткої ЗЛП із змінними коефіцієнтами

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{j=1}^{n} \phi_j^{-1}(1-\alpha) x_j \\
&s.t. \\
&Ax \le b, \\
&x \ge 0,\ \alpha \in [0,1].
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Якщо позначити $\beta = 1-\alpha$ та $\eta_j(\beta) = \phi_j^{-1}(1-\alpha)$, легко побачити, (3.11) співпадає з (3.9).

Теорему доведено.

Приклад 3.1. Розглянемо задачу нечіткого лінійного програмування

$$
\begin{aligned}
&Z = \max(\tilde{c}_1 x_1 + c_2 x_2) \\
&s.t. \\
&3x_1 - x_2 \le 2,\ x_1 + 2x_2 \le 3,\ x_{1,2} \ge 0,
\end{aligned}
$$

де $c_2 = 75$ є чітким параметром, а функція належності для нечіткого параметра $\tilde{c}_1$ має вигляд

$$\phi_1(c_1) = \begin{cases} 0, & c_1 < 40; \\ \dfrac{(c_1 - 40)^2}{5625}, & 40 \le c_1 \le 115; \\ 1, & c_1 > 115. \end{cases}$$

Щоб розв'язати цю задачу нечіткого лінійного програмування, ми маємо розв'язати чітку задачу (3.11), яка матиме вигляд

$$\begin{aligned} & Z = \max\ (\phi_1^{-1}(1-\alpha)x_1 + 75x_2) \\ & s.t. \\ & 3x_1 - x_2 \le 2,\ x_1 + 2x_2 \le 3,\ x_{1,2} \ge 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

З визначення функції належності $\phi_1(c_1)$ одержимо $\phi_1^{-1}(1-\alpha) = 40 + 75\sqrt{1-\alpha}$, і тоді задача (3.12) матиме вигляд

$$\begin{aligned} & Z = \max\ ((40 + 75\sqrt{1-\alpha})x_1 + 75x_2) \\ & s.t. \\ & 3x_1 - x_2 \le 2, \\ & x_1 + 2x_2 \le 3, \\ & x_{1,2} \ge 0,\ \alpha \in [0,1]. \end{aligned}$$

Оптимальним розв'язком цієї задачі параметричного програмування є вектор $x^* = (1,1)$ для будь-якого $\alpha \in [0,1]$, тому нечітка множина значень цільової функції має вигляд

$$\{(Z, \mu_Z(r)) : r \in \mathbb{R}\} = \{(c_1 + 75, \frac{(c_1 - 40)^2}{5625}) :\ 40 \le c_1 \le 115\}\ .$$

3.4. ЗЛП с нечіткими обмеженнями і цільовою функцією

Загальна модель ЗЛП з нечіткою ціллю та нечіткими обмеженнями формалізується у такому вигляді:

$$
\begin{aligned}
&\max\ c^T x \\
&s.t. \\
&A_i x \lesssim b_i,\ 1 = 1,2,...,m; \\
&x \geq 0.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Ця модель належить до класу симетричних.

Підхід Циммермана (симетричний підхід). За цим підходом нечіткі обмеження обробляються так само, як і в попередньому випадку (Розділ 3.2). Але оператор $\max$ нечіткого максимуму розуміють в сенсі задоволення цільового (бажаного) значення Z_0 цільової функції. Ця ідея дозволяє сформулювати задачу (3.13) у вигляді системи нечітких нерівностей:

$$
\begin{aligned}
&c^T x \gtrsim Z_0, \\
&Ax \lesssim b, \\
&x \geq 0.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Для її розв'язання, вибирають відповідну функцію належності для кожної з нечітких нерівностей, а потім застосовують принцип Беллмана і Заде для визначення нечіткого розв'язку. Позначимо

$$
\mu_0(x) = \begin{cases} 1, & cx^T > Z_0; \\ 1 - \dfrac{Z_0 - cx^T}{p_0}, & Z_0 - p_0 \leq cx^T \leq Z_0; \\ 0, & cx^T < Z_0 - p_0 \end{cases}
$$

функцію належності нечіткої множини альтернатив, що задовольняють цілі ОПР, яка полягає у задоволенні цільового (бажаного) значення Z_0 цільової функції;

$$
\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & A_i x < b_i; \\ 1 - \dfrac{A_i x - b_i}{p_i}, & b_i \leq A_i x \leq b_i + p_i; \\ 0, & A_i x > b_i + p_i \end{cases}
$$

функцію належності нечіткої множини альтернатив, що задовольняють i-му обмеженню, $i=1,...,m$; де p_0 і p_i, $i=1,...,m$ є допусками для цільового (бажаного) значення Z_0 цільової функції та правої частини b_i i-го обмеження, відповідно. За принципом Беллмана і Заде нечіткий розв'язок задачі (3.13) знаходять шляхом розв'язання чіткої ЗЛП

$$\begin{aligned}
&\max\ \alpha \\
&s.t. \\
&\mu_0(x)=1-(Z_0-cx^T)/p_0\geq\alpha \\
&\mu_i(x)=1-(A_ix-b_i)/p_i\geq\alpha,\ \ 1=1,2,...,m, \\
&x\geq 0,\ \ \alpha\in[0,1],
\end{aligned}$$

яка, в свою чергу, зводиться до ЗЛП

$$\begin{aligned}
&\max\ \alpha \\
&s.t. \\
&cx^T\geq Z_0-(1-\alpha)p_0, \\
&A_ix\leq b_i+(1-\alpha)p_i,\ 1=1,2,...,m; \\
&x\geq 0,\ \ \alpha\in[0,1].
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Позначимо (x^*,α^*) оптимальний розв'язок задачі (3.15). Тоді x^* є оптимальним розв'язком задачі (3.13) із ступенем α^* задоволення Z_0 цілі ОПР, яка полягає у задоволенні цільового (бажаного) значення Z_0 цільової функції.

Приклад 3.2. Розглянемо нечітку ЗЛП

$$\begin{aligned}
&Z=\max\ x_1+x_2 \\
&s.t. \\
&-x_1+3x_2\lesssim 21, \\
&x_1+3x_2\lesssim 27, \\
&4x_1+3x_2\lesssim 45, \\
&3x_1+x_2\leq 30, \\
&x_{1,2}\geq 0.
\end{aligned}$$

Припустимо, що $Z_0=14.5$, $p_0=2$, $p_1=3$, $p_2=6$ і $p_3=6$. За підходом Циммермана для розв’язання цієї задачі нам потрібно розв’язати таку (чітку) ЗЛП

$$\begin{aligned}
&\max\ \alpha \\
&s.t. \\
&x_1 + x_2 \geq 14.5 - 2(1-\alpha), \\
&-x_1 + 3x_2 \leq 21 + 3(1-\alpha), \\
&x_1 + 3x_2 \leq 27 + 6(1-\alpha), \\
&4x_1 + 3x_2 \leq 45 + 6(1-\alpha), \\
&3x_1 + x_2 \leq 30, \\
&x_{1,2} \geq 0,\ \alpha \in [0,1],
\end{aligned}$$

яку можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\max\ \alpha \\
&s.t. \\
&2\alpha - x_1 - x_2 \geq 12.5, \\
&3\alpha - x_1 + 3x_2 \leq 24, \\
&6\alpha + x_1 - 3x_2 \leq 33, \\
&6\alpha + 4x_1 + 3x_2 \leq 51, \\
&3x_1 + x_2 \leq 30, \\
&x_{1,2} \geq 0,\ \alpha \in [0,1].
\end{aligned}$$

Ця задача має розв’язок $x^* = (6, 7.75),\ Z^* = 13.75,\ \alpha^* = 0.625$, який є розв’язком вихідної задачі.

Підхід Чанаса (асиметричний підхід). Для розв’язання нечіткої ЗЛП типу (3.14) за підходом Циммермана потрібно задавати цільове (бажане) значення Z_0 цільової функції та пов’язаний з ним допуск p_0. В деяких випадках це може бути проблематично через відсутність знань про нечітку область допустимих розв’язків. Для уникнення цього недоліку за підходом Чанаса потрібно спочатку розв’язати задачу

$$\begin{aligned} &\max\ z = c^T x \\ &s.t. \\ &Ax \lesssim b, \\ &x \geq 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Розв'язок задачі (3.16) допомагає ОПР визначити цільове (бажане) значення Z_0 цільової функції та пов'язаний з ним допуск p_0. Далі для заданих допусків p_i, $i = 1, 2, ..., m$ для правих частин обмежень задають функції належності

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & A_i x < b_i; \\ 1 - \dfrac{A_i x - b_i}{p_i}, & b_i \leq A_i x \leq b_i + p_i; \\ 0, & A_i x > b_i + p_i \end{cases}$$

нечітких множин альтернатив, що задовольняють обмеженням $i = 1, 2, ..., m$. Використовуючи підхід Вердегая, задача (3.16) еквівалентна наступній задачі параметричного лінійного програмування:

$$\begin{aligned} &\max\ Z = c^T x \\ &s.t. \\ &Ax \leq b + \theta p, \\ &x \geq 0,\ \theta \in [0,1], \end{aligned} \tag{3.17}$$

де $\theta = 1 - \alpha$ є параметром, а $p = (p_1, ..., p_m)^T$ є вектором допусків для вектору $b = (b_1, ..., b_m)^T$ правих частин обмежень.

Нехай для заданого θ, вектор $x^*(\theta)$ є оптимальним розв'язком задачі (3.17) з відповідним оптимальним значенням $Z^*(\theta)$ цільової функції. Тоді обмеження $Ax \leq b + \theta p$ означає $A_i x \leq b_i + (1-\alpha) p_i$, $i = 1, 2, ..., m$. Звідси для кожного $i = 1, 2, ..., m$, виконується нерівність $\mu_i(A_i x^*(\theta)) \geq \alpha = 1 - \theta$ та існує принаймні один індекс i, для якого $\mu_i(A_i x^*(\theta)) = \alpha = 1 - \theta$. Це пояснюється тим, що в (3.17) принаймні одне обмеження має бути активним для $x^*(\theta)$, оскільки $x^*(\theta)$ не може бути внутрішньою точкою допустимої області. Отже, величину

$\mu_C(x^*(\theta)) = \min_i \mu_i(x^*(\theta)) = 1-\theta$ можна вважати гарантованим ступенем задоволення обмежень задачі. Кожному значенню параметра θ відповідає оптимальний розв'язок $x^*(\theta)$ (якщо він існує), який задовольняє обмеженням зі ступенем $1-\theta$. Значення цільової функції для оптимального розв'язку $x^*(\theta)$ дорівнює $Z^*(\theta)$. Далі отриманий оптимальний розв'язок задачі (3.17) пропонують ОПР, яка вибирає цільове (бажане) значення Z_0 цільової функції та пов'язаний з ним допуск p_0. Після цього будують функцію належності

$$\mu_0(x^*(\theta)) = \begin{cases} 1, & cx^*(\theta) > Z_0; \\ 1-(Z_0 - cx^*(\theta))/p_0, & Z_0 - p_0 \le cx^*(\theta) \le Z_0; \\ 0, & cx^*(\theta) < Z_0 - p_0 \end{cases}$$

нечіткої множини альтернатив, що задовольняють цілі ОПР, яка полягає у задоволенні цільового (бажаного) значення Z_0 цільової функції. Гарантованим ступенем задоволення обмежень є значення $\mu_C(x^*(\theta)) = 1-\theta$. Тому $x^*(\theta^*)$ приймається за оптимальний розв'язок задачі (3.14) з оптимальним значенням $z^*(\theta^*)$ цільової функції, де θ^* вибирається так, що $\mu_D(\theta^*) = \max_\theta \mu_D(\theta) = \max_\theta \min\{\mu_0(x^*(\theta)), \mu_C(x^*(\theta))\}$.

3.5. Двоетапний підхід для розв'язання нечітких ЗЛП

Розглянуті вище підходи до розв'язання нечіткої ЗЛП (3.13) іноді приводять до не ефективного нечіткого розв'язку в тому сенсі, що може існувати інший з тим самим значенням цільової функції, але кращим значенням функції належності. Така ситуація може виникнути тоді, коли результуюча чітка ЗЛП має не один, а множину оптимальних розв'язків. Тоді серед цих розв'язків можуть бути не ефективні (але принаймні один з множини оптимальних розв'язків, безумовно, має бути ефективним). Позбавитися цього недоліка дозволяє двоетапний підхід.

На етапі I застосовується метод Featured Вернерса (Розділ 3.2) для розв'язання нечіткої ЗЛП

$$\begin{aligned}&\max\ c^T x\\ &s.t.\\ &A_i x \lesssim b_i,\ 1=1,2,...,m;\\ &x \ge 0\end{aligned} \qquad (3.18)$$

з чітко визначеною цільовою функцією. За цим методом спочатку визначають можливий діапазон $[Z_0, Z_1]$ значень цільової функції задачі (3.18) шляхом розв'язання ЗЛП

$$\begin{aligned}&Z_0 = \max\ c^T x\\ &s.t.\\ &Ax \le b,\ x \ge 0\end{aligned} \qquad (3.19)$$

та

$$\begin{aligned}&Z_1 = \max\ c^T x\\ &s.t.\\ &Ax \le b + p,\ x \ge 0.\end{aligned} \qquad (3.20)$$

Далі визначаються функції належності

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 0, & cx^T < Z_0;\\ 1 - \dfrac{Z_1 - cx^T}{Z_1 - Z_0}, & Z_0 \le cx^T \le Z_1;\\ 1, & cx^T > Z_1\end{cases}$$

нечіткої множини альтернатив, що задовольняють цілі ОПР, яка полягає у задоволенні цільового (бажаного) значення Z_0 цільової функції та

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & A_i x < b_i;\\ 1 - \dfrac{A_i x - b_i}{p_i}, & b_i \le A_i x \le b_i + p_i;\\ 0, & A_i x > b_i + p_i\end{cases}$$

нечіткої множини альтернатив, що задовольняють обмеженню $i = 1,...,m$, де A_i є i-м рядком матриці A, а p_i є відповідним допуском для правої частини b_i i-го обмеження, $i = 1,...,m$.

Відповідно до принципу Беллмана і Заде шукаємо розв'язок нечіткої ЗЛП (3.18) шляхом розв'язання наступної чіткої ЗЛП

$$\begin{aligned}&\max\ \alpha\\ &s.t.\\ &\mu_i(x) \ge \alpha,\ i = 0,1,...,m;\\ &x \ge 0,\ \alpha \in [0,1].\end{aligned} \tag{3.21}$$

Позначимо (x^*, α^*) оптимальний розв'язок задачі (3.21) і переходимо до етапу II.

На етапі II визначаємо ефективний розв'язок задачі (3.13). Для цього формулюємо ЗЛП

$$\begin{aligned}&\max\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\\ &s.t.\\ &\mu_i(x) \ge \alpha_i,\ i = 0,1,...,m;\\ &\mu_i(x^*) \le \alpha_i,\ i = 0,1,...,m;\\ &\alpha_i \in [0,1],\ i = 0,1,...,m;\ x \ge 0;\end{aligned} \tag{3.22}$$

яка спрямована на покращення функції належності нечіткого розв'язку. Нехай $(x^{**}, \alpha_0^{**}, \alpha_1^{**}, ..., \alpha_m^{**})$ є оптимальним розв'язком задачі (3.18). Будемо називати ефективний розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації

$$\max_{x \ge 0}(\mu_0(x), \mu_1(x), ..., \mu_m(x)) \tag{3.23}$$

ефективним нечітким розв'язком задачі (3.13).

Справедлива теорема.

Теорема 3.2. Оптимальний розв'язок x^{**} задачі (3.18) є ефективним нечітким розв'язком задачі (3.13).

Доведення. Припустимо супротивне, що x^{**} не є ефективним нечітким розв'язокм (3.23). Тоді існує розв'язок $\bar{x} \ge 0$ (3.23), такий, що $\mu_i(x^{**}) \le \mu_i(\bar{x})$, для всіх $i = 1,...,m$ та $\mu_k(x^{**}) < \mu_k(\bar{x})$ для деякого *k*. Оскільки $(x^{**}, \alpha_0^{**}, \alpha_1^{**}, ..., \alpha_m^{**})$ є оптимальним розв'язком (3.22), то $\mu_i(x^{**}) = \alpha_i^{**}$, $i = 1,...,m$. Виберемо $\mu_i(\bar{x}) = \bar{\alpha}_i$, $i = 1,...,m$. Тоді $(\bar{x}, \bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, ..., \bar{\alpha}_m)$ є допустимим розв’язком (3.17) , причому

$$\sum_{i=0}^{m}\alpha_i^{**} = \sum_{i=0}^{m}\mu_i(x^{**}) < \sum_{i=0}^{m}\mu_i(\bar{x}) = \sum_{i=0, i\neq k}^{m}\bar{\alpha}_i + \alpha_k .$$

Звідси випливає, що $(x^{**},\alpha_0^{**},\alpha_1^{**},...,\alpha_m^{**})$ не є оптимальним розв’язком (3.22). Отримали суперечність.

Зауваження 3.1. ЗЛП (3.22) можна спростити. Тоді вона прийме вигляд

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{i=1}^{m}\mu_i(x)\\
&s.t.\\
&\mu_i(x) \geq \mu_i(x^*),\ i = 0,1,...,m;\\
&\mu_i(x) \leq 1,\ i = 0,1,...,m;\\
&x \geq 0.
\end{aligned}$$

Проілюструємо двоетапний підхід на такому прикладі.

Приклад 3.3. Розглянемо нечітку ЗЛП

$$\begin{aligned}
&\max\ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4\\
&s.t.\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \lesssim 15,\\
&7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \lesssim 80,\\
&3x_1 + 4.4x_2 + 10x_3 + 15x_4 \lesssim 100,\ x_{1-4} \geq 0.
\end{aligned}$$

Виберемо допуски $p_1 = 5$, $p_2 = 40$ і $p_3 = 30$ для правих частин обмежень задачі. Позначимо $Z(x)$ значення цільової функції та $g_1(x)$, $g_2(x)$ та $g_3(x)$ функції лівих частин обмежень. Визначимо функції належності

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1, & g_1(x) < 15;\\ \dfrac{20 - g_1(x)}{5}, & 15 \leq g_1(x) \leq 20;\\ 0, & g_1(x) > 20; \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1, & g_2(x) < 80; \\ \dfrac{120 - g_2(x)}{40}, & 80 \le g_2(x) \le 120; \\ 0, & g_2(x) > 120; \end{cases}$$

$$\mu_3(x) = \begin{cases} 1, & g_3(x) < 100; \\ \dfrac{130 - g_3(x)}{30}, & 100 \le g_3(x) \le 130; \\ 0, & g_3(x) > 130. \end{cases}$$

Нечітких множин альтернатив, що задовольняють обмеженням задачі. Розв'яжемо задачі (3.19) і (3.20) та отримаємо $Z_0 = 99.29$ і $Z_1 = 130$. Тоді

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1, & Z(x) < 100; \\ \dfrac{Z(x) - 99.29}{130 - 99.29}, & 99.29 \le Z(x) \le 130; \\ 0, & \mathrm{Z}(x) > 99.29 \end{cases}$$

є функцією належності нечіткої множини альтернатив, що задовольняють цілі ОПР, яка полягає у задоволенні цільового (бажаного) значення $Z_0 = 99.29$ цільової функції цільової функції. Далі за підходом Вернерса розв'яжемо задачу (3.21), яка матиме вигляд

$$\begin{aligned} & \max\ \alpha \\ & s.t. \\ & 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \ge 130 - 30.71(1-\alpha) \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15 + 5(1-\alpha), \\ & 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 80 + 40(1-\alpha), \\ & 3x_1 + 4.4x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 100 + 30(1-\alpha), x_{1-4} \ge 0,\ \alpha \in [0,1]. \end{aligned}$$

Ця задача має оптимальний розв'язок $x_1^* = 8.57$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 8.93$, $x_4^* = 0$, $\alpha^* = 0.5$. Звідси одержимо $Z(x^*) = 114.65$, $g_1(x^*) = 17.5$, $g_2(x^*) = 86.78$, $g_3(x^*) = 115.01$. Тоді $\mu_0(x^*) = \mu_1(x^*) = \mu_3(x^*) = 0.5$ та $\mu_2(x^*) = 0.83$.

На етапі II ЗЛП (3.22) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
&\max\ \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\
&s.t.\\
&4x_1+5x_2+9x_3+11x_4\ge 130-30.71(1-\alpha_0)\\
&x_1+x_2+x_3+x_4\le 15+5(1-\alpha_1),\\
&7x_1+5x_2+3x_3+2x_4\le 80+40(1-\alpha_2),\\
&3x_1+4.4x_2+10x_3+15x_4\le 100+30(1-\alpha_3),\\
&\alpha_{0,1}\in[0.5,1],\ \alpha_2\in[0.83,1],\ \alpha_3\in[0.5,1];\\
&x_{1-4}\ge 0.
\end{aligned}$$

Оптимальним розв'язком цієї задачі є $x_1^{**}=4.05$, $x_2^{**}=5.65$, $x_3^{**}=7.8$, $x_4^{**}=0$. Звідси одержимо $Z(x^{**})=Z(x^{*})=114.65$, $g_1(x^{**})=17.5$, $g_2(x^{**})=80$, $g_3(x^{**})=115.01$. Тоді $\mu_0(x^*)=\mu_1(x^*)=\mu_3(x^*)=0.5$ та $\mu_2(x^*)=1$. Отже, за двоетапним підходом ми отримуємо оптимальний розв'язок x^{**}, який не тільки забезпечує «оптимальне» значення цільової функції, але й має більш високе значення функції належності μ_2, оскільки $\mu_2(x^{**})=1>\mu_2(x^*)=0.83$.

3.6. ЗЛП з нечіткими параметрами у формі нечітких чисел

Нечіткі нерівності з нечіткими допусками. Спочатку зупинимося на концепції нечітких обмежень, які виражаються у вигляді нечітких нерівностей з нечіткими допусками (величиною максимально допустимого порушення або похибки) для правої частин обмежень. Нехай $N(\mathbb{R})$ є множиною всіх нечітких чисел. Також нехай $\tilde{A}$ є матрицею розмірності $m\times n$, $\tilde{b}$ і $\tilde{c}$ є векторами розмірності m і n відповідно, які складаються з нечітких чисел з $N(\mathbb{R})$. Розглянемо нечіткі обмеження виду

$$\tilde{A}x \underset{\sim}{\le}_{\tilde{p}} \tilde{b},$$

де $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_m)^T$ є вектором нечітких допусків для вектору $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_m)^T$ правих частин обмежень. Компонента $\tilde{p}_i \in N(\mathbb{R})$, $i = 1, ..., m$ нечіткого вектора $\tilde{p}$ допусків є нечітким числом, яке характеризує величину максимально допустимого порушення або похибки для правої частини $\tilde{b}_i$ обмеження $\tilde{A}_i x \lesssim_{\tilde{p}_i} \tilde{b}_i$. За методом декомпозиції Ягера, обмеження $\tilde{A}x \lesssim_{\tilde{p}} \tilde{b}$ виражається як $\tilde{A}x \preceq \tilde{b} + \tilde{p}(1-\lambda)$, $\lambda \in [0,1]$, де '$\preceq$' є відношенням нестрогої переваги на множині $\mathbb{N}(\mathbb{R})$ нечітких чисел, яке можна реалізувати за допомогою функції ранжирування $F : N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (Розділ 2.5). В цьому випадку відношення $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ зводиться до нерівності $F(\tilde{a}) \le F(\tilde{b})$. Оскільки функція F використовується для дефаззифікації заданих нечітких ЗЛП, то тут і далі називатимемо її функцією дефаззифікації, а не функцією ранжування. Отже, нечіткі обмеження виду $\tilde{A}x \lesssim_{\tilde{p}} \tilde{b}$ слід розуміти як відношення

$$\tilde{A}_i x \preceq \tilde{b}_i + \tilde{p}_i(1-\lambda),\ \lambda \in [0,1],\ i = 1, ..., m,$$

які можуть бути представлені у вигляді системи нерівностей

$$F(\tilde{A}_i x) \le F(\tilde{b}_i) + F(\tilde{p}_i)(1-\lambda),\ i = 1, ..., m.$$

Нехай $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i$, $\tilde{p}_i$, $i = 1, ..., m$ є трикутними нечіткими числами, а F є першим індексом Ягера, заданим за формулою

$$F(D) = \int_{d_l}^{d_u} x\mu_D(x)dx \Bigg/ \int_{d_l}^{d_u} \mu_D(x)dx,$$

де d_l, d_u є нижніми та верхніми границями носія supp(D) нечіткого числа D. В цьому випадку обмеження $\tilde{A}x \lesssim_{\tilde{p}} \tilde{b}$ матимуть вигляд

$$\sum_{j=1}^{n}((a_{ij})_l + a_{ij} + (a_{ij})_u)x_j \le$$
$$\le ((b_i)_l + b_i + (b_i)_u) + (1-\lambda)((p_i)_l + p_i + (p_i)_u),\ i = 1, ..., m,$$

$\lambda \in [0,1]$. Тут для $i = 1,...,m$ і $j = 1,...,n$, $\tilde{a}_{ij} = ((a_{ij})_l, a_{ij}, (a_{ij})_u)$, $\tilde{b}_i = ((b_i)_l, b_i, (b_i)_u)$, $\tilde{p}_i = ((p_i)_l, p_i, (p_i)_u)$.

ЗЛП з нечіткими параметрами у формі нечітких чисел. Загальна модель ЗЛП з нечіткими параметрами у формі нечітких чисел формалізується у такому вигляді:

$$\begin{aligned} &\max\ \tilde{c}^T x \\ &s.t. \\ &\tilde{A}x \lesssim_{\tilde{p}} \tilde{b}, \\ &x \geq 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Тут $\tilde{A}$ є матрицею розмірності $m \times n$ нечітких чисел, $\tilde{b}$ і $\tilde{c}$ є векторами нечітких чисел розмірності m та n відповідно, $p = (p_1,..., p_m)^T$ є вектором допусків для вектору $b = (b_1,...,b_m)^T$ правих частин обмежень. За методом декомпозиції Ягера для заданої функції $F : N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ дефаззифікації нечітких чисел задача (3.24) має вигляд:

$$\begin{aligned} &\max\ F(\tilde{c}^T x) \\ &s.t. \\ &F(\tilde{A}\, x) \leq F(\tilde{b}) + F(\tilde{p})(1-\lambda), \\ &x \geq 0,\ \lambda \in [0,1]. \end{aligned}$$

ЗЛП з нечіткою ціллю та з нечіткими параметрами у формі нечітких чисел. Загальна модель ЗЛП з нечіткою ціллю та нечіткими параметрами у формі нечітких чисел формулюється у такому вигляді:

$$\begin{aligned} &\max\ \tilde{c}^T x \\ &s.t. \\ &\tilde{A}x \lesssim_{\tilde{p}} \tilde{b}, \\ &x \geq 0. \end{aligned}$$

Розглянемо наступну нечітку ЗЛП:

$$\begin{aligned} &\tilde{c}^T x \gtrsim_{\tilde{p}_0} \tilde{Z}_0, \\ &\tilde{A}x \lesssim_{\tilde{p}} \tilde{b},\ x \ge 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

В цій моделі $\tilde{Z}_0$ є нечітким числом, яке задає бажане значення цільової функції $\tilde{c}^T x$ задачі (3.25). Нехай $\tilde{p}_0$ характеризує величину максимально допустимого порушення або похибки для бажаного значення $\tilde{Z}_0$ цільової функції $\tilde{c}^T x$, а $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_m)^T$ є вектором нечітких допусків для вектору $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_m)^T$ правих частин обмежень. Тоді за методом декомпозиції Ягера для заданої функції $F : N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ дефаззифікації нечітких чисел задача (3.25) набуває вигляду ЗЛП:

$$\begin{aligned} &\max\ \lambda \\ &s.t. \\ &F(\tilde{c}^T x) \ge F(\tilde{Z}_0) - F(\tilde{p}_0)(1-\lambda), \\ &F(\tilde{A}_i x) \le F(\tilde{b}_i) + F(\tilde{p}_i)(1-\lambda),\ i = 1, ..., m, \\ &x \ge 0,\ \lambda \in [0,1]. \end{aligned}$$

Питання для самоперевірки до Розділу 3

1. В чом суть симетричних моделей нечітких ЗЛП?
2. Чи може бути застосованим асиметричний метод для симетричної нечіткої ЗЛП ?
3. До якого типу нечітких ЗЛП можна застосувати підхід Вердегая?
4. Яким чином симетричний підхід Вернерса може бути застосованим до асиметричної нечіткої ЗЛП ?
5. Яка ідея підходу Циммермана до розв’язання нечітких ЗЛП?
6. Які переваги надає ОПР двоетапний підхід для розв’язання нечітких ЗЛП?
7. Яка ідея дефаззифікації нечітких нерівностей з нечіткими допусками?

РОЗДІЛ 4. Нечіткі багатокритеріальні задачі лінійного програмування

Задача багатокритеріальної оптимізації у чіткій постановці полягає у максимізації або мінімізації певного набору критеріїв (цільових функцій) на множині допустимих альтернатив. У випадку лінійних функцій критеріїв і лінійних обмежень може бути сформульованою так:

$$\begin{aligned}&\max\ (c_1 x, \ldots, c_r x)\\&s.t.\\&Ax \le b,\ x \ge 0,\end{aligned}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ є вектором альтернатив (змінних), $A \in \mathbb{R}^{n+m}$ є матрицею обмежень, $b \in \mathbb{R}^m$ є вектором правих частин обмежень, $c_k = (c_{k1}, \ldots, c_{kn})$ позначає k-й рядок, $k = 1, \ldots, r$ матриці $C \in \mathbb{R}^{r+n}$ коефіцієнтів критеріїв. У наведеному вище формулюванні передбачається, що всі параметри задачі задані чіткими числами, також на множині дійсних чисел чітко визначені відношення '$\le$' нестрогого порядку і оператор максимізації 'max'. Але в деяких практичних ситуаціях ОПР, може лише «нечітко максимізувати» критерії на множині альтернатив.

Для формалізації нечіткої багатокритеріальної ЗЛП визначимо сенс поняття «нечітка максимізація». Призначимо g_k цільове (бажане) значення за k-м критерієм, $k = 1, \ldots, r$. Тоді нечітка багатокритеріальна ЗЛП полягає у знаходженні вектора $x \in \mathbb{R}^n$, що задовольняє умовам:

$$\begin{aligned}&c_k x \underset{\sim}{\ge} g_k,\ k = 1, \ldots, r\\&s.t.\\&Ax \le b,\ x \ge 0.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Тут символ '$\underset{\sim}{\ge}$' слід розуміти в нечіткому сенсі обраної функції належності. Відношення $c_k x \underset{\sim}{\ge} g_k$, $k = 1, \ldots, r$ далі будемо називати нечіткими критеріями.

4.1. Підхід Циммермана

За підходом Циммермана стандартна лінійна функція належності за нечітким критерієм $k=1,\dots,r$ має вигляд

$$\mu_k(x)=\begin{cases}1, & c_k^T x \ge g_k;\\ f_k(x)=\dfrac{c_k^T x-l_k}{g_k-l_k}, & l_k \le c_k^T x \le g_k;\\ 0, & c_k^T x > l_k;\end{cases} \qquad (4.2)$$

де l_k є максимальним допуском (величиною максимально допустимого порушення або похибки) для k-го нечіткого критерію. Розв'язок нечіткої багатокритеріальної ЗЛП (3.1) знаходять шляхом розв'язання чіткої ЗЛП такого вигляду

$$\begin{aligned}&\max\ \lambda\\ &\text{s.t.}\\ &\lambda \le \frac{c_k^T x-l_k}{g_k-l_k},\ k=1,\dots,r,\\ &Ax \le b,\\ &\lambda\in[0,1],\ x\ge 0.\end{aligned} \qquad (4.3)$$

В цій моделі $f_k(x)=\dfrac{c_k^T x-l_k}{g_k-l_k}$ з формули (4.2) є лінійною функцією, але взагалі $f_k(x)$ може бути будь-якою кусково-лінійною квазіопуклою до низу функцією.

Безпосереднім узагальненням підходу Циммермана є двоетапний підхід, аналогічний до однокритеріального випадку (Розділ 3.6). За цим підходом на першому етапі розв'язується чітка ЗЛП (4.3). Позначимо (x^*,λ^*) оптимальним розв'язком (4.3). Якщо x^* є єдиною альтернативою, то її слід вважати «оптимальним» розв'язком нечіткої багатокритеріальної ЗЛП (4.1), інакше на етапі II формулюється наступна ЗЛП:

$$\max \sum_{k=1}^{r} \frac{\lambda_k}{r}$$
$$s.t.$$
$$\lambda_k^* \le \lambda_k \le f_k(c_k^T x),\ k = 1,...,r;$$
$$Ax \le b;\ x \ge 0.$$

Нехай $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ є оптимальним розв'язком цієї ЗЛП, тоді $\overline{x}$ є ефективним розв'язком чіткої багатокритеріальної ЗЛП

$$\max\ (\mu_1(x),...,\mu_r(x))$$
$$s.t.$$
$$Ax \le b,\ x \ge 0,$$

де $\mu_k(x)$ фактично означає $\mu_k(c_k^T x)$ для $k = 1,...,r$ (див. (4.2)).

4.2. Зважений максимінний підхід

В реальних задачах прийняття рішень критерії можуть мають різний рівень важливості для ОПР. Це можна врахувати, якщо узагальнити класичний зважений максимінний підхід на випадок нечітких критеріїв. Таке узагальнення приводить до наступної задачі

$$\max\ \lambda$$
$$s.t.$$
$$w_k \lambda \le f_k(c_k^T x),\ k = 1,...,r;$$
$$Ax \le b;\ x \ge 0.$$

В цій моделі $w_k > 0$ є відносною вагою k-го критерію, $k = 1,...,r$, $\sum_{k=1}^{r} w_k = 1$.

Приклад 4.1. Знайти альтернативу $x \in \mathbb{R}^3$, яка задовольняє умовам:

$$Z_1 = 3x_1 + x_2 + x_3 \gtrsim 7, Z_1 = 3x_1 + x_2 + x_3 \gtrsim 7, Z_1 = 3x_1 + x_2 + x_3 \gtrsim 7,$$
s. t.
$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 10,\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 8,\ x_3 \le 5,\ x_{1,2,3} \ge 0.$$

Визначимо функції належності:

$$\mu_1(Z_1) = \begin{cases} 1, & Z_1 \ge 7; \\ 0.2(Z_1 - 6) + 0.8, & 6 \le Z_1 < 7; \\ 0.3(Z_1 - 5) + 0.5, & 5 \le Z_1 < 6; \\ 0.5(Z_1 - 4), & 4 \le Z_1 < 5; \\ 0, & Z_1 < 4; \end{cases}$$

$$\mu_2(Z_2) = \begin{cases} 1, & Z_2 \ge 8; \\ 0.15(Z_2 - 4) + 0.4, & 4 \le Z_2 < 8; \\ 0.2(Z_2 - 2), & 2 \le Z_2 < 4; \\ 0, & Z_2 < 2; \end{cases}$$

$$\mu_3(Z_3) = \begin{cases} 1, & Z_3 \ge 5; \\ 0.2(Z_3 - 4) + 0.8, & 4 \le Z_3 < 5; \\ 0.4(Z_3 - 2), & 2 \le Z_3 < 4; \\ 0, & Z_3 < 2 \end{cases}$$

нечітких критеріїв. Крім того, нехай ОПР призначила відносні ваги критеріїв $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.35$, $w_3 = 0.25$. Тоді зважений максимінний підхід приводить до наступної ЗЛП:

$$\begin{aligned} &\max\ \lambda \\ &s.t. \\ &0.4\lambda \le 0.2(Z_1 - 6) + 0.8,\ 0.4\lambda \le 0.3(Z_1 - 5) + 0.5, \\ &0.4\lambda \le 0.5(Z_1 - 4),\ 0.35\lambda \le 0.15(Z_2 - 4) + 0.4, \\ &0.35\lambda \le 0.2(Z_2 - 2),\ 0.25\lambda \le 0.2(Z_3 - 4) + 0.8, \\ &0.25\lambda \le 0.4(Z_3 - 2),\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 10, \\ &x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 8,\ x_3 \le 5,\ x_{1,2,3} \ge 0, \end{aligned}$$

де $Z_1 = 3x_1 + x_2 + x_3$, $Z_2 = x_1 - x_2 + 2x_3$. Ця задача має оптимальний розв'язок $\lambda^* = 0.82$, $x_1^* = 0.60$, $x_2^* = 0.95$, $x_3^* = 1.89$. Йому відповідають значення $Z_1 = 4.65$, $Z_2 = 3.43$, $Z_3 = 2.51$ критеріальних функцій та їхніх функцій належності $\mu_1 = 0.32$, $\mu_2 = 0.28$, $\mu_3 = 0.20$ відповідно.

4.3. «Чіткий» підхід

Нехай

$$\mu_k(x) = \begin{cases} 1, & c_k^T x \ge g_k; \\ \dfrac{c_k^T x - l_k}{g_k - l_k}, & l_k \le c_k^T x \le g_k; \\ 0, & c_k^T x > l_k \end{cases}$$

є функцією належності множини альтернатив, які задовольняють нечіткому критерію $Z_k = c_k^T x \gtrsim g_k$, $k = 1,\ldots,r$. Для досягнення бажаних значень g_k, $k = 1,\ldots,r$ критеріїв, потрібно намагатися наблизити значення $\mu_k(x)$, $k = 1,\ldots,r$ до 1. Отже, ми повинні мінімізувати від'ємні d_k^- та додатні d_k^+ відхилення від 1 для кожного k-го нечіткого критерію, $k = 1,\ldots,r$. Цю вимогу можна сформулювати у вигляді обмежень

$$\frac{Z_k(x) - l_k}{g_k - l_k} + d_k^- - d_k^+ = 1,$$

$$d_k^- d_k^+ = 0,\ d_k^-, d_k^+ \ge 0.$$

Уведемо міру від'ємних відхилень d_k^- так, щоб мінімізувати зважені сумарні (адитивна згортка) або максимальні (мінімаксна згортка) від'ємні відхилення d_k^-, $k = 1,\ldots,r$.

Адитивна згортка. Розв'яжемо наступну задачу:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{k=1}^{r} w_k^- d_k^- \\ &s.t. \\ &\frac{Z_k(x) - l_k}{g_k - l_k} + d_k^- - d_k^+ = 1,\ k = 1,\ldots,r; \\ &Ax \le b;\ d_k^- d_k^+ = 0,\ k = 1,\ldots,r; \\ &d_k^-, d_k^+ \ge 0,\ k = 1,\ldots,r;\ x \ge 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

де $w_k^- > 0$, $k = 1,...,r$, $\sum_{k=1}^{r} w_k = 1$ є заданими ОПР ваговими коефіцієнтами. Оскільки для $k = 1,...,r$, $Z_k = c_k^T x$, то $\frac{c_k^T x - l_k}{g_k - l_k} + d_k^- - d_k^+ = 1$, тобто $c_k^T x + d_k^-(g_k - l_k) - d_k^+(g_k - l_k) = g_k$. Тому задача (4.4) приймає вигляд

$$\min \sum_{k=1}^{r} w_k^- d_k^-$$

$$s.t.$$

$$c_k^T x + d_k^-(g_k - l_k) - d_k^+(g_k - l_k) = g_k,\ k = 1,...,r;$$

$$Ax \le b;$$

$$d_k^- d_k^+ = 0,\ k = 1,...,r;$$

$$d_k^-, d_k^+ \ge 0,\ k = 1,...,r;$$

$$x \ge 0.$$

В цій моделі $p_k = g_k - l_k$ є максимальним допуском (величиною максимально допустимого порушення або похибки) для *k*-го критерію, $k = 1,...,r$. Вагові коефіцієнти w_k^- змінних d_k^-, $k = 1,...,r$ можуть бути обрані ОПР суб'єктивно або формально як $w_k^- = 1/(g_k - l_k) = 1/p_k$, $k = 1,...,r$.

Мінімаксна згортка. Якщо взяти $u = \max_k d_k^-$, то оптимізаційна задача, яку потрібно розв'язати, має вигляд:

$$\min\ u$$

$$s.t.$$

$$c_k^T x + p_k d_k^- - p_k d_k^+ = g_k,\ k = 1,...,r;$$

$$u \ge d_k^-,\ k = 1,...,r;$$

$$Ax \le b;$$

$$d_k^- d_k^+ \ge 0,\ k = 1,...,r;$$

$$d_k^-, d_k^+ \ge 0,\ k = 1,...,r;\ x \ge 0.$$

Приклад 4.2. Розглянемо нечітку багатокритеріальну задачу: Знайти альтернативу $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, яка задовольняє умовам

$$\begin{aligned}
&Z_1=-x_1+2x_2 \underset{\sim}{\geq} 14,\ Z_2=2x_1+3x_2 \underset{\sim}{\geq} 21,\\
&\text{s. t.}\\
&-x_1+3x_2\leq 21,\ x_1+3x_2\leq 27,\\
&4x_1+3x_2\leq 45,\ 3x_1+x_2\leq 30,\ \ x_{1,2}\geq 0.
\end{aligned}\tag{4.5}$$

В цій задачі $g_1=14$ і $g_2=21$. Нехай $p_1=8$ і $p_2=10$. Тоді для розв'язання задачі (4.5) за підходом Циммермана розглянемо задачу

$$\begin{aligned}
&\max\ \lambda\\
&s.t.\\
&\lambda\geq 1-\frac{14+x_1-2x_2}{8},\ \lambda\geq 1-\frac{21-2x_1-x_2}{8},\\
&\text{s. t.}\\
&-x_1+3x_2\leq 21,\quad x_1+3x_2\leq 27,\\
&4x_1+3x_2\leq 45,\ 3x_1+x_2\leq 30,\ x_{1,2},\lambda\geq 0.
\end{aligned}\tag{4.6}$$

Оптимальним розв'язоком (4.6) є $\lambda^*=0.56$, $x_1^*=4.53$, $x_2^*=7.49$. За «чітким» підходом з мінімаксною згорткою одержимо наступну ЗЛП

$$\begin{aligned}
&\min\ u\\
&s.t.\\
&-x_1+2x_2+8d_1^- -8d_1^+=14,\\
&2x_1+x_2+10d_2^- -10d_2^+=21,\\
&u\geq d_1^-,\\
&u\geq d_2^-,\\
&-x_1+3x_2\leq 21,\quad x_1+3x_2\leq 27,\\
&4x_1+3x_2\leq 45,\ 3x_1+x_2\leq 30,\\
&d_1^-d_1^+=0,\ d_2^-d_2^+=0,\ \ x_{1,2},d_1^-,d_1^+,d_2^-,d_2^+\geq 0.
\end{aligned}\tag{4.7}$$

Оптимальним розв’язоком (4.7) є $u^* = 0.44$, $x_1^* = 4.53$, $x_2^* = 7.49$. Відмітимо, що цей розв’язок співпадає з розв’язком (4.6), де $u^* = 1 - \lambda^*$. Можна показати, що ця властивість виконується для всіх задач виду (4.1).

У випадку, якщо розв’язується задача (4.5) з використанням мінімаксної згортки, одержимо таку ЗЛП

$$
\begin{aligned}
&\min\ \frac{1}{8}d_1^- - \frac{1}{8}d_2^- \\
&s.t. \\
&-x_1 + 2x_2 + 8d_1^- - 8d_1^+ = 14, \\
&2x_1 + x_2 + 10d_2^- - 10d_2^+ = 21, \\
&-x_1 + 3x_2 \le 21, \\
&\ x_1 + 3x_2 \le 27, \\
&4x_1 + 3x_2 \le 45, \\
&3x_1 + x_2 \le 30, \\
&d_1^- d_1^+ = 0, \\
&d_2^- d_2^+ = 0, \\
&x_{1,2}, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \ge 0.
\end{aligned}
$$

Питання для самоперевірки до Розділу 4

1. В чому сенс поняття «нечітка максимізація»?
2. Запишіть постановку нечіткої задачі багатокритеріальної оптимізації.
3. Яка ідея підходу Циммермана до розв’язання нечітких задач багатокритеріальної оптимізації?
4. Яким чином узагальнюється класичний зважений максимінний підхід на випадок нечітких критеріїв?
5. Яка ідея «чіткого» підходу до розв’язання нечітких задач багатокритеріальної оптимізації?

РОЗДІЛ 5. Нечітка двоїстість

5.1. Двоїстість у лінійному програмуванні

У цьому підрозділі наведені основні результати теорії двоїстості у чіткому лінійному програмуванні. Для ЗЛП у вигляді

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &s.t. \\ &Ax \le b,\ x \ge 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

(далі будемо називати прямою задачею), двоїста задача визначається як ЗЛП

$$\begin{aligned} &\min\ b^T u \\ &s.t. \\ &A^T u \ge c,\ u \ge 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ є вектором прямих змінних, $u \in \mathbb{R}^m$ є вектором двоїстих змінних, $c \in \mathbb{R}^n$ є вектором коефіцієнтів цільової функції прямої задачі та одночасно є вектором правих частин обмежень двоїстої задачі, $b \in \mathbb{R}^m$ є вектором правих частин обмежень прямої задачі та одночасно є вектором коефіцієнтів цільової функції двоїстої задачі, $A \in \mathbb{R}^{n+m}$ є матрицею обмежень. Наведені вище ЗЛП (5.1)-(5.2) є взаємно двоїстими. Будь-яку з них можна назвати прямою, а іншу — двоїстою.

Нагадаємо основні теореми теорії двоїстості.

Теорема 5.1 (теорема слабкої двоїстості). Нехай x є допустимим розв'язком (5.1), а u є допустимим розв'язком (5.2). Тоді $c^T x \le b^T u$.

Наслідок 5.1. Нехай $\hat{x}$ є допустимим розв'язком (5.1), а $\hat{u}$ є допустимим розв'язком (5.2), причому $c^T \hat{x} = b^T \hat{u}$. Тоді $\hat{x}$ є оптимальним розв'язком (5.1), а $\hat{u}$ є оптимальним розв'язком (5.2).

Теорема 5.2 (теорема двоїстості). Оптимальний розв'язок $\hat{x}$ ЗЛП (5.1) існує тоді й лише тоді, коли існує оптимальний розв'язок $\hat{u}$ ЗЛП (5.2), причому $c^T \hat{x} = b^T \hat{u}$.

Теорема 5.3 (умова існування). Якщо цільова функція ЗЛП (5.1) приймає необмежені значення, то множина допустимих розв'язків ЗЛП (5.2) є порожньою. Якщо множина допустимих розв'язків (5.1) є порожньою, а множина допустимих розв'язків (5.2) є не порожньою, то цільова функція ЗЛП (5.2) приймає необмежені значення. Крім того, можливо, що множини допустимих розв'язків (5.1) і (5.2) є порожніми одночасно.

Теорема 5.4 (умови доповнюючої нежорсткості). Нехай $\hat{x}$ є оптимальним розв'язком ЗЛП (5.1), а $\hat{u}$ є оптимальним розв'язком ЗЛП (5.2). Тоді справедливі умови доповнюючої нежорсткості:

- якщо існує $i \in \{1,...,m\}$ для якого $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j < b_i$, то $\hat{u}_i = 0$.

- якщо існує $i \in \{1,...,m\}$ для якого $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{u}_i > c_j$, то $\hat{x}_j = 0$.

5.2. Модель нечіткої двоїстості Рьоддера-Циммермана

Двоїстість чітких ЗЛП (5.1) і (5.2) можна формалізувати за допомогою функції Лагранжа $L(x,u) = c^T x + u^T(b - Ax)$ як $\max_{x\geq 0}\min_{u\geq 0} L(x,u)$ і $\min_{u\geq 0}\max_{x\geq 0} L(x,u)$ відповідно. Рьоддер і Циммерман узагальнили цю ідею в умовах нечіткого середовища. У чіткому випадку для кожного розв'язку x прямої ЗЛП існує розв'язок u двоїстої ЗЛП і навпаки. У випадку нечіткої множини $\tilde{X}$, яка визначена на універсальній множині $X = \{x : x \geq 0\}$ розв'язків прямої ЗЛП з функцією належності $\mu_{\tilde{X}}(x)$, $x \in X$, для кожного $x \in X$ існує нечітка множина $\tilde{U}^x$ на універсальній множині $U = \{u : u \geq 0\}$ розв'язків двоїстої ЗЛП з функцією належності $\mu_{\tilde{U}^x}(u)$, $u \in U$. Отже, нечіткій множині

$\tilde{X} = \{(x, \mu_{\tilde{X}}(x)) : x \in X\}$ на X відповідає сімейство нечітких множин $\tilde{U}^x = \{(u, \mu_{\tilde{U}^x}(u)) : u \in U\}$ на U з параметром $x \in X$.

Визначимо ще одну нечітку множину на U, яка називається сумішшю $\tilde{X}$ та $\tilde{U}^x$, $x \in X$ з функцію належності

$$v_{\tilde{X}}(u) = \max_{x \geq 0} \min\{\mu_{\tilde{X}}(x), \mu_{\tilde{U}^x}(u)\}. \qquad (5.3)$$

Ця суміш, яка має функцію належності $v_I(u)$, визначає сімейство таких розв'язків $x(u)$, щоб для кожному розв'язку $u \in U$ двоїстої задачі (5.2) відповідав оптимум $\mu_I(x)$ і $\mu_I^x(u)$.

Подібним чином, якщо $\mu_{\tilde{U}}(u)$ є функцією належності $\tilde{U}$ на $U = \{u : u \geq 0\}$ і $\mu_{\tilde{X}^u}(x)$ є функцією належності $\tilde{X}^u$ на $X = \{x : x \geq 0\}$ для будь-якого заданого $u \geq 0$, то для $\tilde{U}$ ми повинні розглянути суміш нечітких наборів $\mu_{\tilde{U}}(u)$ і $\mu_{\tilde{X}^u}(x)$ та отримати нечітку множину з функцією належності

$$\xi_{\tilde{U}}(x) = \max_{u \geq 0} \min\{\mu_{\tilde{U}}(u), \mu_{\tilde{X}^u}(x)\}. \qquad (5.4)$$

Рьоддер і Циммерман запропонували такі варіанти для функцій $\mu_{\tilde{X}}(x)$, $\mu_{\tilde{U}^x}(u)$, $\mu_{\tilde{U}}(u)$ і $\mu_{\tilde{X}^u}(x)$:

$$\mu_{\tilde{X}}(x) = \begin{cases} 1, & c^T x^0 \leq c^T x; \\ 1 - c^T x^0 + c^T x, & c^T x^0 > c^T x; \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{U}^x}(u) = \begin{cases} 0, & u^T(b - Ax) \leq 0; \\ u^T(b - Ax), & u^T(b - Ax) > 0; \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{U}}(u) = \begin{cases} 1, & b^T u \leq b^T u^0; \\ 1 - b^T u + b^T u^0, & b^T u > b^T u^0; \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{X}^u}(x) = \begin{cases} 0, & x^T(c - A^T u) \leq 0; \\ -x^T(c - A^T u), & x^T(c - A^T u) > 0. \end{cases}$$

Тут $c^T x^0$ є бажаним рівнем значення цільової функції прямої задачі (5.1), а $b^T u^0$ є бажаним рівнем цільової функції двоїстої задачі (5.2). Після підстановки функцій належності

$\mu_{\tilde X}(x),\ \mu_{\tilde U^x}(u)$, $\mu_{\tilde U}(u)$ і $\mu_{\tilde X^u}(x)$ в (5.3) і (5.4) одержимо для $\tilde X$ та $\tilde U$ такі задачі лінійного програмування

$$\begin{aligned}&\max\ \lambda_1\\&s.t.\\&\lambda_1 \le 1 - c^T x^0 + c^T x,\\&\lambda_1 \le u^T(b - Ax),\ \forall u \ge 0,\\&x \ge 0\end{aligned} \tag{5.5}$$

та

$$\begin{aligned}&\min\ (-\lambda_2)\\&s.t.\\&\lambda_2 \ge b^T u - b^T u^0 - 1,\\&\lambda_2 \ge x^T(c - A^T u),\ x \ge 0,\\&u \ge 0.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Відповідно, справедливі рівності $\lambda_1 = \min\{\mu_{\tilde X}(x), \mu_{\tilde U^x}(u)\}$ та $-\lambda_2 = \eta = \min\{\mu_{\tilde U}(u), \mu_{\tilde X^u}(x)\}$. Пара задач (5.5)-(5.6) називається нечіткою двоїстою парою ЗЛП.

Лема 5.1. Якщо існує допустимий розв'язок $\hat x$ задачі (5.5) такий, що $c^T \hat x > 0$ і $-u^T A\hat x > 0$, то (5.5) має необмежені значення цільової функції.

Доведення. Оскільки $\hat x$ є допустимим розв'язком задачі (5.5), то $\lambda_1 \le 1 - c^T x^0 + c^T \hat x$ та $\lambda_1 \le u^T(b - A\hat x)$. З нерівності $c^T \hat x > 0$ випливає існування достатньо великого $c > 0$, для якого $\lambda_1 \le 1 - c^T x^0 + c^T \varepsilon \hat x$. Аналогічно одержимо $\lambda_1 \le u^T(b - A\hat x) \le u^T(b - A\varepsilon \hat x)$ завдяки нерівності $-u^T A\hat x > 0$. Тому для $c > 0$ значення $(c^T \hat x, \lambda_1)$ може бути достатньо великим в (5.5). Оскільки $\varepsilon > 0$ можна зробити як завгодно великим, то λ_1 може приймати будь-яке як завгодно велике значення, тому (5.5) має необмежені значення цільової функції.

Визначення 5.1. Множина

$$U_0 = \{u \ge 0 : \nexists x \ge 0\ c^T x > 0,\ -u^T Ax > 0\}$$

називається множиною раціональних розв'язків u для $\tilde{U}$.

З огляду на лему 5.1, розв'язок u для $\tilde{U}$ завжди має належати U_0. Інакше значення функції належності $\tilde{X}$ можуть бути збільшені довільним чином. Аналогічно множина $X_0 = \{x \geq 0 : \nexists u \geq 0\ b^T u < 0,\ -u^T Ax < 0\}$ називається множиною раціональних розв'язків x для $\tilde{X}$, і x завжди має належати X_0, інакше значення функції належності $\tilde{U}$ можуть бути зменшені довільним чином.

Розглянемо ще дві множини

$$U_1 = \{u \geq 0 : \forall x \geq 0\ c^T x \geq 0 \ \Rightarrow\ -u^T Ax > 0\}$$

та

$$X_1 = \{x \geq 0 : \forall u \geq 0\ b^T u \leq 0 \ \Rightarrow\ -u^T Ax < 0\}.$$

Лема 5.2. Для множин U_1 і X_1 мають місце включення $U_1 \subset U_0$ і $X_1 \subset X_0$, відповідно.

Доведення. Оскільки множини U_0 і X_0 можна записати у вигляді $U_1 = \{u \geq 0 : \forall x \geq 0\ c^T x > 0 \ \Rightarrow\ u^T Ax \geq 0\}$ та $X_0 = \{x \geq 0 : \forall u \geq 0\ b^T u < 0 \ \Rightarrow\ u^T Ax \leq 0\}$, то $U_1 \subset U_0$ і $X_1 \subset X_0$, що і доводить Лему.

Можна стверджувати, що, обмежуючи розв'язки u до U_1 і розв'язки x до X_1, ми не втрачаємо жодної економічно значущої інформації. Це пояснюється тим, що єдиною додатковою умовою U_1 щодо U_0 є те, що для $\forall x \geq 0\ c^T x > 0 \ \Rightarrow\ u^T Ax \geq 0$. Але такий розв'язок u для M не робить (5.5) необмеженим, а отже це не дозволяє I довільно збільшувати вартість своєї належності.

Можна стверджувати, що для раціональних розв'язків u можна замінити умову $u \in U_0$ на $u \in U_1$. Це пояснюється тим, що єдиною додатковою умовою U_1 щодо U_0 є те, що для $\forall x \geq 0$ з нерівності $c^T x > 0$ випливає $u^T Ax \geq 0$, але ця умова не робить цільову функцію задачі (5.5) необмеженою на нечіткій множині $\tilde{U}$. Подібні аргументи справедливі і для вибору множини X_1 для характеристики раціональних розв'язків x.

Для формалізації множин U_1 і X_1 використаємо відому лему Фаркаша.

Лема 5.3. (Лема Фаркаша). Нехай $A \in \mathbb{R}^{m+n}$ є дійсною матрицею, а $b \in \mathbb{R}^n$ є заданим вектором. Нерівність $b^T y \geq 0$ виконується для всіх векторів $y \in \mathbb{R}^n$, що задовольняють нерівності $Ay \geq 0$ тоді й лише тоді, коли існує вектор $p \in \mathbb{R}^m$, $p \geq 0$, для якого виконується рівність $A^T p = b$.

Доведемо наступну Лему.

Лема 5.4. Множини U_1 і X_1 можуть бути представлені у вигляді:

$$U_1 = \{u \geq 0 : \exists \alpha \geq 0 \ \ \alpha \mathrm{c} \leq A^T u\},$$
$$X_0 = \{x \geq 0 : \exists \beta \geq 0 \ \ Ax \leq \beta \mathrm{b}\}.$$

Доведення. Нехай $u \in U_1$. Тоді з нерівностей $x \geq 0,\ c^T x > 0$ випливає $u^T Ax \geq 0$. Отже, за лемою Фаркаша існує вектор $p \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p \geq 0$ такий, що $\begin{pmatrix} 1 \\ c^T \end{pmatrix}^T p = (u^T A)^T$. Нехай $p = \begin{pmatrix} \beta_n \\ \alpha \end{pmatrix}^T$.

Тоді $(1, c)\begin{pmatrix} \beta_n \\ \alpha \end{pmatrix} = A^T u$, тобто $\beta_n + c\alpha = A^T u$. Оскільки $p \geq 0$, то $\beta_n \geq 0$ і, таким чином, $A^T u \geq c\alpha$. Доведення для X_1 аналогічне.

Отримані результати дозволяють назвати наступні дві задачі:

$$\begin{aligned}
&\max \ \lambda_1 \\
&s.t. \\
&\lambda_1 \leq 1 - c^T x^0 + c^T x, \\
&\lambda_1 \leq u^T (b - Ax), \ \forall u \geq 0, \\
&A^T u \geq \alpha c, \\
&Ax \leq \beta b, \\
&x, \alpha, \beta \geq 0
\end{aligned} \qquad (5.7)$$

та

$$\begin{aligned}
&\min\ (-\lambda_2) \\
&s.t. \\
&\lambda_2 \geq b^T u - b^T u^0 - 1, \\
&\lambda_2 \geq x^T (c - A^T u),\ \forall x \geq 0, \qquad (5.8) \\
&A^T u \geq \alpha c, \\
&Ax \leq \beta b, \\
&u, \alpha, \beta \geq 0
\end{aligned}$$

нечіткою парою двоїстих ЗЛП та встановити для них відношення двоїстості. Для цього з означення множин U_1 і X_1 зауважимо, що для кожного $(x,u) \in X_1 \times U_1$ існують $\alpha, \beta > 0$ такі, що

$$A^T u \geq \alpha c \ \text{ і } \ Ax \leq \beta b,$$

звідки випливає нерівність

$$\alpha(c^T x) \leq u^T Ax \leq \beta(b^T u).$$

Отже, для оптимальних розв'язків задач (5.7) та (5.8) мають місце нерівності

$$\alpha c^T x^0(u) \leq \beta(u) b^T u \ \text{ та } \ \alpha(x) c^T x \leq \beta b^T u^0(x). \qquad (5.9)$$

Слід відмітити, що з означення множин U_1 і X_1 випливають залежності α від x та β від u. Оскільки для задач, які виникають в реальному житті, випадки α і β не дорівнюють нулю, то нерівності (5.9) приймають форму

$$\frac{\alpha}{\beta(u)} c^T x^0(u) \leq b^T u \ \text{ та } \ c^T x \leq \frac{\beta}{\alpha(x)} b^T u^0(x). \qquad (5.10)$$

Нерівності (5.10) слід вважати узагальненням відношень двоїстості звичайної (чіткої) слабкої теореми двоїстості (Теорема 5.1).

Зауваження 5.2. У класичній теорії двоїстості оптимальні значення цільових функцій пари двоїстих ЗЛП є однаковими. Для двоїстості в нечіткому лінійному програмуванні ця властивість може не виконуватися.

5.3. Модифікована двоїстість в нечіткому середовищі

У підході Рьоддера та Циммермана функції $\mu_{\tilde{X}}(x)$ і $\mu_{\tilde{U}}(u)$ приймають значення в $(-\infty,1]$, тоді як $\mu_{\tilde{U}^x}(u)$ і $\mu_{\tilde{X}^u}(x)$ приймають значення в $[0,+\infty)$. Це не відповідає визначенню функції належності, відповідно до якого вона повинна приймати значення в [0,1]. Крім того, якщо $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = -1$ в задачах (5.7) та (5.8) відповідно, то $u^T(b - Ax) \geq 1$ та $x^T(c - A^T u) \leq -1$. Для двоїстих задач в чіткій постановці аналогічні нерівності повинні мати вигляд $u^T(b - Ax) \geq 0$ і $x^T(c - A^T u) \leq 0$. Оскільки бажано, щоб теорія двоїстості для задач ЗЛП в чіткій постановці була як окремий випадок теорії нечіткої двоїстості, то виникає потреба модифікувати підхід Рьодера та Циммермана належним чином.

Розглянемо нечіткі версії пари двоїстих задач (5.1) і (5.2) у такій постановці:

$$\begin{aligned} &\text{Знайти } x \in \mathbb{R}^n \text{ такий, що} \\ &\quad c^T x \underset{\sim}{\geq} Z_0 \\ &\quad Ax \underset{\sim}{\leq} b, \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

та

$$\begin{aligned} &\text{Знайти } u \in \mathbb{R}^m \text{ такий, що} \\ &\quad b^T w \underset{\sim}{\leq} W_0 \\ &\quad Aw \underset{\sim}{\geq} c, \\ &\quad w \geq 0. \end{aligned} \tag{5.12}$$

В цих формулюваннях '$\underset{\sim}{\geq}$' і '$\underset{\sim}{\leq}$' є нечіткими відношеннями переваги, які аналогічні чітким '$\geq$' і '$\leq$' відповідно, і мають інтерпретацію «приблизно більше ніж» і «приблизно менше ніж». Також Z_0 і W_0 є цільовими (бажаними ОПР) значеннями цільових функцій $c^T x$ і $b^T w$ відповідно. Нехай p_0 та p_i $i = 1, 2, ..., m$ є максимальними допусками (величинами максимально допустимих порушень або похибок), що пов'язані з цільовою функцією та обмеженнями (5.11) відповідно. Для формалізації нечітких обмежень задачі (5.11) будемо використовувати кусково-лінійні функції належності

$$\mu_0(x)=\begin{cases}1, & cx^T > Z_0;\\ 1-\dfrac{Z_0-cx^T}{p_0}, & Z_0-p_0\le cx^T\le Z_0;\\ 0, & cx^T < Z_0-p_0;\end{cases}$$

$$\mu_i(x)=\begin{cases}1, & A_i x < b_i;\\ 1-\dfrac{A_i x-b_i}{p_i}, & b_i\le A_i x\le b_i+p_i;\\ 0, & A_i x > b_i+p_i;\end{cases}$$

$i=1,2,...,m$. Тоді дефаззифікація (5.11) приведе до ЗЛП

$$\begin{aligned}&\max\ \lambda\\ &s.t.\\ &(\lambda-1)p_0\le cx^T-Z_0,\\ &(\lambda-1)p_i\le b_i-A_i x,\ 1=1,2,...,m;\\ &x\ge 0,\ \lambda\in[0,1];\end{aligned} \tag{5.13}$$

де A_i є i-м рядком матриці A, а b_i є i-ю компонентою вектора b, $i=1,2,...,m$. Аналогічно нехай q_0 та q_j, $j=1,2,...,n$ є максимальними допусками (величинами максимально допустимих порушень або похибок), що пов'язані з цільовою функцією та обмеженнями (5.12). Тоді дефаззифікація (5.12) приведе до ЗЛП

$$\begin{aligned}&\min\ -\eta\\ &s.t.\\ &(\eta-1)q_0\le W_0-b^T w,\\ &(\eta-1)q_j\le A_j^T w-c_j,\ j=1,2,...,n;\\ &w\ge 0,\ \eta\in[0,1];\end{aligned} \tag{5.14}$$

де A_j^T позначає *j*-й рядок матриці A^T, а c_j є *j*-й компонент вектора c, $j = 1, 2, ..., n$. Оскільки p_i і q_j додатні, то задачі (5.13) і (5.14) можна записати як

$$\begin{aligned} &\max\ \lambda \\ &s.t. \\ &\lambda \le 1 + (cx^T - Z_0) / p_0, \\ &\lambda \le (b_i - A_i x) / p_i,\ i = 1, 2, ..., m; \\ &x \ge 0,\ \lambda \in [0,1] \end{aligned} \tag{5.15}$$

та

$$\begin{aligned} &\min\ -\eta \\ &s.t. \\ &\eta \le (W_0 - b^T w) / q_0, \\ &\eta \le (A_j^T w - c_j) / q_j,\ j = 1, 2, ..., n; \\ &w \ge 0,\ \eta \in [0,1] \end{aligned} \tag{5.16}$$

Пара (5.13)-(5.14) називається модифікованою нечіткою парою двоїстих ЗЛП. Розглянемо для них модифіковані теореми двоїстості.

Теорема 5.5 (Модифікована теорема слабкої двоїстості). Нехай (x, λ) є допустимим розв'язком (5.13), а (w, η) є допустимим розв'язком (5.14). Тоді

$$(\lambda - 1) p^T w + (\eta - 1) q^T x \le b^T w - c^T x, \tag{5.17}$$

де $p^T = (p_1, ..., p_m)$ та $q^T = (q_1, ..., q_n)$.

Доведення. З допустимості векторів (x, λ) та (w, η) в задачах (5.13) та (5.14) відповідно, випливають нерівності $(\lambda - 1) p \le b - Ax$, $x \ge 0$ та $(\eta - 1) q \le A^T w - c$, $w \ge 0$. Звідки одержимо $(\lambda - 1) p^T w + x^T A^T w \le b^T w$ та $(\eta - 1) q^T x - w^T Ax \le -c^T x$. Але $w^T Ax = x^T Aw$. Тому остаточно отримаємо нерівність (5.17).

Зауваження 5.3. У випадку, коли $\lambda = 1$ і $\eta = 1$ (вихідні задачі є чіткими) нерівність (5.17) зводиться до $b^T w \ge c^T x$, що відповідає Теоремі 5.1 про слабку двоїстість у чіткій теорії двоїстості.

Наслідок 5.5. Нехай $(\overline{x},\overline{\lambda})$ є допустимим розв'язком (5.13) та $(\overline{w},\overline{\eta})$ є допустимим розв'язком (5.14), причому виконуються умови:

1) $(\overline{\lambda}-1)p^T\overline{w}+(\overline{\eta}-1)q^T\overline{x}=b^T\overline{w}-c^T\overline{x}$;

2) $(\overline{\lambda}-1)p_0+(\overline{\eta}-1)q_0\le c^T\overline{x}-b^T\overline{w}+W_0-Z_0$;

3) рівні прагнення Z_0 і W_0 задовольняють $W_0-Z_0\ge 0$.

Тоді $(\overline{x},\overline{\lambda})$ є оптимальним розв'язком (5.13) та $(\overline{w},\overline{\eta})$ є оптимальним розв'язком (5.14).

Доведення. Нехай (x,λ) є допустимим розв'язком (5.13) та (w,η) є допустимим розв'язком (5.14). Тоді за Теоремою 5.5 $(\lambda-1)p^Tw+(\eta-1)q^Tx-b^Tw+c^Tx\le 0$. Тому для будь-якого допустимого розв'язку (x,λ) задачі (5.13) і для будь-якого допустимого розв'язку (w,η) задачі (5.14) з 1) отримаємо

$$(\lambda-1)p^Tw+(\eta-1)q^Tx-b^Tw+c^Tx\le$$
$$\le(\overline{\lambda}-1)p^T\overline{w}+(\overline{\eta}-1)q^T\overline{x}-b^T\overline{w}+c^T\overline{x}.$$

Звідси випливає, що вектор $(\overline{x},\overline{\lambda},\overline{w},\overline{\eta})$ є оптимальним розв'язком задачі:

$$\begin{aligned}
&\max\ (\lambda-1)p^Tw+(\eta-1)q^Tx-b^Tw+c^Tx\\
&s.t.\\
&(\lambda-1)p_0\le cx^T-Z_0,\\
&(\lambda-1)p_i\le b_i-A_ix,\ i=1,2,...,m;\\
&(\eta-1)q_0\le W_0-b^Tw,\\
&(\eta-1)q_j\le A_j^Tw-c_j,\ j=1,2,...,n;\\
&w\ge 0,\ \eta\in[0,1];\\
&x\ge 0,\ \lambda\in[0,1];
\end{aligned}\qquad(5.18)$$

яка має нульовий максимум. Тепер з умов 1) та 2) одержимо

$$(\overline{\lambda}-1)p^T\overline{w}+(\overline{\eta}-1)q^T\overline{x}+(\overline{\lambda}-1)p_0+(\overline{\eta}-1)q_0+W_0-Z_0=0\ .$$

Оскільки кожен доданок у цьому виразі є недодатним (оскільки $\bar{\lambda}, \bar{\eta} \le 1$), то кожен із них окремо має дорівнювати нулю, тобто $(\bar{\lambda}-1) p^T \bar{w} = 0$, $(\bar{\eta}-1) q^T \bar{x} = 0$, $(\bar{\lambda}-1) p_0 = 0$, $(\bar{\eta}-1) q_0 = 0$, $W_0 - Z_0 = 0$. Далі з нерівностей $(\lambda-1) p_0 \le 0$ та $(\eta-1) q_0 \le 0$ одержимо $(\lambda-1) p_0 \le (\bar{\lambda}-1) p_0$ та $(\eta-1) q_0 \le (\bar{\eta}-1) q_0$. Але $p_0, q_0 > 0$, тому $\lambda \le \bar{\lambda}$ та $\eta \le \bar{\eta}$.

Зауваження 5.6. Оскільки задачі (5.13) і (5.14) не є взаємодвоїстими в традиційному сенсі, а є лише чіткими еквівалентами пари нечітких задач (5.11) і (5.12), то для них може не існувати теореми двоїстості. Отже, в нечіткій постановці ми не повинні очікувати сильної теореми двоїстості або рівності значень цільових функцій для відповідних оптимальних розв'язків. Однак, можна довести, що якщо (5.13) (відповідно (5.14)) має оптимальний розв'язок, то (5.14) (відповідно (5.13)) обов'язково матиме допустимі розв'язки. Крім того, якщо допустима область (5.13) (відповідно (5.14)) обмежена, то задача (5.14) (відповідно (5.13)) матиме оптимальний розв'язок, але у загальному випадку значення цільових функцій можуть не бути рівними.

Представимо обмеження задачі (5.15) у вигляді $\lambda p_i \le p_i + b_i - A_i x$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Звідси для будь-якого $w \in \mathbb{R}_+^m$, $w \ne 0$ одержимо $\lambda p_i w_i \le p_i w_i + b_i w_i - A_i x w_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Тому $\lambda \sum_{i=1}^m p_i w_i \le \sum_{i=1}^m p_i w_i + \sum_{i=1}^m w_i (b_i - A_i x)$, звідки для $w \in \mathbb{R}_+^m$, $w \ne 0$ випливає $\lambda \le 1 - \dfrac{w^T (b - Ax)}{w^T p}$. Тоді задача (5.15) матиме вигляд

$$
\begin{aligned}
&\max\ \lambda \\
&s.t. \\
&\lambda \le 1 + \frac{cx^T - Z_0}{p_0}, \\
&\lambda \le 1 + \frac{w^T(b - Ax)}{w^T p},\ \forall w > 0, \\
&x \ge 0,\ \lambda \in [0,1].
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

Аналогічно задача (5.16) матиме вигляд

$$
\begin{aligned}
&\min\ -\eta \\
&s.t. \\
&\eta \le \frac{W_0 - b^T w}{q_0}, \\
&\eta \le 1 + \frac{x^T(A^T w - c)}{q^T x},\ \forall x > 0, \\
&w \ge 0,\ \eta \in [0,1]
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

Розглянемо наступний приклад.

Приклад 5.1. Для пари двоїстих задач

$$
\begin{aligned}
&\max\ 2x \\
&s.t. \\
&x \le 1, \\
&x \ge 0
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

та

$$
\begin{aligned}
&\min\ w \\
&s.t. \\
&w \ge 2, \\
&w \ge 0
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

побудуємо нечітку двоїсту пару. Нехай $p_0 = 2,\ p_1 = 2,\ Z_0 = 1$. Тоді (5.1) буде відповідати (5.13) у вигляді

$$\begin{aligned}&\max\ \lambda\\&s.t.\\&2\lambda-2x\le 1,\\&2\lambda+x\le 3,\\&x\ge 0,\ \lambda\in[0,1]\end{aligned}$$

з оптимальним розв'язком $x^*=1/2,\ \lambda^*=1$ та оптимальним значенням $\lambda^*=1$ цільової функції. Тепер нехай $q_0=2,\ q_1=2,\ W_0=1$. Тоді (5.2) буде відповідати (5.14) у вигляді

$$\begin{aligned}&\min\ -\eta\\&s.t.\\&\eta+w\le 2,\\&3\eta-w\le 1,\\&w\ge 0,\ \eta\in[0,1]\end{aligned}$$

з оптимальним розв'язком $w^*=5/4,\ \eta^*=3/4$ та оптимальним значенням $-\eta^*=-3/4$ цільової функції. Крім того, оптимальне значення цільової функції задачі (5.18) є недодатним (≤ 0) для $x^*=1/2,\ \lambda^*=1$, $w^*=5/4,\ \eta^*=3/4$ і воно залишатиметься таким самим для всіх можливих розв'язків (5.21) та (5.22).

5.3. Модель нечіткої двоїстості Вердегая

Розглянемо ЗЛП з нечіткими обмеженнями і чіткою цільовою функцією

$$\begin{aligned}&\max\ c^T x\\&s.t.\\&Ax\ \tilde{\le}\ b,\ x\ge 0\end{aligned}\tag{5.23}$$

та нечіткою цільовою функцією і чіткими обмеженнями

$$\begin{aligned}&\max\ \tilde{c}^T x\\&s.t.\\&Ax\le b,\ x\ge 0.\end{aligned}\tag{5.24}$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 5.6. Для нечіткої задачі лінійного програмування типу (5.23) завжди існує інша задача типу (5.24), яка має такий самий нечіткий розв'язок, і навпаки.

Доведення. Розглянемо нечітку ЗЛП (5.23), в якій нечіткі множини обмежень задаються функціями належності

$$\mu_i(x)=\begin{cases}1, & A_i x\le b_i;\\ 1-\dfrac{b_i-A_i x}{p_i}, & b_i\le A_i x\le b_i+p_i;\\ 0, & A_i x> b_i+p_i;\end{cases} \qquad (5.25)$$

$i=1,...,m$, де p_i є максимальним допуском (величиною максимально допустимого порушення або похибки) для i-го обмеження, $i=1,...,m$. За підходом Вердегая (Розділ 3.2), дефаззифікація (5.23) приводить до задачі параметричного програмування:

$$\begin{aligned}&\max\ c^T x\\ &s.t.\\ &\mu_i(x)\ge\alpha,\\ &x\ge 0,\ \alpha\in[0,1],\end{aligned} \qquad (5.26)$$

яка за (5.25) матиме вигляд

$$\begin{aligned}&\max\ c^T x\\ &s.t.\\ &Ax\le b+(1-\alpha)p,\\ &x\ge 0,\ \alpha\in[0,1],\end{aligned} \qquad (5.27)$$

де $p_i=(p_1,...,p_m)^T$ є вектором допусків. Але (5.27) є стандартною лінійною параметричною задачею, двоїстою до якої є

$$\begin{aligned}&\min\ (b+(1-\alpha)p)^T u\\ &s.t.\\ &A^T u\ge c,\\ &u\ge 0,\ \alpha\in[0,1].\end{aligned} \qquad (5.28)$$

Позначимо $S = \{u \in \mathbb{R}^n : A^T u \geq c,\ u \geq 0\}$ множину допустимих розв'язків задачі (5.28). Тоді (5.28) набуде вигляду (5.29)

$$\begin{aligned} &\min\ a^T u \\ &s.t. \\ &a = b + (1-\alpha)p, \\ &u \in S,\ \alpha \in [0,1]. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Якщо позначимо $\beta = 1-\alpha$ і розглянемо *a* як змінну залежну від β, то (5.29) матиме вигляд

$$\begin{aligned} &\min\ a^T u \\ &s.t. \\ &a \leq b + \beta p, \\ &u \in S,\ \beta \in [0,1]. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Відмітимо, що в (5.30) обмеження $a \leq b + \beta p$ можна сприймати як рівність, а не як нерівність, оскільки будь-який оптимальний розв'язок (5.30) також є оптимальним розв'язком (5.29). Оскільки для $i = 1,...,m$, з нерівності $a_i \leq b_i + \beta p_i$ випливає спочатку $b_i + p_i - a_i \geq b_i + (1-\beta)p_i$, а потім $1 + (b_i - a_i)/p_i \geq 1 - \beta$. Тому з рахунком (5.25) задача (5.30) набуває форми

$$\begin{aligned} &\min\ a^T u \\ &s.t. \\ &a = b + \beta p, \\ &u \in S,\ \beta \in [0,1]. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Ця задача є (чіткою) лінійною параметричною задачею, яка виникає при дефаззифікації за підходом Вердегая (Розділ 3.2) для задачі нечіткого лінійного програмування (5.24). Оскільки двоїсті параметричні ЗЛП (5.27) і (5.28) мають однакові оптимальні значення, то і задачі (5.23) і (5.24) мають однакові нечіткі розв'язки за умовою $\beta = 1-\alpha$.

Доведення теореми у зворотному напрямку про те, що для нечіткої ЗЛП (5.24) завжди існує інша ЗЛП виду (5.23), яка має ті самі нечіткі розв'язки, аналогічне.

Відповідно до Теореми 5.6 пара ЗЛП (5.23) і (5.24) називається двоїстою за Вердегаєм.

Приклад 5.2. Перевіримо теорему 5.6 для такої задачі:

$$\begin{aligned}
&\max\ z = x_1 + x_2 \\
&s.t. \\
&4x_1 - x_2 \lesssim 10, \\
&x_1 + 2x_2 \lesssim 15, \\
&5x_1 + 2x_2 \lesssim 20, \\
&x_{1,2} \geq 0.
\end{aligned}$$

Виберемо функції належності обмежень у вигляді

$\mu_1(4x_1 - x_2) = (15 - 4x_1 + x_2)^2 / 25,\ 10 \leq 4x_1 - x_2 \leq 15$,

$\mu_2(x_1 + 2x_2) = (23 - x_1 - 2x_2)^2 / 64,\ 15 \leq x_1 + 2x_2 \leq 23$,

$\mu_3(5x_1 + 2x_2) = (30 - 5x_1 - 2x_2)^2 / 100,\ 20 \leq 5x_1 + 2x_2 \leq 30$,

де μ_i, $i = 1,2,3$ приймає значення 0 і 1 за межами вказаних інтервалів. Розв'язуючи задачу параметричного лінійного програмування (5.26) у вигляді

$$\begin{aligned}
&\max\ z = x_1 + x_2 \\
&s.t. \\
&(15 - 4x_1 + x_2)^2 / 25 \geq \alpha, \\
&(23 - x_1 - 2x_2)^2 / 64 \geq \alpha, \\
&(30 - 5x_1 - 2x_2)^2 / 100 \geq \alpha, \\
&x_{1,2} \geq 0,\ \alpha \in [0,1]
\end{aligned}$$

отримаємо $x_1^* = \dfrac{7 - 2\sqrt{\alpha}}{4}$, $x_2^* = \dfrac{85 - 30\sqrt{\alpha}}{8}$ із значенням цільової функції $z^* = x_1^* + x_2^* = \dfrac{99 - 34\sqrt{\alpha}}{8} \in [65/8, 99/8]$, $\alpha \in [0,1]$. Отже, нечітка множина значень цільової функції має вигляд $\{(z, \mu(z)) : z \in [65/8, 99/8],\ \mu(z) = (99 - 8z)^2 / 34^2\}$.

Двоїста задача типу (5.24) буде мати вигляд

$$\min\ w = (15 - 5\sqrt{\alpha})u_1 + (23 - 8\sqrt{\alpha})u_2 + (30 - 10\sqrt{\alpha})u_3$$
$$s.t.$$
$$4u_1 + u_2 + 5u_3 \ge 1,$$
$$-u_1 + 2u_2 + 2u_3 \ge 1,$$
$$u_{1,2,3} \ge 0,\ \alpha \in [0,1].$$

Ця параметрична задача має розв'язок $u_1^* = 0$, $u_2^* = 3/8$, $u_3^* = 1/8$ із значенням цільової функції

$$w^* = (15 - 5\sqrt{\alpha})u_1^* + (23 - 8\sqrt{\alpha})u_2^* + (30 - 10\sqrt{\alpha})u_3^* =$$
$$= 99 - 34\sqrt{\alpha} \in [65/8, 99/8],\ \alpha \in [0,1].$$

Тоді нечітка множина значень цільової функції має вигляд $\{(w, \mu(w)) : w \in [65/8, 99/8],\ \mu(w) = (99 - 8w)^2 / 34^2\}$, який є таким самим, що і у прямої задачі.

5.4. Двоїстість у лінійному програмуванні з нечіткими параметрами

Розглядаємо нечітку версію пари двоїстих ЗЛП:

$$\begin{aligned} &\max\ \tilde{c}^T x \\ &s.t. \\ &\tilde{A}x \lesssim \tilde{b}, \\ &x \ge 0 \end{aligned} \qquad (5.32)$$

та

$$\begin{aligned} &\min\ \tilde{b}^T y \\ &s.t. \\ &\tilde{A}y \gtrsim \tilde{c}, \\ &y \ge 0. \end{aligned} \qquad (5.33)$$

Тут $\tilde{A}$ є матрицею розмірності $m \times n$ нечітких чисел, $\tilde{b}$ і $\tilde{c}$ є векторами нечітких чисел розмірності m та n відповідно. Символи '$\lesssim$' і '$\gtrsim$' є нечіткими версіями символів '$\le$' і '$\ge$' відповідно і мають лінгвістичне тлумачення «приблизно менше або дорівнює» і «приблизно більше або дорівнює». Для заданої функції $F : N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ дефаззифікації нечітких чисел задачі (5.32) та (5.33) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}&\max\ F(\tilde{c}^T x)\\&s.t.\\&F(\tilde{A}\,x) \le F(\tilde{b}) + F(\tilde{p})(1-\lambda),\\&x \ge 0,\ \lambda \in [0,1]\end{aligned} \tag{5.34}$$

та

$$\begin{aligned}&\min\ F(\tilde{b}^T y)\\&s.t.\\&F(\tilde{A}^T y) \ge F(\tilde{c}) - F(\tilde{q})(1-\eta),\\&y \ge 0,\ \eta \in [0,1].\end{aligned} \tag{5.35}$$

Тут $\tilde{p}$ і $\tilde{q}$ є векторами нечітких допусків (Розділ 4.8) для правих частин обмежень прямої і двоїстої задач (5.34) і (5.35), відповідно. Пару (5.34) і (5.35) називають нечіткою двоїстою парою ЗЛП. Доведемо модифіковану теорему слабкої двоїстості.

Теорема 7.1. Нехай (x,λ) і (y,η) є допустимими розв'язками задач (5.34) і (5.35), відповідно. Тоді

$$F(\tilde{c}^T x) - F(\tilde{b}^T y) \le (1-\lambda)F(\tilde{p}^T y) - (1-\eta)F(\tilde{q}^T x).$$

Доведення. З умови теореми випливають нерівності

$$\begin{aligned}&F(\tilde{A}x) \le F(\tilde{b}) + F(\tilde{p})(1-\lambda),\ x \ge 0,\\&F(\tilde{A}^T y) \ge F(\tilde{c}) - F(\tilde{q})(1-\eta),\ y \ge 0.\end{aligned} \tag{5.36}$$

Оскільки функція дефаззифікації F зберігає ранжування при множенні нечітких чисел на невід'ємні скаляри, то з (5.36) випливає

$$F(x^T \tilde{A}y) \le F(\tilde{b}y) + F(\tilde{p}^T y)(1-\lambda),$$
$$F(y^T \tilde{A}x) \ge F(\tilde{c}^T x) - F(\tilde{q}^T x)(1-\eta)$$

і тому

$$F(\tilde{b}y) + F(\tilde{p}^T y)(1-\lambda) \ge F(\tilde{c}^T x) - F(\tilde{q}^T x)(1-\eta)$$

завдяки рівності $x^T \tilde{A}y = y^T \tilde{A}x$.

Зауваження 7.1. У випадку, якщо $\tilde{A}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ є чіткими і $\lambda = \eta = 1$, то пара задач (5.34)-(5.35) зводиться до звичайної чіткої двоїстої пари, а теорема 7.1 набуває форми звичайної теореми слабкої двоїстості.

Двоїстість у лінійному програмуванні з нечіткими параметрами і обмеженнями. Запропоноване вище поняття двоїстості може бути узагальненим на випадок ЗЛП, в яких як параметри, так і обмеження є нечіткими. Розглянемо наступну пару нечітких ЗЛП:

$$\begin{aligned} &\tilde{c}^T x \gtrsim \tilde{Z}_0, \\ &\tilde{A}x \lesssim \tilde{b},\ x \ge 0 \end{aligned} \tag{5.37}$$

та

$$\begin{aligned} &\tilde{b}^T y \lesssim \tilde{W}_0. \\ &\tilde{A}y \gtrsim \tilde{c},\ y \ge 0. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Тут $\tilde{Z}_0$ і $\tilde{W}_0$ є нечіткими числами, які задають рівні бажаних значень цільових функцій задач (5.37) і (5.38) відповідно. Нехай $\tilde{p}_0$ та $\tilde{q}_0$ є векторами нечітких допусків для цільових функцій $\tilde{c}^T x$ та $\tilde{b}^T y$ відповідно. Для заданої функції $F : N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ дефаззифікації нечітких чисел задачі (5.37) та (5.38) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} &\max\ \lambda \\ &s.t. \\ &F(\tilde{c}^T x) \ge F(\tilde{Z}_0) - F(\tilde{p}_0)(1-\lambda), \\ &F(\tilde{A}_i x) \le F(\tilde{b}_i) + F(\tilde{p}_i)(1-\lambda),\ i = 1,...,m, \\ &x \ge 0,\ \lambda \in [0,1] \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} &\max\ \eta \\ &F(\tilde{b}^T y) \le F(\tilde{W}_0) + F(\tilde{q}_0)(1-\eta), \\ &F(\tilde{A}_j^T y) \ge F(\tilde{c}_j) - F(\tilde{q}_j)(1-\eta),\ j = 1,...,m, \\ &y \ge 0,\ \eta \in [0,1]. \end{aligned}$$

Перепишемо їх у формі

$$
\begin{aligned}
&\max\ \lambda \\
&s.t. \\
&\lambda \le 1 + \frac{F(\tilde{c}^T)x - F(\tilde{Z}_0)}{F(\tilde{p}_0)}, \\
&\lambda \ge 1 + \frac{F(\tilde{b}_i) - F(\tilde{A}_i)x}{F(\tilde{p}_i)},\ i = 1,\dots,m, \\
&x \ge 0,\ \lambda \in [0,1]
\end{aligned}
\tag{5.39}
$$

та

$$
\begin{aligned}
&\max\ \eta \\
&s.t. \\
&\eta \le 1 + \frac{F(\tilde{W}_0) - F(\tilde{b}^T y)}{F(\tilde{q}_0)}, \\
&\eta \le 1 + \frac{F(\tilde{A}_j^T y) - F(\tilde{c}_j)}{F(\tilde{q}_j)},\ j = 1,\dots,m, \\
&y \ge 0,\ \eta \in [0,1].
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

ЗЛП (5.39) і (5.40) називаються нечіткою двоїстою парою. Позначимо $F(\tilde{p}) = (F(\tilde{p}_1),\dots,F(\tilde{p}_m))^T$ і $F(\tilde{q}) = (F(\tilde{q}_1),\dots,F(\tilde{q}_m))^T$. Має місце теорема двоїстості.

Теорема 7.2. Нехай (x,λ) і (y,η) є допустимими розв’язками задач (5.39) і (5.40) відповідно. Тоді

$$(1-\lambda)F(\tilde{p}^T)y + (1-\eta)F(\tilde{q}^T)x \le F(\tilde{b}^T)y - F(\tilde{c}^T)x .$$

Питання для самоперевірки до Розділу 5

1. Які нерівності слід вважати узагальненням відношень двоїстості в звичайній (чіткій) версії слабкої теореми двоїстості?
2. Запишіть модифіковану нечітку пару двоїстих ЗЛП за підходом Рьоддера та Циммермана.
3. Запишіть модифіковану теорему слабкої двоїстості.
4. Запишіть нечітку пару двоїстих ЗЛП за підходом Вердегая.
5. Запишіть модифіковану теорему слабкої двоїстості у лінійному програмуванні з нечіткими параметрами.

РОЗДІЛ 6. Матричні ігри з нечіткими цілями

6.1. Класична матрична гра

Матричною грою називають скінчену гру двох осіб із нульовою сумою виграшів гравців. Її можна формально представити у формі (I, J, A), де $I = \{1,...,m\}$ і $J = \{1,...,n\}$ є скінченими множини чистих стратегій гравців I і II відповідно;

$$A = (a_{ij})_{i \in I, j \in J} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

є платіжною матрицею. Вона складається з виграшів гравця I у ситуаціях (i, j), коли гравці I та II вибирають стратегії $i \in I$ та $j \in J$ відповідно. Оскільки гра з нульовою сумою виграшів, то гравець II в ситуації (i, j) отримує виграш $-a_{ij}$. Значення a_{ij} також зручно називати програшем гравця II. У цьому випадку йдеться про те, що гравець I максимізує свій виграш, а гравець II мінімізує свій програш.

Сідловою точкою гри (I, J, A) називається ситуація (i^*, j^*), $i^* \in I$, $j^* \in J$, для якої виконуються нерівності

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j} \text{ для всіх } i \in I \text{ і } j \in J .$$

Вибір стратегій i^* і j^* гравцями I і II відповідно, видається розумним, оскільки кожному з них окремо і обом разом не вигідно змінювати ці стратегії на інші.

Гра (I, J, A) не завжди має сідлову точку у чистих стратегіях. У цьому випадку гравці можуть використовувати змішані стратегії, які є розподілами ймовірностей на множинах їхніх чистих стратегій. В цьому випадку ми отримуємо матричну гру $G = (S^m, S^n, A)$, де $S^m = \{x \in \mathbb{R}^m_+ : e^T x = 1\}$ і $S^n = \{y \in \mathbb{R}^n_+ : e^T y = 1\}$ є множинами змішаних стратегій $x \in S^m$ та $y \in S^n$ гравців I та II відповідно.

У змішаній стратегії $x = (x_1, ..., x_i, ..., x_m)^T$ гравець I вибирає чисту стратегію $i \in I$ із ймовірністю $x_i \in [0,1]$. Аналогічно у змішаній стратегії $y = (y_1, ..., y_i, ..., y_m)^T$ гравець II вибирає чисту стратегію $j \in J$ із ймовірністю $y_j \in [0,1]$. У грі в змішаних стратегіях очікуваний виграш гравця I дорівнює очікуваному програшу гравця II і розраховується за формулою $xA(I,J)y^T$. Сідлова точка $(\hat{x}, \hat{y})$, $\hat{x} \in S^m, \hat{y} \in S^n$, матричної гри G у змішаних стратегіях характеризується нерівностями

$$xA\hat{y}^T \le \hat{x}A\hat{y}^T \le \hat{x}Ay^T, \quad \hat{x} \in S^m, \hat{y} \in S^n$$

і може бути знайденою як розв'язок пари взаємно-двоїстих ЗЛП

$$\begin{aligned} &\max \ v \\ &s.t. \\ &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge v, \ j = 1, 2, ..., n; \\ &e^T x = 1; \\ &x \ge 0, \\ &v \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad (6.1)$$

та

$$\begin{aligned} &\min \ w \\ &s.t. \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le u, \ i = 1, 2, ..., m; \\ &e^T y = 1; \\ &y \ge 0, \\ &w \in \mathbb{R}. \end{aligned} \qquad (6.2)$$

У цих задачах змінні v і w не обмежені у знаку на числовій вісі. Величина $\hat{x}A\hat{y}^T$ називається значенням матричної гри у змішаних стратегіях. Відповідно до відомої теореми Неша множина сідлових точок матричної гри G у змішаних стратегіях завжди не є порожньою.

6.2. Матрична гра з нечіткими цілями: узагальнена модель

Нехай $S^m = \{x \in \mathbb{R}_+^m : e^T x = 1\}$ і $S^n = \{y \in \mathbb{R}_+^n : e^T y = 1\}$ є множинами змішаних стратегій x і y гравців I та II відповідно, та

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

є платіжною матрицею.

Для формалізації нечітких цілей гравців спочатку розглянемо нечіткі відношення '$\gtrsim$' і '$\lesssim$', які є нечіткими аналогами у сенсі Циммермана відношень нестрогого порядку '$\geq$' і '$\leq$' відповідно на числовій прямій $\mathbb{R}$. Тоді нечітка множина $F = \{(t, \mu(t)) : t \in \mathbb{R},\ t \gtrsim_p a\}$, яка задається нечітким обмеженням $t \gtrsim_p a$, має функцію належності

$$\mu_F(t) = \begin{cases} 1, & t \geq a; \\ 1 - (a - t)/p, & a - p \leq t \leq a; \\ 0, & t < a - p; \end{cases} \tag{6.3}$$

де $t \in \mathbb{R}$ є дійсною змінною, $a \in \mathbb{R}$ є заданою константою, $p > 0$ є заданим максимальним допуском (величиною максимально допустимого порушення або похибки) для правої частини a обмеження $t \gtrsim_p a$. В цьому випадку нечітка множина F інтерпретується як «t приблизно більше або дорівнює a з допустимою похибкою p». Доведемо наступну лему.

Лема 6.1. Нехай

$$t_1 \gtrsim_p a,\ t_2 \gtrsim_p a,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1.$$

Тоді $\alpha t_1 + \beta t_2 \gtrsim_p a$.

Доведення. Представимо відношення $t_1 \gtrsim_p a$ та $t_2 \gtrsim_p a$ у вигляді $t_1 \geq a - (\lambda - 1)p$ та $t_2 \geq a - (\lambda - 1)p$. Тоді одержимо нерівність $\alpha t_1 + \beta t_1 \geq (\alpha + \beta)a - (\lambda - 1)(\alpha + \beta)p$, з якої випливає $\alpha t_1 + \beta t_1 \gtrsim_p a$.

Тепер формалізуємо матричну гру з нечіткими цілями гравців. Нехай v_0 та w_0 є цільовими (бажаними) значеннями виграшу гравця I та програшу гравця II відповідно. Тоді матрична гра (позначимо її FG) з нечіткими цілями гравців визначається набором $FG = (S^m, S^n, A, v_0, \gtrsim, p_0, w_0, \lesssim, q_0)$.

Для формалізації поняття «розв'язку» нечіткої матричної гри FG узагальнимо поняття сідлової точки гри такиим чином.

Визначення 6.1. Ситуація $(\overline{x}, \overline{y})$ називається розв'язком нечіткої матричної гри FG, якщо вона задовольняє умовам:

$$\overline{x}^T Ay \gtrsim_{p_0} v_0, \ \forall y \in S^n, \ \ x^T A\overline{y} \lesssim_{q_0} w_0, \ \forall x \in S^m. \tag{6.4}$$

Нерівності (6.4) можна також переписати у вигляді

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \gtrsim_{p_0} v_0, \ j = 1,...,n, \\ &\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

та

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \lesssim_{q_0} w_0, \ i = 1,...,m, \\ &\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \\ &y \geq 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Позначимо j-й стовпчик матриці A через A_j, $j = 1,...,n$. Тоді j-те обмеження (6.5) можна записати як $A_j^T x \gtrsim_{p_0} v_0$. Аналогічно i-те обмеження (6.6) можна записати як $A_i^T y \lesssim_{q_0} w_0$ для будь-якого $i = 1,...,m$. Тепер за допомогою (6.3) та Леми 6.1 сформулюємо функцію належності

$$\mu_j(x)=\begin{cases}1, & A_j^T x \ge v_0;\\ 1-(v_0-A_j^T x)/p_0, & v_0+p_0 \le A_j^T x \le v_0;\\ 0, & A_j^T x > v_0+p_0\end{cases} \qquad (6.7)$$

нечіткої множини змішаних стратегій $x \in S^m$, які задовольняють j-му обмеженню $A_j^T x \underset{\sim}{\geq}_{p_0} v_0$, $j=1,...,n$ системи нечітких нерівностей (6.5). Тоді (6.5) матиме вигляд чіткої ЗЛП

$$\max\ \lambda$$

$$s.t.$$

$$\lambda \le 1-\frac{v_0-A_j^T x}{p_0},\ \ j=1,...,n, \qquad (6.8)$$

$$e^T x=1,$$

$$x \ge 0,\ \lambda \in [0,1].$$

Для гравця II аналогічно визначимо функцію належності

$$v_i(y)=\begin{cases}1, & A_i y \ge w_0;\\ 1-(A_i y-w_0)/q_0, & w_0 \le A_i y \le w_0+q_0;\\ 0, & A_i y > w_0+q_0\end{cases} \qquad (6.9)$$

нечіткої множини змішаних стратегій $y \in S^n$, які задовольняють i-у обмеженню $A_i^T y \underset{\sim}{\leq}_{q_0} w_0$, $i=1,...,m$ системи нечітких нерівностей (6.6). Тоді (6.6) матиме вигляд чіткої ЗЛП

$$\max\ \eta$$

$$s.t.$$

$$\eta \le 1-(A_i y-w_0)/q_0,\ \ i=1,...,m, \qquad (6.10)$$

$$e^T y=1,$$

$$y \ge 0,\ \eta \in [0,1].$$

Отже, для розв’язання матричної гри *FG* гравців I і II потрібно розв’язати чіткі ЗЛП (6.8) і (6.10) відповідно. Якщо (x^*,λ^*) є оптимальним розв’язком (6.8), то x^* є оптимальною стратегією гравця I, а λ^* є ступенем задоволення бажаного ним значення v_0 його виграшу. Аналогічно, якщо (y^*,η^*) є оптимальним розв'язком (6.10), то $y*$ є оптимальною стратегією гравця II, а $\eta*$ є ступенем задоволення бажаного ним значення w_0 його програшу. Справедливі такі Твердження.

Твердження 6.1 Пара задач (6.8) і (6.10) являє собою пару нечітких двоїстих задач в сенсі Теореми 5.5.

Твердження 6.2. Гра $FG = (S^m, S^n, A, v_0, \gtrsim, p_0, w_0, \lesssim, q_0)$ еквівалентна двом чітким ЗЛП (6.8) і (6.10), які становлять нечітку двоїсту пару.

Зауваження 6.2. Відзначимо, що чіткі задачі (6.8) і (6.10) не складають двоїсту пару в класичному розумінні двоїстості в лінійному програмуванні, але є двоїстими в «нечіткому» сенсі.

Зауваження 6.3. Якщо обидва гравці мають однакові цільові (бажані) значення $v_0 = w_0$ і для оптимальних розв'язків задач (6.8) і (6.10) виконується умова $\lambda* = \eta* = 1$, то нечітка гра FG зводиться до чіткої матричної гри і пара задач (6.8)-(6.10) зводиться до пари двоїстих задач (6.1)-(6.2).

Приклад 6.1. Розглянемо чітку матричну гру G з матрицею виграшів

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можна перевірити, що стратегії $x^* = (2/3, 1/3)^T$, $y^* = (1/2, 1/2)^T$ є роз'язком гри G, а $v^* = 2$ є значенням гри. Далі розглянемо нечіткі версії гри G.

1. Нехай $v_0 = w_0 = 2$, $p_0 = 1$, $q_0 = 2$. При таких умовах задачі (6.8) і (6.10) мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\max\ \lambda \\
&s.t. \\
&-\lambda + x_1 + 4x_2 \geq 1, \\
&-\lambda + 3x_1 \geq 1, \\
&x_1 + x_2 = 1, \\
&x_{1,2} \geq 0,\ \lambda \in [0,1]
\end{aligned}$$

та

$$
\begin{aligned}
&\max\ \eta \\
&s.t. \\
&2\eta + y_1 + 3y_2 \le 4, \\
&2\eta + 2y_1 \le 2, \\
&y_1 + y_2 = 1, \\
&y_{1,2} \ge 0,\ \eta \in [0,1],
\end{aligned}
$$

відповідно. Оптимальні розв'язки цих задач складаються з $x^* = (2/3, 1/3)^T$, $\lambda^* = 1$ $y^* = (1/2, 1/2)^T$ і $\eta^* = 1$ відповідно. Оскільки $v_0 = w_0$ і $\lambda^* = \eta^* = 1$, то нечітка гра FG зводиться до чіткої G з такими самими розв'язками.

2. Нехай $v_0 = 5/2$, $w_0 = 3$, $p_0 = 1$, $q_0 = 1/2$. Такий набір параметрів відповідає ситуації, коли гравець I прагне виграти більше, ніж 5/2, але також буде задоволеним (з різним ступенем) виграшем більшим за 3/2. Аналогічно гравець II прагне не програти більше 3, але він буде задоволеним (з різним ступенем) програшем щонайбільше 7/2. При таких умовах задачі (6.8) і (6.10) матимуть вигляд:

$$
\begin{aligned}
&\max\ \lambda \\
&s.t. \\
&-\lambda + x_1 + 4x_2 \ge 7/2, \\
&-\lambda + 3x_1 \ge 7/2, \\
&x_1 + x_2 = 1, \\
&x_{1,2} \ge 0,\ \lambda \in [0,1]
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

та

$$
\begin{aligned}
&\max\ \eta \\
&s.t. \\
&\eta + 2y_1 + 6y_2 \le 7, \\
&\eta + 8y_1 \le 7, \\
&y_1 + y_2 = 1, \\
&y_{1,2} \ge 0,\ \eta \in [0,1],
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

відповідно. Оптимальними розв'язками цих задач лінійного програмування є $x^* = (2/3, 1/3)^T$, $\lambda^* = 1/2$ $y^* = (3/4, 1/4)^T$ і $\eta^* = 1$ відповідно. Задачі (6.11) і (6.12) утворюють нечітку двоїсту пару.

6.3. Матрична гра з нечіткими цілями: модель Нішізакі та Сакави

Ця модель базується на принципах maxmin та minmax теорії чітких матричних ігор. Відповідно до них визначимо поняття нечіткої цілі.

Визначення 6.2. Нехай $D = \{x^T Ay : (x, y) \in S^m \times S^n\} \subseteq \mathbb{R}$ є множиною можливих значень виграшу гравця I (відповідно програшу гравця II) у грі $G = (S^m, S^n, A)$. Тоді нечіткою ціллю для гравця I називається нечітка множина на D, що характеризується функцією належності $\mu_1 : D \to [0,1]$. Аналогічно визначається нечітка ціль для гравця II як нечітка множина на D, що характеризується функцією належності $\mu_2 : D \to [0,1]$.

Значення функції належності нечіткої цілі можна інтерпретувати як ступінь її досягнення гравцем з точки зору сплати. Будемо вважати, що обидва гравці прагнуть максимізувати ступінь досягнення своєї нечіткої цілі.

Будемо вважати, що гравець I припускає, що гравець II вибере стратегію, яка мінімізує ступінь досягнення гравцем I його нечіткої цілі. Нехай гравець I обирає $x \in S^m$, тоді найменший ступінь досягнення його цілі буде дорівнювати $v(x) = \min\limits_{y \in S^n} \mu_1(x^T Ay)$. Тоді гравець I вибере стратегію, яка максимізує його ступінь досягнення нечіткої цілі $v(x)$. Така поведінка цілком відповідає принципу maxmin з точки зору ступеня досягнення нечіткої цілі. Таким чином, максимальне значення ступеня досягнення нечіткої цілі гравця I визначається як $\max\limits_{x \in S^m} \min\limits_{y \in S^n} \mu_1(x^T Ay)$. Подібні аргументи справедливі і для гравця II. Тому максимальне значення ступеня досягнення нечіткої цілі гравця II визначається як $\max\limits_{y\in S^n}\min\limits_{x\in S^m}\mu_2(x^T Ay)$.

Розв'язком гри FG з такими нечіткими цілями вважається ситуація $(x^*, y^*)\in S^m\times S^n$, яка забезпечує максимальні значення ступеня досягнення нечітких цілей обох гравців.

Задача оптимізації для гравця I. Розглянемо функцію належності

$$\mu_1(x^T Ay)=\begin{cases}1, & x^T Ay\le \underline{a};\\ 1-\dfrac{\bar{a}-x^T Ay}{\bar{a}-\underline{a}}, & \underline{a}\le x^T Ay\le \bar{a};\\ 0, & \bar{a}< x^T Ay\end{cases} \tag{6.13}$$

нечіткої цілі гравця I, де $\bar{a}=\max\limits_{x\in S^m}\max\limits_{y\in S^n}x^T Ay=\max\limits_{x\in S^m}\max\limits_{y\in S^n}a_{ij}$ та $\underline{a}=\min\limits_{x\in S^m}\min\limits_{y\in S^n}x^T Ay=\min\limits_{x\in S^m}\min\limits_{y\in S^n}a_{ij}$ є це сплатами, які дають найкращий і найгірший ступінь задоволення цілі гравця I.

Теорема 6.1. Для нечіткої матричної гри *FG* стратегія $x^*\in S^m$, яка забезпечує максимальне значення ступеня досягнення нечіткої цілі, може бути отримана шляхом розв'язання такої ЗЛП:

$$\begin{aligned}&\max\ \lambda\\ &s.t.\\ &\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ij}}{\bar{a}-\underline{a}}x_i-\frac{\underline{a}}{\bar{a}-\underline{a}}\ge\lambda,\ \ j=1,\dots,n,\\ &e^T x=1,\\ &x\ge 0.\end{aligned} \tag{6.14}$$

Доведення. Підставимо (6.13) в задачу $\max\limits_{x\in S^m}\min\limits_{y\in S^n}\mu_1(x^T Ay)$. Тоді вона матиме вигляд

$$\max_{x\in S^m}\min_{y\in S^n}\Big(1-\frac{\bar{a}-x^T Ay}{\bar{a}-\underline{a}}\Big)=\max_{x\in S^m}\min_{y\in S^n}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\hat{a}_{ij}x_i y_j+c\Big)=$$

$$= \max_{x \in S^m} \min_{y \in S^n} (\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} \hat{a}_{ij} x_i + c) y_j = \max_{x \in S^m} \min_{j \in J} (\sum_{i=1}^{m} \hat{a}_{ij} x_i + c),$$

де $\hat{a}_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{\overline{a} - \underline{a}}$ та $c = -\dfrac{\underline{a}}{\overline{a} - \underline{a}}$. Звідси, якщо позначимо $\min_{j \in J} (\sum_{i=1}^{m} \hat{a}_{ij} x_i + c) = \lambda$, то одержимо задачу (6.14).

Задача оптимізації для гравця II. Розглянемо функцію належності

$$\mu_2(x^T Ay) = \begin{cases} 1, & x^T Ay \le \underline{a}; \\ 1 - \dfrac{x^T Ay - \overline{a}}{\overline{a} - \underline{a}}, & \underline{a} \le x^T Ay \le \overline{a}; \\ 0, & \overline{a} < x^T Ay \end{cases} \qquad (6.15)$$

нечіткої цілі гравця II.

Теорема 6.2. Для нечіткої матричної гри *FG* стратегія $y^* \in S^n$, яка забезпечує максимальне значення ступеня досягнення нечіткої цілі, може бути отримана шляхом розв'язання такої ЗЛП:

$$\begin{aligned} &\min \ \lambda \\ &s.t. \\ &\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{\overline{a} - \underline{a}} y_j - \frac{\underline{a}}{\overline{a} - \underline{a}} \le \lambda, \quad i = 1, \dots, m, \\ &e^T y = 1, \\ &y \ge 0. \end{aligned} \qquad (6.16)$$

Доведення є аналогічним Теоремі 6.1.

Розглянемо деякі спеціальні випадки для виявлення відмінності та подібності узагальненої моделі, яка розглядається в розділі 6.2, та моделями, що представлені в цьому розділі.

Випадок 1. Приймемо $v_0 = \overline{a}$, $w_0 = \underline{a}$, $p_0 = \overline{a} - \underline{a}$. Тому $\overline{a}$ (відповідно $\underline{a}$) є цільовим (бажаним) значенням виграшу гравця I (відповідно програшу гравця II).). Припустимо, що обидва гравці мають однакові допуски, які дорівнюють $\overline{a} - \underline{a}$. Тоді задачі (6.8) та (6.10) набувають вигляду:

$$\begin{aligned}
&\max\ \lambda \\
&s.t. \\
&\frac{A_j^T}{\overline{a}-\underline{a}}x - \frac{\overline{a}}{\overline{a}-\underline{a}} \ge \lambda,\ \ j=1,\dots,n, \\
&e^T x = 1, \\
&x \ge 0, \\
&\lambda \in [0,1]
\end{aligned} \tag{6.17}$$

та

$$\begin{aligned}
&\max\ \eta \\
&s.t. \\
&\frac{A_i}{\overline{a}-\underline{a}}y - \frac{\underline{a}}{\overline{a}-\underline{a}} \le 1-\eta,\ \ i=1,\dots,m, \\
&e^T y = 1, \\
&y \ge 0, \\
&\eta \in [0,1],
\end{aligned} \tag{6.18}$$

подібному задачам (6.14) та (6.16) при $\lambda = 1-\eta$. Оскільки в Розділі 6.2 було декларовано, що задачі (6.8) і (6.10) утворюють нечітку двоїсту пару ЗЛП, то задачі (6.17) і (6.18), як особливий випадок (6.8) і (6.10), також утворюють в цьому сенсі нечітку двоїсту пару ЗЛП.

Слід зазначити, що на відміну від нечіткої двоїстої пари (6.8) і (6.10), ЗЛП (6.17) і (6.18) не зводяться до чіткої двоїстої пари за умови, що обидва гравці мають однакові бажані значення $v_0 = w_0$ і для оптимальних розв'язків задач (6.17) і (6.18) виконується умова $\lambda^* = \eta^* = 1$ (див. Зауваження 6.3). Це пояснюється тим, що з рівності $v_0 = w_0$ випливає $\overline{a} - \underline{a} = 0$, і тоді обмеження задач (6.17) і (6.18) втрачають сенс. Крім того, в цьому випадку A є сталою матрицею, оскільки $\overline{a} = \max\limits_{x\in S^m}\max\limits_{y\in S^n} a_{ij} = \min\limits_{x\in S^m}\min\limits_{y\in S^n} a_{ij} = \underline{a}$. Адаптація формулювання моделі Сакави та Нішізакі на випадок чіткої гри розглядається у Випадку 2.

Випадок 2. Якщо гравці I і II вказують однаковий рівень $v_0 = w_0 = \hat{v}$ цільового (бажаного) значення виграшу і програшу відповідно, то, незалежно від того однакові чи різні p_0 і q_0, задачі

$$\begin{aligned}
&\max\ \lambda \\
&s.t. \\
&1 - \frac{\hat{v} - A_j^T x}{p_0} \ge \lambda, \quad j = 1, \dots, n, \\
&e^T x = 1, \\
&x \ge 0, \\
&\lambda \in [0,1]
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
&\max\ \eta \\
&s.t. \\
&1 - \frac{A_i y}{q_0} \ge \eta, \quad i = 1, \dots, m, \\
&e^T y = 1, \\
&y \ge 0, \\
&\eta \in [0,1]
\end{aligned}$$

залишаються двоїстою парою в «нечіткому» сенсі.

Для ілюстрації розглянутих вище випадків наведемо наступні приклади.

Приклад 6.2. Розглянемо чітку гру G з матрицею виграшів

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді $v_0 = \overline{a} = 10$, $w_0 = \underline{a} = 2$, $p_0 = \overline{a} - \underline{a} = q_0 = 8$. При таких умовах задачі (6.8) і (6.10) мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
&\max\ \lambda \\
&s.t. \\
&-8\lambda + 10x_1 + 6x_2 \ge 2, \\
&-8\lambda + 8x_1 + 2x_2 \ge 2, \\
&x_1 + x_2 = 1, \\
&x_{1,2} \ge 0,\ \lambda \in [0,1]
\end{aligned}
\qquad (6.19)
$$

та

$$
\begin{aligned}
&\max\ \eta \\
&s.t. \\
&8\eta + 10y_1 + 8y_2 \le 10, \\
&8\eta + 6y_1 + 2y_2 \le 10, \\
&y_1 + y_2 = 1, \\
&y_{1,2} \ge 0,\ \eta \in [0,1],
\end{aligned}
\qquad (6.20)
$$

відповідно. Оптимальними розв'язками цих задач є $x^* = (1,0)^T$, $\lambda^* = 3/4$ та $y^* = (0,1)^T$ і $\eta^* = 1/4$ відповідно. Зауважимо, що хоча задачі (6.19) і (6.20) утворюють нечітку двоїсту пару ЗЛП, вони не є двоїстою парою в чіткому сенсі.

Питання для самоперевірки до Розділу 6

1. Що називається розв'язком нечіткої матричної гри?
2. Яким ЗЛП еквівалентна нечітка гра $FG = (S^m, S^n, A, v_0, \gtrsim, p_0, w_0, \lesssim, q_0)$?
3. Які чіткі ЗЛП потрібно розв'язати гравцям для розв'язання матричної гри $FG = (S^m, S^n, A, v_0, \gtrsim, p_0, w_0, \lesssim, q_0)$?
4. Як визначаються нечіткі цілі гравців в моделі гри Нішізакі та Сакави?
5. Сформулюйте ЗЛП, яка забезпечує максимальне значення ступеня досягнення нечіткої цілей гравців за підходом Нішізакі та Сакави.

РОЗДІЛ 7. Матричні ігри з нечіткими параметрами

У попередньому розділі були розглянуті матричні ігри з нечіткими цілями та підходи до їхнього розв'язання на основі теорії нечіткої двоїстості в лінійному програмуванні. В цьому розділі буде вивчатися матрична гра з нечіткими виграшами.

7.1. Матричні ігри з нечіткими сплатами

Нехай $FG = (S^m, S^n, \tilde{A})$ є матричною грою з нечіткими виграшами (далі просто нечіткою матричною грою), де S^m і S^n є множинами гравців, а $\tilde{A}$ є матрицею виграшів з елементами у формі нечітких чисел. Сформулюємо поняття раціонального значення нечіткої матричної гри *FG*.

Визначення 7.1. Нехай $\tilde{v}, \tilde{w} \in N(\mathbb{R})$. Пара $(\tilde{v}, \tilde{w})$ називається раціональним значенням нечіткої матричної гри *FG*, якщо існують стратегії $x^* \in S^m$ і $y^* \in S^n$, для яких виконуються нерівності

$$(x^*)^T \tilde{A} y \underset{\sim}{\geq} \tilde{v}, \ \forall y \in S^n,$$
$$(x)^T \tilde{A} y^* \underset{\sim}{\geq} \tilde{w}, \ \forall x \in S^m.$$

Якщо $(\tilde{v}, \tilde{w})$ є раціональним значенням *FG*, то $\tilde{v}$ і $\tilde{w}$ називаються раціональними значеннями для гравців I і II відповідно.

Визначення 7.2. Нехай T_1 і T_2 є множинами усіх раціональних значень $\tilde{v}$ і w˜ для гравців I і II відповідно, де $\tilde{v}, \tilde{w} \in N(\mathbb{R})$. Нехай існують стратегії $\tilde{v}^* \in T_1, \tilde{w}^* \in T_2$ такі, що

$$F(\tilde{v}^*) \geq F(\tilde{v}), \ \forall \tilde{v}^* \in T_1,$$
$$F(\tilde{w}^*) \geq F(\tilde{w}), \ \forall \tilde{w}^* \in T_2.$$

Тоді вектор $(x^*, y^*, \tilde{v}^*, \tilde{w}^*)$ називається розв'язком гри *FG*, де $\tilde{v}^*$ і $\tilde{w}^*$ є значеннями гри *FG* для гравців I і II відповідно, а x^* і y^* називаються оптимальними стратегіями гравців I і II відповідно.

Сформулюємо пару нечітких ЗЛП для гравців I та II:

$$
\begin{aligned}
&\max\ F(\tilde{v}) \\
&s.t. \\
&x^T \tilde{A} y \gtrsim_{\tilde{p}} \tilde{v},\ \forall y \in S^n, \\
&x \in S^m
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

та

$$
\begin{aligned}
&\min\ F(\tilde{w}) \\
&s.t. \\
&x^T \tilde{A} y \gtrsim_{\tilde{q}} \tilde{w},\ \forall x \in S^m, \\
&y \in S^n.
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

Оскільки має сенс розглядати лише крайні точки множин стратегій S^m, S^n, то задачі (7.1) і (7.2) матимуть вигляд:

$$
\begin{aligned}
&\max\ F(\tilde{v}) \\
&s.t. \\
&x^T \tilde{A}_j \gtrsim_{\tilde{p}} \tilde{v},\ j = 1,\dots,n, \\
&e^T x = 1, \\
&x \ge 0
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

та

$$
\begin{aligned}
&\min\ F(\tilde{w}) \\
&s.t. \\
&\tilde{A}_i y \gtrsim_{\tilde{q}} \tilde{w},\ i = 1,\dots,m, \\
&e^T y = 1, \\
&y \ge 0,
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

відповідно. В цих моделях $\tilde{A}_i$ (відповідно $\tilde{A}_j$) позначає *i*-й рядок, $i = 1,\dots,m$ (відповідно *j*-й стовпчик, $j = 1,\dots,n$) матриці $\tilde{A}$. Застосування методу декомпозиції Ягера для нечітких обмежень з нечіткими допусками в задачах (7.3) та (7.4) призводить до таких задач:

$$\begin{aligned}
&\max\ F(\tilde{v})\\
&s.t.\\
&\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} x_i \succeq \tilde{v} + \tilde{p}(1-\lambda),\ j=1,\dots,n,\\
&e^T x = 1,\\
&x \ge 0,\ \lambda \in [0,1]
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
&\min\ F(\tilde{w})\\
&s.t.\\
&\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} y_j \succeq \tilde{w} + \tilde{q}(1-\eta),\ i=1,\dots,m,\\
&e^T y = 1,\\
&y \ge 0,\ \eta \in [0,1].
\end{aligned}$$

За допомогою функції $F: N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ дефаззифікації ці задачі можна записати як:

$$\begin{aligned}
&\max\ F(\tilde{v})\\
&s.t.\\
&\sum_{i=1}^{m} F(\tilde{a}_{ij}) x_i \succeq F(\tilde{v}) + F(\tilde{p})(1-\lambda),\ j=1,\dots,n, \qquad (7.5)\\
&e^T x = 1,\\
&x \ge 0,\ \lambda \in [0,1]
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
&\min\ F(\tilde{w})\\
&s.t.\\
&\sum_{j=1}^{n} F(\tilde{a}_{ij}) y_j \succeq F(\tilde{w}) + F(\tilde{q})(1-\eta),\ i=1,\dots,m, \qquad (7.6)\\
&e^T y = 1,\\
&y \ge 0,\ \eta \in [0,1].
\end{aligned}$$

Отже, для розв’язання нечіткої матричної гри *FG* потрібно розв’язати чіткі ЗЛП (7.5) і (7.6) для гравців I і II відповідно.

Тоді, якщо вектор $(x^*, \lambda^*, \tilde{v}_*)$ є оптимальним розв’язком (7.5), то для гравця I x^* є оптимальною стратегією, $\tilde{v}_*$ є нечітким значенням, а $(1-\lambda^*)\tilde{p}$ є вектором нечітких допусків для правих частин нечітких обмежень в (7.5). Подібне тлумачення має оптимальний розв’язок $(y^*, \eta^*, \tilde{w}_*)$ задачі (7.6). Отже, пара (7.5)-(7.6) становить нечітку двоїсту пару задач в сенсі Теореми 7.1. Звідси випливає наступна теорема.

Теорема 7.3. Нечітка матрична гра $FG = (S^m, S^n, \tilde{A})$ є еквівалентною чітким ЗЛП (7.5) і (7.6), які складають нечітку двоїсту пару.

Зауваження 7.2. Відзначимо, що чіткі задачі (7.5) і (7.6) не утворюють двоїсту пару в традиційному розумінні двоїстості в лінійному програмуванні, але є двоїстими в «нечіткому» сенсі. Отже, якщо $(x^*, \lambda^*, \tilde{v}_*)$ є оптимальним розв’язком (7.5) і $(y^*, \eta^*, \tilde{w}_*)$ є оптимальним розв’язком (7.6), то не слід очікувати, що $F(\tilde{v}_*) = F(\tilde{w}_*)$.

Зауваження 7.3. Якщо всі параметри нечіткої гри FG є чіткими числами, тобто $\tilde{a}_{ij} = a_{ij}$, $\tilde{b}_i = b_i$ і $\tilde{c}_j = c_j$ і для оптимальних розв’язків задач (7.5) і (7.6) виконується умова $\lambda^* = \eta^* = 1$, то нечітка гра FG зводиться до чіткої матричної гри.

Приклад 7.1. Розглянемо нечітку гру з матрицею виграшів у формі трикутних нечітких чисел:

$$A = \begin{pmatrix} 180 & 156 \\ 90 & 180 \end{pmatrix}$$

де $180 = (175,180,190)$, $156 = (150,156,158)$, $90 = (80,90,100)$. Припустимо, що гравці I і II мають нечіткі допуски $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = (0.08, 0.1, 0.11)$ і $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = (0.14, 0.15, 0.17)$. За Теоремою 7.3 потрібно розв’язати такі чіткі ЗЛП:

$$\max \frac{v_l + v + v_u}{3}$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned} &545x_1 + 270x_2 \ge v_l + v + v_u - 0.29(1-\lambda), \\ &464x_1 + 545x_2 \ge v_l + v + v_u - 0.29(1-\lambda), \\ &x_1 + x_2 = 1, \\ &x_{1,2} \ge 0,\ \lambda \in [0,1] \end{aligned} \tag{7.7}$$

та

$$\max \frac{w_l + w + w_u}{3}$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned} &545y_1 + 464y_2 \le w_l + w + w_u + 0.46(1-\eta), \\ &270y_1 + 545y_2 \le w_l + w + w_u + 0.46(1-\eta), \\ &y_1 + y_2 = 1, \\ &y_{1,2} \ge 0,\ \eta \in [0,1] \end{aligned} \tag{7.8}$$

для гравців I та II відповідно. В цьому прикладі припущення про ненульові зачення усіх змінних v_l, v, v_u (відповідно w_l, w, w_u) здається дуже малоймовірним, оскільки кількість обмежень в задачах (7.7) і (7.8) набагато менша за кількість змінних. Тому якісь змінні можуть бути небазисними і, отже, прийматимуть лише нульові значення. Це спостереження спонукає прийняти $V = \frac{v_l + v + v_u}{3}$, $W = \frac{w_l + w + w_u}{3}$ і розглянути наступні ЗЛП:

$$\max V$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned} &545x_1 + 270x_2 \ge 3V - 0.29(1-\lambda), \\ &464x_1 + 545x_2 \ge 3V - 0.29(1-\lambda), \\ &x_1 + x_2 = 1, \\ &x_{1,2} \ge 0,\ \lambda \in [0,1] \end{aligned} \tag{7.9}$$

та

$$
\begin{aligned}
&\min\ W\\
&s.t.\\
&545y_1 + 464y_2 \le 3W + 0.46(1-\eta),\\
&270y_1 + 545y_2 \le 3W + 0.46(1-\eta),\\
&y_1 + y_2 = 1,\\
&y_{1,2} \ge 0,\ \eta \in [0,1].
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

Розв'язуючи ці ЗЛП, одержимо $x^* = (0.77, 0.22)^T$, $V = 160.9$, $\lambda^* = 0$ та $y^* = (0.22, 0.77)^T$, $W = 160.6$ і $\eta^* = 0$. Тому $x^* = (0.77, 0.22)^T$ та $y^* = (0.22, 0.77)^T$ є оптимальними стратегіями гравців I та II відповідно. Крім того, нечітке значення гри для гравця I дорівнює «приблизно 160.9», а нечітке значення гри для гравця II дорівнює «приблизно 160,6».

7.2. Підхід Кампоса

За цим підходом для нечіткої матричної гри $G = (S^m, S^n, \tilde{A})$ розглядалися ЗЛП

$$
\begin{aligned}
&\max\ v\\
&s.t.\\
&\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} x_i \gtrsim v,\ j = 1,\ldots,n,\\
&e^T x = 1,\\
&x \ge 0
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

та

$$
\begin{aligned}
&\min\ w\\
&s.t.\\
&\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} y_j \lesssim w,\ i = 1,\ldots,m,\\
&e^T y = 1,\\
&y \ge 0
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

для гравців I і II відповідно, де $v, w \in \mathbb{R}$. Оскільки без зменшення загальності можна вважати v, w строго додатними, то визначимо $u \in \mathbb{R}_+^m$ і $s \in \mathbb{R}_+^n$ так, що $u_i = x_i / v$, $i = 1,...,m$ і $s_i = y_i / w$, $j = 1,...,n$. Звідси одержимо $v = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{m} u_i$ та $w = 1 \Big/ \sum_{j=1}^{n} s_j$. Тоді задачі (7.11) і (7.12) мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
&\max \ \sum_{i=1}^{m} u_i \\
&s.t. \\
&\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} u_i \gtrsim 1, \ j = 1,...,n, \\
&u_i \ge 0, \ i = 1,...,m
\end{aligned}
$$

та

$$
\begin{aligned}
&\max \ \sum_{j=1}^{n} s_j \\
&s.t. \\
&\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} s_j \lesssim 1, \ i = 1,...,m, \\
&s_j \ge 0, \ j = 1,...,n.
\end{aligned}
$$

Застосування методу декомпозиції Ягера для нечітких обмежень з нечіткими допусками до цих задач приводить наступних:

$$
\begin{aligned}
&\min \ \sum_{i=1}^{m} u_i \\
&s.t. \\
&\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} u_i \succeq 1 - \tilde{p}_j (1-\alpha), \ j = 1,...,n, \qquad (7.13) \\
&u_i \ge 0, \ i = 1,...,m, \\
&\alpha \in [0,1]
\end{aligned}
$$

та

$$\max \sum_{j=1}^{n} s_j$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} s_j \preceq 1 + \tilde{q}_i (1-\beta),\ i = 1,...,m, \qquad (7.14)$$

$$s_j \geq 0,\ j = 1,...,n,$$

$$\beta \in [0,1].$$

Якщо $\tilde{a}_{ij}, \tilde{p}_j, \tilde{q}_i$ є трикутними нечіткими числами, то задачі (7.13) і (7.14) зводяться до наступних:

$$\min \sum_{i=1}^{m} u_i$$

$$s.t.$$

$$\sum_{i=1}^{m} ((a_{ij})_l + a_{ij} + (a_{ij})_u) u_i \geq$$

$$\geq 3 - ((p_j)_l + p_j + (p_j)_u)(1-\alpha),\ j = 1,...,n,$$

$$u_i \geq 0,\ i = 1,...,m,$$

$$\alpha \in [0,1]$$

та

$$\max \sum_{j=1}^{n} s_j$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} ((a_{ij})_l + a_{ij} + (a_{ij})_u) s_j \leq$$

$$\leq 3 + ((q_i)_l + q_i + (q_i)_u)(1-\beta),\ i = 1,...,m,$$

$$s_j \geq 0,\ j = 1,...,n,$$

$$\beta \in [0,1].$$

Можна зробити такі спостереження:

1. Немає підстав припускати, що $u, v > 0$. У випадку чіткої гри ці нерівності виконуються без обмеження загальності, оскільки якщо v є значенням гри для матриці A, то $v+\alpha$ є значенням гри для матриці $A(\alpha) = A + \alpha$. В нечіткому випадку це не є обов'язковим.

2. З нерівності $\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} x_i \gtrsim v$ можна отримати $\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} u_i \gtrsim 1$ шляхом ділення обох частин на $v > 0$ лише у випадку, коли параметри вихідної нерівності є чіткими. Цей результат може не відповідати дійсності, якщо параметри є нечіткими. Наприклад, якщо $x \gtrsim_p a$ позначає нечітке відношення «x приблизно більше, ніж a з допуском p і $\alpha > 0$», то для лінійної функції належності це призводить до $\alpha x \gtrsim_{\alpha p} \alpha a$, а не $\alpha x \gtrsim_p \alpha a$.

3. Нечіткі ЗЛП (7.13) і (7.14) не є парою двоїстих задач на відміну від звичайного чіткого випадку.

Приклад 7.2. Розв'яжемо нечітку гру з Прикладу 7.1 за підходом Кампоса. Припустимо, що $V = F(\tilde{v}) = \dfrac{v_l + v + v_u}{3}$, $W = F(\tilde{w}) = \dfrac{w_l + w + w_u}{3}$ додатні, і, отже, визначивши $u_1 = x_1 / F(\tilde{v})$, $u_2 = x_2 / F(\tilde{v})$, $s_1 = y_1 / F(\tilde{w})$, $s_2 = y_2 / F(\tilde{w})$, сформулюємо ЗЛП

$$
\begin{aligned}
&\min\ u_1 + u_2 \\
&s.t. \\
&545u_1 + 270u_2 \geq 1 - \frac{0.29(1-\lambda)}{F(\tilde{v})}, \\
&464u_1 + 545u_2 \geq 1 - \frac{0.29(1-\lambda)}{F(\tilde{v})}, \\
&x_{1,2} \geq 0,\ \lambda \in [0,1]
\end{aligned}
$$

та

$$
\begin{aligned}
&\max\ s_1 + s_2 \\
&s.t. \\
&545 s_1 + 464 s_2 \le 1 - \frac{0.46(1-\eta)}{F(\tilde{w})}, \\
&270 s_1 + 545 s_2 \le 1 - \frac{0.46(1-\eta)}{F(\tilde{w})}, \\
&y_{1,2} \ge 0,\ \ \eta \in [0,1],
\end{aligned}
$$

які призведуть до такого самого розв’язку, що і задачі (7.9) і (7.10) відповідно.

7.3. Підхід Лю та Као

За цим підходом для нечіткої матричної гри $FG = (S^m, S^n, \tilde{A})$ розглядаються такі ЗЛП:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{Z} = \max\ v \\
&s.t. \\
&\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} x_i \ge v,\ j = 1,\dots,n, \\
&e^T x = 1, \\
&x \ge 0
\end{aligned}
$$

та

$$
\begin{aligned}
&\tilde{Z} = \min\ w \\
&s.t. \\
&\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} y_j \le w,\ i = 1,\dots,m, \\
&e^T y = 1, \\
&y \ge 0
\end{aligned}
$$

для гравців I і II відповідно. В цих задачах $v, w \in \mathbb{R}$, а $\tilde{Z} = \{(z, \mu_{\tilde{Z}}(z)) : z \in \mathbb{R}\}$ є спільним для обох задач нечітким числом, що представляє собою значення гри FG з функцією належності

$$\mu_{\tilde{Z}}(z) = \max_{A\in\mathbb{R}^{m+n}} \{\min_{i,j} \mu_{\tilde{A}_{ij}}(a_{ij}) : z = Z(A)\},\ z \in \mathbb{R}\ . \tag{7.15}$$

В цій формулі $Z(A)$ є ціною матричної гри $G = (S^m, S^n, A)$ з чіткою платіжною матрицею A з елементами $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$. Для кожної платіжної матриці $A \in \mathbb{R}^{m+n}$ ціна гри $Z(A)$ є спільним розв'язком двоїстої пари ЗЛП

$$\begin{aligned} & Z(A) = \max\ v \\ & s.t. \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge v,\ j = 1,...,n, \\ & e^T x = 1, \\ & x \ge 0 \end{aligned} \tag{7.16}$$

та

$$\begin{aligned} & Z(A) = \min\ w \\ & s.t. \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le w,\ i = 1,...,m, \\ & e^T y = 1, \\ & y \ge 0. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Для обчислення функції належності $\mu_{\tilde{Z}}(z)$ використовується ідея подання нечіткого числа його множинами рівнів. Для цього функцію належності нечіткого числа $\tilde{Z}$ запишемо у вигляді

$$\mu_{\tilde{Z}}(z) = \max_{\alpha\in(0,1]} \mu_{\alpha\tilde{Z}_\alpha}(z), \tag{7.18}$$

де $\alpha\tilde{Z}_\alpha = \{(z,\alpha) : z \in \tilde{Z}_\alpha\}$ є нечіткою множиною, що складається з елементів чіткої множини $\tilde{Z}_\alpha = \left\{z : z \in \mathbb{R},\ \mu_{\tilde{Z}}(z) \ge \alpha\right\}$ рівня α нечіткого числа $\tilde{Z}$, $\alpha \in (0,1]$ нечіткого числа $\tilde{Z}$. З (7.15) випливає, що множина $\tilde{Z}_\alpha$ рівня α нечіткого числа $\tilde{Z}$ визначається виразом

$$\tilde{Z}_\alpha = \{Z(A) : a_{ij} \in [\tilde{a}_{ij}]_\alpha,\ i = 1,...,m;\ j = 1,...,n\}, \qquad (7.19)$$

де $Z(A)$ є значенням чіткої гри $G = (S^m, S^n, A)$ в змішаних стратегіях. Воно є спільним розв'язком двоїстої пари ЗЛП (7.16)- (7.17). Множини $(\tilde{a}_{ij})_\alpha = \left\{ r : r \in \mathbb{R},\ \mu_{\tilde{a}_{ij}}(r) \geq \alpha \right\}$ рівня α нечіткого числа $\tilde{a}_{ij},\ i = 1,...,m;\ j = 1,...,n$ є замкненими інтервалами

$$(\tilde{a}_{ij})_\alpha = [(\tilde{a}_{ij})^L_\alpha, (\tilde{a}_{ij})^H_\alpha] =$$
$$= [\min\{r \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{a}_{ij}}(r) \geq u\}, \max\{r \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{a}_{ij}}(r) \geq u\}],$$

$i = 1,...,m;\ j = 1,...,n$ числової вісі $\mathbb{R}$. Оскільки $\tilde{Z}$ є нечітким числом, то його множина $\tilde{Z}_\alpha$ рівня α також є замкненим інтервалом $\tilde{Z}_\alpha = [(\tilde{Z})^L_\alpha, (\tilde{Z})^H_\alpha] \subset \mathbb{R}$. З (7.19) випливає, що для фіксованого значення рівня $\alpha \in (0,1]$, верхня $(\tilde{Z})^H_\alpha$ і нижня $(\tilde{Z})^L_\alpha$ границі множини $\tilde{Z}_\alpha$ рівня α обчислюються шляхом розв'язання такої пари ЗЛП:

$$(\tilde{Z})^H_\alpha = \max_x v$$
$$\sum_{i=1}^m p_{ij} \geq v,\ j = 1,...,n;\ \sum_{i=1}^m x_i = 1; \qquad (7.20)$$
$$(\tilde{a}_{ij})^L_\alpha x_i \leq p_{ij} \leq (\tilde{a}_{ij})^H_\alpha x_i, i = 1,...,m;\ j = 1,...,n;$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1,...,m;\ \ v \in \mathbb{R},\ p_{ij} \geq 0,\ \ i = 1,...,m,\ j = 1,...,n$$

та

$$(\tilde{Z})^L_\alpha = \min_x w$$
$$\sum_{j=1}^n q_{ij} \leq w,\ i \in I;\ \sum_{j=1}^n y_j = 1;$$
$$(7.21)$$
$$(\tilde{A}_{ij})^L_u y_j \leq q_{ij} \leq (\tilde{A}_{ij})^H_u y_j, i = 1,...,m;\ j = 1,...,n;$$
$$y_j \geq 0,\ \ j = 1,...,n;\ w \in \mathbb{R},\ q_{ij} \geq 0,\ \ i = 1,...,m;\ j = 1,...,n;$$

відповідно.

Зауваження 7.4. Для будь-якої нечіткої матричної гри $FG=(S^m,S^n,\tilde{A})$ та будь-якого значення $\alpha\in(0,1]$ задачі (7.20) та (7.21) мають розв'язки.

Отже, з (7.18) випливає, що функція належності (7.18) та нечітке число $\tilde{Z}$ значення нечіткої матричної гри можуть бути представлені у формах:

$$\mu_{\tilde{Z}}(z)=\max\{\alpha\in(0,1]:\ (\tilde{Z})_u^L\le z\le(\tilde{Z})_u^H\},\quad z\in\mathbb{R},$$

$$\tilde{Z}=\{(z,\alpha):z\in[(\tilde{Z})_\alpha^L,(\tilde{Z})_\alpha^H],\ \alpha\in(0,1]\}=$$
$$=\{([(\tilde{Z})_\alpha^L,(\tilde{Z})_\alpha^H],\alpha):\alpha\in(0,1]\},$$

відповідно. Безперечною перевагою цього підходу є те, що верхня $(\tilde{Z})_\alpha^H$ та нижні $(\tilde{Z})_\alpha^L$ границі множин $\tilde{Z}_\alpha=[(\tilde{Z})_\alpha^L,(\tilde{Z})_\alpha^H]$ рівня α нечіткого значення $\tilde{Z}$ гри $FG=(S^m,S^n,\tilde{A})$ однакові для обох гравців для будь-якого фіксованого значення рівня $\alpha\in(0,1]$. Звідси випливає, що нечітке число значення гри є однаковим для обох гравців. Доречно відзначити, що цю властивістю мають далеко не всі методи розв'язання нечітких матричних ігор.

У більшості випадків, якщо користуватися формулою (7.18), то неможливо побудувати аналітично функцією належності $\mu_{\tilde{Z}}(z)$ нечіткого числа $\tilde{Z}$ значення нечіткої матричної гри. Тим не менш, якщо розрахувати верхні $(\tilde{Z})_\alpha^H$ та нижні $(\tilde{Z})_\alpha^L$ границі множин $\tilde{Z}_\alpha=[(\tilde{Z})_\alpha^L,(\tilde{Z})_\alpha^H]$ рівня α для скінченої кількості рівнів $\alpha\in(0,1]$, то згідно (7.18) значення функції належності $\mu_{\tilde{Z}}(z)$ можна обчислити для будь-якої заданої скінченої множини значень $z\in\mathbb{R}$.

Приклад 7.3. Розглянемо матричну гру, в якій $i=1,\dots,m$ та $j=1,\dots,n$ є чистими стратегіями гравців І і ІІ відповідно. Елементи $\tilde{a}_{ij}$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$ нечіткої платіжної матриці $\tilde{A}$ задані в Таблиці 7.1. З 16 сплат 8 є нечіткими числами. Трикомпонентні є трикутними нечіткими числами, чотирикомпонентні є трапецієподібними. Усі дані у прикладах будуть наведені з точністю до одного знака після точки.

Нагадаємо, що для трапецієподібного нечіткого числа $A=(a_l,\underline{a},\bar{a},a_u)$ функція належності має форму

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,a_l)\bigcup(b_u,+\infty);\\ (x-a_l)/(\underline{a}-a_l), & x\in[a_l,\underline{a}];\\ 1, & x\in[\underline{a},\bar{a}];\\ (a_u-x)/(a_u-\bar{a}), & x\in(\bar{a},a_u].\end{cases}$$

Трикутне нечітке число $A=(a_l,a,a_u)$ є окремим випадком трапецієподібного числа $A=(a_l,\underline{a},\bar{a},a_u)$ при $\underline{a}=\bar{a}=a$.

Таблиця 7.1.

Таблиця виграшів

Стра-тегії		Гравець II			
		1	2	3	4
Гравець I	1	(26,27,28,30)	-10	-20	(-3,0,3)
	2	-28	20	-10	(32,34,35,37)
	3	-(27,25,22)	(10,11,12,14)	20	-30
	4	30	-(38,36,35,34)	-(34,32,30)	(32,33,24,36)

Для фіксованого значення рівня $\alpha\in[0,1]$ задачі (7.20) та (7.21) для знаходження верхньої $(\tilde{Z})_\alpha^H$ та нижньої $(\tilde{Z})_\alpha^L$ границь множини $\tilde{Z}_\alpha$ рівня α мають вигляд:

$$(\tilde{Z})_\alpha^H=\max v$$

$$s.t.$$

$$(26,27,28,30)x_1-28x_2-(27,25,22)x_3+30x_4\ge v,$$

$$-10x_1+20x_2+(10,11,12,14)x_3-(38,36,35,34)x_4\ge v,$$

$$-20x_1-10x_2+20x_3-(34,32,30)x_4\ge v,$$

$$(-3,0,3)x_1+(32,34,35,37)x_2-30x_3+(32,33,34,34)x_4\ge v,$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1;\ x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0;\ v\in\mathbb{R}$$

та

$$(\tilde{Z})_\alpha^L = \max w$$

$s.t.$

$$(26,27,28,30)y_1 - 10y_2 - 20y_3 + (-3,0,3)y_4 \le w,$$

$$-28y_1 + 20y_2 - 10y_3 + (32,34,35,37)y_4 \le w,$$

$$(-27,-25,-22)y_1 + (10,11,12,14)y_2 + 20y_3 - 30y_4 \le w,$$

$$30y_1 - (38,36,35,34)y_2 - (34,32,30)y_3 + (32,33,34,34)y_4 \le w,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1;\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0;\ w \in \mathbb{R},$$

відповідно. У Таблиці 7.2 наведені значення верхньої $(\tilde{Z})_\alpha^H$ та нижньої $(\tilde{Z})_\alpha^L$ границь множини $\tilde{Z}_\alpha$ для 11 різних значень $\alpha \in \{0, 0.1, ..., 1.0\}$. Значення α є гарантованим ступенем належності значення гри відповідного діапазону.

Таблиця 7.2.

Верхні та нижні границі діапазону значення гри

	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$(\tilde{Z})_\alpha^H$	-1.6	-1.8	-2.0	-2.2	-2.4	-2.6
$(\tilde{Z})_\alpha^L$	-3.6	-3.5	-3.3	-3.1	-2.9	-2.8

З Таблиці 7.2 видно, що більшим значенням α відповідає менший ступінь невизначеності для значення гри. Зокрема, значенню $\alpha = 0$ відповідає найширший інтервал і найменша гарантована ступінь належності. Це вказує на те, що ціна гри ніколи не вийде за межі цього діапазону. У цьому прикладі, хоча значення гри $\tilde{Z}$ є нечітким, його найбільш вірогідне значення знаходиться між -2,8 та -2,6 і не може вийти за межі діапазону -3,6 та -1,6. Функція належності ціни $\mu_{\tilde{Z}}(z)$ гри зображена на рис. 7.1. Візуально вона виглядає як трапецієподібне нечітке число. Насправді це не так.

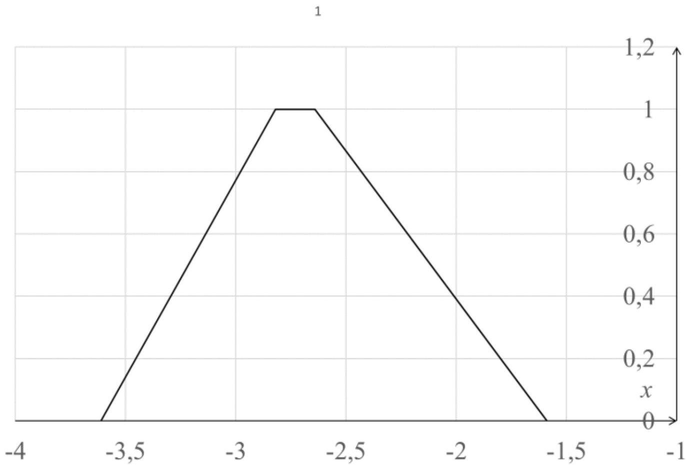

Рис. 7.1. Функція належності ціни гри.

7.4. Матричні ігри з нечіткими цілями та виграшами

Нехай $FG = (S^m, S^n, \tilde{A}, \tilde{v}, \underset{\sim}{\geq}, \tilde{p}, w_0, \underset{\sim}{\leq}, \tilde{q})$ є матричною грою з нечіткими цілями та виграшами, де S^m і S^n є множинами гравців; $\tilde{A}$ є матрицею виграшів з елементами у формі нечітких чисел; $\tilde{v}$ і $\tilde{w}$ є нечіткими числами, які характеризують рівні прагнень гравців I та II відповідно; символи $\underset{\sim}{\leq}$ і $\underset{\sim}{\geq}$ є нечіткими версіями символів $\leq$ і $\geq$ відповідно і мають лінгвістичне тлумачення «приблизно менше або дорівнює» і «приблизно більше або дорівнює»; $\tilde{p}, \tilde{q}$ є нечіткими рівнями допусків гравців I і II відповідно. Тепер і далі будемо називати матричну гру FG із нечіткими цілями та нечіткими виграшами просто нечіткою матричною грою. Сформулюємо поняття раціонального значення нечіткої матричної гри *FG*.

Визначення 7.3. Ситуацію $(\overline{x}, \overline{y}) \in S^m \times S^n$ називатимемо розв’язком нечіткої матричної гри *FG*, якщо виконуються нечіткі нерівності:

$$\bar{x}^T \tilde{A} y \gtrsim_{\tilde{p}} \tilde{v}, \ \forall y \in S^n, \qquad (7.22)$$

$$x^T \tilde{A} \bar{y} \lesssim_{\tilde{q}} \tilde{w}, \ \forall x \in S^m. \qquad (7.23)$$

Тут $\bar{x}$ називається оптимальною стратегією для гравця I, а $\bar{y}$ називається оптимальною стратегією для гравця II.

Використання методу декомпозиції Ягера для нечітких обмежень (7.22)-(7.23) з нечіткими допусками призводить до пари нечітких ЗЛП:

$$\begin{aligned} &\max \ \lambda \\ &s.t. \\ &x^T \tilde{A} y \succeq \tilde{v} + \tilde{p}(1-\lambda), \ \forall y \in S^n, \\ &x \in S^m, \ \lambda \in [0,1] \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} &\min \ \eta \\ &s.t. \\ &x^T \tilde{A} y \ \succeq \tilde{w} + \tilde{q}(1-\eta), \ \forall x \in S^m, \\ &y \in S^n, \ \eta \in [0,1]. \end{aligned}$$

Після використання функції дефаззифікації $F : \mathbb{N}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ для обмежень цих задач отримаємо пару задач

$$\begin{aligned} &\max \ \lambda \\ &s.t. \\ &F(x^T \tilde{A} y) \succeq F(\tilde{v}) + F(\tilde{p})(1-\lambda), \ \forall y \in S^n, \\ &e^T x = 1, \\ &x \geq 0, \ \lambda \in [0,1] \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} &\min \ \eta \\ &s.t. \\ &F(x^T \tilde{A} y) \succeq F(\tilde{w}) + F(\tilde{q})(1-\eta), \ \forall x \in S^m, \\ &e^T y = 1, \\ &y \geq 0, \ \eta \in [0,1], \end{aligned}$$

яку можна переписати у вигляді:

$$
\begin{aligned}
&\max\ \lambda\\
&s.t.\\
&x^T F(\tilde{A}) y \succeq F(\tilde{v}) + F(\tilde{p})(1-\lambda),\ \forall y \in S^n,\\
&e^T x = 1,\ x \geq 0,\ \lambda \in [0,1]
\end{aligned}
$$

та

$$
\begin{aligned}
&\min\ \eta\\
&s.t.\\
&x^T F(\tilde{A}) y \succeq F(\tilde{w}) + F(\tilde{q})(1-\eta),\ \forall x \in S^m,\\
&e^T y = 1,\ y \geq 0,\ \eta \in [0,1],
\end{aligned}
$$

де $F(\tilde{A})$ є (чіткою) матрицею розмірності $m \times n$, яка складається з елементів $F(\tilde{A}_{ij})$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$. Оскільки множини S^m і S^n стратегій гравців є опуклими багатогранниками, то достатньо розглянути лише крайні точки цих багатогранників, тобто чисті стратегії $i = 1,\ldots,m$ і $j = 1,\ldots,n$. Тоді отримаємо такі нечіткі ЗЛП:

$$
\begin{aligned}
&\max\ \lambda\\
&s.t.\\
&x^T F(\tilde{A})_j \succeq F(\tilde{v}) + F(\tilde{p})(1-\lambda),\ j = 1,\ldots,n,\\
&e^T x = 1,\ x \geq 0,\ \lambda \in [0,1]
\end{aligned}
\tag{7.24}
$$

та

$$
\begin{aligned}
&\min\ \eta\\
&s.t.\\
&F(\tilde{A})_i y \succeq F(\tilde{w}) + F(\tilde{q})(1-\eta),\ i = 1,\ldots,m,\\
&e^T y = 1,\ y \geq 0,\ \eta \in [0,1]
\end{aligned}
\tag{7.25}
$$

для гравців I і II відповідно. В цих задачах $F(\tilde{A})_i$ (відповідно $F(\tilde{A})_j$) позначає *i*-й рядок, $i = 1,\ldots,m$ (відповідно *j*-й стовпчик, $j = 1,\ldots,n$) матриці $F(\tilde{A})$.

Отже, для розв'язання нечіткої матричної гри *FG* потрібно розв'язати чіткі ЗЛП (7.24) та (7.25) для гравців I та II відповідно. Якщо (x^*, λ^*) є оптимальним розв'язком (7.24), то x^* є оптимальною стратегією гравця I, а λ^* є ступенем досягнення рівня прагнення $F(\tilde{v})$ гравця I при виборі їм стратегії x^*. Аналогічну інтерпретацію має оптимальний розв'язок (y^*, η^*) задачі (7.25). Отримні результати можуть бути сформульовані у формі наступної теореми.

Теорема 7.4. Нечітка матрична гра

$$FG = (S^m, S^n, \tilde{A}, \tilde{v}, \gtrsim, \tilde{p}, w_0, \lesssim, \tilde{q})$$

еквівалентна двом чітким ЗЛП (7.24) і (7.25), які утворюють нечітку двоїсту пару.

Зауваження 7.4. Відзначимо, що чіткі задачі (7.24) і (7.25) не утворюють чітку двоїсту пару, але є двоїстими в «нечіткому» сенсі. Отже, якщо (x^*, λ^*) є оптимальним розв'язком задачі (7.24) і (y^*, η^*) є оптимальним розв'язком задачі (7.25), то загалом не слід очікувати, що $y^* = \eta^*$.

Зауваження 7.5. Якщо обидва гравці мають однаковий рівень прагнення, тобто $F(\tilde{v}) = F(\tilde{w})$ для оптимальних розв'язків задач (7.24) і (7.25) виконується рівність $y^* = \eta^* = 1$, то нечітка гра *FG* зводиться до чіткої матричної гри.

Розглянемо такий приклад.

Приклад 7.3. Розглянемо нечітку гру з матрицею виграшів у формі трикутних нечітких чисел:

$$A = \begin{pmatrix} 180 & 156 \\ 90 & 180 \end{pmatrix}$$

де $180 = (175, 180, 190)$, $156 = (150, 156, 158)$, $90 = (80, 90, 100)$. Припустимо, що гравці I і II мають нечіткі допуски $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = (14, 16, 20)$ і $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = (13, 15, 22)$. Рівні прагнень гравців I та II становлять $\tilde{v} = (155, 165, 175)$ і $\tilde{w} = (170, 180, 190)$ відповідно. За Теоремою 7.4 потрібно розв'язати такі чіткі ЗЛП виду:

$$\begin{aligned}
&\max\ \lambda\\
&s.t.\\
&545x_1+270x_2\ge 495-50(1-\lambda),\\
&464x_1+545x_2\ge 495-50(1-\lambda),\\
&x_1+x_2=1,\ x_{1,2}\ge 0,\ \lambda\in[0,1],\\
&\min\ -\eta\\
&s.t.\\
&545y_1+464y_2\le 540+50(1-\eta),\\
&270y_1+545y_2\le 540+50(1-\eta),\\
&y_1+y_2=1,\ y_{1,2}\ge 0,\ \eta\in[0,1].
\end{aligned}$$

Отримаємо $x^*=(0.77,0.23)^T$, $\lambda^*=0,54$ $y^*=(0.05,0.95)^T$, $W=160.6$ і $\eta^*=1$. Ці задачі є двоїстими в «нечіткому» сенсі.

Питання для самоперевірки до Розділу 7

1. Що називається розв’язком нечіткої матричної гри $FG=(S^m,S^n,\tilde{A})$ з нечіткими виграшами?

2. Що називається раціональним значенням нечіткої матричної гри $FG=(S^m,S^n,\tilde{A})$ з нечіткими виграшами?

3. Яким ЗЛП еквівалентна нечітка гра $FG=(S^m,S^n,\tilde{A})$ з нечіткими виграшами?

4. Які чіткі ЗЛП потрібно розв’язати гравцям за підходом Кампоса для розв’язання матричної гри $FG=(S^m,S^n,\tilde{A})$ з нечіткими виграшами?

5. Які чіткі ЗЛП потрібно розв’язати гравцям за підходом Лю та Као для розв’язання матричної гри $FG=(S^m,S^n,\tilde{A})$ з нечіткими виграшами?

6. Сформулюйте постановку матричної гри з нечіткими цілями та нечіткими виграшами.

7. Що називається розв’язком нечіткої матричної гри нечіткими цілями та нечіткими виграшами?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Bector C.R., Chandra S. Fuzzy Mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games, Heidelberg: Springer Berlin, 2005.

2. Dumitrescu D., Lazzerini L., Jain L.C. Fuzzy Sets and Their Application to Clustering and Training, Florida (USA): CRC Press LLC, 2000.

3. Bector C.R., Chandra S. On duality in linear programming under fuzzy environment // Fuzzy Sets and Systems, 2000, Vol. 125, pp. 317-325.

4. Bector C.R., Chandra S., Vijay V. Matrix games with fuzzy goals and fuzzy linear programming duality // Fuzzy Optimization and Decision Making, 2004, Vol. 3, pp. 263-277.

5. Bector C.R., Chandra S., Vijay V. Duality in linear programming with fuzzy parameters and matrix games with fuzzy pay-offs // Fuzzy Sets and Systems, 2004, Vol. 146, pp. 253-269.

6. Bellman R.E., Zadeh L.A. Decision making in a fuzzy environment // Management Science, 1970, Vol. 17, pp. 141-164.

7. Campos L. Fuzzy linear programming models to solve fuzzy matrix games // Fuzzy Sets and Systems, 1989, Vol. 32, pp. 275-289.

8. Chanas S. The use of parametric programming in fuzzy linear programming problems // Fuzzy sets and Systems, 1983, Vol. 11, pp.243-251.

9. Dubois D., Prade H. Fuzzy numbers: an overview. In Bezdek J.C. (ed.) Analysis of Fuzzy Information, Mathematics and Logic, Boca Raton, FL: CRC Press, 1997.

10. Dubois D., Prade H. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, New York : Academic Press, 1980.

11. Dubois D., Prade H. Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory // Information Sciences, 1980, Vol. 30, pp. 183-224.

12. Dumitrescu D., Lazzerini L., Jain L.C. Fuzzy Sets and Their Application to Clustering and Training, Florida (USA) : CRC Press LLC, 2000.

13. Guu S.M., Wu Y.K. Weighted coefficients in two-phase approach for solving the multiple objective programming problems // Fuzzy sets and Systems, 1997, Vol. 85, pp.45-48.

14. Guu S.M., Wu Y.K. Two phase approach for solving the fuzzy linear pro gramming problems // Fuzzy sets and Systems, 1999, Vol. 107, pp.191-195.

15. Kaufmann A., Gupta M.M. Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science, Amsterdam : North Holland, 1988.

16. Kaufmann A., Gupta M.M. Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications, Newyork: Van Norstrand Reinhold, 1991.

17. Klir G. J., Yuan B. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, N.Y. (USA): Prentice-Hall, Inc., 1996.

18. Lai J.J., Hwang C.L. Possibilistic linear programming for managing interest rate risk // Fuzzy Sets and Systems, 1992, Vol. 49, pp. 121-133.

19. Li D.-F. A fuzzy multi-objective approach to solve fuzzy matrix games // The Journal of Fuzzy mathematics, 1999, Vol. 7, pp.907-912.

20. Lin C.C., A weighted max-min model for fuzzy goal programming, Fuzz Sets and Systems, 2004, Vol. 142, pp. 407-420.

21. Lee E.S., Li R.J Fuzzy multiple objective programming and compromise programming with pareto optimum // Fuzzy Sets and Systems, 1993, Vol. 53, pp. 275- 288.

22. Lui S.T., Kao C. Solution of fuzzy matrix games: an application of the extension principle // International Journal of Intelligent Systems, 2007, Vol. 22, pp. 891–903.

23. Mohamed R.H. The relationship between goal programming and fuzzy programming // Fuzzy Sets and Systems, 1997, Vol. 89, pp. 215-222.

24. Nash J.F. Non cooperative Games, Annals of Mathematics, 1951, Vol. 54, pp. 286-295.

25. Nishizaki I., Sakawa M. Fuzzy and Multiobjective Games for Conflict Resolution, Heidelberg : Physica-verleg, 2001.

26. R'odder W., Zimmermann H.-J. Duality in fuzzy linear programming, External Methods and System Analysis. In: Fiacco A.V., Kortanek K.O. (eds.), Heidelberg: Springer-Verleg, 1980.

27. Sakawa M., Nishizaki I. Maxmin solutions for fuzzy multiobjective matrix games // Fuzzy Sets and Systems, 1994, Vol. 61, pp. 265-275.

28. Verdegay J.L. A dual approach to solve the fuzzy linear programming problem // Fuzzy Sets and Systems, 1984, Vol. 14, pp. 131-141.

29. Verdegay J.L. Fuzzy mathematical programming. In: Gupta M.M., Sanchez E. (eds.) Fuzzy Information and Decision Processes, Amsterdam: North Holland, 1982.

30. Werners B. Interactive multiple objective programming subject to flexible constraints // European Journal of Operations research, 1987, Vol. 31, pp. 342-349.

31. Wu H.C. An (α,β)-optimal solution concept in fuzzy optimization problems // Optimization, 2004, Vol.53, pp. 203-221.

32. Yang T., Ignizio J.P., Kim H.J. Fuzzy programming with nonlinear membership functions: piecewise linear approximation // Fuzzy Sets and Systems, 1991, Vol.41, pp. 39-53.

33. Zadeh L. A.,Fuzzy Sets // Information and Control, 1965, Vol. 8, pp. 338-353.

34. Zimmermann H.-J. Fuzzy programming and linear programming with several objective functions // Fuzzy Sets and Systems, 1978, Vol. 1, pp. 45-55.

35. Zimmermann H.-J. Fuzzy Set Theory and its Applications, Nowell, MA, USA: Kluwer Academic Publishers, 1996.

36. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – 2- ге вид., перероб. та допов. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2010. - 336 с.

37. Мащенко С. О. Збірник задач з теорії прийняття рішень: навч. посіб. – К.: Видавництво Людмила, 2018. – 192 с.

38. Мащенко С.О. Мінімум нечітких чисел с нечіткою множиною операндів // Кібернетика та системний аналіз, 2022. Т. 58, № 2, С. 58–69.