МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

С. С. Шкільняк

ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ

ПРИКЛАДИ ТА ЗАДАЧІ

Навчальний посібник

2-ге видання, перероблене й доповнене

КИЇВський університет 2023

УДК 510.5(075.8)
Ш66

Рецензенти:
д-р екон. наук, проф. В. Л. Плескач,
д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України Ю. В. Крак,
д-р фіз.-мат. наук, проф. В. М. Терещенко

Рекомендовано до друку
вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(протокол № 4 від 14 листопада 2022 року)

Ухвалено науково-методичною радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 4-23 від 4 травня 2023 року)

Шкільняк С. С.
Ш66 Теорія алгоритмів. Приклади та задачі : навч. посіб. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2023. – 191 с.

ISBN 978-966-933-240-0

Наведено приклади розв'язання типових задач із теорії алгоритмів, запропоновано вправи й завдання для самостійного розв'язання. Викладений у стислій формі теоретичний матеріал дає змогу використовувати посібник як довідник з основ теорії алгоритмів.

Для студентів спеціальностей "Інформатика", "Системний аналіз", "Прикладна математика", "Програмна інженерія".

УДК 510.5(075.8)

ISBN 978-966-933-240-0

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ

АМ – арифметична множина
АП – арифметичний предикат
АОФ – алгоритмічно обчислювана функція
ЗРО – загальнорекурсивний оператор
ІАФ – істинна арифметична формула
ІМ – іменна множина
КРФ – квазіарна рекурсивна функція
МНР – машина з натуральнозначними регістрами
МНРО – МНР з оракулом
МТ – машина Тьюрінга
НА – нормальний алгоритм
НО – неперервний оператор
НТ – нерухома точка
ННТ – найменша нерухома точка
ОТ – операторний терм
ППА – примітивна програмна алгебра
ПРМ – примітивно-рекурсивна множина
ПРП – примітивно-рекурсивний предикат
ПРФ – примітивно-рекурсивна функція
РМ – рекурсивна множина
РО – рекурсивний оператор
РП – рекурсивний предикат
РПМ – рекурсивно-перелічна множина
РФ – рекурсивна функція
СП – система Поста
ТЧ – теза Чорча
ЧРО – частково рекурсивний оператор
ЧРП – частково рекурсивний предикат
ЧРФ – частково рекурсивна функція

ПЕРЕДМОВА

Теорія алгоритмів – це наука про загальні властивості алгоритмів. Вона визначає та досліджує формальні моделі алгоритмів і алгоритмічно обчислюваних функцій.

Поняття алгоритму належить до первинних, основоположних понять математики, таких, як поняття множини чи натурального числа; воно є концептуальною основою процесів оброблення інформації. Обчислювальні процеси алгоритмічного характеру, наприклад арифметичні дії над цілими числами, відомі людству із глибокої давнини, проте у явному вигляді поняття алгоритму сформувалося лише на початку XX ст.

Під *алгоритмом* зазвичай розуміють скінченну сукупність точно визначених правил для механічного розв'язування задач певного класу. Така сукупність правил задає обчислювальний процес, який називають *алгоритмічним*. Він починається із певного початкового даного (вибраного з деякої фіксованої для алгоритму множини початкових даних) і спрямований на отримання цілком визначеного цим початковим даним результату.

Для подальшого уточнення поняття алгоритму зазвичай виділяють такі його характерні властивості:

– *фінітність* – алгоритм є скінченним об'єктом, що є необхідною умовою його механічної реалізовності;

– *масовість* – початкові дані для алгоритму можна вибирати з певної множини даних (можливо, нескінченної). Це означає, що алгоритм призначено не для однієї конкретної задачі, а для класу однотипних задач;

– *дискретність* – розчленованість процесу виконання алгоритму на окремі кроки. Це означає, що алгоритмічний процес здійснюється в дискретному часі;

– *елементарність* – кожен крок алгоритму має бути простим, елементарним, можливість виконання його людиною або машиною не повинна викликати сумнівів;

– *результативність* – алгоритм має засоби, які дозволяють відбирати з даних, отриманих на певному кроці виконання, результативні дані, після чого алгоритм зупиниться;

– *детермінованість* – однозначність процесу виконання алгоритму. Це означає, що за заданих початкових даних кожне дане, отримане на певному (не початковому) кроці, однозначно визначається даними, отриманими на попередніх кроках.

За допомогою алгоритму кожний конкретний результат отримують за скінченну кількість кроків зі скінченної множини даних. Якщо для певних початкових даних процес виконання алгоритму завершується з отриманням результату, то кажуть, що до таких даних алгоритм *застосовний*. Однак у деяких ситуаціях процес виконання алгоритму для певних початкових даних триває необмежено. До таких початкових даних алгоритм *незастосовний*.

Для подальшого уточнення алгоритму треба вказати множину його початкових даних і множину даних, до яких належать результати. Ці множини називають також *множиною вхідних даних* і *множиною вихідних даних алгоритму*.

Алгоритм із множиною вхідних даних X та множиною вихідних даних Y називають *X-Y-алгоритмом*.

Область застосування X-Y-алгоритму $\aleph$ – це $D \subseteq X$ така, що до кожного $d \in D$ алгоритм $\aleph$ застосовний.

Якщо $\aleph$ видає результат b при роботі над вхідним даним d, то це позначаємо $b = \aleph(d)$.

Отже, кожний X-Y-алгоритм $\aleph$ визначає функцію $f: X \to Y$, узагалі кажучи, часткову, що задається так:

$$f(d) = \begin{cases} \aleph(d), & \text{якщо } d \in D, \\ \text{невизначене}, & \text{якщо } d \notin D. \end{cases}$$

У цьому випадку кажуть, що алгоритм $\aleph$ обчислює функцію f.

Функція *алгоритмічно обчислювана* (АОФ), якщо існує алгоритм, який її обчислює.

Множина L *алгоритмічно перелічна*, якщо L є множиною значень деякої АОФ, тобто існує алгоритм, який перелічує елементи множини L, і тільки їх.

Множина L *алгоритмічно розв'язна* відносно множини U, якщо існує алгоритм, що дозволяє для кожного $x \in U$ визначати, $x \in L$ чи $x \notin L$.

Неважко переконатись, що кожна алгоритмічно розв'язна непорожня множина алгоритмічно перелічна.

Відносні алгоритми. Найважливішим узагальненням поняття алгоритму є поняття *відносного алгоритму*, або *алгоритму з оракулом*. На деяких кроках відносний алгоритм може звертатися до певного зовнішнього щодо алгоритму об'єкта – оракула. Видані оракулом відповіді трактують як дані, вироблені на таких кроках звертання.

Кроки звертання до оракула, узагалі кажучи, неелементарні. Водночас поняття елементарності кроків є відносним. Можна припускати, що звичайний алгоритм весь час звертається до деякого оракула, але оракул відповідає на запитання настільки прості, що сам по собі він непомітний і його можна вважати внутрішньою частиною обчислювальних засобів алгоритму, а не зовнішнім щодо алгоритму об'єктом.

Функція *алгоритмічно обчислювана відносно оракула* $\wp$, якщо існує алгоритм з оракулом $\wp$, який її обчислює.

Подібно до цього вводяться поняття алгоритмічно розв'язної та алгоритмічно перелічної відносно оракула $\wp$ множин.

Теорія алгоритмів як окремий розділ математики, що вивчає загальні властивості алгоритмів, виникла у 30-ті роки XX століття. Необхідність уточнення поняття алгоритму стала неминучою після усвідомлення *неможливості* існування алгоритмів розв'язання низки проблем, передусім пов'язаних із арифметикою і математичною логікою.

Для доведення неіснування алгоритму треба мати його точне математичне визначення. Тому після сформування поняття алгоритму як нової та окремої сутності першочерговою стала задача знаходження адекватних формальних моделей алгоритму й дослідження їхніх властивостей.

Пошук формальних уточнень поняття алгоритму відбувався за такими напрямами:

1) опис точного математичного поняття алгоритмічної машини й обчислюваності на ній (*машина Тьюрінга*, *нормальні алгоритми*, *регістрові машини*);

2) опис певних класів функцій, для яких існує алгоритм знаходження функції за значеннями її аргументів, тобто уточнюється

не первинне поняття алгоритму, а похідне поняття АОФ (λ-*означувані функції* Чорча, *загально- й частково рекурсивні функції*, *системи Поста*).

У 1936 році А. Чорч і С. Кліні довели, що класи загальнорекурсивних і λ-означуваних функцій збігаються. На основі цього факту й аналізу ідей, які привели до вказаних понять, А. Чорч висунув знамениту тезу про збіг класу АОФ із класом загальнорекурсивних функцій, а С. Кліні узагальнив її для випадку часткових функцій. Доведений А. Тьюрінгом збіг класів частково рекурсивних функцій і функцій, обчислюваних на машинах Тьюрінга, став ще одним підтвердженням тези Чорча. Далі такі збіги було встановлено для всіх відомих формальних моделей АОФ. Тому є всі підстави вважати, що кожна з таких моделей дає строге математичне уточнення інтуїтивного поняття АОФ.

Розвиток інформаційних технологій зумовлює невпинне розширення сфери застосування теорії алгоритмів. Її методи й поняття успішно використовуються в багатьох сферах науки, де фігурують алгоритмічні проблеми (основи математики, теорія інформації, теорія керування, конструктивний аналіз, обчислювальна математика, теорія імовірності, економіка, лінгвістика тощо). Теорія алгоритмів є теоретичним фундаментом програмування та інформатики.

Пропонований посібник із теорії алгоритмів написано на основі підручника [5] і посібників [7, 11]. Матеріал, викладений у [11], перероблено й розширено низкою нових оригінальних прикладів і задач. У кінці кожного підрозділу наведено завдання для самоконтролю, вправи й задачі для самостійного розв'язання. Стисло викладений теоретичний матеріал дозволяє використовувати посібник як довідник із теорії алгоритмів.

Посібник узгоджено із програмою обов'язкової навчальної дисципліни "Теорія алгоритмів" для студентів освітнього рівня "бакалавр" освітньої програми "Інформатика" спеціальності "Комп'ютерні науки".

Основні поняття та визначення. Поняття, які не визначено в цьому посібнику, тлумачимо за підручником [5] і посібниками [7, 11]. Для полегшення сприйняття наведемо небхідні для подальшого викладу визначення і позначення.

Множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел будемо позначати, відповідно, N, Z, Q та R.

Булеан (множину всіх підмножин) множини A позначатимемо 2^A.

Словом у алфавіті T назвемо довільну скінченну послідовність символів із T.

Слово, яке не містить жодного символу, назвемо *порожнім словом*. Таке слово позначатимемо ε.

Якщо a – символ, то позначатимемо $a^0 = \varepsilon$, $a^{n+1} = a{\cdot}a^n$ для $n \geq 0$.

Множину всіх слів у алфавіті T позначатимемо T^*.

Мова (вербальна множина) в алфавіті T – це довільна $L \subseteq T^*$.

X-Y-алгоритм *вербальний*, якщо X та Y – вербальні множини.

Функція $f: X \to Y$ *вербальна*, якщо X та Y – вербальні множини.

Нехай f – однозначна часткова функція вигляду $f: A \to R$.

Якщо значення $f(a)$ визначене, то пишемо $f(a){\downarrow}$.

Якщо $f(a)$ визначене й дорівнює b, то пишемо $f(a){\downarrow} = b$, або $f(a){\downarrow}b$.

Якщо $f(a)$ невизначене, то пишемо $f(a){\uparrow}$.

Функція $f: A \to R$ *тотальна*, якщо $f(a){\downarrow}$ для всіх $a \in A$.

З кожною функцією $f: A \to R$ зв'яжемо множини *визначення* $D_f = \{a \in A \mid f(a){\downarrow}\}$ і *значень* $E_f = \{b \in E_f \mid f(a){\downarrow}b$ для деякого $a \in D_f\}$.

Графіком функції f назвемо множину $\{(a, f(a)) \mid a \in D_f\}$.

Функція $f: N \to N$ *строго монотонна*, якщо для всіх x, $y \in E_f$ з умови $x < y$ випливає $f(x) < f(y)$.

Нехай U –множина, яку трактуємо як універсум.

Характеристична функція множини $A \subseteq U$ – це функція $\chi_A: U \to \{0,1\}$ така: $\chi_A(a) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a \in A, \\ 0, & \text{якщо } a \notin A. \end{cases}$

Часткова характеристична функція множини $A \subseteq U$ – це функція $\chi_A^ч: U \to \{1\}$ така: $\chi_A^ч(a) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a \in A, \\ \text{невизначене}, & \text{якщо } a \notin A. \end{cases}$

Множини A та B назвемо *диз'юнктними*, якщо $A \cap B = \varnothing$.

Функцію вигляду $P: A \to \{T, F\}$ будемо називати *предикатом* на множині A.

Елементи T та F трактуватимемо як "істина" та "фальш".

Області *істинності* й *хибності* предиката P на множині A – це множини $T(P) = \{d\in A \mid P(d) = T\}$ та $F(P) = \{d\in A \mid P(d) = F\}$.

Далі, якщо інше не зазначено окремо, розглядатимемо *класичні* однозначні тотальні X-арні предикати. Кожний такий предикат P однозначно задається областю істинності $T(P)$.

Характеристичною функцією класичного предиката P на множині A назвемо функцію $\chi_P : A \to \{0, 1\}$ таку:

$$\chi_P(a) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } P(a) = T, \\ 0, \text{ якщо } P(a) = F. \end{cases}$$

Частковою характеристичною функцією класичного предиката P на множині A назвемо функцію $\chi_P^ч : A \to \{1\}$ таку:

$$\chi_P^ч(a) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } P(a) = T, \\ \text{невизначене, якщо } P(a) = F. \end{cases}$$

Нехай A та V – довільні множини, які трактуватимемо як множини предметних імен (змінних) і предметних значень.

V-A-іменна множина (V-A-ІМ) – це [5–8, 10] довільна однозначна функція вигляду $\delta : V \to A$.

ІМ зазвичай подаватимемо у вигляді $[v_1 \mapsto a_1, ..., v_n \mapsto a_n, ...]$.

Тут $v_i\in V$, $a_i\in A$, причому $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Множину всіх V-A-ІМ позначатимемо ${}^V\!A$.

Для ІМ уведемо традиційні теоретико-множинні операції $\cap$, $\cup$, $\setminus$. При цьому операція $\cup$ для ІМ – часткова.

Функцію $asn : {}^V\!A \to 2^V$ уведемо в такий спосіб:

$asn(\delta) = \{v\in V \mid v \mapsto a\in \delta$ для деякого $a\in A\}$.

Параметричні операції $\|X$ звуження ІМ за множиною $X \subseteq V$ та $\|_{-X}$ видалення компонент з іменами множини X задамо так:

$\delta\|X = \{v \mapsto a\in \delta \mid v\in X\}$;

$\delta\|_{-X} = [v \mapsto a\in \delta \mid v\notin X]$.

Операцію ∇ *накладки* ІМ η на ІМ δ задамо формулою

$\delta\nabla\eta = \eta\cup[v \mapsto a\in \delta \mid v\notin asn(\eta)] = \eta\cup(\delta\|_{-asn(\eta)})$.

Множину всіх ІМ $\delta\in {}^V\!A$ таких, що $asn(\delta) = X$, де $X \subseteq V$, будемо позначати A^X. Такі ІМ – тотальні однозначні функції із X в A.

ІМ δ скінченна, або фінітна, якщо $asn(\delta)$ скінченна.

Множину всіх фінітних V-A-ІМ позначатимемо ${}^{V}A_F$.

Функції вигляду $f : {}^{V}A \to R$ називатимемо [5–8] квазіарними.

Функцію вигляду $f : {}^{V}A \to A$ назвемо квазіарною функцією на A.

Ураховуючи фінітність алгоритмів, обмежимось розглядом квазіарних функцій вигляду $f : {}^{V}A_F \to R$ – фінарних функцій.

Фінарні функції на A мають вигляд $f : {}^{V}A_F \to A$.

Множину таких функцій позначатимемо Fn^A.

Далі під квазіарними будемо розуміти саме фінарні функції.

Функцію вигляду $f : A^X \to R$ називатимемо X-арною функцією на A.

X-арну функцію традиційно називають функцією від змінних множини X. Наприклад, $\{x, y, z\}$-арна функція – це функція від змінних x, y, z.

Традиційні n-арні функції на A, тобто функції вигляду $f : A^n \to R$, можна трактувати як $\{1,..., n\}$-арні функції на A. Тому $\{1,..., n\}$-арні функції традиційно називають n-арними.

Для n-арних функцій за умовчанням вважатимемо, що x – це x_1, y – це x_2, z – це x_3. Замість $y_1,\ldots,y_n$ також скорочено писатимемо $\bar{y}$.

Кожну X-квазіарну функцію f на A можна трактувати як Y-квазіарну, де $Y \supseteq X$ та всі імена із $Y \setminus X$ неістотні для f. Тоді для кожного $d \in {}^{Y}A$ матимемо $f(d) = f(d \,\|\, X)$.

Нехай $\boldsymbol{F}$ – множина функцій, заданих на певній множині D.

Функцію вигляду $\boldsymbol{F}^n \to \boldsymbol{F}$ називатимемо *n-арною композицією*, або *n-арною операцією*.

Традиційними композиціями (логічними операціями) над предикатами є логічні зв'язки диз'юнкція $\vee$, кон'юнкція &, заперечення $\neg$, імплікація $\to$, еквіваленція $\leftrightarrow$, а також композиції квантифікації (квантори) $\exists x$ та $\forall x$.

Важливі обчислювані композиції квазіарних функцій розглянемо в подальшому викладі.

1. ФОРМАЛЬНІ МОДЕЛІ АЛГОРИТМІВ ТА АЛГОРИТМІЧНО ОБЧИСЛЮВАНИХ ФУНКЦІЙ

У цьому розділі розглянемо найпоширеніші формальні моделі алгоритмічних машин і алгоритмічно обчислюваних функцій.

1.1. Машини з натуральнозначними регістрами

Регістрові машини [13] є ідеалізованими моделями комп'ютера. Різновидністю регістрових машин є машини з натуральнозначними регістрами (МНР). МНР складається із сукупності регістрів, вмістом яких є натуральні числа. Кількість регістрів МНР наперед не обмежена.

Регістри нумеруємо (іменуємо) натуральними числами, починаючи з 0. Позначаємо їх $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$

Вміст регістра R_n позначимо $'R_n$.

Послідовність $('R_0, 'R_1, \ldots, 'R_n, \ldots)$ вмістів регістрів МНР назвемо конфігурацією МНР.

МНР може змінити вміст регістрів згідно з виконуваною нею командою. Скінченний список команд утворює *програму МНР*, або *МНР-програму*.

Формальними моделями алгоритмів є саме *МНР-програми*, а поняття МНР потрібне для опису функціонування МНР-програм.

Команди програми послідовно нумеруємо (іменуємо) натуральними числами, починаючи з 1.

Номер команди у програмі називаємо *адресою* команди.

МНР-програму з командами $I_1, I_2, \ldots, I_k$ позначаємо $I_1 I_2 \ldots I_k$.

Довжину (кількість команд) МНР-програми P позначаємо $|P|$.

Команди МНР бувають чотирьох типів.

Тип 1. Обнулення n-го регістра $Z(n)$: $'R_n := 0$.

Тип 2. Збільшення вмісту n-го регістра на 1 $S(n)$: $'R_n := {'R_n} + 1$.

Тип 3. Копіювання вмісту регістра $T(m, n)$: $'R_n := R_m$ (при цьому $'R_m$ не змінюється).

Команди типів 1–3 називають арифметичними.

Після виконання арифметичної команди МНР має виконати наступну за списком команду програми.

Тип 4. Умовний перехід $J(m, n, q)$: якщо $'R_n = 'R_m$, то виконувати q-у команду, інакше виконувати наступну за списком.

Число q у команді $J(m, n, q)$ назвемо *адресою переходу*.

Виконання однієї команди МНР назвемо *кроком* МНР.

Виконання програми МНР починає, перебуваючи в деякій початковій конфігурації, з виконання першої за списком команди. Наступна для виконання команда програми визначається так, як описано вище. Виконання програми завершується (програма зупиняється), якщо наступна для виконання команда відсутня (тобто номер наступної команди перевищує номер останньої команди програми).

Конфігурація МНР у момент завершення виконання програми називається фінальною, вона визначає результат роботи МНР-програми над даною початковою конфігурацією.

Якщо МНР-програма P при роботі над початковою конфігурацією $(a_0, a_1, ...)$ ніколи не зупиняється, то це позначаємо $P(a_0, a_1, ...)\uparrow$, якщо ж коли-небудь зупиниться – то $P(a_0, a_1, ...)\downarrow$.

Якщо МНР-програма P при роботі над початковою конфігурацією $(a_0, a_1, ...)$ зупиняється із фінальною конфігурацією $(b_0, b_1, ...)$, то це позначаємо $P(a_0, a_1, ...)\downarrow(b_0, b_1, ...)$.

Кожна МНР-програма визначає однозначне відображення на множині послідовностей натуральних чисел. У процесі виконання МНР-програма використовує тільки скінченну множину регістрів, усі вони явно вказані у МНР-програмі. Тому для МНР-програм обмежуємося розглядом відображень *скінченних* послідовностей натуральних чисел. Це означає, що ми розглядаємо тільки скінченні конфігурації. Такі конфігурації позначаємо $(a_0, a_1,..., a_n)$.

МНР-програми P та Q *еквівалентні*, якщо вони визначають однакові відображення послідовностей натуральних чисел. Це означає, що при роботі над однаковими початковими конфігураціями вони або обидві зупиняються з однаковими фінальними конфігураціями, або обидві не зупиняються.

МНР-програму P назвемо *стандартною*, якщо в P для кожної команди вигляду $J(m, n, q)$ виконується умова $q \le |P| + 1$.

Конкатенацією стандартних МНР-програм $P = I_1 I_2 \dots I_k$ та $Q = I_1 I_2 \dots I_m$ назвемо стандартну МНР-програму $I_1 \dots I_k I_{k+1} \dots I_{k+m}$, де команди $I_{k+1}, \dots, I_{k+m}$ – це команди програми Q, у яких кожна команда вигляду $J(m, n, q)$ замінена командою $J(m, n, q+k)$.

МНР-обчислюваність. МНР-програма P *обчислює* часткову n-арну функцію $f : N^n \to N$, якщо

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = b \Leftrightarrow P(a_1, a_2, \dots, a_n)\downarrow(b, \dots).$$

Замість $P(a_1, a_2, \dots)\downarrow(b, \dots)$ надалі будемо писати $P(a_1, a_2, \dots)\downarrow b$.

Це визначення обчислюваності еквівалентне такому:

– за умови $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D_f$ та $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = b$ маємо $P(a_1, a_2, \dots, a_n)\downarrow b$;

– за умови $(a_1, a_2, \dots, a_n) \notin D_f$ маємо $P(a_1, a_2, \dots, a_n)\uparrow$.

Обчислюваність функції МНР-програмою означає, що значення аргументів функції послідовно розміщуються в початкових регістрах, починаючи з R_0, значення функції знімається з регістра R_0.

Функцію $f : N^n \to N$ називають *МНР-обчислюваною,* якщо існує МНР-програма, яка обчислює цю функцію.

Кожна МНР-програма обчислює нескінченну кількість функцій натуральних аргументів і значень, але, фіксуючи наперед арність функцій (це кількість компонент початкових конфігурацій), маємо: кожна МНР-програма обчислює *єдину* функцію заданої арності.

Кожну функцію на N можна трактувати як предикат, трактуючи певним чином істиннісні значення T та F. При традиційній інтерпретації 1 та 0 як T та F, відповідно, під предикатом фактично розуміємо його характеристичну функцію.

Розглянемо приклади МНР-програм.

Приклад 1.1.1. МНР-програма для всюди невизначеної функції:

1) $J(0,0,1)$

Приклад 1.1.2. МНР-програма для функції $f(x) = sg(x)$:

1) $J(0,1,4)$
2) $Z(0)$
3) $S(0)$

Приклад 1.1.3. МНР-програма для функції $f(x) = nsg(x)$:

1) $J(0,1,4)$
2) $Z(0)$
3) $J(0,0,5)$
4) $S(0)$

Приклад 1.1.4. МНР-програма для предиката "$x = y$":

1) $J(0,1,3)$
2) $J(0,0,4)$
3) $S(2)$
4) $T(2,0)$

Приклад 1.1.5. МНР-програма для функції $x + y$:

1) $J(1,2,5)$
2) $S(0)$
3) $S(2)$
4) $J(0,0,1)$

Приклад 1.1.6. МНР-програма для функції $f(x) = 3x$:

1) $T(0,1)$
2) $J(1,2,7)$
3) $S(0)$
4) $S(0)$
5) $S(2)$
6) $J(0,0,2)$

Приклад 1.1.7. МНР-програма для функції $x - y$:

1) $J(0,1,5)$
2) $S(1)$
3) $S(2)$
4) $J(0,0,1)$
5) $T(2,0)$

Приклад 1.1.8. МНР-програма для функції $f(x) = x/2$:

1) $J(0,2,6)$
2) $S(2)$

3) $S(2)$
4) $S(1)$
5) $J(0,0,1)$
6) $T(1,0)$

Приклад 1.1.9. МНР-програма для функції $f(x) = [x/2]$:
1) $J(0,2,7)$
2) $S(2)$
3) $J(0,2,7)$
4) $S(2)$
5) $S(1)$
6) $J(0,0,1)$
7) $T(1,0)$

Приклад 1.1.10. МНР-програма для функції $f(x, y) = \max(x, y)$:
1) $J(0,2,5)$
2) $J(1,2,6)$
3) $S(2)$
4) $J(0,0,1)$
5) $T(1,0)$

Приклад 1.1.11. МНР-програма для функції $f(x, y) = \min(x, y)$:
1) $J(0,2,5)$
2) $J(1,2,5)$
3) $S(2)$
4) $J(0,0,1)$
5) $T(2,0)$

Приклад 1.1.12. МНР-програма для функції $f(x, y) = x \dot{-} y$:
1) $J(0,1,7)$
2) $J(0,2,6)$
3) $S(1)$
4) $S(2)$
5) $J(0,0,1)$
6) $Z(2)$
7) $T(2,0)$

Приклад 1.1.13. МНР-програма для $f(x, y, z) = x + \min(y, z)$:
1) $J(1,3,6)$
2) $J(2,3,6)$
3) $S(3)$

4) $S(0)$
5) $J(0,0,1)$

Приклад 1.1.14. МНР-програма для $f(x,y,z) = \max(x+y,z)$:

1) $J(1,3,5)$
2) $S(3)$
3) $S(0)$
4) $J(0,0,1)$
5) $J(0,4,9)$
6) $J(2,4,10)$
7) $S(4)$
8) $J(0,0,5)$
9) $T(2,0)$

Приклад 1.1.15. МНР-програма для функції $f(x,y) = x{\cdot}y$:

1) $J(3,1,9)$
2) $J(0,2,6)$
3) $S(2)$
4) $S(4)$
5) $J(0,0,2)$
6) $Z(2)$
7) $S(3)$
8) $J(0,0,1)$
9) $T(4,0)$

Завдання для самоконтролю

1. Поясніть, що таке МНР.
2. Поясніть, що таке конфігурація МНР.
4. Опишіть команди МНР.
3. Поясніть, що таке програма МНР.
5. Опишіть, як виконується програма МНР.
6. Дайте визначення еквівалентних МНР-програм.
7. Дайте визначення стандартної МНР-програми.
8. Поясніть, як задається конкатенація стандартних МНР-програм.
9. Опишіть, як визначається обчислюваність функції $f : N^n \to N$ за допомогою МНР-програми P.
10. Поясніть, що таке МНР-обчислювана функція.

Вправи

1. Наведіть МНР-програми для таких функцій:

1) $f(x, y) = 3x + y + 1$;
2) $f(x, y) = x + 2y + 2$;
3) $f(x) = (x + 1)/3$;
4) $f(x) = [x/3]$;
5) $f(x, y) = 2x - y$;
6) $f(x, y) = x - 2y$;
7) $f(x, y) = 3y - x$;
8) $f(x, y, z) = x - (y + z)$;
9) $f(x, y, z) = x - y + z$;
10) $f(x, y, z) = x - 2z + y$;
11) $f(x, y) = sg(x + y)$;
12) $f(x, y) = nsg(x + y)$;
13) $f(x, y) = sg(x \cdot y)$;
14) $f(x, y, z) = \mathrm{nsg}(x + y + z)$;
15) $f(x, y) = \max(x, 2y)$;
16) $f(x, y) = \max(2x, y)$;
17) $f(x, y, z) = \max(x, y) + z$;
18) $f(x, y, z) = x - \min(y, z)$;
19) $f(x, y, z) = \min(x + y, z)$;
20) $f(x, y, z) = \max(x, y - z)$;
21) $f(x, y) = \max(x, 3y) + 2x$;
22) $f(x, y) = 3x - \min(2y, x)$;
23) $f(x) = x!$;
24) $f(x, y) = x^y$.

2. Наведіть МНР-програми для предикатів:

1) "x – непарне число";
2) "x – парне число";
3) "$x \geq y$";
4) "$x \neq y$";
5) "$x > y$";
6) "$x < y$".

3. Доведіть, що для кожної МНР-програми можна побудувати еквівалентну їй МНР-програму без команд $T(m, n)$ (елімінація команд $T(m, n)$).

4. Дайте визначення регістрової машини з цілочисловими регістрами (МЦР) та МЦР-програм.

5. Розширте поняття МНР-обчислюваності на функції, задані на множині Z. Визначте МЦР-обчислюваність так, щоб вона була еквівалентною МНР-обчислюваності на Z.

1.2. Машини Тьюрінга

А. М. Тьюрінг у 1936 році запропонував клас абстрактних обчислювальних машин, які задають алгоритми, що можуть бути виконані людиною з олівцем і достатнім запасом паперу. Відомо багато різних варіантів машин Тьюрінга (див., напр., [2, 3, 9, 12, 13, 15, 16, 19]) та їхніх узагальнень (машини із вхідною стрічкою, з еластичною стрічкою, багатострічкові машини тощо).

Під *машиною Тьюрінга* (МТ) далі будемо розуміти впорядковану п'ятірку (Q, T, δ, q_0, F), де:

– Q – скінченна множина внутрішніх станів;

– T – скінченний алфавіт символів стрічки, причому T містить спеціальний символ порожньої клітини λ;

– $\delta : Q\times T \to Q\times T\times \{R, L, \varepsilon\}$ – функція переходів;

– $q_0\in Q$ – початковий стан;

– $F\subseteq Q$ – множина фінальних станів.

Функцію переходів зазвичай задають скінченною множиною команд одного із трьох типів (тут $p, q\in Q$; $a, b\in T$; $\to\notin Q\cup T$):

$qa\to pbR$,

$qa\to pbL$,

$qa\to pb$.

При цьому не для всіх пар $(q, a)\in Q\times T$ явно вказується команда з лівою частиною qa. Це означає, що функція δ не є тотальною. Часто функцію δ доцільно вважати тотальною, тоді для всіх пар $(q, a)\notin D_\delta$ неявно, не додаючи команди вигляду $qa\to qa$ до множини команд, вводимо довизначення $\delta(q, a) = (q, a, \varepsilon)$.

Неформально МТ складається зі скінченної пам'яті, розділеної на клітини нескінченної з обох боків стрічки й голівки читання-запису. У кожній клітині стрічки міститься єдиний символ з T, причому в кожен даний момент стрічка містить скінченну кількість символів, відмінних від символу λ. Голівка читання-запису в кожен даний момент оглядає єдину клітину стрічки.

Якщо МТ перебуває у стані q та голівка читає символ a, то:

– при виконанні команди $qa \rightarrow pbR$ переходить у стан p, замість символу a записує на стрічці символ b та зміщує голівку на 1 клітину праворуч;

– при виконанні команди $qa \rightarrow pbL$ переходить у стан p, замість a записує на стрічці символ b та зміщує голівку на 1 клітину ліворуч;

– при виконанні команди $qa \rightarrow pb$ переходить у стан p, замість a записує на стрічці символ b та залишає голівку на місці.

Конфігурація, або *повний стан МТ*, – це слово вигляду xqy, де $x, y \in T^*$, $q \in Q$.

Неформально це означає, що на стрічці записано слово xy, тобто ліворуч і праворуч від xy можуть бути тільки символи λ, МТ перебуває у стані q, голівка читає 1-й символ підслова y.

Конфігурацію вигляду q_0x, де перший і останній символи слова x відмінні від λ, називають *початковою*.

Конфігурацію вигляду xqy, де $q \in F$, називають *фінальною*.

Після переходу до фінального стану, тобто фінальної конфігурації, МТ зупиняється.

Нехай МТ перебуває у конфігурації $xcqay$, де $x, y \in T^*$, $a, c \in T$, $q \in Q$. Опишемо конфігурацію МТ після виконання певної команди.

Після виконання $qa \rightarrow pbR$ МТ перейде до конфігурації $xcbpy$.

Після виконання $qa \rightarrow pbL$ МТ перейде до конфігурації $xpcby$.

Після виконання $qa \rightarrow pb$ МТ перейде до конфігурації $xcpby$.

Кожна МТ задає деяке вербальне відображення (множини слів у множину слів) $T^* \rightarrow T^*$ у такий спосіб.

МТ M переводить слово $u \in T^*$ у слово $v \in T^*$, якщо вона з початкової конфігурації q_0u переходить до фінальної xqy, де $q \in F$, $xy = \alpha v \beta$, $\alpha, \beta \in \{\lambda\}^*$. При цьому перший і останній символи слова v відмінні від λ, або $v = \varepsilon$.

Те, що МТ M переводить слово u у слово v, записуємо $v = M(u)$.

Якщо МТ M, починаючи роботу з початкової конфігурації q_0u, ніколи не зупиняється, то кажуть, що M *зациклюється* при роботі над словом u. Тоді $M(u)$ невизначене.

МТ M_1 та M_2 *еквівалентні*, якщо вони задають однакове вербальне відображення.

МТ називається *детермінованою*, якщо функція δ однозначна, інакше МТ називається *недетермінованою*.

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що F складається з єдиного фінального стану q^*.

Справді, нехай $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$. Візьмемо $q^* \notin Q$. Тоді МТ $M' = (Q \cup \{q^*\}, T, \delta', q_0, \{q^*\})$, де $\delta' = \delta \cup \{qa \to q^*a \mid q \in F, a \in T\}$, еквівалентна початковій машині M.

Надалі розглядаємо тільки детерміновані МТ з єдиним фінальним станом; такі МТ позначатимемо (Q, T, δ, q_0, q^*).

Конкретні МТ задаємо, указуючи множину команд.

При цьому початковий стан позначаємо q_0, фінальний – q^*.

МТ-обчислюваність. Обчислюваність машинами Тьюрінга часткових n-арних функцій на N задаємо так:

МТ M *обчислює* функцію $f : N^k \to N$, якщо для кожного слова вигляду $|^{x_1}\#|^{x_2}\#...\#|^{x_k}$ маємо:

– $M(|^{x_1}\#|^{x_2}\#...\#|^{x_k}) = |^{f(x_1,...,x_k)}$ у випадку $(x_1,..., x_k) \in D_f$;

– $M(|^{x_1}\#|^{x_2}\#...\#|^{x_k})$ невизначене у випадку $(x_1,..., x_k) \notin D_f$.

Функція *обчислювана за Тьюрінгом*, або *МТ-обчислювана*, якщо існує МТ, яка її обчислює.

Кожна МТ обчислює нескінченну кількість функцій натуральних аргументів і значень, але, зафіксувавши наперед арність функцій, маємо: кожна МТ обчислює *єдину* функцію заданої арності.

Розглянемо приклади МТ.

Приклад 1.2.1. МТ, яка обчислює функцію $f(x) = sg(x)$:

$q_0\lambda \to q^*\lambda$
$q_0| \to q_1|R$
$q_1| \to q_1\lambda R$
$q_1\lambda \to q^*\lambda$

Приклад 1.2.2. МТ, яка обчислює функцію $x+y$:

$q_0| \to q_1\lambda R$
$q_1| \to q_1\,|\,R$
$q_1\# \to q^*|$
$q_0\# \to q^*\lambda$

Приклад 1.2.3. Ще одна МТ, яка обчислює функцію $x+y$:

$q_0\,| \to q_0\,|\,R$
$q_0\,\# \to q_0\,|\,R$
$q_0\lambda \to q_1\lambda L$
$q_1\,| \to q^*\lambda$

Зауважимо, що ця МТ обчислює також функції $x-1$, $x+y+z+1$, $x_1+\ldots+x_n+n-2$, …

Приклад 1.2.4. МТ, яка обчислює функцію $x-y$:

$q_0| \to q_1\lambda R$
$q_1| \to q_1|R$
$q_1\# \to q_1\# R$
$q_1\lambda \to q_2\lambda L$
$q_2| \to q_3\lambda L$
$q_3| \to q_3|L$
$q_3\# \to q_3\# L$
$q_3\lambda \to q_0\lambda R$
$q_2\# \to q^*|$
$q_0\# \to q_4\lambda R$
$q_4\lambda \to q^*\lambda$

Приклад 1.2.5. МТ, яка обчислює предикат "x парне":

$q_0| \to q_1\lambda R$
$q_1| \to q_0\lambda R$
$q_0\lambda \to q^*|$
$q_1\lambda \to q^*\lambda$

Приклад 1.2.6. МТ, що обчислює предикат "x = 2":

$q_0\lambda \to q^*\lambda$ /* $x=0$ */
$q_0\,| \to q_1\lambda R$ /* $x \geq 1$ */
$q_1\lambda \to q^*\lambda$ /* $x=1$ */

$q_1 | \to q_2\lambda R$ /* $x \geq 2$ */

$q_2\lambda \to q^*|$ /* $x = 2$ */

$q_2 | \to q_3\lambda R$

$q_3 | \to q_3\lambda R$

$q_3\lambda \to q^*\lambda$

Приклад 1.2.7. МТ, що обчислює функцію $f(x, y) = x \dot{-} y$:

$q_0 | \to q_1\lambda R$

$q_1 | \to q_1 | R$

$q_1\# \to q_1\# R$

$q_1\lambda \to q_2\lambda L$

$q_2 | \to q_3\lambda L$

$q_3 | \to q_3 | L$

$q_3\# \to q_3 \# L$

$q_3\lambda \to q_0\lambda R$

$q_2 \# \to q^*|$

$q_0 \# \to q_4\lambda R$

$q_4 | \to q_4\lambda R$ /* єдина відмінність від МТ для $f(x, y) = x - y$ */

$q_4\lambda \to q^*\lambda$

Приклад 1.2.8. МТ, що обчислює функцію $f(x, y) = x + 2y$:

$q_0 | \to q_0 | R$

$q_0\# \to q_0\# R$

$q_0\lambda \to q_1\lambda L$

$q_1 | \to q_2\lambda R$

$q_2 | \to q_2 | R$

$q_2\lambda \to q_3 | L$

$q_3 | \to q_3 | L$

$q_3\lambda \to q_1 | L$

$q_1 \# \to q_4 | L$

$q_4 | \to q_4 | L$

$q_4\lambda \to q_5\lambda R$

$q_5 | \to q^*\lambda$

МТ задає таку зміну вмісту стрічки:

$$|^x \# |^y \Rightarrow |^x \# |^y |^y \Rightarrow |^x | |^y |^y \Rightarrow |^{x-1} | |^y |^y$$

Приклад 1.2.9. МТ, що обчислює функцію $f(x) = [x/3]$:

$q_0\lambda \to q^*\lambda$

$q_0 | \to q_1\lambda R$

$q_1 | \to q_2\lambda R$

$q_2 | \to q_2 | R$

$q_2\lambda \to q_3\lambda L$

$q_2\, a \to q_3\, aL$

$q_3 | \to q_4 aL$

$q_4 | \to q_4 | L$

$q_4\lambda \to q_0\lambda R$

$q_1\, a \to q_0\, a$

$q_1\, \lambda \to q_0\, \lambda$

$q_3\, \lambda \to q_0\, \lambda R$

$q_0 a \to q_0 | R$

МТ задає таку зміну вмісту стрічки:

$$|^x \Rightarrow |^{x-2} \Rightarrow |^{x-3}a \Rightarrow |^{x-3k}a^k \Rightarrow |^m a^{[x/3]},\ 0\le m\le 2 \Rightarrow a^{[x/3]} \Rightarrow |^{[x/3]}$$

Приклад 1.2.10. МТ, яка обчислює функцію $f(x, y) = x\cdot y$:

$q_0\# \to q_1\lambda R$ /* x=0 */

$q_1| \to q_1\lambda R$

$q_1\lambda \to q^*\lambda$

$q_1 a \to q_1|R$ /* $a^{xy} \Rightarrow |^{xy}$ */

$q_0| \to q_2\lambda R$ /* цикл x */

$q_2| \to q_2|R$

$q_2\# \to q_3\#R$

$q_3| \to q_4\lambda R$ /* цикл y */

$q_4| \to q_4|R$

$q_4 a \to q_4\, aR$

$q_4\lambda \to q_5\, aL$

$q_5| \to q_5|L$

$q_5 a \to q_5\, aL$

$q_5\lambda \to q_3|R$

$q_3 a \to q_6\, aL$

$q_6| \to q_6|L$

$q_6\# \to q_6\, \#L$

$q_6\lambda \to q_0\lambda R$

$q_3\lambda \to q_7\lambda L$ /* y=0 */

$q_7\# \to q_7\lambda L$

$q_7| \to q_7\lambda L$

$q_7\lambda \to q^*\lambda$

Приклад 1.2.11. МТ, що обчислює функцію $f(x) = 2^x$:

$q_0\,|\to q_0\,|\,R$

$q_0\lambda \to q_1aL$

$q_1\,|\to q_1\,|\,L$

$q_1\lambda \to q_2\lambda R$

$q_2\,|\to q_3\lambda R$

$q_3\,|\to q_3\,|\,R$

$q_3a \to q_3\,aR$

$q_3\lambda \to q_4\lambda L$

$q_4a \to q_5\lambda R$

$q_5a \to q_5\,aR$

$q_5\lambda \to q_6\,aL$

$q_6a \to q_6\,aL$

$q_6\lambda \to q_4aL$

$q_4| \to q_4\,|\,L$

$q_4\lambda \to q_2\lambda R$

$q_2a \to q_2\,|\,R$

$q_2\lambda \to q^*\lambda$

Приклад 1.2.12. МТ, яка кожне слово $x\in T^*$ переводить у слово $x\#x$ (тут $\#\notin T$):

$q_0\,t \to q_0\,tR$ для всіх $t\in T$

$q_0\lambda \to q_1\#L$

$q_1\,t \to q_1\,tL$ для всіх $t\in T$

$q_1\lambda \to q_2\lambda R$

$q_2\,t \to q_t\,\lambda R$ для всіх $t\in T$

$q_t\,p \to q_t\,pR$ для всіх $t\in T$, $p\in T\cup\{\#\}$

$q_t\,\lambda \to q'_t\,tL$ для всіх $t\in T$

$q'_t\,p \to q'_t\,pL$ для всіх $t\in T$, $p\in T\cup\{\#\}$

$q'_t\,\lambda \to q_2tR$ для всіх $t\in T$

$q_2\# \to q^*\#$

МТ задає таку зміну вмісту стрічки:

$$x \Rightarrow x\# \Rightarrow x\#x$$

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення МТ.
2. Поясніть, що таке детермінована й недетермінована МТ.
3. Опишіть команди МТ.
4. Опишіть конфігурацію МТ.
5. Поясніть, що таке початкова конфігурація МТ.
6. Опишіть фінальну конфігурацію МТ.
7. Опишіть, як змінюється конфігурація МТ при виконанні команди відповідного типу.
8. Опишіть, як МТ задає вербальне відображення.
9. Дайте визначення еквівалентних МТ.
10. Опишіть, як визначається обчислюваність функції $f\colon N^n \to N$ за допомогою МТ.
11. Поясніть, що таке МТ-обчислювана функція.

Вправи

1. Наведіть приклад МТ, що задає таке відображення:

   1) кожне слово $x \in T^*$ переводить у слово $xx^{\boldsymbol{R}}$;
   2) кожне слово $x \in T^*$ переводить у слово xx;
   3) кожне слово $x \in T^*$ переводить у слово $x^{\boldsymbol{R}}$.

Тут x^R – дзеркальне відображення слова x.

2. Наведіть приклади МТ для таких функцій:

   1) $f(x) = sg(x/2)$;
   2) $f(x) = nsg[x/2]$;
   3) $f(x, y) = sg(x+y)$;
   4) $f(x, y) = nsg(x \cdot y)$;
   5) $f(x) = x/3$;
   6) $f(x) = [x/2]$;
   7) $f(x, y) = (x+1) - y$;
   8) $f(x, y) = (x+2) \dot{-} y$;
   9) $f(x, y) = x \dot{-} (y+1)$;
   10) $f(x, y) = |x-(y+2)|$;
   11) $f(x, y) = 2x+y$;
   12) $f(x, y) = x-2y$;
   13) $f(x, y) = 3x+2y$;

14) $f(x, y, z) = 2x + y + 3z$;
15) $f(x, y, z) = (x + y) - z$;
16) $f(x, y, z) = 2x - (y + z)$;
17) $f(x, y) = \max(x, y)$;
18) $f(x, y) = \min(x, y)$;
19) $f(x, y) = [x/y]$;
20) $f(x, y) = \mathrm{mod}(x, y)$;
21) $f(x) = x!$;
22) $f(x, y) = x^y$.

3. Наведіть приклади МТ для таких предикатів:
   1) "x непарне";
   2) "x кратне 3";
   3) "$x > y$";
   4) "$x < y$";
   5) "$x \geq y$";
   6) "$x \neq y$";
   7) "$x = 1$";
   8) "$x \neq 3$".
4. Дізнайтесь (з літератури, інтернету) про різновиди МТ.

1.3. Нормальні алгоритми Маркова

Нормальні алгоритми були запропоновані А. Марковим у 1956 році, вони фактично базуються на напівтуевських системах (див. наступний підрозділ). Під *нормальним алгоритмом* (НА) *в алфавіті T* розуміють упорядковану послідовність продукцій (правил) вигляду $\alpha \to \beta$ або $\alpha \to \cdot \beta$, де $\alpha, \beta \in T^*$ та $\cdot \notin T$, $\to \notin T$.

Продукції вигляду $\alpha \to \cdot \beta$ називають *фінальними*.

НА в алфавіті T задає деяке вербальне відображення $T^* \to T^*$.

Слово, яке є результатом обробки вхідного слова x нормальним алгоритмом $\aleph$, позначимо $\aleph(x)$.

Обробка слова x нормальним алгоритмом $\aleph$ здійснюється поетапно у такий спосіб.

Візьмемо $x_0 = x$ і покладемо, що x_0 отримано з x після 0 етапів.

Нехай слово x_n отримано зі слова x після n етапів. Тоді $(n+1)$-й етап виконується так.

Шукаємо першу за порядком продукцію $\alpha \to \beta$ або $\alpha \to \cdot \beta$ таку, що α – підслово x_n. Застосуємо цю продукцію до x_n, тобто замінимо в x_n найлівіше входження α на β. Отримане слово позначимо x_{n+1}.

Якщо застосована на $(n+1)$-му етапі продукція не фінальна, тобто $\alpha \to \beta$, то переходимо до $(n+2)$-го етапу.

Якщо ця продукція фінальна, тобто $\alpha \to \cdot \beta$, то після її застосування $\aleph$ зупиняється і $\aleph(x) = x_{n+1}$.

Якщо ж на $(n+1)$-му етапі жодна продукція $\aleph$ не застосовна до x_{n+1}, тобто в $\aleph$ немає продукції, ліва частина якої – підслово слова x_{n+1}, то $\aleph$ зупиняється і $\aleph(x) = x_n$.

Якщо у процесі обробки слова x НА $\aleph$ не зупиняється на жодному етапі, то вважаємо, що $\aleph(x)$ невизначене.

Нормальний алгоритм називають *нормальним алгоритмом над алфавітом* T, якщо він є нормальним алгоритмом у деякому розширенні $T' \supseteq T$.

НА над T задає певне відображення $T^* \to T^*$, використовуючи в процесі обробки слів допоміжні символи поза алфавітом T.

Зупинка НА $\aleph$ над T при роботі над словом $x \in T^*$ *результативна,* якщо вона відбулась на слові $y \in T^*$. В інших випадках вважаємо, що результат роботи $\aleph$ над словом x невизначений.

НА $\aleph$ і $\Re$ *еквівалентні відносно алфавіту* T, якщо для всіх $x \in T^*$ $\aleph(x)$ та $\Re(x)$ одночасно визначені або невизначені, причому у випадку визначеності $\aleph(x) = \Re(x)$.

Для кожного НА над алфавітом T існує [18] еквівалентний йому відносно T НА в алфавіті $T \cup \{s\}$ з єдиним допоміжним символом $s \notin T$.

Вербальне відображення, яке кожне слово $x \in T^*$ переводить у слово xx, не може бути заданим жодним НА в алфавіті Т.

НА-обчислюваність. Обчислюваність нормальними алгоритмами часткових n-арних функцій на N задаємо так.

НА $\aleph$ *обчислює* функцію $f : N^k \to N$, якщо для кожного слова вигляду $|^{x_1} \#|^{x_2} \#\ldots\#|^{x_k}$ маємо:

– $\aleph(|^{x_1} \#|^{x_2} \#\ldots\#|^{x_k}) = |^{f(x_1,\ldots,x_k)}$ у випадку $(x_1,\ldots,x_k) \in D_f$;

– $\aleph(|^{x_1} \#|^{x_2} \#\ldots\#|^{x_k})$ невизначене у випадку $(x_1,\ldots,x_k) \notin D_f$.

Функція *обчислювана за Марковим*, або *НА-обчислювана*, якщо існує НА, який її обчислює.

Кожний НА обчислює нескінченну кількість функцій натуральних аргументів і значень; водночас кожний НА обчислює єдину функцію заданої арності.

Розглянемо приклади НА.

Приклад 1.3.1. НА для функції $f(x, y) = x + y$:

$\# \to \varepsilon$

Приклад 1.3.2. НА для функції $f(x, y) = x - y$:

$|\#| \to \#$
$\#| \to \#|$
$\# \to \varepsilon$

Приклад 1.3.3. НА для функції $f(x) = x/2$:

$\#|| \to |\#$
$\#| \to \#|$
$\# \to \cdot\varepsilon$
$\varepsilon \to \#$

Приклад 1.3.4.

1) НА дописує фіксоване слово α в початок вхідного слова:

$\varepsilon \to \cdot\alpha$

2) НА дописує фіксоване слово α в кінець вхідного слова:

$\#a \to a\#,\ a \in T$
$\# \to \cdot\alpha$
$\varepsilon \to \#$

3) НА стирає перший символ вхідного слова:

$\#a \to \cdot\varepsilon,\ a \in T$
$\varepsilon \to \#$

4) НА стирає останній символ вхідного слова:

$\#a \to a\#,\ a \in T$
$a\# \to \cdot\varepsilon,\ a \in T$
$\varepsilon \to \#$

Наступні два приклади задають функції 2^x та $x \cdot y$ в розширеному кодуванні.

Приклад 1.3.5. НА, який кожне слово a^x переводить у d^{2^x} :

$$da \to add$$
$$ad \to d$$
$$d \to \cdot d$$
$$\varepsilon \to d$$

Цей НА задає таке перетворення слів:

$$a^x \Rightarrow da^x \Rightarrow adda^{x-1} \Rightarrow a^x d^{2^x} \Rightarrow d^{2^x}$$

Приклад 1.3.6. НА, який кожне слово $a^x b^y$ переводить у d^{xy}:

$$ab \to bad$$
$$db \to bd$$
$$a \to \varepsilon$$
$$b \to \varepsilon$$

Приклад перетворення слів, яке задає цей НА:

$$aabb \Rightarrow abadb \Rightarrow badadb \Rightarrow badabd \Rightarrow badbadd \Rightarrow$$
$$\Rightarrow babdadd \Rightarrow bbaddadd \Rightarrow dddd$$

Приклад 1.3.7. НА для функції $f(x, y) = x \cdot y$:

$$\# \to **$$
$$|* \to *a$$
$$*| \to b*$$
$$* \to \varepsilon$$
$$ab \to ba|$$
$$|b \to b|$$
$$a \to \varepsilon$$
$$b \to \varepsilon$$

Цей НА задає таке перетворення слів:

$$|^x \# |^y \Rightarrow |^x ** |^y \Rightarrow |^x ** |^y \Rightarrow *a^x b^y* \Rightarrow a^x b^y \Rightarrow |^{xy}$$

Приклад 1.3.8. НА для функції $f(x) = 2^x$:

$$*| \to |**$$
$$|* \to *$$
$$\#* \to |\#$$
$$\# \to \cdot\varepsilon$$
$$* \to \#*$$
$$\varepsilon \to *$$

Цей НА задає таке перетворення слів:

$$|^x \Rightarrow *|^x \Rightarrow |^x *^{2^x} \Rightarrow *^{2^x} \Rightarrow \#*^{2^x} \Rightarrow |^{2^x}\# \Rightarrow |^{2^x}$$

Приклад 1.3.9. НА для функції $f(x, y) = 3x - 2y$:

$\# \to A*B$

$|A \to A|||$

$B| \to ||B$

$A \to \varepsilon$

$B \to \varepsilon$

$|*| \to *$

$*| \to *|$

$* \to \varepsilon$

Цей НА задає таке перетворення слів:

$$|^x\#|^y \Rightarrow |^x A*B|^y \Rightarrow A|^{3x}*|^{2y}B \Rightarrow |^{3x}*|^{2y} \Rightarrow |^{3x\text{-}2y}$$

Приклад 1.3.10. НА для функції $f(x, y) = 2^x + 3^y$:

$\# \to A*B$

$|A \to AA|$

$B| \to |BBB$

$XA \to |X$

$X* \to X$

$XB \to |X$

$X| \to X$

$X \to \cdot\varepsilon$

$\varepsilon \to X$

Цей НА задає таке перетворення слів:

$$|^x\#|^y \Rightarrow |^x A*B|^y \Rightarrow A^{2^x}|^x*|^y B^{3^y} \Rightarrow XA^{2^x}|^x*|^y B^{3^y} \Rightarrow |^{2^x}|^{3^y}$$

Приклад 1.3.11. НА, який кожне слово $x \in T^*$ переводить у його дзеркальне відображення – слово $x^R \in T^*$ (тут $\# \notin T$):

$\#ab \to b\#a$ для всіх $a, b \in T$

$\#\#a\# \to a\#\#$ для всіх $a \in T$

$\#\# \to \cdot\varepsilon$

$\varepsilon \to \#$

Приклад 1.3.12. НА, який кожне $x \in T^*$ переводить у xx ($\# \notin T$):

$\#\#a \to a\#a\#\#$ для всіх $a \in T$

$\#ab \to b\#a$ для всіх a, $b \in T$

$\#a \to a$ для всіх $a \in T$

$\#\# \to \cdot\varepsilon$

$\varepsilon \to \#\#$

Приклад 1.3.13. НА, що переводить натуральні числа з одиничної в десяткову систему числення:

$\#|^{10} \to |\#$

$\#|^{9} \to 9$

$\#|^{8} \to 8$

$\dots \dots$

$\#| \to 1$

$\# \to 0$

$| \to \#|$

$9 \to \cdot 9$

$8 \to \cdot 8$

$\dots \dots$

$1 \to \cdot 1$

$\varepsilon \to \cdot 0$

Завдання для самоконтролю

1. Наведіть означення нормального алгоритму Маркова.

2. Опишіть, як визначається обробка слова нормальним алгоритмом.

3. Поясніть, як нормальний алгоритм задає вербальне відображення.

4. Поясніть, у чому полягає відмінність між нормальним алгоритмом у алфавіті T і нормальним алгоритмом над алфавітом T.

5. Дайте визначення еквівалентних відносно алфавіту T нормальних алгоритмів.

6. Опишіть, як визначається обчислюваність функції $f: N^n \to N$ за допомогою нормального алгоритму.

7. Поясніть, що таке НА-обчислювана функція.

Вправи

1. Наведіть приклад НА, що задає таке відображення:
   1) кожне слово $x \in T^*$ переводить у слово xx^R;
   2) кожне слово $x \in T^*$ переводить у слово $x^R x$.
2. Наведіть приклади НА для таких функцій:
   1) $f(x, y) = x \dot{-} y$;
   2) $f(x, y) = |x - y|$;
   3) $f(x) = nsg(x)$;
   4) $f(x) = sg(x)$;
   5) $f(x) = x/3$;
   6) $f(x) = [x/2]$;
   7) $f(x, y) = 3x + y$;
   8) $f(x, y) = 2x + 3y$;
   9) $f(x, y) = 4y - x$;
   10) $f(x, y) = 3x - 5y$;
   11) $f(x, y, z) = (x + y) - z$;
   12) $f(x, y, z) = 2x - (y + z)$;
   13) $f(x, y) = x + 2^y$;
   14) $f(x, y) = 3^x + 2y$;
   15) $f(x) = x + 1 + 3^x$;
   16) $f(x) = 2^{x+3} + x$;
   17) $f(x, y) = 3^x + 4^y$;
   18) $f(x, y) = 2^x - 3^y$;
   19) $f(x, y) = \max(x, y)$;
   20) $f(x, y) = \min(x, y)$;
   21) $f(x) = x!$;
   22) $f(x, y) = x^y$.
3. Наведіть приклади НА для таких предикатів:
   1) "x непарне";
   2) "x кратне 3";
   3) "$x = y$";
   4) "$x \neq y$";
   5) "$x > y$";
   6) "$x \geq y$";
   7) "$x \leq y$";
   8) "$x \neq 3$".

1.4. Системи Поста. Формальні граматики

Канонічною системою Поста в алфавіті T називають [5, 7, 13, 17] формальну систему (T^*, A, P), у якої множина аксіом A є скінченною підмножиною множини T^*, а множина правил виведення P складається зі слів вигляду

$$\alpha_0 S_1 \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1} S_m \alpha_m \to \beta_0 S_{j_1} \beta_1 \ldots \beta_{n-1} S_{j_n} \beta_n .$$

Тут $\to\notin T$, усі α_k та β_i – фіксовані слова з T^*, усі символи $S_k \notin T$, причому всі $j_i \in \{1,..., m\}$. Символи S_k (метасимволи) призначені для позначення довільних слів із T^*.

Системи Поста (СП) зазвичай позначають як $\boldsymbol{P} = (T, A, P)$.

Множина правил системи Поста $\boldsymbol{P}$ визначає на словах із T^* відношення безпосереднього виведення $\Rightarrow_P$ так: $\sigma \Rightarrow_P \tau$, якщо існує правило $\alpha_0 S_1 \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1} S_m \alpha_m \to \beta_0 S_{j_1} \beta_1 \ldots \beta_{n-1} S_{j_n} \beta_n$ таке, що для деяких $u_1,...., u_m \in T^*$ $\sigma = \alpha_0 u_1 \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1} u_m \alpha_m$ та $\tau = \beta_0 u_{j_1} \beta_1 \ldots \beta_{n-1} u_{j_n} \beta_n$.

Рефлексивно-транзитивне замикання відношення $\Rightarrow_P$ позначатимемо $\Rightarrow_P^*$. Отже, $\sigma \Rightarrow_P^* \tau$ означає, що слово τ отримане зі слова σ за допомогою скінченної кількості застосувань правил із P.

Слово τ *породжується* системою Поста $\boldsymbol{P}$, якщо $\alpha \Rightarrow_P^* \tau$ для деякої $\alpha \in A$. Це записуємо ${}_P|\!-\tau$ і називаємо таке слово τ *теоремою* системи Поста $\boldsymbol{P}$.

Множину $Th(\boldsymbol{P}) = \{\tau \in T^* \mid {}_P|\!-\tau\}$ назвемо *множиною теорем* системи Поста $\boldsymbol{P}$.

Зрозуміло, що для задання системи Поста достатньо вказати множину правил і множину аксіом. За необхідності вказуємо й алфавіт T.

Приклад 1.4.1. Система Поста із множиною аксіом $A = \{a, b, \varepsilon\}$ і множиною правил $P = \{S \to aSa, S \to bSb\}$ породжує всі слова-паліндроми в алфавіті $\{a, b\}$, тобто слова, які читаються однаково зліва направо та справа наліво.

Множина $X \in T^*$ *породжувана за Постом*, якщо існує система Поста $\boldsymbol{P} = (T', A, P)$, де $T' \supseteq T$, така, що $Th(\boldsymbol{P}) \cap (T^*) = X$.

Відомо багато різновидностей системи Поста. Розглянемо найпоширеніші з них.

Правило вигляду $gS \to Sh$, де $\alpha, \beta \in T^*$, називається *правилом у нормальній формі*. Система Поста, усі правила якої – у нормальній формі, називається *нормальною системою Поста*.

Правило вигляду $Sg \to hS$, де $\alpha, \beta \in T^*$, – це *правило в антинормальній формі*. Система Поста, усі правила якої – в антинормальній формі, називається *антинормальною системою Поста*.

Відомо, що кожна породжувана за Постом множина може бути породжена нормальною системою Поста. Те саме правильно й для антинормальних систем Поста.

Як різновиди систем Поста можна розглядати відомі з початку XX ст. системи Туе (асоціативні числення), запропоновані норвезьким математиком А. Туе, і напівтуевські системи.

Система Туе в алфавіті T – це скінченна сукупність правил вигляду $\alpha \leftrightarrow \beta$, де $\alpha, \beta \in T^*$; її можна трактувати як систему Поста, у якій явно не вказана множина аксіом, а всі правила мають вигляд $S_1\alpha S_2 \to S_1\beta S_2$, де $\alpha, \beta \in T^*$, причому для кожного $S_1\alpha S_2 \to S_1\beta S_2$ існує симетричне йому правило $S_1\beta S_2 \to S_1\alpha S_2$.

Правила системи Туе також записують у вигляді $\alpha \equiv \beta$, тоді такі системи називають еквацінйими численнями.

Множина правил системи Туе визначає на словах із T^* відношення безпосередньої еквівалентності: $\sigma \sim_1 \tau$, якщо існує правило $\alpha \leftrightarrow \beta$ таке, що $\sigma = \varphi\alpha\xi$ та $\tau = \varphi\beta\xi$ або $\tau = \varphi\alpha\xi$ та $\sigma = \varphi\beta\xi$.

Рефлексивно-транзитивне замикання відношення $\sim_1$ позначимо $\sim$. Отже, $\sigma \sim \tau$ означає, що слово τ отримане зі слова σ за допомогою скінченної кількості застосувань правил системи Туе.

Важливою алгоритмічною проблемою є проблема розпізнавання еквівалентності слів у довільній системі Туе. Побудовано (Пост) приклади систем Туе, у яких ця проблема алгоритмічно нерозв'язна.

Напівтуевська система – це система Поста із правилами вигляду $S_1\alpha S_2 \to S_1\beta S_2$, у яких явно не вказано множину аксіом. Такі правила записують у вигляді $\alpha \to \beta$.

Формальні граматики. Важливим випадком систем Поста можна вважати породжувальні, або *формальні*, граматики [1, 14, 15], різноманітні класи яких вивчають і використовують у програмуванні.

Формальна граматика – це об'єкт вигляду $G = (T, T_N, s, P)$; тут:

– T – основний (термінальний) алфавіт;

– T_N – допоміжний (нетермінальний) алфавіт;

– $s \in T_N$ – аксіома;

– P – множина правил виведення вигляду $\alpha \to \beta$, де $\alpha, \beta \in (T \cup T_N)^*$.

Формальну граматику можна трактувати як систему Поста в алфавіті $T \cup T_N$, усі правила якої мають вигляд $S_1\alpha S_2 \to S_1\beta S_2$, а множина аксіом складається з єдиного слова s. Правила формальної граматики аналогічні правилам напівтуевської системи.

Мова $L(G)$, породжувана формальною граматикою G, – це множина всіх теорем такої системи Поста, які є словами в алфавіті T.

Наведемо **класифікацію формальних граматик** за Хомським.

Формальна граматика, у якій немає обмежень на правила виведення, називається граматикою типу 0.

Правила виведення для граматик типу 0 можна звести до вигляду $\varphi A\psi \to \varphi\gamma\psi$, де $A \in T_N$.

Формальна граматика, у якій для правил виведення виконується умова $|\alpha| \le |\beta|$, називається нескоротною, або граматикою типу 1.

Правила виведення для граматик **типу 1** можна звести до вигляду $\varphi A\psi \to \varphi\gamma\psi$, де $A \in T_N$, $\gamma \notin \varepsilon$. Такі граматики називають також контекстними, контекстно-чутливими, або БС-граматиками (граматиками безпосередніх складових).

Формальна граматика, у якій усі правила виведення мають вигляд $A \to \gamma$, де $A \in T_N$, називається граматикою **типу 2**. Такі граматики називають також безконтекстними, або КВ-граматиками (контекстно-вільними граматиками).

Формальну граматику, у якій усі правила виведення мають вигляд $A \to xBy$, де $A \in T_N$ та $x, y \in T^*$, називають лінійною.

Формальну граматику, у якій усі правила виведення мають вигляд $A \to xB$ чи $A \to x$, де $A \in T_N$ та $x \in T$, називають праволінійною.

Формальну граматику, у якій усі правила виведення мають вигляд $A \to Bx$ чи $A \to x$, де $A \in T_N$ та $x \in T$, називають ліволінійною.

Праволінійні й ліволінійні граматики утворюють клас граматик **типу 3**. Такі граматики називають також регулярними, або скінченно-автоматними.

Наведеним класам граматик відповідають певні класи алгоритмічних машин (автоматів), які задають такі самі класи мов.

Граматикам типу 0 відповідають недетерміновані МТ.

Недетерміновані й детерміновані МТ задають один і той самий клас мов – клас усіх алгоритмічно перелічних мов.

Граматикам типу 1 відповідають лінійно обмежені автомати – недетерміновані МТ, які не збільшують довжину робочої ділянки стрічки.

Збіжність чи незбіжність класів мов, які задаються, відповідно, недетермінованими лінійно обмеженими й детермінованими лінійно обмеженими автоматами – до сих пір *відкрита проблема*.

Граматикам типу 2 відповідають автомати з магазинною пам'яттю, або магазинні автомати. Недетерміновані магазинні автомати задають ширший клас мов, ніж детерміновані.

Граматикам типу 3 відповідають скінченні автомати. Недетерміновані й детерміновані скінченні автомати задають один і той самий клас мов.

Обчислюваність функцій за Постом. Обчислюваність за Постом означає породжуваність за Постом графіка функції.

Функція $f : N^k \to N$ *обчислювана за Постом,* якщо множина $\{|^{x_1}\#|^{x_2}\#...\#|^{x_k}\#|^{f(x_1,...,x_k)} \mid (x_1,...,x_k)\in D_f\}$ породжувана за Постом.

Наведемо приклади функцій, обчислюваних за Постом.

Приклад 1.4.2. Система Поста для функції $x+y$:

$A = \{\#\#\}$;

$P = \{X\#Y\#R \to X|\#Y\#R|,\ X\#Y\#R \to X\#Y|\#R|\}$.

Тут виводимо в такий спосіб: $(0, 0, 0) \Rightarrow (a, b, a+b)$.

Кроки виведення згідно з рекурсивним визначенням функції $x+y$:

$(a, b, a+b) \Rightarrow (a+1, b, a+b+1)$,

$(a, b, a+b) \Rightarrow (a, b+1, a+b+1)$.

Приклад 1.4.3. Система Поста для функції $f(x, y) = x - y$:

$A = \{\#\#\}$;

$P = \{X\#Y\#R \to X|\#Y\#R|,$

$X\#Y\#R| \to X\#Y|\#R\}$.

Тут виводимо в такий спосіб: $(0, 0, 0) \Rightarrow (a, b, a-b)$.

Кроки виведення згідно з рекурсивним визначенням функції $x-y$:

$(a, b, a–b) \Rightarrow (a+1, b, a–b+1)$,

$(a, b, (a–b–1)+1) \Rightarrow (a, b+1, a–b–1)$.

Приклад 1.4.4. Ще одна система Поста для $f(x, y) = x-y$:

$A = \{\#\#\}$;

$P = \{X\#Y\#R \rightarrow X|\#Y|\#R,$

$X\#\#R \rightarrow X|\#\#R|\}$.

Тут виведення трійки $(a, b, a–b)$ стає детермінованим.

Кроки виведення: $(a, b, a–b) \Rightarrow (a+1, b+1, a–b)$,

$(a, 0, a) \Rightarrow (a+1, 0, a+1)$.

Приклад 1.4.5. Система Поста для функції $f(x, y) = x \dot{-} y$:

$A = \{\#\#\}$;

$P = \{X\#Y\#R \rightarrow X|\#Y|\#R,$

$X\#\#R \rightarrow X|\#\#R|,$

$\#Y\# \rightarrow \#Y|\#\}$.

Кроки виведення: $(a, b, a–b) \Rightarrow (a+1, b+1, a \dot{-} b)$,

$(0, b, 0) \Rightarrow (0, b+1, 0)$.

Приклад 1.4.6. Система Поста для функції $f(x, y) = |x-y|$:

$A = \{\#\#\}$;

$P = \{X\#Y\#R \rightarrow X|\#Y|\#R,$

$X\#\#R \rightarrow X|\#\#R|,$

$X\#Y\#R \rightarrow Y\#X\#R\}$.

Кроки виведення: $(a, b, |a–b|) \Rightarrow (a+1, b+1, |a–b|)$,

$(a, b, |a–b|) \Rightarrow (b, a, |a–b|)$.

Приклад 1.4.7. Система Поста для функції $f(x, y) = \max(x, y)$:

$A = \{\#\#\}$;

$P = \{X\#X\#X \rightarrow X|\#X|\#X|,$

$X\#XS\#XS \rightarrow X\#XS|\#XS|,$

$XS\#X\#XS \rightarrow XS|\#X\#XS|\}$.

Приклад 1.4.8. Система Поста для функції $f(x, y) = x \cdot y$:

$A = \{\#\#\}$;

$P = \{X\#Y\#R \rightarrow X|\#Y\#RY,$

$X\#Y\#R \rightarrow X\#Y|\#RX\}$.

Тут виводимо трійками у такий спосіб: $(0, 0, 0) \Rightarrow (a, b, a \cdot b)$.

Кроки виведення згідно з рекурсивним визначенням функції $x \cdot y$:

$$(a, b, a \cdot b) \Rightarrow (a+1, b, a \cdot b+b),$$
$$(a, b, a \cdot b) \Rightarrow (a, b+1, a \cdot b+a).$$

Приклад 1.4.9. Система Поста для функції $f(x) = x^2$:

$A = \{\#\}$;

$P = \{X\#R \rightarrow X|\#RXX|\}$.

Тут виведення пари (a, a^2) стає детермінованим.

Кроки виведення згідно з рекурсивним визначенням функції x^2:

$$(a, a^2) \Rightarrow (a+1, a^2+2a+1).$$

Приклад 1.4.10. Система Поста для функції $f(x) = 2^x$:

$A = \{\#|\}$;

$P = \{X\#R \rightarrow X|\#RR\}$.

Тут виводимо парами у такий спосіб:

$$(0, 1) \Rightarrow (a, 2^a);$$

виведення пари $(a, 2^a)$ стає детермінованим.

Кроки виведення згідно з рекурсивним визначенням функції 2^x:

$$(a, 2^a) \Rightarrow (a+1, 2^a+2^a).$$

Приклад 1.4.11. Система Поста для функції $f(x, y) = x + 3^y$:

$A = \{\#\#|\}$;

$P = \{X\#Y\#XS \rightarrow X|\#Y\#XS|,$

$X\#Y\#XS \rightarrow X\#Y|\#XSSS\}$.

Кроки виведення згідно з рекурсивним визначенням функції $x+3^y$:

$$(a, b, a+3^b) \Rightarrow (a+1, b, a+3^b+1),$$
$$(a, b, a+3^b) \Rightarrow (a, b+1, a+3^b+3^b+3^b).$$

Приклад 1.4.12. Система Поста для функції $f(x) = x^2 - 2x$:

$A = \{\#, ||\#, |||\#|||\}$;

$P = \{X\#R| \rightarrow X|\#RXX\}$.

Маємо $f(x+1) = (x+1)^2 - 2(x+1) = x^2 - 2x + 2x - 1 = (f(x) - 1) + 2x$.

Кроки виведення згідно із цим рекурсивним визначенням:

$$(a, (a^2-2a-1)+1) \Rightarrow (a+1, (a^2-2a-1)+2a).$$

Тут треба врахувати, що $f(0) = f(2) = 0$, $f(1)\uparrow$, $f(3) = 3$.

Приклад 1.4.13. Ще одна система Поста для $f(x) = x^2 - 2x$:

$A = \{\#, ||\#\}$;

$P = \{X|\#R \to X||\#RXX|\}$.

Тут ураховано, що $f(1)\uparrow$.

Приклад 1.4.14. Система Поста для предиката "$x = y$":

$A = \{\#\#|\}$;

$P = \{X\#Y\#R \to X|\#Y|\#R,$

$X\#\#R \to X|\#\#,$

$\#Y\#R \to \#Y|\#\}$.

Приклад 1.4.15. Система Поста для функції $f(x) = x^3$:

$A = \{**\}$;

$P = \{X*Q*R \to X|*QXX|*RQQQXXX|,$

$X*Q*R \to X\#R\}$.

Для обчислення $f(x+1) = (x+1)^3 = f(x) + 3x^2 + 3x + 1$ потрібне x^2, тому теоремами СП мають також бути коди трійок (x, x^2, x^3). Однак теоремами в алфавіті $\{|, \#\}$ можуть бути тільки коди елементів графіка $f(x)$, тому для кодування трійок (x, x^2, x^3) використано $*$.

Кроки виведення трійками (кодування у розширеному алфавіті):

$$(a, a^2, a^3) \Rightarrow (a+1, a^2+2a+1, a^3+3a^2+3a+1).$$

Кроки переходу до пар, закодованих у $\{|, \#\}$:

$$(a, a^2, a^3) \Rightarrow (a, a^3).$$

Приклад 1.4.16. Система Поста для функції $f(x, y) = (x+1)^2 \cdot y$:

$f(x+1, y) = (x+2)^2 \cdot y = ((x+1)^2 + 2x + 3) \cdot y = f(x, y) + 2xy + 3y$;

$f(x, y+1) = (x+1)^2 \cdot (y+1) = f(x, y) + x^2 + 2x + 1$.

Кроки виведення п'ятірками (кодування у розширеному алфавіті):

$$(a, b, a^2, ab, f) \Rightarrow (a+1, a^2+2a+1, ab+b, f+2ab+3b);$$

$$(a, b, a^2, ab, f) \Rightarrow (a, b+1, a^2, ab+a, f+a^2+2a+1).$$

Кроки переходу до трійок, закодованих у $\{|, \#\}$:

$$(a, b, a^2, ab, f) \Rightarrow (a, b, f).$$

$A = \{****\}$;

$$
\begin{aligned}
P = \{&X{*}Y{*}Q{*}D{*}R \to X|{*}Y{*}QXX|{*}DY{*}RDDYYY,\\
&X{*}Y{*}Q{*}D{*}R \to X{*}Y|{*}Q{*}DX{*}RQXX|,\\
&X{*}Y{*}Q{*}D{*}R \to X\#Y\#R\}.
\end{aligned}
$$

Приклад 1.4.17. Система Поста для функції $f(x) = x^3 - 5x$:

$f(x+1) = (x+1)^3 - 5x - 5 = f(x) + 3x^2 + 3x - 4.$

Тут $f(0) = 0$, $f(1)\uparrow$, $f(2)\uparrow$, $f(3) = 12$.

Кроки виведення трійками (кодування у розширеному алфавіті):

$$(a,\ a^2,\ (f-4)+4) \Rightarrow (a+1,\ a^2+2a+1,\ (f-4)+3a^2+3a).$$

Кроки переходу до пар, закодованих у $\{|, \#\}$:

$$(a,\ a^2,\ f) \Rightarrow (a,\ f).$$

$$
\begin{aligned}
A &= \{{*}{*},\ |||{*}|^9{*}|^{12}\};\\
P &= \{X{*}Q{*}R|||| \to X|{*}QXX|{*}RQQQXXX,\\
&\qquad X{*}Q{*}R \to X\#R\}.
\end{aligned}
$$

Приклад 1.4.18. Система Поста для функції $f(x, y) = 2^x \cdot (y+1)^2$:

$f(x+1, y) = 2^{x+1} \cdot (y+1)^2 = f(x, y) + f(x, y);$

$f(x, y+1) = 2^x \cdot (y+2)^2 = 2^x \cdot ((y+1)^2 + 2y + 3) = f(x, y) + 2 \cdot 2^x \cdot y + 3 \cdot 2^x.$

Кроки виведення п'ятірками (кодування у розширеному алфавіті):

$$(a,\ b,\ 2^a,\ 2^a \cdot b,\ f) \Rightarrow (a+1,\ b,\ 2^a + 2^a,\ 2^a \cdot b + 2^a \cdot b,\ f + f)$$

$$(a,\ b,\ 2^a,\ 2^a \cdot b,\ f) \Rightarrow (a,\ b+1,\ 2^a,\ 2^a \cdot b + 2^a,\ f + 2^a \cdot b + 2^a \cdot b + 3 \cdot 2^a)$$

Кроки переходу до трійок, закодованих у $\{|, \#\}$:

$$(a,\ b,\ 2^a,\ 2^a \cdot b,\ f) \Rightarrow (a,\ b,\ f).$$

$$
\begin{aligned}
A &= \{{*}{*}|{*}{*}|\};\\
P &= \{X{*}Y{*}S{*}D{*}R \to X|{*}Y{*}SS{*}DD{*}RR,\\
&\qquad X{*}Y{*}S{*}D{*}R \to X{*}Y|{*}S{*}DS{*}RDDSSS,\\
&\qquad X{*}Y{*}S{*}D{*}R \to X\#Y\#R\}.
\end{aligned}
$$

Можна вказати простішу систему Поста, використовуючи такі співвідношення:

$f(x+1, y) = 2^{x+1} \cdot (y+1)^2 = f(x, y) + f(x, y);$

$f(0, y+1) = 2^0 \cdot (y+2)^2 = (y+1)^2 + 2y + 3 = f(0, y) + 2y + 3.$

$$
\begin{aligned}
A &= \{\#\#|\};\\
P &= \{\#Y\#R \to \#Y|\#RYY|||,\\
&\qquad X\#Y\#R \to X|\#Y\#RR\}.
\end{aligned}
$$

Приклад 1.4.19. Система Поста для функції $f(x) = x!$:

$A = \{\#|\}$;

$P = \{X\#F \to X|*F***,$
$S*F*A*B*M \to S*F*A|*B*MB,$
$S*F*A*B*M \to S*F*A*B|*MA,$
$S*F*F*S*M \to S\#M,$
$S*F*S*F*M \to S\#M\}.$

До теорем СП належать коди п'ятірок $(x+1,\ x!,\ a,\ b,\ ab)$, для їхнього кодування використано $*$.

З кодів $(x+1,\ x!,\ x+1,\ x!,\ (x+1)\cdot x!)$ та $(x+1,\ x!,\ x!,\ x+1,\ (x+1)\cdot x!)$ можна вивести закодовані в алфавіті $\{|, \#\}$ коди пар $(x+1, (x+1)!)$.

Приклад 1.4.20. Система Поста для функції $f(x, y) = x^y$:

$A = \{\#\#|\}$;

$P = \{X\#\#| \to X|\#\#|,$
$X\#Y\#S \to X*Y*S***,$
$X*Y*S*A*B*M \to X*Y*S*A|*B*MB,$
$X*Y*S*A*B*M \to X*Y*S*A*B|*MA,$
$X*Y*S*X*S*M \to X\#Y|\#M;$
$X*Y*S*S*X*M \to X\#Y|\#M\}.$

До теорем СП належать коди шісток (x, y, x^y, a, b, ab), для їхнього кодування використано $*$.

З кодів $(x, y, x^y, x, x^y, x\cdot x^y)$ та $(x, y, x^y, x^y, x, x\cdot x^y)$ можна вивести закодовані в алфавіті $\{|, \#\}$ коди трійок $(x, y+1, x^{y+1})$.

Приклад 1.4.21. Система Поста для функції $f(x) = [\sqrt{x}]$:

$A = \{**\}$;

$P = \{X** \to X|**,$
$QS|*Q*R \to QS|*QRR|*R|,$
$X*X*R \to X\#R,$
$X*XS|*R| \to X\#R\}.$

До теорем СП належать коди трійок (x, r^2, r), для їхнього кодування використано $*$. З кодів трійок (x, x, r) та $(x, (r+1)^2, r+1)$ за умови $r^2 \le x < (r+1)^2$ виводимо закодовані в алфавіті $\{|, \#\}$ коди пар (x, r).

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення канонічної системи Поста.

2. Опишіть, як визначається відношення безпосереднього виведення за допомогою правил виведення системи Поста.

3. Опишіть, як визначається множина теорем системи Поста.

4. Дайте визначення множини, породжуваної за Постом.

5. Поясніть, що таке нормальна й антинормальна системи Поста.

6. Поясніть, що таке система Туе.

7. Дайте явне формулювання проблеми розпізнавання еквівалентності слів у довільній системі Туе.

8. Поясніть, що таке напівтуевська система.

9. Поясніть, що таке формальна граматика.

10. Опишіть класифікацію формальних граматик.

11. Укажіть класи алгоритмічних машин (автоматів), які відповідають класам граматик типів 1–4.

12. Поясніть, що означає обчислюваність функцій за Постом.

13. Опишіть, як визначається обчислюваність функції $f: N^n \to N$ за допомогою системи Поста.

Вправи

1. Наведіть приклади систем Поста для таких функцій:

1) $f(x) = nsg(x)$;
2) $f(x) = sg(x)$;
3) $f(x, y) = \min(x, y)$;
4) $f(x, y) = \max(x+1, y)$;
5) $f(x, y, z) = (2x+y)\cdot z$;
6) $f(x) = 3^x + x$;
7) $f(x) = x^3 + 5x$;
8) $f(x) = x^4 - x$;
9) $f(x) = x^4 + 4x$;
10) $f(x) = x^4 - 2x$;
11) $f(x) = x^3 - 3x$;
12) $f(x) = 3^x - 4x$;
13) $f(x) = 2^x - 5x$;
14) $f(x, y) = 3x + 2^y$;

15) $f(x, y) = 3^x + 2^y$;
16) $f(x, y) = 2^x - 3^y$;
17) $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$;
18) $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot (z + 1)$;
19) $f(x, y) = x \cdot y^2$;
20) $f(x, y) = x^2 \cdot (y + 1)$;
21) $f(x, y) = 2^x \cdot y$;
22) $f(x, y) = (x + 1) \cdot 2^y$;
23) $f(x, y) = 3^x \cdot (y + 1)$;
*24) $f(x) = [\log_2 x]$;
*25) $f(x) = [x\sqrt{2}]$;
*26) $f(x) = [\sqrt{3x}]$;
*27) $f(x, y) = [\log_x y]$;
*28) $f(x, y) = [\sqrt[x]{y}]$.

2. Наведіть приклади систем Поста для таких предикатів:
1) "x парне";
2) "x кратне 3";
3) "$x \neq y$";
4) "$x \neq 3$";
5) "$x > y$";
6) "$x \leq y$".

*3. Доведіть, що для граматик правила виведення вигляду $\alpha \to \beta$, де $\alpha, \beta \in (T \cup T_N)^*$, можна звести до вигляду $\varphi A \psi \to \varphi \gamma \psi$, де $A \in T_N$.

1.5. Обчислюваність квазіарних функцій на N

Розглянемо спосіб задання обчислюваних функцій, який ґрунтується на породженні таких функцій за допомогою певних обчислюваних операцій (композицій) з певних базових функцій.

Основними обчислюваними операціями (композиціями) квазіарних функцій на множині N є параметричні операції суперпозиції $S^{v_1,\ldots,v_n}$, примітивної рекурсії $R_{y,z}$ та мінімізації M_y.

Параметрична $(n+1)$-арна операція *суперпозиції* $S^{v_1,...v_n}$ функціям $f, g_1,..., g_n$ зіставляє функцію $S^{v_1,...v_n}(f, g_1,..., g_n)$, значення якої для кожного $d\in {}^VA$ обчислюється так:

$$S^{v_1,...v_n}(f,g_1,..., g_n)(d) = f([v_1\mapsto g_1(d),..., v_n\mapsto g_n(d)]\cup(d\,\|\,(V\setminus\{v_1,...,v_n\}))).$$

Тут $g_1,..., g_n$ – квазіарні функції на A, тобто $g_1,..., g_n\in Fn^A$; функція f має, узагалі кажучи, вигляд $f : {}^VA_F \to R$.

Результуюча функція тоді має вигляд

$$S^{v_1,...,v_n}(f, g_1,..., g_n) : {}^VA_F \to R.$$

Далі зазвичай розглядаємо суперпозиції вигляду $(Fn^A)^{n+1} \to Fn^A$. Суперпозиції квазіарних функцій на N мають вигляд $(Fn^N)^{n+1} \to Fn^N$.

Твердження 1.5.1. Функція $S^{v_1,...,v_n}(f, g_1,..., g_n)$ алгоритмічно обчислювана відносно функцій $f, g_1,..., g_n$.

Операція *примітивної рекурсії* $R_{y,z}$ із параметрами y, z функціям $g, h\in Fn^N$ зіставляє функцію $f\in Fn^N$, яку позначаємо $R_{y,z}(g, h)$.

Для кожного $d\in {}^VN_F$ значення $f(d)$ задаємо у такий спосіб:

– при $y\notin asn(d)$ значення $f(d)$ невизначене;

– при $y\in asn(d)$ значення $f(d)$ задаємо рекурсивною схемою

$$f(d\nabla y\mapsto 0) = g(d\nabla y\mapsto 0\nabla z\mapsto 0);$$

$$f(d\nabla y\mapsto a+1) = h(d\nabla y\mapsto a\nabla z\mapsto f(d\nabla y\mapsto a)) \text{ для всіх } a < d(y).$$

Це означає: для всіх $d\in {}^VN$ таких, що $y\in asn(d)$ та $d(y) = b$, значення $f(d)$ обчислюємо так:

$$f(d\nabla y\mapsto 0) = g(d\nabla y\mapsto 0\nabla z\mapsto 0);$$

$$f(d\nabla y\mapsto 1) = h(d\nabla y\mapsto 0\nabla z\mapsto f(d\nabla y\mapsto 0))$$

....

$$f(d) = f(d\nabla y\mapsto b) = h(d\nabla y\mapsto b-1\nabla z\mapsto f(d\nabla y\mapsto b-1)).$$

Отже, функція $f = R_{y,z}(g, h)$ однозначно визначається за функціями g та h, причому z неістотне для функції f.

Твердження 1.5.2. Функція $R_{y,z}(g, h)$ алгоритмічно обчислювана відносно функцій g та h.

Операція *мінімізації* M_y із параметром y функції $g \in Fn^N$ зіставляє функцію $f \in Fn^N$, яку позначають $\mathrm{M}_y(g)$.

Для кожного $d \in {}^V N$ значення $f(d)$ визначається як перше $a \in N$ таке, що $g(d\nabla y \mapsto a) = 0$ і для всіх $k < a$ значення $g(d\nabla y \mapsto k)$ визначене та $\neq 0$. Якщо таке $a \in N$ не існує, то $f(d)$ невизначене.

Це означає, що для кожного $d \in {}^V N$ значення $f(d)$ обчислюється так. Послідовно обчислюємо значення $g(d\nabla y \mapsto k)$ для $k = 0, 1, 2,...$ Перше таке $a \in N$, що $g(d\nabla y \mapsto a) = 0$, – це шукане значення $f(d)$. При цьому для всіх $k < a$ значення $g(d\nabla y \mapsto k)$ мають бути визначеними та $\neq 0$.

Процес знаходження значення $\mathrm{M}_y(g)(d)$ ніколи не закінчиться у таких випадках:

– значення $g(d\nabla y \mapsto 0)$ невизначене;

– для всіх $k \in N$ значення $g(d\nabla y \mapsto k)$ визначене та $\neq 0$;

– для всіх $k < a$ значення $g(d\nabla y \mapsto k)$ визначене та $\neq 0$, а $g(d\nabla y \mapsto a)$ невизначене.

Отже, функція $f = \mathrm{M}_y(g)$ однозначно визначається за функцією g, причому y неістотне для f.

Твердження 1.5.3. Функція $\mathrm{M}_y(g)$ алгоритмічно обчислювана відносно функції g.

Знайдене зазначеним алгоритмом мінімізації перше, починаючи з 0, значення a змінної y таке, що виконується умова α, позначимо $\mu_y(\alpha)$. Для операції мінімізації умова α має вигляд $\varphi = 0$.

Базовими обчислюваними функціями для випадку квазіарних функцій, заданих на N, вважаємо функції $\mathbf{o}$, s_x та $'v$.

Базові функції визначаються так:

$\mathbf{o}(d) = 0$ для всіх $d \in {}^V N$;

$$s_x(d) = d(x) + 1 = \begin{cases} a+1 \text{ таке, що } x \mapsto a \in d, \text{ якщо } x \in asn(d), \\ \text{невизначене інакше;} \end{cases}$$

$$'v(d) = d(v) = \begin{cases} a \text{ таке, що } v \mapsto a \in d, \text{ якщо } v \in asn(d), \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$$

Функцію, яку можна отримати з базових функцій $\mathbf{o}$, s_x, $'v$ за допомогою скінченної кількості застосувань операцій $S^{v_1,\dots,v_n}$, $R_{y,z}$ та M_y, назвемо *квазіарною рекурсивною функцією* (скорочено КРФ або Q-РФ).

Зауважимо,що в підручнику [5] і посібниках [7, 11] такі функції названо квазіарними *частково* рекурсивними, скорочено КЧРФ або Q-ЧРФ; у цьому посібнику, беручи до уваги *частковість* квазіарних функцій, уживаємо більш стислі визначення.

З визначень і тверджень 1.5.1–1.5.3 випливає

Твердження 1.5.4. Кожна КРФ алгоритмічно обчислювана.

Алгебру $\mathbb{A}_{\mathfrak{R}q} = (\mathfrak{R}q;\ S^{v_1,\dots,v_n},\ R_{y,z},\ M_y)$, носієм $\mathfrak{R}q$ якої є клас усіх КРФ, а операціями – $S^{v_1,\dots,v_n}$, $R_{y,z}$ та M_y, назвемо *алгеброю КРФ*.

Уведемо поняття *операторного терма* (ОТ) алгебри КРФ.

Алфавіт мови алгебри КРФ складається із символів базових функцій о, s_x та $'v$, символів операцій $R_{y,z}$, M_y та $S^{v_1,\dots,v_n}$, а також допоміжних символів "(", ")" та ",".

Дамо індуктивне визначення ОТ алгебри КРФ:

1) кожен символ базової функції є ОТ; такі ОТ – *атомарні*;

2) якщо $t_0, t_1,\dots, t_n$ – ОТ, то $S^{v_1,\dots,v_n}(t_0, t_1,\dots, t_n)$ – ОТ;

3) якщо t_0 та t_1 – ОТ, то $R_{y,z}(t_0, t_1)$ – ОТ;

4) якщо t – ОТ, то $M_y(t)$ – ОТ.

Інтерпретуючи ОТ на множині $\mathfrak{R}q$, маємо: кожна КРФ є значенням деякого ОТ алгебри КРФ.

Якщо функція f є значенням ОТ τ, то кажуть, що τ – *операторний терм функції f*, або що f задана операторним термом τ.

Задання КРФ операторними термами не є однозначним. Наприклад, операторні терми о, $S^x(\text{o}, s_x)$, $S^x(\text{o}, \text{o})$ та $S^{x,y}(\text{o}, \text{o}, s_x)$ задають одну й ту саму функцію $\mathbf{o}$.

Розглянемо приклади КРФ.

Приклад 1.5.1. Функції-константи є КРФ.

Справді, константи 0, 1, 2,... задаються, відповідно, операторними термами о, $S^x(s_x, \text{o})$, $S^x(s_x, S^x(s_x, \text{o}))$, ...

ОТ для констант 1, 2,..., k,... позначимо, відповідно, 1, 2, ..., k, ...

Приклад 1.5.2. Функція додавання $+_{xy}$ є КРФ.

Функція $+_{xy}$ визначається так: $+_{xy}(d) = {}'x(d) + {}'y(d)$.

Значення $+_{xy}(d)$ визначене $\Leftrightarrow$ $x \in asn(d)$ та $y \in asn(d)$.

Нехай $x \in asn(d)$ та $y \in asn(d)$. Тоді маємо

$$+_{xy}(d\nabla y \mapsto 0) = {}'x(d\nabla y \mapsto 0\nabla z \mapsto 0) = {}'x(d);$$

$$+_{xy}(d\nabla y \mapsto b + 1) = s_z(d\nabla y \mapsto b\nabla z \mapsto +_{xy}(d\nabla y \mapsto b)).$$

Цю схему примітивної рекурсії можна стисло подати так:

$$x + 0 = x;$$
$$x + (y + 1) = (x + y) + 1.$$

Отже, функція $+_{xy}$ утворена з базових функцій $'x$ та s_z за допомогою операції $R_{y,z}$.

ОТ функції $+_{xy}$ має вигляд $R_{y,z}('x, s_z)$. Позначимо його $\oplus_{xy}$.

Приклад 1.5.3. Функція множення $\times_{xy}$ є КРФ.

Функція $\times_{xy}$ визначається так: $\times_{xy}(d) = {}'x(d) \cdot {}'y(d)$.

Значення $\times_{xy}(d)$ визначене $\Leftrightarrow$ $x \in asn(d)$ та $y \in asn(d)$.

Нехай $x \in asn(d)$ та $y \in asn(d)$. Тоді маємо

$$\times_{xy}(d\nabla y \mapsto 0) = \mathbf{o}(d\nabla y \mapsto 0\nabla z \mapsto 0) = \mathbf{o}(d) = 0;$$

$$\times_{xy}(d\nabla y \mapsto b + 1) = {}'x(d) \cdot (b + 1) = {}'x(d) \cdot b + {}'x(d) =$$

$$= +_{xz}(d\nabla y \mapsto b\nabla z \mapsto \times_{xy}(d\nabla y \mapsto b)).$$

Цю схему примітивної рекурсії можна стисло подати так:

$$x \cdot 0 = 0;$$
$$x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x.$$

Отже, функція $\times_{xy}$ утворена з функцій **o** та $+_{xz}$ за допомогою операції $R_{y,z}$. ОТ функції $\times_{xy}$ має вигляд $R_{y,z}(\mathrm{o}, \oplus_{xz})$, позначимо його $\otimes_{xy}$.

Функції $+_{xy}$ та $\times_{xy}$ також будемо позначати $x + y$ та $x \times y$ чи $x \cdot y$.

Приклад 1.5.4. Функція піднесення до степеня $x \uparrow y$ є КРФ.

Функція $x \uparrow y$ визначається так: $(x \uparrow y)(d) = {}'x(d)^{'y(d)}$.

Вважаємо $(0 \uparrow y)(d) = 1$ для всіх $y \in asn(d)$.

Нехай $x \in asn(d)$ та $y \in asn(d)$. Тоді маємо

$$(x \uparrow y)(d\nabla y \mapsto 0) = 1;$$

$$(x \uparrow y)(d\nabla y \mapsto a{+}1) = \times_{zy}(d\nabla y \mapsto a\nabla z \mapsto (x \uparrow y)(d\nabla y \mapsto a)).$$

Цю схему примітивної рекурсії можна стисло подати так:

$$x{\uparrow}0 = 1;$$
$$x{\uparrow}(y+1) = (x{\uparrow}y)\cdot x.$$

Отже, функція $x{\uparrow}y$ утворена з функції-константи 1 та функції $\times_{xz}$ за допомогою операції $\mathrm{R}_{y,z}$.

ОТ функції $x{\uparrow}y$ має вигляд $R_{y,z}(1, \otimes_{xz})$, позначимо його $\uparrow_{xy}$.

Функцію $x{\uparrow}y$ зазвичай традиційно позначаємо x^y.

Приклад 1.5.5. Функція x^{y+2z} є КРФ.

ОТ функції x^{y+2z} має вигляд $S^u(\uparrow_{xu}, S^v(\oplus_{yv}, S^a(\oplus_{za}, 'z)))$.

Приклад 1.5.6. Функція $x!$ є КРФ.

Справді, маємо

$$(x!)(d\nabla x\mapsto 0) = 1;$$
$$(x!)(d\nabla x\mapsto a+1) = (x!)(x\mapsto a)\cdot(a+1) = (x!)(x\mapsto a)\cdot \mathrm{s}_x(x\mapsto a) =$$
$$= \mathrm{S}^u(\times_{zu}, \mathrm{s}_x)(d\nabla x\mapsto a\nabla z\mapsto (x!)(d\nabla x\mapsto a)).$$

Цю схему примітивної рекурсії можна стисло подати так:

$$0! = 1;$$
$$(x+1)! = (x!)\cdot(x+1).$$

Отже, функція $x!$ утворена з функції-константи 1 і функції $z\cdot(x+1)$ за допомогою операції $\mathrm{R}_{x,z}$.

ОТ функції $x!$ має вигляд $R_{x,z}(1, S^u(\otimes_{zu}, s_x))$, позначимо його $x!$.

Приклад 1.5.7. Функція

$$sg_x(d) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } 'x(d) = 0, \\ 1, \text{ якщо } 'x(d) > 0, \\ \text{невизначене, якщо } x \notin asn(d), \end{cases}$$ є КРФ.

Справді, маємо

$$sg_x(d\nabla x\mapsto 0) = \mathbf{o}(d\nabla x\mapsto 0\nabla y\mapsto 0) = \mathbf{o}(d) = 0;$$
$$sg_x(d\nabla x\mapsto b+1) = 1.$$

Цю схему примітивної рекурсії можна стисло подати так:

$$sg_x(0) = 0;$$
$$sg_x(x+1) = 1.$$

Отже, функція sg_x утворена з функцій 0 та 1 за допомогою $\mathrm{R}_{y,z}$.

ОТ функції sg_x має вигляд $R_{x,y}(\mathrm{o}, 1)$. Такий терм позначимо sg_x .

Приклад 1.5.8. Функція

$$nsg_x(d) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } {}'x(d) = 0, \\ 0, \text{ якщо } {}'x(d) > 0, \\ \text{невизначене, якщо } x \notin asn(d), \end{cases}$$ є КРФ.

Справді, маємо

$nsg_x(d\nabla x\mapsto 0) = 1;$

$nsg_x(d\nabla x\mapsto b+1) = 0.$

Цю схему примітивної рекурсії можна стисло подати так:

$nsg_x(0) = 1;$
$nsg_x(x+1) = 0.$

Отже, функція nsg_x утворена з функцій 1 та **о** за допомогою $\mathrm{R}_{x,y}$. ОТ функції nsg_x має вигляд $R_{x,y}(\mathtt{1}, \mathrm{o})$, позначимо його nsg_x.

Приклад 1.5.9. Функція $\dot{-}_{xy}$, яку також позначатимемо $x \dot{-} y$, є КРФ. Ця функція задається так:

$$(x \dot{-} y)(d) = \begin{cases} {}'x(d) - {}'y(d), \text{ якщо } {}'x(d) \geq {}'y(d), \\ 0, \text{ якщо } {}'x(d) \leq {}'y(d), \\ \text{невизначене, якщо } x \notin asn(d) \text{ або } y \notin asn(d). \end{cases}$$

Спочатку покажемо: функція $x \dot{-} 1$ є КРФ. Ця функція задається так:

$$(x \dot{-} 1)(d) = \begin{cases} {}'x(d) - 1, \text{ якщо } {}'x(d) \geq 1, \\ 0, \text{ якщо } {}'x(d) = 0, \\ \text{невизначене, якщо } x \notin asn(d). \end{cases}$$

Справді,

$(x \dot{-} 1)(d\nabla x \mapsto 0) = 0;$

$(x \dot{-} 1)(d\nabla x \mapsto b+1) = b = {}'x(d\nabla x\mapsto b\nabla\, y \mapsto (x \dot{-} 1)(d\nabla x \mapsto b))$.

Цю схему примітивної рекурсії можна стисло подати так:

$0 \dot{-} 1 = 0;$
$(x+1) \dot{-} 1 = x.$

Операторний терм функції $x \dot{-} 1$ має вигляд $R_{x,y}(\mathrm{o}, {}'x)$.

Тепер маємо:

$(x \dot{-} y)\,(d\nabla y\mapsto 0) = {}'x(d);$

$(x \dot{-} y)\,(d\nabla y\mapsto b+1) = (z \dot{-} 1)\,(d\nabla y\mapsto b\nabla z\mapsto (x \dot{-} y)\,(d\nabla y\mapsto b)).$

Цю схему примітивної рекурсії можна стисло подати так:

$$x \dot{-} 0 = x;$$
$$x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1.$$

Отже, $x \dot{-} y$ утворена з функцій $'x$ та $z \dot{-} 1$ за допомогою $R_{y,z}$. ОТ функції $x \dot{-} y$ має вигляд $R_{y,z}('x, R_{z,y}(o, 'z))$; позначимо його $\dot{-}_{xy}$.

Приклад 1.5.10. Функції $\max(x, y)$ та $\min(x, y)$ є КРФ.

Маємо $\max(x, y) = x + (y \dot{-} x)$, $\min(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$.

Приклад 1.5.11. Функція $|x–y|(d) = |'x(d) - 'y(d)|$ є КРФ.

Справді, маємо $|a - b| = (a \dot{-} b) + (b \dot{-} a)$.

Звідси ОТ функції $|x–y|$ має вигляд $S^{x,y}(\oplus_{xy}, \dot{-}_{xy}, \dot{-}_{yx})$.

Такий терм будемо позначати $|-|_{xy}$.

Приклад 1.5.12. Функція $(x - y)(d) = 'x(d) - 'y(d)$ є КРФ.

Маємо $x - y = z \Leftrightarrow x = y + z \Leftrightarrow |(y+z) - x| = 0$.

Інакше кажучи, $x - y = \mu_z (x = y + z) = \mu_z (|(y+z) - x| = 0)$.

Значить, якщо $a = m - n$, то a знаходимо як перше, починаючи з 0, таке число, що $m = n + a$, тобто $|(n+a) - m| = 0$.

Отже, ОТ функції $x - y$ має вигляд $M_z(S^v(|-|_{vx}, \oplus_{yz}))$.

Такий терм будемо позначати $-_{xy}$.

Приклад 1.5.13. Функція $(2x - z)^y$ є КРФ.

ОТ функції $(2x - z)^y$ має вигляд $S^u(\uparrow_{uy}, S^v(-_{vz}, S^a(\oplus_{xa}, 'x)))$.

Приклад 1.5.14. У визначенні операції мінімізації фігурує умова вигляду $\varphi = 0$. Водночас при початковому поданні функції за допомогою операції мінімізації часто використовуємо умови вигляду $\alpha = \beta$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha \geq \beta$, $\alpha > \beta$. Ці умови можна звести до умови $\varphi = 0$, використовуючи КРФ nsg_x, $x + y$, $x \dot{-} y$, $|x–y|$:

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \beta \dot{-} \alpha = 0,$$
$$\alpha > \beta \Leftrightarrow (\beta + 1) \dot{-} \alpha = 0,$$
$$\alpha = \beta \Leftrightarrow |\alpha - \beta| = 0,$$
$$\alpha \neq \beta \Leftrightarrow nsg\,|\alpha - \beta| = 0.$$

Приклад 1.5.15. Функція $[x/y]$ є КРФ.

Маємо $z = [x/y] \Leftrightarrow y \cdot z \leq x < y \cdot (z+1)$.

Тому $[x/y] = \mu_z(y \cdot (z+1) > x) = \mu_z((x+1) \dot{-} y \cdot (z+1) = 0)$.

Звідси ОТ функції $[x/y]$ має вигляд $M_z(S^{u,v}(\dot{-}_{uv}, s_x, S^v(\otimes_{yv}, s_z)))$.

Приклад 1.5.16. Функція $[\sqrt{x}]$ є КРФ.

Маємо $y = [\sqrt{x}] \Leftrightarrow y^2 \le x < (y+1)^2$. Тому

$$[\sqrt{x}] = \mu_y((y+1)\cdot(y+1) > x) = \mu_y((x+1) \dot{-} (y+1)\cdot(y+1) = 0).$$

ОТ функції $[\sqrt{x}]$ має вигляд $M_y(S^{u,v}(\dot{-}_{uv}, s_x, S^{u,v}(\otimes_{uv}, s_y, s_y)))$.

Приклад 1.5.17. Функція $\mathrm{mod}(x,y)$ – остача від ділення x на y – є КРФ.

Маємо $\mathrm{mod}(x,y) = x \dot{-} y\cdot[x/y]$.

Приклад 1.5.18. Функція $[\sqrt[x]{y}]$ є КРФ.

Маємо $z = [\sqrt[x]{y}] \Leftrightarrow z^x \le y < (z+1)^x$.

Тому $[\sqrt[x]{y}] = \mu_z((z+1)^x > y) = \mu_z((y+1) \div (z+1)^x = 0)$

ОТ функції $[\sqrt[x]{y}]$ має вигляд $M_y(S^{u,v}(\div_{uv}, s_y, S^u(\uparrow_{ux}, s_z)))$.

Приклад 1.5.19. Функція $[\log_x y]$ є КРФ.

Маємо $z = [\log_x y] \Leftrightarrow x^z \le y < x^{z+1}$.

Тому $[\log_x y] = \mu_z(x^{z+1} > y) = \mu_z(x^{z+1} \ge y+1) = \mu_z((y+1) \div x^{z+1} = 0)$

ОТ функції $[\log_x y]$ має вигляд $M_y(S^{u,v}(\div_{uv}, s_y, S^u(\uparrow_{xu}, s_z)))$.

Приклад 1.5.20. Функція $[x\sqrt{2}]$ є КРФ.

Маємо $z = [x\sqrt{2}] \Leftrightarrow z\cdot z \le 2\cdot x\cdot x < (z+1)\cdot(z+1)$.

Тому $[x\sqrt{2}] = \mu_y((y+1)\cdot(y+1) > x\cdot x + x\cdot x)$.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення операцій суперпозиції $S^{v_1,\dots,v_n}$, примітивної рекурсії $R_{y,z}$ та мінімізації M_y.
2. Опишіть властивості операції примітивної рекурсії $R_{y,z}$ щодо квазіарних функцій.
3. Опишіть властивості операції мінімізації M_y щодо квазіарних функцій.
4. Дайте визначення базових обчислюваних функцій.
5. Дайте визначення квазіарної рекурсивної функції.

6. Опишіть властивості КРФ.
7. Дайте визначення алгебри КРФ.
8. Дайте визначення операторного терма алгебри КРФ.

Вправи

1. Запишіть ОТ алгебри КРФ для функцій із прикладів 1.5.10, 1.5.17, 1.5.20.

2. Укажіть ОТ алгебри КРФ для функцій:

1) $[\sqrt[3]{y}]$;
2) $[\log_2 x]$;
3) $\min(x+z, y)$;
4) $\max(x, y+2)$;
5) $[x^2 / y]$;
6) $(2x+y)^z$;
7) x^{y+2z};
8) $(x+y^2)!$;
9) $(2x+1)!!$;
10) $(2x)!!$;
11) $[3\sqrt{x}]$;
12) $[(x+1)\sqrt{z}]$;
13) $[(x+3)\sqrt{2}]$;
14) $[(x^y+2)\sqrt[z]{y+1}]$.

1.6. Обчислюваність *n*-арних функцій на *N*. Частково рекурсивні, примітивно-рекурсивні, рекурсивні функції

Розглянемо традиційну [3, 13, 18, 19] обчислюваність n-арних функцій, заданих на множині N.

Основними обчислюваними операціями n-арних функцій, заданих на множині N, є такі:

– *суперпозиції* S^{n+1};

– *примітивної рекурсії* R;

– *мінімізації* M.

Операція *суперпозиції* S^{n+1} n-арній функції $g(x_1,...,x_n)$ та n функціям $g_1(x_1,...,x_m),..., g_n(x_1,...,x_m)$ однієї і тієї самої арності зіставляє таку функцію $f(x_1,...,x_m)$:

$$f(x_1,...,x_m) = g(g_1(x_1,...,x_m),..., g_n(x_1,...,x_m)).$$

Зазначену функцію f позначають $S^{n+1}(g, g_1,..., g_n)$, її арність збігається з арністю функцій $g_1,..., g_n$.

Нехай **F** – клас усіх n-арних функцій на N.

Нехай $\mathbf{F}^m$ – клас таких функцій фіксованої арності m, тобто функцій із N^m у N.

Операцію S^{n+1} можна розглядати як тотальну функцію із $\mathbf{F}^n \times (\mathbf{F}^m)^n$ у $\mathbf{F}^m$ або як часткову $(n+1)$-арну функцію на **F**.

Твердження 1.6.1. Якщо функції g, $g_1,..., g_n$ тотальні й алгоритмічно обчислювані, то функція $S^{n+1}(g, g_1,..., g_n)$ теж тотальна й алгоритмічно обчислювана.

Операція *примітивної рекурсії* R n-арній функції g та $(n+2)$-арній функції h зіставляє $(n+1)$-арну функцію f, яку позначають $R(g, h)$, що задається рекурсивним визначенням

$$f(x_1,..., x_n, 0) = g(x_1,..., x_n);$$
$$f(x_1,..., x_n, y+1) = h(x_1,..., x_n, y, f(x_1,..., x_n, y)).$$

Це означає, що для всіх $a_1,..., a_n$, b значення $f(a_1,..., a_n, b)$ обчислюється так:

$$f(a_1,..., a_n, 0) = g(a_1,..., a_n)$$
$$f(a_1,..., a_n, 1) = h(a_1,..., a_n, 0, f(a_1,..., a_n, 0))$$
$$..................................$$
$$f(a_1,..., a_n, b) = h(a_1,..., a_n, b-1, f(a_1,..., a_n, b-1)).$$

Отже, функція f однозначно визначається за функціями g та h.

Якщо для деяких $a_1,..., a_n$, b значення $f(a_1,..., a_n, b)$ невизначене, то значення $f(a_1,..., a_n, t)$ невизначені для всіх $t \ge b$.

При $n = 0$ за визначенням вважаємо, що g – це 1-арна константа.

Твердження 1.6.2. Якщо функції g та h тотальні й алгоритмічно обчислювані, то функція $R(g, h)$ тотальна й алгоритмічно обчислювана.

Операцію примітивної рекурсії R можна розглядати як тотальну функцію із $\mathbf{F}^n \times \mathbf{F}^{n+2}$ у $\mathbf{F}^{n+1}$ (при $n = 0$ – із $\mathbf{F}^1 \times \mathbf{F}^2$ у $\mathbf{F}^1$) або як часткову бінарну функцію на **F**.

Операція *мінімізації* M $(n+1)$-арній функції g зіставляє n-арну функцію f, яку позначають M(g), що задається співвідношенням

$$f(x_1,..., x_n) = \mu_y(g(x_1,...,x_n, y) = 0).$$

Це означає, що для всіх значень $x_1,..., x_n$ значення функції $f(x_1,..., x_n)$ обчислюється так.

Послідовно обчислюємо значення $g(x_1,..., x_n, y)$ для $y = 0, 1, ...$ Перше таке значення y, для якого маємо $g(x_1,..., x_n, y) = 0$, буде шуканим значенням $f(x_1,..., x_n)$. При цьому для всіх $t<y$ значення $g(x_1,..., x_n, y)$ мають бути визначені та $\neq 0$.

З визначення зрозуміло, що процес знаходження значення $\mu_y(g(x_1,..., x_n, y) = 0)$ ніколи не закінчиться у таких випадках:

– значення $g(x_1,..., x_n, 0)$ невизначене;

– для всіх значень y значення $g(x_1,..., x_n, y)$ визначене та $\neq 0$;

– для всіх $t<y$ значення $g(x_1,..., x_n, t)$ визначене та $\neq 0$, а значення $g(x_1,..., x_n, y)$ невизначене.

Операцію M можна розглядати як тотальну функцію із $\mathbf{F}^{n+1}$ у $\mathbf{F}^n$ (при $n = 0$ – як тотальну функцію із $\mathbf{F}^1$ у $\mathbf{F}^1$) або як часткову 1-арну функцію на $\mathbf{F}$.

Зауваження. Для довільного значення x існує єдине значення $y=x+1$ таке, що $y-(x+1)=0$. Однак функція $\mu_y(y-(x+1)=0)$ усюди невизначена, тому що вже $0-(x+1)$ завжди невизначене. Отже, не завжди найменше значення y таке, що $g(x_1,..., x_n, y) = 0$, збігається із $\mu_y(g(x_1,..., x_n, y) = 0)$, яке може бути невизначеним, адже у випадку операції мінімізації таке перше значення y, для якого $g(x_1,..., x_n, y) = 0$, знаходимо за допомогою чітко описаного й незалежного від g алгоритму.

Твердження 1.6.3. Якщо функція g алгоритмічно обчислювана, то функція M(g) теж алгоритмічно обчислювана.

Функція g може бути тотальною, а функція $f =$ M(g) – навіть усюди невизначеною. Наприклад, такою є $f(x) = \mu_y(x+y+1 = 0)$.

Базові обчислювані n-арні функції – це $\mathbf{o}(x) = 0$, $\mathrm{s}(x) = x+1$ та функції-селектори $\mathrm{I}^n_m(x_1,..., x_n) = x_m$, де $n \geq m \geq 1$.

Зрозуміло, що базові обчислювані n-арні функції тотальні й алгоритмічно обчислювані.

Функцію, яку можна отримати з базових функцій за допомогою скінченної кількості застосувань операцій суперпозиції та примітивної рекурсії, називають *примітивно-рекурсивною* (ПРФ).

Функцію, яку можна отримати з базових функцій за допомогою скінченної кількості застосувань операцій суперпозиції, примітивної рекурсії та мінімізації, називають *частково рекурсивною* (ЧРФ).

Тотальну ЧРФ називають *рекурсивною* функцією (РФ).

Із тверджень 1.6.1–1.6.3 випливає:

1) кожна ПРФ – тотальна алгоритмічно обчислювана функція;

2) кожна ЧРФ – алгоритмічно обчислювана функція;

3) кожна РФ – тотальна алгоритмічно обчислювана функція.

Із визначень отримуємо такі співвідношення між класами функцій:

$$\text{ПРФ} \subseteq \text{РФ} \subseteq \text{ЧРФ}.$$

Алгебра $\mathbb{A}_{\mathfrak{R}} = (\mathfrak{R};\ \mathrm{R},\ \mathrm{M},\ \mathrm{S}^2,\ \mathrm{S}^3,\ldots)$, носієм $\mathfrak{R}$ якої є клас усіх ЧРФ, а операціями – операції R, M та S^{n+1}, де $n \geq 1$, називається *алгеброю ЧРФ*, або *алгеброю Чорча*.

Алгебра $\mathbb{A}_{\mathrm{p}\mathfrak{R}} = (\mathrm{p}\mathfrak{R};\ \mathrm{R},\ \mathrm{S}^2,\ \mathrm{S}^3,\ldots)$, носієм $\mathrm{p}\mathfrak{R}$ якої є клас усіх ПРФ, а операціями – операції R та S^{n+1}, де $n \geq 1$, називається *алгеброю ПРФ*.

Уведемо поняття *операторного терма алгебри ЧРФ* та *операторного терма алгебри ПРФ*.

Алфавіт мови алгебри ЧРФ складається із символів базових функцій o, s та I_m^n, де $n \geq m \geq 1$, символів операцій R, M та S^{n+1}, де $n \geq 1$, а також допоміжних символів "(", ")" та ",".

Дамо індуктивне визначення ОТ алгебри ЧРФ:

1) кожен символ базової функції є ОТ; такі ОТ *атомарні*;

2) якщо $t_0, t_1,\ldots, t_n$ – ОТ, то $S^{n+1}(t_0, t_1,\ldots, t_n)$ – ОТ;

3) якщо t_1 та t_2 – ОТ, то $R(t_1, t_2)$ – ОТ;

4) якщо t – ОТ, то $M(t)$ – ОТ.

Індуктивне визначення операторного терма алгебри ПРФ даємо аналогічно: залишаються п. 1–3.

Кожна $f \in \mathfrak{R}$ є значенням деякого ОТ алгебри ЧРФ.

Проте не кожен ОТ алгебр ЧРФ чи ПРФ має певне значення. Наприклад, операторні терми $R(\mathrm{o}, I_2^4)$ та $S^3(I_1^2, I_2^3, I_2^2)$ не мають значення через порушення умов арності (див визначення операцій R та S^{n+1}). ОТ, які не мають значення, назвемо некоректними.

Якщо функція f є значенням ОТ τ, то кажуть, що τ – операторний терм функції f або що f задана операторним термом τ.

Задання ЧРФ за допомогою ОТ не є однозначним. Наприклад, ОТ o, $S^2(\mathrm{o},\mathrm{o})$, $S^2(\mathrm{o}, s)$, $S^2(\mathrm{o}, S^2(\mathrm{o}, s))$ задають функцію $\mathbf{o}(x)$.

Розглянемо приклади ПРФ, ЧРФ та РФ.

Приклад 1.6.1. Функції-константи – ПРФ.

n-арна нуль-функція $\mathrm{o}^n(x_1,..., x_n) = 0$ задається ОТ $S^2(\mathrm{o}, I_1^n)$;

n-арна $\mathrm{k}^n(x_1,..., x_n) = k$ задається ОТ $S^2(s, S^2(s,..., S^2(\mathrm{o}, I_1^n)...))$.

Приклад 1.6.2. Функція $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ – ПРФ.

Справді, маємо

$$f(x_1, 0) = x_1 = \mathrm{I}_1^1(x_1);$$

$$f(x_1, x_2 + 1) = x_1 + (x_2 + 1) = (x_1 + x_2) + 1 = \mathrm{s}(x_1 + x_2) = \mathrm{s}(f(x_1, x_2)).$$

Отже, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ утворена примітивною рекурсією із функцій $g(x_1) = \mathrm{I}_1^1(x_1)$ та $h(x_1, x_2, x_3) = x_3 + 1 = \mathrm{S}^2(\mathrm{s}, \mathrm{I}_3^3)(x_1, x_2, x_3)$.

ОТ функції $x_1 + x_2$ має вигляд $R(I_1^1, S^2(s, I_3^3))$, позначимо його $\oplus$.

Приклад 1.6.3. Функція $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ – ПРФ.

Справді, маємо

$$f(x_1, 0) = 0 = \mathbf{o}(x_1);$$

$$f(x_1, x_2 + 1) = x_1 \cdot (x_2 + 1) = x_1 \cdot x_2 + x_1 = f(x_1, x_2) + x_1.$$

Отже, функція $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ утворюється примітивною рекурсією із функцій $g(x_1) = \mathbf{o}(x_1)$ та $h(x_1, x_2, x_3) = x_3 + x_1$. Згідно із прикладом 1.6.2, функція h є ПРФ, тому f – ПРФ.

ОТ функції $x_1 \cdot x_2$ позначимо $\otimes$, він має вигляд $R(\mathrm{o}, S^3(\oplus, I_3^3, I_1^3))$.

Приклад 1.6.4. Функція $f(x_1, x_2) = (x_1)^{x_2}$ – ПРФ.

Справді, маємо

$$f(x_1, 0) = (x_1)^0 = 1;$$

$$f(x_1, x_2 + 1) = (x_1)^{x_2 + 1} = (x_1)^{x_2} \cdot x_1 = f(x_1, x_2) \cdot x_1.$$

Отже, функція $f(x_1, x_2) = (x_1)^{x_2}$ утворюється примітивною рекурсією із функцій $g(x_1) = 1^1(x_1)$ та $h(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot x_1$. Згідно із прикладом 1.6.3 функція h є ПРФ, тому f – ПРФ.

ОТ функції $(x_1)^{x_2}$ має вигляд $R(S^2(\mathrm{s}, \mathrm{o}), S^3(\otimes, I_3^3, I_1^3))$.

Цей ОТ позначимо $\uparrow$.

Приклад 1.6.5. Функція $f(x_1) = x_1!$ – ПРФ.

Маємо

$f(0) = 0! = 1$;

$f(x_1 + 1) = (x_1 + 1)! = x_1! \cdot (x_1 + 1) = f(x_1) \cdot (x_1 + 1)$.

Отже, $f(x_1) = x_1!$ утворена примітивною рекурсією з функцій $g(x_1) = 1^1(x_1)$ та $h(x_1, x_2) = x_2 \cdot (x_1 + 1)$. Функції g та h є ПРФ, тому f є ПРФ. ОТ функції $x_1!$ має вигляд $R(S^2(s, \mathrm{o}), S^3(\otimes, I_2^2, S^2(s, I_1^2)))$.

Приклад 1.6.6. Функція $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^{x_1 + x_2}$ – ПРФ.

ОТ функції $x_3^{x_1 + x_2}$ має вигляд $S^3(\uparrow, I_3^3, S^3(\oplus, I_1^3, I_2^3))$.

Приклад 1.6.7. Функція $sg(x_1) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x_1 = 0, \\ 1, \text{ якщо } x_1 \geq 1, \end{cases}$ – ПРФ.

Маємо

$sg(0) = 0 = \mathbf{o}(x_1)$;

$sg(x_1 + 1) = 1$.

ОТ функції $sg(x_1)$ має вигляд $R(\mathrm{o}, S^2(s, S^2(\mathrm{o}, I_1^2)))$.

Приклад 1.6.8. Функція $nsg(x_1) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x_1 = 0, \\ 0, \text{ якщо } x_1 \geq 1, \end{cases}$ – ПРФ.

Маємо

$nsg(0) = 1 = \mathrm{s}(\mathbf{o}(x_1))$;

$nsg(x_1 + 1) = 0$.

ОТ функції $nsg(x_1)$ має вигляд $R(S^2(s, \mathrm{o}), S^2(\mathrm{o}, I_1^2))$.

Приклад 1.6.9. Функція

$$f(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2 = \begin{cases} x_1 - x_2, \text{ якщо } x_1 \geq x_2, \\ 0, \text{ якщо } x_1 \leq x_2, \end{cases} \text{ є ПРФ.}$$

Спочатку покажемо, що функція $x_1 \dot{-} 1$ – ПРФ.

Справді, маємо

$0 \dot{-} 1 = 0 = \mathbf{o}(x_1)$;

$(x_1 + 1) \dot{-} 1 = x_1 = \mathrm{I}_1^2(x_1, x_2)$.

ОТ функції $x_1 \dot{-} 1$ має вигляд $R(\mathrm{o}, I_1^2)$.

Тепер покажемо, що функція $f(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2$ – ПРФ.

Маємо

$f(x_1, 0) = x_1 \dot{-} 0 = \mathrm{I}_1^1(x_1)$;

$f(x_1, x_2 + 1) = x_1 \dot{-} (x_2 + 1) = (x_1 \dot{-} x_2) \dot{-} 1 = f(x_1, x_2) \dot{-} 1$.

Отже, функція $f(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2$ утворюється примітивною рекурсією із функцій $g(x_1) = \mathrm{I}_1^1(x_1)$ та $h(x_1, x_2, x_3) = x_3 \dot{-} 1$. ОТ функції $x_1 \dot{-} x_2$ має вигляд $R(I_1^1, S^2(R(\mathrm{o}, I_1^2), I_3^3))$, цей ОТ позначимо $\dot{-}$.

Приклад 1.6.10. $f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| = (x_1 \dot{-} x_2) + (x_2 \dot{-} x_1)$ – ПРФ.

ОТ функції $|x_1 - x_2|$ має вигляд $S^3(\oplus, \dot{-}, S^3(\dot{-}, I_2^2, I_1^2))$.

Цей ОТ позначимо $|-|$.

Приклад 1.6.11. Функція $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ – ЧРФ.

Справді, $x_1 - x_2 = \mu_{x_3}(x_1 = x_2 + x_3) = \mu_{x_3}(|x_1 - (x_2 + x_3)| = 0)$.

ОТ функції $x_1 - x_2$ має вигляд $M(S^3(|-|, I_1^3, S^3(\oplus, I_2^3, I_3^3)))$.

Приклад 1.6.12. Усюди невизначена функція $f_\varnothing$ – ЧРФ.

Справді, $f_\varnothing(x_1) = \mu_{x_1}(x_1 + 1 = 0)$, тому $f_\varnothing$ є значенням ОТ $M(s)$.

Приклад 1.6.13. Функція $f(x_1, x_2) = [x_1/x_2]$ – ЧРФ.

Маємо $[x_1/x_2] = \mu_{x_3}(x_2 \cdot (x_3 + 1) > x_1) = \mu_{x_3}((x_1 + 1) \dot{-} x_2 \cdot (x_3 + 1) = 0)$.

Функція $[x_1/x_2]$ невизначена при $x_2 = 0$, вона не є РФ, не є ПРФ.

Приклад 1.6.14. Функція $f(x_1) = [\sqrt{x_1}]$ – РФ.

$[\sqrt{x_1}] = \mu_{x_2}((x_2 + 1) \cdot (x_2 + 1) > x_1) = \mu_{x_2}((x_1 + 1) \dot{-} (x_2 + 1) \cdot (x_2 + 1) = 0)$.

ОТ функції $[\sqrt{x_1}]$ має вигляд

$$M(S^3(\dot{-}, S^2(s, I_1^2), S^3(\otimes, S^2(s, I_2^2), S^2(s, I_2^2)))).$$

Зрозуміло, що функція $[\sqrt{x_1}]$ тотальна.

Приклад 1.6.15. Функція $f(x_1) = [\log_2(x_1)]$ є ПРФ.

Маємо $x_2 = [\log_2(x_1)] \Leftrightarrow 2^{x_2} \le x_1 < 2^{x_2+1}$.

Тому $[\log_2(x_1)] = \mu_{x_2}(2^{x_2+1} > x_1) = \mu_{x_2}((x_1+1) \dot{-} 2^{x_2+1} = 0)$.

ОТ функції $[\log_2(x_1)]$ має вигляд

$$M(S^3(\dot{-}, S^2(s, I_1^2), S^3(\uparrow, 2^2, S^2(s, I_2^2)))).$$

Розглянемо теореми про властивості ПРФ. Спочатку наведемо теореми про підсумовування, це теореми 1.6.1–1.6.3. Замінивши в них символ Σ на символ П, отримаємо теореми про мультиплікацію. При $z < y$ вважаємо $\sum_{k=y}^{z} a_k = 0$ та $\prod_{k=y}^{z} a_k = 1$.

Для спрощення позначаємо x_{n+1} та x_{n+2} як y та z.

Теорема 1.6.1. Нехай $(n+1)$-арна функція g є ПРФ. Тоді ПРФ є $(n+1)$-арна функція f, задана умовою

$$f(x_1,\ldots,x_n, y) = \sum_{k=0}^{y} g(x_1,\ldots,x_n,k).$$

Теорема 1.6.2. Нехай $(n+1)$-арна функція g є ПРФ. Тоді ПРФ є $(n+2)$-арна функція f, задана умовою

$$f(x_1,\ldots, x_n, y, z) = \sum_{k=y}^{z} g(x_1,\ldots,x_n,k).$$

Теорема 1.6.3. Нехай $(n+1)$-арна функція g та n-арні функції p та q – ПРФ. Тоді ПРФ є n-арна функція h, задана умовою

$$h(x_1,\ldots, x_n) = \sum_{k=p(x_1,\ldots,x_n)}^{q(x_1,\ldots,x_n)} g(x_1,\ldots,x_n,k).$$

Приклад 1.6.16. Довизначимо функцію $f(x_1, x_2) = [x_1/x_2]$ як $[x_1/0] = x_1$. Тоді функція $[x_1/x_2]$ є ПРФ.

Справді, значення $[a/b]$ дорівнює кількості нулів у послідовності $1\cdot b \dot{-} a$, $2\cdot b \dot{-} a$,..., $a\cdot b \dot{-} a$. Тому $[x_1/x_2] = \sum_{k=1}^{x_1} nsg(k\cdot x_2 \dot{-} x_1)$, звідки $[x_1/x_2]$ є ПРФ за теоремою 1.6.3.

Приклад 1.6.17. Функція $\mathrm{mod}(x_1, x_2)$ є ЧРФ.

Справді, $\mathrm{mod}(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} (x_2 \cdot [x_1/x_2])$.

Беручи довизначену $[x_1/x_2]$, дістанемо довизначену функцію $\mathrm{mod}(x_1, x_2)$: $\mathrm{mod}(x_1, 0) = x_1$. Така довизначена $\mathrm{mod}(x_1, x_2)$ є ПРФ.

Теорема 1.6.4 (про кускове задання). Нехай n-арні функції $f_1,..., f_k, f_{k+1}$ та $g_1,..., g_k$ – ПРФ, причому для жодних значень $x_1,..., x_n$ жодні з двох функцій $g_1,..., g_k$ одночасно не набувають значення 0. Тоді ПРФ є n-арна функція f, задана умовою

$$f(x_1,..., x_n) = \begin{cases} f_1(x_1,...,x_n), \text{ якщо } g_1(x_1,...,x_n) = 0, \\ \quad \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \\ f_k(x_1,...,x_n), \text{ якщо } g_k(x_1,...,x_n) = 0, \\ f_{k+1}(x_1,...,x_n) \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Кажуть, що $(n+1)$-арну функцію f можна отримати із $(n+1)$-арної функції g за допомогою операції *обмеженої мінімізації,* якщо:

$$f(x_1,...,x_n, y) = \begin{cases} \text{перше, починаючи з 0, значення } z \text{ таке, що } z \le y \\ \text{та } g(x_1,...,x_n, z) = 0, \text{ якщо таке значення } z \text{ існує,} \\ \text{значення } y, \text{ якщо такого значення } z \text{ не існує.} \end{cases}$$

Цей факт позначаємо так:

$$f(x_1,..., x_n, y) = \mu_{z \le y}(g(x_1,..., x_n, z) = 0).$$

Теорема 1.6.5 (про обмежену мінімізацію). Нехай $(n+1)$-арна функція g є ПРФ. Тоді $(n+1)$-арна функція f, задана співвідношенням $f(x_1,...,x_n, y) = \mu_{z \le y}(g(x_1,..., x_n, z) = 0)$, теж є ПРФ.

Наслідок 1.6.1. Нехай функції $g(x_1,..., x_n, y)$ та $h(x_1,..., x_n)$ є ПРФ. Тоді функція $f(x_1,..., x_n) = \mu_{y \le h(x_1,...,x_n)}(g(x_1,..., x_n, y) = 0)$ теж є ПРФ.

Приклад 1.6.18. Функція $f(x_1) = [\sqrt{x_1}\,]$ є ПРФ.

Маємо $[\sqrt{x_1}\,] = \mu_{x_2 \le x_1}(\,nsg(x_2 + 1)\cdot(x_2 + 1) \dot{-} x_1) = 0)$, тому за теоремою 1.6.5 функція $[\sqrt{x_1}\,]$ є ПРФ.

Приклад 1.6.19. Функція $nd(x)$ – кількість дільників числа x – є ПРФ при довизначенні $nd(0) = 1$.

Справді, $nd(x) = \sum_{k=0}^{x} nsg(\mathrm{mod}(x, k))$.

Приклад 1.6.20. Функція $\pi(x)$ – кількість простих чисел, не більших за число x, – є ПРФ.

Справді, $\pi(x) = \sum_{k=0}^{x} nsg(|\,nd(k) - 2\,|)$.

Приклад 1.6.21. Функція $p(x)$ – x-ве просте число – є ПРФ.

За визначенням $p(0) = 2$, $p(1) = 3$, $p(2) = 5$ тощо.

У загальному випадку $p(x) = \mu_{y \le 2^{2^x}} (|\pi(y) - (x+1)| = 0)$.

Доведення того, що $p(x) \le 2^{2^x}$, виконаємо індукцією за x. Для $x = 0$ маємо $p(0) = 2 \le 2^{2^0}$. Нехай $p(x) \le 2^{2^x}$ для всіх $x \le k$. Покажемо $p(k+1) \le 2^{2^{k+1}}$. Розглянемо $b = p(0) \cdot p(1) \cdot \ldots \cdot p(k) + 1$. За припущенням індукції $p(0) \le 2^{2^0}, \ldots, p(k) \le 2^{2^k}$. Тому дістаємо $b \le 2^{2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k} + 1 < 2^{2^{k+1}}$. Однак кожний простий дільник числа b більший за $p(k)$, тому $p(k+1) \le b \le 2^{2^{k+1}}$.

Приклад 1.6.22. Функція $ex(x, y)$ – степінь числа $p(x)$ у числі y – є ПРФ при довизначенні $ex(x, 0) = 0$.

Справді, $ex(x, y) = \mu_{z \le y}(nsg(\mathrm{mod}(y, p(x)^{z+1})) \cdot sg(y) = 0)$.

Приклад 1.6.23. Якщо g нетотальна, то функція $\mathrm{S}^{n+1}(g, g_1, ..., g_n)$ може бути тотальною.

Справді, маємо $\mathrm{S}^2(1 - x_1, \mathbf{o}) = \mathbf{1}$.

Приклад 1.6.24. Якщо функція g нетотальна, то функція $\mathrm{M}(g)$ може бути тотальною.

Справді, маємо $\mu_y(0 \cdot x - y = 0) = \mathbf{o}$.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення операцій суперпозиції S^{n+1}, примітивної рекурсії R, мінімізації M.
2. Укажіть властивості операцій S^{n+1}, R та M.
3. Укажіть базові обчислювані n-арні функції.
4. Дайте визначення ПРФ, ЧРФ та РФ.
5. Укажіть властивості ПРФ, ЧРФ та РФ.
6. Дайте визначення алгебри ЧРФ і алгебри ПРФ.
7. Дайте визначення операторних термів алгебри ЧРФ і алгебри ПРФ.
8. Сформулюйте теореми про підсумовування.

9. Сформулюйте теореми про мультиплікацію.
10. Сформулюйте теорему про кускове задання.
11. Дайте визначення операції обмеженої мінімізації.
12. Сформулюйте теорему про обмежену мінімізацію.

Вправи

1. З'ясуйте, чи може бути тотальною:
   – функція $S^{n+1}(g, g_1,..., g_n)$, якщо одна з функцій $g_1,..., g_n$ нетотальна;
   – функція $R(g, h)$, якщо g нетотальна;
   – функція $R(g, h)$, якщо h нетотальна.
2. Укажіть ОТ алгебри n-арних ЧРФ для функцій:
   1) $f(x_1, x_2) = (x_2 + 1)^{x_1}$;
   2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^{1+x_1+x_3}$;
   3) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3)!$;
   4) $f(x_1, x_2) = (x_2 + 2)!$;
   5) $f(x_1) = (2x_1 + 1)!!$;
   6) $f(x_1, x_2) = (2x_2)!!$;
   7) $f(x_1) = [\log_3(x_1)]$;
   8) $f(x_1, x_2) = [\log_2(x_2)]$;
   9) $f(x_1, x_2) = [\log_3(x_1 + x_2)]$;
   10) $f(x_1, x_2) = [\sqrt{x_2}]$;
   11) $f(x_1, x_2, x_3) = [x_3/x_1]$;
   12) $f(x_1) = [\sqrt[3]{x_1}]$;
   13) $f(x_1, x_2) = [\log_{x_1} x_2]$;
   14) $f(x_1, x_2) = [\sqrt[x_1]{x_2}]$;
   15) $f(x_1) = [x_1\sqrt{3}]$;
   16) $f(x_1, x_2) = [(x_2 + 1)\sqrt{x_1}]$.
3. Доведіть, що такі функції є ПРФ:
   1) $\sigma(x)$ – сума дільників числа x (тут беремо $\sigma(0) = 0$);
   2) $spd(x)$ – сума простих дільників числа x (тут $spd(0) = 0$);

3) $kpd(x)$ – кількість простих дільників числа x (тут $kpd(0) = 0$);

4) $HCD(x, y)$ – найбільший спільний дільник чисел x та y – при довизначенні $HCD(n, 0) = HCD(0, n) = 0$;

5) $HCK(x, y)$ – найменше спільне кратне чисел x та y – при довизначенні $HCK(n, 0) = HCK(0, n) = n$.

*4. Змоделюйте операції S^{n+1}, R, M за допомогою систем Поста.

1.7. Програмовані функції. Примітивні програмні алгебри

Поняття програми можна вважати синонімом поняття алгоритму. Для уточнення поняття програмування як процесу конструювання програм використаємо введене В. Н. Редьком поняття програмної логіки (алгебри).

Програмна алгебра (**P**, **C**) задається парою (**B**, **C**), де множина функцій **P** – носій (основа) алгебри, **C** – множина композицій (операцій) над функціями із **P**, $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{P}$ – множина базових функцій.

Композиції програмної алгебри уточнюють засоби конструювання програм як функцій.

Функції, отримані з базових функцій програмної алгебри за допомогою її композицій, називають *програмно заданими*, або *програмованими.*

Примітивні програмні алгебри (ППА) – це [5, 7] програмні алгебри функцій із простими типами даних. До таких функцій належать, зокрема, квазіарні, X-арні та n-арні функції, задані на множинах, елементи яких неструктуровані (напр. на N або R).

Композиції (операції) ППА адекватно уточнюють засоби конструювання програм як функцій із простими типами даних. Композиціями ППА є операції *суперпозиції, циклу* й *розгалуження.*

Для випадку ППА квазіарних функцій на A операції суперпозиції, циклу й розгалуження задаємо так.

Операції *суперпозиції* – це описані вище операції $\mathrm{S}^{v_1,\dots,v_n}$.

Операція *розгалуження* Δ функціям g, h і предикату p зіставляє функцію f, яку позначають $\Delta(p, g, h)$ $\Delta(p, g, h)$. Для кожного $d \in {}^V A_F$ значення $f(d)$ визначається як

$$f(d) = \begin{cases} g(d), \text{ якщо } p(d) = T, \\ h(d), \text{ якщо } p(d) = F, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$$

Операція розгалуження інваріантна відносно структури даних для функцій, тобто вона однаково визначається для квазіарних, X-арних, n-арних функцій тощо. Ця операція може бути визначена вже на рівні, коли розглядаються функції тільки двох типів – функції вигляду $A \to A$ та функції-предикати вигляду $A \to \{T, F\}$, де A – деяка множина неструктурованих даних.

Твердження 1.7.1. Функція $\Delta(p, g, h)$ алгоритмічно обчислювана відносно функцій p, g та h.

Операція *циклу* $☼_v$ із параметром v функції g і предикату p зіставляє n-арну функцію f, яку позначають $☼_v(p, g)$.

Для кожного $d \in {}^V A_F$ значення $f(d)$ визначається як перший елемент a_m послідовності $a_0 = d(v)$, $a_1 = g(d \nabla v \mapsto a_0)$, $a_2 = g(d \nabla v \mapsto a_1), \ldots,$ $a_k = g(d \nabla v \mapsto a_{k-1}), \ldots$ такий, що $p(d \nabla v \mapsto a_m) = F$ та $p(d \nabla v \mapsto a_k) = T$ для всіх $k < m$, якщо такий елемент a_m існує.

Якщо такий елемент a_m не існує, то $f(d)\uparrow$.

Твердження 1.7.2. Функція $☼_v(p, g)$ алгоритмічно обчислювана відносно функцій p та g.

Ураховуючи програмістський зміст операцій розгалуження та циклу, функцію $\Delta(p, g, h)$ позначають також <u>if</u> p <u>then</u> g <u>else</u> h, а функцію $☼_v(p, g)$ – також $v\uparrow$<u>while</u> p <u>do</u> g.

Програмовані квазіарні функції на *R*. *Базовими програмованими функціями* для квазіарних функцій на R будемо вважати такі:

– функції розіменування $'v$, де $v \in V$;

– натуральнозначні константи k, де $k \in N$;

– функції додавання $+_{xy}$, віднімання $-_{xy}$, множення $\times_{xy}$, ділення $/_{xy}$ на множині R;

– обмежені на множині N функції $[x/y]$ та $\mathrm{mod}(x, y)$;

– бінарні предикати порівняння $<, \leq, >, \geq, =$ та $\neq$.

Функцію на R називають *програмованою*, якщо її можна отримати із зазначених вище базових функцій за допомогою скінченної кількості застосувань операцій суперпозиції $S^{v_1,\ldots,v_n}$, розгалуження Δ, циклу ☼_v і логічних операцій $\neg$, &, $\vee$, $\to$.

Зауважимо, що зазначена множина базових функцій і операцій не є мінімальною. Наприклад, з логічних операцій достатньо залишити $\neg$ та &, з базових предикатів – предикати $<$ та $=$.

Алгебра $\mathbb{A}_{\wp qR} = (\wp q_R; \neg, \&, \vee, \to, \Delta, \text{☼}_v, S^{v_1,\ldots,v_n})$, носієм $\wp q_R$ якої є клас усіх програмованих квазіарних функцій на R, а операціями – Δ, ☼_v, $S^{v_1,\ldots,v_n}$, $\neg$, &, $\vee$, $\to$, називається *примітивною програмною алгеброю програмованих квазіарних функцій на R* (ППА-Q-R).

Твердження 1.7.3. Кожна програмована квазіарна функція на R алгоритмічно обчислювана відносно базових функцій.

Програмовані квазіарні функції на *N*. Кожну квазіарну функцію на N можна трактувати як предикат, інтерпретуючи значення 0 як істиннісне значення "F", а довільне значення $a \neq 0$ – як істиннісне значення "T", тобто у випадку квазіарних функцій на N можна не залучати до розгляду предикати на N.

Отже, для квазіарних функцій на N можна дати такі визначення операцій розгалуження та циклу.

Операція *розгалуження* ${}^{N}\Delta$ функціям g, h та p зіставляє функцію f, значення $f(d)$ якої для кожного $d \in {}^{V}N_F$ визначається як

$$f(d) = \begin{cases} g(d), \text{ якщо } p(d) \text{ визначене та } \neq 0, \\ h(d), \text{ якщо } p(d) = 0, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$$

Операція *циклу* ${}^{N}\text{☼}_v$ g та p зіставляє функцію f, значення $f(d)$ якої для кожного $d \in {}^{V}N_F$ визначається так.

Значення $f(d)$ – це перший елемент a_m послідовності $a_0 = d(v)$, $a_1 = g(d\nabla v \mapsto a_0)$, $a_2 = g(d\nabla v \mapsto a_1)$,..., $a_k = g(d\nabla v \mapsto a_{k-1})$, ... такий, що

$p(d\nabla v{\mapsto}a_m) = 0$ та для всіх $k < m$ маємо $p(d\nabla v{\mapsto}a_k){\downarrow} \neq 0$, якщо такий елемент a_m існує. Якщо такий елемент a_m не існує, то $f(d){\uparrow}$.

Базовими програмованими функціями для випадку квазіарних функцій на N будемо вважати функції **o**, s_x, $'v$, $+_{xy}$, $\times_{xy}$, $\dot{-}_{xy}$. Зрозуміло, що такі функції еквітонні й алгоритмічно обчислювані.

Квазіарну функцію на N назвемо *програмованою*, якщо її можна отримати з базових програмованих функцій за допомогою скінченної кількості застосувань операцій $S^{v_1,...,v_n}$, $^{\mathrm{N}}\Delta$, $^{\mathrm{N}}\text{☼}_{\mathrm{v}}$.

Твердження 1.7.4. Кожна програмована квазіарна функція на N алгоритмічно обчислювана.

Алгебра $\mathbb{A}_{\wp qN} = (\wp q_{\mathrm{N}};\ ^{\mathrm{N}}\Delta,\ ^{\mathrm{N}}\text{☼}_{\mathrm{v}},\ S^{v_1,...,v_n})$, носієм $\wp q_{\mathrm{N}}$ якої є клас усіх програмованих квазіарних функцій на N, а операціями – $^{\mathrm{N}}\Delta$, $^{\mathrm{N}}\text{☼}_{\mathrm{v}}$ та $S^{v_1,...v_n}$, називається *примітивною програмною алгеброю програмованих квазіарних функцій на N* (ППА-*Q*-*N*).

Алфавіт мови ППА-*Q*-*N*: символи базових функцій о, s_x, $'v$, $+_{xy}$, $\times_{xy}$, $\dot{-}_{xy}$; символи операцій $^{N}\Delta$, $^{N}\text{☼}_{v}$, $S^{v_1,...,v_n}$; допоміжні символи "(", ")", ",".

Дамо індуктивне визначення операторного терма ППА-*Q*-*N*:

1) кожен символ базової функції є ОТ; такі ОТ *атомарні*;

2) якщо $t_0, t_1,..., t_n$ – ОТ, то $S^{v_1,...,v_n}(t_0, t_1,..., t_n)$ – ОТ;

3) якщо t_0, t_1 та t_2 – ОТ, то $^{N}\Delta(t_0, t_1, t_2)$ – ОТ;

4) якщо t_0 та t_1 – ОТ, то $^{N}\text{☼}_{v}(t_0, t_1)$ – ОТ.

Кожна $f \in \wp q_{\mathrm{N}}$ є значенням деякого ОТ ППА-*Q*-*N*.

Подання програмованих квазіарних функцій на N операторними термами ППА-*EQ*-*N* неоднозначне.

Приклад 1.7.1. Промоделюємо логічні зв'язки над предикатами засобами ППА-*Q*-*N*. Нехай функції p, q трактуються як предикати.

Функції $S^{x,y}(\dot{-}_{xy}, \mathtt{1}, p)$, $S^{x,y}(\times_{xy}, p, q)$ та $S^{x,y}(+_{xy}, p, q)$ тоді можна, відповідно, трактувати як предикати $\neg p$, $p\&q$ та $p \vee q$.

Предикати $p\to q$ та $p\leftrightarrow q$ можна подати як $\neg p\vee q$ та $(p\to q)\&(q\to p)$, звідки отримуємо функції, які моделюють зазначені предикати.

Приклад 1.7.2. Функції-константи програмовані.

Такі функції можна отримати з базових функцій за допомогою операцій суперпозиції. Наприклад, константа 1 подається операторним термом $S^{x}(s_x, o)$, який позначаємо $\mathtt{1}$.

Приклад 1.7.3. Функції nsg_x та sg_x програмовані.

Функція nsg_x подається ОТ $S^{u}(\dot{-}_{ux}, \mathtt{1})$, який позначимо nsg_x. Функція sg_x подається ОТ $S^{u,v}(\dot{-}_{uv}, \mathtt{1}, \mathrm{nsg}_x)$, який позначимо sg_x.

Приклад 1.7.4. Функція $|x-y|$ програмована.

Функція $|x-y|$ подається ОТ $S^{u,v}(+_{uv}, \dot{-}_{xy}, \dot{-}_{yx})$.

Приклад 1.7.5. Предикат $x>y$ програмований.

Справді, такий предикат моделюється функцією $\dot{-}_{xy}$.

Приклад 1.7.6. Предикати $x\geq y$, $x=y$ та $x\neq y$ програмовані.

Предикат $x\geq y$ моделюється функцією $(x+1)\dot{-}y$.

Предикат $x=y$ моделюється функцією $1\dot{-}|x-y|$, його також можна подати у вигляді $(x\geq y)\&(y\geq x)$.

Предикат $x\neq y$ можна подати у вигляді $|x-y|$ або $\neg(x=y)$ та $(x>y)\vee(y>x)$.

Приклад 1.7.7. Функції $\min(x, y)$ та $\max(x, y)$ програмовані.

Функцію $\min(x, y)$ можна подати ОТ $^{N}\Delta(\dot{-}_{xy}, 'y, 'x)$.

Функцію $\max(x, y)$ можна подати ОТ $^{N}\Delta(\dot{-}_{xy}, 'x, 'y)$.

ОТ $^{N}\Delta(\dot{-}_{xy}, 'y, 'x)$ та $^{N}\Delta(\dot{-}_{xy}, 'x, 'y)$ позначимо $\min_{xy}$ та $\max_{xy}$.

Приклад 1.7.8. ОТ ППА-Q-N для функції $f_{\varnothing}$: $^{N}\text{☼}_{x}(s_x, o)$.

Приклад 1.7.9. Функція $\mathrm{mod}(x, y)$ програмована.

Обчислення $\mathrm{mod}(x, y)$ можна подати як

$x\uparrow$ <u>*while*</u> $y\leq x$ <u>*do*</u> $x\dot{-}y$.

ОТ mod_{xy} для функції $\mathrm{mod}(x, y)$: $^{N}\text{☼}_{x}(S^{x}(\dot{-}_{xy}, s_x), \dot{-}_{xy})$.

Приклад 1.7.10. Функція $[\sqrt{x}]$ програмована.

Обчислення $y=[\sqrt{x}]$ можна подати як

$y:=0;\ y\uparrow \underline{while}\ (y+1)^2 \le x\ \underline{do}\ y+1.$

ОТ для функції $[\sqrt{x}]$: $S^y({}^{N}\text{☼}_y(S^{u,v}(\dot{-}_{xy}, s_x, S^{u,v}(\times_{uv}, s_y, s_y)), s_y), 0)$.

Приклад 1.7.11. Функція $[x/y]$ програмована.

Обчислення $z = [x/y]$ можна подати як

$z:=0;\ z\uparrow \underline{while}\ (z+1)\cdot y \le x\ \underline{do}\ z+1.$

ОТ для функції $[x/y]$: $S^z({}^{N}\text{☼}_z(S^{u,v}(\dot{-}_{xy}, s_x, S^u(\times_{uy}, s_z)), s_z), 0)$.

Приклад 1.7.12. Функція $HCD(x, y)$ програмована.

Обчислення $z = HCD(x, y)$ можна подати як

$z:=\min(x,y);\ z\uparrow \underline{while}\ \mathrm{mod}(x,z)+\mathrm{mod}(y,z)>0\ \underline{do}\ z\dot{-}1.$

ОТ для $HCD(x, y)$:

$S^z({}^{N}\text{☼}_z(S^{u,v}(+_{uv}, \mathrm{mod}_{xz}, \mathrm{mod}_{yz}), S^u(\dot{-}_{zu}, 1)), \min_{xy})$.

Приклад 1.7.13. Функція $HCK(x, y)$ програмована.

Обчислення $z = HCK(x, y)$ можна подати як

$z:=\max(x,y);\ z\uparrow \underline{while}\ \mathrm{mod}(z,x)+\mathrm{mod}(z,y)>0\ \underline{do}\ z+1.$

ОТ для $HCK(x, y)$: $S^z({}^{N}\text{☼}_z(S^{u,v}(+_{uv}, \mathrm{mod}_{zx}, \mathrm{mod}_{zy}), s_z), \max_{xy})$.

Приклад 1.7.14. Функцію $+_{xy}$ можна не включати до базових програмованих квазіарних функцій на N.

Обчислення $x+y$ можна подати як

$z:=0;\ z\uparrow \underline{while}\ z<x+y\ \underline{do}\ z+1.$

Маємо $z<x+y \Leftrightarrow 1\dot{-}(((z+1)\dot{-}y)\dot{-}x)=1$, тому предикат $z<x+y$ моделюється функцією $1\dot{-}(((z+1)\dot{-}y)\dot{-}x)$. Отже, $+_{xy}$ подаємо ОТ $S^z({}^{N}\text{☼}_z(\tau, s_z), o)$, де $\tau = S^{u,v}(\dot{-}_{uv}, 1, S^u(\dot{-}_{ux}, S^u(\dot{-}_{uy}, s_z)))$.

Звідси функцію $+_{xy}$ можна отримати з базових функцій **о**, s_x, $'v$, $\dot{-}_{xy}$, $\times_{xy}$ за допомогою операцій ${}^{\mathrm{N}}\text{☼}_{\mathrm{v}}$ та $\mathrm{S}^{v_1,\ldots,v_n}$.

Таким чином, можна обмежитися базовими функціями **о**, s_x, $'v$, $\times_{xy}$, $\dot{-}_{xy}$.

Приклад 1.7.15. Операцію ${}^{\mathrm{N}}\Delta$ можна промоделювати, використовуючи базові функції ППА-Q-N і операції суперпозиції та циклу.

Справді, нехай $f = {}^{N}\Delta(p, g, h)$. Тоді $f = g \cdot sg(p) + h \cdot nsg(p)$.

Отже, f можна отримати з базових програмованих функцій і функцій p, g та h за допомогою ^{N}☼$_{v}$ та $S^{v_1,\dots v_n}$.

Примітивні програмні алгебри *n*-арних функцій. Задамо для ППА n-арних функцій операції суперпозиції, циклу, розгалуження.

Операції *суперпозиції* – це операції суперпозиції n-арних функцій S^{n+1}, де $n \geq 1$.

Зрозуміло, що операції S^{n+1} однаково визначаються для довільних класів n-арних функцій, заданих на множинах неструктурованих даних (напр. n-арних функцій на N або R).

Операція *розгалуження* Δ n-арним функціям g, h та n-арному предикату p зіставляє n-арну функцію f, яку позначаємо $\Delta(p, g, h)$.

Для кожного набору значень $x_1,\dots, x_n$ значення такої $f(x_1,\dots, x_n)$ визначаємо як

$$f(x_1,\dots, x_n) = \begin{cases} g(x_1,\dots,x_n), \text{ якщо } p(x_1,\dots,x_n) = T, \\ h(x_1,\dots,x_n), \text{ якщо } p(x_1,\dots,x_n) = F, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$$

Операція *циклу* ☼ n-арній функції g та n-арному предикату p зіставляє n-арну функцію f, яку позначимо ☼(p, g).

Для кожного набору значень $x_1,\dots,x_n$ значення $f(x_1,\dots,x_n)$ визначаємо як перший елемент a_m послідовності $a_0 = x_1$, $a_1 = g(a_0, x_2,\dots, x_n)$, $a_2 = g(a_1, x_2,\dots, x_n)$, ..., $a_k = g(a_{k-1}, x_2,\dots, x_n)$,... такий: $p(a_m, x_2,\dots, x_n) = F$ та $p(a_k, x_2,\dots, x_n) = T$ для всіх $k < m$, якщо такий елемент a_m існує.

Якщо такий елемент a_m не існує, то $f(x_1,\dots, x_n)\uparrow$.

Функцію ☼(p, g) позначають також <u>*while*</u> *p* <u>*do*</u> *g*.

Твердження 1.7.5. Функція ☼(p, g) алгоритмічно обчислювана відносно функцій p та g.

Базовими програмованими функціями для випадку n-арних функцій, заданих на множині R, будемо вважати такі:

– функції-селектори $I^n_m(x_1,\dots, x_n) = x_m$, де $n \geq m \geq 1$;

– натуральнозначні константи $k^n(x_1,\dots, x_n) = k$, де $k \in N$;

– стандартні функції додавання +, віднімання –, множення $\times$ та ділення / на множині R;

– обмежені на множині N функції $[x_1/x_2]$ та $\mathrm{mod}(x_1, x_2)$;

– бінарні предикати порівняння <, ≤, >, ≥, = та ≠.

Функція на R *програмована*, якщо її можна отримати із зазначених базових функцій за допомогою скінченної кількості застосувань операцій S^{n+1}, Δ, ☼ та логічних операцій ¬, &, ∨, →.

Твердження 1.7.6. Кожна програмована n-арна функція на R алгоритмічно обчислювана відносно базових функцій.

Алгебра $\mathbb{A}_{\wp R} = (\wp_R;\ \neg, \&, \vee, \rightarrow, \Delta, ☼, S^2, S^3, \ldots)$, носієм $\wp_R$ якої є клас усіх програмованих n-арних функцій на R, а операціями – Δ, ☼ та S^{n+1}, де $n \geq 1$, а також логічні операції ¬, &, ∨, →, називається *примітивною програмною алгеброю програмованих n-арних функцій на R* (ППА-*ar*-*R*).

Програмовані *n*-арні функції на *N*. Як і для квазіарних функцій на N, для n-арних функцій на N можна не залучати до розгляду предикати. Кожну таку функцію можна трактувати як предикат, інтерпретуючи значення функції 0 як істиннісне значення "*F*", а кожне значення функції $a \neq 0$ – як істиннісне значення "*T*".

Тому для n-арних функцій на N операції ${}^{N}\Delta$ та ^{N}☼ задаємо так.

Операція ${}^{N}\Delta$ n-арним функціям g, h та p зіставляє n-арну функцію f, значення $f(x_1,\ldots,x_n)$ якої для кожного набору значень $x_1,\ldots,x_n$ визначаємо як

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} g(x_1,\ldots,x_n), \text{ якщо } p(x_1,\ldots,x_n) \text{ визначене та } \neq 0, \\ h(x_1,\ldots,x_n), \text{ якщо } p(x_1,\ldots,x_n) = 0, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$$

Операція ^{N}☼ n-арним функціям g та p зіставляє n-арну функцію f, значення $f(x_1,\ldots, x_n)$ якої для кожного набору значень $x_1,\ldots, x_n$ визначається як перший елемент a_m послідовності $a_0 = x_1$, $a_1 = g(a_0, x_2,\ldots, x_n)$, $a_2 = g(a_1, x_2,\ldots, x_n),\ldots$, $a_k = g(a_{k-1}, x_2,\ldots, x_n),\ldots$ такий, що $p(a_m, x_2,\ldots, x_n) = 0$ та $p(a_k, x_2,\ldots, x_n)\downarrow \neq 0$ для всіх $k < m$, якщо такий елемент a_m існує.

Якщо такий елемент a_m не існує, то $f(x_1,\ldots, x_n)\uparrow$.

Твердження 1.7.7. Якщо функції *p, g, h* алгоритмічно обчислювані, то функція ${}^{\mathrm{N}}\Delta(p, g, h)$ теж алгоритмічно обчислювана.

Твердження 1.7.8. Якщо функції *p* та *g* алгоритмічно обчислювані, то функція ${}^{\mathrm{N}}$☼(p, g) теж алгоритмічно обчислювана.

Базовими програмованими функціями для випадку *n*-арних функцій на *N* вважатимемо функції **o**, s та I^n_m, де $n \ge m \ge 1$, а також $+, \times, \dot{-}$.

Функція на *N програмована*, якщо її можна отримати із цих базових функцій за допомогою операцій S^{n+1}, ${}^{\mathrm{N}}\Delta$ та ${}^{\mathrm{N}}$☼.

Твердження 1.7.9. Кожна програмована *n*-арна функція на *N* алгоритмічно обчислювана.

Алгебра $\mathbb{A}_{\wp\mathrm{N}} = (\wp_{\mathrm{N}};\ {}^{\mathrm{N}}\Delta,\ {}^{\mathrm{N}}$☼$,\ \mathrm{S}^2, \mathrm{S}^3, \ldots)$, носієм $\wp_{\mathrm{N}}$ якої є клас усіх програмованих *n*-арних функцій на *N*, а операціями – ${}^{\mathrm{N}}\Delta$, ${}^{\mathrm{N}}$☼ та S^{n+1}, де $n \ge 1$, називається *примітивною програмною алгеброю програмованих n-арних функцій на N* (ППА-*ar*-*N*).

Алфавіт мови ППА-*ar*-*N* складається із символів базових функцій o, *s*, +, ×, $\dot{-}$ та I^n_m, де $n \ge m \ge 1$, символів операцій ${}^{N}\Delta$, ^{N}☼ та S^{n+1}, де $n \ge 1$, а також допоміжних символів "(", ")", ",".

Індуктивне визначення ОТ ППА-*ar*-*N* є таким:

1) кожен символ базової функції є ОТ; такі ОТ атомарні;
2) якщо $t_0, t_1, \ldots, t_n$ – ОТ, то $S^{n+1}(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ – ОТ;
3) якщо t_0, t_1 та t_2 – ОТ, то ${}^{N}\Delta(t_0, t_1, t_2)$ – ОТ;
4) якщо t_0 та t_1 – ОТ, то ^{N}☼(t_0, t_1) – ОТ.

Кожна $f \in \wp_{\mathrm{N}}$ є значенням деякого ОТ ППА-*ar*-*N*.

Проте, як і у випадку ОТ алгебри *n*-арних ЧРФ, через порушення умов арності не кожен ОТ ППА-*ar*-*N* має певне значення.

Як і у випадку ОТ алгебри *n*-арних ЧРФ, подання програмованих *n*-арних функцій на *N* ОТ ППА-*ar*-*N* неоднозначне.

Приклад 1.7.16. Функції-константи програмовані.

Вони отримані з базових функцій **o**, s, I^n_m за допомогою S^{n+1}.

Приклад 1.7.17. Функції $nsg(x_1)$ та $sg(x_1)$ програмовані.

Справді, $nsg(x_1) = 1 \dot{-} x_1$, $sg(x_1) = 1 \dot{-} (1 \dot{-} x_1)$.

Приклад 1.7.18. Функція $|x_1 - x_2|$ програмована.

Справді, $|x_1 - x_2| = (x_1 \dot{-} x_2) + (x_2 \dot{-} x_1)$.

Приклад 1.7.19. ОТ ППА-*ar*-*N* для функції $f_{\varnothing}$: ^{N}☼(s, o).

Приклад 1.7.20. Моделювання логічних зв'язок у ППА-*ar*-*N*.

Нехай функції p та q трактуються як предикати. Тоді функції $nsg(p)$, $p{\cdot}q$ та $p+q$ можна трактувати як предикати $\neg p$, $p\&q$ та $p\vee q$.

Позаяк $p\rightarrow q$ та $p\leftrightarrow q$ можна подати як $\neg p\vee q$ та $(p\rightarrow q)\&(q\rightarrow p)$, то звідси легко отримати функції, які моделюють зазначені предикати.

Отримуємо моделювання логічних зв'язок $\neg$, $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Приклад 1.7.21. Бінарні предикати $x_1 > x_2$, $x_1 \geq x_2$, $x_1 = x_2$, $x_1 \neq x_2$ програмовані.

Предикат $x_1 > x_2$ моделюється функцією $x_1 \dot{-} x_2$;

предикат $x_1 \geq x_2$ моделюється функцією $(x_1 + 1) \dot{-} x_2$;

предикат $x_1 = x_2$ можна подати у вигляді $(x_1 \geq x_2)\ \&\ (x_2 \geq x_1)$;

предикат $x_1 \neq x_2$ можна подати у вигляді $\neg(x_1 = x_2)$.

Приклад 1.7.22. Функція $\mathrm{mod}(x_1, x_2)$ програмована.

Обчислення $\mathrm{mod}(x_1, x_2)$ можна подати як

^{N}☼$(x_1+1>x_2,\ x_1 \dot{-} x_2)$.

ОТ для функції $\mathrm{mod}(x_1, x_2)$: ^{N}☼$(S^3(\dot{-}, S^2(s, I_1^2), I_2^2), \dot{-})$.

Приклад 1.7.23. Функцію $x_1 + x_2$ можна не включати до базових програмованих n-арних функцій на N.

Справді, $x_1 + x_2$ подаємо у вигляді $S^4($$^{\mathrm{N}}$☼$(p, g), \text{o}^2, I_2^2, I_1^2)$, де p – предикат $x_1 < x_2 + x_3$, g – 3-арна функція $x_1 + 1$. Однак $x_1 < x_2 + x_3 \Leftrightarrow nsg(((x_1+1) \dot{-} x_2) \dot{-} x_3) = 1)$, звідки $x_1 + x_2$ отримуємо з базових функцій **o**, s, I_m^n, $\times$, $\dot{-}$ за допомогою операцій $^{\mathrm{N}}$☼ та S^{n+1}.

Отже, можна обмежитися базовими функціями **o**, s, I_m^n, $\times$, $\dot{-}$.

Приклад 1.7.24. Операцію $^{\mathrm{N}}\Delta$ можна промоделювати, використовуючи базові функції ППА-*ar*-*N* і операції суперпозиції та циклу. Справді, $f = {}^{\mathrm{N}}\Delta(p, g, h)$ можна подати як $f = g{\cdot}sg(\alpha) + h{\cdot}nsg(\alpha)$. Отже, функцію $f = {}^{\mathrm{N}}\Delta(p, g, h)$ можна отримати з базових програмованих n-арних функцій на N і функцій p, g та h за допомогою операцій ${}^{\mathrm{N}}$☼ та S^{n+1}.

Таким чином, ${}^{\mathrm{N}}\Delta$ можна не включати до базових операцій ППА-*ar*-*N*.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення програмної алгебри.
2. Дайте визначення програмно заданої (програмованої) функції.
3. Дайте визначення примітивної програмної алгебри.
4. Дайте визначення операції розгалуження ${}^{\mathrm{N}}\Delta$.
5. Дайте визначення операції циклу ${}^{\mathrm{N}}$☼$_{\mathrm{v}}$.
6. Укажіть властивості операцій ${}^{\mathrm{N}}\Delta$ та ${}^{\mathrm{N}}$☼$_{\mathrm{v}}$.
7. Укажіть базові програмовані функції для випадку квазіарних функцій на N.
8. Дайте визначення програмованої функції на N. Укажіть властивості таких функцій.
9. Дайте визначення алгебри ППА-*Q*-*N*.
10. Дайте визначення операторного терма ППА-*Q*-*N*.
11. Змоделюйте логічні зв'язки засобами ППА-*Q*-*N*.
12. Змоделюйте операцію розгалуження ${}^{\mathrm{N}}\Delta$ засобами ППА-*Q*-*N*.
13. Змоделюйте функцію $+_{xy}$ засобами ППА-*Q*-*N*.
14. Дайте визначення операції циклу ${}^{\mathrm{N}}$☼ для випадку n-арних функцій на N.
15. Укажіть базові програмовані функції для випадку n-арних функцій на N.
16. Дайте визначення програмованої n-арної функції на N.
17. Дайте визначення алгебри ППА-*ar*-*N*, операторного терма ППА-*ar*-*N*.
18. Змоделюйте функцію + засобами ППА-*ar*-*N*.

Вправи

1. Укажіть ОТ ППА-*Q*-*N* для функцій:
   1) $\min(\mathrm{mod}(x, y), z)$;
   2) $\max(x, \mathrm{mod}(y, z))$;
   3) $\mathrm{mod}(x+1, \min(y, z))$;

4) $\mathrm{mod}(\max(x, y+1), z)$;
5) $(HCD(x+2, y)$;
6) $HCK(x, y+z)$;
7) $[x/(y+1)]$;
8) $[(x+3)/y]$;
9) $[(x+z)/y]$;
10) $[2x/(y+z)]$;
11) $[x/y^3]$;
12) $[\sqrt[3]{x}]$.

2. З'ясуйте:

– чи може бути тотальною функція $^{N}\Delta(p, g, h)$, якщо p нетотальна;

– чи може бути тотальною функція $^{N}\Delta(p, g, h)$, якщо g нетотальна;

– чи може бути тотальною функція $^{N}\text{☼}(p, g)$, якщо p нетотальна;

– чи може бути тотальною функція $^{N}\text{☼}(p, g)$, якщо g нетотальна.

3. Укажіть ОТ ППА-*ar*-*N* для функцій:
1) $f(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$;
2) $f(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$;
3) $f(x_1, x_2) = HCD(x_1, x_2)$;
4) $f(x_1, x_2) = HCK(x_1, x_2)$;
5) $f(x_1, x_2) = [x_1/x_2]$;
6) $f(x_1) = [\sqrt{x_1}]$;
7) $f(x_1, x_2) = \mathrm{mod}(x_2, x_1)$;
8) $f(x_1, x_2) = [\sqrt[3]{x_2}]$;
9) $f(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{mod}(x_1 + x_2, x_3)$;
10) $f(x_1, x_2, x_3) = \max(\mathrm{mod}(x_1, x_2), x_3)$;
11) $f(x_1, x_2, x_3) = \min(x_2, \mathrm{mod}(x_1, x_3))$;
12) $f(x_1, x_2, x_3) = \max(\mathrm{mod}(x_1, x_2+1), x_3)$.

2. КОДУВАННЯ І НУМЕРАЦІЇ. ТЕЗА ЧОРЧА

Різні формальні моделі алгоритмів діють на різних множинах об'єктів. Наприклад, МТ і нормальні алгоритми є вербальними алгоритмами, МНР-програми визначають функції натуральних аргументів і значень. Для порівняння різних формальних моделей і переходу від однієї моделі до іншої треба кодувати елементи однієї множини елементами іншої.

2.1. Кодування і нумерації. Універсальні класи алгоритмів. Канторові нумерації

Під *кодуванням множини A у множині B* розуміємо ін'єктивне відображення $\varphi : A \to B$, за якого існують алгоритми $\aleph$ та $\Re$ такі:

– для кожного $a \in A$ маємо $\aleph(a) \in \varphi(a)$;

– алгоритм $\Re$ для кожного $b \in B$ визначає, чи $b \in \varphi(A)$, і якщо так, то знаходить $\varphi^{-1}(b)$.

Кодування множини A на множині B – це ін'єктивне та сюр'єктивне відображення $\varphi : A \to B$, за якого існують алгоритми $\aleph$ та $\Re$ такі:

– для кожного $a \in A$ маємо $\aleph(a) \in \varphi(a)$;

– для кожного $b \in B$ маємо $\Re(b) = \varphi^{-1}(b)$.

Однозначне кодування множини A у множині B – це ін'єктивне функціональне відображення $\varphi : A \to B$, за якого існують алгоритми $\aleph$ та $\Re$ такі:

– для кожного $a \in A$ маємо $\aleph(a) = \varphi(a)$;

– алгоритм $\Re$ для кожного $b \in B$ визначає, чи $b \in \varphi(A)$, і якщо так, то знаходить $\varphi^{-1}(b)$.

Однозначне кодування множини A на множині B – це бієктивне відображення $\varphi : A \to B$, за якого існують алгоритми $\aleph$ та $\Re$ такі:

– для кожного $a \in A$ маємо $\aleph(a) = \varphi(a)$;

– для кожного $b \in B$ маємо $\Re(b) = \varphi^{-1}(b)$.

Інакше кажучи, однозначне кодування A на B – це бієктивне відображення $\varphi : A \to B$ таке, що φ та φ^{-1} алгоритмічні.

Нехай $\aleph$ – X-A-алгоритм, $\Re$ – Y-B-алгоритм, φ – однозначне кодування X на Y, ψ – однозначне кодування A на B.

Алгоритми $\aleph$ та $\Re$ назвемо *еквівалентними з точністю до кодувань* φ *та* ψ, якщо:

– для кожного $x \in X$ маємо $\aleph(x) = \psi^{-1}(\Re(\varphi(x)))$;

– для кожного $y \in Y$ маємо $\Re(y) = \psi(\aleph(\varphi^{-1}(y)))$.

Алгоритми $\aleph$ та $\Re$ назвемо *еквівалентними*, якщо $\aleph$ та $\Re$ еквівалентні з точністю до деяких кодувань φ та ψ.

Клас алгоритмів $\wp$ називають *універсальним*, якщо кожний алгоритм еквівалентний деякому алгоритму з $\wp$.

Розглянуті нами формальні моделі алгоритмів – МНР-програми, машини Тьюрінга, нормальні алгоритми Маркова – визначають універсальні класи алгоритмів.

Нумерації. З поняттям кодування пов'язане поняття ефективної нумерації.

Розглянемо спочатку поняття нумерації у загальному вигляді.

Нумерацією множини A назвемо сюр'єктивне функціональне відображення $\xi : N \to A$.

Це означає, що кожний елемент $b \in A$ має номер із N (можливо, не єдиний) і кожне $n \in N$ є номером єдиного елемента $\xi(n) \in A$.

Однозначною нумерацією множини A назвемо бієктивне відображення $\xi : N \to A$.

Для теорії алгоритмів особливо важливими є ефективні нумерації, які дозволяють за кожним $b \in A$ ефективно (тобто за допомогою певного алгоритму) визначити його номер і за кожним $n \in N$ ефективно визначити елемент $\xi(n) = b \in A$, який нумерується цим n.

Нумерація $\xi : N \to A$ *ефективна*, якщо існують алгоритми $\aleph$ та $\Re$ такі:

– для кожного $a \in A$ маємо $\aleph(a) \in \xi^{-1}(a)$;

– для кожного $n \in N$ маємо $\Re(n) = \xi(n)$.

Отже, $\xi : N \to A$ – ефективна нумерація $\Leftrightarrow$ $\xi^{-1} : A \to N$ – кодування A на N.

Канторові нумерації. Розглянемо нумерації пар і n-ок натуральних чисел. Такі нумерації називають *канторовими*.

Канторові нумерації є однозначними ефективними нумераціями.

Усі пари натуральних чисел розташуємо в послідовність таку:

(x, y) передує $(u, v) \Leftrightarrow x+y < u+v$ або $(x+y = u+v$ та $x < u)$.

Отже, маємо послідовність: (0,0); (0,1); (1,0); (0,2); (1,1); …

Номер пари (x, y) у такій послідовності позначають $C(x, y)$ і називають *канторовим номером* пари (x, y).

Пара (x, y) знаходиться на x-му місці після пари $(0, x+y)$. Перед парою $(0, x+y)$ розташовані $x+y$ груп пар з однаковою сумою компонент, причому в групі із сумою компонент m міститься $m+1$ пара. Тому перед $(0, x+y)$ знаходяться $k = 1 + 2 +...+ (x+y) = (x+y+1)\cdot(x+y)/2$ пар. Звідси $C(x, y) = k+x$, тобто маємо:

$$C(x, y) = [(x+y+1)\cdot(x+y)/2] + x = [((x+y)^2 + 3\cdot x+y)/2].$$

Також отримуємо: $2\cdot C(x,y) = (x+y)\cdot(x+y+1) + 2\cdot x$.

Ліву й праву компоненти пари з номером n позначають, відповідно, $l(n)$ та $r(n)$.

Функції $l(n)$ та $r(n)$ називають лівою і правою координатними функціями. Наприклад, $C(0, 0) = 0$, $C(0, 2) = 3$, $l(4) = 1$, $r(3) = 2$.

Теорема 2.1.1. Функції $C(x, y)$, $l(n)$ та $r(n)$ – ПРФ.

Функція $C(x, y)$ задає бієкцію $N\times N \to N$, пара функцій $(l(n), r(n))$ задає бієкцію $N \to N\times N$.

Функції C, l та r зв'язані такими тотожностями:

$C(l(n), r(n)) = n$;

$l(C(x, y)) = x$;

$r(C(x, y)) = y$.

Маючи нумерацію пар натуральних чисел, можна ввести нумерацію n-ок натуральних чисел для довільного n:

$C^3(x_1, x_2, x_3) = C(C(x_1, x_2), x_3)$;

$C^{k+1}(x_1, x_2,..., x_{k+1}) = C^k(C(x_1, x_2), x_3,..., x_{k+1}) =$
$= C(...C(C(x_1, x_2), x_3),...), x_{k+1}), k > 2$.

Уведемо координатні функції $C_{n1},..., C_{nn}$.

Нехай $C^n(x_1, x_2,..., x_n) = m$. Тоді

$C_{n1}(m) = x_1$, $C_{n2}(m) = x_2$, ..., $C_{nn}(m) = x_n$.

Для функцій C^n, C_{n1},..., C_{nn} маємо такі тотожності:

$C^n(C_{n1}(x),..., C_{nn}(x)) = x$;

$C_{nk}(C^n(x_1, x_2,..., x_n)) = x_k$, $1 \le k \le n$.

Маємо $C_{nn}(m) = x_n = r(m)$; $C_{nn-1}(m) = x_{n-1} = r(l(m))$; ..., $C_{n2}(m) = x_2 = r(l(...l(m))\ldots)$; $C_{n1}(m) = x_1 = l(l(...l(m))...)$.

Отже, функції C^n, C_{n1},..., C_{nn} є ПРФ.

Приклад 2.1.1. Знайдемо $l(100)$ та $r(100)$.

Для $x = l(100)$ та $y = r(100)$ маємо рівняння $C(x, y) = 100$.

Використаємо співвідношення $2 \cdot C(x,y) = (x+y)\cdot(x+y+1)+2\cdot x$.

Нехай $x+y = p$. Тоді p є найбільшим натуральним числом, для якого $p\cdot(p+1) \le 2\cdot 100$. Звідси $p = 13$.

Тому маємо $x+y = 13$, $x = 100 - [(13\cdot 14)/2] = 9$, $y = 13-9 = 4$. Отже, $l(100) = 9$ та $r(100) = 4$.

Приклад 2.1.2. Розв'яжемо рівняння $C^3(x, y, z) = 2022$.

За визначенням $C(C(x, y), z) = 207$. Нехай $C(x, y) = a$, тоді маємо $C(a, z) = 2022$. Нехай $a+z = p$. Тоді p є найбільшим натуральним числом, для якого $p\cdot(p+1) \le 2\cdot 2024$. Звідси $p = 63$, звідки $2a = 12$ та $a = 6$, що дає $z = 57$. Тепер $C(x, y) = 6$. Нехай $x+y = q$, тоді q є найбільшим натуральним числом, для якого $q\cdot(q+1) \le 2\cdot 6$. Звідси $q = 3$, що дає $x = 0$ та $y = 3$.

Приклад 2.1.3. Розв'яжемо рівняння $C^4(x, y, z, v) = 207$.

За визначенням маємо $C(C(C(x, y), z), v) = 207$. Нехай $C(C(x, y), z) = a$, тоді $C(a, v) = 207$. Нехай $a+v = p$. Тоді p є найбільшим натуральним числом, для якого $p\cdot(p+1) \le 2\cdot 207$. Звідси $p = 19$, звідки $a = 17$ та $v = 2$. Тепер $C(C(x, y), z) = 17$. Нехай $C(x, y) = b$, тоді $C(b, z) = 17$. Нехай $b+z = q$. Тоді q є найбільшим натуральним числом, для якого $q\cdot(q+1) \le 2\cdot 17$. Звідси $q = 5$, що дає $b = 2$ та $z = 3$. Маємо $C(x, y) = 2$, звідки $x = 1$ та $y = 0$.

Кодування і нумерації послідовностей натуральних чисел

Задамо кодування всіх скінченних послідовностей натуральних чисел, на основі яких отримаємо відповідні ефективні нумерації.

Приклад 2.1.4. На основі канторових нумераційних функцій задамо однозначну ефективну нумерацію всіх скінченних послідовностей натуральних чисел.

Спочатку задамо кодування κ таких послідовностей:

$\kappa(\varnothing) = 0;$

$\kappa(a_1,..., a_n) = C(C^n(a_1,..., a_n), n-1) + 1.$

Зрозуміло, що таке відображення $\kappa : \bigcup\limits_{k\geq 0} N^k \to N$ бієктивне. Обернене відображення $\eta = \kappa^{-1}$ – шукана однозначна нумерація.

Приклад 2.1.5. Задамо кодування σ всіх скінченних послідовностей натуральних чисел:

$\sigma(\varnothing) = 0;$

$\sigma(a_1,..., a_n) = 2^{a_1} + 2^{a_1+a_2+1} + ... + 2^{a_1+a_2+...+a_n+n-1}.$

Відображення $\sigma : \bigcup\limits_{k\geq 0} N^k \to N$ бієктивне, це випливає з однозначності подання кожного натурального числа у двійковій системі числення. Тоді обернене відображення $\lambda = \sigma^{-1}$ – однозначна ефективна нумерація всіх скінченних послідовностей натуральних чисел.

Приклад 2.1.6. Модифікуючи σ, маємо кодування ν усіх непорожніх скінченних послідовностей натуральних чисел:

$\nu(a_1,..., a_n) = 2^{a_1} + 2^{a_1+a_2+1} + ... + 2^{a_1+a_2+...+a_n+n-1} - 1.$

Відображення $\nu : \bigcup\limits_{k\geq 1} N^k \to N$ бієктивне. Обернене відображення $\zeta = \nu^{-1}$ – однозначна ефективна нумерація всіх непорожніх скінченних послідовностей натуральних чисел.

Кодування і нумерації формул мови першого порядку

Приклад 2.1.7. Ефективну нумерацію φ множини формул довільної мови першого порядку зі зліченним алфавітом уведемо на основі кодування термів і формул.

Занумеруємо множини предметних імен $x_0, x_1,...$, константних символів $c_0, c_1,...$, функціональних символів $f_0, f_1,...$ відповідної арності та предикатних символів $p_0, p_1,...$ відповідної арності.

Знаючи k – номер функціонального чи предикатного символу – можна знайти його арність n.

Задамо кодування термів τ та формул κ:

$\tau(x_k) = 3{\cdot}k$;

$\tau(c_k) = 3{\cdot}k + 1$;

$\tau(f_k\, t_1 \ldots t_n) = 3{\cdot}C(C^n(\tau(t_1),\ldots, \tau(t_n)), k) + 2$;

$\kappa(p_k\, t_1 \ldots t_n) = 4{\cdot}C(C^n(\tau(t_1),\ldots, \tau(t_n)), k)$;

$\kappa(\neg\Phi) = 4{\cdot}\kappa(\Phi) + 1$;

$\kappa(\Phi\vee\Psi) = 4{\cdot}C(\kappa(\Phi), \kappa(\Psi)) + 2$;

$\kappa(\exists x_k\Phi) = 4{\cdot}C(k, \kappa(\Phi)) + 3$.

Обернене відображення $\phi = \kappa^{-1}$ – однозначна ефективна нумерація всіх формул мови першого порядку.

Приклад 2.1.8. Ефективну нумерацію α множини формул мови L_{ar} уведемо на основі такого кодування термів і формул:

занумеруємо множини предметних імен $x_0, x_1,\ldots,. x_n,\ldots$;

задамо кодування термів β та формул α:

$\beta(x_k) = 3{\cdot}k + 6$;

$\beta(0) = 0$;

$\beta(1) = 3$;

$\beta(t + s) = 3{\cdot}C(\beta(t), \beta(s)) + 1$;

$\beta(t \times s) = 3{\cdot}C(\beta(t), \beta(s)) + 2$;

$\kappa(=ts) = 4{\cdot}C(\kappa(t), \kappa(s))$;

$\kappa(\neg\Phi) = 4{\cdot}\kappa(\Phi) + 1$;

$\kappa(\Phi\vee\Psi) = 4{\cdot}C(\kappa(\Phi), \kappa(\Psi)) + 2$;

$\kappa(\exists x_k\Phi) = 4{\cdot}C(k, \kappa(\Phi)) + 3$.

Обернене відображення $\alpha = \kappa^{-1}$ – однозначна ефективна нумерація всіх формул мови арифметики L_{ar}.

Завдання для самоконтролю

1. Поясніть, що таке кодування множини A у множині B і множини A на множині B.

2. Поясніть, що таке однозначне кодування множини A у множині B і множини A на множині B.

3. Дайте визначення еквівалентних із точністю до кодувань алгоритмів і еквівалентних алгоритмів.

4. Поясніть, що таке універсальний клас алгоритмів.

5. Поясніть, що таке нумерація; однозначна нумерація.

6. Наведіть нумерації, які називають ефективними.

7. Поясніть зв'язок ефективних нумерацій і кодувань.

8. Укажіть, як визначають канторові нумерації пар натуральних чисел.

9. Укажіть, як визначають канторові нумерації n-ок натуральних чисел.

10. Укажіть тотожності для нумераційних функцій C, l та r.

11. Укажіть тотожності для нумераційних функцій C^n, $C_{n1},\ldots, C_{nn}$.

12. Задайте однозначні ефективні нумерації всіх скінченних послідовностей і всіх скінченних непорожніх послідовностей натуральних чисел:

– на основі канторових нумераційних функцій;

– на основі подання натуральних чисел у двійковій системі числення.

13. Задайте ефективну нумерацію множини формул мови першого порядку зі зліченним алфавітом.

Вправи

1. Знайдіть $l(150)$, $r(150)$ та $l(250)$, $r(250)$.

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $C^3(x, y, z) = 131$;
2) $C^3(x, y, z) = 333$;
3) $C^3(x, y, z) = 226$;
4) $C^3(x, y, z) = 512$;
5) $C^4(x, y, z, v) = 625$;
6) $C^4(x, y, z, v) = 892$;
7) $C^4(x, y, z, v) = 1001$;
8) $C^5(x, y, z, v, u) = 2023$.

*3. Функція $f : N \rightarrow N$ називається функцією великого розмаху (ФВР), якщо для кожного $a \in N$ рівняння $f(x) = a$ має нескінченну кількість розв'язків. Доведіть, що:

1) функції $l(x)$ та $r(x)$ є ФВР;

2) для кожної рекурсивної ФВР $L(x)$ існує рекурсивна ФВР $R(x)$ така, що пара (L, R) задає бієкцію $N \rightarrow N \times N$;

3) для $L(x)$, $R(x)$ і функції $C(x, y) = \mu_t(x = L(t) \,\&\, y = R(t))$ маємо тотожності $C(L(n), R(n)) = n$; $L(C(x, y)) = x$; $R(C(x, y)) = y$.

Це означає, що L, R та C відіграють роль канторових нумераційних функцій l, r та C.

4. Задайте ефективні нумерації множини формул мови теорії множин і множини формул мови теорії груп.

2.2. Кодування і нумерації формальних моделей алгоритмів

Наведемо приклади кодувань і відповідних ефективних нумерацій формальних моделей алгоритмів та АОФ.

Приклад 2.2.1. Однозначну ефективну нумерацію всіх МНР-програм задамо на основі кодування МНР-програм як скінченних послідовностей команд МНР.

Кодування команд θ задамо так:

$$\theta(Z(n)) = 4\cdot n;$$
$$\theta(S(n)) = 4\cdot n + 1;$$
$$\theta(T(m, n)) = 4\cdot C(m, n) + 2;$$
$$\theta(J(m, n, q + 1)) = 4\cdot C(C(m, n), q) + 3.$$

Таке θ – бієктивне відображення множини всіх команд МНР на N.

Використовуючи розглянуту вище бієкцію $\nu : \bigcup_{k\geq 1} N^k \to N$, задамо кодування τ усіх МНР-програм.

Нехай P – це МНР-програма $I_1 I_2 ... I_k$. Задамо її код $\tau(P) = \nu(\theta(I_1), ..., \theta(I_k))$. Функції ν та θ бієктивні, тому τ – теж бієкція. Тоді $\varphi = \tau^{-1}$ – шукана однозначна нумерація.

Нумерація φ ефективна.

Справді, за кожною МНР-програмою P ефективно обчислюється її номер $\tau(P)$.

З іншого боку, за кожним $n \in N$ ефективно визначаємо МНР-програму $P = \varphi(n)$. Спочатку подамо число $n + 1$ як суму зростаючих степенів числа 2: $n+1=2^{b_1}+2^{b_2}+...+2^{b_k}$, де $0 \le b_1 <...< b_k$. Далі для $1 < i < k$ визначимо послідовність чисел $a_1,..., a_k$:

$$a_1 = b_1,\ a_{i+1} = b_{i+1} - b_i - 1.$$

За числами $a_1,..., a_k$ як за кодами команд МНР відновимо відповідні команди. Їхня послідовність – шукана МНР-програма P.

МНР-програму з кодом n позначатимемо P_n.

Приклад 2.2.2. Знайдемо код МНР-програми P, що обчислює функцію $x_1 + x_2$:

1) $J(1, 2, 5)$;

$\theta(J(1, 2, 5)) = 4\cdot C(C(1,2),4)+3 = 4\cdot C(7,4)+3 = 4\cdot 73+3 = 295$;

2) $S(0)$;

$\theta(S(0)) = 4\cdot 0+1 = 1$;

3) $S(2)$;

$\theta(S(2)) = 4\cdot 2+1 = 9$;

4) $J(0, 0, 1)$;

$\theta(J(0, 0, 1)) = 4\cdot C(C(0,0),0)+3 = 4\cdot C(0,0) +3 = 4\cdot 0+3 = 3$.

Тепер $\tau(P) = \nu(295, 1, 9, 3) = 2^{295}+2^{297}+2^{307}+2^{311}-1$.

Приклад 2.2.3. Знайдемо МНР-програму $P_{5119} = \varphi(5119)$. Маємо $5119 + 1 = 2^{10} + 2^{12}$, звідки маємо $a_1 = 10$, $a_2 = 12 - 10 - 1 = 1$. Однак $10 = 2 + 4\cdot C(1,0)$, тому P має вигляд:

1) $T(1,0)$

2) $S(0)$.

Приклад 2.2.4. Знайдемо МНР-програму $P_{337} = \varphi(337)$. Маємо $337 + 1 = 2^8+2^6+2^4+2^1$, звідки отримуємо $a_1 = 1$, $a_2 = 4 - 1 - 1 = 2$, $a_3 = 6 - 4 - 1 = 1$, $a_4 = 8 - 6- 1 = 1$. Тому P має вигляд:

1) $S(0)$

2) $T(0, 0)$

3) $S(0)$

4) $S(0)$.

Приклад 2.2.5. Ефективну нумерацію всіх МТ задамо на основі кодування МТ.

Кожну МТ можна задати послідовністю її команд такою, щоб перша команда містила в лівій частині символ q_0, остання – у правій частині символ q^*. Таке задання неоднозначне, тому що множину команд МТ можна впорядкувати у вигляді послідовності із зазначеною властивістю багатьма способами. Тому наша нумерація МТ неоднозначна.

Занумеруємо внутрішні стани МТ і символи стрічки.

Нехай $Q=\{q_1,..., q_f\}$, $T=\{a_1,..., a_m\}$.

Кодування μ команд МТ задамо так:

$\mu(q_i a_j \to q_k a_l) = 3\cdot C^4(i, j, k, l)$;

$\mu(q_i a_j \to q_k a_l L) = 3\cdot C^4(i, j, k, l) + 1$;

$\mu(q_i a_j \to q_k a_l R) = 3\cdot C^4(i, j, k, l) + 2$.

Таке μ є бієктивним відображенням множини всіх можливих команд МТ на множину N.

Використовуючи розглянуту вище бієкцію $\nu : \bigcup_{k\geq 1} N^k \to N$, визначимо код МТ M, заданої послідовністю команд $I_1 I_2 ... I_k$, таким чином: $\rho(M) = \nu(\mu(I_1),..., \mu(I_k))$. Однак ν та μ бієктивні, тому ρ – теж бієкція. Тоді $\varphi = \rho^{-1}$ – шукана однозначна нумерація послідовностей команд МТ, але неоднозначна ефективна нумерація всіх МТ.

Приклад 2.2.6. Знайдемо код МТ M, яка обчислює функцію $x+y$. Нехай $a_0 = \lambda$, $a_1 = |$, $a_2 = \#$, $q^* = q_2$.

Нехай $a_0 = \lambda$, $a_1 = |$, $a_2 = \#$, $q^* = q_2$. Тоді маємо:

$q_0| \to q_0|R \Rightarrow \mu(q_0| \to q_0|R) = 3\cdot C^4(0,1,0,1) + 2 = 3\cdot C(2,1) + 2 = 26$;

$q_0\# \to q_0|R \Rightarrow \mu(q_0\# \to q_0|R) = 3\cdot C^4(0,2,0,1) + 2 = 3\cdot C(9,1) + 2 = 194$;

$q_0\lambda \to q_1\lambda L \Rightarrow \mu(q_0\lambda \to q_1\lambda L) = 3\cdot C^4(0,0,1,0) + 1 = 3\cdot C(1,0) + 1 = 7$;

$q_1| \to q^*\lambda \Rightarrow \mu(q_1| \to q^*\lambda) = 3\cdot C^4(1,1,2,0) = 3\cdot C(25,0) = 1050$.

Тепер $\rho(M) = \rho(26, 194, 7, 1050) = 2^{26} + 2^{221} + 2^{229} + 2^{1280} - 1$.

Приклад 2.2.7. Ефективна нумерація всіх операторних термів алгебри ЧРФ задається на основі їх кодування γ.

Кодування γ операторних термів задамо так:

$\gamma(o) = 0$;

$\gamma(s) = 4$;

$\gamma(I_m^n) = 4\cdot C(n-m, m-1) + 8$;

$\gamma(S^{n+1}(t_0, t_1,..., t_n)) = 4\cdot C(C^{n+1}(\gamma(t_0), \gamma(t_1),..., \gamma(t_n)), n-1) + 1$;

$\gamma(R(t_0, t_1)) = 4\cdot C(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + 2$;

$\gamma(M(t)) = 4\cdot\gamma(t) + 3$.

Числа $n \in N$, які не є кодами коректних ОТ, вважаємо номерами ОТ $M(s)$ для всюди невизначеної функції $f_\varnothing$.

Приклад 2.2.8. Код ОТ $M(s)$ алгебри n-арних ЧРФ для функції $f_\varnothing$. Маємо $\gamma(M(s)) = 4\cdot\gamma(s) + 3 = 4\cdot 4 + 3 = 19$.

Приклад 2.2.9. Ефективна нумерація всіх ОТ алгебри ПРФ задається на основі їх кодування π. Це кодування π задамо так:

$\pi(o) = 0;$

$\pi(s) = 3;$

$\pi(I^n_m) = 3\ C(n-m, m-1) + 6;$

$\pi(S^{n+1}(t_0, t_1,..., t_n)) = 3\cdot C(C^{n+1}(\pi(t_0), \pi(t_1),..., \pi(t_n)), n-1) + 1;$

$\pi(R(t_0, t_1)) = 3\cdot C(\pi(t_0), \pi(t_1)) + 2.$

Числа $n \in N$, які не є кодами коректних ОТ алгебри ПРФ, вважаємо номерами ОТ o для функції **o**.

Приклад 2.2.10. Код ОТ $R(I^1_1, S^2(s, I^3_3))$ алгебри ПРФ для функції $x_1 + x_2$. Маємо $\pi(R(I^1_1, S^2(s, I^3_3))) = 3\cdot C(\pi(I^1_1), \pi(S^2(s, I^3_3))) + 2 =$

$= 3\cdot C(6, 3\cdot C(C(\pi(s), \pi(I^3_3)), 0) + 1) + 2 =$

$= 3\cdot C(6, 3\cdot C(C(3, 15), 0) + 1) + 2 = 3\cdot C(6, 3\cdot C(174, 0) + 1) + 2 =$

$= 3\cdot C(6, 3\cdot 15399 + 1) + 2 = 3\cdot C(6, 46198) + 2 =$

$= 3\cdot 1067427916 + 2 = 3202283748 + 2 = 3202283750.$

Приклад 2.2.11. Ефективна нумерація всіх операторних термів ППА-Ar-N задається на основі їх кодування β:

$\beta(o) = 0;$

$\beta(s) = 4;$

$\beta(+) = 8;$

$\beta(\cdot) = 12;$

$\beta(\dot{-}) = 16;$

$\beta(I^n_m) = 4\cdot C(n-m, m-1) + 20;$

$\beta(S^{n+1}(t_0, t_1,..., t_n)) = 4\cdot C(C^{n+1}(\gamma(t_0), \gamma(t_1),..., \gamma(t_n)), n-1) + 1;$

$\beta({}^N\Delta(t_0, t_1, t_2)) = 4\cdot C^3(\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2)) + 2;$

$\beta({}^N☼(t_0, t_1)) = 4\cdot C(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + 3.$

Ті $n \in N$, які не є кодами коректних ОТ, вважаємо номерами ОТ $^{N}☼(s, o)$ для $f_{\varnothing}$.

Приклад 2.2.12. Кодування θ операторних термів алгебри КРФ задамо так:

$$\theta(o) = 0;$$

$$\theta('x_i) = 5 \cdot i + 5;$$

$$\theta(s_{x_i}) = 5 \cdot i + 1;$$

$$\theta(S^{x_{i_1},\ldots x_{i_n}}(t_0, t_1, \ldots, t_n)) = 5 \cdot C(C^{2n+1}(i_1, \ldots, i_n, \theta(t_0), \theta(t_1), \ldots, \theta(t_n)), n-1) + 2;$$

$$\theta(R_{x_i, x_j}(t_1, t_2)) = 5 \cdot C^4(i, j, \theta(t_1), \theta(t_2)) + 3;$$

$$\theta(M_{x_i}(t)) = 5 \cdot C(i, \theta(t)) + 4.$$

Приклад 2.2.13. Кодування ζ операторних термів алгебри ППА-*Q*-*N* задамо так:

$$\zeta(o) = 0;$$

$$\zeta('x_i) = 8 \cdot i + 8;$$

$$\zeta(s_{x_i}) = 8 \cdot i + 1;$$

$$\zeta((+_{x_i x_j}) = 8 \cdot C(i, j) + 2;$$

$$\zeta(\times_{x_i x_j}) = 8 \cdot C(i, j) + 3;$$

$$\zeta(\div_{x_i x_j}) = 8 \cdot C(i, j) + 4;$$

$$\zeta(S^{x_{i_1},\ldots x_{i_n}}(t_0, t_1, \ldots, t_n)) = 8 \cdot C(C^{2n+1}(i_1, \ldots, i_n, \zeta(t_0), \zeta(t_1), \ldots, \zeta(t_n)), n-1) + 5;$$

$$\zeta(^{N}\Delta(t_0, t_1, t_2)) = 8 \cdot C^3(\zeta(t_0), \zeta(t_1), \zeta(t_2)) + 6;$$

$$\zeta(^{N}☼_{x_i}(t_1, t_2)) = 8 \cdot C^3(i, \theta(t_1), \theta(t_2)) + 7.$$

Завдання для самоконтролю

1. Укажіть, як задаються кодування і нумерація всіх МНР-програм.

2 Укажіть, як задаються кодування і нумерація всіх МТ.

3. Опишіть кодування операторного терма алгебри *n*-арних ЧРФ.

4. Опишіть кодування операторного терма алгебри *n*-арних ПРФ.

5. Опишіть кодування операторного терма ППА-*ar*-*N*.
6. Опишіть кодування операторного терма алгебри КРФ.
7. Опишіть кодування операторного терма ППА-*Q*-*N*.

Вправи

1. Знайдіть усі МНР-програми з кодами від 0 до 100 включно.
2. Знайдіть МНР-програми P_{111}, P_{128}, P_{289}, P_{555}.
3. Укажіть МНР-програму та її код для предикатів:
   1) "x – непарне число";
   2) "x – парне число";
   3) "$x = 3$";
   4) "$x \neq y$".
4. Укажіть МНР-програму та її код для функцій:
   1) $f(x) = 2x$;
   2) $f(x,y) = x - y$;
   3) $f(x) = [x/2]$;
   4) $f(x) = x/3$;
   5) $f(x) = sg(x)$;
   6) $f(x) = nsg(x)$;
   7) $f(x, y) = nsg(x+y)$;
   8) $f(x, y) = sg(x+y)$;
   9) $f(x, y) = sg(x \cdot y)$;
   10) $f(x, y) = nsg(x \cdot y)$;
   11) $f(x, y) = \max(x, y)$;
   12) $f(x, y) = \min(x, y)$.
5. Укажіть МТ та її код для функцій і предикатів:
   1) $f(x) = sg(x)$;
   2) $f(x) = nsg(x)$;
   3) $f(x, y) = nsg(x+y)$;
   4) $f(x, y) = sg(x+y)$;
   5) $f(x) = sg(x/2)$;
   6) $f(x) = nsg[x/2]$;
   7) "x – парне число";
   8) "x – непарне число".

2.3. Функція Ґьоделя. Елімінація примітивної рекурсії. Теза Чорча

Функція Ґьоделя **Г** дозволяє кодувати одним натуральним числом довільну скінченну послідовність натуральних чисел.

Вона визначається так: $\mathbf{Г}(x, y) = \mathrm{mod}(l(x),\ 1 + (y+1)\cdot r(x))$.

Отже, функція **Г** є ПРФ.

Теорема 2.3.1 (про основну властивість функції Ґьоделя). Для довільної скінченної послідовності натуральних чисел b_0, b_1,..., b_n існує натуральне число t таке, що $\mathbf{Г}(t, i) = b_i$ для всіх $i \in \{0,..., n\}$.

Кодування за допомогою функції Ґьоделя $\mathbf{Г}(x, y)$ довільних скінченних послідовностей натуральних чисел одним натуральним числом дозволяє при розширенні множини базових функцій промоделювати операцію примітивної рекурсії.

Теорема 2.3.2 (про елімінацію операції примітивної рекурсії). Функція $f = \mathrm{R}(g, h)$ може бути отримана з функцій g, h, базових функцій і функцій $+$, $\times$, $\dot{-}$ за допомогою скінченної кількості застосувань операцій суперпозиції S^{n+1} та мінімізації M.

Функцію **Г** можна отримати з функцій **o**, s, I^n_m та $+$, $\times$, $\dot{-}$, mod, l, r за допомогою операцій S^{n+1} та M. Своєю чергою, функції l та r отримують із функцій $[\sqrt{x}]$, $[x/2]$, **o**, s, I^n_m, $+$, $\times$, $\dot{-}$ за допомогою операцій S^{n+1}. Функції $[\sqrt{x}]$, $[x/2]$ та mod можна отримати з **o**, s, I^n_m, $+$, $\times$, $\dot{-}$ за допомогою S^{n+1} та M. Проте $nsg(x) = 1 \dot{-} x$, тому функцію **Г** можна отримати з функцій **o**, s, I^n_m, $+$, $\times$, $\dot{-}$ за допомогою операцій S^{n+1} та M.

Отже, функцію φ, а тому й функцію f, отримуємо з функцій g, h, **o**, s, I^n_m, $+$, $\times$, $\dot{-}$ за допомогою операцій S^{n+1} та M.

Наслідок 2.3.1. Клас ЧРФ збігається із класом функцій, отриманих із функцій **o**, s, I^n_m, $+$, $\times$, $\dot{-}$ за допомогою скінченної кількості застосувань операцій суперпозиції S^{n+1} та мінімізації M.

Розглянемо співвідношення між різними формальними уточненнями поняття алгоритмічно обчислюваної функції на множині N.

Теорема 2.3.3. Такі класи функцій збігаються:

1) ЧРФ;
2) програмованих n-арних функцій на N;
3) МНР-обчислюваних функцій;
4) функцій, обчислюваних за Тьюрінгом;
5) функцій, обчислюваних за Марковим;
6) функцій, обчислюваних за Постом.

Розглянуті нами формалізми задають один і той самий клас n-арних функцій на N. При цьому самі визначення формалізмів такі, що забезпечують ефективну обчислюваність описуваних ними функцій. Тому є всі підстави вважати, що ці формалізми є різними математичними уточненнями інтуїтивного поняття алгоритмічно обчислюваної функції. Уперше таке твердження щодо рекурсивних функцій висунув А. Чорч (1936), тому воно дістало назву *тези Чорча*.

С. Кліні узагальнив тезу Чорча на випадок часткових функцій. У цьому випадку тезу Чорча (ТЧ) можна сформулювати так:

Клас ЧРФ збігається із класом n-арних АОФ, заданих на множині натуральних чисел

Поняття АОФ не є строго визначеним математичним поняттям, тому теза Чорча математичному доведенню не підлягає.

Теза Чорча є *природно-науковим фактом*, підтвердженим такими результатами:

1) істотно різні формальні уточнення поняття АОФ, запропоновані різними авторами в різний час, виявилися еквівалентними в сенсі задання одного й того самого класу функцій;

2) перехід від задання функції в одному формалізмі до її задання в іншому формалізмі є конструктивним, тобто здійснюється певним алгоритмом (напр., за операторним термом

алгебри ЧРФ ефективно будується МНР-програма, що задає ту саму функцію);

3) для кожного з таких формалізмів усі задані в ньому функції алгоритмічно обчислювані в інтуїтивному сенсі;

4) усі відомі до цих пір алгоритмічно обчислювані *n*-арні функції на *N* виявилися частково рекурсивними. Нікому ще не вдалося навести приклад функції, яку можна було б вважати алгоритмічно обчислюваною в інтуїтивному сенсі, але яка не є ЧРФ.

З тези Чорча як наслідок випливає:

Клас РФ збігається із класом тотальних *n*-арних АОФ, заданих на множині натуральних чисел

Значення тези Чорча:

1) прийняття ТЧ перетворює інтуїтивні поняття алгоритму, обчислюваності, розв'язності в об'єкти математичного вивчення. Це дає можливість ставити й розв'язувати питання про алгоритмічну обчислюваність функцій, алгоритмічну розв'язність чи нерозв'язність масових проблем;

2) використання ТЧ як своєрідної аксіоми дозволяє в багатьох випадках замінити формальні задання алгоритмів на неформальні їх описи. Це істотно спрощує доведення, дозволяє виділити основну ідею доведення чи побудови, звільняючи їх від зайвих деталей.

Проте доведення на основі ТЧ завжди має бути ретельно аргументованим! При виникненні сумнівів треба провести суто формальне доведення.

Отже, у нас є всі підстави прийняти тезу Чорча й активно використовувати її в подальшому викладі.

Розглянемо приклад використання тези Чорча.

Приклад 2.3.1. Нехай f є ЧРФ. Доведемо, що ЧРФ є функція

$$h(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in E_f, \\ \text{невизначене в інших випадках.} \end{cases}$$

Розглянемо процес глобального обчислення всіх значень функції f. Такий процес розіб'ємо на етапи. На кожному етапі починаємо обчислення для наступного значення аргументу.

На етапі 0 робимо перший крок обчислення $f(0)$.

На етапі 1 робимо перший крок обчислення $f(1)$ і другий крок обчислення $f(0)$ і т. д.

На етапі n робимо перший крок обчислення $f(n)$, другий крок обчислення $f(n-1)$, …, $(n+1)$-й крок обчислення $f(0)$.

Якщо на якомусь етапі обчислення певного $f(m)$ завершується, то порівнюємо $f(m)$ та x. При $f(m) = x$ процес глобальних обчислень завершується, адже тоді $x \in E_f$, тому результатом роботи буде 1.

При $f(m) \neq x$ продовжуємо процес глобальних обчислень.

Ми описали алгоритм для обчислення функції $h(x)$, звідки за тезою Чорча функція $h(x)$ є ЧРФ.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення функції Ґьоделя.
2. Сформулюйте основну властивість функції Ґьоделя.
3. Сформулюйте теорему про елімінацію операції примітивної рекурсії.
4. Укажіть співвідношення між різними формальними уточненнями поняття алгоритмічно обчислюваної функції.
5. Сформулюйте тезу Чорча.
6. Укажіть, чи можна формально довести тезу Чорча.
7. Аргументуйте правильність тези Чорча.
8. Укажіть, у чому полягає значення тези Чорча.

Вправи

*1. Сформулюйте й доведіть теорему про моделювання операції примітивної рекурсії для випадку КЧРФ.

*2. Доведіть, що класи МТ- і НА-обчислюваних функцій збігаються.

*3. Доведіть, що кожна n-арна ЧРФ обчислювана за Постом.

*4. Доведіть рекурсивність функції f, заданої такою умовою:

1) $f(n)$ є $(n+1)$-ю цифрою після коми в десятковому розкладі числа e;

2) $f(n)$ є $(n+1)$-ю цифрою після коми в десятковому розкладі числа π.

5. Нехай функції f та g є ЧРФ. З'ясуйте, чи завжди є ЧРФ функція $h(x)$, задана умовою:

1) $h(x)=\begin{cases} 1, \text{ якщо } x\in D_f \cup D_g, \\ \text{невизначене в інших випадках;} \end{cases}$

2) $h(x)=\begin{cases} 1, \text{ якщо } x\in D_f \cup E_g, \\ \text{невизначене в інших випадках;} \end{cases}$

3) $h(x)=\begin{cases} 1, \text{ якщо } x\in E_f \cap D_g, \\ \text{невизначене в інших випадках;} \end{cases}$

4) $h(x)=\begin{cases} 1, \text{ якщо } x\in D_f \setminus D_g, \\ \text{невизначене в інших випадках.} \end{cases}$

3. НУМЕРАЦІЇ ЧРФ. УНІВЕРСАЛЬНІ ФУНКЦІЇ. ТЕОРЕМИ ПРО НЕРУХОМУ ТОЧКУ ДЛЯ ІНДЕКСНИХ ФУНКЦІЙ

У цьому розділі розглянемо ефективні нумерації алгоритмічно обчислюваних функцій, фундаментальне поняття універсальної функції і відповідні поняття універсальної алгоритмічної машини й універсальної програми, теорему про параметризацію (*s*-*m*-*n*-теорему), а також теореми Кліні про нерухому точку для індексних РФ. Твердження про існування нерухомих точок мають у математиці універсальний характер, зокрема, у теорії алгоритмів вони набувають вигляду теорем про псевдонерухому точку для індексних рекурсивних функцій (описані в цьому розділі) і нерухому точку для ефективних операцій на функціях і множинах (будуть розглянуті в розділі 8).

3.1. Ефективні нумерації алгоритмічно обчислюваних функцій

Наведемо приклади ефективних нумерацій АОФ.

Приклад 3.1.1. Ефективну нумерацію ϕ усіх ЧРФ задамо на основі кодування γ операторних термів алгебри ЧРФ (див. приклад 2.2.7).

Задання ЧРФ операторними термами неоднозначне, оскільки кожну ЧРФ можна описати нескінченною кількістю різних ОТ, отже, нумерація ϕ неоднозначна.

Число $n\in N$ вважаємо номером ЧРФ f, якщо n є кодом якогось ОТ і значенням цього ОТ є функція f. Числа, які не є кодами ОТ, і коди некоректних ОТ, які не задають ЧРФ, вважаємо номерами всюди невизначеної функції $f_{\varnothing}$.

Зрозуміло, що за кожною ЧРФ можна ефективно знайти її номер. З іншого боку, за кожним $n\in N$ ефективно визначається

ЧРФ f така, що $\phi(n) = f$. Справді, за n як за кодом будуємо ОТ, при цьому:

– якщо ОТ із таким кодом існує і задає ЧРФ, то $\phi(n)$ – саме ця f;

– якщо ОТ із таким кодом існує, але не задає ЧРФ, то $\phi(n) = f_{\varnothing}$;

– якщо ОТ із таким кодом не існує, то $\phi(n) = f_{\varnothing}$.

Отже, ϕ є ефективною нумерацією всіх ЧРФ.

Наприклад, для $f_{\varnothing}$ маємо ОТ $M(s)$, звідки номером ЧРФ $f_{\varnothing}$ є його код $\gamma(M(s)) = 19$ (див. приклад 2.2.7).

Приклад 3.1.2. Ефективну нумерацію всіх ПРФ задамо на основі кодування π ОТ алгебри ПРФ (приклад 2.2.9).

Така нумерація ПРФ неоднозначна.

Число $n \in N$ вважаємо номером ПРФ f, якщо n є кодом деякого ОТ і значенням ОТ є функція f.

Числа, які не є кодами ОТ, і коди тих ОТ, які не задають ПРФ, вважаємо номерами функції **о**.

Приклад 3.1.3. Ефективну нумерацію всіх програмованих n-арних функцій на N задамо на основі кодування β ОТ ППА-Ar-N (приклад 2.2.11). Зрозуміло, що така нумерація неоднозначна.

Число $n \in N$ вважаємо номером функції f, якщо n є кодом якогось ОТ і значенням цього ОТ є f. Числа, які не є кодами ОТ, і коди некоректних ОТ вважаємо номерами функції $f_{\varnothing}$.

Приклад 3.1.4. Ефективну нумерацію φ^n всіх n-арних МНР-обчислюваних функцій задамо на основі кодування МНР-програм (див. приклад 2.2.1).

Номером функції f буде код МНР-програми, яка обчислює f.

Кожна МНР-програма визначає єдину функцію фіксованої арності, тому така нумерація буде нумерацією функцій фіксованої арності n. Однак кожна n-арна МНР-обчислювана функція може бути задана нескінченною кількістю різних МНР-програм, тому така нумерація неоднозначна.

Приклад 3.1.5. Ефективну нумерацію всіх МНР-обчислюваних функцій можна ввести на основі кодування МНР-програм.

Номером n-арної функції f буде число $C(k, n)$, де k – код МНР-програми для f.

Приклад 3.1.6. Ефективну нумерацію всіх n-арних обчислюваних за Тьюрінгом функцій задамо на основі кодування МТ (див. приклад 2.2.5).

Номером функції f буде код МТ, яка обчислює f.

Кожна МТ визначає єдину функцію, якщо вказано її арність, тому це нумерація функцій фіксованої арності. Кожна n-арна обчислювана за Тьюрінгом функція може бути задана нескінченною кількістю різних МТ, тому ця нумерація неоднозначна.

Приклад 3.1.7. Ефективну нумерацію всіх обчислюваних за Тьюрінгом функцій можна ввести на основі кодування МТ.

Номером n-арної функції f буде число $C(k, n)$, де k – код МТ для f.

Згідно зі збігом класів ЧРФ, програмованих n-арних функцій на N, МНР- і МТ-обчислюваних функцій, нумерації прикладів 3.1.4, 3.1.6 можна розглядати як ефективні нумерації всіх n-арних ЧРФ для фіксованого n, а нумерації прикладів 3.1.1, 3.1.3, 3.1.5, 3.1.7 – як ефективні нумерації всіх ЧРФ.

Зафіксуємо для кожного $n \geq 1$ деяку ефективну нумерацію n-арних ЧРФ. Зазвичай це буде нумерація із прикладу 3.1.4 на основі кодування МНР-програм.

Інколи використовуватимемо нумерацію із прикладу 3.1.6 на основі кодування МТ.

Ці нумерації назвемо *стандартними нумераціями n-арних ЧРФ.*

Для стандартних нумерацій уведемо такі позначення:

n-арну ЧРФ із номером m позначатимемо φ_m^n .

У випадку $n = 1$ уживатимемо також спрощене позначення φ_m.

Область визначення та область значень функції φ_m^n позначимо, відповідно, D_m^n та E_m^n .

У випадку $n = 1$ уживатимемо позначення D_m та E_m.

Номер функції назвемо також *індексом* функції.

Номер функції у стандартній нумерації назвемо *стандартним індексом* функції.

Маючи деякий індекс ЧРФ f, можна ефективно знайти як завгодно великий індекс тієї самої f.

Приклад 3.1.8. Для кожної ЧРФ φ_m^n і кожного $j \in N$ ефективно знайдеться $k \in N$ таке, що $k > j$ та $\varphi_k^n = \varphi_m^n$.

Обмежимось розглядом випадку нумерації n-арних ЧРФ кодами МНР-програм. У кінець заданої МНР-програми P_m допишемо j команд вигляду $T(0, 0)$. Нехай k – код отриманої у такий спосіб МНР-програми. Тоді $k > j$ та $\varphi_k^n = \varphi_m^n$.

Ґьоделеві нумерації. Перехід від одної з описаних вище нумерацій ЧРФ до іншої такої нумерації ефективний: існує алгоритм, який за номером функції f в одній нумерації φ дозволяє знайти номер f в іншій нумерації ψ.

Наприклад, алгоритм переходу від нумерації прикладу 3.1.4 до нумерації прикладу 3.1.6: за номером k як за кодом МНР-програми будуємо програму P_k; за P_k будуємо МТ, що задає ту саму функцію; код такої МТ – шуканий номер у нумерації прикладу 3.1.6.

Нумерації з описаною вище властивістю називають ґьоделевими. Уточнимо поняття ґьоделевої нумерації для n-арних ЧРФ.

Нумерація ξ *ґьоделева*, якщо існують рекурсивні функції f та g такі:

– для кожного $m \in N$ маємо $\varphi_m^n = \xi_{f(m)}$;

– для кожного $k \in N$ маємо $\xi_k = \varphi_{g(k)}^n$.

Це означає, що існує пара алгоритмів, перший із яких за стандартним індексом функції знаходить її ξ-індекс, а другий за ξ-індексом функції – її стандартний індекс.

Приклад 3.1.9. Кожна ґьоделева нумерація ефективна.

Нехай нумерація ξ ґьоделева. За ЧРФ, заданою стандартним індексом (кодом МНР-програми) m як φ_m^n, ефективно (використовуючи РФ f) знаходимо її ξ-індекс $f(m)$; за ξ-індексом k ефективно (використовуючи РФ g) знаходимо ЧРФ, задану кодом МНР-програми (стандартним індексом) $g(m)$.

Важливе поняття обчислюваної нумерації вводимо так.

Нехай **F** – деякий клас функцій вигляду $X \to Y$, для якого задано нумерацію $\xi : N \to \mathbf{F}$. З кожною нумерацією ξ пов'язана функція $u : N \times X \to Y$, що визначається умовою $u(n, x) = \xi_n(x)$.

Таку функцію u називають *спряженою* з нумерацією ξ.

Нумерація *обчислювана*, якщо спряжена з нею функція є ЧРФ.

Приклад 3.1.10. Кожна ґьоделева нумерація обчислювана.

Справді, нехай нумерація ξ ґьоделева, нехай g – РФ із визначення ґьоделевої нумерації. Тоді спряжена з нумерацією ξ функція $u(n, x) = \xi_n(x) = \varphi^n_{g(k)}$ є ЧРФ за тезою Чорча.

Зворотне твердження неправильне. Кожна обчислювана нумерація в певному сенсі зводиться до ґьоделевої, водночас існують приклади неґьоделевих обчислюваних нумерацій.

Завдання для самоконтролю

1. Укажіть, як задати ефективну нумерацію всіх МНР-обчислюваних функцій фіксованої арності *n*.
2. Укажіть, як задати ефективну нумерацію всіх МТ-обчислюваних функцій фіксованої арності *n*.
3. Укажіть, як задати ефективну нумерацію всіх МНР- і МТ-обчислюваних функцій.
4. Укажіть, як задати ефективну нумерацію всіх *n*-арних ЧРФ.
5. Укажіть, як задати ефективну нумерацію всіх *n*-арних ПРФ.
6. Укажіть, які нумерації *n*-арних ЧРФ вважають стандартними.
7. Дайте визначення стандартного індексу ЧРФ.
8. Дайте визначення ґьоделевої нумерації *n*-арних ЧРФ.
9. Дайте визначення спряженої з нумерацією функції.
10. Дайте визначення обчислюваної нумерації.

Вправи

1. Задайте ефективну нумерацію всіх квазіарних РФ.
2. Задайте ефективну нумерацію всіх програмованих квазіарних функцій на N.
3. Чи існують $m, n \in N$ такі, що $m \neq n$, $m \in D_n$ та $n \in D_m$?
4. Чи існують $m, n \in N$ такі, що $m \neq n$, $m \in E_n$ та $n \in E_m$?
5. Чи існує РФ f: для всіх x маємо $D_x = \{f(x)\}$?

3.2. Універсальні функції. *s-m-n*-теорема

Для довільного класу k-арних функцій $\mathbf{F}$ клас усіх функцій із $\mathbf{F}$ фіксованої арності n будемо позначати $\mathbf{F}^n$.

Функція $u(y, x_1,..., x_n)$ *універсальна* для класу $\mathbf{F}^n$, якщо:

– для кожного значення m функція $u(m, x_1,..., x_n)\in \mathbf{F}^n$;

– для кожної $f\in \mathbf{F}^n$ існує таке m, що $f(x_1,..., x_n) = u(m, x_1,..., x_n)$ для всіх $x_1,..., x_n$.

Теорема 3.2.1. Нехай $\mathbf{T}$ – деякий клас тотальних n-арних функцій на N, який містить функції $\mathbf{o}$, s, I^n_m та є замкненим відносно суперпозиції. Нехай функція u універсальна для $\mathbf{T}^n$. Тоді $u\notin \mathbf{T}^{n+1}$.

Припустимо супротивне: така $u\in \mathbf{T}$, тобто $u\in \mathbf{T}^{n+1}$.

Визначимо функцію g так: $g(x_1,..., x_n) = u(x_1, x_1,..., x_n) + 1$.

Тоді маємо $g\in \mathbf{T}^n$. Згідно з універсальністю функції u, існує таке m, що для всіх значень $x_1,..., x_n$ маємо $g(x_1,..., x_n) = u(m, x_1,..., x_n)$. Звідси $g(m, x_2,..., x_n) = u(m, m, x_2,..., x_n)$. Однак за визначенням g маємо $g(m, x_2,\ldots, x_n) = u(m, m, x_2,..., x_n) + 1$. Дістали суперечність, тому що g та u тотальні.

Наслідок 3.2.1. Функція, універсальна для класу n-арних РФ, не є ЧРФ.

Справді, така функція тотальна й не є РФ.

Наслідок 3.2.2. Функція, універсальна для класу n-арних ПРФ, не є ПРФ.

Теорема 3.2.2. Існує РФ, універсальна для класу n-арних ПРФ.

На основі розглянутої вище ефективної нумерації ПРФ задамо алгоритм для обчислення функції $u(y, x_1,..., x_n)$, універсальної для класу n-арних ПРФ.

За y як за кодом ОТ алгебри ПРФ побудуємо відповідний ОТ і перевіримо, чи задає він n-арну ПРФ. Якщо ні (ОТ некоректний чи задає ПРФ арністю $\neq n$), то видаємо як результат значення 0 (тоді $u(y, x_1,..., x_n)$ – це функція $\mathbf{o}^n$). Якщо так, то обчислимо значення заданої цим термом n-арної ПРФ над $x_1,..., x_n$.

Отже, u – це тотальна $(n+1)$-арна АОФ, за тезою Чорча вона є РФ.

Наслідок 3.2.3. Існує РФ, яка не є ПРФ.

Наслідок 3.2.4. Для класів функцій маємо строгі включення: ПРФ $\subset$ РФ $\subset$ ЧРФ.

Теорема 3.2.3. Існує ЧРФ, універсальна для класу n-арних ЧРФ.

Розглянемо функцію $u(y, x_1,..., x_n) = \varphi_y^n(x_1,..., x_n)$. Вона є універсальною для класу n-арних ЧРФ:

– для кожного m функція $u(m, x_1,..., x_n) = \varphi_m^n(x_1,..., x_n)$ – ЧРФ;

– кожна n-арна ЧРФ f – це функція φ_m^n для деякого m, тобто

$$f(x_1,..., x_n) = \varphi_m^n(x_1,..., x_n) = u(m, x_1,..., x_n) \text{ для всіх } x_1,..., x_n.$$

Задамо алгоритм для обчислення функції u.

За y як за кодом МНР-програми відновимо програму P_y для функції φ_y^n. Потім запустимо P_y над значеннями $x_1,..., x_n$.

Отримаємо значення $\varphi_y^n(x_1,..., x_n)$.

За тезою Чорча така u – n-арна ЧРФ.

МНР-програма, яка обчислює універсальну ЧРФ, називається *універсальною МНР-програмою*.

Універсальна програма вміє декодувати довільне число y у програму P_y, а далі вона моделює роботу P_y. Тому така універсальна програма може бути задана у явному вигляді.

Отже, можна ефективно знайти індекс k універсальної функції u у стандартній нумерації $(n+1)$-арних ЧРФ, тобто u – функція φ_k^{n+1}.

Машина Тьюрінга, яка обчислює універсальну ЧРФ, називається *універсальною МТ*.

Таку МТ, здатну моделювати роботу довільної МТ за її кодом, теж можна задати у явному вигляді.

Універсальна МНР-програма й універсальна МТ є абстрактними моделями сучасних комп'ютерів. Вони реалізують у абстрактному вигляді *принцип програмного керування* – виконання заданої програми над заданими даними.

Особливе місце в теорії алгоритмів посідає ***s-m-n*-теорема**. Інша її назва – теорема про параметризацію.

Нехай маємо $(m+n)$-арну ЧРФ $\varphi_z^{m+n}(x_1,..., x_m, y_1,..., y_n)$. Тоді для кожного фіксованого значення $a_1,..., a_m$ аргументів $x_1,..., x_m$

функція φ_z^{m+n} стає n-арною ЧРФ $\varphi_k^n(y_1,..., y_n)$. Покажемо, що її індекс k може бути ефективно знайдений за z та $a_1,..., a_m$. Це означає, що існує $(m+1)$-арна РФ, яка обчислює зазначений індекс. Таку функцію традиційно позначають s_m^n, а твердження, відповідно, називають s-m-n-теоремою.

Теорема 3.2.4 (s-m-n-теорема). Для довільних $m, n \geq 1$ існує $(m+1)$-арна РФ $s_m^n(z, x_1,..., x_m)$ така, що для всіх $z, x_1,..., x_m$, $y_1,..., y_n$ маємо $\varphi_z^{m+n}(x_1,..., x_m, y_1,..., y_n) = \varphi^n_{s_n^m(z, x_1,...,x_m)}(y_1,..., y_n)$.

Приклад 3.2.1. Посилимо твердження теореми 3.2.4, знявши залежність функції s_m^n від n.

Використаємо МТ для задання ЧРФ. За z визначимо МТ із кодом z для функції φ_z^{m+n}. Задамо нову МТ M, яка ліворуч від початкового вмісту стрічки дописує слово $|^{x_1}\#|^{x_2}\#...\#|^{x_m}$, а далі моделює роботу МТ із кодом z. Така МТ M при вході $|^{y_1}\#|^{y_2}\#...\#|^{y_n}$ обчислює n-арну функцію φ_k^n, причому k – код МТ M – не залежить від n.

Теорема 3.2.5 (спрощена форма s-m-n-теореми). Для кожної ЧРФ $f(x_1,..., x_m, y_1,..., y_n)$ існує РФ $s(x_1,..., x_m)$ така: для всіх $x_1,..., x_m$, $y_1,..., y_n$ маємо $f(x_1,..., x_m, y_1,..., y_n) = \varphi^n_{s(x_1,...,x_m)}(y_1,..., y_n)$.

При $m = n = 1$ спрощена s-m-n-теорема формулюється так:

Теорема 3.2.6. Для кожної ЧРФ $f(x, y)$ існує РФ $s(x)$ така: для всіх значень x, y маємо $f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$.

Розглянемо приклади застосування s-m-n-теореми.

Приклад 3.2.2. Існує РФ $s(x, y)$ така: $\varphi_{s(x,y)}(z) = \varphi_x(z) + \varphi_y(z)$ для всіх $x, y, z \in N$.

Функція $f(x, y, z) = \varphi_x(z) + \varphi_y(z)$ є ЧРФ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x, y)$: $f(x, y, z) = \varphi_{s(x,y)}(z) = \varphi_x(z) + \varphi_y(z)$ для всіх $x, y, z \in N$.

Приклад 3.2.3. Існує РФ $s(x)$ така: $D^2_{s(x)} = \{(u, v) |\ x = 2u + 3v^2\}$ для всіх $x \in N$.

Функція $f(x,u,v)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x=2u+3v^2, \\ \text{невизначене інакше,}\end{cases}$ є ЧРФ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$: $f(x,u,v)=\varphi^2_{s(x)}(u,v)$ для всіх $x,u,v\in N$. Зафіксуємо x; тоді $(u,v)\in D^2_{s(x)} \Leftrightarrow \varphi^2_{s(x)}(u, v)\downarrow \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x,u,v)\downarrow \Leftrightarrow x=2u+3v^2$.

Звідси отримуємо $D^2_{s(x)}=\{(u, v) \mid x=2u+3v^2\}$.

Приклад 3.2.4. Існують РФ $u(x,y)$ і $s(x,y)$ такі: для всіх $x,y\in N$ маємо $D_{u(x,y)}=D_x\cup D_y$ та $D_{s(x,y)}=D_x\cap D_y$.

Функція $f(x,y,z)=\begin{cases}z, \text{ якщо } z\in D_x \text{ або } z\in D_y, \\ \text{невизначене інакше,}\end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ.

За s-m-n-теоремою існує РФ $u(x,y)$ така: $f(x,y,z)=\varphi_{u(x,y)}(z)$ для всіх $x,y,z\in N$. Зафіксуємо x та y. Маємо $z\in D_{u(x,y)} \Leftrightarrow \varphi_{u(x,y)}(z)\downarrow \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x,y,z)\downarrow \Leftrightarrow z\in D_x\cup D_y$. Звідси $D_{u(x,y)}=D_x\cup D_y$.

Функція $g(x,y,z)=\begin{cases}z, \text{ якщо } z\in D_x \text{ та } z\in D_y, \\ \text{невизначене інакше,}\end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ.

За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x,y)$ така: $g(x,y,z)=\varphi_{s(x,y)}(z)$ для всіх $x,y,z\in N$. Зафіксуємо x та y. Маємо $z\in D_{s(x,y)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x,y)}(z)\downarrow \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(x, y, z)\downarrow \Leftrightarrow z\in D_x\cap D_y$. Звідси $D_{s(x,y)}=D_x\cap D_y$.

Приклад 3.2.5. Існують РФ s та t такі: для кожного $x\in N$ маємо $E_{s(x)}=D_x$ та $D_{t(x)}=E_x$.

Функція $f(x,y)=\begin{cases}y, \text{ якщо } y\in E_x, \\ \text{невизначене, якщо } y\notin E_x,\end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ.

Тому за s-m-n-теоремою існує РФ $t(x)$: $f(x,y)=\varphi_{t(x)}(y)$ для всіх значень x,y. Тоді $y\in E_x \Leftrightarrow f(x,y)\downarrow \Leftrightarrow \varphi_{t(x)}(y)\downarrow \Leftrightarrow y\in D_{t(x)}$. Звідси $D_{t(x)}=E_x$.

Функція $g(x,y)=\begin{cases}y, \text{ якщо } y\in D_x, \\ \text{невизначене, якщо } y\notin D_x,\end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ.

Тому за s-m-n-теоремою існує така РФ $s(x)$, що $g(x,y)=\varphi_{s(x)}(y)$ для всіх значень x,y. За побудовою $E_{s(x)}=D_{s(x)}$. Маємо $y\in D_x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(x,y)\downarrow \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(y)\downarrow \Leftrightarrow y\in D_{s(x)} \Leftrightarrow y\in E_{s(x)}$. Звідси $D_x=E_{s(x)}$.

Приклад 3.2.6. Існує РФ $s(x,y)$: $D_{s(x,y)}=D_{2x+1}\cap E_{3y}$ для всіх $x,y\in N$.

Функція $f(x,y,z)=\begin{cases}1, \text{ якщо } z\in D_{2x+1} \text{ та } z\in E_{3y}, \\ \text{невизначене інакше,}\end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x,y)$: $f(x,y,z)=\varphi_{s(x,y)}(z)$ для всіх $x, y, z\in N$. Зафіксуємо x та y. Тоді $z\in D_{s(x,y)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x,y)}(z)\downarrow \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x,y,z)\downarrow \Leftrightarrow z\in D_{2x+1}\cap E_{3y}$. Звідси $D_{s(x,y)} = D_{2x+1}\cap E_{3y}$.

Приклад 3.2.7. Існує РФ $s(x,y,z)$ така: для всіх $x,y,z\in N$ маємо $D_{s(x,y,z)} = E_{s(x,y,z)} = (D_{3x}\cup D_y)\setminus\{2, 5z\}$.

$$f(x,y,z,u)=\begin{cases}u, \text{ якщо } (u\in D_{3x} \text{ або } u\in D_y) \text{ та } u\neq 2,\ u\neq 5z, \\ \text{невизначене інакше,}\end{cases}$$

є ЧРФ за ТЧ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x,y,z)$ така: $f(x,y,z,u)=\varphi_{s(x,y,z)}(u)$ для всіх $x,y,z,u\in N$. Зафіксуємо значення x,y,z. За побудовою f маємо $D_{s(x,y,z)} = E_{s(x,y,z)}$. Тепер маємо $u\in E_{s(x,y,z)} \Leftrightarrow u\in D_{s(x,y,z)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x,y,z)}(u)\downarrow \Leftrightarrow f(x,y,z,u)\downarrow \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow u\in (D_{3x}\cup D_y)\setminus\{2, 5z\}$. Звідси $D_{s(x,y,z)} = E_{s(x,y,z)} = (D_{3x}\cup D_y)\setminus\{2, 5z\}$.

Приклад 3.2.8. Для кожної 1-арної ЧРФ f існує РФ $s(x)$ така, що для всіх $x\in N$ маємо $D_{s(x)} = f^{-1}(D_{3x+1})$.

Розглянемо функцію $g(x,y)=\varphi_{3x+1}(f(y))$. Вона є ЧРФ за ТЧ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$ така, що для всіх $x,y\in N$ маємо $g(x,y)=\varphi_{s(x)}(y)$. Зафіксуємо x. Тоді $y\in D_{s(x)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(y)\downarrow \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(x,y)\downarrow \Leftrightarrow \varphi_{3x+1}(f(y))\downarrow \Leftrightarrow f(y)\in D_{3x+1} \Leftrightarrow y\in f^{-1}(D_{3x+1})$. Звідси маємо $D_{s(x)} = f^{-1}(D_{3x+1})$.

Приклад 3.2.9. Для кожної 1-арної ЧРФ f існує РФ $s(x)$ така, що для всіх $x\in N$ маємо $D_{s(x)} = f(D_x)$.

Функція $h(x,y)=\begin{cases}1, \ y=f(z) \text{ для деякого } z\in D_x, \\ \text{невизначене інакше,}\end{cases}=$

$=\begin{cases}1, \text{ існує } z: \varphi_x(z)\downarrow \text{ та } y=f(z), \\ \text{невизначене інакше,}\end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ (аргументувати!), тому за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$ така: $h(x,y)=\varphi_{s(x)}(y)$ для всіх $x,y\in N$. Зафіксуємо x. Маємо $y\in D_{s(x)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(y)\downarrow \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(x,y)\downarrow \Leftrightarrow y=f(z)$ для деякого $z\in D_x \Leftrightarrow y\in f(D_x)$. Звідси $D_{s(x)} = f(D_x)$.

Приклад 3.2.10. Існує РФ $s(x)$ така, що $D_{s(x)}=\{x\}$ для всіх $x\in N$.

Функція $h(x,y) = \begin{cases} y, \text{ якщо } y = x, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$

є ЧРФ за ТЧ $\Rightarrow$ за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$: $h(x,y)=\varphi_{s(x)}(y)$ для всіх $x,y\in N \Rightarrow$ для всіх $x\in N$ маємо $D_{s(x)}=\{x\}$.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення універсальної функції.
2. Сформулюйте теореми про універсальні функції.
3. Дайте визначення універсальної ЧРФ.
4. Дайте визначення універсальної МНР-програми.
5. Дайте визначення універсальної МТ.
6. Опишіть принцип роботи універсальної МНР-програми.
7. Опишіть, як пов'язані універсальні алгоритмічні машини із програмуванням.
8. Сформулюйте s-m-n-теорему в загальному вигляді.
9. Сформулюйте s-m-n-теорему у спрощеній формі.

Вправи

1. Чи існує РФ f: для всіх $x\in N$ маємо $D_{f(x)}=\{0,1,\ldots,x\}$?

2. Побудуйте нескінченну послідовність попарно різних натуральних чисел $n_0, n_1, \ldots$ таку, щоб для всіх $i\in N$ мати $D_{n_{i+1}}=\{n_i\}$.

3. Доведіть існування таких РФ s:

1) $D^3_{s(x)}=\{(u, v, w) \mid x=u^2+v^2+w^2\}$ для всіх $x\in N$;

2) $D^4_{s(x)}=\{(u, v, w, t) \mid x=6u+3v+4w+5t\}$ для всіх $x\in N$;

3) $D_{s(x,y)}=E_{2x+3}\cap D_{3y+2}$ для всіх $x, y\in N$;

4) $D_{s(x,y,z)}=(D_x\cap E_y)\cup D_z$ для всіх $x, y, z\in N$;

5) $E_{s(x,y)}=(D_{3x}\cap E_{2y})\cup\{x, y\}$ для всіх $x, y\in N$;

6) $D_{s(x,y,z)}=(D_x\cup E_{3y})\cap D_{2z}$ для всіх $x, y, z\in N$;

7) $E_{s(x,y,z)}=\varphi_z^{-1}(E_x\cap D_y)$ для всіх $x, y, z\in N$;

8) $D_{s(x,y,z)}=\varphi_z^{-1}(D_{x+7}\cup D_{2y+1})$ для всіх $x, y, z\in N$;

9) $E_{s(x,y,z)}=\varphi_z(E_{3x}\cap D_{5y})$ для всіх $x, y, z\in N$.

3.3. Теореми Кліні про псевдонерухому точку для індексних рекурсивних функцій

Теореми про нерухому точку зустрічаються в багатьох розділах математики. У цьому підрозділі розглянемо теореми про нерухому точку для індексних рекурсивних функцій (точніше кажучи, вони є теоремами про *псевдонерухому* точку). Такі теореми є твердженнями про індекси обчислюваних функцій, їхнє доведення може розглядатися як розвиток діагонального методу: воно використовує тільки s-m-n-теорему й обчислюваність універсальної ЧРФ.

Теорема 3.3.1. Нехай f – $(n+1)$-арна РФ. Тоді існує n-арна РФ g:

$$\varphi_{g(x_1,...,x_n)} = \varphi_{f(g(x_1,...,x_n),x_1,...,x_n)} \text{ для всіх значень } x_1,..., x_n.$$

За s-m-n-теоремою існує РФ $s(u, x_1,..., x_n)$: для всіх $u, x_1,..., x_n, y$

$$\varphi_{\varphi_u^{n+1}(u,x_1,...,x_n)}(y) = \varphi_{s(u,x_1,...,x_n)}(y). \qquad (1)$$

Нехай функція $f(s(u, x_1,..., x_n), x_1,..., x_n)$ має індекс k у нумерації $(n+1)$-арних ЧРФ, тобто це функція $\varphi_k^{n+1}(u, x_1,..., x_n)$. За тотальністю f та s така φ_k^{n+1} тотальна. Тому при $u = k$ для всіх $x_1,..., x_n$ маємо

$$f(s(u, x_1,..., x_n), x_1,..., x_n) = \varphi_k^{n+1}(k, x_1,..., x_n). \qquad (2)$$

З умови (1) при $u = k$ та з умови (2) для всіх $x_1,..., x_n$ маємо

$$\varphi_{f(s(x_1,...,x_n),x_1,...,x_n)} = \varphi_{\varphi_k^{n+1}(k,x_1,...,x_n)} = \varphi_{s(k,x_1,...,x_n)}.$$

Звідси $g(x_1,..., x_n) = s(k, x_1,..., x_n)$ – це шукана РФ.

Для випадку $n = 0$ теорему 3.3.1 переформулюємо:

Теорема 3.3.2. Нехай $f(x)$ – РФ. Тоді існує $n\in N$ таке: $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$.

Наслідок 3.3.1. Нехай $f(x)$ – РФ. Тоді існує $n\in N$ таке: $D_n = D_{f(n)}$ та $E_n = E_{f(n)}$.

Згідно з теоремою 3.3.2, візьмемо $n\in N$ таке, що $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$.

Наслідок 3.3.2 (первинне формулювання С. Кліні теореми про псевдонерухому точку). Нехай $h(z, x)$ – ЧРФ. Тоді існує $n \in N$ таке, що для всіх x маємо $h(n, x) = \varphi_n(x)$.

За s-m-n-теоремою існує РФ $s(z)$ така, що $h(z, x) = \varphi_{s(z)}(x)$ для всіх z, x. За теоремою 3.3.2 існує таке n, що $\varphi_n = \varphi_{s(n)}$, тобто для всіх x маємо $h(n, x) = \varphi_{s(n)}(x) = \varphi_n(x)$.

Приклад 3.3.1. Виведемо теорему 3.3.2 з наслідку 3.3.2.

Нехай $f(x)$ – РФ. За тезою Чорча функція $h(z, x) = \varphi_{g(z)}(x)$ є ЧРФ. За наслідком 3.3.2 існує $n \in N$ таке, що $h(n, x) = \varphi_n(x)$ для всіх x, тобто для всіх x маємо $h(n, x) = \varphi_{g(n)}(x) = \varphi_n(x)$.

Отже, наслідок 3.3.2 і теорема 3.3.2 еквівалентні.

Теорема Кліні про нерухому точку для індексних рекурсивних функцій – це фактично теорема про *псевдонерухому* точку.

Справді, умова $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$ не означає, що $n = f(n)$, а свідчить тільки про те, що n і $f(n)$ – індекси однієї й тієї самої ЧРФ.

Теорему про нерухому точку для індексних функцій називають також теоремою про рекурсію, тому що вона виражає рекурсивне визначення найзагальнішого вигляду.

Наприклад, визначимо функцію φ_n через задану РФ f як $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$. Тоді φ_n ефективно визначена через n – код МНР-програми для її обчислення, тому що таке n існує згідно з теоремою 3.3.2.

МНР-програму P назвемо *самотвірною*, якщо для довільного $x \in N$ маємо $P(x){\downarrow}\tau(P)$, де $\tau(P)$ – код програми P.

На перший погляд, таких програм бути не може, тому що для побудови P треба знати $\tau(P)$, тобто саму програму P. Проте самотвірні програми таки існують!

Приклад 3.3.2. Існує МНР-програма P така, що $P(x){\downarrow}\tau(P)$ для всіх $x \in N$.

Візьмемо функцію $h(z, x) = z$. За наслідком 3.3.2 існує таке n, що для всіх x маємо $h(n, x) = \varphi_n(x)$. Отже, $\varphi_n(x) = h(n, x) = n$ для всіх x. Тому програма P із кодом n є шуканою.

Нерухому точку кожної РФ φ_z можна *ефективно* визначити за індексом z цієї РФ. Це посилює теорему 3.3.2.

Теорема 3.3.3. Існує РФ $\alpha(x)$ така:

для кожного $n\in N$, якщо φ_n є РФ, то $\varphi_{\alpha(n)} = \varphi_{\varphi_n(\alpha(n))}$.

Для кожної РФ можна ефективно знайти монотонно зростаючу послідовність її нерухомих точок.

Теорема 3.3.4. Для кожної РФ $f(x)$ існує строго монотонна РФ $\alpha(x)$ така, що для кожного $n\in N$ маємо $\varphi_{\alpha(n)} = \varphi_{f(\alpha(n))}$.

Наслідок 3.3.3. Для кожної РФ $f(x)$ і кожного $k\in N$ існує $n\in N$ таке, що $n > k$ та $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$.

Отже, множина нерухомих точок кожної РФ *нескінченна*.

Приклад 3.3.3. Однозначна нумерація $\xi: N \to ЧРФ^1$ на основі стандартної нумерації $\varphi: N \to ЧРФ^1$. Задамо тотальну функцію $f(x)$:

$f(0) = 0;$

$f(x+1) = \mu_z(\varphi_z \neq \varphi_{f(0)}, \varphi_z \neq \varphi_{f(1)}, \ldots, \varphi_z \neq \varphi_{f(x)}).$

Нумерація ξ, задана умовою $\xi_n = \varphi_{f(n)}$, – шукана однозначна.

Проте така нумерація неефективна: $f(x)$ не є РФ і не є ЧРФ.

Розглянуті нами ефективні нумерації ЧРФ неоднозначні. Однозначні ефективні нумерації ЧРФ існують, але немає в певному сенсі "природних" однозначних ефективних нумерацій ЧРФ.

Теорема 3.3.5. Нехай $f(x)$ – строго монотонна тотальна функція така:

– якщо $m \neq n$, то $\varphi_{f(m)} \neq \varphi_{f(n)}$;

– $f(n)$ – найменший індекс функції $\varphi_{f(n)}$.

Тоді функція f не є ЧРФ.

Приклад 3.3.4. Спільної нерухомої точки для двох довільних РФ може не бути.

Нехай u та v – різні РФ. Нехай k та m – індекси функцій u та v, тобто $u = \varphi_k$, $v = \varphi_m$. Візьмемо функції-константи $f(x) = k$ та $g(x) = m$. Нехай n – спільна нерухома точка для f та $g \Rightarrow \varphi_n = \varphi_{f(n)}$ та $\varphi_n = \varphi_{g(n)}$. Звідси $u = \varphi_k = \varphi_{f(n)} = \varphi_n = \varphi_{g(n)} = \varphi_m = v$, що суперечить $u \neq v$.

Водночас можна знайти пару ефективно зв'язаних нерухомих точок для пари заданих РФ.

Теорема 3.3.6 (про парну рекурсію). Для кожної пари РФ $f(x)$ та $g(x)$ існують m, $n\in N$ такі, що $\varphi_m = \varphi_{f(C(m,n))}$ та $\varphi_n = \varphi_{g(C(m,n))}$.

Розглянемо приклади застосування теореми Кліні про нерухому точку для індексних РФ.

Приклад 3.3.5. Існує $n\in N$ таке: для всіх x маємо $\varphi_n(x) = 2n + x^{3n}$.

Візьмемо функцію $h(z, x) = 2z + x^{3z}$. За наслідком 3.3.2 існує таке n, що для всіх x маємо $h(n, x) = \varphi_n(x)$.

Отже, для всіх x отримуємо $\varphi_n(x) = h(n, x) = 2n + x^{3n}$.

Приклад 3.3.6. Існує $n\in N$ таке, що $D_n = E_n = \{n\}$.

Візьмемо функцію $h(z, x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x = z, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$

Така h є ЧРФ. За наслідком 3.3.2 існує таке n, що для всіх x маємо $h(n, x) = \varphi_n(x)$. Тоді $\varphi_n(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x = n, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$

Звідси отримуємо $D_n = E_n = \{n\}$.

Приклад 3.3.7. Існує $n\in N$ таке, що $D_n = E_n = N\backslash\{n, 2n, 3n\}$.

Задамо $h(z, x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \neq z,\ x \neq 2z \text{ та } x \neq 3z, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$

Така h є ЧРФ. За наслідком 3.3.2 існує n таке: $h(n, x) = \varphi_n(x)$ для всіх x. Тоді $\varphi_n(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \neq n,\ x \neq 2n \text{ та } x \neq 3n, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$

Звідси отримуємо $D_n = E_n = N\backslash\{n, 2n, 3n\}$.

Приклад 3.3.8. Існує $n\in N$ таке, що
$D_n = E_n = \{x \mid x \text{ непарне}\}\cup\{0, 2, 4,..., 2n\}$.

Функція $h(z, x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \text{ непарне або } x\in\{0, 2, 4, ..., 2z\}, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$

є ЧРФ за тезою Чорча. За наслідком 3.3.2 існує таке n, що $h(n, x) = \varphi_n(x)$ для всіх x. Тоді

$\varphi_n(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \text{ непарне або } x\in\{0, 2, 4, ..., 2n\}, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$

Звідси $D_n = E_n = \{x \mid x \text{ непарне}\}\cup\{0, 2, 4,..., 2n\}$.

Приклад 3.3.9. Існує $n \in N$ таке, що
$D_n = E_n = \{x \mid \varphi_n(5x+2)\downarrow\} \cap \{x \mid x \text{ парне}\}$.

Функція $h(z, x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } \phi_z(5x+2)\downarrow \text{ та } x \text{ парне}, \\ \text{невизначене інакше}, \end{cases}$

є ЧРФ за тезою Чорча. За наслідком 3.3.2 існує таке n, що для всіх x отримуємо

$$h(n, x) = \varphi_n(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } \phi_n(5x+2)\downarrow \text{ та } x \text{ парне}, \\ \text{невизначене інакше}, \end{cases}$$

тому $D_n = E_n = \{x \mid \varphi_n(5x+2)\downarrow\} \cap \{x \mid x \text{ парне}\}$.

Приклад 3.3.10. Існує РФ $g(x)$ така: $D_{g(x)} = E_{g(x)} = \{3g(x) + 4^x\}$ для кожного $x \in N$.

Функція $h(t, x, y) = \begin{cases} y, \text{ якщо } y = 3t + 4^x, \\ \text{невизначене інакше}, \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ.

За s-m-n-теоремою існує РФ $s(t, x)$ така: $h(t, x, y) = \varphi_{s(t,x)}(y)$ для всіх $t, x, y \in N$. За теоремою 3.3.1 існує РФ g така, що для всіх $x \in N$ маємо $\varphi_{g(x)} = \varphi_{s(g(x),x)}$. Тоді $\varphi_{g(x)}(y) = \varphi_{s(g(x),x)}(y) = h(g(x), x, y) =$
$= \begin{cases} y, \text{ якщо } y = 3g(x) + 4^x, \\ \text{невизначене інакше}, \end{cases}$ тому $D_{g(x)} = E_{g(x)} = \{3g(x) + 4^x\}$ для всіх $x \in N$.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте теорему Кліні про нерухому точку для індексних РФ.
2. Сформулюйте теорему Кліні про нерухому точку для 1-арних індексних РФ.
3. Наведіть первинне формулювання С. Кліні теореми про нерухому точку.
4. Поясніть, що таке самотвірна МНР-програма.
5. Поясніть, чи існують РФ зі скінченними множинами нерухомих точок.
6. Поясніть, чи існують "природні" однозначні ефективні нумерації ЧРФ і уточніть, що таке "природність".

7. Поясніть, чи завжди існують спільні нерухомі точки для двох РФ.

8. Сформулюйте теорему про парну рекурсію.

Вправи

1. Доведіть, що існує $n \in N$ таке:

1) $D_n = \{x \mid \varphi_n(x)\downarrow\} \cap \{x \mid x$ є простим числом$\}$;
2) $D_n = E_n = N \backslash \{1, 2, 3,\ldots, n\}$;
3) $D_n = E_n = \{n, 2n, 3n,\ldots, n^2\}$;
4) $E_n = \{x \mid \varphi_n(2x+1)\downarrow\} \cup \{x \mid x$ є парним числом$\}$;
5) $D_n = E_n = \{x \mid \varphi_n(2x)\downarrow\} \cap \{x \mid x$ є непарним числом$\}$;
6) $D_n = E_n = \{x \mid x$ є парним числом$\} \backslash \{2n, 4n, 6n\}$;
7) $E_n = \{x \mid x$ є простим числом$\} \cup \{2n, 3n, 5n\}$;
8) $D_n = \{x \mid x$ не є простим числом$\} \backslash \{n, 3n, 5n\}$.

2. Доведіть, що існує РФ $g(x)$ така, що для всіх $x \in N$ маємо:

1) $D_{g(x)} = E_{g(x)} = \{2x \cdot g(x) + 3x^3\}$;
2) $E_{g(x)} = \{6x + (3 + 2x) \cdot g(x)\}$;
3) $D_{g(x)} = \{5x + 4g(x) + 3^{g(x)}\}$;
4) $D_{g(x)} = E_{g(x)} = \{x^2 \cdot g(x) + 4^x + 1\}$.

3. Доведіть, що для кожних РФ $g(x)$ та $m \in N$ існує $n \in N$ таке, що справджується $D_n = D_m \cup \{g(n)\}$.

*4. З'ясуйте, чи існують $m, n \in N$ такі, що $m \neq n$, $D_m = \{n\}$ та $D_n = \{m\}$.

*5. Побудуйте нескінченну послідовність попарно різних натуральних чисел $n_0, n_1, \ldots$ таку, що для всіх $i \in N$ маємо $D_{n_i} = \{n_{i+1}\}$.

*6. Спробуйте побудувати самотвірну МНР-програму.

4. РОЗВ'ЯЗНІСТЬ, ЧАСТКОВА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ, НЕРОЗВ'ЯЗНІСТЬ

Поняття примітивної рекурсивності, рекурсивності та часткової рекурсивності для функцій переносяться на випадок класичних предикатів; їм відповідають поняття примітивної рекурсивності, рекурсивності й рекурсивної перелічності для множин.

4.1. Примітивно-рекурсивні, рекурсивні, рекурсивно-перелічні множини

Множину $M \subseteq N^n$ називають *рекурсивною* (РМ), якщо її характеристична функція χ_M рекурсивна.

Множину $M \subseteq N^n$ називають *примітивно-рекурсивною* (ПРМ), якщо її характеристична функція χ_M примітивно-рекурсивна.

Множину $M \subseteq N$ називають *рекурсивно-перелічною* (РПМ), якщо $M = \varnothing$ або $M = E_f$ для деякої рекурсивної функції f.

Множина $M \subseteq N^n$ є *РПМ*, якщо $M = \varnothing$ або існують 1-арні РФ $g_1, \ldots, g_n$ такі, що $M = \{(g_1(x), \ldots, g_n(x)) \mid x \in N\}$.

Як наслідки тези Чорча дістаємо такі твердження:

– клас РМ збігається із класом алгоритмічно розв'язних множин натуральних чисел;

– клас РПМ збігається із класом алгоритмічно перелічних множин натуральних чисел.

Для кожної $L \subseteq N^n$ визначимо множину-згортку:

$$C^n(L) = \{C^n(x_1, \ldots, x_n) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in L\}.$$

Нехай $L \subseteq N^n$ та $M \subseteq N^n$.

Тоді

$$C^n(L \cup M) = C^n(L) \cup C^n(M),$$
$$C^n(L \cap M) = C^n(L) \cap C^n(M),$$
$$C^n(N^n \setminus L) = N \setminus C^n(L).$$

Теорема 4.1.1. Множина $L \subseteq N^n$ є РМ (ПРМ, РПМ) $\Leftrightarrow$ множина $C^n(L)$ є РМ (ПРМ, РПМ).

Отже, можна обмежитися розглядом РМ, ПРМ та РПМ, заданих на N.

Теорема 4.1.2. Класи ПРМ та РМ замкнені щодо операцій $\cup$, $\cap$ та доповнення.

Нехай χ_A та χ_B є РФ (ПРФ). Маємо $\chi_{\overline{A}}(x) = nsg(\chi_A(x))$, $\chi_{A\cup B}(x) = sg(\chi_A(x) + \chi_B(x))$, $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

Таким чином, $\chi_{\overline{A}}$, $\chi_{A\cup B}$, $\chi_{A\cap B}$ є РФ (ПРФ).

Кожна ПРФ є РФ, тому кожна ПРМ є РМ. Водночас:

Приклад 4.1.1. Існують РМ, які не є ПРМ.

Нехай $u(t,x)$ – рекурсивна універсальна функція для ПРФ[1]. Тоді $f(x) = nsg(u(x,x))$ – характеристична функція деякої РМ L. Якщо $f(x)$ є ПРФ, то за універсальністю $u(t,x)$ існує $k\in N$ таке: $f(x) = u(k, x)$ для всіх x. Тоді $f(k) = u(k, k) = nsg(u(k, k))$. Маємо суперечність, тому $f(x)$ не є ПРФ, звідки L не є ПРМ.

Отже, клас ПРМ строго включається у клас РМ.

Приклад 4.1.2. Кожна скінченна множина є ПРМ.

Нехай $L = \{a_1,\dots, a_n\}$. Тоді $\chi_L(x) = nsg((\prod_{i=0}^{n} | x - a_i |))$ – ПРФ.

Приклад 4.1.3. Кожна РМ є РПМ.

Нехай $L \subseteq N$ є РМ. Якщо $L = \varnothing$, то L за визначенням є РПМ.

Якщо $L \neq \varnothing$, то візьмемо якийсь $b\in L$. Функція χ_L рекурсивна, тому $f(x) = x\cdot\chi_L(x) + b\cdot nsg(\chi_L(x))$ теж рекурсивна, причому за побудовою $L = E_f$. Отже, L є РПМ.

Як наслідок із цих прикладів отримуємо такі включення для класів множин (тут СкМ позначає клас скінченних множин):

$$\text{СкМ} \subset \text{ПРМ} \subset \text{РМ} \subseteq \text{РПМ}.$$

Фундаментальною властивістю РМ та РПМ є

Теорема 4.1.3 (Поста). L та $\overline{L}$ є РПМ $\Rightarrow$ L та $\overline{L}$ є РМ.

Вважаємо $L\neq\varnothing$ та $\overline{L} \neq \varnothing$, інакше твердження теореми тривіальне. Нехай f та g – такі РФ: $L = E_f$ та $\overline{L} = E_g$. Задамо функцію $h(x)$: $h(2\cdot x) = f(x)$, $h(2\cdot x+1) = g(x)$. Така h є РФ, причому $E_h = E_f \cup E_g = N$. Візьмемо довільне $b\in N$. Поступово обчислюємо $h(0)$, $h(1)$, … Згідно з $E_h = N$ маємо $b = h(n)$ для деякого n.

Якщо n парне, то $b = h(n) = f(n/2) \Rightarrow b\in L$.

Якщо n непарне, то $b = h(n) = g((n-1)/2) \Rightarrow b \in \overline{L} \Rightarrow b \notin L$.

Отже, L алгоритмічно розв'язна, тому L є РМ за ТЧ.

Аналогічно доводимо рекурсивність множини $\overline{L}$.

Елементарні властивості РМ та РПМ встановлює

Теорема 4.1.4. 1) Множина L є нескінченною РМ $\Leftrightarrow L = E_f$ для деякої строго монотонної РФ f;

2) якщо L – нескінченна РПМ, то існує нескінченна РМ M: $M \subseteq L$;

3) якщо L – нескінченна РПМ, то існує ін'єктивна РФ f: $L = E_f$.

Приклад 4.1.4. Нехай A та B – РПМ, C – РМ, причому $A \cap B = \varnothing$ та $A \subseteq C \subseteq A \cup B$. Тоді A є РМ.

Нехай РФ f та g такі: $A = E_f$ та $B = E_g$. Наведемо алгоритм розв'язання для A, звідки заТЧ A є РМ. Візьмемо довільне $x \in N$:

– $x \notin C \Rightarrow$ згідно з $A \subseteq C$ маємо $x \notin A$;

– $x \in C \Rightarrow$ згідно із $C \subseteq A \cup B$ маємо $x \in A \cup B$.

Задамо перелік $A \cup B$: $f(0)$, $g(0)$, …, $f(n)$, $g(n)$, …; тоді існує k таке: $x = f(k)$ або $x = g(k)$, тобто $x \in A$ або $x \in B$; згідно з $A \cap B = \varnothing$ із $x \in B$ маємо $x \notin A$.

Приклад 4.1.5. Нехай f – РФ, g – ін'єктивна РФ така, що E_g є РМ, причому $f(x) \geq g(x)$ для всіх x. Тоді E_f є РМ.

Беремо довільне $y \in N$; g – ін'єктивна РФ $\Rightarrow$ існує t таке, що всі значення $g(x) \leq y$ будуть від аргументів $x \leq t$, тобто для всіх $x > t$ маємо $g(x) > y$. Звідси $t = \mu_z(\{g(0),\ldots, g(z)\} \supseteq E_g \cap \{0,\ldots,y\})$. Для всіх $x > t$ маємо $f(x) \geq g(x) > y$, тому $y \in E_f \Leftrightarrow y \in \{f(0),\ldots,f(t)\}$. Таким чином, E_f розв'язна $\Rightarrow$ за ТЧ E_f є РМ.

Теорема 4.1.5. Такі визначення РПМ є еквівалентними:

*df*1) $L = \varnothing$ або L є областю значень деякої РФ;

*df*2) L є областю значень деякої ЧРФ;

*df*3) L є областю визначення деякої ЧРФ;

*df*4) часткова характеристична функція множини L є ЧРФ.

*df*3 та *df*4 можна використовувати для РПМ, заданих на N^n.

Доведення теореми 4.1.5 опирається на приклад 3.2.5 і таке твердження:

Теорема 4.1.6. Існує РФ α така: $E_{\alpha(x)} = D_x$ для кожного $x \in N$ та $\varphi_{\alpha(x)}$ є РФ при $D_x \neq \varnothing$.

Ефективну нумерацію РПМ уведемо на основі нумерацій n-арних ЧРФ згідно із *df*3. Назвемо її *стандартною нумерацією РПМ*.

Номером (індексом) РПМ $L \subseteq N^n$ є номер n-арної ЧРФ f такої:

$$L = D_f.$$

РПМ $L \subseteq N^n$ із номером m позначаємо D_m^n, або D_m при $n = 1$.

Множину $\{L \subseteq N^n \mid L$ є РПМ$\}$ позначаємо РПМ^n.

Аналогічно вводимо позначення РМ^n та ПРМ^n.

Згідно із прикладом 3.2.4 існують РФ u та s такі, що для всіх $x, y \in N$ маємо $D_{u(x,y)} = D_x \cup D_y$ та $D_{s(x,y)} = D_x \cap D_y$.

Отже, клас РПМ *замкнений* щодо операцій $\cup$ та $\cap$.

Крім того, згідно із прикладом 3.2.4 можна *ефективно* знайти індекси РПМ $A \cup B$ та $A \cap B$ за індексами РПМ A та B.

Для множин на N задамо операції сполучення $\oplus$ і добутку $\otimes$:

$$A \oplus B = \{2x | x \in A\} \cup \{2x+1 | x \in B\};$$

$$A \otimes B = \{C(x, y) | \ x \in A, y \in B\}.$$

Теорема 4.1.7. 1) A та B є РМ $\Leftrightarrow$ $A \oplus B$ є РМ;

2) A та B є РПМ $\Leftrightarrow$ $A \oplus B$ є РПМ;

3) $(A \neq \varnothing$ та $B \neq \varnothing) \Rightarrow (A$ та B є РМ $\Leftrightarrow A \otimes B$ є РМ);

4) $(A \neq \varnothing$ та $B \neq \varnothing) \Rightarrow (A$ та B є РПМ $\Leftrightarrow A \otimes B$ є РПМ).

Доведемо для РПМ. Для РМ доведення аналогічне, але замість

Доводимо п. 2. Маємо $x \in A \Leftrightarrow 2x \in A \oplus B$ та $x \in B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x+1 \in A \oplus B$. Звідси $\chi^{ч}_{A}(x) = \chi^{ч}_{A\oplus B}(2x)$, $\chi^{ч}_{B}(x) = \chi^{ч}_{A\oplus B}(2x+1)$.

Тому $\chi^{ч}_{A\oplus B}$ є ЧРФ $\Rightarrow$ $\chi^{ч}_{A}$ є ЧРФ та $\chi^{ч}_{B}$ є ЧРФ.

Маємо $x \in A \oplus B \Leftrightarrow$ (x парне & $x/2 \in A$) $\vee$ (x непарне & $(x-1)/2 \in B$).

За ТЧ маємо: $\chi^{ч}_{A}$ є ЧРФ та є $\chi^{ч}_{B}$ ЧРФ $\Rightarrow$ $\chi^{ч}_{A\oplus B}$ є ЧРФ.

Таким чином, $A \oplus B$ є РПМ $\Leftrightarrow$ A є РПМ та B є РПМ.

Доводимо п. 4. Нехай $A \neq \varnothing$ та $B \neq \varnothing$. Зафіксуємо $a \in A$ та $b \in B$.

Маємо $x \in A \Leftrightarrow C(x, b) \in A \otimes B$ та $x \in B \Leftrightarrow C(a, x) \in A \otimes B$.

Тому $\chi^{ч}_{A}(x) = \chi^{ч}_{A\otimes B}(C(x,b))$, $\chi^{ч}_{B}(x) = \chi^{ч}_{A\otimes B}(C(a,x))$.

Тепер маємо:

$$x \in A \otimes B \Leftrightarrow l(x) \in A \ \& \ r(x) \in B \Rightarrow \chi^{ч}_{A\otimes B}(x) = \chi^{ч}_{A}(l(x)) \cdot \chi^{ч}_{B}(r(x)).$$

Звідси при $A, B \neq \varnothing$ маємо:

$$A \otimes B \text{ є РПМ} \Leftrightarrow A \text{ є РПМ та } B \text{ є РПМ}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення РМ, ПРМ, РПМ.
2. Сформулюйте наслідки тези Чорча для РМ і РПМ.
3. Дайте визначення, що таке множина-згортка.
4. Укажіть співвідношення між класами ПРМ, РМ і РПМ.
5. Укажіть, відносно яких теоретико-множинних операцій замкнені класи ПРМ і РМ.
6. Укажіть, відносно яких теоретико-множинних операцій замкнений клас РПМ.
7. Сформулюйте властивості РМ і РПМ.
8. Сформулюйте еквівалентні визначення РПМ.
9. Сформулюйте теорему Поста для множин.
10. Укажіть, як задається стандартна нумерація РПМ.
11. Дайте визначення операцій $\oplus$ та $\otimes$.
12. Укажіть, чи замкнені щодо операцій $\oplus$ та $\otimes$ класи ПРМ, РМ, РПМ.

Вправи

1. Доведіть, що множина $L \neq \varnothing$ рекурсивна $\Leftrightarrow$ існує нестрого монотонно зростаюча РФ g така, що $L = E_g$.
2. Нехай A – РМ, f – сюр'єктивна РФ така, що $f(A) \cap f(N \backslash A) = \varnothing$. Доведіть, що тоді множина $f(A)$ рекурсивна.
3. Нехай f є РФ, A є РМ. Доведіть, що тоді $f^{-1}(A)$ є РМ.
4. Доведіть теорему 4.1.4.
5. Дайте повне доведення теореми 4.1.7.
6. Доведіть принцип редукції: для довільних РПМ A та B існують РПМ L та M такі, що $L \subseteq A$, $M \subseteq B$, $L \cap M = \varnothing$ та $L \cup M = A \cup B$.

*7. Нехай f – РФ така, що множина $\{n \mid \varphi_n = \varphi_{f(n)}\}$ є РМ. Доведіть, що $\{\varphi_n \mid \varphi_n = \varphi_{f(n)}\}$ збігається із множиною всіх 1-арних ЧРФ.

4.2. Примітивно-рекурсивні, рекурсивні, частково рекурсивні предикати

n-арний предикат на N називають *рекурсивним* (РП), якщо його характеристична функція рекурсивна.

n-арний предикат на N називають *примітивно-рекурсивним* (ПРП), якщо його характеристична функція є ПРФ.

n-арний предикат на N називають *частково рекурсивним* (ЧРП), якщо його часткова характеристична функція є ЧРФ.

Замість "$P(x_1,..., x_n) = T$" будемо писати "$P(x_1,..., x_n)$".

Теорема 4.2.1. 1) Предикат P є ЧРП (РП, ПРП) $\Leftrightarrow$ $T(P)$ є РПМ (РМ, ПРМ);

2) класи ПРП та РП замкнені щодо операцій $\vee$, &, $\neg$;

3) клас ЧРП замкнений щодо операцій $\vee$ та &;

4) клас ПРП строго включається у клас РП;

5) кожний рекурсивний предикат є ЧРП;

6) якщо P та $\neg P$ – ЧРП, то P та $\neg P$ – РП (теорема Поста).

Приклад 4.2.1. Множина L і предикат "$x \in L$" мають однакові характеристичні й частково характеристичні функції. Тому:

L є РМ $\Leftrightarrow$ "$x \in L$" є РП; L є РПМ $\Leftrightarrow$ "$x \in L$" є ЧРП.

Теорема 4.2.2. $Q(x_1,..., x_n)$ є ЧРП $\Leftrightarrow$ існує РП $R(x_1,..., x_n, y)$:

$$Q(x_1,..., x_n) \Leftrightarrow \exists y R(x_1,..., x_n, y).$$

Теорема 4.2.3. 1) $Q(x_1,..., x_n, y)$ є ЧРП $\Rightarrow$ $\exists y Q(x_1,..., x_n, y)$ є ЧРП;

2) $Q(x_1,..., x_n, y)$ є ЧРП $\Rightarrow$ $\exists y_1 ... \exists y_k Q(x_1,..., x_n, y_1,..., y_k)$ є ЧРП.

Приклад 4.2.2. Предикат "x є числом Ферма" є ЧРП:

"x є числом Ферма" $\Leftrightarrow \exists u \exists v \exists w\, (u > 0 \,\&\, v > 0 \,\&\, w > 0 \,\&\, u^x + v^x = w^x)$.

Предикат у дужках є РП $\Rightarrow$ за теоремою 4.2.2 наш предикат є ЧРП.

Приклад 4.2.3. Предикат "$y \in E_x$" є ЧРП.

Маємо $y \in E_x \Leftrightarrow \exists z \exists k\ (P_x(z){\downarrow} y$ за k кроків). Предикат у дужках є РП, тому за теоремою 4.2.2 наш предикат є ЧРП.

Приклад 4.2.4. Предикат "$D_x \neq \varnothing$" є ЧРП.

Маємо $D_x \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists z \exists k\ (P_x(z){\downarrow}$ за k кроків). Предикат у дужках є РП, тому за теоремою 4.2.2 наш предикат є ЧРП.

Приклад 4.2.5. Предикат "φ_x неін'єктивна" є ЧРП:
φ_x неін'єктивна $\Leftrightarrow$ $\exists a\exists b\exists c\ (a\neq b\ \&\ \varphi_x(a)=c\ \&\ \varphi_x(b)=c)$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\exists a\exists b\exists c\exists k\exists l\ (a\neq b\ \&\ (P_x(a){\downarrow}c$ за k кроків$)\ \&\ (P_x(b){\downarrow}c$ за l кроків)).

Приклад 4.2.6. Предикат "$\{x, y\}\subseteq D_{5z}$" є ЧРП.

Маємо $\{x, y\}\subseteq D_{5z}\Leftrightarrow x\in D_{5z}\ \&\ y\in D_{5z}\Leftrightarrow \exists k\ (P_{5z}(x){\downarrow}$ за k кроків) & $\exists k\ (P_{5z}(y){\downarrow}$ за k кроків). У дужках РП, тому наш предикат – ЧРП.

Приклад 4.2.7. Предикат "$0\in E^2_{3x+1}$" є ЧРП.

Маємо $0\in E^2_{3x+1}\Leftrightarrow \exists z\exists u\exists k\ (P_{3x+1}(z, u){\downarrow}0$ за k кроків). Предикат у дужках є РП, тому за теоремою 4.2.2 наш предикат є ЧРП.

Приклад 4.2.8. Існує РФ $s(x, y)$ така: $E_{s(x,y)} = (D_{3x}\cap E_{2y})\cup\{x, y\}$ для всіх $x, y\in N$.

Множину $(D_{3x}\cap E_{2y})\cup\{x, y\}$ позначимо L. Предикат "$z\in L$" є ЧРП: $z\in L$ $\Leftrightarrow$ $z = x\vee z = y\vee (z\in D_{3x}\ \&\ z\in E_{2y})$ $\Leftrightarrow$ $z = x\vee z = y\ \vee$ $\vee\ (\exists k(P_{3x}(z){\downarrow}$ за k кроків$)\ \&\ \exists u\exists k(P_{3y}(u){\downarrow}z$ за k кроків)). Тому $f(x, y, z) = \begin{cases} z, \text{ якщо } z\in L, \\ \text{невизначене інакше} \end{cases}$ є ЧРФ. За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x, y)$: $f(x, y, z) = \varphi_{s(x,y)}(z)$ для всіх x, y, z. Зафіксуємо x та y. За побудовою f маємо $D_{s(x,y)} = E_{s(x,y)}$. Тепер $z\in E_{s(x,y)}\Leftrightarrow z\in D_{s(x,y)}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \varphi_{s(x,y)}(z){\downarrow}\Leftrightarrow f(x, y, z){\downarrow}\Leftrightarrow z\in L$. Звідси $E_{s(x,y)} = L = (D_{3x}\cap E_{2y})\cup\{x, y\}$.

Приклад 4.2.9. Предикат "$\varphi_{5x}(4y)$ парне" є ЧРП.

$\varphi_{5x}(4y)$ парне $\Leftrightarrow \exists u\exists k\ (P_{5x}(4y){\downarrow}u$ за k кроків та u парне). Предикат у дужках є РП $\Rightarrow$ за теоремою 4.2.2 наш предикат є ЧРП.

Приклад 4.2.10. Предикат "$y\in C(D^2_{3x})$" є ЧРП.

Маємо $y\in C(D^2_{3x})\Leftrightarrow \exists u\exists v\ (y = C(u, v)\ \&\ (u, v)\in D^2_{3x})\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists u\exists v\exists k(y = C(u, v)\ \&\ P_{3x}(u, v){\downarrow}$ за k кроків). Предикат у дужках є РП $\Rightarrow$ за теоремою 4.2.2 наш предикат є ЧРП.

Приклад 4.2.11. Множина $L = \{C(x, y)\mid x\in D_y\}$ є РПМ.

Предикат "$z\in L$" є ЧРП: $z\in L\Leftrightarrow \exists x\exists y\ (z = C(x, y)\ \&\ x\in D_y)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists x\exists y(z = C(x, y)\ \&\ \exists k(P_y(x){\downarrow}$ за k кроків)). Звідси L є РПМ.

Приклад 4.2.12. Корисні співвідношення для подальших конкретних прикладів:

– $z\in \varphi_x^{-1}(L)\Leftrightarrow \varphi_x(z)\in L\Leftrightarrow \exists t(t = \varphi_x(z)\ \&\ t\in L)$;

– $z \in \varphi_x(L) \Leftrightarrow \exists t(z = \varphi_x(t)\ \&\ t \in L)$.

Приклад 4.2.13. Предикат "$z \in \varphi_{3x}(E_y)$" є ЧРП:
$z \in \varphi_{3x}(E_y) \Leftrightarrow \exists t(z = \varphi_{3x}(t)\ \&\ t \in E_y) \Leftrightarrow \exists t(\exists m(P_{3x}(t){\downarrow}z$ за m кроків) & & $\exists s \exists n\ (P_y(s){\downarrow}t$ за n кроків)). Далі використовуємо рекурсивність предикатів під кванторами й теорему 4.2.2.

Приклад 4.2.14. Предикат "$5y \in \varphi_x^{-1}(E_{2x} \cup D_{3y})$" є ЧРП:
$5y \in \varphi_x^{-1}(E_{2x} \cup D_{3y}) \Leftrightarrow \varphi_x(5y) \in E_{2x} \cup D_{3y} \Leftrightarrow \exists t(t = \varphi_x(5y)\ \&\ t \in E_{2x} \cup D_{3y}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists t(t = \varphi_x(5y)\ \&\ (\exists s \exists n(P_{2x}(s){\downarrow}t$ за n кроків$) \vee \exists k(P_{3y}(t){\downarrow}$ за k кроків$))) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists t\,(\exists m(P_x(5y){\downarrow}t$ за m кроків) & $(\exists s \exists n\,(P_{2x}(s){\downarrow}t$ за n кроків$) \vee$
$\vee \exists k(P_{3y}(t){\downarrow}$ за k кроків))). Далі використовуємо рекурсивність предикатів під кванторами й теорему 4.2.2.

Приклад 4.2.15. Предикат "$z \in \overline{\bar{D}_x \otimes \bar{D}_y}$" є ЧРП:

$$z \in \overline{\bar{D}_x \otimes \bar{D}_y} \Leftrightarrow \neg(z \in \bar{D}_x \otimes \bar{D}_y) \Leftrightarrow \neg(l(z) \in \bar{D}_x\ \&\ r(z) \in \bar{D}_y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \neg(\neg l(z) \in D_x\ \&\ \neg r(z) \in D_y) \Leftrightarrow l(z) \in D_x \vee r(z) \in D_y.$$

Функції $l(z)$ та $r(z)$ є ПРФ, тому наш предикат є ЧРП.

Приклад 4.2.16. Існує РФ s така: $E_{s(x,\,y,\,z)} = (D_{5x} \cap E_{x+y}) \cup E_{y+3z}$ для всіх $x, y, z \in N$.

Множину $(D_{5x} \cap E_{x+y}) \cup E_{y+3z}$ позначимо L. Предикат "$u \in L$" є ЧРП: $u \in L \Leftrightarrow (u \in D_{5x}\ \&\ u \in E_{x+y}) \vee u \in E_{y+3z} \Leftrightarrow (\exists k(P_{5x}(u){\downarrow}$ за k кроків) & & $\exists v \exists k(P_{x+y}(v){\downarrow}u$ за k кроків$)) \vee \exists v \exists k(P_{y+3z}(v){\downarrow}u$ за k кроків)). Тому функція $f(x, y, z, u) = \begin{cases} u, & \text{якщо } u \in L, \\ \text{невизначене} & \text{інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ.

За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x, y, z)$: $f(x, y, z, u) = \varphi_{s(x,y,z)}(u)$ $\forall\, x, y, z, u$. Зафіксуємо x, y, z. За побудовою f тоді $D_{s(x,y,z)} = E_{s(x,y,z)}$. Маємо $u \in E_{s(x,y,z)} \Leftrightarrow u \in D_{s(x,y,z)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x,y,z)}(u){\downarrow} \Leftrightarrow f(x, y, z, u){\downarrow} \Leftrightarrow u \in L$.

Теорема 4.2.4. $f(x_1,..., x_n)$ є ЧРФ $\Leftrightarrow$ "$y = f(x_1,..., x_n)$" є ЧРП.

Теорема 4.2.5 (Кліні про нормальну форму, посилене формулювання). Для кожної n-арної ЧРФ f існує $(n+1)$-арна ПРФ g: для всіх $x_1,..., x_n \in N$ маємо $f(x_1,..., x_n) = l\,(\mu_t\,(g(x_1,..., x_n, t) = 0))$.

Подання $l\,(\mu_t\,(g(x_1,..., x_n, t) = 0))$ називають *нормальною формою* функції $f(x_1,..., x_n)$.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення РП, ПРП, ЧРП.
2. Укажіть, який зв'язок існує між ПРП, РП, ЧРП та ПРМ, РМП, РПМ.
3. Укажіть, відносно яких логічних зв'язок замкнені класи ПРП і РП.
4. Укажіть, відносно яких логічних операцій замкнений клас ЧРП.
5. Укажіть співвідношення між класами ПРП, РП і ЧРП.
6. Сформулюйте теорему Поста для предикатів.
7. Укажіть зв'язок між РП і ЧРП.
8. Укажіть зв'язок між ЧРП і ЧРФ.
9. Сформулюйте теорему Кліні про нормальну форму.

Вправи

1. Доведіть: якщо A є РПМ, то $\bigcup\limits_{x\in A} D_x$ та $\bigcup\limits_{x\in A} E_x$ теж РПМ.

2. Нехай f є ЧРФ, A є РПМ. Доведіть, що $f^{-1}(A)$ та $f(A)$ є РПМ.

3. Доведіть: для кожного $k\in N$ множина ${}^kD_n = \{x \mid \varphi_n(x) = k\}$ є РПМ. Доведіть далі, що за фіксованого k послідовність ${}^kD_0, {}^kD_1, \ldots, {}^kD_n, \ldots$ є переліком усіх РПМ.

4. Доведіть, що РПМ будуть такі множини:

   1) $\{x \mid x\in E_{2x}\}$;
   2) $\{x \mid 2x\in D_{3x}\}$;
   3) $\{C(x, y) \mid x\in D_y\}$.

5. Доведіть, що ЧРП будуть такі предикати:

   1) "$\varphi_{2x}(3y)$ є повним квадратом";
   1) "$\varphi_{2x}(3y+1) + \varphi_{4y}(2x+3)$ непарне";
   2) "$\varphi_{3x+5}(4y+2) + z^3$ є простим числом";
   3) "$\{x, y, z+y\} \subseteq D_{x+4y+3}$";
   4) "$\{3, y+z^2\} \subseteq (E_{3x+2y} \cup D_{5x+3z}) \cap E_{x+4y}$";
   5) "$\{x, y\} \subseteq E^2_{3x+2y}$";
   6) "$3y\in \varphi_{2x}^{-1}(D_{2x+4}\cup E_{5y})$";
   7) "$\{2x, y\} \subseteq \varphi_{3z}(D_{x+7}\cap D_{2y+5x})$";
   8) "$z \in \overline{\bar{D}_{2x} \otimes \bar{E}_{3y}}$".

6. З'ясуйте, чи існує РФ s така:

1) для всіх $x, y \in N$ маємо $D_{s(x,\,y)} = (E_{2x+5} \cup D_{x+2y}) \cap D_{3y}$;
2) для всіх $x, y \in N$ маємо $E_{s(x,\,y)} = (D_{3x} \cap E_{2y}) \cup \{3y, x+y\}$;
3) для всіх $x \in N$ маємо $D_{s(x)} = C(D_x^2)$;
4) для всіх $x \in N$ маємо $D^2_{s(x)} = C^{-1}(D_x)$;
5) для всіх $x, y, z \in N$ маємо $E_{s(x,y,z)} = \varphi_{4z}^{-1}(D_{2x} \cup E_{3y+5})$;
6) для всіх $x, y \in N$ маємо $D_{s(x,y)} = \varphi_{3x}(D_{x+1} \cap E_{2y})$.

4.3. Алгоритмічна нерозв'язність проблем зупинки та самозастосовності. Наслідки нерозв'язності

Масова проблема *алгоритмічно розв'язна*, або просто *розв'язна*, якщо відповідний предикат рекурсивний, інакше проблему називають *алгоритмічно нерозв'язною*, або *нерозв'язною*.

Масова проблема *частково алгоритмічно розв'язна (частково розв'язна*, *напіврозв'язна)*, якщо відповідний предикат є ЧРП.

Прикладами алгоритмічно нерозв'язних проблем є проблеми зупинки й самозастосовності.

Проблема зупинки:

за x та y встановити, $\varphi_x(y)\downarrow$ чи $\varphi_x(y)\uparrow$.

Проблема самозастосовності:

за x встановити, $\varphi_x(x)\downarrow$ чи $\varphi_x(x)\uparrow$.

Неформально проблема зупинки означає: з'ясувати за x та y, чи зупиниться МНР-програма з кодом x при роботі над y.

Проблема самозастосовності означає: з'ясувати за x, чи зупиниться МНР-програма з кодом x при роботі над власним кодом.

Предикат "$\varphi_x(y)\downarrow$", тобто "$\varphi_x(y)$ визначене", позначимо $Q(x, y)$.

Предикат "$\varphi_x(x)\downarrow$", тобто "$\varphi_x(x)$ визначене", позначимо $S(x)$.

Зрозуміло, що $S(x) \Leftrightarrow Q(x, x)$.

Приклад 4.3.1. Предикати $Q(x, y)$ та $S(x)$ є ЧРП.

Маємо $\varphi_x(y)\downarrow \Leftrightarrow (\exists k(P_x(y)\downarrow$ за k кроків);

$\varphi_x(x)\downarrow \Leftrightarrow (\exists k(P_x(x)\downarrow$ за k кроків).

Отже, проблеми зупинки й самозастосовності частково розв'язні.

Теорема 4.3.1. Предикат $S(x)$ нерекурсивний, тобто проблема самозастосовності алгоритмічно нерозв'язна.

Припустимо супротивне: предикат $S(x)$ рекурсивний.

Тоді $\chi_S(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \varphi_x(x) \text{ визначене,} \\ 0, \text{ якщо } \varphi_x(x) \text{ невизначене,} \end{cases}$ є РФ.

Задамо

$$f(x) = 0 - \chi_S(x) = \begin{cases} \text{невизначене, якщо } \varphi_x(x) \text{ визначене,} \\ 0, \text{ якщо } \varphi_x(x) \text{ невизначене.} \end{cases}$$

За ТЧ f є ЧРФ. Нехай n – індекс f у нумерації ЧРФ[1], тобто $f(x) = \varphi_n(x)$. Тоді

$$\varphi_n(n) = \begin{cases} \text{невизначене, якщо } \varphi_n(n) \text{ визначене,} \\ 0, \text{ якщо } \varphi_n(n) \text{ невизначене,} \end{cases} \text{ – суперечність.}$$

Наслідок 4.3.1. Предикат $Q(x, y)$ нерекурсивний, тобто проблема зупинки алгоритмічно нерозв'язна.

$Q(x, y)$ є РП $\Rightarrow S(x) = Q(x, x)$ є РП суперечить теоремі 4.3.1.

Наслідок 4.3.2. Предикат $\neg S(x)$ не є ЧРП.

$S(x)$ є ЧРП. Якщо $\neg S(x)$ є ЧРП, то за теоремою Поста $S(x)$ і $\neg S(x)$ є РП, що суперечить теоремі 4.3.1.

Приклад 4.3.2. Множина $D = \{x \mid \varphi_x(x) \text{ визначене}\}$ – нерекурсивна РПМ; множина $\bar{D} = \{x \mid \varphi_x(x) \text{ невизначене}\}$ не є РПМ.

Множина D і предикат $S(x)$ мають однакові частково характеристичні функції, які є ЧРФ, і однакові характеристичні функції, які не є РФ.

Множина $\bar{D}$ та $\neg S(x)$ мають однакові частково характеристичні функції, які не є ЧРФ.

Наслідок 4.3.3. 1) Клас ЧРП незамкнений відносно $\neg$.

2) Клас РПМ незамкнений відносно операції доповнення.

Маємо такі співвідношення для відповідних класів функцій, множин і предикатів (СкМ позначає клас скінченних множин):

$$\text{ПРФ} \subset \text{РФ} \subset \text{ЧРФ};$$
$$\text{СкМ} \subset \text{ПРМ} \subset \text{РМ} \subset \text{РПМ};$$
$$\text{ПРП} \subset \text{РП} \subset \text{ЧРП}.$$

Приклад 4.3.3. Існує РП $R(x, y)$: предикат $\forall xR(x, y)$ не є РП і не є ЧРП.

Нехай $R(x, y)$ – це РП $\neg(P_x(x){\downarrow}$ за y кроків). Тоді $\forall yR(x, y) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall y\neg(P_x(x){\downarrow}$ за y кроків) $\Leftrightarrow \varphi_x(x){\uparrow}$. Однак $\varphi_x(x){\uparrow}$ не є ЧРП, тому не є РП.

Отже, класи РП та ЧРП незамкнені щодо операції $\forall x$.

Приклад 4.3.4. Існує РФ s така: $E_{s(x,y,z)} = (D_{3x} \setminus \{2x, y+1\}) \cup E_{y+5z}$ для всіх $x, y, z \in N$.

Множину $(D_{3x} \setminus \{2x,\ y+1\}) \cup E_{y+5z}$ позначимо L. Тоді "$u \in L$" є ЧРП: $u \in L \Leftrightarrow (u \in D_{3x} \,\&\, u \neq 2x \,\&\, u \neq y+1) \vee u \in E_{y+5z} \Leftrightarrow (\exists k(P_{3x}(u){\downarrow}$ за k кроків$) \,\&\, u \neq 2x \,\&\, u \neq y+1) \vee \exists v \exists k\ (P_{y+5z}(v){\downarrow}u$ за k кроків)).

Тому функція $f(x, y, z, u) = \begin{cases} u, & \text{якщо } u \in L, \\ \text{невизначене} & \text{інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ.

За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x, y, z)$: $f(x, y, z, u) = \varphi_{s(x,y,z)}(u)$ $\forall\ x, y, z, u$. Зафіксуємо x, y, z. За побудовою $f\ D_{s(x,y,z)} = E_{s(x,y,z)}$. Тоді $u \in E_{s(x,y,z)} \Leftrightarrow u \in D_{s(x,y,z)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x,y,z)}(u){\downarrow} \Leftrightarrow f(x, y, z, u){\downarrow} \Leftrightarrow u \in L$.

Приклад 4.3.5. Не існує РФ $s(x, y)$: $D_{s(x,y)} = E_x \setminus D_y$ для всіх $x, y \in N$.

Нехай така РФ $s(x, y)$ існує. Візьмемо значення x та y такі, що $E_x = N$ та $D_y = D$. Тоді $E_x \setminus D_y = N \setminus D = \overline{D}$ – не РПМ, але $D_{s(x,y)}$ є РПМ для всіх x, y. Отримали суперечність.

Приклад 4.3.6. Не існує РФ $s(x, y, z)$: $D_{s(x,y,z)} = (E_x \cap \overline{D}_y) \setminus D_z$ для всіх $x, y, z \in N$.

Нехай така РФ $s(x, y, z)$ існує. Візьмемо x, y, z такі, що $E_x = N$, $D_y = D$, $D_z = \varnothing$. Тоді $(E_x \cap \overline{D}_y) \setminus D_z = (N \cap \overline{D}) \setminus \varnothing = \overline{D}$ не є РПМ. Водночас $D_{s(x,y,z)}$ є РПМ для всіх x, y, z. Отримали суперечність.

Функція g називається *розширенням* функції f, якщо $D_f \subseteq D_g$ і для всіх $x \in D_f$ маємо $f(x) = g(x)$. Цей факт позначатимемо $f \subseteq g$.

Функцію f тоді називають звуженням функції g.

Зрозуміло, що $f \subseteq g \Leftrightarrow \Gamma_f \subseteq \Gamma_g$.

Тотальне розширення функції називається її *довизначенням*.

Не кожну ЧРФ можна довизначити до РФ.

Приклад 4.3.7. Функція $\varphi_x(x)$ не має рекурсивних довизначень.

Припустимо супротивне: $\varphi_x(x)$ має рекурсивне довизначення $f(x)$. Тоді функція $nsg(\varphi_x(x))$ має рекурсивне довизначення $g(x)$.

Нехай k – індекс g у нумерації 1-арних ЧРФ, тобто g – це φ_k. Значення $\varphi_k(k) = g(k)$ визначене, адже g є РФ, тому $nsg(\varphi_k(k))$ визначене. Маємо $nsg(\varphi_k(k)) = g(k) = \varphi_k(k)$ – суперечність.

Покажемо, що операція мінімізації μ_y істотно відрізняється від неконструктивної, узагалі кажучи, операції $\min_y$ для знаходження найменшого значення y, яке задовольняє певну умову.

Функція $f(x_1,..., x_n)$ виникає з функції $g(x_1,..., x_n, y)$ за допомогою операції $\min_y$, якщо для всіх значень $x_1,..., x_n$ маємо:

$$f(x_1,...,x_n) = \begin{cases} \text{найменше } y \text{ таке, що } g(x_1,...,x_n, y) = 0, \\ \text{якщо таке } y \text{ існує}, \\ \text{невизначене, якщо таке } y \text{ не існує.} \end{cases}$$

Приклад 4.3.8. Існує ЧРФ h: $f(x) = \min_y(h(x, y) = 0)$ не є ЧРФ.

Функція $h(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } y = 1 \text{ або } (y = 0 \text{ та } x \in D), \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ. Функція $f(x) = \min_y (h(x, y) = 0)$ тотальна, тому що для всіх $x \in N$ маємо $f(x) = 1$ або $f(x) = 0$.

Якщо $x \in D$, то $h(x, 0) = 0$, тому $f(x) = 0$.

Якщо $x \notin D$, то $h(x, 0)$ невизначене, але $h(x,1) = 1$, тому $f(x) = 1$.

Отже, $f(x) = nsg(\chi_D(x))$, звідки $f(x)$ не є РФ і не є ЧРФ.

Розглянемо співвідношення між класами функцій та їхніх графіків.

Приклад 4.3.9. Якщо f є ПРФ /РФ, то Γ_f є ПРМ /РМ.

Справді, $\chi_{\Gamma_f}(x_1,..., x_n, y) = nsg(|y - f(x_1,..., x_n)|)$.

Приклад 4.3.10. Існують РФ f такі, що Γ_f не є ПРМ.

Розглянемо $f(x) = nsg(u(x, x))$, де $u(t, x)$ – універсальна РФ для 1-арних ПРФ. Якщо $\chi_{\Gamma_f}(x, y) = nsg(|y - f(x)|)$ є ПРФ, то функція $\chi_{\Gamma_f}(x, 1) = nsg(|1 - nsg(u(x, x))|) = nsg(u(x, x)) = f(x)$ теж ПРФ. Однак $u(t, x)$ не є ПРФ, тому χ_{Γ_f} не ПРФ, звідки Γ_f не є ПРМ.

Теорема 4.3.2 (про графік). $f(x_1,..., x_n)$ є ЧРФ $\Leftrightarrow$ Γ_f є РПМ.

Теорема 4.3.3 (Сколема). Γ_f є РМ/ПРМ $\Leftrightarrow$ існує РФ/ПРФ g така: для всіх $x_1,..., x_n \in N$ маємо $f(x_1,..., x_n) = \mu_t(g(x_1,..., x_n, t) = 0)$.

Приклад 4.3.11. Існують РФ f, які не можна подати у вигляді $f(x_1,..., x_n) = \mu_t(g(x_1,..., x_n, t) = 0)$ для деякої ПРФ g.

Справді, візьмемо РФ f таку, що Γ_f не є ПРМ.

Приклад 4.3.12. Існують ЧРФ f такі, які не можна подати у вигляді $f(x_1,..., x_n) = \mu_t(g(x_1,..., x_n, t) = 0)$ для деякої РФ g.

Візьмемо функцію $\chi_L^{\text{ч}}$ для нерекурсивної РПМ L. Тоді $\Gamma_{\chi_L^{\text{ч}}}$ нерекурсивна, а за теоремою Сколема таке подання неможливе.

Приклад 4.3.13. Існують РФ h, які не є ПРФ, але Γ_h є ПРМ.

Функція $f(x) = nsg(u(x,x))$, де $u(t,x)$ – універсальна РФ для 1-арних ПРФ, не є ПРФ. За теоремою Кліні про нормальну форму існує ПРФ g: $f(x) = l(\mu_t(g(x,t) = 0))$. За теоремою Сколема графік Γ_h функції $h(x) = \mu_t(g(x,t) = 0)$ є ПРМ. Однак, якщо h є ПРФ, то функція $f(x) = l(h(x))$ теж є ПРФ. Дістали суперечність, тому h не є ПРФ.

Приклад 4.3.14. Скінченні функції є ЧРФ, проте вони не є РФ, тому існують нерекурсивні ЧРФ зі скінченним графіком.

Приклад 4.3.15. Існують ЧРФ із нерекурсивним графіком.

Такими є, зокрема, функції $\chi_L^{\text{ч}}$ для нерекурсивних РПМ L.

Справді, якщо $\chi_L^{\text{ч}} = \{(x, 1) \mid x \in L\}$ рекурсивна, то за ТЧ множина $L = pr_1(\Gamma_{\chi_L^{\text{ч}}})$ рекурсивна, що суперечить нерекурсивності L.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте, що таке алгоритмічно розв'язна масова проблема.
2. Сформулюйте, що таке частково алгоритмічно розв'язна масова проблема.
3. Сформулюйте проблему зупинки.
4. Сформулюйте проблему самозастосовності.
5. Сформулюйте наслідки алгоритмічної нерозв'язності проблеми самозастосовності.
6. Наведіть приклади нерекурсивних РПМ і множин, які не є РПМ.
7. Наведіть приклади нерекурсивних ЧРП і предикатів, які не є ЧРП.
8. Наведіть приклад ЧРФ, яка не має рекурсивних довизначень.

9. Укажіть замкненість і незамкненість РПМ щодо теоретико-множинних операцій.

10. Укажіть замкненість і незамкненість РП щодо логічних операцій.

11. Укажіть замкненість і незамкненість ЧРП щодо логічних операцій.

12. Поясніть принципову різницю між операцією мінімізації μ_y та неконструктивною операцією $\min_y$.

13. Сформулюйте теорему про графік.

14. Сформулюйте теорему Сколема.

15. Укажіть співвідношення між класами функцій та їхніх графіків.

Вправи

1. З'ясуйте, чи правильно, що для довільних РФ f та РМ A множина $f(A)$ завжди є РМ.

2. З'ясуйте, чи існує РФ $f(x, y)$ така: якщо $P_x(y)\downarrow$, то це відбувається за $\leq f(x, y)$ кроків.

3. З'ясуйте, чи має рекурсивні довизначення функція $\varphi_x(y) + \varphi_y(x)$.

4. Нехай усі множини R_m, де $m \in N$, рекурсивні. З'ясуйте:

   1) чи правильно, що множина $\bigcap\limits_{m\in N} R_m$ завжди є РМ;

   2) чи правильно, що множина $\bigcap\limits_{m\in N} R_m$ завжди є РПМ.

5. З'ясуйте, чи існує РФ $s(x)$ така, що для всіх $x, y \in N$ маємо:

$$\varphi_{s(x)}(y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \varphi_x(y) = 1, \\ 0 \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

6. З'ясуйте, чи існує РФ s така:

   1) для всіх $x, y \in N$ маємо $E_{s(x,\,y)} = (D_{2+x} \cap E_{4y}) \cup \{3y, x + y\}$;

   2) для всіх $x, y \in N$ маємо $D_{s(x,\,y)} = (E_{4x} \cup D_{3y+x}) \setminus \{x, 2y\}$;

   3) для всіх $x, y, z \in N$ маємо $E_{s(x,y,z)} = E_x \setminus (D_y \cup E_z)$;

   4) для всіх $x, y, z \in N$ маємо $D_{s(x,y)} = D_x \cup (E_y \setminus D_x)$;

   5) для всіх $x, y, z \in N$ маємо $E_{s(x,y,z)} = \overline{E}_x \setminus (E_y \cup D_z)$;

   6) для всіх $x, y, z \in N$ маємо $D_{s(x,y,z)} = E_x \cup (D_y \setminus E_z)$;

   7) для всіх $x, y, z \in N$ маємо $E_{s(x,y,z)} = \overline{D}_x \cup (D_y \setminus \overline{E}_z)$.

4.4. Індексні множини. Теореми Райса й Райса – Шапіро

Нехай $\varphi : N \to \Im$ – ефективна нумерація множини об'єктів $\Im$.

Для довільної $\Re \subseteq \Im$ визначимо множину номерів усіх об'єктів із $\Re$: $N(\Re) = \varphi^{-1}(\Re)$. Множини вигляду $N(\Re)$, де $\Re \subseteq \text{ЧРФ}^n$ (зокрема, $\Re \subseteq \text{ЧРФ}^1$), назвемо *індексними*.

Теорема 4.4.1 (Райса). Нехай $\Re \subset \text{ЧРФ}^n$ та $\Re \neq \varnothing$. Тоді множина $N(\Re)$ нерекурсивна.

Наслідок 4.4.1. Нехай $\Re \subset$РПМ та $\Re \neq \varnothing$. Тоді $N(\Re)$ не є РМ.

Теорема Райса стверджує: жодна нетривіальна властивість у класах усіх n-арних ЧРФ і всіх РПМ не може бути ефективно розпізнана!

Приклад 4.4.1. Множина $\{x \mid D_x \neq \varnothing\}$ – нерекурсивна РПМ.

Предикат "$D_x \neq \varnothing$" є ЧРП, тому що $D_x \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists y \exists k\,(P_x(y){\downarrow}$ за k кроків), а предикат "$P_x(y){\downarrow}$ за k кроків" є РП. Тому $\{x \mid D_x \neq \varnothing\}$ є РПМ. Однак за теоремою Райса $\{x \mid D_x \neq \varnothing\}$ не є РМ.

Додавши у формулювання теореми Райса умову $f_\varnothing \in \Re$, отримаємо певною мірою доповнювальне до цієї теореми твердження.

Теорема 4.4.2. Нехай $\Re \subset \text{ЧРФ}^n$ та $f_\varnothing \in \Re$. Тоді $N(\Re)$ не є РПМ.

Приклад 4.4.2. Множина $\{x \mid D_x$ є РМ$\}$ не є РПМ.

Множина $\varnothing$ скінченна й рекурсивна, тому $f_\varnothing \in \{x \mid D_x$ є РМ$\}$, звідки за теоремою 4.4.2 множина $\{x \mid D_x$ є РМ$\}$ не є РПМ.

Приклад 4.4.3. Множина $\{x \mid D_x$ скінченна$\}$ не є РПМ.

Маємо $f_\varnothing \in \{\varphi_x \mid D_x$ скінченна$\}$, далі використовуємо теорему 4.4.2.

Приклад 4.4.4. Множина $\{x \mid \varphi_x$ не є РФ$\}$ не є РПМ.

Маємо $f_\varnothing \in \{\varphi_x \mid \varphi_x$ не є РФ$\}$, далі використовуємо теорему 4.4.2.

Приклад 4.4.5. Множина $\{x \mid \varphi_x$ несюр'єктивна$\}$ не є РПМ.

Маємо $f_\varnothing \in \{\varphi_x \mid \varphi_x$ несюр'єктивна$\}$, далі використовуємо теорему 4.4.2.

Приклад 4.4.6. Співвідношення, які далі будуть корисні:

$D_x = N \Leftrightarrow \varphi_x$ є РФ;

$D_x \neq N \Leftrightarrow \varphi_x$ не є РФ;

$E_x = N \Leftrightarrow \varphi_x$ сюр'єктивна;

$E_x \neq N \Leftrightarrow \varphi_x$ несюр'єктивна.

Тоді приклади 4.4.4 і 4.4.5 можна подати так:

Приклад 4.4.7. Предикат "$D_x \neq N$" не є ЧРП.

Приклад 4.4.8. Предикат "$E_x \neq N$" не є ЧРП.

Для скінченних множин на N уведемо **канонічну нумерацію**.

Нехай $L = \{x_1,..., x_n\}$, де $x_1< ...<x_n$.

Число $2^{x_1} + 2^{x_2} + ... + 2^{x_n}$ назвемо *канонічним кодом*, або *канонічним індексом,* множини L.

При цьому число 0 вважаємо кодом множини $\varnothing$.

Скінченну множину з канонічним індексом m позначаємо F_m.

Уведемо канонічну нумерацію для скінченних множин на N^n.

Канонічним номером, або канонічним індексом, скінченної множини $L \subset N^n$, вважаємо канонічний індекс множини $C^n(L)$.

Скінченну $L \subset N^n$ із канонічним індексом m позначаємо F_m^n.

Можливим є ефективний перехід від канонічного індексу скінченної множини до її стандартного індексу як РПМ, водночас зворотний ефективний перехід неможливий.

Теорема 4.4.3. 1) Існує РФ g така, що $F_x = D_{g(x)}$ для всіх $x \in N$.

2) Не існує ЧРФ f такої, що для всіх $x \in N$ маємо:

$$f(x) = \begin{cases} \text{канонічний індекс множини } D_x, \text{ якщо } D_x \text{ скінченна,} \\ \text{невизначене, якщо } D_x \text{ нескінченна.} \end{cases}$$

Сформулюємо критерій належності функції до конструктивної індексної множини, тобто до множини ЧРФ із рекурсивно-перелічною множиною індексів. Виявляється, що для цього достатньо скінченної інформації про функцію.

Теорема 4.4.4 (Райса – Шапіро). Нехай $\Re \subseteq$ ЧРФ^n така, що $N(\Re)$ є РПМ. Тоді для довільної функції $f \in$ ЧРФ^n маємо:

$f \in \Re \Leftrightarrow$ існує скінченна функція θ така, що $\theta \subseteq f$ та $\theta \in \Re$.

Приклад 4.4.9. Множина $\{x \mid D_x$ нескінченна$\}$ не є РПМ.

Припустимо, що $\{x \mid D_x$ нескінченна$\}$ є РПМ. За теоремою 4.4.4 для кожної нескінченної φ_x існує скінченна функція θ така, що $\theta \in \{\varphi_x \mid D_x$ нескінченна$\}$ та $\theta \subseteq \varphi_x$. Однак тоді θ нескінченна. Отримали суперечність.

Приклад 4.4.10. Множина $\{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$ не є РПМ.

Припустимо, що $\{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$ є РПМ. За теоремою Райса – Шапіро тоді для кожної РФ f існує скінченна функція θ: $\theta \subseteq f$ та θ є РФ. Однак скінченні функції не можуть бути РФ! Маємо суперечність.

Приклад 4.4.11. Множина $\{x \mid \varphi_x$ сюр'єктивна$\}$ не є РПМ.

Припустимо, що $\{x \mid \varphi_x$ сюр'єктивна$\}$ є РПМ. За теоремою Райса – Шапіро для кожної сюр'єктивної φ_x існує скінченна функція θ така, що $\theta \in \{\varphi_x \mid \varphi_x$ сюр'єктивна$\}$ та $\theta \subseteq \varphi_x$. Однак сюр'єктивні функції нескінченні. Отримали суперечність.

Ураховуючи приклад 4.4.6, приклади 4.4.10 та 4.4.11 можна подати так:

Приклад 4.4.12. Предикат "$D_x = N$" не є ЧРП.

Приклад 4.4.13. Предикат "$E_x = N$" не є ЧРП.

Приклад 4.4.14. З'ясуємо належність предиката "$D_x \neq D_y$" до класів РП та ЧРП.

Предикат "$D_x \neq D_y$" позначимо $Q(x, y)$.

Нехай m – індекс деякої РФ. Предикат $Q(x, m)$ позначимо $P(x)$. Тоді $P(x)$ означає "$D_x \neq N$". Маємо $T(P) = \{x \mid D_x \neq N\} = N(\mathfrak{R})$, де $\mathfrak{R} = \{\varphi_x \mid D_x \neq N\}$. Проте $f_\varnothing \in \mathfrak{R} \Rightarrow$ за теоремою 4.4.2 $N(\mathfrak{R}) = T(P)$ не є РПМ $\Rightarrow P(x)$ не ЧРП $\Rightarrow Q(x, y)$ не ЧРП, тому й не РП.

Завдання для самоконтролю

1. Укажіть, які множини називають індексними.
2. Поясніть, чи є індексною діагональна множина D.
3. Сформулюйте теорему Райса.
4. Поясніть, у чому полягає значення теореми Райса.
5. Сформулюйте теорему, дуальну до теореми Райса.

6. Поясніть, як визначається канонічна нумерація скінченних множин.

7. Укажіть співвідношення між канонічними та стандартними індексами скінченних множин.

8. Сформулюйте теорему Райса – Шапіро.

9. Наведіть приклади використання теорем про індексні множини.

Вправи

1. З'ясуйте належність до класів РМ та РПМ таких множин:

1) $\{x \mid 1 \in E_x^2\}$;
2) $\{x \mid (0,1) \in D_x^2\}$;
3) $\{x \mid \varphi_x$ є ПРФ$\}$;
4) $\{x \mid \varphi_x$ ін'єктивна$\}$;
5) $\{x \mid E_x$ не є РМ$\}$;
6) $\{x \mid E_x$ скінченна$\}$;
7) $\{x \mid \varphi_x$ бієктивна$\}$;
8) $\{x \mid \varphi_x$ не є ПРФ$\}$.
9) $\{x \mid \varphi_x$ не є константою$\}$;
10) $\{x \mid \varphi_x = \mathbf{o}\}$.

2. З'ясуйте належність до класів РП та ЧРП таких предикатів:

1) "$\{0, 1\} \subseteq D_x$";
2) "$\{0, 1\} \neq D_x$";
3) "φ_x є константою";
4) "φ_x не є ПРФ";
5) "D_x є ПРМ";
6) "$D_x = D$";
7) "$D_x \neq D$";
8) "$D_x = E_y$".

*3. Доведіть теорему Райса на основі теореми Кліні про псевдонерухому точку.

*4. Нехай f – РФ така, що множина $\{n \mid \varphi_n = \varphi_{f(n)}\}$ є РМ. Доведіть, що тоді $\{\varphi_n \mid \varphi_n = \varphi_{f(n)}\}$ збігається із множиною всіх 1-арних ЧРФ.

*5. Доведіть: існує РФ f така, що $\{n \mid \varphi_n = \varphi_{f(n)}\}$ не є РПМ.

5. *m*-ЗВІДНІСТЬ. ПРОДУКТИВНІ ТА КРЕАТИВНІ МНОЖИНИ

Для доведення розв'язності чи нерозв'язності масових проблем часто використовують метод звідності одних проблем до інших.

Проблема α *зводиться* до проблеми β, якщо з розв'язності β випливає розв'язність α.

Отже, якщо нерозв'язна проблема α зводиться до проблеми β, то β теж нерозв'язна.

Метод нумерацій дозволяє масові проблеми подавати за допомогою числових множин, тому далі розглядатимемо звідність множин.

5.1. *m*-звідність

Різні уточнення поняття звідності множини A до множини B (див., напр., [13, 19]) відрізняються за способом застосування та обсягом інформації про B, яку можна використати для розв'язання питання про A. Спочатку розглянемо *сильні* звідності: m-звідність та 1-звідність.

Множина A *m-зводиться* до множини B, якщо існує РФ g така, що для всіх $x\in N$ маємо $x\in A \Leftrightarrow g(x)\in B$.

Цей факт записуємо як $A \leq_m B$, або $g : A \leq_m B$, якщо треба вказати, що саме РФ g m-зводить A до B.

Неформально m-звідність множини A до множини B означає, що для розв'язання питання "$x\in A$" треба поставити єдине питання до B, причому заздалегідь указаним ефективним способом, який можна уточнити як певну РФ g, тобто ставимо питання "$g(x)\in B$".

Окремим випадком m-звідності є 1-звідність.

Множина A *1-зводиться* до множини B, якщо існує ін'єктивна РФ g така, що для всіх $x\in N$ маємо $x\in A \Leftrightarrow g(x)\in B$.

Цей факт будемо записувати як $A \leq_1 B$.

Властивості *m*-звідності та 1-звідності

$r1$) Якщо $A \le_1 B$, то $A \le_m B$.

$r2$) Відношення $\le_1$ та $\le_m$ рефлексивні й транзитивні.

$r3$) $A \le_m B \Leftrightarrow \overline{A} \le_m \overline{B}$; те саме правильно для $\le_1$.

$r4$) Якщо $A \le_m B$ та B є РМ, то A є РМ; те саме для $\le_1$.

$r5$) Якщо $A \le_m B$ та B є РПМ, то A є РПМ; те саме для $\le_1$.

$r6$) A є нерекурсивна РПМ $\Rightarrow$ неправильно $A \le_m \overline{A}$ та неправильно $\overline{A} \le_m A$; те саме для $\le_1$.

$r7$) $A \le_m N \Leftrightarrow A = N$; те саме для $\le_1$.

$r8$) $A \le_m \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$; те саме для $\le_1$.

$r9$) $N \le_m A \Leftrightarrow A \ne \varnothing$.

$r10$) $\varnothing \le_m A \Leftrightarrow A \ne N$.

$r11$) $N \le_1 A \Leftrightarrow A$ містить нескінченну РПМ.

$r12$) Якщо A рекурсивна і $B \ne \varnothing$ та $B \ne N$, то $A \le_m B$.

$r13$) Для довільної множини B маємо $A \le_m A \oplus B$ та $A \le_m B \oplus A$.

$r14$) Для довільної $B \ne \varnothing$ маємо: $A \le_m A \otimes B$ та $A \le_m B \otimes A$.

$r15$) A є РПМ $\Rightarrow A \le_m D$.

Твердження 5.1.1. Для кожної $B \subseteq N$ існує не більше ніж зліченна кількість множин $A \subseteq N$ таких, що $A \le_m B$.

$A \le_m B$, якщо існує РФ g така: $\forall x \in N$ маємо $x \in A \Leftrightarrow g(x) \in B$. Водночас множина всіх РФ зліченна.

На булеані множини N задамо відношення *m-еквівалентності*:

$$A \equiv_m B \Leftrightarrow A \le_m B \text{ та } B \le_m A.$$

Уведемо класи еквівалентності відносно $\equiv_m$:

$$d_m(A) = \{B \mid A \equiv_m B\}.$$

Такі класи еквівалентності будемо називати *m-степенями*.

Будемо писати $A <_m B$, якщо $A \le_m B$ і неправильно $B \le_m A$.

Писатимемо $A \mid_m B$, якщо неправильно $A \le_m B$ і неправильно $B \le_m A$.

Приклад 5.1.1. $\{x \mid \varphi_x = \mathbf{o}\} \equiv_m \{x \mid \varphi_x$ є константою $C\}$.

Позначимо $A = \{x \mid \varphi_x = \mathbf{o}\}$ та $B = \{x \mid \varphi_x$ є константою $C\}$.

Розглянемо ЧРФ $f(x, y) = \varphi_x(y) + C$. За *s-m-n*-теоремою існує РФ $s(x)$ така: $f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ для всіх x, y. Зафіксуємо x. Тоді для всіх y маємо: $\varphi_x(y) = 0 \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(y) = C$. Звідси $\varphi_x = \mathbf{o} \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}$ – константа C. Отже, $x\in A \Leftrightarrow s(x)\in B$. Тому РФ $s(x)$: $A \leq_m B$.

Розглянемо ЧРФ $g(x, y) = \varphi_x(y) - C$. За s-m-n-теоремою існує РФ $t(x)$ така: $g(x, y) = \varphi_{t(x)}(y)$ для всіх x, y. Зафіксуємо x. Тоді для всіх y маємо: $\varphi_x(y) = C \Leftrightarrow \varphi_{t(x)}(y) = 0$. Звідси φ_x – константа $C \Leftrightarrow \varphi_{t(x)} = \mathbf{o}$. Отже, $x\in B \Leftrightarrow t(x)\in A$. Тому РФ $t(x)$: $B \leq_m A$.

Маємо $A \leq_m B$ та $B \leq_m A$. Звідси $A \equiv_m B$.

Приклад 5.1.2. $\{x \mid \varphi_x = \mathbf{o}\} \equiv_m \{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$.

Позначимо $A = \{x \mid \varphi_x = \mathbf{o}\}$ та $B = \{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$.

Розглянемо ЧРФ $f(x, y) = 0 - \varphi_x(y)$. За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$ така, що $f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ для всіх x, y. Зафіксуємо x. Тоді для всіх y маємо: $\varphi_x(y) = 0 \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(y)\downarrow$. Звідси $\varphi_x = \mathbf{o} \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}$ є РФ. Таким чином, $x\in A \Leftrightarrow s(x)\in B$. Тому РФ $s(x) : A \leq_m B$.

Розглянемо ЧРФ $g(x, y) = \mathbf{o}(\varphi_x(y))$. За s-m-n-теоремою існує РФ $t(x)$ така, що для всіх x, y $g(x, y) = \varphi_{t(x)}(y)$. Зафіксуємо x. Тоді для всіх y маємо: $\varphi_x(y)\downarrow \Leftrightarrow \varphi_{t(x)}(y) = 0$. Звідси φ_x є РФ $\Leftrightarrow \varphi_{t(x)} = \mathbf{o}$.

Отже, $x\in B \Leftrightarrow t(x)\in A$. Тому РФ $t(x) : B \leq_m A$.

Маємо $A \leq_m B$ та $B \leq_m A$. Звідси $A \equiv_m B$.

Приклад 5.1.3. $\{x \mid \varphi_x$ є РФ$\} \equiv_m \{x \mid D_x$ нескінченна$\}$.

Позначимо $A = \{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$ та $B = \{x \mid D_x$ нескінченна$\}$.

Функція $f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \phi_x(z)\downarrow \text{ для всіх } z \leq y, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$

є ЧРФ за тезою Чорча. За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$ така, що $f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ для всіх x, y. Зафіксуємо x. Нехай $x\in A$, тобто φ_x є РФ. Тоді $\varphi_x(z)\downarrow$ для всіх z, звідки $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y) = 0$ для всіх y. Таким чином, $\varphi_{s(x)} = \mathbf{o}$, тому $D_{s(x)} = N$, звідки $s(x)\in B$. Нехай $x\notin A$, тобто φ_x не є РФ. Тоді існує $m\in N$: $\varphi_x(m)\uparrow \Rightarrow f(x, y)\uparrow$ для всіх $y \geq m \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y)\uparrow$. Отже, $D_{s(x)}$ скінченна, тому $s(x)\notin B$.

Маємо $x\in A \Leftrightarrow s(x)\in B$, тому РФ $s(x)$: $A \leq_m B$.

Задамо функцію $g(x, y)$ схемою примітивної рекурсії:

$g(x, 0) = \mu_z(\varphi_x(z)\downarrow)$;

$g(x, y+1) = \mu_z(\varphi_x(z)\downarrow \;\&\; z\neq g(x, 0) \;\&\; z\neq g(x, 1) \;\&\; \ldots \;\&\; z\neq g(x, y))$.

За тезою Чорча $g(x, y)$ є ЧРФ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $t(x)$ така, що $g(x, y) = \varphi_{t(x)}(y)$ для всіх x, y. Зафіксуємо x.

Нехай $x \in B$, тобто D_x нескінченна. Тоді $g(x, y)\downarrow$ для всіх $y \in N$, тому $\varphi_{t(x)}(y)\downarrow$ для всіх $y \in N$. Отже, $\varphi_{t(x)}$ є РФ, звідки $t(x) \in A$.

Нехай $x \notin B$, тобто D_x скінченна. Звідси функція $\varphi_{t(x)}$ скінченна, тому не є РФ. Отже, $x \notin A$.

Таким чином, $x \in B \Leftrightarrow t(x) \in A$. Тому РФ $t(x)$: $B \le_m A$.

Маємо $A \le_m B$ та $B \le_m A$. Звідси $A \equiv_m B$.

Приклад 5.1.4. $\{x \mid D_x \text{ нескінченна}\} \equiv_m \{x \mid E_x \text{ нескінченна}\}$.

Позначимо $A = \{x \mid D_x \text{ нескінченна}\}$, $B = \{x \mid E_x \text{ нескінченна}\}$.

За s-m-n-теоремою існують РФ $s(x)$ та $t(x)$ такі: для всіх $x \in N$ $E_{s(x)} = D_x$ та $D_{t(x)} = E_x$ (прикл. 3.3.4, 3.3.5). Тому $x \in A \Leftrightarrow s(x) \in B$ та $x \in B \Leftrightarrow t(x) \in A$. Отже, $s(x)$: $A \le_m B$ та $t(x)$: $B \le_m A$. Звідси $A \equiv_m B$.

Із прикладів 5.1.1–5.1.4 отримуємо:

$$\{x \mid \varphi_x = \mathbf{o}\} \equiv_m \{x \mid \varphi_x \text{ є константа } C\} \equiv_m \{x \mid \varphi_x \text{ є РФ}\} \equiv_m$$
$$\equiv_m \{x \mid D_x \text{ нескінченна}\} \equiv_m \{x \mid E_x \text{ нескінченна}\}.$$

Приклад 5.1.5. $D \le_m \{x \mid \varphi_x \text{ є РФ}\}$.

Позначимо $A = \{x \mid \varphi_x \text{ є РФ}\}$. Нехай g – довільна РФ.

Тоді $f(x, y) = \begin{cases} g(y), \text{ якщо } x \in D, \\ \text{невизначене, якщо } x \notin D, \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ.

За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$: $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y)$ для всіх x, y.

При $x \in D$ маємо $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y) = g(y)$ для всіх $y \Rightarrow$ функція $\varphi_{s(x)} = g$ є РФ $\Rightarrow s(x) \in A$. При $x \notin D$ маємо $\varphi_{s(x)}(y)\uparrow$ для всіх $y \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi_{s(x)} = f_\varnothing$ не є РФ $\Rightarrow s(x) \notin A$.

Отже, $x \in D \Leftrightarrow s(x) \in A$, тому РФ $s(x)$: $D \le_m A$.

Приклад 5.1.6. $D \le_m \{x \mid D_x \text{ є РМ}\}$.

Нехай $A = \{x \mid D_x \text{ є РМ}\}$. Нехай g – така ЧРФ, що D_g не є РМ. Функція

$$f(x, y) = \begin{cases} g(y), \text{ якщо } P_x(x) \text{ не зупиниться за } \le y \text{ кроків}, \\ \text{невизначене, якщо } P_x(x)\downarrow \text{ за } \le y \text{ кроків}, \end{cases}$$

за ТЧ є ЧРФ. За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$: $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y)$ для всіх x та y. При $x \in D$ маємо $P_x(x)\downarrow$, тому існує t таке, що $P_x(x)\downarrow$ за t кроків. Для кожного $y \ge t$ $P_x(x)\downarrow$ за $\le y$ кроків, звідки $f(x, y)\uparrow$ для всіх $y \ge t$. Звідси $\varphi_{s(x)}(y)\uparrow$ для всіх $y \ge t$, тому $\varphi_{s(x)}$ скінченна. Отже, $D_{s(x)}$ є РМ. Звідси при $x \in D$ маємо $s(x) \in A$.

Нехай тепер $x \notin D$. Звідси $P_x(x)\uparrow$, тому для кожного $y \in N$ $P_x(x)$ не зупиниться за $\leq y$ кроків. Отже, маємо $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y) = g(y)$ для всіх $y \in N$. Звідси $D_{s(x)} = D_g$ не є РМ, тому $s(x) \notin A$.

Маємо $x \in D \Leftrightarrow s(x) \in A$, тому РФ $s(x) : D \leq_m A$.

Відношення $\equiv_m$ згідно із $r2$ є дійсно відношенням еквівалентності. Тому введемо класи еквівалентності щодо $\equiv_m$:

$$d_m(A) = \{B \mid A \equiv_m B\}.$$

Такі класи еквівалентності будемо називати *m-степенями*.

Твердження 5.1.2. Кожний m-степінь скінченний або зліченний.

Згідно із твердженням 5.1.1 для кожної $B \subseteq N$ існує не більше ніж зліченна кількість множин $A \subseteq N$ таких, що $A \leq_m B$. Тому для кожної $B \subseteq N$ існує не більше ніж зліченна кількість $A \subseteq N$ таких, що $A \equiv_m B$.

Ураховуючи, що булеан множини N має потужність континууму, як наслідок отримуємо

Твердження 5.1.3. Множина усіх m-степенів має потужність континууму.

Відношення $\leq_m$ індукує на множині m-степенів відповідне відношення $\boldsymbol{\leq_m}$: $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{b}$, якщо $A \leq_m B$ для деяких $A \in \boldsymbol{a}$, $B \in \boldsymbol{b}$.

Маємо $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{b} \Leftrightarrow A \leq_m B$ для всіх $A \in \boldsymbol{a}$, $B \in \boldsymbol{b}$.

Звідси отримуємо: $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{b} \Leftrightarrow A \leq_m B$ для всіх $A \in \boldsymbol{a}$, $B \in \boldsymbol{b}$.

Твердження 5.1.4. Для кожного m-степеня $\boldsymbol{b}$ існує не більше ніж зліченна множина m-степенів $\boldsymbol{a}$ таких, що $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{b}$.

Справді, згідно із твердженням 5.1.1 для кожної $B \subseteq N$ існує не більше ніж зліченна кількість $A \subseteq N$ таких, що $A \leq_m B$.

Приклад 5.1.7. Відношення $\boldsymbol{\leq_m}$ антисиметричне.

Маємо $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{b} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{a} \Leftrightarrow A \leq_m B$ та $B \leq_m A$ для деяких $A \in \boldsymbol{a}$ та $B \in \boldsymbol{b} \Leftrightarrow A \equiv_m B$ для деяких $A \in \boldsymbol{a}$ та $B \in \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Згідно із $r1$ маємо рефлексивність і транзитивність $\boldsymbol{\leq_m}$. Отже, $\boldsymbol{\leq_m}$ є відношенням *часткового порядку* на множині m-степенів.

Будемо писати $\boldsymbol{a} \boldsymbol{<_m} \boldsymbol{b}$, якщо $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$.

Писатимемо $\boldsymbol{a} \boldsymbol{|_m} \boldsymbol{b}$, якщо неправильно $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{b}$ і неправильно $\boldsymbol{b} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{a}$.

Аналогічно вводяться відношення 1-*еквівалентності* $\equiv_1$, відношення $\leq_1$ на множині 1-степенів, визначаються 1-степені.

Кожний m-степінь складається із 1-степенів.

m-степінь *рекурсивний*, якщо він містить РМ.

m-степінь *рекурсивно-перелічний* (РП), якщо він містить РПМ.

Аналогічно визначаємо рекурсивні та РП 1-степені:

– кожний РП m-степінь складається тільки із РПМ;

– кожний рекурсивний m-степінь складається тільки із РМ.

Те саме правильно для 1-степенів.

Існують два сингулярні рекурсивні m-степені, які складаються з єдиної множини:

$$\mathbf{0} = d_m(\varnothing) = \{\varnothing\} \text{ та } \boldsymbol{n} = d_m(N) = \{N\}.$$

Усі інші РМ утворюють рекурсивний m-степінь $\mathbf{0}_{\boldsymbol{m}}$.

Маємо рекурсивно-перелічний m-степінь $\mathbf{0'}_{\boldsymbol{m}} = d_m(D)$.

Властивості m-степенів:

$d1$) $\mathbf{0}_{\boldsymbol{m}} \leq_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{a}$ для всіх m-степенів $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}, \neq \boldsymbol{n}$;

$d2$) $\boldsymbol{n} \leq_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{a}$ для всіх m-степенів $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$;

$d3$) $\mathbf{0} \leq_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{a}$ для всіх m-степенів $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{n}$;

$d4$) якщо $\boldsymbol{a} \leq_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{b}$ і m-степінь $\boldsymbol{b}$ рекурсивно-перелічний, то $\boldsymbol{a}$ – рекурсивно-перелічний m-степінь;

$d5$) існує найбільший РП m-степінь $\mathbf{0'}_{\boldsymbol{m}}$ такий, що для кожного РП m-степеня $\boldsymbol{b}$ маємо $\boldsymbol{b} \leq_{\boldsymbol{m}} \mathbf{0'}_{\boldsymbol{m}}$.

Точною верхньою гранню, або *супремумом,* m-степенів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ (позначаємо $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b}$) назвемо m-степінь $\boldsymbol{c}$ такий:

– $\boldsymbol{a} \leq_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{c}$ та $\boldsymbol{b} \leq_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{c}$;

– $\boldsymbol{c} \leq_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{d}$ для кожного m-степеня $\boldsymbol{d}$ такого, що $\boldsymbol{a} \leq_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{d}$ та $\boldsymbol{b} \leq_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{d}$.

Теорема 5.1.1 (про супремум). Для кожної пари m-степенів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ існує єдина точна верхня грань.

Приклад 5.1.8. Покажемо, що $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{a}$.

Доводимо $A \oplus B \equiv_m B \oplus A$. Укажемо РФ f: $A \oplus B \leq_m B \oplus A$.

Задамо $f(2x) = 2x+1$, $f(2x+1) = 2x$; тоді $x \in A \oplus B \Leftrightarrow f(x) \in B \oplus A$.

Аналогічно доводимо $B \oplus A \leq_m A \oplus B$.

Приклад 5.1.9. Покажемо: якщо $\boldsymbol{a} \leq_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$.

Нехай $\boldsymbol{a} \le_m \boldsymbol{b}$. Тоді існує РФ f: $A \le_m B$ для деяких $A \in \boldsymbol{a}$ та $B \in \boldsymbol{b}$.

Задамо РФ $g(x) = \begin{cases} f(x/2), \text{ якщо } x \text{ парне,} \\ (x-1)/2, \text{ якщо } x \text{ непарне.} \end{cases}$

Тоді $g : A \oplus B \le_m B$. Однак $B \le_m A \oplus B$, звідки $A \oplus B \equiv_m B$. Отже, $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$.

Завдання для самоконтролю

1. Укажіть, як можна уточнити поняття звідності множини A до множини B.
2. Дайте визначення m-звідності.
3. Дайте визначення 1-звідності.
4. Наведіть елементарні властивості m-звідності.
5. Наведіть елементарні властивості 1-звідності.
6. Дайте визначення відношень m- та 1-еквівалентності.
7. Поясніть, що таке m- та 1-степінь.
8. Укажіть елементарні властивості m-степенів.
9. Поясніть, що таке рекурсивний m-степінь.
10. Поясніть, що таке рекурсивно-перелічний m-степінь.
11. Укажіть, які ви знаєте рекурсивні m-степені.
12. Дайте визначення супремуму (точної верхньої грані) m-степенів.
13. Сформулюйте теорему про супремум.

Вправи

1. Порівняйте потужності множин усіх m-степенів і всіх рекурсивно-перелічних m-степенів.
2. З'ясуйте, чи справджуються $A \le_m D$ та $A \le_m \overline{D}$, якщо:
   1) $A = \{x \mid \varphi_x$ є поліномом$\}$;
   2) $A = \{x \mid E_x$ є ПРМ$\}$;
   3) $A = \{x \mid \varphi_x$ не сюр'єктивна$\}$;
   4) $A = \{x \mid D_x = N\}$.
3. Доведіть: якщо $\mathfrak{R} \ne \varnothing$ та $\mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n, то $D \le_m N(\mathfrak{R})$.
4. Доведіть, що $D \le_m A$, якщо:
   1) $A = \{x \mid \varphi_x$ сюр'єктивна$\}$;

2) $A = \{x \mid D_x$ не є ПРМ$\}$;

3) $A = \{x \mid \varphi_x$ не є ПРФ$\}$;

4) $A = \{x \mid E_x$ скінченна$\}$.

*5. Доведіть: якщо A та B – такі РПМ, що $A \cap B \neq \varnothing$ та $A \cup B = N$, то $A \leq_m A \cap B$ та $B \leq_m A \cap B$.

6. Доведіть, що $A \oplus \overline{A} \equiv_1 \overline{A \oplus \overline{A}}$.

7. Установіть, у якому відношенні щодо m-звідності перебувають множини A, $\overline{A}$, D, $\overline{D}$, якщо:

1) $A = \{x \mid \varphi_x$ ін'єктивна$\}$;

2) $A = \{x \mid 3 \notin E_x\}$;

3) $A = \{x \mid \varphi_x(x) = 2\}$;

4) $A = \{x \mid$ неправильно, що $\{0, 1\} \subseteq D_x\}$;

5) $A = \{x \mid 3 \in E_x\} \oplus N$.

8. Доведіть:

1) $A = \{x \mid 1 \notin E_x\} <_m \{x \mid D_x$ є ПРМ$\}$;

2) $A = \{x \mid \varphi_x$ неін'єктивна$\} <_m \{x \mid \varphi_x$ є ПРФ$\}$.

5.2. Продуктивні та креативні множини. Імунні та прості множини

Нехай A – довільна неРПМ. Тоді для кожної $D_x \subseteq A$ існує елемент $y \in A \setminus D_x$ (множина таких y нескінченна). Якщо таке y ефективно обчислюється за x, то множину A називають продуктивною.

Отже, множина A *продуктивна*, якщо існує РФ g така:

$D_x \subseteq A \Rightarrow g(x) \in A \setminus D_x$.

Функцію g називають *продуктивною функцією* множини A.

Множина A *креативна*, якщо A є РПМ та $\overline{A}$ продуктивна.

Приклад 5.2.1. Множина $\overline{D}$ продуктивна із продуктивною функцією $g(x) = x$.

Нехай $D_x \subseteq \overline{D}$. Якщо $x \in D_x$, то $\varphi_x(x)\downarrow$, тому $x \notin \overline{D}$, що суперечить $D_x \subseteq \overline{D}$. Отже, $x \notin D_x$, тому $x \in \overline{D}$. Звідси $x \in \overline{D} \setminus D_x$.

Приклад 5.2.2. Множина D креативна, тому що D є РПМ і $\overline{D}$ продуктивна.

Властивість продуктивності успадковується за m-звідністю.

Теорема 5.2.1. Нехай A – продуктивна множина й $A \le_m B$. Тоді множина B продуктивна.

Наслідок 5.2.1. Нехай A креативна, B – РПМ та $A \le_m B$. Тоді множина B креативна.

Приклад 5.2.3. Множина $C_a = \{x \mid \varphi_x(x) = a\}$ креативна для кожного $a \in N$.

Функція $f(x, y) = \begin{cases} a, \text{ якщо } z \in D, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases} = a \cdot \chi^{ч}_D(z) + 0 \cdot x$ є ЧРФ. За s-m-n-теоремою існує РФ s така: $f(z, x) = \varphi_{s(z)}(x)$ для всіх z, x. Звідси $z \in D \Leftrightarrow \varphi_{s(z)}(s(z))\downarrow = a \Leftrightarrow s(z) \in C_a$, тому РФ $s : D \le_m C_a$.

Однак "$x \in C_a$" є ЧРП: $x \in C_a \Leftrightarrow P_x(x)\downarrow a$. Отже, C_a є РПМ і за наслідком 5.2.1 множина C_a креативна.

Укажемо достатні умови продуктивності для індексних множин.

Теорема 5.2.2. Для продуктивності множини $N(\mathfrak{R})$ достатньою є одна з таких умов:

Пр1) $\mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n та $f_\varnothing \in \mathfrak{R}$;

Пр2) існує $f \in \mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n: $\theta \notin \mathfrak{R}$ для кожної скінченної $\theta \subseteq f$;

Пр3) існують $f \in \mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n та $g \in$ ЧРФ^n такі, що $g \notin \mathfrak{R}$ та $f \subseteq g$.

Приклад 5.2.4. Множина $A = \{x \mid \varphi_x$ є заданою ЧРФ $g\}$ продуктивна.

Якщо g – нескінченна функція, то A продуктивна за Пр2.

Якщо функція g скінченна, то A продуктивна за Пр3.

Теорема 5.2.3. 1) Нехай $\mathfrak{R} \subseteq$ ЧРФ^n. Тоді

$N(\mathfrak{R})$ рекурсивна $\Leftrightarrow \mathfrak{R} = \varnothing$ або $\mathfrak{R} =$ ЧРФ^n.

2) Нехай $\mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n та $\mathfrak{R} \neq \varnothing$. Тоді

$N(\mathfrak{R})$ є нерекурсивна РПМ $\Leftrightarrow N(\mathfrak{R})$ креативна.

Приклад 5.2.5. Множина $A = \{x \mid \varphi_x$ не є заданою ЧРФ $g\}$ продуктивна при $g \neq f_\varnothing$ і креативна при $g = f_\varnothing$.

Якщо $g \neq f_\varnothing$, то $f_\varnothing \in \{\varphi_x \mid \varphi_x$ не є заданою ЧРФ $g\}$, тому A продуктивна за Пр1.

Якщо $g = f_\varnothing$, то $A = \{x \mid \varphi_x \neq f_\varnothing\} = \{x \mid D_x \neq \varnothing\}$ є РПМ, тому креативна згідно із п. 2 теореми 5.2.3.

Приклад 5.2.6. Клас продуктивних множин незамкнений відносно операцій $\cup$, $\cap$ і доповнення.

Маємо $f_\varnothing \in \{\varphi_x \mid \varphi_x$ не є РФ$\}$, тому $A = \{x \mid \varphi_x$ не є РФ$\}$ продуктивна за Пр1. Множина $B = \{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$ продуктивна за Пр2, адже для кожної РФ g кожна скінченна функція $\theta \subseteq g$ не є РФ. Тому $A \cup B = N$ не продуктивна; $A \cap B = \varnothing$ не продуктивна.

Якщо L креативна, то $M = \overline{L}$ продуктивна, водночас $L = \overline{M}$ не продуктивна.

Теорема 5.2.4. 1) A продуктивна $\Rightarrow A \oplus B$ та $B \oplus A$ продуктивні.

2) A креативна та B є РПМ $\Rightarrow A \oplus B$ та $B \oplus A$ креативні.

3) A продуктивна та $B \neq \varnothing \Rightarrow A \otimes B$ та $B \otimes A$ продуктивні.

4) A креативна, $B \neq \varnothing$ та B є РПМ $\Rightarrow A \otimes B$ та $B \otimes A$ креативні.

Приклад 5.2.7. Клас креативних множин незамкнений відносно операцій $\cup$, $\cap$ і доповнення.

Якщо A креативна, то $A \oplus N$ та $N \oplus A$ креативні за теоремою 5.2.4. Однак $(A \oplus N) \cup (N \oplus A) = N$ не креативна, тому що рекурсивна.

$C_0 = \{x \mid \varphi_x(x) = 0\}$ та $C_1 = \{x \mid \varphi_x(x) = 1\}$ креативні за прикладом 5.2.3. Однак $C_0 \cap C_1 = \varnothing$ рекурсивна, тому не креативна.

Якщо A креативна, то $\overline{A}$ продуктивна, тому не креативна.

Приклад 5.2.8. Предикат "$E_x \neq D_y$" не є ЧРП.

Предикат "$E_x \neq D_y$" позначимо $Q(x, y)$. Нехай m – індекс деякої рекурсивної функції, наприклад тотожної, тоді $D_m = N$. Предикат $Q(x, m)$ позначимо $P(x)$, він означає "$E_x \neq N$". Множина $T(P) = \{x \mid E_x \neq N\}$ продуктивна за Пр1, адже $T(P) = N(\mathfrak{R})$, де $\mathfrak{R} = \{\varphi_x \mid E_x \neq N\}$ та $f_\varnothing \in \mathfrak{R}$. Звідси предикат $P(x)$ не є ЧРП, тому й $Q(x, y)$ не є ЧРП.

Приклад 5.2.9. Предикат "$D_x = D_y$" не є ЧРП.

Предикат "$D_x = D_y$" позначимо $Q(x, y)$. Нехай m – індекс деякої РФ. Предикат $Q(x, m)$ позначимо $P(x)$, він означає "$D_x = N$". Множина $T(P) = \{x \mid D_x = N\}$ продуктивна за Пр2, адже $T(P) = N(\mathfrak{R})$, де $\mathfrak{R} = \{\varphi_x \mid D_x = N\}$, а ця $\mathfrak{R}$ складається лише з нескінченних функцій. Звідси предикат $P(x)$ не є ЧРП, тому й $Q(x, y)$ не є ЧРП.

Приклад 5.2.10. Множина $A = \{x \mid E_x = \{0\}\}$ продуктивна.

Нехай $\mathfrak{R} = \{\varphi_x \mid E_x = \{0\}\}$. Нехай g – тотожна функція, f – функція із $\Gamma_f = \{(0, 0)\}$, тобто $f(x) = 0 - x$. Маємо $f \subset g$, $f \in \mathfrak{R}$ та $g \notin \mathfrak{R}$. Отже, $A = N(\mathfrak{R})$ є продуктивною за Пр3.

Приклад 5.2.11. Поширені умови $\mathfrak{R}$, які гарантують продуктивність індексних множин вигляду $\{x \mid \mathfrak{R}\}$ згідно з умовами Пр1–Пр3:

1) згідно із **Пр1**: $\mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n та $f_\varnothing \in \mathfrak{R}$. Зокрема, умови:

– D_x є РМ; D_x є ПРМ; D_x не креативна; D_x не проста; $D_x \neq N$;

– те саме для E_x;

– φ_x не є РФ; φ_x не є ПРФ; φ_x не є поліномом; φ_x не константа; φ_x ін'єктивна; φ_x не сюр'єктивна; φ_x не бієктивна;

2) згідно із **Пр2**: існує $f \in \mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n така, що $\theta \notin \mathfrak{R}$ для кожної скінченної $\theta \subseteq f$. Зокрема, умови:

– D_x не РМ; D_x не ПРМ; D_x креативна; D_x проста; $D_x = N$;

– те саме для E_x;

– φ_x є РФ; φ_x є ПРФ; φ_x є поліномом; φ_x є константою; φ_x сюр'єктивна;

φ_x бієктивна; $\varphi_x = \mathbf{0}$; $\varphi_x(z) = z$ для всіх z (φ_x тотожна);

3) згідно із **Пр3**: існують $f \in \mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n та $g \in$ ЧРФ^n: $g \notin \mathfrak{R}$ та $f \subseteq g$. Зокрема, умови:

– $D_x = \{1\}$; $D_x = \{2, 3, 4\}$; $D_x \neq \varnothing$ і скінченна;

– те саме для E_x.

Приклад 5.2.12. $A = \{2x+3 \mid \varphi_x$ сюр'єктивна$\}$ є продуктивною.

Множина $B = \{x \mid \varphi_x$ сюр'єктивна$\}$ є продуктивною за Пр2. Ін'єктивна РФ $2x + 3$: $B \leq_1 A$, тому A продуктивна.

Приклад 5.2.13. Множина $A = \{3x+1 \mid 2 \in D_x\}$ креативна.

Множина $B = \{x \mid 2 \in D_x\}$ креативна, оскільки це індексна нерекурсивна РПМ. Ін'єктивна РФ $3x + 1$: $B \leq_1 A$, тому A креативна.

Приклад 5.2.14. $A = \{x \mid \{0, 1\} \subseteq D_x\} \oplus \{x \mid x$ парне$\}$ креативна.

Множина $B = \{x \mid \{0, 1\} \subseteq D_x\}$ креативна як індексна нерекурсивна РПМ (теорема 5.2.3). Множина $C = \{x \mid x$ парне$\}$ є РМ. Тому множина $A = B \oplus C$ креативна.

Приклад 5.2.15. $A = \{x \mid \varphi_x$ не є ПРФ$\}\otimes D$ продуктивна.

Множина $B = \{x \mid \varphi_x$ не є ПРФ$\}$ продуктивна за Пр1, $D \neq \varnothing$. Тому множина $A = B\otimes D$ продуктивна.

Приклад 5.2.16. З'ясуємо, у якому відношенні щодо m-звідності перебувають множини D, $\overline{D}$, $D\oplus\overline{D}$, $D\otimes\overline{D}$.

Згідно із $r13$ та $r14$ маємо $D \leq_m D\oplus\overline{D}$, $\overline{D} \leq_m D\oplus\overline{D}$, $D \leq_m D\otimes\overline{D}$, $\overline{D} \leq_m D\otimes\overline{D}$. Унаслідок теореми 5.1.1 звідси $D\oplus\overline{D} \leq_m D\otimes\overline{D}$.

За $r6$ маємо $\overline{D}|_m D$. Неможливо $\overline{D} \leq_m D$, $D\oplus\overline{D} \leq_m D$, $D\otimes\overline{D} \leq_m D$, адже D є РПМ, а $\overline{D}$, $D\oplus\overline{D}$, $\overline{D} \leq_m D\otimes\overline{D}$ продуктивні.

Якщо $D\oplus\overline{D} \leq_m \overline{D}$, то внаслідок $D \leq_m D\oplus\overline{D}$ маємо $D \leq_m \overline{D}$, що неможливо; якщо $D\otimes\overline{D} \leq_m \overline{D}$, то внаслідок $D \leq_m D\otimes\overline{D}$ маємо $D \leq_m \overline{D}$, що неможливо. Також [19] неможливо $D\otimes\overline{D} \leq_m D\oplus\overline{D}$.

Отже, $\overline{D}|_m D$, $D <_m D\oplus\overline{D}$, $\overline{D} <_m D\oplus\overline{D}$, $D\oplus\overline{D} <_m D\otimes\overline{D}$.

Теорема 5.2.5. Кожна продуктивна множина містить нескінченну рекурсивно-перелічну підмножину.

Імунні та прості множини. Нескінченна множина *імунна,* якщо вона не містить нескінченних РПМ.

Отже, імунна множина не може бути РПМ і не може бути продуктивною.

Множина *проста,* якщо вона є РПМ і має імунне доповнення.

Зрозуміло, що A проста $\Leftrightarrow$ A є РПМ, $\overline{A}$ нескінченна та для кожної нескінченної РПМ R маємо $A\cap R \neq \varnothing$.

Проста множина не може бути ні рекурсивною, ні креативною.

Приклад 5.2.17. Нехай $f(x) = \varphi_x(\mu_z(\varphi_x(z) > 4x))$. Тоді f є ЧРФ, $\overline{E}_f$ імунна та E_f проста.

Маємо $f(x) > 4x$ для всіх $x\in D_f$. Для довільного $n\in N$ множина $\{0,..., 4n\}$ містить $\leq n$ елементів E_f, оскільки $f(n) > 4n$ і елементи E_f можна брати тільки із $f(0),..., f(n-1)$. Тому для кожного $n\in N$ така $\{0,..., 4n\}$ містить $> 3n$ елементів $\overline{E}_f \Rightarrow \overline{E}_f$ нескінченна.

Нехай B – довільна нескінченна РПМ. Тоді $B = E_g$ для деякої РФ g. Нехай k – індекс функції g, тобто g – це φ_k. Значення $f(x) = \varphi_x(\mu_z(\varphi_x(z) > 4x))$ визначене, тому що φ_k є РФ із нескінченною множиною значень. Отже, $f(k) \in E_k \cap E_f = E_g \cap E_f = B \cap E_f$, тому $B \cap E_f \neq \varnothing$, звідки неможливо $B \subseteq E_f$.

E_f містить принаймні по одному елементу кожної нескінченної РПМ, тому жодна нескінченна РПМ повністю в E_f не вміщається; при цьому $\overline{E}_f$ нескінченна. Отже, $\overline{E}_f$ імунна та E_f проста.

Теорема 5.2.6. Множина A проста $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ нескінченна й $A \cap R$ є нескінченною РПМ для кожної нескінченної РПМ R.

Теорема 5.2.7. Якщо множини A та B прості, то $A \cap B$ проста.

Приклад 5.2.18. Існують прості множини A та B: $A \cup B = N$.

Задамо $f(x) = \varphi_x(\mu_z(\varphi_x(z) > 4x))$. Згідно із прикладом 5.2.17 множина E_f проста. Задамо $A = E_f \cup N_{2x}$ та $B = E_f \cup N_{2x+1}$. Зрозуміло, що $A \cup B = N$. Покажемо, що множини A та B прості.

Для кожного $n \in N$ множина $\{0,..., 4n\}$ містить $\leq n$ елементів E_f. Крім того, $\{0,..., 4n\}$ містить $2n+1$ парних і $2n$ непарних чисел. Отже, множина $\{0,..., 4n\}$ містить $\leq 3n+1$ елементів A та $\leq 3n$ елементів B. Тому для кожного $n \in N$ множина $\{0, ..., 4n\}$ містить $\geq n$ елементів $\overline{A}$ та $>n$ елементів $\overline{B}$, звідки $\overline{A}$ та $\overline{B}$ нескінченні.

Нехай R – довільна нескінченна РПМ. Тоді $R = E_k$, де k – індекс деякої РФ φ_k. Значення $f(x) = \varphi_x(\mu_z(\varphi_x(z) > 4x))$ визначене, адже φ_k є РФ та E_k нескінченна. Отже, $f(k) \in E_k \cap E_f =$ $= R \cap E_f$, тому $R \cap E_f \neq \varnothing$.

Звідси $R \cap (E_f \cup N_{2x}) = R \cap A \neq \varnothing$ та $R \cap (E_f \cup N_{2x+1}) = R \cap B \neq \varnothing$.

Таким чином, A та B – прості множини, для яких $A \cup B = N$.

Наслідок 5.2.2. Клас простих множин незамкнений відносно $\cup$ і доповнення.

Це випливає з визначення простої множини (доповнення до простої – множина імунна, яка не є РПМ) і прикладу 5.2.18 (множина N рекурсивна, тому не проста).

Теорема 5.2.8. Якщо множини A та B прості, то $A \oplus B$ проста.

Приклад 5.2.19. Якщо множина A проста, то $A \otimes B$ та $B \otimes A$ не є простими.

Візьмемо довільний $d \in \overline{A}$. Тоді $L = \{d\}\otimes N$ та $M = N\otimes\{d\}$ – нескінченні РПМ. Однак $L\cap(A\otimes B) = \varnothing$ та $M\cap(B\otimes A) = \varnothing$, тому $A\otimes B$ та $B\otimes A$ не прості.

Наслідок 5.2.3. Якщо A та B прості, то $A\otimes B$ не проста.

Приклад 5.2.20. Потужність множини всіх імунних множин – континуум.

Нехай $A = \{z_0 < z_1 < \ldots < z_n < \ldots\}$ імунна, тоді вона не містить нескінченних РПМ. Диз'юнктні множини $B = \{z_0, z_2, z_4, \ldots, z_{2n}, \ldots\}$ та $C = \{z_1, z_3, z_5, \ldots, z_{2n+1}, \ldots\}$ теж імунні, адже вони нескінченні й не містять нескінченних РПМ. Для кожної $L \subseteq C$ множина $B \cup L$ теж імунна, адже $B \subseteq B \cup L \subseteq A$, тому всі такі $B \cup L$ нескінченні й не містять нескінченних РПМ. Маємо континуум різних $L \subseteq C$, а тому й континуум різних імунних $B \cup L$.

Подальше посилення властивостей імунності та простоти веде до понять гіперімунної і гіперпростої множин.

Нехай $A = \{z_0 < z_1 < \ldots < z_n < \ldots\}$.

Функція f *мажорує* A, якщо $f(n) > z_n$ для всіх n.

Множина A *гіперімунна*, якщо A нескінченна й не існує рекурсивної функції, яка мажорує A.

Множина A *гіперпроста*, якщо A є РПМ та $\overline{A}$ гіперімунна.

Приклад 5.2.21. Гіперімунні множини існують.

Нехай $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ – деяка послідовність тотальних функцій на N, яка включає всі РФ[1]. Задамо функцію g:

$$g(0) = f_0(0);$$

$$g(n+1) = \mu_z(z > g(n) \text{ та } z > f_{n+1}(n+1)).$$

Звідси E_g не мажорується жодною РФ, тому E_g гіперімунна.

Теорема 5.2.9. Якщо A гіперімунна, то A імунна.

Наслідок 5.2.4. Якщо A гіперпроста, то A проста.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення продуктивної множини.
2. Дайте визначення креативної множини.
3. Укажіть достатні умови продуктивності для індексних множин.
4. Наведіть властивості продуктивних і креативних множин.

5. Опишіть замкненість продуктивних і креативних множин відносно теоретико-множинних операцій.

6. Дайте визначення імунної множини.

7. Дайте визначення простої множини.

8. Укажіть властивості імунних і простих множин.

9. Опишіть замкненість імунних і простих множин відносно теоретико-множинних операцій.

10. Дайте визначення гіперімунної множини.

11. Дайте визначення гіперпростої множини.

12. Укажіть, як співвідносяться гіперімунні та імунні множини.

Вправи

1. Доведіть: якщо B є РПМ, $A \cap B$ продуктивна, то A продуктивна.

2. Доведіть: якщо B є РПМ, A креативна та $A \cap B = \varnothing$, то $A \cup B$ креативна.

3. З'ясуйте, чи будуть ЧРП такі предикати:

1) "$E_x = D$";
2) "$D \neq E_y$";
3) "$E_x = E_y$";
4) "$E_x \neq E_y$";
5) "$\{0, 1\} = D_x$";
6) "φ_x не є поліномом";
7) "$4 \in D_x$";
8) "D_x скінченна та $\neq \varnothing$".

4. Установіть, до якого класу належать множини:

1) $\{x \mid \varphi_x$ не є ін'єктивною$\}$;
2) $\{x \mid E_x = \{1, 2\}\}$;
3) $\{x \mid \{1, 2\} \subseteq E_x\}$;
4) $\{x \mid E_x$ не проста$\}$;
5) $\{2x \mid D_x$ креативна$\}$;
6) $\{3x \mid x \in D_x\}$;
7) $\{x \mid 3x \in E_x\}$;
8) $\{5x+2 \mid \varphi_x$ є поліномом$\}$;
9) $\{4x+1 \mid \varphi_x$ ін'єктивна$\}$;
10) $\{5x^2+4 \mid \varphi_x$ – константа$\}$;

11) $\{C(x, y) \mid x \in E_y\}$;
12) $\{7x+3 \mid E_x$ є ПРМ$\} \oplus N$;
13) $\{3x+5 \mid x \in E_x\} \otimes D$;
14) $\{x \mid x$ парне$\} \otimes \{x \mid D_x \neq \varnothing\}$;
15) $\{x \mid x$ непарне$\} \oplus \{x \mid \varphi_x = \mathbf{o}\}$;
16) $\{7x+4 \mid E_x$ скінченна та $\neq \varnothing\}$;
17) $\{x \mid \{0, 2\} \subseteq D_x\} \oplus \{x \mid x$ просте$\}$;
18) $\{x \mid \varphi_x$ неін'єктивна$\} \otimes \{x \mid x \in E_x\}$;
19) $D \otimes \{2x \mid E_x$ не є креативною$\}$;
20) $\{x^3 \mid D_x$ проста$\} \otimes \{3x \mid x$ не просте$\}$.

5. Доведіть:
1) B є РПМ та $A \cap B$ продуктивна $\Rightarrow A$ продуктивна;
2) B є РПМ, A продуктивна й $A \subset B \Rightarrow A \setminus B$ продуктивна;
3) B є РПМ, A креативна й $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cup B$ креативна;
4) B є РПМ, A продуктивна й $A \subset B \Rightarrow A \cup \overline{B}$ продуктивна.

6. Доведіть: якщо A та B прості, то $\overline{\overline{A} \otimes \overline{B}}$ теж проста.

*7. Визначте потужність множини всіх продуктивних множин.

5.3. *m*-повнота і креативність. Співвідношення між 1-звідністю та *m*-звідністю

РПМ L *m-повна*, якщо $A \leq_m L$ для кожної РПМ A.
РПМ L *1-повна*, якщо $A \leq_1 L$ для кожної РПМ A.

Приклад 5.3.1. Множина D *m*-повна.
Це випливає з такого твердження.

Теорема 5.3.1. A є РПМ $\Leftrightarrow A \leq_m D$.
Множина D є РПМ, тому з $A \leq_m D$ випливає, що A є РПМ.

Якщо A є РПМ, то $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A, \\ \text{невизначене, якщо} & x \notin A, \end{cases}$ є ЧРФ

за ТЧ. За *s-m-n*-теоремою існує РФ $s(x)$ така: $f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ для всіх значень x, y. Маємо: $x \in A \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(y) = 1$ для всіх y $\Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(s(x))\downarrow \Leftrightarrow s(x) \in D$. Тому $s : A \leq_m D$.

Наслідок 5.3.1. Множина L m-повна $\Leftrightarrow L \equiv_m D$.

Наслідок 5.3.2. m-степінь $\mathbf{0'}_m$ складається із m-повних множин.

Розглянемо зв'язок m-повноти із креативністю.

Твердження 5.3.1. Кожна m-повна множина креативна.

Якщо РПМ L m-повна, то $D \leq_m L$. За наслідком 5.2.1 із креативності множини D випливає, що L теж креативна.

Теорема 5.3.2 (Майхілла). Якщо L креативна, то L m-повна.

Наслідок 5.3.3. Множина L креативна $\Leftrightarrow L$ є m-повною.

Наслідок 5.3.4. Нехай $\boldsymbol{b}$ – m-степінь простої множини. Тоді $\mathbf{0}_m <_m \boldsymbol{b} <_m \mathbf{0'}_m$.

Справді, проста множина не рекурсивна й не креативна.

Ефективна нероздільність. Множини A і B *ефективно нероздільні*, якщо $A \cap B = \varnothing$ та існує РФ $f(x, y)$ така, що з умови $D_a \supseteq A$, $D_b \supseteq B$ та $D_a \cap D_b = \varnothing$ випливає $f(a, b) \notin D_a \cup D_b$.

Таку функцію f називають *продуктивною функцією* пари нероздільних множин A та B.

Множини A і B *рекурсивно-нероздільні,* якщо $A \cap B = \varnothing$ і не існує РМ R такої, що $R \supseteq A$ та $R \cap B = \varnothing$.

Теорема 5.3.3. Якщо множини A та B ефективно нероздільні, то A та B рекурсивно-нероздільні.

Приклад 5.3.2. $C_0 = \{x \mid \varphi_x(x) = 0\}$ та $C_1 = \{x \mid \varphi_x(x) = 1\}$ є ефективно нероздільними РПМ.

Зрозуміло, що множини C_0 та C_1 рекурсивно-перелічні.

Задамо функцію h у такий спосіб. Для всіх $x, y, z \in N$ визначимо:

$$h(x, y, z) = \begin{cases} 1, \text{якщо } z \in D_x \cup D_y \text{ і в переліку } D_x \cup D_y \\ \text{вперше встановлено } z \in D_x, \\ 0, \text{якщо } z \in D_x \cup D_y \text{ і в переліку } D_x \cup D_y \\ \text{вперше встановлено } z \in D_y, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$$

Функція h алгоритмічно обчислювана, тому за тезою Чорча h є ЧРФ. За s-m-n-теоремою існує РФ u така: $h(x, y, z) = \varphi_{u(x,y)}(z)$ для всіх x, y, z.

Покажемо, що u – продуктивна функція для пари нероздільних C_0 та C_1. Нехай a і b такі, що $D_a \supseteq C_0$, $D_b \supseteq C_1$ та $D_a \cap D_b = \varnothing$.

Якщо $u(a, b) \in D_a$, то $\varphi_{u(a,b)}(u(a, b)) = h(a, b, u(a, b)) = 1$, тому $u(a, b) \in C_1 \subseteq D_b$ – суперечність.

Якщо $u(a, b) \in D_b$, то $\varphi_{u(a,b)}(u(a, b)) = h(a, b, u(a, b)) = 0$, звідки $u(a, b) \in C_0 \subseteq D_a$ – суперечність.

Отже, $u(a, b) \notin D_a \cup D_b$, тому u – продуктивна функція для пари ефективно нероздільних C_0 і C_1 .

Теорема 5.3.4. Нехай A та B – ефективно нероздільні РПМ. Тоді A та B креативні.

Співвідношення між 1-звідністю та *m*-звідністю. Розглянемо співвідношення між 1-звідністю та m-звідністю.

Теорема 5.3.5. Якщо A проста, то $A <_1 A \otimes N$.

Теорема 5.3.6. $A \leq_m B \Leftrightarrow A \otimes N \leq_1 B \otimes N$.

Приклад 5.3.3. 1) $A \leq_1 A \otimes N$ для довільної $A \subseteq N$.

2) $A \otimes N \equiv_m A$ для довільної $A \subseteq N$.

Справді, ін'єктивна РФ $f(x) = C(x, 0)$ 1-зводить A до $A \otimes N$.

РФ $l(x)$ m-зводить $A \otimes N$ до A, тому $A \otimes N \leq_m A$. Згідно із $r14$ маємо $A \leq_m A \otimes N$. Таким чином, $A \otimes N \equiv_m A$.

Приклад 5.3.4. Нехай множина A проста. Тоді $A \otimes N$ є РПМ, яка не проста, не креативна й не рекурсивна.

Якщо A проста, то A є РПМ, звідки $A \otimes N$ є РПМ.

Якщо $A \otimes N$ креативна, то внаслідок $A \equiv_m A \otimes N$ та $r14$ A креативна. Якщо $A \otimes N$ є РМ, то внаслідок $A \equiv_m A \otimes N$ та $r4$ A є РМ. В обох випадках це суперечить умові, що A проста.

Згідно із прикладом 5.2.17, якщо A проста, то $A \otimes N$ не проста.

Приклад 5.3.5. 1) Відношення $\leq_m$ та $\leq_1$ не збігаються.

2) Відношення $\equiv_m$ та $\equiv_1$ не збігаються.

Нехай A проста. Маємо $A \otimes N \leq_m A$ та $A \equiv_m A \otimes N$ (приклад 5.3.3).

Неможливо $A \otimes N \leq_1 A$, адже внаслідок $A \leq_1 A \otimes N$ (приклад 5.3.3) тоді $A \equiv_1 A \otimes N$. Проте (теорема 5.3.5) якщо A проста, то $A <_1 A \otimes N$.

Розглянемо співвідношення між 1-степенями та m-степенями.

Маємо $A \equiv_1 B \Rightarrow A \equiv_m B$, тому кожний m-степінь розпадається на 1-степені.

Кожний m-степінь $\boldsymbol{b}$ містить максимальний 1-степінь, який можна отримати (теорема 5.3.6) з довільної $B \in \boldsymbol{b}$ як степінь $d_1(B \otimes N)$.

Приклад 5.3.6. Існують РП m-степені, які складаються з кількох 1-степенів. Такими є, зокрема, m-степені простих множин.

Справді, нехай A проста. Тоді $d_m(A) = d_m(A \otimes N)$ згідно з $A \equiv_m A \otimes N$, але згідно з теоремою 5.3.5 маємо $d_1(A) <_1 d_1(A \otimes N)$.

Теорема 5.3.7. Множина L m-повна $\Leftrightarrow$ множина L 1-повна.

Наслідок 5.3.5. Класи 1-повних, m-повних, креативних множин збігаються.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення m-повної РПМ.
2. Сформулюйте теорему Майхілла.
3. Укажіть, як співвідносяться класи m-повних і креативних множин.
4. Дайте визначення ефективно нероздільних множин.
5. Дайте визначення рекурсивно-нероздільних множин.
6. Наведіть приклад ефективно нероздільних РПМ.
7. Укажіть властивість пари ефективно нероздільних РПМ.
8. Наведіть приклад РПМ, яка не проста, не креативна й не є рекурсивною.
9. Укажіть, чи збігаються відношення $\leq_m$ та $\leq_1$; $\equiv_m$ та $\equiv_1$.
10. Укажіть співвідношення між класами 1-повних, m-повних і креативних множин.

Вправи

1. Доведіть ефективну нероздільність РПМ:
   1) $A = \{x \mid \varphi_x(x) < 2\}$ та $B = \{x \mid \varphi_x(x) > 2\}$;
   2) $A = \{x \mid \varphi_x(x) = 3\}$ та $B = \{x \mid \varphi_x(x) \geq 7\}$.
2. Доведіть: якщо A проста, то $A <_1 A \otimes N$ (теорема 5.3.5).
3. Доведіть: $A \leq_m B \Leftrightarrow A \otimes N \leq_1 B \otimes N$ (теорема 5.3.6).

*4. Дослідіть структуру рекурсивних 1-степенів.

6. ВІДНОСНА ОБЧИСЛЮВАНІСТЬ. *T*-ЗВІДНІСТЬ

Опишемо відносну обчислюваність для класу n-арних функцій на N. Поняття відносної обчислюваності лежить в основі визначення тьюрінгової звідності, або *T-з*відності, яка найбільш адекватно уточнює інтуїтивне поняття звідності.

6.1. Формалізація відносної обчислюваності. Релятивізація теорем

Обмежимося розглядом обчислюваності відносно тотальних функцій, їх трактуватимо як оракули. Функція f обчислювана відносно тотальної функції-оракула α, якщо існує алгоритм для обчислення f, який може, за необхідності, брати потрібні значення функції α.

Таке поняття відносної обчислюваності формально уточнимо через поняття *МНР з оракулом* (МНРО). Порівняно із МНР, МНРО використовують новий тип команд $O(n)$ – звернення до оракула. Для виконання таких команд МНРО має з'єднатися з певним оракулом α.

Виконання команди $O(n)$ означає, що $'R_n := \alpha('R_n)$, тобто вміст n-го регістра засилається в оракул α, який повертає в n-й регістр значення функції α від цього вмісту.

Після виконання $O(n)$ виконується чергова за списком команда програми МНРО.

Програма МНРО – це скінченна послідовність команд МНРО.

Смисл МНРО-програми залежить від конкретного оракула.

Тому МНРО-програму P, яка виконується МНРО з оракулом α, будемо позначати P^{α}.

МНРО-програма *P обчислює* функцію $f: N^n \to N$ *відносно оракула* α, або α-*обчислює* функцію f, якщо

$$f(a_1, a_2,..., a_n) = b \Leftrightarrow P^{\alpha}(a_1, a_2,..., a_n)\downarrow b.$$

Функція f *МНРО-обчислювана відносно* α, або α-*обчислювана*, якщо існує МНРО-програма P, яка обчислює f відносно α.

Розглянемо інший підхід до відносної обчислюваності.

Функцію назвемо *частково рекурсивною відносно* α, або α-*ЧРФ*, якщо її отримано з функцій **o**, s, I_m^n та α за допомогою скінченної кількості застосувань операцій S^{n+1}, R та M.

Тотальну α-ЧРФ назвемо α-РФ.

Визначення α-ЧРФ можна узагальнити до визначення $\mathfrak{I}$-ЧРФ, де $\mathfrak{I}$ – певна система n-арних функцій на N (див., напр., [3]). У нашому випадку $\mathfrak{I} = \{\alpha\}$, причому α тотальна.

Про інші, технічно складніші уточнення відносної обчислюваності, зокрема запропоновані А. Тьюрінгом МТ з оракулом, можна прочитати в [19, 21]).

Формальні поняття α-обчислюваності й часткової рекурсивності відносно α еквівалентні.

Теорема 6.1.1. f є α-ЧРФ $\Leftrightarrow f$ МНРО-обчислювана відносно α.

Клас усіх α-ЧРФ позначимо ЧРФ$^{\alpha}$.

Укажемо важливі властивості α-ЧРФ:

о1) $\alpha \in$ ЧРФ$^{\alpha}$;

о2) для довільного оракула α маємо ЧРФ $\subseteq$ ЧРФ$^{\alpha}$;

о3) якщо тотальна функція φ є α-ЧРФ, то ЧРФ$^{\varphi} \subseteq$ ЧРФ$^{\alpha}$;

о4) якщо α рекурсивна, то ЧРФ$^{\alpha}$ = ЧРФ.

Для відносно обчислюваних функцій сформулюємо релятивний аналог тези Чорча, який називають **тезою Тьюрінга** (*ТТ*):

Клас α-ЧРФ збігається із класом *n*-арних функцій на *N*, алгоритмічно обчислюваних відносно α

Ефективну нумерацію n-арних α-ЧРФ уведемо на основі кодування МНРО-програм аналогічно відповідній нумерації n-арних ЧРФ.

Приклад 6.1.1. Кодування команд МНРО можна задати так:

$\theta(Z(n)) = 5 \cdot n$;

$\theta(S(n)) = 5 \cdot n + 1$;

$\theta(T(m, n)) = 5 \cdot C(m, n) + 2$;

$\theta(J(m, n, q+1)) = 5 \cdot C(C(m, n), q) + 3$;

$\theta(O(n)) = 5 \cdot n + 4$.

Уживаємо позначення $\varphi_m^{\alpha,n}$ для n-арної α-ЧРФ з індексом m, позначення $D_m^{\alpha,n}$ – для області визначення $\varphi_m^{\alpha,n}$, $E_m^{\alpha,n}$ – для області значень $\varphi_m^{\alpha,n}$.

Якщо $n = 1$, то, відповідно, уживаємо позначення φ_m^{α}, D_m^{α}, E_m^{α}.

Множину L назвемо α-*РМ*, якщо χ_L є α-РФ.

Множину L назвемо α-*РПМ*, якщо $L = \varnothing$ або $L = E_f$ для деякої α-рекурсивної функції f.

Предикат P назвемо α-*РП*, якщо χ_P є α-РФ.

Предикат P назвемо α-*ЧРП*, якщо $\chi_P^{ч}$ є α-ЧРФ.

Приклад 6.1.2. Наведемо релятивні варіанти теорем із попередніх розділів.

$R1$) Релятивна s-m-n-теорема. Для довільних $m, n > 1$ існує $(m+1)$-арна РФ $s_n^m(z, x_1,..., x_m)$ така: для всіх $z, x_1,..., x_m, y_1,..., y_n$ маємо $\varphi_z^{\alpha,m+n}(x_1,..., x_m, y_1,..., y_n) = \varphi_{s_n^m(z,x_1,...,x_m)}^{\alpha,n}(y_1,..., y_n)$.

$R2$) Релятивна s-m-n-теорема (спрощена форма). Для кожної α-ЧРФ $f(x, y)$ існує РФ $s(x)$ така, що $f(x, y) = \varphi_{s(x)}^{\alpha}(y)$ для всіх x, y.

$R3$) Функція, універсальна для класу n-арних α-РФ, не є α-ЧРФ.

$R4$) Існує α-ЧРФ, універсальна для класу n-арних α-ЧРФ.

$R5$) Релятивна теорема Кліні про НТ.

Нехай f – $(n+1)$-арна РФ. Тоді існує n-арна РФ g така: для всіх $x_1,..., x_n$ маємо $\varphi_{g(x_1,...,x_n)}^{\alpha} = \varphi_{f(g(x_1,...,x_n),x_1,...x_n)}^{\alpha}$.

$R6$) Релятивна теорема Поста.

L та $\overline{L}$ є α-РПМ $\Rightarrow$ L та $\overline{L}$ є α-РМ.

$R7$) Такі визначення α-РПМ еквівалентні:

*df*1) $L = \varnothing$ або L є областю значень деякої α-РФ;

*df*2) L є областю значень деякої α-ЧРФ;

*df*3) L є областю визначення деякої α-ЧРФ;

*df*4) часткова характеристична функція множини L є α-ЧРФ.

$R8$) Предикат $Q(x_1,..., x_n)$ є α-ЧРП тоді й тільки тоді, коли існує α-РП $R(x_1,..., x_n, y)$ такий: $Q(x_1,..., x_n) \Leftrightarrow \exists y R(x_1,..., x_n, y)$.

$R9$) $Q(x_1,..., x_n, y)$ є α-ЧРП $\Rightarrow \exists y Q(x_1,..., x_n, y)$ теж є α-ЧРП.

$R10$) $D^\alpha = \{x \mid \varphi_x^\alpha(x)$ визначене$\}$ є α-РПМ і не є α-РМ.

$R11$) $D^\alpha = \{x \mid \varphi_x^\alpha(x)$ невизначене$\}$ не є α-РПМ.

Обчислюваність відносно довільної множини B визначають як обчислюваність відносно її характеристичної функції χ_B.

Функцію називають *B-рекурсивною*, якщо вона χ_B-рекурсивна.

Функцію називають *B-ЧРФ*, якщо вона χ_B-ЧРФ.

Множину A називають *B-рекурсивною*, якщо χ_A є χ_B-РФ.

Множину A називають *B-РПМ*, якщо $\chi_A^ч$ є χ_B-ЧРФ.

Предикат P називають *B-рекурсивним*, якщо χ_P є χ_B-РФ.

Предикат P називають *B-ЧРП*, якщо $\chi_P^ч$ є χ_B-ЧРФ.

Функцію $\varphi_m^{\chi_B,n}$ і множину $D_m^{\chi_B,n}$ позначаємо $\varphi_m^{B,n}$ та $D_m^{B,n}$.

Якщо $n = 1$, то вживаємо позначення φ_m^B та D_m^B.

Класи функцій ЧРФ$^{\chi_B}$ та РФ$^{\chi_B}$ позначатимемо ЧРФ^B та РФ^B.

Теорема 6.1.2. 1) Множина A є $\overline{A}$-РМ.

2) Якщо A є B-РМ і B є C-РМ, то A є C-РМ.

3) Якщо A є B-РПМ і B є C-РМ, то A є C-РПМ.

Приклад 6.1.3. Якщо A є B-РМ та B є C-РПМ, то не завжди A є C-РПМ.

Візьмемо $A = \overline{D^C}$ і $B = D^C$. Тоді $\overline{D^C}$ є D^C-РМ згідно з п. 1 теореми 6.1.3, а D^C є C-РПМ за $R10$, але за $R11$ $\overline{D^C}$ не є C-РПМ.

Завдання для самоконтролю

1. Укажіть, як можна уточнити поняття відносної обчислюваності.
2. Дайте визначення МНРО.
3. Дайте визначення МНРО-програми.
4. Дайте визначення α-обчислюваної функції.
5. Дайте визначення α-ЧРФ.
6. Укажіть елементарні властивості α-ЧРФ.
7. Сформулюйте тезу Тьюрінга.
8. Укажіть, як задається кодування команд МНРО-програм.

9. Уведіть ефективну нумерацію n-арних α-ЧРФ.

10. Дайте визначення α-РФ, α-ЧРФ, α-РМ, α-РПМ, α-РП, α-ЧРП.

11. Сформулюйте релятивні варіанти відомих вам теорем теорії алгоритмів.

12. Укажіть, як визначається обчислюваність відносно множини.

13. Укажіть властивості обчислюваності відносно множини.

Вправи

1. Доведіть релятивні варіанти теорем $R1$–$R11$.

2. Доведіть, що існують РФ g та h такі:

якщо $L = D_n^\alpha$ та $\overline{L} = D_m^\alpha$, то $\chi_L = \varphi_{g(n,m)}^\alpha$ та $\chi_{\overline{L}} = \varphi_{h(n,m)}^\alpha$.

Це ефективний варіант релятивної теореми Поста (за індексами α-РПМ L та $\overline{L}$ ефективно знаходимо індекси χ_L та $\chi_{\overline{L}}$).

3. З'ясуйте, чи існує РФ s така:

1) для всіх $x, y \in N$ $D_{s(x,y)}^\alpha = (D_{x+y}^\alpha \cap E_y^\alpha) \setminus \{3x, y+2\}$;

2) для всіх $x, y \in \in N$ $E_{s(x,y)}^\alpha = E_{2x}^\alpha \cup (D_y^\alpha \setminus E_{2x}^\alpha)$;

3) для всіх $x, y, z \in N$ $D_{s(x,y,z)}^\alpha = E_y^\alpha \cup (E_z^\alpha \setminus D_x^\alpha)$;

4) для всіх $x, y, z \in N$ $E_{s(x,y,z)}^\alpha = E_{3y}^\alpha \cup (E_{2z+x}^\alpha \cap D_{x+5y}^\alpha) \setminus \{x, 2y, z^3\}$.

*4. Дайте визначення A-продуктивної, A-креативної, A-імунної та A-простої множин. Дослідіть їхні властивості.

*5. Доведіть:

1) кожна A-продуктивна множина є продуктивною;

2) кожна A-імунна множина є імунною;

3) співвідношення між A-креативними та креативними множинами залежить від A;

4) співвідношення між A-простими та простими множинами залежить від A;

5) множини A-креативних і m-повних A-РПМ збігаються.

*6. Нехай B – A-продуктивна множина із продуктивною функцією $g(x)$. Укажіть продуктивну функцію для B як продуктивної множини.

*7. Укажіть продуктивну функцію для $\overline{D^A}$ як:

1) продуктивної множини;
2) A-продуктивної множини.

6.2. *T*-звідність

Інтуїтивне поняття звідності найадекватніше відображує поняття тьюрінгової звідності, або T-звідності.

Неформально кажучи, множина A T-зводиться до множини B, що позначаємо $A \leq_T B$, якщо для розв'язання питання "$x \in A$" необхідно відповісти на скінченну кількість запитань про B, але їхні кількість і природа заздалегідь не відомі. Отже, приходимо до такого визначення.

Множина A *T-зводиться* до множини B, якщо множина A є B-рекурсивною. Цей факт позначаємо $A \leq_T B$.

Уведемо відношення *T-еквівалентності* $\equiv_T$:

$$A \equiv_T B, \text{ якщо } A \leq_T B \text{ та } B \leq_T A.$$

Писатимемо $A <_T B$, якщо $A \leq_T B$ і неправильно, що $B \leq_T A$.

Писатимемо $A \,|_T\, B$, якщо неправильно $A \leq_T B$ і неправильно $B \leq_T A$.

Укажемо **властивості *T*-звідності.**

t1) $A \leq_T A$.

t2) Якщо $A \leq_T B$ та $B \leq_T C$, то $A \leq_T C$.

t3) Для кожної множини A маємо $A \leq_T \overline{A}$ та $\overline{A} \leq_T A$.

t4) $A \equiv_T \overline{A}$ для кожної множини A.

t5) Якщо $A \leq_m B$, то $A \leq_T B$.

Нехай РФ $g : A \leq_m B$. Тоді $\chi_A(x) = \chi_B(g(x))$, звідки χ_A є χ_B-РФ.

t6) Якщо B є РМ і $A \leq_T B$, то A є РМ.

χ_B є РФ, тому РФ^B = РФ. Якщо $A \leq_T B$, то $\chi_A \in$ РФ^B = РФ.

t7) Якщо A є РМ, то $A \leq_T B$ для кожної множини B.

Для довільної множини B маємо $\chi_A \in$ РФ $\subseteq$ ЧРФ $\subseteq$ РФ^B, звідки χ_A є χ_B-РФ.

t8) Якщо A є РПМ, то $A \leq_T D$.

За r15) $A \leq_m D$ для кожної РПМ А, звідки за t5) маємо $A \leq_T D$.

Твердження 6.2.1. Для кожної $B \subseteq N$ існує зліченна кількість множин $A \subseteq N$ таких, що $A \leq_T B$.

$A \leq_T B$, якщо A рекурсивна відносно B, тобто χ_A рекурсивна відносно χ_B. При зафіксованій χ_B множина таких χ_A зліченна.

Приклад 6.2.1. ″Ефективний″ варіант властивості t5.

Існує РФ $k(z)$ така: $\varphi_z : A \leq_m B \Rightarrow \chi_A = \varphi^B_{k(z)}$.

$\chi_A(x) = \chi_B(\varphi_z(x))$ є B-ЧРФ $\Rightarrow$ за релятивною s-m-n-теоремою існує РФ k така: $\chi_B(\varphi_z(x)) = \varphi^B_{k(z)}(x)$ для всіх z, x. Отже, $\chi_A = \varphi^B_{k(z)}$.

Теорема 6.2.1. Множина B є A-РПМ $\Leftrightarrow B \leq_m D^A$.

Нехай B є A-РПМ. Функція $f(x, y) = \chi^{ч}_B(x) + \mathbf{o}(y)$ є A-ЧРФ, тому що $\chi^{ч}_B$ є A-ЧРФ. За релятивною s-m-n-теоремою існує РФ s така: $f(x, y) = \varphi^A_{s(x)}(y)$ для всіх x, y. При $x \in B$ маємо $\varphi^A_{s(x)}(y) = 1$ для всіх y, звідки $\varphi^A_{s(x)}(s(x))\downarrow$, тому $s(x) \in D^A$. При $x \notin B$ $\varphi^A_{s(x)}(y)\uparrow$ для всіх y, тому $\varphi^A_{s(x)}(s(x))\uparrow$, звідки $s(x) \notin D^A$.

Наслідок 6.2.1. Якщо B є A-РПМ, то $B \leq_T D^A$.

Наслідок 6.2.2. $A <_T D^A$ для кожної множини A.

Маємо $A \leq_T D^A$, тому що A є A-РПМ. За R10 D^A не є A-РМ, тому неправильно $D^A \leq_T A$.

Приклад 6.2.2. Існують множини A, B: $A \otimes B <_T A$ та $A \oplus B \equiv_T A$.

Як приклад візьмемо $A = D$ та $B = \varnothing$.

Це також приклад множин A, B: $A \otimes B <_m A$ та $A \oplus B \equiv_T A$.

Приклад 6.2.3. Існують множини A, B: $A <_m A \oplus B$ та $A \equiv_T A \otimes B$.

Як приклад візьмемо $A = N$ та $B = \varnothing$.

Приклад 6.2.4. Існують множини A, B: $A <_T A \otimes B$ та $B \equiv_m A \otimes B$.

Як приклад візьмемо $A = N$ та $B = D$.

Приклад 6.2.5. Існують A, B: $A \otimes B <_m A \oplus B$ та $A \oplus B \equiv_T A \otimes B$.

Як приклад візьмемо $A = N$ та $B = \varnothing$.

Приклад 6.2.6. Існують A, B: $A \otimes B <_T A \oplus B$ та $A \otimes B \equiv_m B$.

Як приклад візьмемо $A = D$ та $B = \varnothing$.

Приклад 6.2.7. Існують множини A, B: $B \equiv_T A\oplus B$ та $B <_m A\otimes B$. Як приклад візьмемо $A = N_{2x}$ та $B = N$. Тоді $N <_m N_{2x}\otimes N$.

Приклад 6.2.8. Не існує множин A, B: $A\oplus B <_T A$ та $A\otimes B \equiv_m A\oplus B$. За r13) $A \le_m A\oplus B$, тому $A \le_T A\oplus B$. Отже, неможливо $A\oplus B <_T A$.

Приклад 6.2.9. Не існує множин A, B: $A\oplus B <_m B$ та $A\otimes B \equiv_T A$. Згідно із r13) $B \le_m A\oplus B$, тому неможливо $A\oplus B <_T B$.

Приклад 6.2.10. Маємо $A\cup B \le_T A\oplus B$.

Маємо $x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B \Leftrightarrow 2x\in A\oplus B \vee 2x+1\in A\oplus B$. Звідси $\chi_{A\cup B}(x) = sg(\chi_{A\oplus B}(2x)+\chi_{A\oplus B}(2x+1))$. Отже, $\chi_{A\cup B}$ є $\chi_{A\oplus B}$-РФ.

Приклад 6.2.11. Маємо $A\cap B \le_T A\oplus B$.

Маємо $x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \,\&\, x\in B \Leftrightarrow 2x\in A\oplus B \,\&\, 2x+1\in A\oplus B$. Звідси $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_{A\oplus B}(2x)\cdot\chi_{A\oplus B}(2x+1)$. Отже, $\chi_{A\cap B}$ є $\chi_{A\oplus B}$-РФ.

Приклад 6.2.12. За умови $A, B \ne \varnothing$ маємо $A\cup B \le_T A\otimes B$.

Візьмемо довільні $a\in A$ та $b\in B$. Маємо $x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B \Leftrightarrow C(x,b)\in A\otimes B \vee C(a,x)\in A\otimes B$. Звідси отримуємо, що $\chi_{A\cup B}$ є $\chi_{A\otimes B}$-РФ: $\chi_{A\cup B}(x) = sg(\chi_{A\otimes B}(C(x,b))+\chi_{A\otimes B}(C(a,x)))$.

Приклад 6.2.13. За умови $B \ne \varnothing$ маємо $A\setminus B \le_T B\otimes A$.

Якщо $A = \varnothing$, то $A\setminus B = \varnothing \Rightarrow A\setminus B$ є РМ $\Rightarrow A\setminus B \le_T B\otimes A$ за t7.

Якщо $A \ne \varnothing$, то, ураховуючи $B \ne \varnothing$, візьмемо $a\in A$ та $b\in B$. Тоді $x\in A\setminus B \Leftrightarrow x\in A \,\&\, x\notin B \Leftrightarrow C(b,x)\in B\otimes A \,\&\, C(x,a)\notin B\otimes A$. Звідси $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_{B\otimes A}(C(b,x))\cdot nsg(\chi_{B\otimes A}(C(x,a)))$. Отже, $\chi_{A\setminus B}$ є $\chi_{B\otimes A}$-РФ.

Приклад 6.2.14. Маємо $A\otimes B \le_T A\oplus B$.

$x\in A\otimes B \Leftrightarrow l(x)\in A \;\&\; r(x)\in B \Leftrightarrow 2l(x)\in A\oplus B \;\&\; 2r(x)+1\in A\oplus B$. Отже, $\chi_{A\otimes B}(x) = \chi_{A\oplus B}(2l(x))\cdot\chi_{A\oplus B}(2r(x)+1)$. Тому $\chi_{A\otimes B}$ є $\chi_{A\oplus B}$-РФ.

Приклад 6.2.15. Маємо $D \equiv_T \bar{D} \equiv_T D\oplus\bar{D} \equiv_T D\otimes\bar{D}$.

За t4) $D \equiv_T \bar{D}$. За r13) $D \le_m D\oplus\bar{D}$, за r14) $D \le_m D\otimes\bar{D}$, тому за t5) $D \le_T D\oplus\bar{D}$ та $D \le_T D\otimes\bar{D}$. За теоремою 5.1.1 $D\oplus\bar{D} \le_m D\otimes\bar{D}$, тому $D\oplus\bar{D} \le_T D\otimes\bar{D}$. Згідно із t2) достатньо показати $D\otimes\bar{D} \le_T D$.

"$x \in D \otimes \bar{D}$" є D-РП: $x \in D \otimes \bar{D} \Leftrightarrow l(x) \in D$ & $r(x) \notin D$. Отже, $\chi_{D\otimes\bar{D}}(x) = \chi_D(l(x)) \cdot nsg(\chi_D(r(x)))$, тому $\chi_{D\otimes\bar{D}}$ є χ_D-РФ.

Зауваження. "$x \in D \oplus \bar{D}$" також є D-РП: $x \in D \oplus \bar{D} \Leftrightarrow$ (x парне та $x/2 \in D$) $\vee$ (x непарне та $(x-1)/2 \notin D$); звідси $\chi_{D\oplus\bar{D}}$ є χ_D-РФ.

Відношення $\equiv_T$ є відношенням еквівалентності, тому вводимо класи еквівалентності $d_T(A) = \{B \mid A \equiv_T B\}$ відносно $\equiv_T$

Такі класи називають *T-степенями*, або *степенями нерозв'язності* [13, 19–21].

T-степінь *рекурсивний*, якщо він містить РМ.

T-степінь *рекурсивно-перелічний* (РП), якщо він містить РПМ.

Твердження 6.2.2. Кожний T-степінь – злічена множина.

Згідно із твердженням 6.2.1 для кожної $B \subseteq N$ існує злічена кількість множин $A \subseteq N$ таких, що $A \leq_T B$. Тому для кожної $B \subseteq N$ існує злічена кількість $A \subseteq N$ таких, що $A \equiv_T B$.

Булеан множини N має потужність континууму, тому:

Твердження 6.2.3. Множина всіх T-степенів має потужність континууму.

На множині T-степенів уведемо відношення часткового порядку, яке також будемо позначати $\leq$:

$\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$, якщо $A \leq_T B$ для деяких $A \in \boldsymbol{a}$, $B \in \boldsymbol{b}$.

Зрозуміло, що $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b} \Leftrightarrow A \leq_T B$ для всіх $A \in \boldsymbol{a}$, $B \in \boldsymbol{b}$.

Будемо писати $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, якщо $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$.

Будемо писати $\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}$, якщо неправильно $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ і неправильно $\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{a}$.

Твердження 6.2.4. Для кожного T-степеня $\boldsymbol{b}$ існує не більше ніж злічена множина T-степенів $\boldsymbol{a}$ таких, що $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$.

Справді, згідно із твердженням 6.2.1 для кожної $B \subseteq N$ існує злічена кількість $A \subseteq N$ таких, що $A \leq_T B$.

Укажемо **властивості *T*-степенів.**

s1) Існує єдиний рекурсивний T-степінь $\mathbf{0}$, який складається з усіх РМ. Він є найменшим T-степенем:

$0 < \boldsymbol{b}$ для кожного T-степеня $\boldsymbol{b} \neq 0$.

s2) РП T-степінь $\mathbf{0}' = d_T(D)$ є найбільшим РП T-степенем:

$\boldsymbol{b} \leq \mathbf{0}'$ для кожного РП T-степеня $\boldsymbol{b}$.

s3) Кожний нерекурсивний РП T-степінь містить множини, які не є РПМ.

s4) Якщо $d_m(A) \le_m d_m(B)$, то $d_T(A) \le_T d_T(B)$.

s5) $d_m(A) \subseteq d_T(A)$ для довільної множини A.

Теорема 6.2.2. Для кожної пари T-степенів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ існує єдина точна верхня грань $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = d_T(A \oplus B)$, де $A \in \boldsymbol{a}$, $B \in \boldsymbol{b}$.

A-РПМ B *T-повна*, якщо $L \le_T B$ для кожної A-РПМ L.

Приклад 6.2.16. Множина $D^A = \{x \mid \varphi_x^A(x)\downarrow\}$ є T-повною A-РПМ для кожної $A \subset N$.

Згідно з теоремою 6.2.1 маємо: B є A-РПМ $\Leftrightarrow B \le_m D^A$. Тому якщо B є A-РПМ, то $B \le_T D^A$. Зокрема, D є T-повною РПМ.

″Ефективним″ варіантом теореми 6.2.1 є

Теорема 6.2.3. 1) Існує РФ h така: $\varphi_{h(z)} : D_z^A \le_m D^A$ для всіх A, z.

2) Існує РФ u така: для всіх A, B, z якщо $\varphi_z : B \le_m D^A$, то $B = D^A_{u(z)}$.

Приклад 6.2.17. Існують k, $l \in N$ такі, що для всіх $A \subseteq N$ маємо $\varphi_k : A \le_m D^A$ та $\varphi_l : \overline{A} \le_m D^A$.

Справді, A-ЧРФ $\chi_A^ч(x)$ обчислюється МНРО-програмою:

1) $O(0)$
2) $J(0,1,2)$

Її код $p = 2^4 + 2^{23} - 1$. Маємо $A = D_z^A$. Тепер візьмемо $k = h(p)$, де h – РФ з умови теореми 6.2.3. Аналогічно візьмемо $l = h(q)$, де q – код МНРО-програми, яка обчислює A-ЧРФ $\chi_{\overline{A}}^ч(x)$.

За наслідком 6.2.2 $A <_T D^A$ для кожної множини A. Неформально це означає: при переході від A до D^A складність стрибкоподібно зростає, тому D^A називають *стрибком* множини A.

Операцію, яка кожній множині $A \subseteq N$ зіставляє множину D^A, називають *операцією стрибка* (*jump*).

Теорема 6.2.4. $A \le_T B \Leftrightarrow D^A \le_m D^B$.

Наслідок 6.2.3. $A \equiv_T B \Leftrightarrow D^A \equiv_m D^B$.

Наслідок 6.2.4. Якщо $A \equiv_T B$, то $D^A \equiv_T D^B$.

Зворотне до наслідку 6.2.4 твердження неправильне. Можливі випадки $A <_T B$ та $A \,|_T\, B$, для яких теж маємо $D^A \equiv_T D^B$.

Приклад 6.2.18. Маємо $A \le_T B \Leftrightarrow A \le_m D^B$ та $\overline{A} \le_m D^B$.

Маємо $A \le_T B \Rightarrow A$ є B-РМ; проте $\overline{A}$ є A-РМ $\Rightarrow$ $\overline{A}$ є B-РМ; отже, A та $\overline{A}$ є B-РМ $\Rightarrow$ A та $\overline{A}$ є B-РПМ $\Rightarrow$ (теорема 6.2.1) $A \le_m D^B$ та $\overline{A} \le_m D^B$.

Маємо $A \le_m D^B$ та $\overline{A} \le_m D^B$ $\Rightarrow$ (теорема 6.2.1) A та $\overline{A}$ є B-РПМ $\Rightarrow$ (релятивна теорема Поста) A та $\overline{A}$ є B-РМ $\Rightarrow A \le_T B$.

″Ефективним″ варіантом теореми 6.2.4 є теорема 6.2.5.

Теорема 6.2.5. 1) Існує РФ f така: для всіх A, B, z

$$\chi_A = \varphi_z^B \Rightarrow \varphi_{f(z)} : D^A \le_m D^B.$$

2) Існує РФ h така: для всіх A, B, z

$$\varphi_z : D^A \le_m D^B \Rightarrow \chi_A = \varphi_{h(z)}^B.$$

Операцію стрибка поширимо на множину T-степенів.

Стрибком T-степеня ***b*** називають степінь $\boldsymbol{b}' = d_T(D^B)$, де $B \in \boldsymbol{b}$.

Таке визначення коректне, тому що за наслідком 6.2.4 $\boldsymbol{b}'$ не залежить від вибору конкретного представника $B \in \boldsymbol{b}$.

Укажемо властивості операції стрибка.

*jm*1) $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{b}'$ для довільного T-степеня $\boldsymbol{b}$.

*jm*2) Якщо $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a}' \le \boldsymbol{b}'$.

*jm*3) $\mathbf{0} < \boldsymbol{b}'$ для довільного T-степеня $\boldsymbol{b}$.

*jm*4) Якщо $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}'$.

*jm*5) Якщо $A \in \boldsymbol{a}$, $B \in \boldsymbol{b}$ та B є A-РПМ, то $\boldsymbol{b} \le \boldsymbol{a}'$.

T-степінь ***b*** *повний*, якщо $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}'$ для деякого T-степеня $\boldsymbol{a}$.

Повний T-степінь складається тільки з T-повних множин.

Множина всіх повних T-степенів є множиною значень операції стрибка.

Уведемо операцію *n-кратного стрибка*, або *n-стрибка.*

Для довільної $A \subseteq N$ покладемо $A^{(0)} = A,\ A^{(k+1)} = D^{A^{(k)}}$.

Для довільного T-степеня ***a*** покладемо $\boldsymbol{a}^{(0)} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}^{(k+1)} = (\boldsymbol{a}^{(k)})'$.

Укажемо деякі властивості операції n-кратного стрибка.

Ураховуючи $A <_T D^A$ та $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{a}'$, дістаємо:

*jn*1) $A^{(0)} <_T A^{(1)} <_T \ldots <_T A^{(k)} <_T A^{(k+1)} <_T \ldots$ для довільної $A \subseteq N$;

*jn*2) $\boldsymbol{a}^{(0)} < \boldsymbol{a}^{(1)} <\ldots < \boldsymbol{a}^{(k)} < \boldsymbol{a}^{(k+1)} <\ldots$ для довільного *T*-степеня $\boldsymbol{a}$;

*jn*3) якщо $A \le_T B$, то $A^{(n)} \le_m B^{(n)}$ для всіх $n \ge 1$.

Уведемо тепер операцію ω-*стрибка* на множинах і степенях.

ω-*стрибком множини* $A \subseteq N$ назвемо множину

$$A^{(\omega)} = \{C(x, y) \mid x \in A^{(y)}\}.$$

ω-*стрибком T-степеня* $\boldsymbol{a}$ назвемо *T*-степінь

$$\boldsymbol{a}^{(\omega)} = d_T(A^{(\omega)}), \text{ де } A \in \boldsymbol{a}.$$

Теорема 6.2.6. $A^{(n)} <_T A^{(\omega)}$ для всіх A, n.

Теорема 6.2.7. Якщо $A \le_T B$, то $A^{(\omega)} \le_m B^{(\omega)}$.

Приклад 6.2.19. Існує РФ f така: для кожних A та B якщо для всіх y маємо $\chi_{A^{(y)}} = \varphi^B_{f(y)}$, то $A^{(\omega)} \le_T B$.

Маємо $\chi_{A^{(\omega)}}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A^{(\omega)} \Leftrightarrow \boldsymbol{l}(x) \in A^{(\boldsymbol{r}(x))} \Leftrightarrow \chi_{A^{(r(x))}}(l(x)) = 1$

$\Leftrightarrow$ (згідно з умовою) $\varphi^B_{f(r(x))}(l(x)) = 1$ – а це *B*-РП.

Отже, $\chi_{A^{(\omega)}}$ є *B*-РФ.

Приклад 6.2.20. Існує РФ f така: $\chi_{A^{(y)}} = \varphi^{A^{(\omega)}}_{f(y)}$ для всіх A та y.

Функція

$$\chi_{A^{(y)}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A^{(y)}, \\ 0, & \text{якщо } x \in A^{(y)}, \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } C(x,y) \in A^{(\omega)}, \\ 0, & \text{якщо } C(x,y) \notin A^{(\omega)}, \end{cases}$$

є $A^{(\omega)}$-РФ, тому за релятивною *s-m-n*-теоремою існує РФ f така: для всіх x, y маємо $\chi_{A^{(y)}}(x) = \varphi^{A^{(\omega)}}_{f(y)}(x)$. Отже, $\chi_{A^{(y)}} = \varphi^{A^{(\omega)}}_{f(y)}$.

Приклад 6.2.21. Існують множини A та B такі: $A^{(\omega)} \le_m B^{(\omega)}$ та $B <_T A$.

Для довільних $B \subseteq N$ та $n > 0$ візьмемо $A = B^{(n)}$. Тоді для всіх x маємо $A^{(x)} = B^{(x+n)}$. Звідси $u \in A^{(\omega)} \Leftrightarrow l(u) \in A^{(r(u))} \Leftrightarrow l(u) \in B^{(r(u)+n)} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow C(l(u), r(u)+n) \in B^{(\omega)}$. Отже, $A^{(\omega)} \le_m B^{(\omega)}$. Водночас згідно із *jn*1 маємо $B <_T B^{(n)}$, тобто $B <_T A$.

Зауважимо, що за теоремою 6.2.7 із $B <_T A$ отримуємо $B^{(\omega)} \le_m A^{(\omega)}$, тому для цих A та B маємо $A^{(\omega)} \equiv_m B^{(\omega)}$.

Отже, зворотне до теореми 6.2.7 твердження неправильне.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення *T*-звідності.

2. Поясніть, чому *T*-звідність адекватно відображує інтуїтивне поняття звідності.

3. Наведіть елементарні властивості *T*-звідності.

4. Дайте визначення відношення *T*-еквівалентності.

5. Поясніть, що таке *T*-степінь.

6. Укажіть елементарні властивості *T*-степенів.

7. Поясніть, що таке рекурсивний *T*-степінь.

8. Опишіть рекурсивні *T*-степені.

9. Поясніть, що таке рекурсивно-перелічний *T*-степінь.

10. Поясніть, що таке супремум (точна верхня грань) *T*-степенів.

11. Сформулюйте теорему про супремум.

12. Дайте визначення *T*-повної *A*-РПМ.

13. Дайте визначення операції стрибка на множинах.

14. Дайте визначення операції стрибка на степенях.

15. Укажіть властивості операції стрибка.

16. Поясніть, що таке n-кратний стрибок.

17. Наведіть властивості операції n-кратного стрибка.

18. Поясніть, що таке ω-стрибок.

19. Поясніть, як співвідносяться операції n-кратного та ω-стрибка.

20. Наведіть властивості операції ω-стрибка.

Вправи

1. Порівняйте потужності множини всіх *T*-степенів і множини всіх рекурсивно-перелічних *T*-степенів.

2. Доведіть: якщо $A \neq \varnothing$ та $B \neq \varnothing$, то $A \otimes B \equiv_T A \oplus B$.

3. Доведіть:

1) $A \setminus B \leq_T A \oplus B$;

2) $A \cap B \leq_T A \otimes B$;

3) $A \setminus B \leq_T B \oplus A$;

4) $A \cup \overline{B} \leq_T A \otimes B$, якщо $A \neq \varnothing$;

5) $\overline{A} \cap B \leq_T A \oplus B$.

4. З'ясуйте, чи існують множини A та B такі:

1) $A \otimes B <_T A$ та $A \otimes B \equiv_m A \oplus B$;

2) $A <_m A \oplus B$ та $A \equiv_T A \oplus B$;

3) $A <_T A \otimes B$ та $A \otimes B \equiv_m A \oplus B$;

4) $A <_m A \otimes B$ та $A \equiv_T A \oplus B$;

5) $A <_T A \oplus B$ та $A \equiv_m A \otimes B$;

6) $B <_T A \oplus B$ та $A \otimes B \equiv_m A \oplus B$;

7) $A \otimes B <_m A \oplus B$ та $A \equiv_T A \otimes B$;

8) $A \otimes B <_T A \oplus B$ та $A \equiv_m A \oplus B$;

9) $B <_T A \otimes B$ та $B \equiv_m A \oplus B$;

10) $A <_m A \otimes B$ та $A \otimes B \equiv_T A \oplus B$.

5. З'ясуйте, чи правильні такі твердження:

1) якщо $A <_m B$, то $A <_T B$;

2) якщо $A \mid_m B$, то $A \mid_T B$;

3) якщо $A \mid_T B$, то $A \mid_m B$.

6. Доведіть:

1) $\overline{D} \leq_T \{x \mid D_x$ не є ПРМ$\}$;

2) $D \leq_T \{x \mid E_x$ є РМ$\}$.

7. З'ясуйте, у якому відношенні щодо m- і T-звідностей перебувають множини A, $\overline{A}$ та $D \oplus \overline{D}$, якщо:

1) $A = \{x \mid \varphi_x$ неін'єктивна$\}$;

2) $A = \{x \mid 2 \notin D_x\}$;

3) $A = \{x \mid \varphi_x(x) = 1\} \otimes N$;

4) $A = \{x \mid 5 \notin E_x\} \oplus N$;

5) $A = \{x \mid 4 \in D_x\} \oplus \{x \mid \varphi_x(x) = 4\}$;

6) $A = \{x \mid x \notin E_x\} \otimes N$;

7) $A = \{x \mid$ неправильно, що $\{1, 3\} \subseteq E_x\}$.

8. Нехай B є РМ. Доведіть, що тоді $D \equiv_T D^B$.

9. Доведіть, що для РПМ A та B таких, що $A \cap B = \varnothing$, маємо:

1) $A \oplus B \leq_T A \cup B$;

2) $d_T(A \cup B) = a \cup b$, де $a = d_T(A)$ та $b = d_T(B)$.

*10. Доведіть, що існує РФ g така: для всіх A, B, z, x
якщо $\varphi_z : A \leq_m B$, то $\varphi_{g(z,x)} : A^{(x)} \leq_m B^{(x)}$.

*11. Доведіть, що існує РФ f така: для всіх A, x, y
якщо $x \leq y$, то $\varphi_{f(x,y)} : A^{(x)} \leq_m A^{(y)}$.

7. АРИФМЕТИЧНІСТЬ. АРИФМЕТИЧНА ІЄРАРХІЯ

У цьому розділі вивчатимемо найбільш фундаментальну математичну структуру – множину натуральних чисел. Для її дослідження використовують ідеї і методи як математичної логіки, так і теорії алгоритмів. Розглянемо зв'язки між арифметичними предикатами і ЧРП, арифметичними функціями і ЧРФ, арифметичними множинами і РПМ, а також арифметичну ієрархію – класифікацію арифметичних множин і предикатів, що пов'язує теорію рекурсивних функцій із математичною логікою.

7.1. Арифметичність частково рекурсивних функцій і рекурсивно-перелічних множин. Теорема Тарського

При інтерпретації арифметичних формул на стандартній моделі $\boldsymbol{N}=(N, \sigma_{ar})$ іменами натуральних чисел можуть бути замкнені терми 0, 1, 1+1,..., 1+...+1,... Таке ім'я числа n позначимо як $\overline{n}$. Ці імена визначатимемо так:

$$\overline{0}=0, \quad \overline{1}=1, \quad \overline{n+1}=\overline{n}+1 \text{ для } n\geq 1.$$

Застосовуючи введені імена, можна визначити виразність на N предикатів, множин і функцій, використовуючи тільки замкнені арифметичні формули.

Предикат $P : N^k \to \{T, F\}$ *арифметичний*, якщо існує арифметична формула $\Phi(x_1,..., x_k)$ з вільними змінними $x_1,..., x_k$:

$$P(n_1,\ldots, n_k) = T \Leftrightarrow N \models \Phi_{x_1,\ldots,x_k}[\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_k].$$

Така формула Φ *виражає* предикат P.

Множина $L \subseteq N^k$ *арифметична*, якщо існує арифметична формула $\Phi(x_1,..., x_k)$ з вільними змінними $x_1,..., x_k$:

$$(n_1,\ldots, n_k)\in L \Leftrightarrow N \models \Phi_{x_1,\ldots,x_k}[\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_k].$$

Ця формула Φ *виражає* множину L.

Класи арифметичних множин і арифметичних предикатів позначатимемо *АМ* і *АП*.

Функція $f: N^k \to N$ арифметична, якщо її графік Γ_f – арифметична множина. Проте доцільно дати безпосереднє визначення.

Функція $f: N^k \to N$ *арифметична*, якщо існує арифметична формула $\Phi(x_1,..., x_k, z)$ з вільними змінними $x_1,..., x_k, z$:

$$f(n_1,\ldots, n_k) = m \Leftrightarrow N \models \Phi_{x_1,\ldots,x_k,z}[\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_k,\overline{m}].$$

Така формула Φ *виражає* функцію f.

Приклад 7.1.1. Наведені нижче функції є арифметичними, вони виражаються відповідними арифметичними формулами:

1) функція $x+y$ – формулою $z = x+y$;
2) функція $x\times y$ – формулою $z = x\times y$;
3) функція $\mathbf{o}(x)=0$ – формулою $z=0\ \&\ x=x$;
4) функція $\mathrm{s}(x)=x+1$ – формулою $z=x+1$;
5) функція $\mathrm{I}^n_m(x_1,..., x_n)$ – формулою $z=x_m\ \&\ x_1=x_1\ \&...\&\ x_n=x_n$;
6) функція $x \dot{-} y$ – арифметичною формулою

$$(\exists v(x+v=y) \to (z=0)\ \&\ (\exists v(y+v=x) \to y+z=x).$$

Приклад 7.1.2. Операції суперпозиції S^{n+1} і мінімізації M зберігають арифметичність функцій.

Нехай $f = \mathrm{S}^{n+1}(g, g_1,..., g_n)$ і функції $g(x_1,..., x_n)$, $g_1(x_1,..., x_m),...,$ $g_n(x_1,..., x_m)$ виражені формулами $\mathrm{G}(x_1,..., x_n, z)$, $\mathrm{G}_1(x_1,..., x_m, z),...,$ $\mathrm{G}_n(x_1,..., x_m, z)$. Тоді функцію $z = f(x_1,..., x_m)$ виражає формула

$$\exists z_1\ldots\exists z_n(\mathrm{G}_{x_1,\ldots,x_n}[z_1,..., z_n]\&(\mathrm{G}_1)_z[z_1]\ \&...\&\ (\mathrm{G}_n)_z[z_n]).$$

Нехай функція $g(x_1,..., x_n, y)$ виражена арифметичною формулою $\mathrm{G}(x_1,..., x_n, y, z)$. Тоді маємо $z = \mu_y(g(x_1,\ldots, x_n, y) = 0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (g(x_1,\ldots, x_n, z) = 0)\ \&\ (\forall u(u<z \to g(x_1,\ldots, x_n, u)\neq 0)$. Отже, функція $z = \mu_y(g(x_1,\ldots, x_n, y) = 0)$ виражається формулою

$$\mathrm{G}_{y,z}[z, 0]\&\forall u(u<z \to \exists t(\mathrm{G}_{y,z}[u, t]\ \&\ (t\neq 0))).$$

Теорема 7.1.1. Кожна ЧРФ арифметична.

Справді, кожну ЧРФ отримують із $\mathbf{o}$, s, $\mathrm{I}^n_m, +, \times, \dot{-}$ за допомогою S^{n+1} та M.

Теорема 7.1.2. Кожна РПМ арифметична.

Нехай $L \subseteq N^k$ є РПМ. Тоді $L = D_f$ для деякої ЧРФ f. Однак кожна ЧРФ арифметична, тому f арифметична. Нехай f виражається арифметичною формулою $\Phi(x_1,\ldots, x_n, z)$. Тоді множина D_f виражається арифметичною формулою $\exists z\Phi$.

Приклад 7.1.3. Кожна РПМ *діофантова*, тобто є множиною невід'ємних значень деякого полінома над Z (див. [4]). Звідси, зокрема, отримуємо нерозв'язність 10-ї проблеми Гільберта. Із самого їхнього визначення випливає, що діофантові множини можна виразити формулами вигляду $\exists x_1 \ldots \exists x_n$ A, де A – атомарна арифметична формула. Це ще раз засвідчує арифметичність РПМ.

Теорема 7.1.3. Клас арифметичних множин замкнений відносно операцій $\cup$, $\cap$ і доповнення.

Нехай множини A та B виражаються арифметичними формулами **Ф** та **Ψ**. Тоді $A \cup B$, $A \cap B$ та $\overline{A}$ виражаються, відповідно, арифметичними формулами **Ф**$\vee$**Ψ**, **Ф&Ψ** та $\neg$**Ф**.

Приклад 7.1.4. $D = \{x | \varphi_x(x)\downarrow\}$ є РПМ, тому за теоремою 7.1.2 D арифметична, отже, $\overline{D}$ арифметична, але $\overline{D}$ не є РПМ.

Наслідок 7.1.1. Для класів РПМ і АМ маємо: РПМ$\subset$АМ.

Нехай на основі певного кодування κ задано ефективну нумерацію множини арифметичних формул.

Множину номерів усіх ІАФ позначимо **Т**.

Приклад 7.1.5. Множина **Т** продуктивна.

Множина $\overline{D}$ арифметична, нехай Ф(x) – арифметична формула, яка виражає $\overline{D}$. Тоді маємо $n \in \overline{D} \Leftrightarrow \Phi_x[\overline{n}]$ є ІАФ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\kappa(\Phi_x[\overline{n}]) \in \mathbf{T}$. Функція $\kappa(\Phi_x[\overline{n}])$ алгоритмічно обчислювана, тому це певна РФ $g(n)$. Ця РФ g m-зводить продуктивну множину $\overline{D}$ до множини **Т**. Звідси **Т** – продуктивна множина

Множина **Т** продуктивна, тому вона не є РПМ. Понад те:

Теорема 7.1.4 (Тарського). Множина **Т** неарифметична.

Фундаментальне значення теореми Тарського полягає в тому, що вона доводить неможливість повної формалізації поняття істини в достатньо багатих мовах, які включають або можуть моделювати мову арифметики.

Приклад 7.1.6. Із теореми Тарського можна отримати першу теорему Гьоделя про неповноту формальної арифметики Ar.

Справді, множина її теорем Th(Ar) є перелічною, тому множина κ(Th(Ar)) є РПМ. Кожна теорема Ar є ІАФ, тому Th(Ar)$\subseteq$ІАФ, звідки κ(Th(Ar))$\subseteq$**Т**. Проте **Т** не є РПМ, звідки κ(Th(Ar))$\subset$**Т** та Th(Ar)$\subset$ІАФ. Нехай $\mathrm{Sp}(Ar) = \{\Psi \mid Ar \vdash \neg\Psi\}$ –

множина спростовних в *Ar* формул. Через несуперечливість *Ar* маємо $\mathrm{Sp}(Ar) \cap \mathrm{Th}(Ar) = \varnothing$. Повнота *Ar* означає: для кожної замкненої арифметичної формули Ψ маємо $\Psi \in \mathrm{Th}(Ar)$ або $\Psi \in \mathrm{Sp}(Ar)$. Нехай замкнена $\vartheta \in \mathrm{I}А\Phi \setminus \mathrm{Th}(Ar)$, тоді $\vartheta \notin \mathrm{Th}(Ar)$ і $\vartheta \in \mathrm{I}А\Phi$. Якщо $\vartheta \in \mathrm{Sp}(Ar)$, то $Ar \vdash \neg\vartheta$, звідки $\neg\vartheta \in \mathrm{I}А\Phi$, що суперечить $\vartheta \in \mathrm{I}А\Phi$. Тому $\vartheta \notin \mathrm{Sp}(Ar) \Rightarrow Ar$ неповна.

Це доведення має семантичний характер, воно виконується у стандартній моделі арифметики, використовуючи, крім несуперечливості *Ar*, істинність її теорем на ***N***. Доведення Ґьоделя не застосовує подібні семантичні міркування, воно спирається *лише на несуперечливість Ar*.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення арифметичного предиката, арифметичної множини, арифметичної функції.

2. Покажіть арифметичність функцій **o**, s, I^n_m, $+$, $\times$, $\dot{-}$.

3. Покажіть, що операції S^{n+1} та M зберігають арифметичність функцій.

4. Укажіть, відносно яких теоретико-множинних операцій замкнений клас арифметичних множин.

5. Укажіть співвідношення між класами РПМ і *АМ*.

6. Сформулюйте теорему Тарського й поясніть, що вона засвідчує.

7. Поясніть, у чому полягає значення теореми Тарського.

Вправи

1. Доведіть арифметичність таких множин і предикатів:

1) $\{x \mid E_x$ скінченна$\}$;

2) $\{x \mid E_x$ є РМ$\}$;

3) "$E_x = N$";

4) "$E_x \neq D$";

5) $\{x \mid \varphi_x$ неін'єктивна$\}$;

6) $\{x \mid E_x$ креативна$\}$;

7) $\{C(x, y) \mid x \in D_y\}$;

8) "$D_x \leq_m D_y$".

2. 1) Чи існують неарифметичні креативні множини?

2) Чи існують неарифметичні продуктивні множини?

3*. Доведіть, що множина $\mathrm{Th}(Ar) = \{\Phi \mid Ar \vdash \Phi\}$ і множина $\mathrm{Sp}(Ar) = \{\Phi \mid Ar \vdash \neg\Phi\}$ рекурсивно-нероздільні.

7.2. Арифметична ієрархія

Розглянемо арифметичну ієрархію – класифікацію арифметичних множин і предикатів (див. [4, 13, 19, 20]).

σ_n-*префіксом* назвемо послідовність кванторних префіксів із $n-1$ зміною однотипних кванторів, яка починається квантором $\exists$.

π_n-*префіксом* назвемо послідовність кванторних префіксів із $n-1$ зміною однотипних кванторів, яка починається квантором $\forall$.

Наприклад, $\exists x \exists y \exists u$ – σ_1-префікс; $\exists x \exists y \forall u \forall v$ – σ_2-префікс; $\forall x \exists y \exists z \forall u$ –π_3-префікс; $\forall s \exists x \exists y \forall u \forall v \forall w \exists t \exists z$ – π_4-префікс.

Нехай $\mathfrak{R}$ – множина арифметичних формул, значеннями яких є РП. Для кожного $n \geq 0$ введемо класи предикатів Σ_n, Π_n та Δ_n.

Задамо $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$ = множина всіх РП.

Для всіх $n \geq 1$ далі визначаємо:

– Σ_n складається з усіх предикатів, виразних формулами вигляду $\omega\Phi$, де ω – σ_n-префікс та $\Phi \in \mathfrak{R}$;

– Π_n складається з усіх предикатів, виразних формулами вигляду $\omega\Phi$, де ω – π_n-префікс та $\Phi \in \mathfrak{R}$;

– $\Delta_n = \Sigma_n \cap \Pi_n$.

Згідно із прикладом 7.1.3 кожну РПМ, а тому й кожний ЧРП, можна виразити арифметичною формулою вигляду $\exists x_1 \ldots \exists x_n\, \mathrm{A}$, де A – атомарна формула. Звідси для кожного $n \geq 1$ маємо:

– $P \in \Sigma_n \Leftrightarrow P = (\omega\Psi)_N$ для деяких $\omega \in \sigma_n$ і атомарної формули Ψ;

– $P \in \Pi_n \Leftrightarrow P = (\omega\Psi)_N$ для деяких $\omega \in \pi_n$ і атомарної формули Ψ.

Уведені класи предикатів Σ_n, Π_n та Δ_n індукують відповідні класи множин $\mathit{\Sigma}_n = \{T_P \mid P \in \Sigma_n\}$, $\mathit{\Pi}_n = \{T_P \mid P \in \Pi_n\}$, $\mathit{\Delta}_n = \mathit{\Sigma}_n \cap \mathit{\Pi}_n$.

Зрозуміло, що $\mathit{\Sigma}_0 = \mathit{\Pi}_0 = \mathit{\Delta}_0$ = множина всіх РМ, $\mathit{\Sigma}_1$ – множина всіх РПМ, $\mathit{\Pi}_1$ – множина всіх доповнень до РПМ. Згідно з теоремою Поста, $\mathit{\Delta}_1 = \mathit{\Sigma}_1 \cap \mathit{\Pi}_1$ – це множина всіх РМ. Отже, $\mathit{\Delta}_1 = \mathit{\Delta}_0$.

Теорема 7.2.1. $P \in \Sigma_n \Leftrightarrow \neg P \in \Pi_n$.

Теорема 7.2.2. $\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Delta_{n+1}$.

Теорема 7.2.3. $\bigcup\limits_{n\geq 0} \Sigma_n = \bigcup\limits_{n\geq 0} \Pi_n = A\Pi$.

Теорема 7.2.4 (Кліні про ієрархію). Для кожного $n > 0$ існує арифметичний предикат ϑ такий, що $\vartheta \in \Sigma_n \setminus \Pi_n$ та $\neg\vartheta \in \Pi \setminus \Sigma_n$.

Зобразимо графічно ієрархію арифметичних предикатів (рис. 7.1).

Тут $\Xi \to \Omega$ означає строге включення класу Ξ у клас Ω.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{\Sigma_1} \arrow[dr] & & \dots \arrow[dr] & & \mathbf{\Sigma_n} \arrow[dr] & & \mathbf{\Sigma_{n+1}} \arrow[dr] & \\
\mathbf{\text{РП} = \Delta_0 = \Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{\Delta_2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{\Delta_n} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{\Delta_{n+1}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \dots \\
 & \mathbf{\Pi_1} \arrow[ur] & & \dots \arrow[ur] & & \mathbf{\Pi_n} \arrow[ur] & & \mathbf{\Pi_{n+1}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 7.1. Ієрархія арифметичних предикатів

Твердження 7.2.1–7.2.4 повністю переносяться на відповідні класи арифметичних множин. Крім того, справджується

Теорема 7.2.5 (сильна Кліні про ієрархію). Для кожного $n \geq 0$ маємо:

$$M \in \Sigma_{n+1} \Leftrightarrow M \text{ є } \varnothing^{(n)}\text{-РПМ та } M \in \Delta_{n+1} \Leftrightarrow \text{M є } \varnothing^{(n)}\text{-РМ}.$$

Наслідок 7.2.1. $M \in \Sigma_n \Leftrightarrow M \leq_1 \varnothing^{(n)}$ та $M \in \Pi_n \Leftrightarrow \bar{M} \leq_1 \varnothing^{(n)}$.

Позначимо ${}^{\Sigma}\mathrm{T}_n$ і ${}^{\Pi}\mathrm{T}_n$ множини номерів тих ІАФ, що мають пренексну форму із σ_n-префіксом і π_n-префіксом, відповідно.

Теорема 7.2.6. ${}^{\Sigma}\mathrm{T}_n \equiv_1 \varnothing^{(n)}$.

Для T-степенів звідси дістаємо

Наслідок 7.2.2. ${}^{\Sigma}\mathrm{T}_n \in 0^{(n)}$ та ${}^{\Pi}\mathrm{T}_n \in 0^{(n)}$.

Установлення належності предиката до класів Σ_n чи Π_n (множини до класів Σ_n чи Π_n), тобто визначення їхнього місця в арифметичній ієрархії, можна здійснити за допомогою відомого *алгоритму Тарського – Куратовського*.

Суть алгоритму: використовуючи пренексні операції, подаємо предикат у вигляді $(\omega\Phi)_N$, де $\omega\Phi$ – пренексна формула, після чого встановлюємо: $\omega \in \sigma_n$ чи $\omega \in \pi_n$ для деякого $n > 0$.

Для встановлення місця в арифметичній ієрархії множини M треба застосувати алгоритм Тарського – Куратовського до предиката "$x \in M$".

Приклад 7.2.1. Предикат "$D_x = \varnothing$" $\in \Pi_1$.

Маємо $D_x = \varnothing \Leftrightarrow \forall y(\varphi_x(y)\uparrow) \Leftrightarrow \forall y \neg\exists k(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall y \forall k \neg(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$. Предикат $\neg(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$ є РП.

Звідси множина $\{x \mid D_x = \varnothing\} \in \Pi_1$.

Приклад 7.2.2. Предикат "D_x нескінченна" $\in \Pi_2$.

D_x нескінченна $\Leftrightarrow \forall z \exists y(y > z \,\&\, y \in D_x) \Leftrightarrow \forall z \exists y(y > z \,\&\, \exists k(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$ $\Leftrightarrow \forall z \exists y \exists k(y > z \,\&\, P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$.

Предикати $y > z$ та $(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$ є РП.

Звідси множина $\{x \mid D_x$ нескінченна$\} \in \Pi_2$.

Приклад 7.2.3. $M = \{x \mid \varphi_x$ не є РФ$\} \in \Sigma_2$.

$x \in M \Leftrightarrow \varphi_x$ не є РФ $\Leftrightarrow \exists y(\varphi_x(y)\uparrow) \Leftrightarrow \exists y \neg\exists k(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists y \forall k \neg(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$.

Предикат $\neg(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$ є РП.

Для множин будемо використовувати такі співвідношення:

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \forall y(y \in \mathrm{A} \leftrightarrow y \in \mathrm{B}) \Leftrightarrow$$
$$\forall y((\neg y \in \mathrm{A} \vee y \in \mathrm{B}) \,\&\, (y \in \mathrm{A} \vee \neg y \in \mathrm{B}));$$
$$\mathrm{A} \neq \mathrm{B} \Leftrightarrow \exists y(\neg y \in \mathrm{A} \,\&\, y \in \mathrm{B} \vee y \in \mathrm{A} \,\&\, \neg y \in \mathrm{B}).$$

Предикат "$P_u(v)\downarrow$ за w кроків" позначатимемо $P(u, v, w)$.

Предикат "$P_u(v)\downarrow r$ за k кроків" позначатимемо $P(u, v, k)\downarrow r$.

Приклад 7.2.4. $M = \{x \mid D_x$ є РМ$\} \in \Sigma_3$.

Маємо D_x є РМ $\Leftrightarrow \exists z\,(D_x = \overline{D_z}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists z \forall y(y \in D_x \leftrightarrow \neg(y \in D_z)) \Leftrightarrow \exists z \forall y(\exists k P(x, y, k) \leftrightarrow \neg\exists n P(z, y, n)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z \forall y((\neg\exists k P(x, y, k) \vee \neg\exists n P(z, y, n)) \,\&\, (\exists k P(x, y, k) \vee \exists n P(z, y, n)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z \forall y(\forall k \forall n(\neg P(x, y, k) \vee \neg P(z, y, n)) \,\&\, \exists k \exists n(P(x, y, k) \vee P(z, y, n))) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z \forall y \forall k \forall n \exists l \exists m((\neg P(x, y, k) \vee \neg P(z, y, n)) \,\&\, (P(x, y, l) \vee P(z, y, m)))$.

Предикат у дужках після кванторного префікса є РП.

Приклад 7.2.5. Предикат "$D_x \neq D$" $\in \Sigma_2$.

Маємо $D_x \neq D \Leftrightarrow \exists y(\neg y \in D_x \,\&\, y \in D \vee y \in D_x \,\&\, \neg y \in D) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists y(\neg\exists k P(x, y, k) \,\&\, \exists n P(y, y, n) \vee \exists l P(x, y, l) \,\&\, \neg\exists m P(y, y, m)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists y(\forall k \neg P(x, y, k) \,\&\, \exists n P(y, y, n) \vee \exists l P(x, y, l) \,\&\, \forall m \neg P(y, y, m)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists y \exists n \exists l \forall k \forall m(\neg P(x, y, k) \,\&\, P(y, y, n) \vee P(x, y, l) \,\&\, \neg P(y, y, m))$.

Предикат у дужках після кванторного префікса є РП.

Приклад 7.2.6. Із прикладів 7.2.2–7.2.5 і теореми 7.2.1 отримуємо:

– предикат "D_x скінченна" $\in \Sigma_2$;

– предикат "φ_x є РФ" $\in \Pi_2$;

– предикат "$D_x = N$" $\in \Pi_2$ (зауважимо, що φ_x є РФ $\Leftrightarrow D_x = N$);

– предикат "D_x не є РМ" $\in \Pi_3$;

– предикат "$D_x = D$" $\in \Pi_2$.

Приклад 7.2.7. Предикат "$D_x \le_m D_y$" $\in \Sigma_3$.

Маємо $D_x \le_m D_y \Leftrightarrow \exists z(\varphi_z$ є РФ & $\forall u(u\in D_x \leftrightarrow \varphi_z(u)\in D_y)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z(\varphi_z$ є РФ & $\forall u((u\in D_x \vee \neg\varphi_z(u)\in D_y)\,\&\,(\neg u\in D_x \vee \varphi_z(u)\in D_y))) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\forall u(\forall t\exists k(P_z(t)\downarrow$ за k кр.) &
$(\exists n(P_x(u)\downarrow$ за n кр.) $\vee \neg\exists a\exists l\exists m(P_z(u)\downarrow a$ за l кр. & $P_y(a)\downarrow$ за m кр.)) &
$(\forall p\neg(P_x(u)\downarrow$ за p кр.) $\vee \exists b\exists q\exists r(P_z(u)\downarrow b$ за q кр. & $P_y(b)\downarrow$ за r кр.))) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\forall u(\forall t\exists k\, P(z,t,k)$ &
$(\exists n P(x,u,n)\vee\forall a\forall l\forall m(\neg P(z,u,l)\downarrow a \vee \neg P(y,a,m))$ &
$(\forall p\neg P(x,u,p)\vee\exists b\exists q\exists r(P(z,u,q)\downarrow b\,\&\,P(y,b,r)))\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\forall u\forall t\forall a\forall l\forall m\forall p\exists k\exists n\exists b\exists q\exists r$ (R), де R є РП.

Приклад 7.2.8. Для встановлення місця в арифметичній ієрархії предикатів "D_x креативна" і "D_x проста" можна використати такі співвідношення:

– D_x креативна $\Leftrightarrow D \le_m D_x \Leftrightarrow \exists z(\varphi_z$ є РФ & $\forall y(y\in D \leftrightarrow \varphi_z(y)\in D_x))$;

– D_x проста $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{D_x}$ нескінченна & $\forall y(D_y$ нескінченна $\rightarrow \exists z(z\in D_x\,\&\,z\in D_y))$.

Далі розписуємо, використовуючи приклади 7.2.2 та 7.2.7.

Завдання для самоконтролю

1. Поясніть, що таке σ_n-префікс.
2. Поясніть, що таке π_n-префікс.
3. Дайте визначення класів предикатів Σ_n, Π_n та Δ_n.
4. Дайте визначення класів множин $\mathit{\Sigma}_n$, $\mathit{\Pi}_n$ та $\mathit{\Delta}_n$.
5. Укажіть елементарні властивості класів Σ_n, Π_n та Δ_n.
6. Зобразіть арифметичну ієрархію класів арифметичних предикатів і арифметичних множин.
7. Сформулюйте теорему Кліні про ієрархію.
8. Сформулюйте сильну теорему про ієрархію.

9. Поясніть, який зв'язок існує між класами арифметичних множин і T-степенями.

10. Опишіть алгоритм Тарського – Куратовського.

11. Наведіть приклади використання алгоритму Тарського – Куратовського.

Вправи

1. Установіть місце в арифметичній ієрархії таких множин і предикатів:

1) "φ_x ін'єктивна";
2) $\{x \mid E_x = \varnothing\}$;
3) $\{x \mid D_x \neq \varnothing\}$;
4) $\{x \mid E_x$ нескінченна$\}$;
5) "$E_x \neq N$";
6) "φ_x сюр'єктивна";
7) $\{x \mid \varphi_x$ бієктивна$\}$;
8) $\{x \mid E_x = D\}$;
9) "$D_x \neq E_y$";
10) "$E_x = E_y$";
11) $\{x \mid E_x$ не проста$\}$;
12) $\{x \mid D_x$ креативна$\}$;
13) "E_x не креативна";
14) "D_x проста";
15) "$D_x \equiv_m E_y$";
*16) "φ_x є ПРФ";
*17) $\{x \mid E_x$ є ПРМ$\}$;
*18) "$D_x \equiv_T D_y$".

2*. Сформулюйте й доведіть релятивний варіант теореми 7.2.5.

3*. Доведіть, що $\mathbf{T} \in \mathbf{0}^{(\omega)}$.

8. ЕФЕКТИВНІ ОПЕРАТОРИ НА ФУНКЦІЯХ І МНОЖИНАХ

Розглянемо ефективні операції, задані на функціях і множинах (див. [5, 7, 13, 19]). Функції і множини, на відміну від натуральних чисел, зазвичай є нескінченними об'єктами. Ефективність таких операцій полягає у збереженні обчислюваності функцій і перелічності множин.

Множину всіх n-арних функцій на N, тобто функцій із N^n у N, позначимо $\boldsymbol{F}^n$.

Об'єднання множин $\boldsymbol{F}^n$ для всіх $n \geq 1$ позначимо $\boldsymbol{F}$.

Множину всіх тотальних функцій із $\boldsymbol{F}^n$ і множину всіх тотальних функцій із $\boldsymbol{F}$, відповідно, позначимо $\boldsymbol{T}^n$ і $\boldsymbol{T}$.

Скінченну множину позначимо F, скінченну функцію – θ.

Довільну функцію вигляду $\Phi : (2^N)^m \to 2^N$ назвемо *m-арним множинним оператором* (МнО).

Довільну функцію вигляду $\Psi : (\boldsymbol{F})^m \to \boldsymbol{F}$ назвемо *m-арним функціональним оператором* (ФО).

Функціональні оператори називають також операціями на функціях, або композиціями.

Прикладами ФО є операції суперпозиції $\mathrm{S}^{n+1} : (\boldsymbol{F})^{n+1} \to \boldsymbol{F}$, мінімізації $\mathrm{M} : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$, примітивної рекурсії $\mathrm{R} : \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$.

8.1. Монотонні та неперервні оператори. Оператори переліку. Частково рекурсивні й рекурсивні оператори

Множинний оператор $\Phi : (2^N)^m \to 2^N$ називається *монотонним*, якщо з умови $A_1 \subseteq B_1, A_2 \subseteq B_2, \ldots, A_m \subseteq B_m$ випливає

$$\Phi(A_1, \ldots, A_m) \subseteq \Phi(B_1, \ldots, B_m).$$

Функціональний оператор $\Psi : (\boldsymbol{F})^m \to \boldsymbol{F}$ називається *монотонним*, якщо з умови $f_1 \subseteq g_1, f_2 \subseteq g_2, \ldots, f_m \subseteq g_m$ випливає

$$\Phi(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \Psi(g_1, \ldots, g_m).$$

Множинний оператор $\Phi : (2^N)^m \to 2^N$ називається *неперервним*, якщо для всіх $x\in N$, $A\in (2^N)^m$ маємо

$x\in \Phi(A) \Leftrightarrow \exists\, F \subseteq A: x\in \Phi(F)$.

ФО $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ називається *неперервним*, якщо для всіх $\overline{x} \in N^n$, $y\in N$ та $f\in \boldsymbol{F}^m$ маємо

$y = \Psi(f)(\overline{x}) \Leftrightarrow (\overline{x}, y) \in \Psi(f) \Leftrightarrow \exists\, \theta \subseteq f: (\overline{x}, y) \in \Psi(\theta)$.

Аналогічно дається визначення неперервного ФО вигляду

$\Psi : \boldsymbol{F}^{n_1} \times ... \times \boldsymbol{F}^{n_m} \to \boldsymbol{F}^n$.

Теорема 8.1.1. Кожний неперервний оператор є монотонним.

Оператори переліку. Уточнимо поняття ефективного, або обчислюваного, множинного оператора.

Ефективність МнО $\Phi : 2^N \to 2^N$ означає можливість ефективно задати множину $\Phi(A)$, якщо ефективно задається множина A. Інакше кажучи, ефективний оператор Φ забезпечує породження $\Phi(A)$, якщо задано процес породження множини A.

Таким чином, якщо Φ ефективний, то на основі інформації про A можна ефективно встановити той факт, що $x\in \Phi(A)$. Зрозуміло, що це робиться за скінченну кількість кроків, із використанням лише скінченної інформації про A.

Ефективні множинні оператори називають *операторами переліку* (ОП). Наведемо визначення ОП.

Задамо для кожного $z\in N$ оператор $\Phi_z : 2^N \to 2^N$ у такий спосіб:

$\Phi_z(A) = \{x \mid \exists u(F_u \subseteq A \;\&\; C(x, u)\in D_z)\}$.

Інакше кажучи, $x\in \Phi_z(A) \Leftrightarrow \exists u(F_u \subseteq A \;\&\; C(x, u)\in D_z)$.

Оператор переліку Φ_z задає перелік множини $\Phi_z(A)$, якщо задано перелік множини A, у такий спосіб: паралельно виконуємо перелік множин A та D_z. Якщо до списку вже перелічених елементів D_z потрапило $C(x, u)$ таке, що F_u є підмножиною множини вже перелічених елементів A, то додаємо x до списку елементів множини $\Phi_z(A)$.

Поняття n-арного ОП $\Phi_z^n : (2^N)^m \to 2^N$ уводимо так:

$$\Phi_z^n(A_1,..., A_n) =$$
$$= \{x \mid \exists u_1 ... \exists u_n (F_{u_1} \subseteq A_1 \;\&\; ... \;\&\; F_{u_n} \subseteq A_n \;\&\; C^{n+1}(x, u_1,..., u_n)\in D_z)\}.$$

Теорема 8.1.2. 1) $\Phi_z(A) \subseteq l(D_z)$.

2) Φ_z монотонний: якщо $A \subseteq B$, то $\Phi_z(A) \subseteq \Phi_z(B)$.

Теорема 8.1.3. Кожний ОП неперервний.

Множина $A \subseteq N$ *однозначна*, якщо $C^{-1}(A) = \{(l(x), r(x))\}$ – функціональне відношення.

Зрозуміло, що A однозначна $\Leftrightarrow$ $(C^{m+1})^{-1}(A)$ – функціональне відношення для кожного $m \geq 1$.

Отже, A однозначна $\Leftrightarrow \forall m \geq 1\ \exists f \in F^m : A = C^{m+1}(f)$.

Це дає підставу ввести позначення CF для множини всіх однозначних множин: $CF = \{C(f) \mid f \in F^1\} = \{C^{m+1}(f) \mid f \in F^m\}$.

Кожний функціональний оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ задає множинний оператор $\Phi : CF \to CF$, і навпаки, згідно зі схемою (рис. 8.1):

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\Psi : F^m} & \to & \boldsymbol{F^n} \\ C^{m+1}\downarrow\uparrow(C^{m+1})^{-1} & & C^{n+1}\downarrow\uparrow(C^{n+1})^{-1} \\ \boldsymbol{\Phi : CF} & \to & \boldsymbol{CF} \end{array}$$

Рис. 8.1. Зв'язок функціональних і множинних операторів

Звідси $\Psi(f) = (C^{n+1})^{-1}(\Phi(C^{m+1}(f)))$ та $\Phi(A) = C^{n+1}(\Psi((C^{m+1})^{-1}(A)))$.

ФО $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ назвемо *частково рекурсивним оператором* (ЧРО), якщо існує $z \in N$ таке, що для всіх $f \in F^m$ маємо:

$$\Psi(f) = \begin{cases} (C^{n+1})^{-1}(\Phi_z(C^{m+1}(f))), & \text{якщо } \Phi_z(C^{m+1}(f)) \text{ однозначна,} \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$$

У цьому випадку кажуть, що ОП Φ_z визначає ЧРО Ψ.

Тотальний ЧРО назвемо *рекурсивним оператором* (РО).

Інакше кажучи, оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ рекурсивний, якщо існує $z \in N$ таке: для всіх $f \in \boldsymbol{F}^m$ маємо

$$\Psi(f) = (C^{n+1})^{-1}(\Phi_z(C^{m+1}(f))). \qquad (df1)$$

Дамо безпосереднє визначення РО, не використовуючи ОП.

Функціональний оператор $\Psi : F^m \to F^n$ – РО, якщо існує $z \in N$ таке, що для всіх $f \in \boldsymbol{F}^m$, $(\bar{x}, y) \in N^{n+1}$ маємо

$$(\bar{x}, y) \in \Psi(f) \Leftrightarrow \exists u\,(\theta_u^m \subseteq f\ \&\ y = \varphi_z^{n+1}(u, \bar{x})). \qquad (df2)$$

Зрозуміло, що це визначення РО еквівалентне такому:
існує ЧРФ φ така: для всіх $f \in \boldsymbol{F}^m$, $(\bar{x}, y) \in N^{n+1}$ маємо

$$y = \Psi(f)(\bar{x}) \Leftrightarrow (\bar{x}, y) \in \Psi(f) \Leftrightarrow \exists u\, (\theta_u^m \subseteq f \;\&\; y = \varphi(u, \bar{x})). \quad (df3)$$

Отже, для формалізації поняття ефективної операції (оператора) виявляється достатнім поняття алгоритму, ніяких нових понять уводити не потрібно. Це ще раз підкреслює універсальність і глибину поняття алгоритму.

Теорема 8.1.4. Визначення *df*1 та *df*2 еквівалентні.
Надалі використовуємо *df*3 рекурсивного оператора.

Теорема 8.1.5. Кожний РО є неперервним.

Приклад 8.1.1. Нехай оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ задається умовою

$$\Psi(g) = \begin{cases} g, & \text{якщо } g \text{ скінченна,} \\ f_\varnothing & \text{інакше.} \end{cases}$$

Візьмемо скінченну $\theta \neq f_\varnothing$ і нескінченну $f \supset \theta$. Тоді $\Psi(\theta) = \theta \neq f_\varnothing$ та $\Psi(f) = f_\varnothing$. Маємо $f \supset \theta$ та $\Psi(f) \subset \Psi(\theta)$.
Отже, Ψ немонотонний, тому Ψ не є РО.

Приклад 8.1.2. Нехай оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ задається умовою

$$\Psi(g) = \begin{cases} g, & \text{якщо } E_g \text{ нескінченна,} \\ f_\varnothing & \text{інакше.} \end{cases}$$

Візьмемо функцію f із нескінченною E_f (напр., f – тотожна функція). Тоді $\Psi(f) = f \neq f_\varnothing$. Водночас $\Psi(\theta) = f_\varnothing$ для кожної скінченної $\theta \subset f$. Тому, якщо $(x, y) \in \Psi(f)$, то не існує скінченної функції $\theta \subset f$ такої, що $(x, y) \in \Psi(\theta)$, адже $\Psi(\theta) = f_\varnothing = \varnothing$.
Отже, Ψ не є неперервним, тому Ψ не є РО.

Приклад 8.1.3. Нехай оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ задається умовою

$$\Psi(g) = \begin{cases} g, & \text{якщо } D_g \cap E_g \text{ скінченна,} \\ f_\varnothing & \text{інакше.} \end{cases}$$

Візьмемо f як тотожну функцію, тоді $D_f \cap E_f$ нескінченна, звідки $\Psi(f) = f_\varnothing$. Візьмемо скінченну $\theta \neq f_\varnothing$ таку: $\theta \subset f$; тоді $\Psi(\theta) = \theta \neq f_\varnothing$. Маємо $f \supset \theta$ та $\Psi(f) \subset \Psi(\theta)$. Отже, Ψ немонотонний, тому Ψ не є РО.

Приклад 8.1.4. Нехай оператор $\Phi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ задається умовою

$$\Phi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } E_g \setminus D_g \text{ нескінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше.} \end{cases}$$

Візьмемо за f таку функцію: $f(x) = x/2$ для всіх $x \in N$; тоді $E_f \setminus D_f$ нескінченна,звідки $\Psi(f) = f \neq f_\varnothing$. Водночас для кожної скінченної $\theta \subset f$ маємо $\Psi(\theta) = f_\varnothing$, адже $E_\theta \setminus D_\theta$ скінченна. Звідси, якщо $(x, y) \in \Psi(f)$, то не існує скінченної $\theta \subset f$ такої, що $(x, y) \in \Psi(\theta)$, адже $\Psi(\theta) = f_\varnothing$. Отже, Ψ не є неперервним, тому Ψ не є РО.

Приклад 8.1.5. Нехай оператор $\Phi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ задається умовою

$$\Phi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } D_g \setminus E_g \text{ скінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше.} \end{cases}$$

Візьмемо за f таку функцію: $f(x) = 2x$ для всіх $x \in N$; тоді $D_f \setminus E_f$ нескінченна, звідки $\Psi(f) = f_\varnothing$. Візьмемо скінченну $\theta \neq f_\varnothing$ таку: $\theta \subset f$; тоді $D_\theta \setminus E_\theta$ скінченна, звідки $\Psi(\theta) = \theta \neq f_\varnothing$. Маємо $f \supset \theta$ та $\Psi(f) \subset \Psi(\theta)$. Отже, Ψ немонотонний, тому Ψ не є РО.

Опишемо РО за допомогою поняття неперервності, що дає змогу полегшити перевірку рекурсивності різних операторів.

Теорема 8.1.6. Оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ є РО $\Leftrightarrow$ Ψ неперервний і частково рекурсивною є функція

$$\gamma(u, \bar{x}) = \begin{cases} \Psi(\theta_u^m)(\bar{x}), \text{ якщо } u - \text{код деякої скінченної функції,} \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$$

Приклад 8.1.6. Оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$, що задається умовою $\Psi(f) = g$ для всіх $f \in \boldsymbol{F}^m$, де g – фіксована ЧРФ.

Оператор Ψ неперервний: згідно із $\Psi(f) = \Psi(\theta) = g$, маємо $(\bar{x}, y) \in \Psi(f) \Leftrightarrow (\bar{x}, y) \in \Psi(\theta)$ для довільної скінченної $\theta \subseteq f$.

Функція

$$\gamma(u, x) = \begin{cases} g(\bar{x}), \text{ якщо } u - \text{код деякої скінченної функції,} \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$$

є ЧРФ за ТЧ. Отже, згідно з теоремою 8.1.6, оператор Ψ є РО.

Приклад 8.1.7. Нехай оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ задано умовою

$$\Psi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } D_g \cup \bar{E}_g \text{ скінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше.} \end{cases}$$

Множина $D_g \cup \overline{E}_g$ нескінченна для кожної $g \in \boldsymbol{F}^1$. Справді, якщо g нескінченна, то D_g нескінченна $\Rightarrow$ $D_g \cup \overline{E}_g$ нескінченна; якщо g скінченна, то E_g теж скінченна $\Rightarrow$ $\overline{E}_g$ нескінченна $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $D_g \cup \overline{E}_g$ нескінченна. Звідси випливає, що $\Psi(g) = f_{\varnothing}$ для кожної $g \in \boldsymbol{F}^1$. Згідно із прикладом 8.1.6 оператор Ψ є РО.

Приклад 8.1.8. Задамо оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ співвідношенням $\Psi(f)(x) = f(f(x+2)) + 5x$ для всіх $f \in \boldsymbol{F}^1$. Тоді Ψ є РО.

Оператор Ψ неперервний: умова $(x, y) \in \Psi(f) \Leftrightarrow (x, y) \in \Psi(\theta)$ виконується для кожної скінченної $\theta \subseteq f$ такої, що $x+2 \in D_\theta$ та $f(x+2) \in D_\theta$.

Функція $\gamma(u, x) = \begin{cases} \theta_u(\theta_u(x+2)) + 5x, \\ \text{якщо } u - \text{ код деякої скінченної функції,} \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$

є ЧРФ за ТЧ. Звідси Ψ є РО.

Приклад 8.1.9. Оператор мінімізації М : $\boldsymbol{F}^{n+1} \to \boldsymbol{F}^n$ є РО.

Оператор мінімізації М задається так: для всіх $f \in \boldsymbol{F}^{n+1}$ маємо $\mathrm{M}(f)(\overline{x}) = \mu_y(f(\overline{x}, y) = 0)$.

М неперервний: умова $y = \mu_z(f(\overline{x}, z) = 0) \Leftrightarrow y = \mu_z(\theta(\overline{x}, z) = 0)$ виконується для кожної $\theta \subseteq f$ такої, що $(\overline{x}, 0), (\overline{x}, 1), ..., (\overline{x}, y) \in D_\theta$, тому для кожної такої $\theta \subseteq f$ маємо $y = \mathrm{M}(f)(\overline{x}) \Leftrightarrow y = \mathrm{M}(\theta)(\overline{x})$, тобто $y = \mu_z(f(\overline{x}, z) = 0) \Leftrightarrow y = \mu_z(\theta(\overline{x}, z) = 0)$.

Функція $\gamma(u, \overline{x}) = \begin{cases} \mu_Z(\theta_u^{n+1})(\overline{x}, z), \\ \text{якщо } u - \text{ код деякої скінченної функції,} \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$

є ЧРФ за тезою Чорча. Звідси оператор мінімізації М є РО.

ЧРО $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ – *загальнорекурсивний* (ЗРО), якщо

$\boldsymbol{T}^m \subseteq D_\Psi$ та $\Psi(\boldsymbol{T}^m) \subseteq \boldsymbol{F}^n$.

Отже, ЧРО Ψ є ЗРО, якщо Ψ визначений на всіх тотальних функціях і тотальні функції переводить у тотальні.

Теорема 8.1.7. Нехай ЧРО $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ такий: $\boldsymbol{T}^m \subseteq D_\Psi$. Тоді Ψ є РО.

Наслідок 8.1.1. Для класів ЗРО та РО маємо: ЗРО $\subset$ РО.

Справді, за теоремою 8.1.7 ЗРО $\subseteq$ РО. Однак РО із прикладу 8.1.6 не є ЗРО, якщо ЧРФ g узяти нетотальною, тобто не РФ.

Приклад 8.1.10. Нехай оператор $\Psi_0 : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ задається умовою $\Psi_0(\{(0,0)\}) = \{(0,0)\}$ та $\Psi_0(\{(1,0)\}) = \{(0,1)\}$; при цьому для інших $f \in \boldsymbol{F}^1$ значення $\Psi_0(f)$ невизначене.

Тоді оператор Ψ_0 розширюється до ЧРО й не розширюється до жодного РО.

Позаяк $\{C(0,0)\} = \{0\} = F_1$ та $\{C(1,0)\} = \{2\} = F_4$, то беремо z таке, що $D_z = \{C(0,2^0),\ C(1,2^2)\}$. Нехай оператор переліку Φ_z задається таким D_z, тобто $x \in \Phi_z(A) \Leftrightarrow \exists u(F_u \subseteq A\ \&\ C(x, u) \in D_z)$.

Для кожних $A \in 2^N$ маємо $\Phi_z(A) \subseteq l(D_z) = \{0,1\}$. Звідси:

– якщо $0 \in A$ та $2 \in A$, то $\Phi_z(A) = \{0,1\}$;

– якщо $0 \in A$ та $2 \notin A$, то $\Phi_z(A) = \{0\}$;

– якщо $0 \notin A$ та $2 \in$ A, то $\Phi_z(A) = \{1\}$;

– якщо $0 \notin A$ та $2 \notin$ A, то $\Phi_z(A) = \varnothing$.

Оператор Φ_z визначає ЧРО Ψ. Для такого Ψ маємо:

1) якщо $(0,0) \in f$ та $(1,0) \in f$, то $0 \in C(f)$ і $2 \in C(f)$, звідки $\Phi_z(C(f)) = \{0,1\}$ – неоднозначна множина. Отже, для таких f значення $\Psi(f)$ невизначене, тому Ψ не РО;

2) якщо $(0,0) \in f$ та $(1,0) \notin f$, то $0 \in C(f)$ і $2 \notin C(f)$, звідки маємо $\Phi_z(C(f)) = \{0\} = C(0,0)$. Отже, для таких f маємо $\Psi(f) = \{(0,0)\}$;

3) якщо $(0,0) \notin f$ та $(1,0) \in f$, то $0 \notin C(f)$ та $2 \in C(f)$, звідки маємо $\Phi_z(C(f)) = \{1\} = C(0,1)$. Отже, для таких f маємо $\Psi(f) = \{(0,1)\}$;

4) якщо $(0,0) \notin f$ та $(1,0) \notin f$, то $0 \notin C(f)$ і $2 \notin C(f)$, звідки $\Phi_z(C(f)) = \varnothing$. Отже, для таких f маємо $\Psi(f) = f_\varnothing$.

Із 2) і 3) випливає, що ЧРО Ψ є розширенням оператора Ψ_0.

Покажемо тепер, що Ψ_0 не можна розширити до РО.

Нехай $\theta = \{(0,0), (1,0)\}$. Тоді для довільного ЧРО Φ, що є розширенням Ψ_0, маємо: якщо $\Phi(\theta)\downarrow$, то $\Phi(\theta) \supseteq \Phi(\{(0,0)\}) = \Psi_0(\{(0,0)\}) = \{(0,0)\}$ та $\Phi(\theta) \supseteq \Phi(\{(1,0)\}) = \Psi_0(\{(1,0)\}) = \{(0,1)\}$.

Однак тоді $\Phi(\theta)$ як множина не є функцією, тобто $\Phi(\theta)\uparrow$. Отже, кожний такий ЧРО Φ нетотальний, тобто не РО.

Наслідок 8.1.2. Для класів операторів маємо:

ЗРО $\subset$ РО $\subset$ ЧРО.

Наслідок 8.1.3. Існують немонотонні ЧРО.

Візьмемо ЧРО Ψ із прикладу 8.1.10. Для $\theta = \{(0,0),\ (1,0)\}$ маємо $\Phi(\theta)\uparrow$, але $\Psi(\{(0,0)\}) = \{(0,0)\}$. Тому з умови $\{(0,0)\} \subseteq \theta$ не випливає $\Psi(\{(0,0)\} \subseteq \Psi(\theta)$.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення функціонального оператора.
2. Дайте визначення множинного оператора.
3. Дайте визначення монотонного оператора.
4. Дайте визначення неперервного оператора.
5. Поясніть термін "неперервний" для випадку оператора.
6. Дайте визначення оператора переліку.
7. Дайте визначення однозначної множини.
8. Поясніть зв'язок між функціональними й множинними операторами.
9. Дайте визначення ЧРО.
10. Дайте визначення РО.
11. Наведіть еквівалентні визначення РО.
12. Сформулюйте критерій рекурсивності оператора.
13. Дайте визначення ЗРО.
14. Укажіть співвідношення між класами ЧРО, РО, ЗРО.

Вправи

1. Нехай Φ_z – оператор переліку. Дослідіть співвідношення:
   1) між множинами $\Phi_z(A \cup B)$ та $\Phi_z(A) \cup \Phi_z(B)$;
   2) між множинами $\Phi_z(A \cap B)$ та $\Phi_z(A) \cap \Phi_z(B)$.

2. Нехай Φ та Ψ – монотонні оператори. Доведіть, що оператор $\Phi \circ \Psi$ теж монотонний (тут Φ та Ψ – 1-арні множинний оператор вигляду $\Phi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^k$ і функціональний оператор вигляду $\Psi : \boldsymbol{F}^k \to \boldsymbol{F}^n$).

3. Нехай Φ та Ψ – неперервні оператори. Доведіть, що оператор $\Phi \circ \Psi$ теж неперервний (тут Φ та Ψ – 1-арні множинний оператор вигляду $\Phi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^k$ і функціональний оператор вигляду $\Psi : \boldsymbol{F}^k \to \boldsymbol{F}^n$).

4. Нехай Φ та Ψ – РО вигляду $\Phi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^k$ та $\Psi : \boldsymbol{F}^k \to \boldsymbol{F}^n$. Доведіть, що оператор $\Phi \circ \Psi$ теж рекурсивний.

5. З'ясуйте, чи буде РО оператор $\Phi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$, заданий умовою:

1) $\Phi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } D_g \cap E_g \text{ нескінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше;} \end{cases}$

2) $\Phi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } \bar{D}_g \cap E_g \text{ скінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше;} \end{cases}$

3) $\Phi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } D_g \setminus E_g \text{ нескінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше;} \end{cases}$

4) $\Phi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } D_g \cup \bar{E}_g \text{ нескінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше;} \end{cases}$

5) $\Phi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } \bar{D}_g \cup E_g \text{ скінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше;} \end{cases}$

6) $\Phi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } \bar{D}_g \cup E_g \text{ нескінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше.} \end{cases}$

6. Доведіть рекурсивність оператора $\Phi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$, заданого умовою:

1) $\Phi(f)(x) = \sum\limits_{t \le x} f(2t)$;

2) $\Phi(f)(x) = \prod\limits_{t \le 2x} f(t)$;

3) $\Phi(f)(x) = f(f(f(x+1))) + x$;

4) $\Phi(f)(x) = f(f(x^2+3)) + 2x$;

5) $\Phi(f)(x) = (f(f(2x+1)))^2 + 3x$;

6) $\Phi(f)(x) = f(f(7x+5)) + f(f(f(x)))$.

7. Доведіть рекурсивність оператора $\Phi : \boldsymbol{F}^2 \to \boldsymbol{F}^1$, заданого умовою:

1) $\Phi(f)(x) = f(x, x)$;

2) $\Phi(f)(x) = f(f(2x, x), f(x, 3x))$;

3) $\Phi(f)(x) = f(f(x, x)+1, f(3x, x)+2)+3$;

4) $\Phi(f)(x) = f(f^2(x, 3x),\ 7x + f(x^3,\ 5+x))$.

8. Сформулюйте визначення m-арного неперервного функціонального оператора вигляду $\Psi : \boldsymbol{F}^{n_1} \times \ldots \times \boldsymbol{F}^{n_m} \to \boldsymbol{F}^n$.

9. Сформулюйте визначення n-арного частково рекурсивного та n-арного рекурсивного оператора.

10. Доведіть рекурсивність операторів примітивної рекурсії R і суперпозиції S^{n+1}.

*11. Сформулюйте й доведіть для випадку n-арних операторів відповідні узагальнення теорем 8.1.4–8.1.6.

8.2. Теорема Майхілла – Шепердсона. Теореми Кліні про нерухому точку

Кожний РО при обмеженні на ЧРФ задає на їхніх індексах ефективну операцію, тобто рекурсивну функцію.

Теорема 8.2.1. Для кожного РО $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ існує РФ h така: для кожного $k \in N$ маємо $\Psi(\varphi_k^m) = \varphi_{h(k)}^n$.

РФ h із теореми 8.2.1 має властивість:

$$\varphi_k^m = \varphi_l^m \Rightarrow \varphi_{h(k)}^n = \varphi_{h(l)}^n.$$

Справді, з умови $\varphi_k^m = \varphi_l^m$ маємо $\varphi_{h(k)}^n = \Psi(\varphi_k^m) = \Psi(\varphi_l^m) = \varphi_{h(l)}^n$.

РФ із такою властивістю називають *m-n-екстенсійними.*

1-1-екстенсійні функції називатимемо просто е*кстенсійними*.

Твердження, подібне до теореми 8.2.1, має місце для ОП.

Теорема 8.2.2. Існує РФ s: $\Phi_z(D_y) = D_{s(z,y)}$ для всіх $z, y \in N$.

Наслідок 8.2.1. 1) Нехай Ψ є РО, f є ЧРФ. Тоді $\Psi(f)$ є ЧРФ.

2) Нехай A є РПМ. Тоді $\Phi_z(A)$ є РПМ.

Має місце твердження, обернене до теореми 8.2.1.

Теорема 8.2.3 (Майхілла – Шепердсона). Для кожної *m-n*-екстенсійної РФ h існує єдиний РО $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ такий:

для кожного $k \in N$ маємо $\Psi(\varphi_k^m) = \varphi_{h(k)}^n$.

Принцип нерухомої точки зустрічається в багатьох розділах математики. Метод нерухомої точки плідно використовують, зокрема у програмуванні для визначення семантики рекурсивних програм. Розглянемо теореми Кліні про нерухому точку (НТ) для випадків множинних і функціональних операторів.

Теорема 8.2.4. Для кожного ОП Φ існує множина A така:

1) $\Phi(A) = A$, тобто A – нерухома точка оператора Φ;

2) якщо $\Phi(B) = B$, то $A \subseteq B$; це означає, що A – *найменша* нерухома точка (ННТ) оператора Φ;

3) A є РПМ.

Теорема 8.2.5. Для кожного РО $\Psi : \boldsymbol{F}^n \to \boldsymbol{F}^n$ існує функція f:

1) $\Psi(f) = f$, тобто f – нерухома точка оператора Ψ;

2) якщо $\Psi(g) = g$, то $f \subseteq g$; тобто f – ННТ оператора Ψ;

3) f є ЧРФ.

Доводимо теорему 8.2.5 для випадку $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$.

Діємо *методом послідовних наближень*.

Задамо послідовність функцій $\{f_n\}_{n\in N}$:

$f_0 = f_\varnothing$;

$f_{n+1} = \Psi(f_n)$ для $n \geq 0$.

Задамо $f = \bigcup\limits_{n\geq 0} f_n$. Це означає, що $(x, y)\in f \Leftrightarrow \exists n\,((x, y)\in f_n)$.

1) Покажемо, що $\Psi(f) = f$. За побудовою f маємо $f_n \subseteq f$ для всіх $n \geq 0$, звідки за монотонністю Ψ маємо $\Psi(f_n) \subseteq \Psi(f)$ для всіх $n \geq 0$, тобто $f_{n+1} \subseteq \Psi(f)$ для всіх $n \geq 0$. Звідси $f = \bigcup\limits_{n\geq 0} f_n \subseteq \Psi(f)$.

Нехай $(x, y)\in \Psi(f)$. За неперервністю Ψ $\exists\theta \subseteq f$: $(x, y)\in \Psi(\theta)$. Однак $\theta \subseteq f \Leftrightarrow \exists n : \theta \subseteq f_n$. Тому $\exists n\, \exists\theta\, (\theta \subseteq f_n \,\&\, (x, y)\in \Psi(\theta))$, звідки за неперервністю Ψ отримуємо $\exists n\,((x, y)\in \Psi(f_n))$. Звідси за $f_{n+1} = \Psi(f_n)$ маємо $\exists n((x, y)\in f_{n+1})$, тому $(x, y)\in f$. Отже, $\Psi(f) \subseteq f$.

Таким чином, $\Psi(f) = f$.

2) Нехай g така, що $\Psi(g) = g$. Маємо $f_\varnothing = f_0 \subseteq g$. За індукцією маємо: якщо $f_n \subseteq g$, то $\Psi(f_n) \subseteq \Psi(g)$ за монотонністю Ψ, тобто $f_{n+1} \subseteq \Psi(g) = g$. Отже, $f_n \subseteq g$ для всіх $n \geq 0$, звідки $f = \bigcup\limits_{n\geq 0} f_n \subseteq g$.

3) Згідно з теоремою 8.2.1 візьмемо РФ h таку: $\Psi(\varphi_x) = \varphi_{h(x)}$ для всіх $x\in N$. Нехай k – деякий індекс $f_\varnothing$.

Задамо функцію β: $\begin{cases} \beta(0) = k, \\ \beta(n+1) = h(\beta(n)) \text{ при } n \geq 0; \end{cases}$ β є РФ за ТЧ.

Маємо $f_0 = f_\varnothing = \varphi_k = \varphi_{\beta(0)}$, $f_{n+1} = \Psi(\varphi_{\beta(n)}) = \varphi_{h(\beta(n))} = \varphi_{\beta(n+1)}$ для $n \geq 0$. Звідси $(x, y) \in f \Leftrightarrow \exists n((x, y) \in f_n) \Leftrightarrow \exists n((x, y) \in \varphi_{\beta(n)})$, тому "$(x, y) \in f$" є ЧРП, звідки f є ЧРФ.

Для неперервних операторів маємо загальніші, але дещо слабші результати.

Теорема 8.2.6. Кожний неперервний МнО $\Phi : 2^N \to 2^N$ має ННТ.

Теорема 8.2.7. Кожний неперервний ФО $\Psi : \boldsymbol{F}^n \to \boldsymbol{F}^n$ має ННТ.

Приклад 8.2.1. ННТ оператора $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$, заданого умовою

$$\Psi(f)(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0, \\ f(x+1), \text{ якщо } x > 0. \end{cases}$$

Оператор Ψ неперервний: $(x, y) \in \Psi(f) \Leftrightarrow (x, y) \in \Psi(\theta)$ виконується при $x = 0$ для довільної скінченної $\theta \subseteq f$; при $x > 0$ ця умова виконується для кожної скінченної $\theta \subseteq f$ такої, що $x + 1 \in D_\theta$.

Отже, Ψ має ННТ $f_Н$, яку знайдемо методом послідовних наближень. Маємо $f_0 = f_\varnothing$. Тепер знаходимо f_1 та f_2:

$$f_1(x) = \Psi(f_0)(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0, \\ f_0(x+1), \text{ якщо } x > 0, \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0, \\ \text{невизначене, якщо } x > 0. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \Psi(f_1)(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0, \\ f_1(x+1), \text{ якщо } x > 0, \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0, \\ \text{невизначене, якщо } x > 0. \end{cases}$$

Отже, $f_2 = f_1$. Маємо стабілізацію, тому $f_n = f_1$ для всіх $n > 0$.

Звідси ННТ $f_Н = \bigcup_{n \geq 0} f_n = f_1$.

Зауважимо, що всі інші нерухомі точки нашого оператора мають вигляд $f_Т(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0, \\ a, \text{ якщо } x > 0. \end{cases}$

Приклад 8.2.2. ННТ оператора $\Psi : \boldsymbol{F}^2 \to \boldsymbol{F}^2$, заданого умовою

$$\Psi(f)(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0, \\ f(x-1, f(x, y)), \text{ якщо } x > 0. \end{cases}$$

Оператор Ψ неперервний.

Справді, умова $(x, y, z) \in \Psi(f) \Leftrightarrow (x, y, z) \in \Psi(\theta)$ виконується:

– при $x = 0$ для довільної скінченної $\theta \subseteq f$;

– при $x>0$ для кожної скінченної $\theta\subseteq f$ такої, що $(x,y)\in D_\theta$ та $(x-1, f(x,y))\in D_\theta$.

Таким чином, Ψ має ННТ $f_Н$, яку знайдемо методом послідовних наближень. Маємо $f_0 = f_\varnothing$.

Тепер $f_1(x,y) = \Psi(f_0)(x,y)) =$

$$=\begin{cases}1, \text{ якщо } x=0\ ,\\ f_0(x-1, f_0(x,y)), \text{ якщо } x>0,\end{cases} =\begin{cases}1, \text{ якщо } x=0,\\ \text{невизначене, якщо } x>0;\end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \Psi(f_1)(x,y)) = \begin{cases}1, \text{ якщо } x=0,\\ f_1(x-1, f_1(x,y)), \text{ якщо } x>0,\end{cases} =$$

$$=\begin{cases}1, \text{ якщо } x=0,\\ \text{невизначене, якщо } x>0,\end{cases}$$

оскільки $f_1(x,y)$ невизначене при $x>0$.

Отже, $f_2 = f_1$. Маємо стабілізацію, тому $f_n = f_1$ для всіх $n>0$.

Звідси ННТ $f_Н = \bigcup\limits_{n\geq 0} f_n = f_1$.

Зауважимо, що Ψ є РО. Справді, функція

$$\gamma(u,x,y)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x=0 \text{ та } u - \text{код деякої скінченної функції},\\ \theta_u^2(x-1, \theta_u^2(x,y)),\\ \text{якщо } x>0 \text{ та } u\ - \text{ код деякої скінченної функції},\\ \text{невизначене інакше},\end{cases}$$

є ЧРФ за тезою Чорча.

Приклад 8.2.3. ННТ оператора $\Psi: \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$, заданого умовою

$$\Psi(f)(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x=0,\\ 2x-1+f(x-1), \text{ якщо } x>0.\end{cases}$$

Ψ неперервний: умова $(x,y)\in\Psi(f) \Leftrightarrow (x,y)\in\Psi(\theta)$ виконується:
– при $x=0$ для довільної скінченної $\theta\subseteq f$;
– при $x>0$ для кожної скінченної $\theta\subseteq f$ такої, що $x-1\in D_\theta$.
Отже, Ψ має ННТ.

Метод послідовних наближень вимагає нескінченної кількості кроків, оскільки $f_{n+1}\supset f_n$ для всіх $n\geq 0$. Тому діємо таким шляхом: нехай $f_Н$ – це ННТ нашого оператора. Тоді для кожного $x\in N$ маємо:

$f_Н(x) = \Psi(f_Н)(x) = 2x - 1 + f_Н(x-1) = 2x - 1 + \Psi(f_Н)(x-1) =$
$= 2x - 1 + 2x - 3 + f_Н(x-2) = \ldots = 2x - 1 + 2x - 3 + \ldots + 1 + f_Н(0) =$
$= 2x - 1 + 2x - + \ldots + 1 + 0 = x^2.$

Отже, для всіх $x \in N$ маємо $f_Н(x) = x^2$. Тому така функція $f_Н$ – єдина нерухома точка нашого Ψ.

Зауважимо, що Ψ є РО. Справді, функція

$$\gamma(u,x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x = 0 \text{ та } u \ - \text{ код деякої скінченної функції}, \\ 2x - 1 + \theta_u(x-1), \\ \text{якщо } x > 0 \text{ та } u \ - \text{ код деякої скінченної функції}, \\ \text{невизначене інакше}, \end{cases}$$

є ЧРФ за тезою Чорча.

Приклад 8.2.4. ННТ оператора $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$, заданого умовою

$$\Psi(f)(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0, \\ 8x + 3 + f(x-1), \text{ якщо } x > 0. \end{cases}$$

Ψ неперервний: умова $(x, y) \in \Psi(f) \Leftrightarrow (x, y) \in \Psi(\theta)$ виконується:

– при $x = 0$ для довільної скінченної $\theta \subseteq f$;

– при $x > 0$ для кожної скінченної $\theta \subseteq f$ такої, що $x - 1 \in D_\theta$.

Отже, Ψ має ННТ, нехай це функція $f_Н$. Для кожного $x \in N$ маємо $f_Н(x) = \Psi(f_Н)(x) = 8x + 3 + f_Н(x-1) = 8x + 3 + \Psi(f_Н)(x-1) =$
$= 8x + 3 + 8(x-1) + 3 + f_Н(x-2) = \ldots$

$$\ldots = \sum_{k=1}^{x}(8k+3) + 1 = 4x(x+1) + 3x + 1 = 4x^2 + 7x + 1.$$

Таким чином, для всіх $x \in N$ маємо $f_Н(x) = 4x^2 + 7x + 1$. Тому така функція $f_Н$ – єдина ННТ нашого Ψ.

Приклад 8.2.5. ННТ оператора $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$, заданого умовою

$$\Phi(f)(x) = \begin{cases} x - 6, \text{ якщо } x > 55, \\ f(f(x+7)) \text{ при } x \le 55. \end{cases}$$

Ψ неперервний: умова $(x, y) \in \Psi(f) \Leftrightarrow (x, y) \in \Psi(\theta)$ виконується:

– при $x > 55$ для довільної скінченної $\theta \subseteq f$;

– при $x \le 55$ для кожної скінченної $\theta \subseteq f$: $x + 7 \in D_\theta$ та $f(x+7) \in D_\theta$.

Отже, Ψ має ННТ, нехай це функція $f_Н$.

Для кожного $x > 55$ маємо $f_Н(x) = \Psi(f_Н)(x) = x - 6$. Тепер

$f_Н(55) = \Psi(f_Н)(55) = f_Н(f_Н(62)) = f_Н(56) = 50;$

$f_{\text{Н}}(54) = \Psi(f_{\text{Н}})(54) = f_{\text{Н}}(f_{\text{Н}}(61)) = f_{\text{Н}}(55) = 50.$

Продовжуючи далі, маємо:

$f_{\text{Н}}(53) = f_{\text{Н}}(54) = 50, \ldots, f_{\text{Н}}(0) = f_{\text{Н}}(1) = 50.$

Отже, $f_{\text{Н}}$ – єдина нерухома точка оператора Ψ, причому

$$f_{\text{Н}}(x) = \begin{cases} x-6, & \text{якщо } x > 55, \\ 50, & \text{якщо } x \le 55. \end{cases}$$

Оператор Ψ є РО. Справді, функція

$$\gamma(u,x) = \begin{cases} x-6, \text{ якщо } x > 55 \text{ та } u - \text{код деякої скінченної функції}, \\ \theta_u(\theta_u(x+7)), \text{ якщо } x \le 55 \\ \text{та } u \ - \text{ код деякої скінченної функції}, \\ \text{невизначене інакше}, \end{cases}$$

є ЧРФ за тезою Чорча.

Зауважимо, що коли ННТ f неперервного оператора Ψ є тотальною функцією, така функція f – єдина нерухома точка Ψ.

Для ЗРО ННТ може бути нетотальною функцією, тобто не РФ. Наприклад, тотожний оператор є ЗРО, але його ННТ – це $f_\varnothing$.

Нехай РО $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ визначений оператором переліку Φ_z. Тоді маємо $\Psi(f) = C^{-1}(\Phi_z(C(f)))$ для всіх $f \in \boldsymbol{F}$. Нехай A – нерухома точка оператора Φ_z: $A = \Phi_z(A)$. Тоді $f = C^{-1}(A)$ є нерухомою точкою РО Ψ: $\Psi(f) = C^{-1}(\Phi_z(C(f))) = C^{-1}(\Phi_z(A)) = C^{-1}(A) = f$.

З іншого боку, нехай f – нерухома точка РО Ψ: $\Psi(f) = f$. Тоді $A = C(f)$ – нерухома точка ОП Φ_z : $\Phi_z(C(f)) = C(\Psi(f)) = C(f)$.

Для ЧРО Ψ, який не є РО, найменшої нерухомої точки може не існувати. Це буває тоді, коли множина A – ННТ відповідного ОП Φ_z – неоднозначна. Зрозуміло, що тоді кожна $B \supseteq A$ неоднозначна, тому такий Ψ узагалі не має нерухомих точок.

Розглянемо зв'язок між теоремою 8.2.5 і теоремою Кліні про нерухому точку для індексних РФ ($Kl_{\text{РФ}}$).

Нехай $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ – РО. За теоремою $Kl_{\text{РФ}}$ існує РФ h: $\Psi(\varphi_k) = \varphi_k$ для всіх $k \in N$. За $Kl_{\text{РФ}}$ для РФ h існує $m \in N$: $\varphi_m = \varphi_{h(m)}$.

Маємо $\Psi(\varphi_m) = \varphi_{h(m)} = \varphi_m$, тому φ_m – це НТ оператора Ψ.

$Kl_{\text{РФ}}$ стверджує існування НТ, яка є ЧРФ, для кожного РО. Проте із $Kl_{\text{РФ}}$ не випливає, що РО має *частково рекурсивну* ННТ.

Таким чином, $Kl_{\text{РФ}}$ – загальніша теорема, теорема 8.2.5 частково випливає з неї. $Kl_{\text{РФ}}$ можна застосувати й до неекстенсійних

РФ, які не отримують за допомогою РО. Водночас теорема 8.2.5 дає більше інформації.

Отже, обидві теореми про нерухому точку взаємно доповнюють одна одну.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте теорему Майхілла – Шепердсона.
2. Поясніть, що таке екстенсійна функція.
3. Опишіть побудову нерухомої точки методом послідовних наближень.
4. Сформулюйте теорему Кліні про нерухому точку для операторів переліку.
5. Сформулюйте теорему Кліні про нерухому точку для рекурсивних операторів.
6. Поясніть, чи завжди існує нерухома точка для ЧРО.
7. Укажіть зв'язок між теоремами Кліні про нерухому точку для РО та індексних РФ.

Вправи

1. Доведіть рекурсивність і знайдіть ННТ оператора $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$, заданого умовою:

1) $\Psi(f)(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0, \\ 3x + f(x-1) \text{ при } x > 0; \end{cases}$

2) $\Psi(f)(x) = \begin{cases} 2, \text{ якщо } x = 0, \\ 2x + 5 + f(x-1) \text{ при } x > 0; \end{cases}$

3) $\Psi(f)(x) = \begin{cases} 3, \text{ якщо } x = 0, \\ 4x + 1 + f(x-1) \text{ при } x > 0; \end{cases}$

4) $\Psi(f)(x) = \begin{cases} 4, \text{ якщо } x = 0, \\ 7x + 2 + f(x-1) \text{ при } x > 0; \end{cases}$

5) $\Psi(f)(x) = \begin{cases} 5, \text{ якщо } x = 0, \\ 3f(x-1) \text{ при } x > 0; \end{cases}$

6) $\Psi(f)(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x = 0, \\ 1, \text{ якщо } x = 1, \\ f(x-1) + f(x-2), \text{ якщо } x > 1; \end{cases}$

*7) $\Psi(f)(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x=0,\\ 1, \text{ якщо } x=1,\\ 2f(x-1)+3f(x-2), \text{ якщо } x>1.\end{cases}$

2. Доведіть рекурсивність і знайдіть ННТ оператора $\Psi:\boldsymbol{F}^2\to\boldsymbol{F}^2$, заданого умовою:

1) $\Psi(f)(x,y)=\begin{cases}5, \text{ якщо } x=0,\\ f(x+2, f(x-1, y+3)) \text{ при } x>0;\end{cases}$

2) $\Psi(f)(x,y)=\begin{cases}3, \text{ якщо } x=0,\\ f(x-1, f(x+3, y+2)) \text{ при } x>0;\end{cases}$

3) $\Psi(f)(x,y)=\begin{cases}2, \text{ якщо } x=0,\\ f(x+3, f(x-1,\ 2y+1)) \text{ при } x>0.\end{cases}$

3. Доведіть рекурсивність і знайдіть ННТ оператора $\Psi:\boldsymbol{F}^1\to\boldsymbol{F}^1$, заданого умовою:

1) $\Psi(f)(x)=\begin{cases}x-8, \text{ якщо } x\ge 60,\\ f(f(x+9)) \text{ при } x<60;\end{cases}$

2) $\Psi(f)(x)=\begin{cases}x-10, \text{ якщо } x>100,\\ f(f(x+11)) \text{ при } x\le 100.\end{cases}$

*4. Нехай Φ та Ψ – рекурсивні оператори вигляду $\boldsymbol{F}^1\times\boldsymbol{F}^1\to\boldsymbol{F}^1$. Доведіть, що існує найменша пара функцій f, g така, що $f=\Phi(f, g)$ та $g=\Psi(f, g)$, причому функції f та g є ЧРФ.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Глушков В. М.** Алгебра, языки, программирование / В. М. Глушков, Г. Е. Цейтлин, Е. Л. Ющенко. – К. : Наукова думка, 1974.

2. **Лісовик Л. П.** Теорія алгоритмів / Л. П. Лісовик, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2003.

3. **Мальцев А. И.** Алгоритмы и рекурсивные функции / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1986.

4. **Манин Ю. И.** Вычислимое и невычислимое / Ю. И. Манин. – М. : Сов. Радио, 1980.

5. **Нікітченко М. С.** Математична логіка та теорія алгоритмів : підручник / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2008.

6. **Нікітченко М. С.** Прикладна логіка / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2013.

7. **Нікітченко М. С.** Теорія алгоритмів / М. С. Нікітченко, О. С. Шкільняк, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2015.

8. **Нікітченко М. С.** Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів / М. С. Нікітченко, О. С. Шкільняк, С. С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2016. – № 2–3 – С. 73–86.

9. **Основи дискретної математики** / Ю. В. Капітонова, С. Л. Кривий, О. А. Летичевський та ін. – К. : Наукова думка, 2002.

10. **Шкільняк С. С.** Математична логіка. Приклади й задачі / С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2022.

11. **Шкільняк С. С.** Теорія алгоритмів. Приклади й задачі / С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2012.

12. **Aho A.** The Design and Analysis of Computer Algorithms / A. Aho, J. Hopcroftand, J. Ullman. – Addison-Wesley Publishing company, 1976.

13. **Cutland N.** Computability. An Introduction to Recursive Function Theory / N. Cutland. – Cambridge University Press, 1980.

14. **Gross M.** Notions sur les grammaires formelles / M. Gross et A. Lentin. – Gauthier-Villars, Paris, 1967.

15. **Hopcroft J.** Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation / J. Hopcroft, R. Motwani and J. Ullman. – 3rd Ed. – Pearson, 2006.

16. **Kleene S. C.** Mathematical Logic / S. C. Kleene. – Dower Publications, 2013.

17. **Martin-Löf Per.** Notes on Constructive Mathematics / Per Martin-Löf. – Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1970.

18. **Mendelson E.** Introduction to Mathematical Logic / E. Mendelson. – 6th Ed. – London ; N.Y. : CRC Press ; Taylor & Francis Group, 2015.

19. **Rogers H.** Theory of Recursive Functions and Effective Computability / H. Rogers. – McGraw-Hill Book Company, 1967.

20. **Shoenfield J.** Mathematical Logic / J. Shoenfield. – Addison-Wesley Publishing company, 1967.

21. **Shoenfield J.** Degrees of unsolvability / J. Shoenfield. – American Elsevier Publishing company, 1971.

З М І С Т

Навчальне видання

ШКІЛЬНЯК Степан Степанович

ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ

ПРИКЛАДИ ТА ЗАДАЧІ

Навчальний посібник

Редактор *Н. М. Земляна*
Технічний редактор *Ю. О. Куценко*

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"

Формат 60x84$^{1/16}$. Ум. друк. арк. 11,2. Наклад 100. Зам. № 223-10737.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № К2.
Підписано до друку 07.10.23

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"
Б-р Тараса Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28
e-mail: vpc@knu.ua; vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
http: vpc.knu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02