ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Кулян В. Р.
Юнькова О.О.

Математичне моделювання динаміки інвестицій

Навчальний посібник

Київ-2024

УДК 517.925.51
К26

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, проф. Є. В. Івохін,
доктор фізико-математичних наук, проф. О.М. Притоманова

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(протокол № 8 від 26 січня 2024 року)
к.т.н., доц. Кулян Віктор Романович
к.ф.-м.н., доц. Юнькова Олена Олександрівна

Математичне моделювання динаміки інвестицій. Навчальний посібник / В.Р. Кулян, О.О. Юнькова – Київ: 2024. – 67 с.

Приведено теоретичні та практичні основи побудови й аналізу математичних моделей для розв'язання прикладних задач менеджменту інвестицій, що викладаються у рамках дисципліни «Математичне моделювання динаміки інвестицій». Дисципліна є обов'язковою для студентів, що навчаються за освітньо-науковою програмою другого рівня вищої освіти «Бізнес інформатика» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки».

Для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які навчаються за освітньо-науковою програмою «Бізнес інформатика» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки».

© Кулян В.Р., Юнькова О.О., 2024

Передмова

Мета дисципліни "Математичне моделювання динаміки інвестицій" полягає у вивченні теоретичних засад і практичних підходів до застосування методів математичного моделювання та оптимізації для прийняття рішень при інвестуванні у цінні папери, оволодінні практичними навичками побудови та аналізу математичних моделей для підвищення ефективності управління процесами диверсифікації активів.

Застосування методів математичного моделювання як спосіб пізнання реальних процесів і об’єктів є одним з головних засобів досліджень. Серед основних методів моделювання виділяють *імітаційне* моделювання та *самоорганізацію математичних моделей, аналітичне* й *комп’ютерне* моделювання. Особливість імітаційного моделювання полягає в тому, що спочатку будується експериментальна модель системи, а потім виконується порівняльне оцінювання варіантів функціонування системи шляхом імітації різних ситуацій на основі цієї моделі. До методів самоорганізації моделі відносять процедури, що ґрунтуються на перебиранні великої кількості моделей-претендентів з метою вибору оптимальної з погляду заданого критерію якості.

Математичне моделювання як наукова дисципліна сформувалось у середині двадцятого століття завдяки працям учених, які досліджували процеси у складних технічних, економічних, соціальних системах тощо. За останні кілька десятків років у цих напрямах на основі ефективного застосування методів математичного моделювання отримано нові наукові результати, які дозволили кардинально змінити уявлення про процеси, що відбуваються навколо нас і за нашої участі.

Іншим важливим інструментом підвищення ефективності управління у складних системах є математичні методи оптимізації. Поєднання методів математичного моделювання та оптимізації при дослідженні складних систем дає можливість ефективно будувати конструктивні алгоритми для розв’язання прикладних задач.

При написанні роботи метою авторів було показати ефективність застосування методів математичного моделювання та оптимізації систем при розв’язанні прикладних задач фондового, фінансового ринків, банківського сектору економіки. Кожен із трьох вказаних напрямів є окремою складовою економіки, що має свої особливості, які дозволяють використовувати широкий спектр алгоритмів і методів математичного моделювання, теорії та практики оптимізації, оптимального керування складними системами.

Вступ

Характерною рисою сучасної прикладної науки є широке використання математичних методів, що у поєднанні з глибоким аналізом систем дає змогу ґрунтовно досліджувати процеси та явища, які супроводжують економічний і соціальний розвиток, прогнозувати їх поведінку у майбутньому. Нинішнє розуміння прикладних проблем і задач економіки та фінансів як прикладних дисциплін підтверджує доцільність застосування методів математики для їх формалізації та розв'язання. Прикладний характер і широкий спектр задач, що виникають у цих галузях, дає хорошу можливість для застосування методів математичного моделювання та оптимізації при прийнятті рішень. На особливу увагу заслуговує питання про методи побудови моделей та їх застосування при розв'язанні задач.

Задачі з побудови й дослідження математичних моделей є надзвичайно цікавими, важливими, але і складними, тому проблема математичної формалізації процесу є однією з найбільш актуальних і складних. При цьому варто притримуватись таких простих правил:

- не ускладнювати явище, шукати найпростіше пояснення з можливих;
- не змішувати здоровий глузд із так званою "очевидністю", оскільки вона, швидше за все, є помилковою;
- удосконалювати володіння математичним апаратом, намагаючись у математичних конструкціях бачити потенційну можливість слугувати моделлю тієї чи іншої реальності;
- застосовувати аналогії, але бути обережним, не наділяти реальність тим, чого в ній немає;
- більш часто звертатись до класики, оскільки у невідоме краще рухатись із випробуваною зброєю;

- усе піддавати сумніву, але не заперечувати цілком, оскільки значна його частина написана розумними людьми;
- не створювати собі ідола, поважати авторитети, але не ходити в них сліпо на повідку;
-ураховувати, що наука зменшує досвід швидкоплинного життя.

Арсенал методів математичного моделювання надзвичайно широкий і дозволяє моделювати процеси лінійні й нелінійні, неперервні й дискретні, детерміновані та стохастичні тощо. Тому від дослідника залежить, наскільки ефективними будуть його кроки в пізнанні реального світу.

Розділ 1. Інформаційні підходи та структурне моделювання на основі спостережень

1.1. Інформаційні підходи до побудови математичних моделей

У побудові математичних моделей найбільше визнання отримали:

- методи імітаційного моделювання, побудовані на основі глибокого вивчення об'єкта. Один з базових принципів цього підходу полягає в тому, що дослідник може вказати на основні закономірності функціонування об'єкта;
- методи самоорганізації моделі. Згідно з ними, здійснюється цілеспрямоване перебирання багатьох моделей-претендентів різної складності на основі різних критеріїв.

У класичному розумінні складність моделі визначається кількістю відмінних від нуля коефіцієнтів, які повинні бути оцінені.

Критерій перебирання математичних моделей називають *зовнішнім*, якщо він побудований на основі деякої додаткової інформації, наприклад нових даних, які не враховували при оцінюванні моделей.

Критерій мінімуму середньоквадратичної похибки, який часто застосовують у математичній статистиці та розраховують у всіх точках набору даних, називають *внутрішнім*. Очевидно, що він не може бути використаний для самоорганізації моделей. За внутрішнім критерієм чим більш складною є модель, тим вона є більш точною (основна особливість імітаційного моделювання).

Зовнішній критерій можна отримати, якщо, наприклад, частину даних використовувати лише для порівняння між собою моделей-претендентів. Такий зовнішній критерій називають *критерієм регулярності*.

Імітаційне моделювання можна визначити як сукупність методів, побудованих на застосуванні фізичних моделей, причому множину змінних, область моделювання та рівняння всіх елементів системи вказує дослідник на основі своїх уявлень про об’єкт.

Наведемо основні властивості фізичної й нефізичної моделі.

Фізична модель:

- має повний інформаційний базис;
- відображає механізм дії об’єкта;
- пов’язує миттєві значення змінних;
- використовує істинні опорну функцію і клас рівнянь;
- містить коефіцієнти, які можуть бути інтерпретовані фізично.

Фізичну модель можна побудувати двома шляхами:

- за допомогою глибокого вивчення фізичного механізму функціонування об’єкта – підхід, який отримав назву *імітаційне моделювання*;
- за допомогою перебирання моделей при малих збуреннях – підхід, що отримав назву *самоорганізація моделей*.

Нефізична модель:

- не обов’язково містить повний інформаційний базис, частина факторів може бути відсутня або замінена іншими, корельованими з ними змінними;
- не відображає явно механізму функціонування об’єкта;
- може пов’язувати одночасно миттєві та осереднені значення факторів з різних інтервалів осереднення;
- опорна функція, яка відображає точну фізичну закономірність, може бути апроксимована іншою досить складною функцією (або диференціальним рівнянням, серед розв’язків якого є зручна апроксимуюча функція); часто в таких випадках використовують лінійні різницеві рівняння, оскільки серед їх розв’язків є й нелінійні функції, зручні для апроксимації нелінійних залежностей;
- не завжди легко знайти фізичну або логічну інтерпретацію.

Зазначимо, що застосування методів імітаційного моделювання доцільно лише для простих, зрозумілих об’єктів і процесів, коли однозначно можна інтерпретувати їх властивості. Прикладом може бути рух планет Сонячної системи, де на основі фізичної моделі з досить високою точністю можна прогнозувати появу сонячного затемнення тощо. Складніші системи потребують комбінованого застосування імітаційного моделювання та самоорганізації моделі. При комбінованому підході для елементів, механізм функціонування яких зрозумілий, рівняння руху може бути складено фахівцем з даної предметної області, а для ймовірнісних елементів модель може бути побудована на основі експериментальних даних за допомогою методів самоорганізації та комп’ютерного моделювання.

Якщо імітаційне моделювання та самоорганізацію моделей розглядати з погляду конкуруючих математичних апаратів пошуку закономірностей, то можна зазначити, що перше має переваги при моделюванні простих систем. Для систем складної структури взаємозв’язків перевага буде на боці методів самоорганізації моделей, тобто комп’ютерного перебирання великої кількості моделей-претендентів за зовнішніми критеріями. Часто моделі, отримані в результаті самоорганізації, використовують для розв’язання таких задач:

- відновлення закономірності за набором даних – задача ідентифікації повної фізичної моделі;
- довготермінового кількісного прогнозування процесів за допомогою нефізичних моделей.

Важливо забезпечити об’єктивний характер отриманих закономірностей. Для цього при довготерміновому кількісному прогнозуванні необхідно зменшувати обсяг апріорної інформації. Набір звичайних спостережень, у якому є значення вхідних і вихідних даних об’єкта в процесі нормальної роботи, клас рівнянь і можливий вигляд опорних функцій, серед яких необхідно шукати модель, узгоджені зовнішні критерії вибору моделі – це та інформація, яка необхідна для застосування методів самоорганізації моделі.

Іншим важливим напрямом при побудові математичних моделей є розробка інтерактивних алгоритмів, які використовують режими експертного оцінювання. Цей напрям має як позитивні, так і негативні аспекти, дослідження та аналіз яких потребують застосування нових оригінальних підходів.

Отже, перш ніж обрати стратегію побудови математичної моделі, необхідно:

1) вибрати основну ідею моделювання: діяти за правилом "чим більш складна модель, тим вона більш точна" або визнати існування моделі оптимальної складності та оптимальної області моделювання; у першому випадку необхідно застосувати імітаційний метод, у другому – метод самоорганізації моделі;

2) визнати основним той чи інший критерій вибору моделі оптимальної складності; у цьому випадку на перший план виступає властивість несуперечливості математичної моделі.

Суперечливий характер моделі можна виявити, перевіривши її на різних наборах даних. Несуперечливою є модель, яка, будучи отримана на деякій кількості даних, на всій множині даних дозволяє отримати задовільний результат. Якщо ж модель на одній частині експериментальних даних дозволяє отримати один результат, а на іншій – абсолютно відмінний, то така модель є суперечливою. Відомі інформаційні критерії Акаіке [3,4], критерій емпіричного руху Вапника [1,2], будучи зовнішніми, дозволяють знайти оптимальну для даного класу фізичну модель при досить малому рівні збурень. Однак при цьому не гарантується несуперечливість моделей, отриманих за низкою експериментальних даних. Відомий метод групового урахування аргументів вирізняється тим, що зовнішнім критерієм є критерій несуперечливості моделі.

Вимога несуперечливості може бути сформульована за допомогою різних математичних критеріїв, одним з яких є *критерій мінімуму зміщення*:

$$n_{зм}{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_A - x_B)_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_{\phi_i}^2},$$

де m – вибрана кількість розбиттів множини даних W; x_A – вихід моделі, оцінка коефіцієнтів якої отримана на вибірці A; x_B – вихід моделі, оцінки коефіцієнтів якої отримані на вибірці B, причому $A \cap B = \varnothing$ та $A \cup B = W$; n – кількість точок у повній вибірці; x_ϕ – вихід моделі, оцінка коефіцієнтів якої отримана на повній вибірці.

Недоліком цього критерію є неоднозначність вибору моделі. Даний недолік може бути усунутий, якщо використати додаткові критерії.

Питання захищеності моделі від збурень, як і питання несуперечливості та об’єктивності, при імітаційному моделюванні не ставиться. Ці властивості є особливістю самоорганізації моделей, основною з яких є моделювання за неповними або неточними даними. При самоорганізації моделей широке застосування знайшла теорія кодування сигналів Шеннона, яка відповідає правилам планування експерименту, тобто оптимальним планам отримання експериментальних даних для моделювання [5]. Головною ознакою захищеності алгоритмів методу групового урахування аргументів від збурень є те, що процес комп’ютерного розв’язання задачі дозволяє поступово ускладнювати модель і межі області моделювання тільки до тих пір, доки не починає погіршуватись результат. Мінімальне значення критерію вказує на найбільш захищену від похибок модель.

При самоорганізації моделей вибирається структура, найближча до оптимальної для кожного рівня співвідношення сигнал/збурення, тобто при самоорганізації автоматично враховуються інформаційні властивості початкової вибірки даних. Якщо дані зашумлені або неповні, то вибирається менш складна оптимальна нефізична модель. Нефізичні прогнозуючі моделі можуть бути побудовані тільки за допомогою методів самоорганізації.

При самоорганізації прогнозуючих моделей виходять із того, що початкові дані є сумою регулярного сигналу й випадкового збурення. Метою є виділення регулярної складової та її прогнозування. Будемо вважати, що сигнал і збурення незалежні, тоді незалежними будуть також їх кореляційні функції:

$$K_2(\tau) = K_1(\tau) + K_{\xi}(\tau).$$

Пряме перетворення є розрахунком кореляційних функцій

$$q_2(t) \to K_2(\tau),\ \ q_1(t) \to K_1(\tau),\ \ \xi(t) \to K_{\xi}(\tau)$$

за допомогою розв’язання системи нелінійних рівнянь. Обернене перетворення має вигляд

$$K_2(\tau) \to q_2(t),\ \ K_1(\tau) \to q_1(t),\ \ K_{\xi}(\tau) \to \xi(t)\,.$$

Функції $q_2(t)$ та $K_2(\tau)$ розраховуються за таблицями початкових даних. Про $K_\xi(\tau)$ відомо, що вона є монотонною функцією часу:

$$K_\xi(\tau) = N\ell^{-\frac{\tau}{\tau_n}}.$$

При достатньо великому зашумленні має місце $K_\xi(\tau) = K_2(\tau),$ що дозволяє визначити сталу часу $\tau_n.$ Таким чином, для вибору функції $K_\xi(\tau)$ необхідно знайти її максимальне значення $N.$ Підбір величини N виконується згідно з критерієм точності короткотермінового прогнозу:

$$\Delta^2(c) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(q_{ф} - q_{пр})_i^2}{\sum_{i=1}^{N}(q_{пр} - \overline{q_{ф}})_i^2} \to \min_N.$$

У цьому виразі $q_{ф}(t_i)$ – фактичне значення $q_2(t_i)$; $q_{пр}(t_i)$ – чистий сигнал $q_1(t_i)$.

Схема розрахунків включає такі кроки:

1. Визначити функції $K_2(\tau).$

2. Задати ряд значень $n.$

3. Побудувати відповідний ряд функцій $K_1(\tau),$ $K_\xi(\tau).$

4. Знайти обернене перетворення $K_1(\tau) \to q_1(t).$

5. Визначити значення критерію точності короткотермінового прогнозу.

6. Вибрати оптимальне значення N і, таким чином, побудувати прогноз $q_{пр}(t) = q_1(t)$ при $N = N_{опт}.$

Наведену вище процедуру називають *стійким до збурень методом групового урахування аргументів*.

У теорії розпізнавання відомі алгоритми розподілу множин зображень, заданих у n-вимірних просторах ознак на компакті, які називають *кластерами*. При самоорганізації об’єктом перебирання можуть бути як рівняння, так і кластеризації. При цьому виявляється, що в обох випадках збільшення неточності й неповноти даних приводить до вибору більш простих як закономірностей, так і кластеризацій.

Задачі багатокритеріального вибору, зазвичай, розв'язують за допомогою послідовного відбору кращих моделей за кількома критеріями. Метод групового урахування аргументів може використовувати критерії як основні, так і додаткові. До основних критеріїв відносять:

- критерій несуперечливості (мінімуму зміщення) – для ідентифікації та побудови короткотермінового прогнозу;
- критерій прогнозу балансів – для довготермінових прогнозів.

Як додаткові критерії розглядають:

- критерій регулярності – середньоквадратична похибка, розрахована на окремій вибірці даних;
- критерій точності багатокрокового прогнозу;
- критерій точності короткотермінового прогнозу – середньоквадратична похибка, розрахована на останніх точках вибірки даних;
- критерій гладкості.

Згідно з класичними означеннями аналізу систем, система може бути визначена як мережа компонентів, пов'язаних між собою з метою отримання нової загальної властивості й описана рівняннями або множиною рівнянь, поєднаних логічними зв'язками. Задачею ж об'єктивного системного аналізу є відновити рівняння компонент і вказати, які з них мають бути включені в систему.

Відповідно до проблем об'єктивного системного аналізу загальна структура алгоритму довготермінового кількісного прогнозування має такий вигляд:

1. Вибір множини початкових даних.
2. Об'єктивний системний аналіз і побудова сценаріїв короткострокового прогнозу.
3. Кількісний і спектральний аналіз даних для виділення гармонічного тренду та стаціонарного залишку.

Навівши означення системи, зазначимо, що при розгляді складних систем потребується уточнення. Будемо називати *системою* деякий об'єкт дослідження й моделювання, який описується найбільш несуперечливою сукупністю рівнянь. Кількість рівнянь, що утворюють модель системи, може бути визначена за допомогою мінімуму критерію зміщення.

В алгоритмі об’єктивного системного аналізу передбачено перебирання системи рівнянь здійснювати згідно з критерієм мінімуму зміщення. Структура кожного рівняння вибирається у площині двох критеріїв: мінімуму зміщення й точності багатокрокового прогнозу. У результаті об’єктивно й однозначно можна визначити кількість елементів, які входять до системи, множину вхідних і вихідних змінних, межі області моделювання. Тільки у простих детермінованих системах можна довільно перетворювати систему рівнянь, виключати або вводити проміжні змінні, причому несуперечливість системи зберігається. У складних же системах декомпозиція недопустима, оскільки тільки система оптимальної складності є найбільш несуперечливою. Межі області моделювання можна вибирати згідно з мінімумом критерію зміщення. При цьому можна знайти ефективну множину вихідних даних і суттєву множину вхідних.

Досвід показує, що не всі змінні можуть бути прогнозовані однаково добре. Це залежить від статистичних особливостей [6]. Добре прогнозовані змінні покладають за провідні й далі на їх основі будують прогнози всіх інших змінних.

Розв’язки рівнянь, отриманих згідно з алгоритмом об’єктивного системного аналізу, дозволяють будувати короткотерміновий прогноз провідних змінних. Інші ж змінні прогнозують залежно від попередніх значень провідних змінних і часу.

1.2. Структурне моделювання за вибірками спостережень

Розглянемо задачу відновлення залежності

$$u = h(v), v \in V \qquad (1.2.1)$$

за вибіркою спостережень величин u, v. У випадку, коли множина V нескінченна, а $(x, y)-$ пара значень змінних u та v відповідно, підтвердити (1.2.1) можна, перевіривши нескінченну кількість тверджень

$$\forall (x, y), x \in V, y = h(x). \tag{1.2.2}$$

Очевидно, що без залучення додаткової інформації (окрім тієї, що міститься у вибірці спостережень) це неможливо. Твердження (1.2.1) доводиться розв'язувати у прикладних задачах екстраполяції, прогнозування, керування. У цьому випадку (1.2.1) є робочою гіпотезою, для якої ніякі ймовірнісні оцінки якості екстраполяції або прогнозу в заданих умовах не можуть бути отримані. Ще складніше обґрунтувати твердження

$$u = h(v) + \eta, v \in V, \tag{1.2.3}$$

де $\eta-$ випадкова величина, нехай навіть із нульовим математичним сподіванням і скінченною дисперсією.

Розглянемо деякі додаткові умови для того, щоб моделі-гіпотези (1.2.1) та (1.2.3) могли бути використані у прикладних задачах.

Означення 1. Параметричну сім'ю відображень f, які залежать від параметра Θ, називають структурою відображення.

Означення 2. Структуру f називають незміщеною оцінкою відображення [1] h, якщо $f(v, M[\hat{\Theta}]) = h(v), v \in V$, де $\hat{\Theta}-$ будь-яка незміщена оцінка параметра Θ; $M-$ оператор математичного сподівання, у якому осереднення здійснюється за всіма можливими реалізаціями випадкової величини η.

Якщо при деякому значенні Θ_0 параметра Θ виконується рівність $h(v) = f(v, \Theta_0), v \in V,$ то структура f є незміщеною оцінкою h. Нехай $F-$ деякий клас структур, $V-$ вимірювана обмежена множина в просторі R^m, $\mu-$ міра на R^m така, що $\mu V = 1$. У цьому випадку зміщення структури $f \in F$ можна вимірювати за допомогою величини

$$S_v^2(f) = \left\| f(v, M[\hat{\Theta}]) - h(v) \right\|_v^2, \tag{1.2.4}$$

де

$$\|g(v)\|_v = \left[\int_v |g(v)|^p \, d\mu \right]^{\frac{1}{p}}, \; p \ge 1.$$

Сформулюємо задачу структурного моделювання за вибірками спостережень, яка може бути розв'язана за допомогою методу групового урахування аргументів.

Нехай виконано такі передумови:

- існує єдина залежність h між m-вимірною вхідною $v = (v_1, v_2, ... v_m)$ і вихідною $u = h(v), v \in V$ величинами;
- заданий клас структур відображень F;
- задана детермінована $(n \times m)$-вимірна матриця X значень вхідної величини в n точках;
- задано n-вимірний вектор Y спостережень вихідної величини.

Вихідна величина при цьому спостерігається з похибкою $\xi = (\xi_1, \xi_2, ... \xi_n)^T$, величини $\xi_i, (i = \overline{1, n})$ випадкові, незалежні, однаково розподілені, з нульовим математичним сподіванням і скінченною дисперсією.

За сформульованих умов необхідно розв'язати одну з таких задач:

- знайти структуру $f \in F$, яка є незміщеною оцінкою відображення h;
- знайти структуру, яка є ефективною в класі F оцінкою відображення h.

Першу задачу можна розв'язати як задачу про побудову структури фізичної моделі, другу – як задачу про побудову моделі, яка б забезпечувала найкращий прогноз.

Слід також зазначити, що за деяких умов незміщена оцінка відображення h може виявитись неефективною в класі F [6,8].

Приклад. Нехай $v - (v_1, v_2, v_3)$. Клас F визначено як клас, що складається зі структур:

$$f_1 = a_1 v_1, \quad f_{13} = a_{13}^1 v_1 + a_{13}^3 v_3,$$

$$f_2 = a_2 v_2, \quad f_{23} = a_{23}^2 v_2 + a_{23}^3 v_3,$$

$$f_3 = a_3 v_3, \quad f_{123} = a_{123}^1 v_1 + a_{123}^2 v_2 + a_{123}^3 v_3,$$

$$f_{12} = a_{12}^1 v_1 + a_{12}^2 v_2.$$

Покладемо, що $h(v_1, v_2, v_3) = v_3 - v_1$. Тоді, очевидно, структура f_{13} є незміщеною оцінкою відображення, оскільки

$$M[\hat{a}_{13}^{1}] = -1, M[\hat{a}_{13}^{3}] = 1,$$

якщо тільки оцінки $\hat{a}_{13}^{1}$ та $\hat{a}_{13}^{3}$ є незміщеними. Однак незміщеною оцінкою відображення h є також структура f_{123}, оскільки

$$M[\hat{a}_{123}^{1}] = -1, M[\hat{a}_{123}^{2}] = 0, M[\hat{a}_{123}^{3}] = 1,$$

тому

$$f_{123}(v, M[\hat{a}_{123}]) = v_3 - v_1.$$

Більш складною є задача про побудову ефективної структури в класі F. Величина

$$R_v^2(f) = M[\left\| f(v, \hat{\Theta} - h(v) \right\|_v^2]$$

може мати різні значення для різних множин V. Крім того, вона є залежною від дисперсії похибки спостереження вихідної величини. Відомо, що якщо множина V збігається з множиною спостережуваних точок, то при досить великих дисперсіях похибки ефективною виявляється структура, яка має меншу кількість параметрів, ніж незміщена. У нашому випадку це одна зі структур – f_1, f_2 або f_3.

Розглянемо питання про можливі критерії мінімізації похибки прогнозу та загальну структуру зовнішніх критеріїв. Позначимо

$$X = \left(\frac{X_A}{X_B}\right), Y = \left(\frac{Y_A}{Y_B}\right),$$

де $X_A, X_{B,} Y_A$ та Y_B $(n_A \times m), (n_B \times m), (n_A \times 1), (n_B \times 1)$ – матриці відповідних розмірностей; n_A та n_B – натуральні числа, такі, що $n_A + n_B = n.$

Інформація, яка міститься в матрицях $X\,(n \times m)$ та Y $(n \times 1))$ спостережень відповідно m вхідних і вихідної величини, очевидно, є недостатньою для обчислення інтеграла (1.2.4) по області V. Величина $R_v^2(f),$ з огляду неможливості її знаходження в цих умовах, не може бути критерієм якості структури. Для вибору структури, як сказано раніше, необхідно розглянути інші, зовнішні критерії. Характерною особливістю усіх зовнішніх критеріїв є те, що всі вони так чи інакше є оцінкою невиправданості прогнозів.

Значенням зовнішнього критерію у методі групового урахування аргументів є норма нев’язки між вихідною величиною, інформація про яку отримана тільки на основі вибірки $(X_A;Y_A)$, і вихідною величиною, інформація про яку отримана на основі вибірки $(X_B;Y_B)$. Назвемо множину точок, що містяться у вибірці $(X_A;Y_A)$, множиною A, а точок, що містяться у вибірці $(X_B;Y_B)$, – множиною B. У цих термінах зовнішні критерії можна розглядати як міру того, наскільки модель, побудована на основі множини A, прогнозує те, що відбувається на множині B.

Серед найбільш відомих зовнішніх критеріїв виділяють критерій регулярності та критерій мінімуму зміщення. Перший можна розглядати як найбільш простий спосіб оцінювання ефективності структури моделі. Розглянемо ці критерії більш детально.

Нехай оцінюється якість структури математичної моделі f. Знайдемо оцінку за допомогою методу найменших квадратів параметра Θ на основі інформації, що міститься в множині A. Позначимо її Θ_A. Розглянемо вектор нев’язок моделі $f(\cdot,\Theta_A)$ на множині B. Він дорівнює $Y_B - F(X_B,\Theta_A)$,

де

$$F(X_B,\Theta_A)=\begin{pmatrix} f(x_{n_{A+1},1},x_{n_{A+2},2},\dots,x_{n_{A+1},m},\Theta_A) \\ f(x_{n_{A+2},1},x_{n_{A+2},2},\dots,x_{n_{A+2},m},\Theta_A) \\ \dots \\ f(x_{n,1},x_{n,2},\dots,x_{n_A,m},\Theta_A) \end{pmatrix}.$$

Критерієм регулярності є евклідова норма вказаного вектора нев’язки

$$\Delta^2(B)=(Y_B-F(X_B,\Theta_A))^T(Y_B-F(X_B,\Theta_A)).$$

Значення критерія мінімуму зміщення може бути визначено за допомогою формули

$$n_{зм}^2=(F(X,\Theta_A)-F(X,\Theta_B))^T(F(X,\Theta_A)-F(X,\Theta_B)),$$

де Θ_B -МНК – оцінка параметра Θ, отриманого на множині B.

Проаналізуємо проблеми, які можуть виникати при конструюванні зовнішніх критеріїв. Інтерполяційний поліном, побудований на основі функції, заданої таблично, є функцією однозначною, проходить через усі експериментальні точки й відповідає усім формальним вимогам. Однак, при нульовій дисперсії похибки спостереження вихідної величини інтерполяційний поліном важко застосовувати для розв'язання задачі прогнозування. Це вказує на те, що точність апроксимації набору $(X;Y)$ не може бути критерієм якості моделі. У роботі [9] ця проблема названа проблемою найкращої регресії. У роботі [2] указується, що досить складна модель погана, оскільки вона поряд із суттєвими сторонами об'єкта, що моделюється, апроксимує також похибки спостережень. Під складністю моделі у даному випадку будемо розуміти розмірність вектора Θ. Спрощена модель погана, оскільки вона не досить добре апроксимує важливі сторони об'єкта моделювання. Таким чином, критерій має вказувати на розумні межі компромісу між складністю моделі й точністю апроксимації початкових даних. При порівнянні математичних моделей часто виникають проблеми оцінювання моделей з векторами параметрів, які мають різні розмірності. У роботі [1] розглядається процедура, яка передбачає таке: на множині F задана структура, яка не є структурою моделі, що розбиває її на підмножини, у кожній з яких розмірність вектора параметрів не перевищує заданої величини. У кожній з підмножин вибирають найкращу модель за значенням критерія

$$J(\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-f_j(x_i,\Theta_j))^2,\ \ j\in J,$$

де $\alpha-$ вектор, компонентами якого є номер структури моделі та параметр $\Theta_j:\alpha=(j,\Theta_j)$. Надалі серед них вибирається найкраща модель на основі критеріїв другого рівня. Як критерії другого рівня використовують спеціальні оцінки середнього ризику або оцінки, отримані за допомогою процедури "рухомий контроль", які становлять осереднений критерій регулярності, запропонований Д. Алленом у 1974 р. [9].

Продовжимо розгляд загальної задачі структурного моделювання на основі спостережень. Як і раніше, розглядатимемо деякий клас F, що містить структури $f_i, i \in I,$ модель шукатимемо у вигляді $u = f(v, \Theta), v \in V.$ Причому $f \in F -$ векторний параметр, величина v є векторною, $u -$ скаляр. Уся апріорна інформація полягає в тому, що за деяких значень $v \in V$ спостерігаємо $u,$ на яку накладено адитивний шум. Будемо вважати, що шум – випадкова величина з нульовим математичним сподіванням і скінченною дисперсією. Окрім того, значення шуму в різних точках спостереження є незалежними. Вибірка спостережень записана у вигляді двох матриць: X та Y розмірністю $n \times m$ та $n \times 1$, відповідно. Тут $n -$ кількість спостережень, рядки матриці $X -$ вектори значень змінної v; елементи матриці $Y -$ відповідні значення зашумленої змінної $u.$ Разом з тим відомо, що існує функція $h(\cdot)$ така, що $u = h(v), v \in V.$ При цьому ніде не вимагається, щоб функція h мала якесь відношення до класу $F.$ Можливо, що у класі F не існує такої структури f, що при деякому значенні параметра Θ виконується співвідношення $h(v) = f(v, \Theta), v \in V.$ Для цих умов визначена ефективна оцінка для $h,$ або просто ефективна структура. Причому визначення дано таким чином, що для будь-якої непорожньої підмножини класу F знайдеться як мінімум одна ефективна структура. За таких припущень задача моделювання полягає в пошуку ефективної структури в класі $F,$ а також у оцінюванні параметра Θ для моделі, яка має ефективну структуру. Оцінкою ефективності структури є зовнішні критерії. Це дозволяє задачу математичного моделювання сформулювати так: необхідно знайти таку структуру в класі F, на якій досягається найменше значення зовнішнього критерія. Формально це можна записати так: нехай $CR(f)$ є значенням зовнішнього критерія, яке він отримує на структурі $f \in F.$ Необхідно знайти таку структуру $f^*(F),$ щоб $CR(f^*) = \inf(CR(f_i)).$

Варто зазначити, що для будь-якого класу структур F цю задачу можна ефективно розв'язати, тому виділимо випадок, коли структури $f_i \in F, i \in I$ лінійні за параметрами Θ. Умова лінійності за параметром не є ні необхідною, ні достатньою для застосування до такої задачі методів самоорганізації систем. З іншого боку, можливі класи структур F, лінійні за параметром, можуть бути різноманітними й не для кожної можна побудувати ефективний алгоритм. Це стосується, у першу чергу, більшості нескінченних класів F, а також скінченних, але таких, що містять велику кількість елементів.

Зважаючи на сказане вище, покладемо, що $f_i \in F, i \in I$ можна взаємно однозначно поставити у відповідність матрицю канонічної форми $D = D(f)$ відповідного квадратичного критерія. Задача моделювання тепер може бути сформульована так: необхідно знайти структуру f^* таку, що

$$Y^T D(f^*)Y = \inf_{i \in I} Y^T D(f_i)Y.$$

Розглянемо один із простих гармонічних алгоритмів розв'язання поставленої задачі при побудові моделей часових рядів. Клас структур $F = \{f_m\}$ складається з моделей вигляду

$$f_m(t, a, b, \omega) = \sum_{i=1}^{m} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t), \qquad (1.2.5)$$

де t – час; $a = (a_1, a_2, ..., a_m)^T, b = (b_1, b_2, ..., b_m)^T, \omega = (\omega_1, \omega_2, ...\omega_m)^T$ – параметри моделі.

Покладемо, що часовий ряд задано його значеннями $x_1, x_2, ..., x_n$ у рівновіддалених вузлах.

Побудувати модель вигляду (1.2.5) означає вибрати структуру моделі (у нашому випадку – число m) і оцінити параметри. Згідно з алгоритмом, описаним у [2], за допомогою комбінаторних алгоритмів здійснюється перебирання всіх структур класу F, краща з яких вибирається за зовнішнім критерієм. Зазвичай це критерій регулярності

$$\Delta^2(B) = \sum_{k=n_A+1}^{n} [x_k - f_m(k, \hat{a}, \hat{b}, \hat{\omega})]^2,$$

де $n_A < n$ – кількість точок у множині A; $n_B = n - n_A$ – кількість точок у множині B; $\hat{a}, \hat{b}, \hat{\omega}$ – оцінки параметрів моделі, отримані на множині A. Головним для реалізації описаного алгоритму є питання про оцінювання параметрів a, b, ω. Слід при цьому зауважити, що безпосередня мінімізація функціонала

$$RSS(A) = \sum_{k=1}^{n_A} [f_m(k, a, b, \omega) - x_k]^2$$

за параметрами a,b,ω є нетривіальною задачею, оскільки параметр ω входить у функцію f_m нелінійно.

1.3. Метод нейронних мереж у задачах математичного моделювання

У випадку, коли порядок математичної моделі точно не відомий або поведінка об'єкта керування описується нелінійною моделлю, застосовують нейромережевий підхід.

Нехай дискретний об'єкт керування у просторі станів описується математичною моделлю:

$$x_{k+1} = F(x_k) + Bu_k \,, \qquad (1.3.1)$$

$$y_{k+1} = C^T x_k \,, \qquad (1.3.2)$$

де $x_k \in R^n$ – вектор стану системи; $u_k \in R^s$, $y_k \in R^m$ – вимірювані вектори входу, виходу об'єкта; $F(x)$ – невідома векторна функція; C та B – матриці параметрів; $k = 0,1,2...$ – дискретні моменти часу.

У випадку, коли функція $F(x)$ у рівнянні (1.3.1), а також матриця C у (1.3.2) невідомі, застосовують нейромережевий підхід, а саме мережу персептронного типу. Таку мережу можна розглядати як нелінійну функцію перетворення вектора входу на вектор виходу.

Багатошаровий персептрон складається з вихідного, вхідного, а також одного або кількох проміжних шарів нейронів. Інформація від виходу шару $p+1$ розповсюджується згідно з правилом:

$$y^{p+1} = f^*(S^{p+1}) \in R^{N_{p+1}} \,, \qquad (1.3.3)$$

де $p+1$ – номер шару; N_{p+1} – розмірність (кількість нейронів) шару $p+1$; f^* – нелінійна активаційна функція шару $p+1$; y^{p+1} – вектор виходу шару $p+1$; S^{p+1} – вектор потенціалів нейронів шару $p+1$, який обраховується за формулою

$$S^{p+1} = w^{p+1} y^p + b^{p+1}, \qquad (1.3.4)$$

де w^{p+1} – матриця вагових коефіцієнтів зв'язків шару p із шаром $p+1$; y^p – значення нейронів шару p; b^{p+1} – вектор порогових значень шару $p+1$.

Якщо як вихід мережі розглядати вектор виходу об’єктів керування в момент k, а на вхід мережі подавати спостереження за r попередніх кроків $k-1, k-2, ..., k-r$, то нейронна мережа (1.3.3), (1.3.4) буде моделлю об’єкта керування у системі координат вхід-вихід:

$$\hat{y}_k = f^N(y_{k-1}, y_{k-2}, ... y_{k-r}, u_{k-1}, u_{k-2}, ... u_{k-r}) .$$

Тоді процес ідентифікації параметрів цієї комп’ютерної моделі зводиться до навчання мережі, тобто налаштування матриць вагових коефіцієнтів w^p зв’язків між сусідніми шарами. Для навчання мережі часто застосовують методи градієнтного спуску. У процесі навчання мінімізується функція середньоквадратичної похибки:

$$\|y_k - \hat{y}_k\|^2 \to \min, \ k \to \infty ,$$

де y_k – вихід об’єкта, $\hat{y}_k$ – оцінка виходу моделі.

Відомо, що нейронна мережа з одним проміжним шаром може описувати функціональну залежність будь-якого порядку складності. Тому нейромережевий підхід може бути застосований як до лінійних, так і до нелінійних об’єктів керування. Однак варто зазначити, що за його допомогою неможливо отримати явний вигляд шуканої математичної моделі (1.3.1) і числові значення параметрів. Математична модель у цьому випадку є комп’ютерним образом поліноміальної апроксимації оцінюваної функції, яка на основі заданої вхідної інформації генерує оцінку вихідного вектора об’єкта керування.

1.4. Про еволюцію задач моделювання динаміки систем

Опис поведінки об’єктів за допомогою диференціальних рівнянь запозичений із класичної механіки. Прикладом може бути модель руху твердого тіла під дією сили F уздовж прямої. Цей рух може бути описаний за допомогою другого закону Ньютона

$$F = ma = \frac{d^2 x}{dt^2},$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ m\dot{x}_2(t) = F, \end{cases}$$
$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_1(t_1) = x_{11},$$
$$x_2(t_0) = x_{20}, \quad x_2(t_1) = x_{21},$$
$$t \in [t_0, t_1].$$

Розглянемо взаємозв'язок між вхідною величиною $u = u(t)$ і вихідною $y = y(t)$, що описується рівнянням

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^n u}{dt^n} + \ldots + b_{n-1} \frac{d^n u}{dt} + b_n u + c,$$

разом з початковими умовами

$$\frac{d^i y(0)}{dt^i}, i = 0,1,\ldots n-1.$$

У лінійному випадку коефіцієнти a_i, b_j не залежать від u, y та їх похідних. Якщо, окрім того, вони не залежать від часу, то маємо рівняння зі сталими коефіцієнтами. Це найбільш простий випадок. Якщо ці коефіцієнти залежать від часу, то рівняння називається *лінійним зі змінними коефіцієнтами*, або *лінійним нестаціонарним*. Якщо будь-які з a_i або b_j залежать від u, y або їх похідних, то об'єкт називають *нелінійним*.

Основна відмінність між лінійними й нелінійними об'єктами полягає в тому, що для останніх не виконується принцип суперпозиції. Згідно з цим принципом, якщо y_1 – вихідний сигнал, обумовлений входом u_1, а y_2 – вихідний сигнал, обумовлений входом u_2, то при подаванні на вхід об'єкта сигналу $\alpha u_1 + \beta u_2$ на виході спостерігається $\alpha y_1 + \beta y_2$.

Розглянемо приклад. Лінійне диференціальне рівняння

$$\dot{y} + ay = u$$

перепишемо у вигляді

$$\dot{y}_1 + ay_1 = u_1,$$
$$\dot{y}_2 + ay_2 = u_2.$$

Додамо ці рівняння:

$$(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + a(y_1 + y_2) = u_1 + u_2.$$

Покладемо $u_1 + u_2 = u_3, y_1 + y_2 = y_3$. Очевидно, що $\dot{y}_1 + \dot{y}_2 = \dot{y}_3$. Тоді $\dot{y}_3 + ay_3 = u_3$, що підтверджує справедливість принципу суперпозиції для лінійних систем.

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння $\dot{y}+ay^3=u.$ Запишемо його у вигляді

$$\dot{y}_1+a{y_1}^3=u_1,$$

$$\dot{y}_2+a{y_2}^3=u_2.$$

Звідси $(\dot{y}_1+\dot{y}_2)+a(y_1^3+y_2^3)=u_1+u_2.$ Якщо покласти $u_1+u_2=u_3,$ то $(y_1^3+y_2^3)\neq(y_1+y_2)^3=y_3^3$ та $\dot{y}_3+ay_3^3\neq u_3.$

У лінійному випадку сума сигналів підкоряється тому ж диференціальному рівнянню, що і вхідні сигнали, а у нелінійному випадку це не справджується. Принцип суперпозиції виконується як для початкових умов (загальний розв'язок), так і для вхідних сигналів (частинний розв'язок). Також принцип суперпозиції виконується для лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Серед основних етапів еволюції задач математичного моделювання динамічних систем можна виділити такі:

1. Задача про побудову загального розв'язку диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь:

$$\dot{y}=f\left(x,y\right).$$

2. Побудова розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння або системи рівнянь:

$$\dot{y}=f\left(x,y\right),y(x_0)=y_0.$$

3. Побудова розв'язку крайової задачі:

$$\dot{y}=f\left(x,y\right),y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1.$$

4. Задача варіаційного числення

$$J\left(y\right)=\int\limits_{x_0}^{x_1}f\left(x,y,\dot{y}\right)dx\to\min_y,$$

$$y\left(x_0\right)=y_0,$$
$$y\left(x_1\right)=y_1,$$

яка полягає у побудові функції $y(x)$, що мінімізує критерій якості і задовольняє крайові умови.

Необхідна умова оптимальності функціонала – умова Ейлера:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0.$$

Достатні умови оптимальності функціонала: умова Вейєрштрасса

$$f\left(x, y, v\right) - f\left(x, y, \dot{y}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dy_i}{dx} - v_i\right) f_{\dot{x}_i}\left(x, y, \dot{y}\right) \ge 0$$

та умова Лежандра

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{\dot{x}_i \dot{x}_j}\left(x, y, \dot{y}\right)\xi_i \xi_j \ge 0 \quad \forall \xi_i : \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \ne 0.$$

5. Задача оптимального керування, яка полягає в оптимізації функціонала, до того ж оптимальна траєкторія має задовольняти початкові та (або) кінцеві умови і диференціальне рівняння як модель системи

$$\dot{y} = f\left(x, y\right).$$

Розділ 2. Задачі математичного моделювання на фондовому ринку

2.1. Основи теорії портфельного інвестування

Сучасна теорія портфеля (СТП) ґрунтується на роботі Г. Марковиця [10]. З тих пір у межах цієї проблеми сформульовані нові постановки задач і отримані нові результати, які знайшли застосування також для розв’язання задач математичного моделювання макро- та мікроекономічних процесів. Предметом СТП є побудова процедур оптимізації ринкового ризику, очікуваних прибутків, інструментів для оцінювання актуальності диверсифікації портфеля, тенденції зміни ринкової вартості цінних паперів. Менеджмент інвестицій, маючи в основі СТП, розглядає задачі оптимізації діяльності інвестора на фондовому ринку. Як інвестори можуть виступати: інвестиційні фонди, банки, інвестиційні фірми тощо. Фондовий ринок характеризується обігом різних фінансових інструментів, до головних з яких належать акції та облігації. Важливим для суб’єктів фінансово-інвестиційної діяльності є питання про побудову портфеля цінних паперів, який би був найбільш ефективним: приносив бажаний прибуток і дозволяв уникнути втрати інвестованого капіталу. Портфель інвестицій формується з цінних паперів, які представлені на фондовому ринку. Крім теорії Г. Марковиця, існує чимало інших теорій у межах СТП, які є спробами ефективного розв’язання задач менеджменту інвестицій.

Основні види цінних паперів, їх загальна характеристика.

Акція. Це пайовий цінний папір, частка майна деякого акціонерного товариства (відкритого чи закритого типу). Випускається з метою акумулювання капіталу для подальшої фінансової діяльності. При цьому власник акції (акціонер) отримує право як на участь в управлінні компанією, так і на отримання дивідендів.

Облігація. Це борговий цінний папір, що випускається державою або комерційною компанією з метою акумулювання капіталу, реструктурування боргів. На відміну від акцій, облігації випускаються на певний термін, по закінченні якого вони вилучаються з обігу шляхом погашення.

Основними характеристиками облігації є: термін погашення, номінал (або вартість погашення), купон (виплати до погашення).

Якість облігації визначається її прибутковістю до моменту погашення. Це один з найбільш важливих факторів при оцінюванні облігації. Загальний або поточний прибуток визначається як купон, поділений на ринкову ціну та помножений на 100. На прибутковість облігації впливають: кредитний і ринковий ризик, зміни в ставках реінвестування, податковий статус інвестора.

Купон – це номінальна ставка відсотка, що виплачується відповідно до номінальної вартості. Якщо облігація не має купона, то вона називається *безкупонною*.

Номінальна вартість – це ціна, що вказана на сертифікаті цінного папера.

Зазвичай умовно вважають, що порівняно з акцією (яка є ризикованим цінним папером) облігація є безризиковою.

Варто також зауважити, що інвестиційний портфель (або портфель цінних паперів) може мати різну структуру:

- портфель акцій;
- портфель облігацій;
- портфель змішаної структури (акції та облігації).

Портфель акцій. Головною концепцією при виборі інвестиційного портфеля, побудованого лише з акцій, є концепція Г. Марковиця, згідно з якою поведінка учасників фінансового ринку визначається не тільки очікуваним максимальним доходом на інвестиції. Досвід функціонування фінансового ринку показує, що всі цінні папери, як з високим, так і з низьким доходом, продаються й купуються. Справа в тому, що покупці враховують не тільки величину доходу, а й ступінь його невизначеності, тобто ризик, і кожен інвестор прагне диверсифікувати свій портфель цінних паперів. Згідно з розробленою Г. Марковицем теорією вибору раціонального портфеля інвестор повинен підібрати такий набір цінних паперів, який би знижував ризик втрати доходу або одержання надто малого доходу. Розрахунок ризику, що передбачається, здійснюється за відповідною моделлю. Ризик дорівнює величині відхилення очікуваного доходу випадкової величини (тобто дивіденду) від її середнього рівня.

Далі здійснюють відповідні розрахунки, мета яких полягає в зіставленні дивіденду й ризику, на основі чого корпорації (чи інші юридичні або фізичні особи) формують свої портфелі з різних видів цінних паперів. Такі портфелі називають *ефективними*. Ефективність портфеля означає, що за даної структури цінних паперів інвестор одержить очікуваний дохід за мінімального ризику.

Ненасиченість та уникання ризику. При використанні підходу Г. Марковиця необхідно брати до уваги ненасиченість інвестора, тобто те, що інвестор буде прагнути вищого рівня кінцевого прибутку. Більший прибуток, який він зможе отримати наприкінці періоду інвестування, дасть можливість більше витратити на споживання або подальше інвестування.

Припустимо, що інвестор прагне уникнути ризику (risk-averse), тобто він обере портфель з меншим стандартним відхиленням.

Ці два положення (ненасиченість та уникання ризику) є причиною опуклості й додатного нахилу кривої байдужості. Однак, роблячи зауваження про уникання ризику всіма інвесторами, неможливо припустити, що ступінь уникання ризику однаковий для усіх інвесторів. Різні інвестори мають різні графіки кривих байдужості.

Очікувана прибутковість. Виходячи з підходу Г. Марковиця щодо інвестування, інвестор повинен оцінити усі портфелі, які можна побудувати з акцій, що на момент інвестування представлені на фондовому ринку, з погляду їх очікуваної прибутковості та стандартного відхилення, використовуючи криві байдужості. У випадку, коли інвестор намагається уникнути ризику, інвестувати потрібно в портфель, що перебуває на кривій байдужості, яка розташована вище та лівіше від усіх інших.

При інвестуванні інвестор повинен звернути особливу увагу на кінцеву (наприкінці періоду інвестування) вартість цінного папера. Це означає, що, приймаючи рішення, який портфель акцій купувати, використовуючи початкову вартість цінних паперів, інвестор має звернути особливу увагу на те, якою може бути їх кінцева вартість. Цей ефект може бути виражений через очікувану прибутковість і стандартне відхилення кожного портфеля. Оскільки кожен портфель є набором різноманітних цінних паперів, то очевидним є те, що очікувана прибутковість і стандартне відхилення портфеля мають залежати від очікуваної прибутковості та стандартного відхилення кожної акції, яка належить до даного портфеля. Значний вплив має також частина капіталу, яка була інвестована в даний цінний папір.

Очікувана прибутковість портфеля складається з очікуваних прибутковостей акцій, що до нього належать, і розраховується за формулою

$$r_p = \sum_{i=1}^{N} x_i r_i.$$

Інвестор може вкладати всі гроші тільки в акції з максимальною очікуваною прибутковістю, але диверсифікація портфеля може значно знизити ризик, що вимірюється, наприклад, стандартним відхиленням.

Стандартне відхилення, коваріація. Корисна міра ризику має враховувати ймовірність можливих «поганих» результатів та їх величину. Замість того, щоб вимірювати ймовірності різноманітних результатів, міра ризику має оцінювати ступінь можливого відхилення дійсного результату від очікуваного. Стандартне відхилення – та міра, що дозволяє це зробити, оскільки вона є оцінкою ймовірного відхилення фактичної прибутковості від очікуваної. Найкращим є випадок, коли розподіл імовірностей (probability distribution) прибутковості портфеля може бути апроксимований до кривої, що має форму дзвону й називається *нормальний розподіл* (normal distribution).

Інвестиційний ризик портфеля визначають як мінливість прибутковості, яка вимірюється за допомогою стандартного відхилення (дисперсії) розподілу прибутковості портфеля.

Коваріація – це міра взаємодії двох випадкових змінних. За змінні можна брати прибутковості двох цінних паперів, які впливають один на одного. Додатне значення коваріації показує, що прибутковості цінних паперів мають тенденцію змінюватись в один бік, тобто очікувана прибутковість одного цінного папера має змінюватися так само, як і очікувана прибутковість іншого цінного папера. Від’ємне значення коваріації означає, що прибутковості мають тенденцію компенсувати одна одну. У випадку, коли коваріація дорівнює нулю, вважають, що зв’язок між прибутковостями цінних паперів або дуже слабкий, або взагалі відсутній.

Коваріаційна матриця (variance-covariance matrix) N цінних паперів:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2N} \\ \dots & & & \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \dots & \sigma_{NN} \end{pmatrix}.$$

Сформулюємо основні властивості коваріаційної матриці:

- матриця є квадратною;
- дисперсії цінних паперів розташовані на головній діагоналі;

– матриця є симетричною. Ця властивість має просте пояснення: коваріація між двома цінними паперами не залежить від порядку, у якому ці два папери розглядаються.

Близьким до коваріації є поняття кореляції. Коваріація двох випадкових величин – це коефіцієнт кореляції між ними, який множать на добуток їх стандартних відхилень, тобто

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j.$$

Коефіцієнт кореляції перебуває між -1 та $+1$.

Коли $\rho_{ij} = +1$, маємо випадок повністю додатної кореляції: якщо один з двох цінних паперів має відносно високу прибутковість, то інший теж матиме відносно високу прибутковість, і навпаки.

Коли ж $\rho_{ij} = -1$, маємо від’ємну кореляцію: прибутковості двох цінних паперів змінюються у протилежних напрямках одна відносно іншої; якщо один цінний папір має відносно високу прибутковість, то інший – відносно низьку.

При $\rho_{ij} = 0$ маємо особливий випадок: точкова діаграма прибутковості двох цінних паперів показує розкид точок, який не може бути хоча б приблизно зображений довільною прямою. У такому випадку робиться висновок про некорельованість прибутковостей цінних паперів.

У загальному випадку стандартне відхилення портфеля обраховується за формулою

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}}.$$

2.2. Криві байдужості інвестора. Теорема про ефективну множину.

Метод, що використовується для вибору найбільш бажаного портфеля, оперує з кривими байдужості [10-11] (indifference curves). Ці криві відображають ставлення інвестора до ризику та прибутковості й можуть бути зображені на графіку, де на горизонтальній осі відкладено ризик, мірою якого є стандартне відхилення, а на вертикальній – винагорода, мірою якої є очікувана прибутковість.

Криві байдужості мають такі властивості:

- усі портфелі, що розташовані на певній заданій кривій байдужості, є рівноцінними для інвестора;
- кожна крива лінія відображає одну криву байдужості інвестора та є всіма комбінаціями портфелів, які забезпечують заданий рівень бажань інвестора;
- криві байдужості не можуть перетинатись.

Інвестор буде вважати портфель, який міститься на кривій байдужості, розташованій вище та лівіше, більш бажаним, ніж портфель, який міститься на кривій байдужості, розташованій нижче та правіше.

Побудова кривої байдужості інвестора. Визначення кривої байдужості інвестора є досить складною проблемою. На практиці її частіше отримують у наближеній формі, шляхом оцінювання рівня толерантності ризику (τ – risk tolerance), що визначається як найбільший ризик, який готовий сприйняти інвестор для збільшення очікуваної прибутковості. Інвестору пропонують вибрати найбільш бажаний для себе портфель у термінах очікуваної прибутковості та стандартного відхилення, тобто розташувати одну з кривих байдужості на графіку. Звичайно, краще було б визначити всі криві байдужості, але на практиці переслідують більш скромну мету – отримати уявлення про форму кривих байдужості для заданих показників співвідношення ризику та очікуваної прибутковості. Вибір певного співвідношення характеризує нахил кривої байдужості. Частіше роблять припущення, що інвестор має постійний рівень толерантності ризику відносно альтернативних портфелів, які розташовані поблизу початкової точки.

Рівняння кривої байдужості:

$$\overline{r_p} = u_i + \frac{1}{\tau} * \sigma_p^2.$$

Слід звернути увагу на те, що дві криві байдужості інвестора відрізняються одна від одної тільки на величину значення при перетині вертикальної осі. Це справджується внаслідок того, що криві байдужості паралельні й мають однаковий нахил ($1 \div \tau$).

Формула для визначення оцінки рівня толерантності ризику:

$$\tau = \frac{2 * (\overline{r_{\text{exp}}} - r) * \sigma_s^2}{(\bar{r_s} - r)^2}.$$

Після того, як криві байдужості інвестора оцінено, можна перейти до основної задачі – пошуку ефективного портфеля.

Теорема про ефективну множину. Як зазначено раніше, з набору *N* цінних паперів можна сформувати нескінченну кількість портфелів. Інвестор може вкласти довільний відсоток (від 0 до 100 %) в один цінний папір, а решту – в інші. Чи необхідно інвестору проводити оцінювання всіх портфелів, які можуть бути сформовані із заданого набору цінних паперів? Інвестор повинен розглянути лише підмножину можливих портфелів. Це пояснюється в теоремі про ефективну множину.

Теорема. Інвестор має можливість вибрати свій оптимальний портфель із множини портфелів, кожен з яких:

- забезпечує максимальну очікувану прибутковість для заданого рівня ризику;
- забезпечує мінімальний ризик для заданого значення очікуваної прибутковості.

Набір портфелів, який задовольняє ці дві умови, називається *ефективною множиною* (efficient set), або *ефективною границею*.

Досяжна множина (feasible set) – це множина можливостей, з яких може бути виділена ефективна множина. Досяжна множина – це всі портфелі, які можуть бути сформовані з групи *N* цінних паперів. Такі портфелі містяться або на границі, або всередині досяжної множини. У загальному випадку множина має форму парасольки. Залежно від цінних паперів, що використовуються, вона може бути більш зміщена праворуч, ліворуч, вище, нижче, крім того, вона може бути ширшою або вужчою.

2.3. Вибір оптимального портфеля цінних паперів

Яким саме чином інвестор обирає оптимальний портфель (optimal portfolio)? Як сказано раніше, інвестор повинен зобразити свої криві байдужості на одному рисунку з ефективною множиною, а потім почати обирати портфель, який розташований на кривій байдужості вище та лівіше за інші. Цьому портфелю буде відповідати точка, у якій крива байдужості дотикається ефективної множини.

З урахуванням того, що криві байдужості для інвестора, який уникає ризику, опуклі й мають додатній нахил, можна показати, що ефективна множина в загальному випадку увігнута й теж має додатній нахил, тобто відрізок, який з’єднує дві довільні точки ефективної множини, розташований нижче даної множини. Ця властивість важлива, тому що існує тільки одна точка дотикання ефективної множини та кривих байдужості.

Багатокрокова процедура пошуку оптимального портфеля. З метою уникнення вироджених випадків іноді доречніше, ґрунтуючись на теоремі

Марковиця про ефективну множину, застосовувати багатокрокову оптимізацію для знаходження оптимального портфеля:

$$\max_{r_i}\{\sum_{i=1}^{N} X_i * r_i - \frac{1}{\tau} * \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i * X_j * \sigma_{ij} \right)\},$$

$$X_i \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1.$$

Процедура оптимізації на кожному кроці алгоритму передбачає пошук та оцінювання градієнта цільової функції в точках, які належать досяжній множині. Умовою виходу з процедури оптимізації є досягнення точки з ефективної множини. У разі необхідності може бути застосована процедура нормування ваг цінних паперів у портфелі.

Загалом можна сказати, що робота Г. Марковиця [10] була першою, яка дозволила при прийнятті рішень на фондовому ринку використовувати не лише суб’єктивні міркування, а й математичну формалізацію процесів. До цього часу на ринку активно використовували суб’єктивно орієнтовані підходи до прийняття рішень, побудовані на основі кривих байдужості інвестора, допустимої та ефективної множини портфелів.

Ідеї Г. Марковиця розвинуто в роботах Д. Тобіна, який запропонував формулювати задачі оптимізації інвестиційного портфеля не тільки однорідної, але й змішаної структури. Введення в структуру портфеля неризикованих цінних паперів дозволяє диверсифікувати його, зменшуючи при цьому не тільки прибутковість, але й ризикованість. Загальний вигляд рівняння прибутковості інвестиційної операції може бути таким:

$$r = \frac{w_1 - w_0}{w_0},$$

де r – норма прибутковості акції, w_1 – ринкова вартість акції в момент часу t_1, w_0 – ринкова вартість акції в початковий момент часу. Відповідно до принципів імітаційного моделювання Г. Марковиць запропонував при визначенні ціни акції користуватись *ринковою моделлю В. Шарпа*:

$$r = \alpha + \beta SM_{IND} + \varepsilon,$$

де r – прибуток, SM_{IND} – індекс фондового ринку, ε – невизначеність, α – базова ціна, β – коефіцієнт чутливості.

На основі лістингу фондового ринку формується *індекс ринку*, який є макроекономічною характеристикою, що відображає реальні процеси в економіці.

Загальна проблема Г. Марковиця побудови портфеля акцій оптимальної структури формально полягає в розв’язанні такої математичної задачі:

$$\begin{cases} \sum\limits_i x_i r_i \to \max\limits_x, \\ \sum\limits_i \sum\limits_j x_i x_j \sigma_{ij} \to \min\limits_x, \\ \sum\limits_i x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \end{cases}$$

де x_i – частина акцій i-го типу в портфелі, r_i – очікувана прибутковість акцій i-го типу, $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ – коваріація між i-м та j-м цінним папером, $\rho_{ij} \in [-1,1]$ – коефіцієнт кореляції ($\rho_{ij} > 0$ – позитивна кореляція вказує, що динаміки цін цінних паперів одного знаку, $\rho_{ij} < 0$ – протилежна кореляція – зменшення ціни одного цінного папера тягне за собою зростання ціни іншого, і навпаки), σ_i – середньоквадратичне відхилення.

Таким чином, отримано двокритеріальну задачу із суперечливими критеріями, перший з яких полягає в максимізації прибутку портфеля, а другий – у мінімізації ризику. Під ризиком будемо розуміти дисперсію.

Наведена вище задача є двокритеріальною задачею нелінійної оптимізації з обмеженнями та суперечливими критеріями. Отримати аналітично розв’язок такої задачі неможливо, тому розглядають дві окремі однокритеріальні задачі, кожна з яких має свої особливості:

1) задача мінімізації ризику портфеля для заданого рівня прибутковості;

2) задача максимізації прибутку для заданого рівня ризику.

Математичні постановки при розв’язанні практичних задач виглядають так:

$$\begin{cases} \sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_{ij} \to \min_x, \\ \sum_i x_i r_i = r_{фікс.}, \\ \sum_i x_i = 1, \\ x_i \ge 0; \end{cases} \tag{2.3.1}$$

$$\begin{cases} \sum_i x_i r_i \to \max_x, \\ \sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_{ij} = \tau, \\ \sum_i x_i = 1, \\ x_i \ge 0. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Задачі (2.3.1), (2.3.2) можуть бути сформульовані з урахуванням введення в структуру інвестиційного портфеля неризикованих цінних паперів, наприклад, облігацій. Це дає можливість диверсифікувати ризики:

$$\begin{cases} \sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_{ij} \to \min_x, \\ \sum_i x_i r_i + x_0 r_0 = r_{фікс.}, \\ \sum_i x_i + x_0 = 1, \\ x_i \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_i x_i r_i + x_0 r_0 \to \max_x, \\ \sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_{ij} = \tau, \\ \sum_i x_i + x_0 = 1, \\ x_i \ge 0, \end{cases}$$

де x_0 – частка неризикованих цінних паперів у портфелі, r_0 – прибутковість неризикованих цінних паперів. Запишемо задачу оптимізації ризику у матричній постановці:

$$\begin{cases} x^T V x \to \min_x, \\ r^T x = r_{фікс.}, \\ I^T x = 1; \end{cases} \tag{2.3.1'}$$

$$\begin{cases} x^T V x \to \min\limits_x, \\ r^T x + r_0 x_0 = r_{фікс.}, \\ I^T x + x_0 = 1, \end{cases} \qquad (2.3.1'')$$

де r – вектор-стовпчик розмірністю n очікуваної прибутковості акцій, x – вектор-стовпчик розмірністю n часток акцій різних видів у портфелі, V – коваріаційна матриця розмірністю $n \times n$, I – вектор з одиниць розмірністю n, x_0 – частка неризикованих цінних паперів у портфелі.

Побудуємо аналітичну процедуру розв'язання задачі (2.3.1') на основі застосування методу множників Лагранжа.

Функція Лагранжа:

$$L = x^T V x + \lambda_1 \left(r^T x - r_{фікс.} \right) + \lambda_2 \left(I^T x - 1 \right),$$

де λ_1, λ_2 – невідомі множники Лагранжа.

Задача полягає в тому, щоб знайти x^* – оптимальний вектор часток акцій у портфелі. Використаємо необхідну умову екстремуму цієї функції:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2Vx + \lambda_1 r + \lambda_2 I = 0 \Rightarrow x^* = -V^{-1} \frac{\lambda_1 r + \lambda_2 I}{2}. \qquad (2.3.3)$$

Для пошуку невідомих параметрів λ_1, λ_2 підставимо (2.3.3) у (2.3.1'):

$$\begin{cases} r^T x^* = r_{фікс.}, \\ I^T x^* = 1. \end{cases} \qquad (2.3.4)$$

Якщо ця система сумісна, то знайдемо λ_1, λ_2, підставивши які у (2.3.3), отримаємо значення x^*.

Розглянемо задачу (2.3.1'') оптимізації ризику портфеля змішаної структури для заданого рівня прибутковості. Як і раніше, побудуємо функцію Лагранжа:

$$L = x^T V x + \lambda_1 \left(r^T x + r_0 x - r_{фікс.} \right) + \lambda_2 \left(I^T x + x_0 - 1 \right).$$

Задача полягає в тому, щоб знайти невідомі частки x^*, x_0^*. Скористаємось необхідними умовами екстремуму функції L:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2Vx + \lambda_1 r + \lambda_2 I = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_0} &= \lambda_1 r_0 + \lambda_2 = 0; \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^* =$$

$$= -V^{-1}\frac{\lambda_1 r + \lambda_2 I}{2} = -V^{-1}\frac{\lambda_1 r - \lambda_1 r_0 I}{2}. \qquad (2.3.5)$$

Для того, щоб знайти λ_1 із (6.5), прирівняємо x_0 із другого рівняння (1’’) до x_0 із третього:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{\left(r_{фікс.} - r^T x\right)}{r_0}, \\ x_0 &= 1 - I^T x, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\left(r_{фікс.} - r^T x^*\right)}{r_0} = 1 - I^T x^*. \qquad (2.3.6)$$

Рівняння (2.3.6) є алгебраїчним щодо невідомої λ_1. Розв’язавши його відносно λ_1, підставимо у (2.3.5) і отримаємо вектор оптимальних часток акцій різних видів у портфелі. Третє рівняння (2.3.1’’) дає можливість отримати частку облігацій у портфелі.

Отже, розглянуто дві постановки задач оптимізації портфеля – однорідної та змішаної структури; спрощені, детерміновані, для розв’язання яких використовують метод множників Лагранжа. Перевагою цього підходу є можливість отримати точний аналітичний розв’язок. Серед недоліків можна зазначити:

- необхідність побудови прогнозу для отримання очікуваних прибутковостей акцій;
- необхідна наявність великої кількості інформації для побудови матриці V;
- важко отримати достовірний результат, який потім можна застосувати практично.

2.4. Задача про побудову динамічної математичної моделі однієї акції та портфеля акцій

Раніше розглянута ринкова модель В. Шарпа не дає можливості конструктивного формулювання задач про побудову прогнозу або керування структурою портфеля:

$$r = \alpha + \beta SM_{ind} + \varepsilon. \qquad (2.4.1)$$

Проте вона дає можливість урахувати загальні принципи формування ціни акцій.

Серед основних макроекономічних характеристик, що впливають на динаміку формування ціни акції, виділимо індекс фондового ринку, інфляцію, а також урахуємо кореляційні залежності між різними цінними паперами.

З огляду на сказане вище та, здійснивши граничний перехід для ринкової моделі В. Шарпа, отримаємо:

$$\frac{dr_i}{dt} = \left(\alpha_1 SM_{ind}\left(t\right) + \alpha_2 I\left(t\right)\right) r_i\left(t\right) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_i + \varepsilon_i\left(t\right), \quad i = \overline{1,n}, \qquad (2.4.2)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \rho_{ij}$ – параметри моделі. Ця математична модель є звичайним диференціальним рівнянням, перший доданок у якому враховує вплив макроекономічних факторів, другий – кореляційних залежностей.

На основі динамічної моделі формування ринкової вартості окремої акції можна побудувати динамічну модель портфеля:

$$r_p\left(t\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(t\right) r_i\left(t\right), \qquad (2.4.3)$$

$$r_i\left(t_0\right) = r_{i0}. \qquad (2.4.4)$$

Задача Коші (2.4.2), (2.4.4) дає можливість побудувати траєкторію $r_i\left(t\right)$ ціни акції. Цю функцію можна підставити в (2.4.3) і тоді сформулювати задачу оптимального керування частками $x_i\left(t\right)$ у портфелі.

Продиференціюємо (2.4.3) за t:

$$\frac{dr_p}{dt} = \sum_i \left(\dot{x}_i r_i + x_i \dot{r}_i\right) = \sum_i \left(x_i \frac{\dot{x}_i r_i}{x_i} + r_i \frac{x_i \dot{r}_i}{r_i}\right).$$

Оскільки має місце правило

$$\sum_i a_i b_i = \sum_i a_i - \sum_i \sum_j a_i b_j, \quad i \neq j, \sum_j b_j = 1, \qquad (2.4.5)$$

то

$$\begin{aligned} &\sum_i \left(\dot{x}_i r_i + x_i \dot{r}_i\right) - \sum_i \sum_j \left(x_i r_i \frac{\dot{x}_j}{x_j} + x_i r_i \frac{\dot{r}_j}{r_j}\right) \Rightarrow \dot{r}_p = \\ &= 2r_p - \sum_i \sum_j \left(x_i r_i \frac{\dot{x}_j}{x_j} + x_i r_i \frac{\dot{r}_j}{r_j}\right). \end{aligned} \qquad (2.4.6)$$

Рівняння (2.4.6) є моделлю динаміки формування ринкової вартості портфеля акцій. Її аналіз дає можливість пересвідчитись, що ринкова вартість портфеля в момент часу t залежить від $\dot{x}_j$ (зміни структури) та $\dot{r}_j$ (зміни ціни).

Розділ 3. Аналіз стійкості та чутливості параметрів математичних моделей інвестиційного менеджменту

3.1. Аналіз чутливості в статичних задачах інвестиційного менеджменту

Аналіз чутливості оптимальних розв'язків статичних задач інвестиційного менеджменту пов'язаний з дослідженням збурених розв'язків задач нелінійного моделювання.

Нехай цільова функція $I = I(x)$ визначена у n-вимірному евклідовому просторі в точці x_0 та є диференційованою. При цьому необхідною умовою існування екстремуму в точці x_0 є рівність нулю частинних похідних першого порядку:

$$\psi_i(x) = \frac{\partial I(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Припустимо, що цільова функція залежить від скалярного параметра α: $I = I(x,\alpha)$. Очевидно, що й розв'язок x_0 є функцією цього параметра: $x_0 = x_0(\alpha)$, отже, його залежність від α характеризується коефіцієнтами чутливості $\frac{dx_{0i}}{d\alpha}$, $i = \overline{1,n}.$ Необхідні умови екстремуму для цього випадку:

$$\psi_i(x,\alpha) = \frac{\partial I(x,\alpha)}{\partial x_i} = 0, \quad i \in \overline{1,n}.$$

Нехай функції $\psi_i(x,\alpha), i = \overline{1,n}$ задовольняють умови теореми про диференціювання неявних функцій [12], тобто функції $\psi_1,...,\psi_n$ визначені й неперервні в околі точки $(x_0, \ \alpha)$, до того ж існують неперервні в цій області частинні похідні: $\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha}, i, j = \overline{1,n}$ та якобіан $J = \frac{D(\psi_1,...,\psi_n)}{D(x_1,...,x_n)} = \det\left\{\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\right\}_{i,j=1}^{n}$ у точці $(x_0, \ \alpha)$, відмінний від нуля. Тоді, відповідно до теореми про диференціювання неявних функцій, існують неперервні коефіцієнти чутливості, що визначаються формулою

$$\frac{dx_i}{d\alpha}=-\frac{\dfrac{D(\psi_1,...,\psi_n)}{D(x_1,...,x_{i-1},\alpha,x_{i+1},...,x_n)}}{\dfrac{D(\psi_1,...,\psi_n)}{D(x_1,...,x_n)}}.$$

Розглянемо задачу. Необхідно знайти екстремум цільової функції $I(x)$ при обмеженнях $f_i(x)=0, i=\overline{1,m}$ $m\le n.$ Нехай ці функції $I(x)$, $f_i(x), i=\overline{1,m}$ є диференційованими. Для розв'язання даної задачі введемо множники Лагранжа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ та функцію Лагранжа $L(x,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=I(x)-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j f_j(x)$.

У цьому випадку необхідні умови екстремуму матимуть вигляд

$$\begin{cases}\dfrac{\partial I}{\partial x_i}-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}=0, i=\overline{1,n},\\ f_j(x)=0,\ j=\overline{1,m}.\end{cases}\tag{3.1.1}$$

Нехай $I(x)$ та $f_i(x)=0, i=\overline{1,m}$ залежать від параметра α та існують похідні від відповідних функцій за α. Очевидно, що величини $x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m$, які задовольняють систему (3.1.1), будуть також залежати від параметра α. Уведемо позначення:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=\psi_i, i=\overline{1,n},$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}=\psi_{n+j}, j=\overline{1,m}.$$

Припустимо, що при $\alpha=\alpha_0$ якобіан $J=\dfrac{D(\psi_1,...,\psi_{n+m})}{D(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)}$ відмінний від нуля, тоді коефіцієнти чутливості в околі точки α_0 визначаються за формулами

$$\frac{dx_i}{d\alpha}=-\frac{1}{J}*\frac{D(\psi_1,...,\psi_{n+m})}{D(x_1,...,x_{i-1},\alpha,x_{i+1},...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)},$$
$$\frac{d\lambda_j}{d\alpha}=-\frac{1}{J}*\frac{D(\psi_1,...,\psi_{n+m})}{D(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_{j-1},\alpha,\lambda_{j+1},,\lambda_m)},$$
$$i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}.$$

Розглянемо класичну задачу інвестиційного менеджменту: максимізувати прибутковість портфеля ЦП для заданого рівня ризику. Запишемо цю задачу у векторно-матричному вигляді:

$$y^T m\to \max,$$
$$y^T V y=\tau.$$

Позначимо $y^T V y = I(y)$. Визначимо чутливість оптимальних вагових коефіцієнтів портфеля до варіації прибутковості деякої акції m_k при незмінному значенні рівня τ. У даному випадку розглянемо варіацію прибутковості акції m_n, $k = n$.

Запишемо функцію Лагранжа для даної задачі $L(y,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i - \lambda(I(y) - \tau)$ і необхідні умови екстремуму:

$$\begin{cases} m_i - \lambda \dfrac{\partial I}{\partial y_i} = 0, i = \overline{1,n}, \\ I(y) = \tau. \end{cases}$$

Продиференціювавши дану систему за m_n, одержимо:

$$\begin{cases} \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 I}{\partial y_i \partial y_j} * \dfrac{\partial y_j}{\partial m_n} + \dfrac{\partial I}{\partial y_i} * \dfrac{\partial \lambda}{\partial m_n} = \begin{cases} 0, i \neq n \\ 1, i = n \end{cases}, i \in \overline{1,n}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial I}{\partial y_j} * \dfrac{\partial y_j}{\partial m_n} = 0. \end{cases}$$

Розділимо перші n рівнянь даної системи на λ і запишемо у векторно-матричному вигляді систему $Ab = c$, де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial I}{\partial y_1} & \dfrac{\partial I}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial I}{\partial y_1} & \dfrac{\partial^2 I}{\partial y_1^2} & \dfrac{\partial^2 I}{\partial y_1 \partial y_n} \\ \dfrac{\partial I}{\partial y_n} & \dfrac{\partial^2 I}{\partial y_n \partial y_1} & \dfrac{\partial^2 I}{\partial y_n^2} \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda} * \dfrac{\partial \lambda}{\partial m_n} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial m_n} \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial m_n} \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Ця система дозволяє знайти будь-який з коефіцієнтів чутливості $\dfrac{\partial y_i}{\partial m_n}, i = \overline{1,n}.$

Неважко бачити, що коефіцієнт $\dfrac{\partial y_n}{\partial m_n}$ можна знайти за формулою $\dfrac{\partial y_n}{\partial m_n} = \dfrac{1}{\lambda} * \dfrac{A_{n+1,n+1}}{\det A}$, де $A_{n+1,n+1}$ – алгебраїчне доповнення до елемента $\dfrac{\partial^2 I}{\partial y_n^2}$. При виконанні достатніх умов мінімуму $\dfrac{A_{n+1,n+1}}{\det A} < 0$ з урахуванням того, що $\lambda > 0$, одержимо коефіцієнт чутливості $\dfrac{\partial y_n}{\partial m_n} < 0$. Від'ємність коефіцієнта показує, що при одному й тому самому рівні ризику τ з підвищенням прибутковості m_n

частку даного типу цінних паперів у складі портфеля слід збільшити.

Розглянемо тепер задачу мінімізації ризику портфеля цінних паперів для встановленої величини прибутковості:

$$I(y) \to \min,$$
$$y^T m = M.$$

Функція Лагранжа в даному випадку буде мати вигляд $L(y,\lambda) = I(y) - \lambda(\sum_{i=1}^{n} y_i m_i - M)$. Запишемо необхідні умови екстремуму:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial y_i} - \lambda m_i = 0, i = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i m_i - M = 0. \end{cases}$$

Розглянемо, як і в першому випадку, вплив малих змін прибутковості акції m_n на оптимальне рішення інвестора. Диференціюючи останню систему за m_n, отримаємо:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 I}{\partial y_i \partial y_j} * \frac{\partial y_j}{\partial m_n} + m_i * \frac{\partial \lambda}{\partial m_n} = \begin{cases} 0, i \neq n \\ \lambda, i = n \end{cases}, i \in \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial y_i}{\partial m_n} + y_n = 0. \end{cases}$$

Запишемо систему алгебраїчних рівнянь $Ab = c$ для знаходження функцій чутливості. У даному випадку

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m_1 & m_n \\ m_1 & \frac{\partial^2 I}{\partial {y_1}^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial y_1 \partial y_n} \\ m_n & \frac{\partial^2 I}{\partial y_n \partial y_1} & \frac{\partial^2 I}{\partial {y_n}^2} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial m_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial m_n} \\ \frac{\partial y_n}{\partial m_n} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -m_n \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Розв'язки цієї системи для будь-яких $i \in \overline{1,N}$ визначаються рівнянням $\frac{\partial y_i}{\partial m_n} = \frac{1}{\det A} * (-m_n A_{1,n+1} + \lambda A_{n+1,n+1})$, де $A_{1,n+1}, A_{n+1,n+1}$ – алгебраїчні доповнення до елементів матриці *A*, які розташовані в позиціях $(1, n+1)$ та $(n+1, n+1)$.

Розглянемо третій випадок. Визначимо вплив варіації величини інвестованого капіталу M на оптимальне рішення інвестора щодо складу портфеля цінних паперів. Для цього запишемо необхідні умови екстремуму й продиференціюємо систему за M:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 I}{\partial y_i \partial y_j} * \frac{\partial y_j}{\partial M} - m_i * \frac{\partial \lambda}{\partial M} = 0, i = \overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i * \frac{\partial y_i}{\partial M} = 1,$$

$$b = \left(-\frac{\partial \lambda}{\partial M}, \frac{\partial y_1}{\partial M}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial M}\right)^T,$$

$$c = (1, 0, \dots 0)^T.$$

Звідси $\frac{\partial y_i}{\partial M} = \frac{A_{1,i+1}}{\det A}, i \in \overline{1,n}.$

Порівнявши вирази для розв'язків у другому та третьому випадках, отримаємо:

$$\frac{\partial y_i}{\partial m_n} = -m_n \frac{\partial y_i}{\partial M} + \lambda \frac{A_{n+1,n+1}}{\det A}, i \in \overline{1,n}.$$

Дане співвідношення встановлює вплив зміни ринкових цін акцій на склад портфелів інвестицій. Воно відповідає відомому в економіці рівнянню Слуцького, яке визначає вплив некомпенсованої зміни цін на попит для кожного типу продукції. Якщо $i = n$, то другий доданок у правій частині останнього рівняння буде пропорційним коефіцієнту чутливості $\frac{\partial y_i}{\partial m_n}$, який отримано в першій задачі. Тому для $i = n$ можемо записати:

$$\left(\frac{\partial y_n}{\partial m_n}\right)_{m_n} = -m_n \left(\frac{\partial y_n}{\partial M}\right)_M + \left(\frac{\partial y_n}{\partial m_n}\right)_{I=\tau}.$$

У даному співвідношенні індекси m_n, M, $I = \tau$ показують умови, за яких обчислюються відповідні коефіцієнти чутливості:

а) при варіації прибутковості цінного папера m_n;

б) при зміні величини інвестованого капіталу M;

в) при зміні заданого рівня толерантності ризику τ.

3.2. Застосування функцій чутливості для розв'язання задач інвестиційного менеджменту

Основним методом дослідження збурених траєкторій у теорії чутливості є використання функцій чутливості. Для системи (2.4.2) функції чутливості обчислюватимемо за формулами:

$$U_i^{1(k)}(t,\bar{\lambda}) = \frac{\partial r_i(t,\bar{\lambda})}{\partial \lambda^{(1)}{}_k}, i=\overline{1,N}; k=\overline{1,N}, \tag{3.2.1}$$

$$U_i^{2(k)}(t,\bar{\lambda}) = \frac{\partial r_i(t,\bar{\lambda})}{\partial \lambda^{(2)}{}_k}, i=\overline{1,N}; k=\overline{1,N}. \tag{3.2.2}$$

Для знаходження функцій чутливості системи (2.4.2) необхідно розв'язати такі задачі Коші:

$$\begin{cases} \dfrac{dU^{1(k)}(t,\bar{\lambda})}{dt} = \dfrac{\partial\left[(B^{(1)} + b(t)\bar{\Lambda}^{(1)} + c(t)\bar{\Lambda}^{(2)})\bar{r}\right]}{\partial r} \cdot U^{1(k)}(t,\bar{\lambda}) + \\ + \dfrac{\partial\left[(B^{(1)} + b(t)\bar{\Lambda}^{(1)} + c(t)\bar{\Lambda}^{(2)})\bar{r}\right]}{\partial \lambda^{(1)}{}_k}, \\ \dfrac{dU^{2(k)}(t,\bar{\lambda})}{dt} = \dfrac{\partial\left[(B^{(1)} + b(t)\bar{\Lambda}^{(1)} + c(t)\bar{\Lambda}^{(2)})\bar{r}\right]}{\partial r} \cdot U^{2(k)}(t,\bar{\lambda}) + \\ + \dfrac{\partial\left[(B^{(1)} + b(t)\bar{\Lambda}^{(1)} + c(t)\bar{\Lambda}^{(2)})\bar{r}\right]}{\partial \lambda^{(2)}{}_k}, \\ U^{1(k)}(t_0,\bar{\lambda}) = \dfrac{\partial r_0(\bar{\lambda})}{\partial \lambda^{(1)}{}_k} - \left[(B^{(1)} + b(t_0)\bar{\Lambda}^{(1)} + c(t_0)\bar{\Lambda}^{(2)})r_0(\bar{\lambda}))\right] \cdot \dfrac{\partial t_0(\bar{\lambda})}{\partial \lambda^{(1)}{}_k}, \\ U^{2(k)}(t_0,\bar{\lambda}) = \dfrac{\partial r_0(\bar{\lambda})}{\partial \lambda^{(2)}{}_k} - \left[(B^{(1)} + b(t_0)\bar{\Lambda}^{(1)} + c(t_0)\bar{\Lambda}^{(2)})r_0(\bar{\lambda})\right] \cdot \dfrac{\partial t_0(\bar{\lambda})}{\partial \lambda^{(2)}{}_k}, \\ k=\overline{1,N}, \end{cases}$$

або

$$
\begin{cases}
\dfrac{dU^{1(k)}(t,\bar{\lambda})}{dt} = [B^{(1)} + b(t)\bar{\Lambda}^{(1)} + c(t)\bar{\Lambda}^{(2)}]\cdot U^{1(k)}(t,\bar{\lambda}) + b(t)\cdot(0,..., \\
0,\bar{r}_k,0,...,0)^T, \\
\dfrac{dU^{2(k)}(t,\bar{\lambda})}{dt} = [B^{(1)} + b(t)\bar{\Lambda}^{(1)} + c(t)\bar{\Lambda}^{(2)}]\cdot U^{2(k)}(t,\bar{\lambda}) + c(t)\cdot(0,..., \\
0,\bar{r}_k,0,...,0)^T, \\
U^{1(k)}(t_0,\bar{\lambda}) = \dfrac{\partial r_0(\bar{\lambda})}{\partial \lambda^{(1)}{}_k} - \left[(B^{(1)} + b(t_0)\bar{\Lambda}^{(1)} + c(t_0)\bar{\Lambda}^{(2)})r_0(\bar{\lambda})\right]\cdot\dfrac{\partial t_0(\bar{\lambda})}{\partial \lambda^{(1)}{}_k}, \\
U^{2(k)}(t_0,\bar{\lambda}) = \dfrac{\partial r_0(\bar{\lambda})}{\partial \lambda^{(2)}{}_k} - \left[(B^{(1)} + b(t_0)\bar{\Lambda}^{(1)} + c(t_0)\bar{\Lambda}^{(2)})r_0(\bar{\lambda})\right]\cdot\dfrac{\partial t_0(\bar{\lambda})}{\partial \lambda^{(2)}{}_k}, \\
k=\overline{1,N}.
\end{cases}
\tag{3.2.3}
$$

Тут $\bar{\lambda}, \bar{r} = (t,\bar{\lambda})$ – розрахункові вектори параметрів і траєкторії системи (2.4.2). Рівняння (3.2.3) для функцій чутливості (3.2.1) та (3.2.2) отримуємо шляхом прямого диференціювання вихідної системи (2.4.2) за $\lambda_k{}^{(1)}, \lambda_k{}^{(2)}, k \in \overline{1,N}.$ Для визначення початкових умов (останні два співвідношення системи (3.2.3)) слід продиференціювати за векторними параметрами $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)}$ таке інтегральне рівняння:

$$
r(t,\lambda) = \int_{t_0}^{t}\left[(B^{(1)} + b(\tau)\Lambda^{(1)} + c(\tau)\Lambda^{(2)})r(\tau,\lambda)\right]\, d\tau + r_0(\lambda). \tag{3.2.4}
$$

У результаті отримаємо:

$$
\begin{aligned}
&U^{1(k)}(t,\lambda) = \frac{\partial r(t,\lambda)}{\partial \lambda^{(1)}{}_k} = \int_{t_0}^{t}\Big[(B^{(1)} + b(\tau)\Lambda^{(1)} + c(\tau)\Lambda^{(2)})U^{1(k)}(t,\lambda) + \\
&b(\tau)r(\tau,\lambda)\Big]d\tau + \\
&+\frac{dr_0(t,\lambda)}{d\lambda^{(1)}} - \left[(B^{(1)} + b(t_0)\Lambda^{(1)} + c(t_0)\Lambda^{(2)})r(t_0,\lambda)\right]\frac{dt_0(\lambda)}{d\lambda^{(1)}}, \\
&U^{2(k)}(t,\lambda) = \frac{\partial r(t,\lambda)}{\partial \lambda^{(2)}{}_k} = \int_{t_0}^{t}\Big[(B^{(1)} + b(\tau)\Lambda^{(1)} + c(\tau)\Lambda^{(2)})U^{2(k)}(t,\lambda) + \\
&c(\tau)r(\tau,\lambda)]d\tau + \\
&+\frac{dr_0(t,\lambda)}{d\lambda^{(2)}} - \left[(B^{(1)} + b(t_0)\Lambda^{(1)} + c(t_0)\Lambda^{(2)})r(t_0,\lambda)\right]\frac{dt_0(\lambda)}{d\lambda^{(2)}}, \\
&k = 1,2,...N.
\end{aligned}
\tag{3.2.5}
$$

Поклавши в останній рівності $t = t_0$ та $\lambda = \bar{\lambda}$, знайдемо вираз для обчислення початкових умов матриць функцій чутливості.

Система (3.2.3) повністю визначає функції чутливості для системи (3.2.1), а також характеризує чутливість її розв’язків (або ринкових цін складових портфеля цінних паперів і вартості самого портфеля взагалі) щодо змін значень параметрів, які обумовлюють зміни стану фондового ринку та процеси ціноутворення на ньому.

Нехай $\bar{\lambda}$ – деякі (незбурені) значення вектора параметрів, при яких виконується умова бажаного функціонування об’єкта:

$$R_r(\lambda) \subset P_r, \tag{3.2.6}$$

де P_r – множина бажаних станів об’єкта, $R_r(\lambda)$ – множина реальних станів, що відповідають даним значенням λ. При цьому λ вибираємо з множини допустимих параметрів G_λ.

Під бажаним функціонуванням об’єкта будемо розуміти бажану для інвестора поведінку його інвестицій, тобто при формуванні свого портфеля інвестор визначає, якою буде бажана ринкова вартість даного портфеля і вартість його складових. Унаслідок змін, що відбуваються на фондовому ринку, змінюється й ціна портфеля інвестицій. Для інвестора важливо, щоб вартість портфеля інвестицій і його складових не була на кожному етапі нижчою за встановлену, інакше потрібно буде вносити зміни до структури портфеля.

Нехай вектору $\bar{\lambda}$ відповідає незбурена (розрахункова) траєкторія $\bar{r} = r(t, \bar{\lambda})$. При збуренні вектора $\bar{\lambda}$ одержуємо значення $\lambda = \bar{\lambda} + \Delta\lambda, \Delta\lambda \in \Delta G_{\bar{\lambda}}(\Delta\lambda)$ і відповідну збурену траєкторію $r(t,\lambda) = r(t, \bar{\lambda} + \Delta\lambda)$. Саме збурена траєкторія є трендом акції на фондовому ринку, а $\Delta G_\lambda(\Delta\lambda)$ – множиною флуктуацій розрахункових значень вектора параметрів $\bar{\lambda}$. Вектор

$$\Delta r(t, \bar{\lambda}) = r(t, \bar{\lambda} + \Delta\lambda) - r(t, \bar{\lambda}) = r - \bar{r} \tag{3.2.7}$$

визначає рух прибутку, викликаний змінами параметра λ. Він характеризує величину відхилення тренда акції від прогнозованої вартості. Рух прибутку відповідає додатковому руху, який у теорії стійкості характеризує зміну властивостей системи при зміні відповідних параметрів. Визначення властивостей руху прибутку цінних паперів і встановлення зв’язків із властивостями вихідної системи є, по суті, основною задачею дослідження чутливості. Для системи (3.2.1) рух прибутку може бути викликаний змінами параметрів λ і буде характеризувати зміну ринкової ціни цінних паперів

r_i, $i=\overline{1,N}$. При зміні даних параметрів для всіх $i=\overline{1,N}$ отримуємо зміну ринкової ціни портфеля цінних паперів. Зміна стану фондового ринку викликає рух прибутку.

Означення 3.2.1. Під рухом прибутку будемо розуміти вектор $\Delta r(t,\bar{\lambda}) = r(t,\bar{\lambda}+\Delta\lambda) - r(t,\bar{\lambda}) = r - \bar{r}$, який характеризує зміну ринкової вартості цінного папера r і визначає величину відхилення тренда акції від прогнозованої вартості.

Для встановлення зв'язку між функціями чутливості та рухом прибутковості використовують диференціали вищих порядків функції багатьох змінних. Нехай $Y = Y(r_1,\dots,r_N)$ – функція змінних $r_1,\dots,r_N$, що має неперервні частинні похідні k-го порядку за всіма сукупностями аргументів. Під диференціалом k-го порядку будемо розуміти

$$d^{(k)}Y = \left(\frac{\partial}{\partial r_1}dr_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial r_N}dr_N\right)^k Y, \tag{3.2.8}$$

де $\frac{\partial}{\partial r_i}$ – оператори диференціювання за відповідними змінними. Щоб розгорнути вираз (3.2.8), слід формально підвести до степеня k вираз у дужках, згорнувши добуток операторів за правилом

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial r_j} = \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j},$$

а потім застосувати отриманий оператор до функції Y.

Із (3.2.8) випливає, що диференціал k-го порядку є формою k-го степеня відносно величин $dr_1,\dots,dr_N$. Припускаючи, що в точці $\bar{\lambda}$ існують і неперервні за параметрами всі функції чутливості до $(k+1)$-го порядку включно і значення вектора параметрів в околі розрахункового значення $\bar{\lambda}$ є досить малим за величиною, можна записати:

$$\Delta r(t,\bar{\lambda}) = r(t,\bar{\lambda}+\Delta\lambda) - r(t,\bar{\lambda}) = r - \bar{r},$$

$$\Delta r(t,\bar{\lambda}) = r(t,\bar{\lambda}+\Delta\lambda) - r(t,\bar{\lambda}) = dr(t,\bar{\lambda}) + \frac{1}{2!}d^{(2)}r(t,\bar{\lambda}) + \dots$$

$$.. + \frac{1}{K!}d^{(K)}r(t,\bar{\lambda}) + \frac{1}{(K+1)!}d^{(K+1)}r(t+\theta\Delta\lambda,\bar{\lambda}),$$

$$0 < \theta < 1.$$

Нехтуючи залишковим членом з останнього співвідношення, отримаємо наближений вираз для руху прибутковості

$$\Delta^{(k)} r(t,\bar{\lambda}) \approx \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} d^{(i)} r(t,\lambda)\Big|_{\lambda=\bar{\lambda}}, \tag{3.2.9}$$

який назвемо k-м наближенням. Величину

$$\Delta_i r = \frac{1}{i!} d^{(i)} r \tag{3.2.10}$$

відповідно назвемо поправкою i-го порядку руху прибутку.

Із (3.2.8) та (3.2.10) випливає, що поправка i-го порядку визначається співвідношенням

$$\Delta_i r = \frac{1}{i!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\Delta\lambda_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial\lambda_{2N}}\Delta\lambda_{2N}\right)^i r(t,\lambda)\Big|_{\lambda=\bar{\lambda}} \tag{3.2.11}$$

і є лінійною формою функцій чутливості i-го порядку, обчислених при розрахункових значеннях параметрів, а також формою k-го порядку відносно приростів параметрів.

Першим наближенням для руху прибутку є вираз

$$\begin{gathered}\Delta^{(1)} r(t,\bar{\lambda}) = U^{1(1)}(t,\bar{\lambda})\Delta\lambda_1^{(1)} + \ldots + U^{1(N)}(t,\bar{\lambda})\Delta\lambda_N^{(1)} + \\ U^{2(1)}(t,\bar{\lambda})\Delta\lambda_1^{(2)} + \ldots + U^{2(N)}(t,\bar{\lambda})\Delta\lambda_N^{(2)},\end{gathered} \tag{3.2.12}$$

де $U^{1(k)}(t,\bar{\lambda}) = \frac{\partial r(t,\bar{\lambda})}{\partial\lambda^{(1)}_k}$ та $U^{2(k)}(t,\bar{\lambda}) = \frac{\partial r(t,\bar{\lambda})}{\partial\lambda^{(2)}_k}$ – N-вимірні векторні функції чутливості, що характеризують величину швидкості зміни збуреного руху залежно від збурення k-го параметра відносно розрахункових значень $\bar{\lambda}$.

Із (3.2.12) випливає, що перше наближення є лінійним відносно приростів параметрів і функцій чутливості, тому воно є зручним для аналізу і його можна використовувати як наближене зображення руху прибутковості. Важливою властивістю першого наближення, що також сприяє його використанню у прикладних дослідженнях, є його інваріантність відносно функціональних перетворень приросту параметрів.

3.3. Оптимізація параметрів динамічної системи формування ринкової ціни портфеля цінних паперів при обмеженнях на фазові координати та параметри

Розглянемо випадок, коли фазові обмеження динамічної системи формування ринкової ціни портфеля цінних паперів задано та на них накладено обмеження. У менеджменті інвестицій це одна з найбільш важливих задач, яка тісно пов'язана із поняттям диверсифікації портфеля. Кожен інвестор слідкує за вартістю портфеля цінних паперів, ним визначено моменти, у які параметри портфеля мають задовольняти накладені на них обмеження. Наприклад, прибутковість і ризикованість цінних паперів, що входять до складу портфеля цінних паперів, мають певні, зафіксовані інвестором, обмеження. Також прибутковість і ризикованість портфеля повинні задовольняти раніше визначені інвестором обмеження, при цьому структура портфеля цінних паперів на початок періоду інвестування й упродовж періоду інвестування має бути оптимальною.

Нехай у момент $t = T$ на стан системи накладено обмеження

$$q_i(r(T), \lambda) = 0, i \in \overline{1, N_1}, \qquad (3.3.1)$$

де λ – об'єднаний вектор параметрів системи, за яким буде здійснюватись оптимізація. Зміна значень компонент вектора λ обумовлює можливі зміни ринкових цін акцій і стану фінансового ринку. Функції $q_i(r, \lambda)$ – це неперервно-диференційовані скалярні функції своїх аргументів, і саме вони визначають обмеження, які інвестор накладає на параметри, що характеризують портфель цінних паперів (прибутковість і ризикованість).

Нехай сукупність усіх траєкторій системи (3.2.7), які задовольняють (3.3.1), у початковий момент часу $t = t_0$ належить множині G_0, міра якої характеризується функцією

$$I = \Phi(r(t_0)). \qquad (3.3.2)$$

Необхідно визначити такий вектор параметрів λ^0, який би функції (3.3.2) надавав максимального значення. Це дозволить інвестору визначити оптимальну структуру портфеля цінних паперів у початковий момент інвестування.

Визначимо функції

$$r(t) = \phi(r(t_0), t, t_0, \lambda), \quad r(t_0) = \phi_1(r(t), t, t_0, \lambda), \tag{3.3.3}$$

за допомогою яких екстремальну задачу для (3.3.2) можна записати у вигляді

$$\max_{\lambda} \Phi(\phi_1(r(T), T, t_0, \lambda)), \quad q_i(r(T), \lambda)) = 0, i \in \overline{1, N_1}. \tag{3.3.4}$$

Ця задача може бути розв’язана відомими методами нелінійного програмування, наприклад методом проекції градієнтів, методом штрафів [12], коли можливою є побудова взаємно однозначного відображення типу (3.3.3). Для побудови градієнта функції

$$L(r(T), r(t_0), \lambda) = \Phi(r(t_0)) + \sum_{i=1}^{N_1} \omega_i q_i(r(T), \lambda)$$

необхідно розв’язати систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\psi^{(i)}(t)}{dt} = -\frac{\partial H(\psi^{(i)}(t), r(t), t, \lambda)}{\partial r}, i = \overline{1, N_1} \tag{3.3.5}$$

з крайовими умовами

$$\psi^{(i)}(T) = -\frac{\partial q_i(r(T), \lambda)}{\partial \lambda}. \tag{3.3.6}$$

Тут ω_i – функція штрафу, яка дорівнює 0, якщо і-те обмеження не порушується й дорівнює малому від’ємному значенню у випадку порушення; $H(\psi^{(i)}(t), r(t), t, \lambda) = \psi^{(i)^T} f(r(t, \lambda), t, \lambda)$ – функція Гамільтона, за допомогою якої знаходимо градієнт критерію якості за вектором λ.

Якщо порушень фазових обмежень кілька, то для розв’язання оптимізаційної задачі будемо розв’язувати задачу (3.3.4). Такий же підхід можна застосувати у випадку, коли обмеження на фазові координати задаються у формі нерівностей:

$$q_i(r(t), t, \lambda) \le 0, i \in \overline{1, N_1}. \tag{3.3.7}$$

На інтервалі $[t_0, T]$ вибираємо точки τ_i, $i \in \overline{0, Q,}$ $\tau_0 = t_0$, $\tau_Q = T$, $Q = \text{const}$ і обмеження (3.3.7) розглядаємо тільки в моменти τ_j:

$$q_i(r(\tau_j), \tau_j, \lambda) \le 0, \quad i \in \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{0, Q}.$$

Для визначення градієнта функції цілі за параметрами оптимізації будемо інтегрувати зліва направо N_1 спряжених систем:

$$\frac{d\psi^{(i)}(t)}{dt}=\frac{\partial H(\psi^{(i)}(t),r(t),t,\lambda)}{\partial r},$$

$$\psi^{(i)}(T)=-\mu_{iT}\frac{\partial q_i(r(t),\lambda)}{\partial r},\ i\in\overline{1,N_1}. \qquad (3.3.8)$$

У точках τ_j, у яких порушується i-те обмеження, вектор-функції $\psi^{(i)}(t)$ мають стрибки [12]:

$$\psi^{(i)}(\tau_j-0)=\psi^{(i)}(\tau_j+0)-\mu_{ij}\frac{\partial q_i(r(\tau_j),\tau_j,\lambda)}{\partial r},$$

де $\mu_{iT}=1$ у випадку порушення i-го обмеження в момент $t=T$, і $\mu_{iT}=0$, якщо інакше. Аналогічно $\mu_{ij}=1$ у випадку порушення i-го обмеження в момент τ_j та $\mu_{ij}=0$ – у іншому випадку. Далі можна застосувати звичайну градієнтну процедуру.

Отже, за допомогою описаного вище методу оптимізації динамічної системи при обмеженнях на фазові координати й параметри можна чисельно розв’язувати задачі інвестиційного менеджменту та моніторингу інвестиційної діяльності.

Розділ 4. Сучасні задачі математичного моделювання у фінансовому менеджменті

4.1. Неперервні стохастичні процеси у фінансах

Стохастичним називають процес, що описує зміни в одній або кількох змінних, де ці зміни характеризуються невизначеністю.

Стохастичні процеси неперервної змінної (неперервного часу) дозволяють описувати динаміку цін активів і доходів за активами на фінансовому ринку.

Ціни активів не можуть бути від'ємними, але можуть бути нескінченно додатними, а тому і співвідношення $\frac{p_1}{p_2}$ не може бути від'ємним. Цей емпіричний факт лежить в основі гіпотези, що відношення цін паперів розподілено логарифмічно і дохід за цінними паперами $Y_2, Y_3, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots$ розподілений нормально.

Існує група випадкових змінних, де зміщення безпосередньо залежить від попереднього стану змінної. Такі стохастичні процеси передбачають, що лише поточний стан стохастичної змінної є важливим при прогнозуванні значень такої змінної – це *марківські* процеси. При цьому важливою властивістю таких процесів є незалежність стохастичних змін.

Згідно гіпотези ефективних ринків, ціни активів відображають нову інформацію й усю історичну інформацію, що стосується даного активу. Стохастична зміна випадкової величини не вимагається при прогнозуванні останньої, хоча може бути корисною при прогнозуванні розподілу ймовірності майбутніх змін. Наприклад, середнє та волатильність (випадковість) попередніх змін можуть бути корисними при прогнозуванні майбутніх змін у ймовірнісному вигляді. Серед випадкових процесів, які є найбільш важливими при моделюванні динаміки фінансових активів, є:

- процес Вінера;
- узагальнений процес Вінера;
- процес Іто.

Розглянемо процес Вінера та його зв'язок з динамікою цін активів. Нехай s – довільна випадкова величина, а t – час. Протягом малого проміжку часу Δt випадкова величина s зміниться на Δs. Якщо s підкоряється процесу Вінера, тобто броунівському руху, то матимемо залежність

$$\Delta S = \varepsilon\sqrt{dt}\,, \tag{4.1.1}$$

де ε отримано на основі випадкової вибірки нормально розподіленої величини із середнім, що дорівнює 0, і середньоквадратичним відхиленням, що дорівнює 1. Можемо записати:

$$dS = \varepsilon\sqrt{\Delta t}\,. \tag{4.1.2}$$

Оскільки ε – нормально розподілена випадкова величина, то і Δs має бути нормально розподіленою із середнім, що дорівнює 0, дисперсією Δt та середньоквадратичним відхиленням $\sqrt{\Delta t}$. Отже, величина s, яка змінюється випадково на Δs, що залежить від іншої випадкової змінної $\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ (характеризує ситуацію отримання нової інформації на ринку), має середнє, що дорівнює 0, дисперсію Δt і середньоквадратичне відхилення $\sqrt{\Delta t}$. Незалежність змінних при цьому означає, що різні значення Δs незалежні, і оскільки ε – нормально розподілена, то значення Δs характеризуються як незалежні та нормально розподілені ($\Delta S \sim N(0, \sqrt{\Delta t}\,)$). Якщо дисперсія окремої $\Delta s = \Delta t$, то дисперсія за триваліший проміжок часу становитиме $\sum \Delta t$. Водночас безпосереднє застосування процесу Вінера для опису стохастичних процесів при формуванні цін активів неможливе з таких причин:

1. Активи характеризуються різними степенями волатильності. Вище була розглянута ситуація, коли волатильність однакова.

2. Ризиковані активи мають додатне очікуване середнє значення доходу. Нагадаємо, що середнє значень Δs =0.

3. У процесі Вінера передбачається, що абсолютні зміни в ціні Δs не залежать від величини s. Зазвичай реально буває так, що абсолютна зміна ціни більш дорогого активу буде очікуватися в середньому більшою, ніж абсолютна зміна більш дешевого.

Спробуємо врахувати наведені вище особливості при побудові динаміки ринкової вартості однієї акції.

Перша особливість легко реалізується шляхом множення ε на σ, що є різними середньоквадратичними відхиленнями Δs. Отже, ε буде мати нульове середнє значення, а середньоквадратичне відхилення становитиме $\sigma * 1 = \sigma$. Таким чином, рівняння (4.1.2) матиме вигляд

$$\Delta S = \sigma\varepsilon\sqrt{dt}\,, \tag{4.1.3}$$

$$dS = \sigma\varepsilon\sqrt{dt}\,. \tag{4.1.4}$$

Математичне сподівання Δs буде рівним нулю, середньоквадратичне відхилення – $\sigma\sqrt{\Delta t}$, а дисперсія – $\sigma^2\Delta t$.

Друга особливість виникає внаслідок того, що математичне сподівання випадкової величини ε дорівнює нулю, отже, очікувана зміна величини s – Δs –дорівнює нулю. Водночас очікуваний дохід від ризикованих активів у середньому має бути додатним. Для цього введемо поняття узагальненого процесу Вінера, який ураховує тенденцію. Щодо стохастичних процесів термін "тенденція" (drift) застосовується для означення позитивного або негативного тренда в часових рядах стохастичної змінної.

Параметр тенденції α є зміною s за малий проміжок часу dt. Якщо розглядати тільки тенденцію, то dS за такий проміжок часу dt була б рівною αdt.

Отже, мала зміна в ціні активу за малий проміжок часу може бути змодельована стохастичним диференційним рівнянням

$$dS = adt + \sigma\varepsilon\sqrt{dt},$$

або, у дискретному вигляді, –

$$\Delta S = a\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}.$$

В останньому співвідношенні елемент тенденції детермінований, а основний процес Вінера є стохастичною складовою.

Третя особливість пов'язана з тим, що величина зміни ціни активу має бути незалежна від величини ціни активу. Як зазначалося раніше, α – це абсолютний дохід за одиницю часу. Стохастичний процес при формуванні цін активів повинен моделювати абсолютний дохід, який є функцією від ціни активу, але ставка доходу не має залежати від ціни активу. Виходячи з викладеного вище, можемо розширити поняття узагальненого процесу Вінера й увести поняття процесу Іто, у якому параметри α (очікуваний дохід) і σ^2 (дисперсія) є функціями від основних змінних. У загальному вигляді процес Іто описується формулою

$$dS = a(St)dt + \sigma(St)\varepsilon.$$

Якщо змінюються основні змінні, то змінюється й абсолютна швидкість тенденції. Наприклад, зі збільшенням s збільшується α, а зі збільшенням t – α та σ. Така модель зміни ціни активу може бути записана у формі

$$dS = \mu S dt + \sigma S \varepsilon \sqrt{dt}.$$

Елемент $\mu S dt$ детермінований, елемент $\sigma S \varepsilon \sqrt{dt}$ є причиною стохастичної природи ціни активу. У цьому співвідношенні μ – очікувана ставка дохідності, виражена в десятковій формі. Тоді μS буде абсолютним доходом.

Для малого проміжку часу Δt очікуваний абсолютний дохід буде $\Delta S = \mu S \Delta t$, звідки при переході до границі $dS = \mu S dt$. Тоді

$$\frac{dS}{S} = \mu dt.$$

Ступінь невизначеності щодо очікуваного доходу протягом малого проміжку часу також не буде залежати від ціни активу. Це означає, що інвестор матиме однаковий ступінь невизначеності щодо доходів незалежно від того, становитиме ціна 1 чи 10 грн.

Зважаючи на вищенаведене, робимо висновок, що процес формування цін активів можна описати випадковим процесом Іто:

$$dS = \mu S dt + \sigma S \varepsilon \sqrt{dt}.$$

Використовують процес Іто для визначення вартості похідних фінансових інструментів, таких як ф’ючерси, форварди, опціони. У [14] К. Іто показав, що для будь-якої змінної w, яка є функцією іншої змінної x, що описується цим випадковим процесом, справедлива залежність

$$dw = \left(\frac{dw}{dx}\alpha + \frac{dw}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2w}{dx^2}\sigma^2 \right) dt + \frac{dw}{dx}\sigma\varepsilon\sqrt{dt},$$

де w – функція від x, а x підкорюється процесу Іто:

$$dx = adt + \sigma\varepsilon\sqrt{dt}.$$

Відповідно w також підкоряється процесу Іто. Змінна w має швидкість тенденції

$$\frac{dw}{dx}\alpha + \frac{dw}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2w}{dx^2}\sigma^2$$

і норму волатильності

$$\frac{dw}{dx}\sigma.$$

Тоді змінна w, що є функцією від S та t, підкорятиметься процесу Іто:

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial S}\mu S + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial w}{\partial S}\sigma S\varepsilon\sqrt{dt}.$$

Останнє співвідношення є стохастичним диференціальним рівнянням, що описує динаміку формування ринкової вартості деривативa, ринкова вартість якого залежить від вартості основного цінного папера.

4.2. Дохідність та дюрація портфеля облігацій

Історія державних боргових зобов’язань і облігацій нараховує кілька століть. Уперше вони з’явилися в Англії. Нині державні облігації є в будь-якій країні з конвертованою валютою й сильною економікою, а державні облігації найбільш економічно розвинених країн продаються на головних фінансових біржах світу. На сьогодні відсоткові ставки за державними облігаціями є показником успішного функціонування економіки. Відносно низькі та стійкі дохідності облігацій формують фундамент сучасної фінансової системи. Слід зазначити також, що з частковою відміною Бреттон-Вудської угоди основою для визначення взаємних курсів валют стали державні облігації.

Портфель облігацій, як і довільний фінансовий актив, характеризується потенційним доходом і ризиком, пов’язаним з його отриманням. Для порівняння облігацій використовують поняття дохідності та дюрації.

Дохідність облігації фактично встановлює зв'язок із рівносильною кредитною операцією. *Дюрація* одночасно описує кілька характеристик цінних паперів (ЦП), пов'язаних з ризиком змін відсоткової ставки.

Дюрація (англ. duration) – це середньозважений за дисконтною сумою термін потоку платежів. Іншими словами – це точка рівноваги термінів дисконтних платежів. Дюрація є важливою характеристикою потоку платежів, що визначає його чутливість до зміни відсоткової ставки. Дюрація потоку платежів залежить не тільки від його структури, але й від поточної відсоткової ставки. Чим вище ставка, тим меншою є вартість пізніших виплат порівняно з ранніми, і навпаки, чим менше ставка, тим більша дюрація потоку платежів.

Дюрація облігації показує, наскільки зміниться ціна останньої при зміні відсоткової ставки (ставки дисконтування) на один відсоток.

Таким чином, задача формування оптимального портфеля облігацій схожа із задачею формування портфеля акцій, за винятком лише особливостей, властивих облігаціям. Сформулюємо цю задачу.

Покладемо, що спочатку в інвестора є капітал обсягом *W*, який він повністю хоче інвестувати в облігації, j – кількість ЦП, якими торгують на ринку. Вважатимемо, що з кожним цінним папером пов'язаний потік платежів $\left\{c_1^i,...c_L^i\right\}$, які надходять у моменти часу $\{t_1,...,t_L\}$, відповідно. Покладемо також, що не буде відмови від обов'язків (дефолту) з боку емітента. Потік обіцяних платежів за облігацією не піддається ринковому ризику, але оцінка його залежить від поточної ринкової відсоткової ставки. Дисконтна вартість i-го ЦП $P_i(r)$ визначається за формулою

$$P_i(r)=\sum_{k=1}^{L}\frac{C_k^i}{(1-r)^{t_k}},$$

де C_k^i – окремі платежі; r – відсоткова ставка платежу t_k.

Ринкову вартість цінного папера позначимо P_L^M. Це її ціна на ринку облігацій. Дохідність *i* папера y_i – це розв'язок рівняння

$$P_i(y)=P_i^M\,,\quad y=r.$$

Дохідність розглядається в розумінні відсоткової ставки, при якій купівля даного цінного папера рівносильна депонуванню грошей під відсоток y_i.

Дюрація Маколі $D_i(r)$ для i-ї облігації для відсоткової ставки r визначається формулою

$$D_i(r) = \sum_{k=1}^{L} \frac{C_k^i t_k}{P_i(r)(1+r)^{t_k}}.$$

Водночас слід зауважити, що за означенням дисконтної вартості ЦП

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{C_k^i}{Pi(r)(1+r)^{t_k}} = 1.$$

Складові цієї суми є частками платежів у різні моменти часу.

Портфель облігацій Q можна визначити як набір $\{n_1,...,n_j\}$, де $n_i,\ i=1,...,j$ – кількість i-х паперів у портфелі.

Іноді інвестору більш зручно оперувати частками капіталу, витраченого на купівлю облігацій. Позначимо частку капіталу a_i у паперах i-типу через $a_i = \frac{w_i}{w}$, де w_i – капітал, вкладений в i-й набір. Тоді

$$a_i = \frac{P_i^M n_i}{W}.$$

Якщо вважати, що у цінні папери інвестується весь капітал W, то

$$\sum_{k=1}^{j} a_k = 1.$$

Залежність дисконтної вартості портфеля від величини відсоткової ставки r задається формулою

$$P_Q(r) = \sum_{k=1}^{j} n_k P_k(r).$$

Перейдемо до визначення дохідності портфеля облігацій. Розглянемо рівняння ринкової вартості портфеля облігацій щодо відсоткової ставки r:

$$P_Q(r) = \sum_{k=1}^{j} n_k K_k^M.$$

Правою частиною цього рівняння є ринкова вартість портфеля. Оскільки за умовою в портфель облігацій вкладається весь капітал W, то

$$P_Q(r) = \sum_{k=1}^{j} n_k P_k(r) = W.$$

Визначити дохідність портфеля облігацій – це означає розв'язати дане рівняння щодо величини відсоткової ставки *r*. При переході від кількісних змінних портфеля n_k до пайових рівняння матиме вигляд

$$\sum_{k=1}^{j} a_k \frac{P_k(r)}{P_k^M = 1}.$$

Це рівняння дохідності портфеля облігацій. При цьому скористались співвідношенням $n_i = \frac{a_i W}{P_i^M}$.

Дюрація портфеля для відсоткової ставки *r* згідно з означенням матиме вигляд

$$D_Q(r) = \sum_{k=1}^{L} t_k \frac{\sum_{j=1}^{s} n_j C_k^j}{P_Q(r)(1+r)^{t_k}} = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{L} \frac{t_k C_k^j n_j}{P_Q(r)(1+r)^{t_k}}.$$

Перейшовши від кількісного до пайового портфеля, дюрація портфеля описуватиметься формулою

$$D_Q(r) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{L} \frac{t_k C_k^j W a_j}{P_Q(r) P_j^M (1+r)^{t_k}} = W \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{L} \frac{t_k C_k^j a_j}{P_Q(r) P_j^M (1+r)^{t_k}}.$$

Далі нас буде цікавити дюрація портфеля *Q* для відсоткової ставки, що дорівнює її дохідності.

Ураховуючи, що $P_Q(r) = W$, отримаємо

$$D_Q(y) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{L} \frac{t_k C_k^j a_j}{P_j^M (1+y)^{t_k}}.$$

Виразимо дюрацію портфеля через дюрації цінних паперів, які до нього входять:

$$D_Q(Y) = \sum_{j=1}^{s} a_j D_j(y) \frac{P_j(y)}{P_j^M}.$$

Таким чином, задача полягає в побудові портфеля із заданими величинами дохідності та дюрації. Це, зрозуміло, справедливо не для всіх пар у площині дюрація – дохідність. Згідно із вищезазначеним портфель із дохідністю *y* і дюрацією *D* має задовольняти рівняння дохідності

$$P_Q(y) = W$$

і дюрації

$$D_Q(y) = D,$$

а також повинна бути виконана умова інвестування всіх грошей в облігації.

Деякі корпорації будують рейтинги кредитоспроможності облігацій. Найбільш впливовими серед них є Standard&Poor's та Moody's Investors Service Inc. Такі рейтинги облігацій часто використовують як показники ймовірності банкрутства емітента.

Зміст

Список використаних джерел

1. V. Vapnik (2006). Estimation of Dependences Based on Empirical Data, Springer Science & Business Media, page 424.

2. Vapnik, Vladimir N. (2000). The Nature of Statistical Learning Theory. Springer. doi:10.1007/978-1-4757-3264-1. ISBN 978-1-4419-3160-3. S2CID 7138354.

3. Eykhoff, Pieter, (2014). System identification : parameter and state estimation, London ; New York [etc.] : Wiley-Interscience

4. Eykhoff, Pieter, (1972). Identification of Systems: D. Graupe (Van Nostrand Reinhold), page 276, https://doi.org/10.1177/002072097401100215.

5. Shannon, Claude E. (July 1948). "A Mathematical Theory of Communication [reprint with corrections]" (PDF). Bell System Technical Journal. 27 (3): 379–423. doi:10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x. hdl:11858/00-001M-0000-002C-4314-2

6. Ivakhnenko, A.G.; Lapa, V.G. (1967). Cybernetics and Forecasting Techniques (Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics, v.8 ed.). American Elsevier. ISBN 978-0444000200.

7. Takao, S.; Kondo, S.; Ueno, J.; Kondo, T. (2017). "Deep feedback GMDH-type neural network and its application to medical image analysis of MRI brain images". Artificial Life and Robotics. 23 (2): 161–172. doi:10.1007/s10015-017-0410-1. S2CID 44190434.

8. Ivakhnenko, A.G.; Stepashko, V.S. *(1985).* Pomekhoustojchivost' Modelirovanija (Noise Immunity of Modeling). Kyiv: Naukova Dumka. Retrieved 2019-12-26.

9. George A. F. Seber (2009). Multivariate Observations, John Wiley & Sons, 2009, - 712 pages, The Wiley-Interscience Paperback.

10. Markowitz, H.M. (1952). "Portfolio Selection". The Journal of Finance. 7 (1): 77– 91 doi:10.2307/2975974.

11. Markowitz, H.M. (1952). "The Utility of Wealth". The Journal of Political Economy. LX (2): 151– 158. doi:10.1086/257177

12. Башняков О. М. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем / О. М. Башняков, Ф. Г. Гаращенко, В. В. Пічкур. – К.: ВПЦ "Київ. у-т", 2000.

13. Zoutendijk G (1970). Nonlinear programming, computational methods. In: Integer and Nonlinear Programming / G. Zoutendijk ; ed. J. Abadie. – Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1970.

14. Itô, Kiyoshi (1951). On a formula concerning stochastic differentials. Nagoya Math. J. 3: 55–65.