Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Капустян Олена Анатоліївна

УДК 517.97

Оптимальне керування та гарантоване оцінювання у розподілених системах з малим параметром

01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
О. А. Капустян

Науковий консультант -
Наконечний Олександр Григорович,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ–2020

АНОТАЦІЯ

Капустян О. А. Оптимальне керування та гарантоване оцінювання у розподілених системах з малим параметром. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, Київ, 2020.

Дисертація присвячена побудові та обґрунтуванню наближених оптимальних керувань у формі оберненого зв'язку та мінімаксних оцінок для широких класів розподілених систем з малим параметром.

Дисертація складається зі вступу, шести розділів, списку використаних джерел та додатків.

У першому розділі проведено аналіз літературних джерел за темою дисертаційних досліджень.

У другому розділі наведено основні поняття і результати теорії еволюційних рівнянь, оптимального керування розподіленими системами та теорії усереднення диференціальних операторів, які використовуються в дисертації.

У третьому розділі розглядаються задачі оптимального керування тепловими і хвильовими процесами в мікронеоднорідних середовищах. Такі процеси описуються за допомогою початково-крайових задач для параболічних та гіперболічних рівнянь, де коефіцієнти диференціального оператора, а також коефіцієнти цільового функціонала залежать від функцій виду $a(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ – малий параметр. При цьому вважаємо, що цільовий функціо-

нал є в певному сенсі збуреним і не є квадратичним при $\varepsilon > 0$. Вважаючи, що при переході до усереднених параметрів відповідна лінійно-квадратична задача допускає формулу точного синтезу, в цьому розділі будується і обґрунтовується наближене керування у формі оберненого зв'язку. Зокрема, в першому і другому підрозділах побудовано і обґрунтовано наближене розподілене керування у формі оберненого зв'язку на скінченному та нескінченному часовому проміжку для задачі оптимального керування, що складається з параболічного рівняння зі швидко коливними коефіцієнтами в головній частині диференціального оператора та з неквадратичного функціоналу якості. В третьому підрозділі побудовано і обґрунтовано наближене розподілене керування у формі оберненого зв'язку для задачі оптимального керування, що складається з гіперболічного рівняння зі швидко коливними коефіцієнтами в головній частині диференціального оператора та з неквадратичного функціоналу якості. В четвертому підрозділі побудовано і обґрунтовано наближене керування у формі оберненого зв'язку для задачі оптимального керування розв'язками еволюційного включення з неавтономними збуреннями в коефіцієнтах.

У четвертому розділі розглядаються задачі оптимального керування дифузійними і хвильовими процесами з нелінійними та многозначними збуреннями. Такі процеси описуються за допомогою початково-крайових задач для слабко-нелінійних параболічних рівнянь та систем типу реакції-дифузії, слабко-нелінійних гіперболічних рівнянь та еволюційних включень субдиференціального типу. У всіх задачах цього розділу розглядається зосереджене керування $u(t)$, квадратичний цільовий функціонал та збурення виду $\varepsilon F(y)$, де y - фазова змінна, $\varepsilon > 0$ – малий параметр. На основі формул точного (параметричного за наявності обмежень) синтезу для лінійно-квадратичних задач будується і обґрунтовується наближене керування у формі оберненого зв'язку для відповідної слабко-нелінійної задачі. У першому і другому підрозділах побудовано і обґрунтовано наближений обмежений синтез та наближений регулятор для задачі оптимального керування, що складається з рівняння типу реакції-дифузії з малим параметром при нелінійності та квадратичного функціоналу якості. У третьому підрозділі побудовано і обґрунтовано наближений обмежений синтез для задачі оптимального керування, що складається зі слабко-нелінійного хвильового рівняння та квадратичного функціоналу якості. У четвертому підрозділі побудовано і обґрунтовано наближене оптимальне керування у формі оберненого зв'язку для еволюційного включення субдиференціального типу з многозначним напівнеперервним зверху збуренням.

У п'ятому розділі розглядаються задачі оптимального керування еліптичними і параболічними рівняннями у секторальних областях із квадратичними критеріями якості та нелокальними крайовими умовами. Основними результатами є одержання точних і наближень формул оптимальних керувань для відповідних задач. Принципова складність полягає в тому, що система власних функцій оператора Лапласа з розглянутими нелокальними крайовими умовами не є повною, що не дозволяє звести вихідну задачу до зліченної кількості одновимірних задач оптимального керування за допомогою методу Фур'є. Часткову декомпозицію можна провести, використовуючи біортонормовані системи функцій. У першому підрозділі розв'язана задача знаходження точного та побудови наближеного керування для задачі оптимального керування розв'язками еліптичного рівняння з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі з квадратичним цільовим функціоналом. У другому підрозділі розглядається задача оптимального керування розв'язками параболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами. Використовуючи ряди Фур'є-Бесселя, задача зводиться до зліченної послідовності нескінченновимірних задач, які, в силу часткової декомпозиції, є залежними між собою. Виділено клас початкових функцій, для яких доведено розв'язність відповідних задач оптимального керування з квадратичним критерієм якості. У третьому підрозділі розв'язана задача з мінімальною енергією для параболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі.

У шостому розділі розглядається задача точного та наближеного мінімаксного оцінювання функціоналу від розв'язків параболічних та гіперболічних задач зі швидко коливними коефіцієнтами. Вимірюється не сама величина, яка описує досліджуване явище, а спостерігається деяке значення від розв'язку із оператором, що визначає спосіб вимірювання. Проблема ускладняється не лише через наявність швидко коливних коефіцієнтів типу $a(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, в головній частині оператора, та невідомих функції, які входять до рівняння та початкових умов, а ще й через те, що спостереження є нелінійним (має оператор типу суперпозиції), що є в певному сенсі збуреним по відношенню до лінійного випадку ($\varepsilon = 0$). Вважаючи, що при переході до усереднених параметрів спостереження стає лінійним, можемо скористатись традиційним мінімаксним підходом для знаходження розв'язку. На основі точної мінімаксної оцінки для усередненої задачі ($\varepsilon = 0$) у першому та другому підрозділах побудовані та обґрунтовані наближені мінімаксні оцінкі функціоналів від розв'язків параболічних та гіперболічних задач зі швидко коливними коефіцієнтами при нелінійних спостереженнях. У третьому підрозділі побудовані та обґрунтовані наближені мінімаксні оцінки для параболічних рівнянь зі швидко коливними коефіцієнтами та з нелінійним стохастичним спостереженням. У четвертому підрозділі розв'язано задачу мінімаксного оцінювання розв'язків періодичних за часом лінійних параболічних рівнянь з крайовими умовами Неймана.

Ключові слова: оптимальне керування, керування у формі оберненого зв'язку, мінімаксне оцінювання, швидко коливні коефіцієнти, усереднення, малий параметр, параболічне рівняння, гіперболічне рівняння, еволюційне включення, рівняння реакції-дифузії, нелокальні крайові умови.

Список публікацій здобувача

Основні публікації:

1. Kapustyan O. A. Approximate Averaged Synthesis of the Problem of Optimal Control for a Parabolic Equation / O. A. Kapustyan, A. V. Sukretna // Ukrainian Mathematical Journal. – 2004. – Volume 56, Issue 10. -– PP. 1653-1664.

2. Капустян О. А. Наближений синтез оптимального керування для задачі оптимальної стабілізації зі швидко осцилюючими коефіцієнтами / О. А. Капустян. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2005. – № 1. -– с. 29-33 (ISSN 1681- 6048).

3. Капустян О. А. Мінімаксні оцінки функціоналів від періодичних за часом розв'язків крайових задач Неймана для параболічних рівнянь / О. А. Капустян, В. О. Капустян, Ю. К. Подлипенко. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2005. – Випуск 2. – С. 220-232.

4. Kapustyan O. A. Approximate bounded synthesis for one weakly nonlinear boundary-value problem / O. V. Kapustyan, O. A. Kapustyan, A. V. Sukretna // Nonlinear Oscillations. – 2009. – Vol. 12, Issue 3, July 2009. – PP. 297–304 (Translated from Neliniini Kolyvannya, Vol. 12, No. 3, pp. 291–298, July–September, 2009).

5. Капустян О. А. Наближені екстремальні розв'язки для еволюційних включень субдиференціального типу / О. А. Капустян, В. В. Ясінський. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2009. – № 4. – С. 109-116.

6. Капустян О. В. Наближений синтез для задачі оптимального керування для нелінійного хвильового рівняння / О. В. Капустян, О. А. Капустян, А. В. Сукретна. // Наукові вісті НТУУ КПІ. – 2010. – № 4. – С. 72-77.

7. Kapustyan O. A. Approximate stabilization for a nonlinear parabolic boundary-value problem / O. V. Kapustyan, O. A. Kapustyan, A. V. Sukretna // Ukrainian Mathematical Journal. – 2011. – Volume 63, Issue 5, October 2011. – PP. 759-767 (Translated from Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, 2011, Vol. 63, № 5, pp. 654-661).

8. Капустян О. А. Задача наближеної стабілізації для параболічного включення / О. А. Капустян. // Журнал обчислювальної та прикладної математики, 2011. – № 1 (104). – С. 62-67.

9. Капустян О.А. Наближений розв'язок однієї нескінченновимірної задачі оптимальної стабілізації з неавтономними збуреннями в коефіцієнтах / О. А. Капустян, В. В. Ясінський. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2012. – № 4. – С. 111-115.

10. Капустян О. А. Наближений регулятор для еволюційного включення субдиференціального типу / О. А. Капустян, В. В. Ясінський. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2012. - № 1. – с. 87–93.

11. Капустян О. А. Задача оптимального керування для еліптичного рівняння з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі / О. А. Капустян, В. О. Капустян, О. К. Мазур // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2012. – № 2 (108). – С. 3-9.

12. Kapustyan O. V. Approximate bounded synthesis for distributed systems / O. V. Kapustyan, O. A. Kapustian, A. V. Sukretna. – Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2013. – 235 p.

13. Kapustian O. A. Averaging in the optimal control problem for the reaction-diffusion equation with multivalued interaction function / O. A. Kapustian // Таврійський вісник інформатики і математики (Tavrian Bullettin of Informatics and Mathematics). – 2013. – Vol. 4. – P. 55–64.

14. Kapustyan O. A. Problem of Optimal Control for the Poisson Equation with Nonlocal Boundary Conditions / O. V. Kapustyan, O. A. Kapustyan, O. K. Mazur. //Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 201, Issue 3. – PP. 325-334 (Translated from Neliniini Kolyvannya, 2013, July–September, 2013, Vol. 16, No. 3, pp. 350-–358).

15. Kapustian O. A. Distributed optimal control in one non-self-adjoint boundary value problem / O. A. Kapustian, V. O. Kapustyan, O. K. Mazur. // Continuous and Distributed Systems, Series: Solid Mechanics and Its Applications, Springer. – 2014. – Vol. 31, Issue 12. – P. 45–52.

16. Капустян О. А. Розв'язність задачі оптимального керування з мінімальною енергією для однієї параболічної крайової задачі з нелокальними крайовими умовами / О. А. Капустян, О. К. Мазур // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2015. – № 3 (120). – С. 6–10.

17. Kapustian O. A. The Optimal Control Problem for Parabolic Equation with Nonlocal Boundary Conditions in Circular Sector / O. V. Kapustyan, O. A. Kapustian, V. O. Kapustyan, O. K. Mazur // Continuous and Distributed Systems II. Theory and Applications, Series: Studies in Systems, Decision and Control, Springer. – 2015. – Vol. 30. – P. 297–314.

18. Kapustian O. A. The Optimal Control Problem with Minimum Energy for One Nonlocal Distributed System / O. A. Kapustian, O. K. Mazur //

Chapter 23 in Book *Advances in Dynamical Systems and Control*, Series: Studies in Systems, Decision and Control, Springer International Publishing Switzerland. – 2016. – Vol. 69. – P. 417–427.

19. Капустян О. А. Обґрунтування наближеного синтезу в розподіленій задачі оптимального керування з цільовим функціоналом типу Немицького / О. А. Капустян // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2016. - № 3. – С. 73–78.

20. Kapustian O.A. Approximate homogenized synthesis for distributed optimal control problem with superposition type cost functional / O. A. Kapustian, V. V. Sobchuk // Statistics, Optimization and Information Computing. – 2018. – Vol. 6, № 4. – P. 233–239.

21. Kapustian O.A. Approximate optimal regulator for distributed control problem with superposition functional and rapidly oscillating coefficients / O. A. Kapustian // Modern Mathematics and Mechanics (Part of the Understanding Complex Systems (UCS) book series). -– 2019. – P. 481–491

22. Kapustian O. Minimax Estimation of Solutions of the First Order Linear Hyperbolic Systems with Uncertain Data / O. Kapustian, O. Nakonechnyi, Yu. Podlipenko // Statistics, Optimization and Information Computing. – 2019. – Vol.7 (4). – P. 695–708.

23. Капустян О. А. Наближене мінімаксне оцінювання функціоналів від розв'язку параболічної задачі зі швидко коливними коефіцієнтами при нелінійних спостереженнях / О. А. Капустян, О. Г. Наконечний. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2019. – № 2. -– С. 94–104.

24. Kapustian O. A. Approximate Guaranteed Mean Square Estimates of Functionals on Solutions of Parabolic Problems with Fast Oscillating Coefficients Under Nonlinear Observations / O. A. Kapustian, O. G. Nakonechnyi, A. O. Chikrii // Cybernetics and Systems Analysis. – September 2019. – Vol. 55, Iss. 5. – P. 785-–795 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, No. 5, September–October, 2019, pp. 95-–105).

25. О. А. Капустян. Мінімаксне оцінювання функціоналів від розв'язків крайової задачі для параболічного рівняння зі швидко осцилюючими коефіцієнтами. // Міжнародна конференція "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU-2008), Київ-Рівне, 12-17 травня 2008 р. – С. 123–124.

26. О. А. Капустян, А. В. Сукретна. Наближене оптимальне керування для нелінійного хвильового рівняння. // Міжнародна наукова конференція "Проблеми стійкості та оптимізації динамічних систем детермінованої та стохастичної структури Чернівці, 17-21 жовтня 2010 р. – С.73–74.

27. О. А. Капустян, А. В. Сукретна. The problems of approximated synthesis and stabilization for nonlinearly perturbed evolution equations // Міжнародна конференція пам'яті член-кореспондента НАНУ В.С. Мельника "Nonliear Analysis and Applications Київ, 4-6 квітня 2012 р. – С. 41.

28. О. В. Капустян, О. А. Капустян. Approximated regulator in optimal control problem for parabolic inclusion // XX Міжнародна конференція "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU-2012), Брно, Чехія, 17-21 вересня 2012 р. - С. 53.

29. O. A. Kapustian, O. K. Mazur. The optimal control problem for parabolic equation with non-local boundary conditions in circular sector // Міжна-

родна конференція "Dynamical System Modelling and Stability Investigation: Modelling and Stability м. Київ, 28-30 травня 2015. - С.

30. O. A. Kapustian. The Optimal Control Problem with Minimum Energy for Parabolic Equation with Nonlocal Boundary Conditions in the Class of Non-stationary Controls // XXVIII Міжнародна конференція "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU-2016), Брно, Чехія, 25-30 серпня 2016 р. – С. 59.

31. О. А. Капустян, О. Г. Наконечний, Ю. К. Подлипенко. Minimax estimates of solutions of the first order linear hyperbolic systems under uncertainties // XXXII Міжнародна конференція "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU-2018), Прага, Чехія, 27-31 серпня 2018 р. – С. 68.

32. O. A. Kapustian, O. G. Nakonechnyi. Approximate Estimation of Functionals of the Solutions of Parabolic Equation Under Nonlinearity in Output // Proceedings of 2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT-2019), Kyiv, 18-20 December, 2019. – PP. 16–21.

ABSTRACT

Kapustian O. A. Optimal control and guaranteed estimation in distributed systems with small parameter. – Manuscript.

Thesis for the scientific degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences in the speciality 01.05.04 – System Analysis and Optimal Decision Theory. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2020.

This thesis is devoted to the construction and substantiation of approximate optimal controls in the feedback form and guaranteed estimates for wide classes of distributed systems with small parameter.

The thesis consists of an introduction, six sections, a list of used literature and additions.

In Chapter 1, the analysis of literature sources on the topic of the thesis research is carried out.

In Chapter 2, it is presented the basic concepts and results of evolutionary equation theory, optimal control of distributed systems and the homogenization theory for differential operators used in the thesis.

Chapter 3 deals with the optimal control problems of thermal and wave processes in microhomogeneous media. Such processes are described by initial boundary value problems for parabolic and hyperbolic equations, where the coefficients of the differential operator, as well as the coefficients of the objective functional depend on functions of the form $a(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ is a small parameter. In this case, we consider that the objective functional is perturbed in some sense and it is not quadratic at $\varepsilon > 0$. We assume that the corresponding linear-quadratic problem with averaged parameters admits the exact synthesis formula. Under such assumption, in this chapter we construct and substantiate approximate control in the form of feedback.

In particular, in the first and second sections, an approximate distributed control in the feedback form is constructed and substantiated for the optimal control problem, which consists of a parabolic equation with rapidly oscillating coefficients in the main part of the differential operator and a non-quadratic quality criterion on a finite and infinite time interval. In the third section, the approximate distributed control in the feedback form is constructed and substantiated for the optimal control problem consisting of a hyperbolic equation with rapidly oscillating coefficients in the main part of the differential operator and a non-quadratic objective functional. In the fourth section, the approximate control in the feedback form is constructed and substantiated for the optimal control problem of evolutionary inclusion solutions with non-autonomous perturbations in coefficients.

In Chapter 4, the optimal control problems for diffusion and wave processes with nonlinear and multivalued perturbations are considered. Such processes are described by initial boundary value problems for weakly nonlinear parabolic equations and systems of reaction-diffusion type, weakly nonlinear hyperbolic equations and evolutionary inclusions of sub-differential type. In this chapter, for all problems we consider the lumped control $u(t)$, the quadratic objective functional, and the perturbation of the form $\varepsilon F(y)$, where y is a phase variable, $\varepsilon > 0$ is a small parameter. On the basis of formulas of exact (parametric in the presence of restrictions) synthesis for linear-quadratic problems, approximate feedback control is constructed and substantiated for the corresponding weakly nonlinear problem. In the first and second sections, an approximate bounded synthesis and an approximate controller are constructed and substantiated for the optimal control problem, which consists of an equation of reaction-diffusion type with small parameter at nonlinearity and quadratic quality criterion.In the third section, an approximate bounded synthesis is constructed and substantiated for the optimal control problem consisting of the weakly nonlinear wave equation and quadratic objective functional. In the fourth section, the approximate optimal control in the feedback form is constructed and substantiated for the evolutionary inclusion of a sub-differential type with a multivalued semicontinuous perturbation.

Chapter 5 deals with the optimal control problems for elliptic and parabolic equations in sectorial domains with quadratic objective functionals and nonlocal boundary conditions. The main results are obtaining exact and approximate formulas of optimal control for the corresponding problems. The main difficulty is that the system of eigenfunctions of the Laplace operator is not complete under considered nonlocal boundary conditions, and it does not allow to reduce the initial problem to a number of one-dimensional optimal control problems by the Fourier method. Partial decomposition can be carried out using biorthonormal function systems. In the first section, we prove the solvability of the optimal control problem for elliptic equation with nonlocal boundary conditions in a circular sector with terminal quadratic cost functional in the class of distributed controls. In the second section, the optimal control problem for a parabolic equation with nonlocal boundary conditions is considered. Using the Fourier-Bessel series, the problem is reduced to a finite sequence of infinite-dimensional problems which, by virtue of partial decomposition, are interdependent. We select the class of initial functions for which the solvability of the corresponding optimal control problems with the quadratic quality criterion is proved. In the third section, the problem with the minimum energy for a parabolic equation with nonlocal boundary conditions in the circular sector is solved.

In Chapter 6, the problem of exact and approximate guaranteed estimation for functional from solutions of parabolic and hyperbolic problems with rapidly oscillating coefficients. We measure not the value that describes the system, but some value from the solution with the operator that determines the method of measurement. The problem is complicated by the presence of a small parameter in the coefficients, and as well, by the fact that the observation is nonlinear (has a superposition type operator). Such observation is in some sense perturbed with respect to the linear case ($\varepsilon = 0$). In the first and second sections, on the basis of the exact minimax estimation for the problem with unperturbed ($\varepsilon = 0$) parameters, the approximate minimax estimations are constructed and substantiated for parabolic and hyperbolic minimax estimation problems in the deterministic case with nonlinear observation. In the third section, approximate minimax estimates for parabolic equations with rapidly oscillating coefficients and with nonlinear stochastic observation are constructed and substantiated. In the fourth section, the problem of minimax estimating the solutions of time-periodic linear parabolic equations with Neumann boundary conditions is solved.

Key words: optimal control, feedback control, minimax estimation, rapidly oscillating coefficients, homogenization, small parameter, parabolic equation, wave equation, evolutionary inclusion, reaction-diffusion equation, nonlocal boundary conditions.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми.

Для людства початок XXI сторіччя відзначився усвідомленням необхідності запровадження нових ресурсоощадливих технологій. Під такими технологіями ми розуміємо не лише економічність та ефективне використання природних і людських ресурсів, а також екологічність та перероблюваність виробленої продукції. Енергоощадливість, розробка нових сучасних матеріалів, автоматизація виробничих процесів, розвиток медичних та аграрних технологій, підвищення обороноздатності – ці виклики потребують розробки нового математичного апарату для ефективного аналізу, моделювання та керування процесами різної природи. Підвалинами розробки такого апарату став справжній науковий бум у середині XX сторіччя. Зокрема, саме тоді великий розвиток отримала теорія оптимального керування завдяки розробці принципу максимуму Понтрягіна та методу динамічного програмування Беллмана. За принципом максимуму отримане оптимальне керування залежить лише від часу та початкових умов (так зване програмне керування). Побудоване за методом динамічного програмування оптимальне керування залежить лише від значення фазової змінної у поточний момент часу. Таке керування називається регулятором, синтезом або керуванням із оберненим зв'язком.

У фундаментальних працях Л. С. Понтрягіна, R. Bellman, M. M. Красовського, Б. М. Пшеничного та їх наукових шкіл було закладено основи теорії оптимального керування процесами, що описуються системами із зосередженими параметрами. Такі задачі оптимального керування зазвичай описуються системами звичайних диференціальних рівнянь. Для широких класів керованих процесів, що описуються такими рівняннями, було одержано необхідні та достатні умови оптимальності, а також запропоновано ефективні алгоритми побудови програмних оптимальних керувань. При цьому слід відмітити, що керування у формі оберненого зв'язку має перевагу над програмним з точки зору прикладних та інженероних задач, оскільки воно враховує поточні зміни у системі. Проте довести існування такого керування для конкретних керованих систем вдається далеко не завжди. Більше того, задача побудови оптимального синтезу в загальному випадку залишаєься відкритою проблемою, що має задовільний розв'язок лише для лінійно-квадратичних задач оптимального керування (де зводиться до диференціального або алгебраїчного рівняння Ріккаті) та для скінченновимірних систем малої розмірності (О. М. Лєтов). Природно, що проблеми знаходження feedback-керувань тільки ускладнюються, коли ми переходимо до вивченння задач оптимального керування в процесах з розподіленими параметрами, зокрема, які описуються рівняннями в частинних похідних. Створення теорії оптимального керування для систем із розподіленими параметрами було здійснене у працях J.-L. Lions, A. Bensoussan, G. Da Prato, M. C. Delfour, S. K. Mitter, V. Barbu, W. Fleming, R. Rishel, H. Amann, X. Li, J. Yong, А. Ф. Фурсікова, А. І. Єгорова, А. Г. Бутковського, Т. К. Сіразетдінова та багатьох інших. Зокрема, варіаційні методи розвивалися в роботах J.-L. Lions, L. D. Berkovitz, J.-P. Aubin, I. Ekeland, В. С. Мельника, М. З. Згуровського, О. М. Новікова, В. І. Іваненка, V. Barbu, В. І. Плотнікова, В. А. Якубовича, К. А. Лур'є. У зв'язку із численними прикладними застосуваннями в механіці та фізиці активно розвиваються методи розв'язання еволюційних та оптимізаційних задач з виродженими, розривними, стохастичними та многозначними коефіцієнтами (J.-L. Lions, Г. Дюво, V. Barbu, А. А. Толстоногов, А. В. Плотніков, І. А. Джалладова, П.

І. Когут, П. О. Касьянов).

Проблема синтезу оптимального керування в нескінченновимірних системах, як на скінченному проміжку часу, так і на півосі (задача оптимальної стабілізації) розглядалася в роботах A. Bensoussan, А. І. Єгорова, М. Р. Рахімова, Б. М. Бублика, О. І. Невідомського, В. О. Капустяна. Одним із способів розв'язання цієї проблеми є редукція до скінченновимірної задачі, аналіз відповідного функціонального рівняння Беллмана, яке для деяких класів лінійно-квадратичних задач допускає розв'язання і потім граничний перехід (R. F. Curtain, A. J. Pritchard). Як результат, можна довести існування оптимального синтезу і виписати для нього диференціально-операторне або операторне рівняння Ріккаті. В окремих випадках, користуючись спектром диференціального оператора, можна звести вихідну задачу до нескінченної сукупності задач оптимального керування малої розмірності. Цей підхід виявляється особливо ефективним за наявності обмежень на керування, коли з'являється точка переключення і, як наслідок, у формулу оберненого зв'язку входить додаткове функціональне рівняння (формула параметричного синтезу). Відповідні результати вперше були одержані в роботах А. І. Єгорова, В. О. Капустяна, В. Є. Білозьорова.

Важливою проблемою, тісно пов'язаною з проблематикою теорії оптимального керування, є створення ефективних методів моделювання, аналізу та оптимізації систем в умовах невизначеності як для детермінованих, так і для стохастичних систем. Основи такої теорії були започатковані у працях М. М. Красовського, О. Г. Наконечного, Ф. Г. Гаращенка, Ю. К. Подлипенка, А. Б. Куржанського, W. Fleming, R. Rishel, T. Basar. Теоретичні результати в цій галузі стали основою для розробки ефективних алгоритмів розв'язання задач оцінювання, прогнозування, оптимізації, дослідження стійкості та аналізу систем, що працюють в умовах невизначеності або неповноти даних. Одним із потужних інструментів для розв'язання таких задач став мінімаксний підхід, який був розвинений для систем з розподіленими параметрами в роботах О.Г. Наконечного та його учнів.

При моделюванні керованих процесів у мікронеоднорідних середовищах, як правило, виникають диференціальні рівняння в частинних похідних, що містять швидко коливні коефіцієнти. Такі процеси виникають у композитних матеріалах, різноманітних дисперсних середовищах, при фільтрації, тощо. Розрахунок характеристик типу теплопровідності або електропровідності для таких середовищ надто ускладнюється через наявність малого параметру в коефіцієнтах диференціальних операторів. Це зумовило розвиток асимптотичного аналізу таких рівнянь і призвело до створення теорії усереднення диференціальних операторів. На теперішній час питанням усереднення та G-збіжності диференціальних операторів присвячено роботи F. Colombini, S. Spagnolo, О. А. Олейнік, В. В. Жикова, С.М. Козлова, J.-L. Lions, E. Sanchez-Palencia, G. Dal Maso, В. О. Марченка, Є. Я. Хруслова, A. Pankov, Ф. Л. Черноуська та багатьох інших. Для нескінченновимірних керованих систем методи теорії усереднення розвивались у роботах М.Г. Дмитрієва, A. Bensoussan, У. Е. Райтума, G. Papanicolaou, G. Buttazzo, O. Alvarez, Л. Д. Акуленко, S. Kesavan, S. Migorski, N. S. Papageorgiou, Z. Denkowski, S. Mortola, П.І. Когута, Т.А. Мельника, G. Leugering та інших. Зокрема, питання побудови точного та наближеного усередненого синтезу для ряду лінійно-квадратичних задач з обмеженим зосередженим керуванням розглядалися в роботах В. О. Капустяна та А. В. Сукретної, за наявності імпульсних збурень - в роботах А. В. Русіної.

Все викладене вище говорить про важливість проблеми побудови наближених оптимальних керувань у формі оберненого зв'язку та мінімаксних оцінок для розподілених систем із малим параметром і обумовлює актуальність тематики дисертаційних досліджень.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота пов'язана з тематикою досліджень кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, тема № 16БФ015-02 "Розробка нових математичних методів системного аналізу і теорії оптимальних рішень та їх застосування"(номер державної реєстрації 0116U002529) та тема № 19БФ015-02 "Розробка нових математичних методів аналізу та оптимізації систем в умовах невизначеності"(номер державної реєстрації 0119U100338).

Мета і завдання дослідження.

Метою дисертаційної роботи є побудова та обґрунтування наближених оптимальних керувань у формі оберненого зв'язку та мінімаксних оцінок для широких класів розподілених систем з малим параметром.

Об'єкт досліджень

Об'єктом досліджень є задачі оптимального керування та гарантованого оцінювання для еліптичних, параболічних і гіперболічних рівнянь та включень з малим параметром.

Предмет досліджень

Предметом дослідження є оптимальне керування у формі оберненого зв'язку та мінімаксні оцінки для розподілених систем з малим параметром.

Методи дослідження.

У роботі використовуються методи теорії рівнянь в частинних похідних, теорії оптимального керування, теорії мінімаксного оцінювання, методи нелінійного аналізу, методи теорії усереднення диференціальних операторів.

Наукова новизна одержаних результатів.

У дисертації вперше отримано наступні результати:

— побудовано і обґрунтовано наближене керування в формі оберненого зв'язку для задачі оптимального керування, що складається з параболічного рівняння зі швидко коливними коефіцієнтами в головній частині диференціального оператора та з неквадратичного функціоналу якості;

— побудовано і обґрунтовано наближений регулятор для задачі оптимального керування, що складається з параболічного рівняння зі швидко коливними коефіцієнтами в головній частині диференціального оператора та з неквадратичного функціоналу якості;

— побудовано і обґрунтовано наближене керування в формі оберненого зв'язку для задачі оптимального керування, що складається з гіперболічного рівняння зі швидко коливними коефіцієнтами в головній частині диференціального оператора та з неквадратичного функціоналу якості;

— побудовано і обґрунтовано наближене керування в формі оберненого зв'язку для задачі оптимального керування розв'язками еволюційного включення з неавтономними збуреннями в коефіцієнтах;

— побудовано і обґрунтовано наближений обмежений синтез та наближений регулятор для задачі оптимального керування, що складається з рівняння типу реакції-дифузії з малим параметром при нелінійності та квадратичного функціоналу якості;

— побудовано і обґрунтовано наближений обмежений синтез для задачі оптимального керування, що складається зі слабо-нелінійного хвильового рівняння та квадратичного функціоналу якості;

— побудовано і обґрунтовано наближене оптимальне керування в формі оберненого зв'язку для еволюційних включень субдиференціального типу з многозначним напівнеперервним зверху збуренням;

— розв'язана задача знаходження точного та побудови наближеного керування для задачі оптимального керування розв'язками еліптичного рівняння з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі з квадратичним цільовим функціоналом;

— розв'язана задача оптимального керування розв'язками параболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі з квадратичним цільовим функціоналом;

— розв'язана задача з мінімальною енергією для параболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі;

— побудовані та обгрунтовані наближені мінімаксні оцінки функціоналів від розв'язків параболічних задач зі швидко коливними коефіцієнтами при нелінійних спостереженнях;

— побудовані та обгрунтовані наближені мінімаксні оцінки функціоналів від розв'язків гіперболічних задач зі швидко коливними коефіцієнтами при нелінійних спостереженнях.

— побудовані та обгрунтовані наближені мінімаксні оцінки для параболічних рівнянь зі швидко коливними коефіцієнтами та з нелінійним стохастичним спостереженням;

— розв'язано задачу мінімаксного оцінювання розв'язків періодичних за часом лінійних параболічних рівнянь з крайовими умовами Неймана.

Практичне значення одержаних результатів.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати вносять вагомий внесок у теорію оптимального керування та гарантованого оцінювання для розподілених систем. Розроблені в роботі методи можуть бути використані при побудові наближених оптимальних регуляторів та мінімаксних оцінок для керованих процесів у мікронеоднорідних середовищах.

Особистий внесок здобувача.

Всі основні наукові результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. Визначення загального плану досліджень належить науковому консультанту Олександру Григоровичу Наконечному. У роботах, що виконані у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає в наступному: [1] – розроблено метод побудови та обґрунтування наближеного синтезу для параболічного рівняння; [3] – доведено теорему про мінімаксну оцінку функціоналу від періодичних розв'язків лінійного параболічного рівняння з крайовими умовами Неймана; [4 - 6, 26, 27] – доведено існування оптимального керування та обґрунтовано наближений синтез для слабко-нелінійних еволюційних рівнянь; [7, 9, 10, 28] – доведено існування оптимального керування та обґрунтовано наближений регулятор для слабко-нелінійних еволюційних рівнянь та включень; [11, 14 - 18, 29] – доведено теореми про існування точних та наближених розв'язків для задач оптимального керування, що описуються еліптичними та параболічними рівняннями з нелокальними умовами; [12] – побудовано та обґрунтовано наближені керування у формі оберненого зв'язку для слабко-нелінійних параболічних та гіперболічних рівнянь; [20] – доведено теорему про наближений усереднений синтез для параболічного функціоналу типу суперпозиції; [22, 31] – доведено твердження про еквівалентність задачі ооцінювання до задачі оптимального керування, про мінімаксну оцінку функціоналу від розв'язків гіперболічних рівнянь першого порядку; [23, 32] – доведено теорему про мінімаксну оцінку функціоналу від розв'язків параболічного рівняння зі швидко коливними коефіцієнтами при нелінійних детермінованих спостереженнях і запропоновано процедуру побудови наближеної оцінки для вихідної задачі; [24] – доведено теорему про існування гарантованої оцінки функціоналу від розв'язків параболічного рівняння зі швидко коливними коефіцієнтами при нелінійних стохастичних спостереженнях і запропоновано процедуру побудови наближеної оцінки для вихідної задачі.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертації доповідались та обговорювалися на міжнародних наукових конференціях та семінарах, серед яких:

— Міжнародна конференція "Dynamical System Modelling and Stability Investigation: Modelling and Stability DSMSI, Київ, 2003;

— II Міжнародна конференція, присвячена 90-річчю з дня народження член-кореспондента НАН України Г.М. Положего "Обчислювальна та прикладна метематика Київ, 2004;

— Міжнародна школа-семінар "Problems of Decision Making under Uncertainties PDMU, Східниця, 2006;

— Міжнародна школа-семінар "Problems of Decision Making under Uncertainties PDMU, Київ-Рівне, 2008;

— Міжнародна школа-семінар "Constructive Methods for Nonlinear Boundary Value Problems Eger, Hungary, 2009;

— Міжнародна наукова конференція "Проблеми стійкості та оптимізації динамічних систем детермінованої та стохастичної структури Чернівці, 2010;

— XX Міжнародна конференція "Problems of Decision Making under Uncertainties PDMU, Brno, Czech republic, 2012;

— Міжнародна літня математична школа пам'яті В.А. Плотнікова, Одеса, 2013;

— Міжнародна конференція "Dynamical System Modelling and Stability Investigation: Modelling and Stability DSMSI, Київ, 2015;

— XXVIII Міжнародна конференція "Problems of Decision Making under Uncertainties PDMU, Brno, Czech republic, 2016;

— XXX Міжнародна конференція "Problems of Decision Making under Uncertainties PDMU, Vilnius, Lithuania, 2017;

— IV Міжнародна конференція пам'яті член-кореспондента НАН України В.С. Мельника "Nonlinear Analysis and Applications Київ, 2018;

— XXXII Міжнародна конференція "Problems of Decision Making under Uncertainties PDMU-2018, Prague, Czech republic, 2018;

— Scientific Seminar of The Department of Information Engineering, Computer Science and Mathematics, Universita degli Studi dell'Aquila, Aquila, Italy, 2019;

— науковий семінар кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник - проф. Наконечний О.Г., 2020);

— науковий семінар кафедри загальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник - проф. Станжицький О.М., 2019);

— науковий семінар НДВ системної математики Інституту прикладного системного аналізу Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"(керівник - проф. Касьянов П.О., 2019).

Публікації.

Основні результати дисертації опубліковані в 32 наукових роботах. З них 1 монографія [12], 23 статті у фахових виданнях, з яких 12 статей у вітчизняних фахових виданнях [2, 3, 5, 6, 8 - 11, 13, 16, 19, 23], 11 статей у виданнях, що входять до наукометричних баз Scopus та Web of Science [1, 4, 7, 14, 15, 17, 18, 20 - 22, 24], 6 статей [15, 17, 18, 20 - 22] у іноземних наукових періодичних виданнях, які відповідають вимогам МОН України щодо публікації результатів дисертаційних робіт у фахових наукових виданнях, зокрема, 5 статей опубліковано без співавторів, а також 8 тез доповідей на міжнародних наукових конференціях.

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, шістьох розділів, загальних висновків, списку цитованої літератури, що містить 262 назви, та додатків. Загальний обсяг роботи складає 321 сторінку друкованого тексту, з яких 258 сторінок основного тексту.

Автор дисертаці висловлює щиру подяку своєму науковому консультанту професору *Наконечному Олександру Григоровичу* за багаторічну увагу і підтримку.

Розділ 1
Огляд літератури та методика проведення дисертаційних досліджень

Знаходження оптимальних рішень при розв'язанні прикладних задач математики, механіки, фізики та інженерії завжди були предметом цікавості багатьох учених. Дослідження у цій галузі заклали базис для виникнння теорії екстремальних задач та варіаційного числення. Такі видатні науковці минулого як Бернуллі Д., Даламбер Ж., Лагранж Ж., Ейлер Л. вважаються фундаторами цих дисциплін. Не зважаючи на велику кількість отриманих з того часу результатів, стрімкий розвиток технологій у XX сторіччі вимагав розробки нового математичного апарату, за допомогою якого можна було б здійснювати ефективне керування складними об'єктами та виробничими процесами. Власне, комплекс розроблених математичних методів розв'язання цих суто практичних задач і набув назви теорія оптимального керування.

Розроблений колективом математиків під керівництвом Л.С. Понтрягіна *принцип максимуму* [122] став одним з фундаментальних результатів у теорії оптимального керування і дозволив розв'язувати цілі класи нових екстремальних задач із обмеженнями на фазові змінні або параметри керування шляхом зведення їх до проблеми пошуку екстремуму деякої допоміжної функції – функціїї Понтрягіна. Включаючи в себе необхідні умови класичного варіаційного числення як частковий випадок (L.D. Berkovitz [168]), принцип максимуму дозволив одержувати необхідні умови оптимальності для різноманітних прикладних задач керування, коли стан керованого процесу в кожний момент часу описується вектором у скінченовимірному просторі. Такі системи називають системами з зосередженими параметрами і описують за допомогою систем звичайних диференціальних рівнянь. У подальшому різним аспектам теорії керування скінченновимірними системами було присвячено багато робіт. Зокрема, проблеми керованості, спостережуваності, стійкості та стабілізації руху вивчалися М.М. Красовським та його учнями [83], необхідіні й достатні умови оптимальності для лінійних систем диференціальних рівнянь з опуклими інтегральними критеріями якості вивчалися E.B. Lee, L. Markus [89], питання чисельної апроксимації оптимального керування розглядалися в роботах Ф.П. Васильєва [18]. Умови оптимальності в скінченновимірних опуклих задачах і теорії ігор вивчалися Б.М. Пшеничним [123], в неопуклих задачах – F.H. Clarke [180], в задачах з многозначною та нечіткою правою частиною – в роботах А.В. Плотнікова, Н.В. Скрипнік [119]. Принцип максимуму у випадку нескінченного часового проміжку був досліджений у роботах H. Halkin [200], важливі узагальнення принципу максимуму для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням фазової змінної одержано в роботах А.М. Самойленка та М.О. Перестюка [130], А.А. Асланяна [5], В.А. Дихти [26], для рівнянь на часових шкалах – у працях О.М. Станжицького [253], для динамічних систем зі стохастичними коефіцієнтами – у працях І.А. Джалладової [190]. Асимптотичні методи та методи усереднення для задач оптимального керування вивчалися в роботах В.О. Плотнікова [118], Л.Д. Акуленко [1].

Інший підхід до розв'язання задач оптимального керування – *метод динамічного програмування* – був розроблений R. Bellman [7]. На відміну від принципу максимуму, який ґрунтується на аналізі функції стану керованого процесу, в методі динамічного програмування аналізується функція, яка початковим даним ставить у відповідність мінімальне значення критерію якості. Для досить широкого класу процесів (тих, що задовольняють принцип оптимальності Беллмана) вдається виписати рівняння для цієї функції. Це нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних першого порядку називається рівнянням Беллмана. Умови його розв'язності є достатніми умовами оптимальності методу Беллмана. Ключовим моментом при застосуванні методу Беллмана є форма одержаного оптимального керування. Якщо при застосуванні принципу максимуму ми одержуємо керування у "програмному"вигляді $u = u(t, y_0)$, тобто як функцію часу і початкових даних, то при застосуванні методу динамічного програмування Беллмана, оптимальне керування знаходиться у вигляді $u = u[t, y(t)]$, тобто є функцією лише часу і стану системи в цей момент часу. Така форма називається оберненим (feedback) зв'язком, або синтезом, або регулятором, і є значно привабливішою за програмну з точки зору інженерних застосувань, оскільки дозволяє здійснювати керування системою з урахуванням відхилень, зумовлених зміною стану системи в часі, тобто реалізує концепцію N. Wiener [240] керування об'єктом на основі його реальної, а не очікуваної поведінки. Ця концепція лягла в основу теорії систем автоматичного керування, що має широке коло застосувань – від автопілотів літальних апаратів до систем автоматизованого керування великими виробничими процесами [169]. Саме тому, починаючи з робіт О.А. Фельдбаума [141], математична теорія автоматичного керування, зокрема, оптимального керування з оберненим зв'язком, активно розвивається та насьогодні налічує тисячі наукових робіт. Слід відзначити, що перехід від feedback форми до програмної, як правило, не складає принципових ускладнень. Натомість, існування оптимального керування в програмiній формі, взагалі кажучи, не гарантує можливості представлення його у формі оберненого зв'язку

[133]. Таке представлення стає можливим у випадку відсутності обмеженнь на керування і виконання принципу оптимальності. Тоді, якщо формула оптимального керування у програмній формі є неперервною функцією початкових даних, то справедливий "граничний перехід" Красовського [83], який обґрунтовує побудову оптимального синтезу в таких задачах. Проте аналіз рівняння Беллмана був і залишається основним методом при побудові оптимальних регуляторів. Найбільший прогрес тут було досягнуто для лінійно-квадратичних задач, тобто для керованих систем, що описуться лінійними системами звичайних диференціальних рівнянь з квадратичним критерієм якості. За відсутності обмежень така задача може бути зведена до задачі Коші для матричного диференціального рівняння типу Ріккаті або до алгебраїчного матричного рівняння Ріккаті у випадку нескінченного часового інтервалу (аналітичне конструювання регуляторів) [34]. За наявності обмежень на керування виникає крайова задача для матричного рівняння типу Ріккаті, яка одержала задовільне розв'язання лише для систем малої розмірності (О.М. Лєтов [88]). Серед багатьох інших робіт на тему побудови керувань з оберненим зв'язком відмітимо результати В.І. Зубова та його учнів [42], присвячені побудові оптимальних регуляторів для різних класів механічних систем, результати В.М. Кунцевича [86] щодо синтезу систем автоматичного керування за допомогою функцій Ляпунова, монографію W. Fleming, R. Rishel [142] щодо розвитку методу динамічного програмування для стохастично-збурених систем, дослідження Б.М. Бублика та М.Ф. Кириченка [11] щодо оберненого зв'язку в умовах невизначеності, роботи В.І. Коробова [80], де побудова допустимого синтезу здійснювалась шляхом аналізу певної допоміжної функції – функції керованості, а також роботи E.D. Sontag [248],[249], де існування feedback

керування пов'язується з властивостями робасності та стійкості керованої системи.

Природно, що стрімкий розвиток теорії оптимального керування скінченновимірним системами, з одного боку, і величезна кількість прикладних задач (процеси тепло та масообміну, дифузійні процеси, задачі гідро та газодинаміки, багатофазні біохімічні системи), з іншого боку, зумовили появу теорії оптимального керування розподіленими системами, де керований процес описується рівняннями або системами рівнянь у частинних похідних. Нескінченновимірність фазового простору та необмеженість операторних коефіцієнтів зумовили ряд принципових ускладнень при перенесенні на ці задачі основних методів класичної скінченновимірної теорії оптимального керування. Вирішенню цих проблем при виводі необхідних умов оптимальності типу принципу максимуму для нескінченновимірних керованих процесів було присвячено роботи Ю. В. Єгорова [35], Ю. М. Воліна [22], О.І. Єгорова [30], В.І. Плотнікова [116], [117, 112], К.А. Лур'є [95], Т. Сиразетдінова [133], В. Якубовича [148] – [150], О.С. Матвєєва [97].

Паралельно з узагальненням принципу максимуму, активно розвивалися інші методи керування нескінченновимірними системами. Так, метод моментів для систем з розподіленими параметрами був розвинений в роботах А.Г. Бутковського [16]. Метод функцій Ляпунова при побудові регуляторів для нескінченновимірних систем розглядався В.І. Коробовим [81, 82], C. Prieur [228], Г.В. Кондратьєвим [79]. Принципово новий підхід – метод варіаційних нерівностей – був запропонований в роботах J.-L. Lions [91], [226], A. Bensoussan [167]. Цей метод дозволив одержувати результати щодо існування, апроксимації та необхідних умов оптимальності для широких класів розподілених систем, зокрема, він охоплював задачі оптимального керування лінійними еліптичними, параболічними та гіперболічними рівняннями з квадратичним функціоналом та опуклою множиною допустимих керувань. Розвинення цього методу для загальних нелінійних рівнянь та систем рівнянь в частинних похідних містяться в роботах С.Я. Серовайського [132], V. Barbu [159], для задач оптимального керування операторними та диференціально-операторними рівняннями та включеннями – у працях В.С. Мельника [99] – [101]. У роботах А.В. Фурсікова варіаційні методи застосовувались до задач керування системами типу Нав'є-Стокса [143]. Загальна теорія задач оптимального керування системами, що задані диференціальними включеннями в частинних похідних, була побудована в роботах В.С. Мельника, М.З. Згуровського, П.О. Касьянова [260], [40], [41], [261].

Перенесенню основних методів динамічного програмування на системи з розподіленими параметрами присвячено роботи А.Г. Бутковського [15], R.F Curtain [183], J. Zabczyk [259], О.І. Єгорова [191], [30], Т.К. Сіразетдінова [133], Б.М. Бублика та О.І. Невідомського [13, 14], W. Fleming, R. Rishel [142], А.І. Суботіна [135]. Як і в скінченновимірному випадку, найбільш повно був досліджений лінійно-квадратичний випадок, аналіз якого приводить до рівняння типу Ріккаті з операторними коефіцієнтами. Проте за наявності обмежень на керування така загальна схема не дає скільки небудь ефективного алгоритму для знаходження оптимального синтезу. Прогрес у цьому питанні можна досягти за рахунок редукції до послідовності скінченновимірних задач малої розмірності. Тоді для певних класів допустимих множин керувань та квадратичних функціоналів вдається побудувати оптимальний синтез. Так, для лінійно-квадратичних задач, що складаються з лінійного параболічного рівняння та напіввизначеного критерію якості, в класі обмежених зосереджених керувань оптимальний синтез на скінченному проміжку був побудований В.О. Капустяном [90], на нескінченному часовому проміжку (задача оптимальної стабілізації) – О.І. Єгоровим та Т. Михайловою [32], [32]. Синтез оптимального керування для хвильового рівняння досліджувався М.Р. Рахімовим [124] - [126]. У роботі В.О. Капустяна та В.Є. Білозьорова [8] розглянуто питання існування модального синтезу, тобто керування з оберненим зв'язком, що забезпечує наперед заданий спектр для відповідної замкненої системи.

Формули оптимального синтезу, про які йшлося вище, при застосуванні до реальних процесів "працюють"в умовах деякої невизначеності вихідних даних. Починаючи з робіт R.E. Kalman [46], поширеним є підхід, який полягає в побудові оцінки стану системи та побудові синтезу керування, який буде діяти на цю оцінку. У випадку лінійних скінченновимірних систем, на які діють випадкові збурення у вигляді білих шумів, а якість процесу керування визначається середньоквадратичним критерієм, такий результат було встановлено в роботах Ф.Л. Черноусько, В.Б. Колмановского [145]. Коли ж про неконтрольовані збурення відомо лише, що вони належать деяким множинам, то для скінченновимірних систем відповідні результати було отримано в роботах Б.М. Бублика, М.Ф. Кириченка, О.Г. Наконечного [12], А.Б Куржанського [87]. Ключові результати по узагальненню теорії мінімаксного оцінювання на системами з розподіленими параметрами належать О.Г. Наконечному. Зокрема, в [106] побудовано та обгрунтовано мінімаксні оцінки функціоналів, визначених на розв'язках операторних та диференціально-операторних рівнянь, у [107] відповідна теорія розвинена для еліпничних, параболічних та гіперболічних рівнянь в частинних похідних, в [108] наведені постановки мінімаксних оптимізаційних задач акустики та запропоновані методи їх розв'язання, в роботах [109], [110] мінімаксний підхід поширений на нескінченновимірні системи з випадковими збуреннями. Інші підходи до задач позиційного керування з оберненим зв'язком в умовах невизначеності для динамічних систем розвивалися в роботах М.М. Красовського [84], А.О. Чикрія [146], В.І. Максимова [96].

У застосуваннях важливим класом керованих процесів з розподіленими параметрами є процеси з малим параметром. У випадку сингулярних збурень асимптотичні методи для керованих процесів математичної фізики розвивалися в роботах J.-L. Lions [92], A.Bensoussan [165], А.Б. Васильєвої[19], В.Ф. Бутузова [20], В.О. Капустяна [48], [49], [53]. Іншим важливим підкласом процесів з малим параметром є процеси в мікронеоднорідних середовищах. Коефіцієнти, що описують локальні характеристики таких процесів, містять швидко коливні функції виду $a(\varepsilon^{-1}x)$, де $\varepsilon > 0$ – малий параметр. Виявилось, що ефективним інструментом при дослідженні таких задач є заміна в математичній моделі швидко коливних коефіцієнтів на певні усереднені константи. Аналіз цієї процедури і складає основу теорії усереднення, яка розвивалася в роботах S. Spagnolo [188], О.А. Олейнік, В.В. Жикова, С.М. Козлова [38], [37], E. Sanchez-Palencia [131], М.С. Бахвалова, Г.П. Панасенко [6], В.О. Марченко, Є.Я Хруслова [98], A. Pankov [234] та багатьох інших. Для задач оптимального керування нескінченновимірними системами методи теорії усереднення використовувались в роботах А.Б. Васильєвої [19], A. Bensoussan [165], [165], У.Е. Райтума [127], G. Buttazzo [171], Л.Д. Акуленко [1], S. Kesavan [219], S. Migorski [230], N.S. Papageorgiou [235], Z. Denkowski, S. Mortola [187], В.О. Капустяна [48], П.І. Когута [75], [76], [77], П.О. Касьянова [74], G. Leugering [222].

Проте, не дивлячись на досягнутий значний прогрес у цій галузі, для багатьох процесів, що описуються нескінченновимірними системами з малим параметром, проблема побудови та ефективної апроксимації оптимальних керувань у формі оберненого зв'язку та мінімаксних оцінок донедавна залишалася відкритою. Саме розв'язанню задач побудови та обґрунтуванню наближеного оптимального синтезу та мінімаксних оцінок для широких класів збурених розподілених систем і присвячена дана дисертаційна робота.

Спочатку в дисертації досліджуються нові класи задач оптимального керування тепловими і хвильовими процесами в мікронеоднорідних середовищах. Раніше для лінійно-квадратичних задач з напівизначеним китерієм якості, лінійним рівнянням зі швидко коливними коефіцієнтами та зосередженим керуванням $g(x)u(t)$, де функція g фіксована, побудова і обґрунтування наближеного усередненого оптимального керування в формі оберненого зв'язку без обмежень на керування в параболічному випадку розглядалася в роботах О.Г. Наконечного та О.А. Капустян [47], в гіперболічному – в роботах А.В. Сукретної [137]. Випадок обмеженого керування розглядався в роботах О.А. Капустян та А.В. Сукретної [209], [136]. У випадку квадратичного критерію та розподіленого керування $u(t,x)$ відповідні результати одержані в роботах А.В. Русіної [128], [129]. В усіх вищезгаданих роботах використовувався метод Фур'є, який в силу лінійно-квадратичної структури вихідної задачі гарантував її повне розщеплення, а отже, зводив дослідження до аналізу лінійно-квадратичних одновимірних задач оптимального керування. Зокрема, для вихідної задачі встановлювалась формула точного синтезу. Натомість у дисертаційній роботі розглядаються параболічні та гіперболічні рівняння з цільовим функціоналом, підінтегральна функція якого є функцією типу Каратеодорі та не є, взагалі кажучи, квадратичною при $\varepsilon > 0$. Як наслідок, вихідна задача оптимального керування не допускає розщеплення, а отже безпосереднього знаходження формули синтезу. Саме вирішенню цієї проблеми присвячено третій розділ дисертаційної роботи.

Наступний клас об'єктів, що розглядається в роботі – це задачі оптимального керування дифузійними і хвильовими процесами з нелінійними та многозначними збуреннями. Такі процеси описуються за допомогою початково-крайових задач для слабко-нелінійних параболічних рівнянь та систем типу реакції-дифузії, слабко-нелінійних гіперболічних рівнянь та еволюційних включень субдиференціального типу. Тут розглядається зосереджене обмежене керування $u(t)$, квадратичний цільовий функціонал та збурення виду $\varepsilon F(y)$, де y – фазова змінна, $\varepsilon > 0$ – малий параметр. Раніше для фіксованої функції керування u властивості глобальної розв'язності та властивості множини розв'язків для нелінійних еволюційних рівнянь з ліпшицевою нелінійністю були встановлені в роботах G. Sell [245], для систем типу реакції-дифузії та нелінійних хвильових рівнянь – в роботах R. Temam [254], М.І. Вишика, В.В. Чепижова [177], В.С.Мельника, О.В. Капустяна, J. Valero [202], для еволюційних включень – в роботах J.-P. Aubin [156], V. Barbu [158], О.О. Толстоногова [139], В.С. Мельника, М.З. Згуровського, П.О. Касьянова [261]. У незбуреному випадку (при $\varepsilon = 0$) за допомогою методу Фур'є можна встановити формули точного оптимального синтезу. При цьому обмеження на керування приводять до форми параметричного синтезу, тобто з'являється функціональне рівняння для точки переключення. Така конструкція може бути обґрунтована за допомогою методу Беллмана. Зокрема, для параболічного рівняння на скінченному часовому проміжку це було зроблено в роботах В.О. Капустяна, В.Є. Білозьорова [8], на нескінченному – в роботах О.І. Єгорова [32], для хвильового рівняння – в роботах А.В. Сукретної [137]. Проте за наявності нелінійного збурення $\varepsilon F(y)$ ми вже не можемо скористатись методом Фур'є для побудови оптимального синтезу. Крім того, у випадку неліпшицевого або многозначного відображення F задача стає некорректною в тому сенсі, що втрачається неперервна залежність розв'язку від початкових даних. Це суттєво ускладнює аналіз відповідної задачі оптимального керуванння і обґрунтування наближеного синтезу. Одержані в цьому напрямі результати складають четвертий розділ дисертаційного дослідження.

Далі в роботі розглядаються задачі оптимального керування еліптичними і параболічними рівняннями у двовимірних секторальних областях із квадратичними критеріями якості та нелокальними крайовими умовами. Нелокальними називають крайові задачі, де разом з граничними умовами присутні умови на значення розв'язку (або його похідних) у внутрішніх точках області. Серед таких задач з точки зору застосувань особливий інтерес становлять задачі з інтегральними умовами, тобто з заданим середнім значенням шуканої функції. Виявилось, що такі задачі зводяться до несамоспряжених крайових задач із заданими значеннями самої функції на одній частині границі області, і її похідних - на іншій частині. Їх систематичне вивчення розпочалося з робіт О.А. Самарського та його учнів. Зокрема, в роботах В.А. Іл'їна та Н.І. Іонкіна [44] було розглянуто параболічну задачу з нелокальними крайовими умовами на відрізку. Виявилось, що для таких задач в силу неповноти системи власних функцій метод Фур'є вимагає модифікації - декомпозиція проводиться за спеціальним чином побудованою біортонормованою системою. Як результат, вдається одержати класичний розв'язок у вигляді рівномірно збіжного функціонального ряду.

Принциповою складністю при дослідженні задач оптимального керування такими системами є неможливість застосування L^2 теорії. В роботах В.О. Капустяна, І.С Лазаренко [51] для спеціального класу функціоналів задачу оптимального керування параболічним рівнянням на відрізку з нелокальними крайовими умовами вдалося розв'язати шляхом зведення до послідовності двовимірних задач оптимального керування. Аналогічні результати для параболо-гіперболічних задач одержані в роботах В.О. Капустяна, І.О. Пишнограєва [52]. Для двовимірних секторальних областей в роботі Е. І. Моісеєва, В.Є. Амбарцумяна [105] для оператора Лапласа було побудовано біортонормовану систему базисних функцій. Проте задачі оптимального керування для рівнянь з нелокальними крайовими умовами в двовимірних областях до недавнього часу не розглядалися. Крім згаданої вище складності, пов'язаної з неможливістю застосування L^2 теорії, додатковим ускладненням при розгляді параболічних рівнянь є дослідження рівномірної збіжності рядів Фур'є-Бесселя. Саме розв'язанню цих питань присвячено п'ятий розділ дисертаційної роботи.

Завершується дисертаційне дослідження розглядом задач гарантованого оцінювання функціоналів від розв'язків параболічних та гіперболічних початково-крайових задачі зі швидко коливними коефіцієнтами. Класичний мінімаксний підхід для еліпничних, параболічних та гіперболічних рівнянь в частинних похідних при лінійних спостереженнях було розвинено в роботах О.Г. Наконечного в [106], [107], в [108]. В роботах О.Г. Наконечного, Ю.К. Подлипенка [109], [110], [120], [121] мінімаксний підхід був поширений на нескінченновимірні системи з випадковими збуреннями. Випадок точкових лінійних спостережень при мінімаксному оцінюванні лінійних функціоналів, визначених на розв'язках крайової задачі для параболічного рівняння зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами розглянуто в роботах О.Г. Наконечного, О.А. Капустян [47]. В усіх розглянутих вище роботах задача оцінювання зводиться до лінійно-квадратичної задачі оптимального керування і, далі, до застосування необхідних умов оптимальності в цій задачі. Принциповою відмінністю розглянутих в данній дисертаційній роботі задач є те, що спостереження є нелінійним (оператор типу суперпозиції). Це унеможливлює безпосереднє застосування згаданої вище схеми дослідження. Основним моментом, який дозволяє обійти данне ускладнення, є те, що при переході до усереднених параметрів спостереження стає лінійним. Саме виходячи з точної мінімаксної оцінки для усередненої задачі, в шостому розділі дисертації будуються та обгрунтовуються наближені мінімаксні оцінкі функціоналів від розв'язків параболічних та гіперболічних задач зі швидко коливними коефіцієнтами при нелінійних спостереженнях.

Розділ 2

Необхідні теоретичні відомості

Даний розділ носить допоміжний і систематизуючий характер, у ньому наведено ряд означень і тверджень, що будуть використовуватися в роботі.

2.1 Функціональні простори та теореми про збіжність

Надалі $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з кусково-гладкою границею;

$L^2(\Omega)$ – це гільбертів простір заданих на Ω вимірних функцій, квадрат яких є інтегровним за Лебегом; скалярний добуток і норма в просторі $L^2(\Omega)$ визначаються рівностями

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx, \quad \|f\| = \sqrt{(f,f)};$$

норму в банаховому просторі X будемо позначати $\|\cdot\|_X$;

$H^1(\Omega)$ – підпростір $L^2(\Omega)$, що складається з функцій із $L^2(\Omega)$, узагальнені похідні від яких першого порядку також належать простору $L^2(\Omega)$;

$H^1(\Omega)$ – це гільбертів простір зі скалярним добутком і нормою

$$(f,g)_{H^1} = \int\limits_\Omega \left(f(x)g(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\frac{\partial g(x)}{\partial x_k} \right) dx,$$

$$\|f\|_{H^1} = \sqrt{(f,f)_{H^1}};$$

$H_0^1(\Omega)$ – це підпростір простору $H^1(\Omega)$, що є замиканням $C_0^\infty(\Omega)$ в нормі $H^1(\Omega)$.

Справедлива нерівність Пуанкаре

$$\forall\ u \in H_0^1(\Omega)\ \|u\| \le \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.1}$$

де константа $\lambda = \lambda(\Omega)$ залежить лише від області Ω.

Завдяки нерівності Пуанкаре $H_0^1(\Omega)$ – це гільбертів простір зі скалярним добутком і нормою

$$(f,g)_{H_0^1} = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\frac{\partial g(x)}{\partial x_k}\right) dx,$$

$$\|f\|_{H_0^1} = \sqrt{(f,f)_{H_0^1}};$$

$H^{-1}(\Omega)$ – це спряжений до простору $H_0^1(\Omega)$;

наступні вкладення є щільними і компактними:

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega);$$

$L^p(a,b;X)$ $(1 \le p < +\infty)$ – це простір L^p- функцій, заданих на інтервалі (a,b) $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ зі значеннями в банаховому просторі X, що є банаховим простором відносно норми

$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int\limits_a^b \|f(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}};$$

для $p = \infty$ $L^\infty(a,b;X)$ – це простір істотно обмежених функцій, заданих на інтервалі (a,b) зі значеннями в банаховому просторі X, що є банаховим простором відносно норми

$$\|f\|_{L^\infty(a,b;X)} = ess \sup_{t\in(a,b)} \|f(t)\|_X;$$

якщо $p = 2$, X - гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$, то $L^2(a,b;X)$ - це гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(f,g)_{L^2(a,b;X)} = \int\limits_a^b (f(t),g(t))_X dt;$$

$C([a,b],X)$ - це простір неперервних на $[a,b]$ X-значних функцій, що є банаховим простором відносно норми

$$\|f\|_{C([a,b],X)} = \max_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_X;$$

Наступні результати використовуються при аналізі функцій змінних (t,x), що мають узагальнену похідну (інша назва – похідна в сенсі розподілів) по t.

Лема 2.1. *Нехай X – банахів простір зі спряженим X^*, і u, $g \in L^1(a,b;X)$. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

1. $u(t) = \xi + \int\limits_a^t g(s)ds$, $\xi \in X$, *для м.в.* $t \in (a,b)$;
2. $\int\limits_a^b u(t)\varphi'(t)dt = -\int\limits_a^b g(t)\varphi(t)dt$, $\forall\ \varphi \in C_0^\infty(a,b)$;
3. $\frac{d}{dt}\langle u,\eta\rangle_X = \langle g,\eta\rangle_X$, $\forall\ \eta \in X^*$, *де* $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ *– канонічна двоїстість між* X *і* X^*, *і рівність слід розуміти в сенсі скалярних розподілів на* (a,b).

Якщо 1)-3) мають місце, то $g := \dfrac{du}{dt}$ *– узагальнена похідна (або похідна в сенсі розподілів) від* u *по змінній* t.

Лема 2.2. *Нехай X – банахів простір і $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \le p \le \infty$. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

1. $\dfrac{du}{dt} \in L^p(0,T;X)$ *(де* $\dfrac{du}{dt}$ *– похідна в сенсі розподілів).*

2. *u майже скрізь дорівнює абсолютно неперервній функції з* $[0,T]$ *в* X *такій, що класична похідна* $\dfrac{du}{dt}(t)$ *існує для м.в.* $t \in (0,T)$ *і* $\dfrac{du}{dt} \in L^p(0,T;X)$.

Через $W(a,b)$ будемо позначати гільбертів простір, що складається з елементів простору $L^2\left(a,b;H_0^1(\Omega)\right)$, які мають узагальнені похідні по t з простору $L^2\left(a,b;H^{-1}(\Omega)\right)$;

норма в $W(a,b)$ задається рівністю

$$\|y\|_{W(a,b)} = \left(\|y\|^2_{L^2(a,b;H_0^1)} + \|\frac{dy}{dt}\|^2_{L^2(a,b;H^{-1})}\right)^{\frac{1}{2}};$$

Нехай X та Y – гільбертові простори з неперервним і щільним вкладенням

$$X \subset Y \subset X^*.$$

Лема 2.3. ***(інтерполяційна лема)*** *[245] Якщо*

$$f \in L^2(a,b;X),$$
$$\frac{df}{dt} \in L^2(a,b;X^*),$$

то функція f (можливо, після зміни на множині міри нуль) є функцією з простору $C([a,b];Y)$ і в сенсі скалярних розподілів на (a,b) має місце рівність

$$\frac{d}{dt}\|f\|_Y^2 = 2\langle\frac{df}{dt}, f\rangle_X.$$

Зокрема, справедливе вкладення

$$W(a,b) \subset C([a,b];L^2(\Omega)).$$

Лема 2.4. ***(лема про компактність)*** *[245] Нехай E_0, E, E_1 - банахові простори, $E_1 \subset E \subset E_0$, E_1, E_0 - рефлексивні і вкладення $E_1 \subset E$ є компактним. Нехай послідовність $\{v_n\}$ є обмеженою в $L^{p_0}(0,T;E_1)$, $1 <$*

$p_0 < \infty$, а послідовність їх похідних $\{\frac{dv_n}{dt}\}$ є обмеженою в $L^{p_1}(0,T;E_0)$, $1 < p_1 < \infty$. Тоді з послідовності $\{v_n\}$ можна вибрати підпослідовність, що збігається до деякої функції v в нормі простору $L^{p_0}(0,T;E)$.

Послідовність $\{x_n\} \subset X$ називається слабко збіжною до елемента $x \in X$, якщо $\forall\ f \in X^*\ f(x_n) \to f(x)$.

Послідовність $\{f_n\} \subset X^*$ називається *-слабко збіжною до елемента $f \in X^*$, якщо $\forall\ x \in X\ f_n(x) \to f(x)$.

Лема 2.5. ***(Банаха-Алаоглу)*** *[45] Якщо банахів простір X є рефлексивним, то кожна обмежена послідовність $\{x_n\} \subset X$ має слабко збіжну підпослідовність.*

Якщо X – сепарабельний банахів простір, то кожна обмежена послідовність $\{f_n\} \subset X^*$ має *-слабко збіжну підпослідовність.

Лема 2.6. ***(Мазура)*** *[45] Якщо в нормованому просторі X послідовність $\{x_n\}$ слабо збігається до елемента x, то $\forall\ \varepsilon > 0$ існує опукла комбінація $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ ($\alpha_j \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$) така, що*

$$\|x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\| < \varepsilon.$$

Лема 2.7. ***(про слабку неперервність)*** *[245] Нехай E_0, E_1 – банахові простори з неперервним щільним вкладенням $E_1 \subset E_0$. Якщо $u \in L^\infty(a,b;E_1)$ і $\forall\ \varphi \in E_0^*$ функція $t \mapsto \langle \varphi, u(t) \rangle_{E_0}$ є неперервною, то $\forall\ \psi \in E_1^*$ функція $t \mapsto \langle \psi, u(t) \rangle_{E_1}$ також є неперервною.*

Надалі для функції $u : [a,b] \mapsto X$ той факт, що функція $t \mapsto \langle \varphi, u(t) \rangle_X$ є неперервною для всіх $\varphi \in X^*$ будемо позначати $u \in C([a,b];X_w)$.

Лема 2.8. ***(про мажоровану збіжність)*** *[78] Нехай $Q \subset \mathbb{R}^m$ – обмежена відкрита множина, і нехай $f_k, g_k : Q \mapsto \mathbb{R}$ такі, що*

$$f_k(x) \to f(x) \text{ м.с.},$$

$$|f_k(x)| \leq g_k(x), \ g_k \to g \text{ в } L_1(Q).$$

Тоді $f_k \to f$ в $L^1(Q)$.

Лема 2.9. ***(Ліонса)*** *[245] Нехай $Q \subset \mathbb{R}^m$ – обмежена відкрита множина, функції $g, g_k \in L^p(Q)$, $p > 1$, такі, що*

$$\|g_k\|_{L^p} \leq C,$$

$$g_k\,(x) \to g\,(x) \quad \text{м.с.} \quad \text{в} \quad Q.$$

Тоді

$$g_k \to g \quad \text{слабо} \quad \text{в} \quad L^p(Q).$$

2.2 Лінійні оператори та еволюційні задачі

Нехай маємо триплет гільбертових просторів $X \subset Y \subset X^*$ з неперервними, щільними вкладеннями, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - канонічна двоїстість між X та X^*.

Розглянемо лінійний неперервний самоспряжений оператор $A : X \to X^*$, який для констант $0 < \nu_1 < \nu_2$ задовольняє наступні умови:

$$\forall u \in X \quad \nu_1 \|u\|_X^2 \leq \langle Au, u \rangle \leq \nu_2 \|u\|_X^2 . \tag{2.2}$$

В тексті роботи ми будемо розглядати наступний частковий випадок:

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \ - \text{обмежена область з кусково-гладкою границею},$$

$$X = H_0^1(\Omega),\ Y = L^2(\Omega),$$

$$A = -div(a(x)\nabla),$$

$a(x) = ((a_{ij}(x)))_{i,j=1}^n$ – вимірна симетрична матриця, що задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості: $\forall \eta \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$v_1 \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\eta_i\eta_j \leq v_2 \sum_{i=1}^n \eta_i^2 .$$

Тоді виконується умова (2.2). Крім того, враховуючи компактність вкладення $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, спектральна задача

$$\begin{cases} A\psi = \lambda\psi, \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

має зліченну кількість розв'язків

$$\{\psi_i\}_{i=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega),\ \{\lambda_i\}_{i=1}^\infty \subset (0, \infty),$$

причому

$$\{\psi_i\}_{i=1}^\infty \ - \ \text{ортонормований базис в } L^2(\Omega),$$

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...,\ \lambda_i \to \infty,\ i \to \infty.$$

Лема 2.10. ***(про розв'язність лінійної параболічної задачі)*** *[91]. Для будь-яких $T > 0$, $h \in L^2(0,T;X^*)$, $y_0 \in Y$ задача*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + Ay = h(t), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

має єдиний розв'язок в просторі

$$W(0,T) = \{y \in L^2(0,T;X) \mid \frac{dy}{dt} \in L^2(0,T;X^*)\}.$$

Більше того, цей розв'язок неперервно залежить від h, y_0, тобто лінійне відображення

$$L^2(0,T;X^*) \times Y \ni \{h, y_0\} \mapsto y \in W(0,T)$$

є неперервним.

Зауваження 2.1. *Результати Леми 2.10 залишаються справедливими і при $T = \infty$.*

Лема 2.11. ***(про розв'язність лінійної гіперболічної задачі)*** *[91]. Для будь-яких $T > 0$, $h \in L^2(0,T;Y)$, $y_0 \in X$, $y_1 \in Y$ задача*

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + Ay = h(t), \\ y(0) = y_0, \; y_t(0) = y_1 \end{cases} \tag{2.5}$$

має єдиний розв'язок в класі

$$W_1(0,T) = \{y \in L^2(0,T;X) \mid \frac{dy}{dt} \in L^2(0,T;Y)\}.$$

Більше того, цей розв'язок неперервно залежить від h, y_0, y_1 в тому сенсі, що лінійне відображення

$$L^2(0,T;Y) \times X \times Y \ni \{h, y_0, y_1\} \mapsto \{y, y_t\} \in L^2(0,T;X) \times L^2(0,T;Y)$$

є неперервним.

Зауваження 2.2. *Результати Леми 2.11 залишаються справедливими і при $T = \infty$.*

2.3 Деякі теореми теорії оптимального керування

Лема 2.12. ***(про мінімізацію коерцитивної форми)***. *[91] Нехай U – замкнена опукла підмножина деякого рефлексивного простору Z з нормою $\|\cdot\|_Z$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ – обмежений знизу слабо напівнеперервний знизу функціонал, $\gamma > 0$ – деяка стала. Тоді існує елемент $u \in U$, який мінімізує функціонал $J(v) = \gamma\|v\|_Z^2 + \varphi(v)$, тобто*

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v).$$

Якщо, крім того, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ – опуклий, то цей елемент єдиний.

Принцип максимуму Понтрягіна. [122, 2] *Нехай ми маємо задачу оптимального керування*

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(t, x, u), \ i = \overline{1, n}, \\ x_i(0) = x_{i0}, \ i = \overline{1, n}, \\ I(x, u) = \int\limits_0^T f_0(t, x(t), u(t))dt + F(x(T)) \to \inf, \\ u(t) \in U, \ t \in [0, T]. \end{cases} \tag{2.6}$$

Нехай $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ – оптимальний процес задачі оптимального керування (2.6). Тоді існує вектор-функція $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$, що задовольняє наступним умовам:

1. Функція $H(t, x, \psi, u) = \sum\limits_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(t, x, u) - f_0(t, x, u)$ досягає максимального значення по u при $x = \tilde{x}(t)$, $\psi = \psi(t)$ на значенні $u = \tilde{u}(t)$ при всіх $t \in [0, T]$, тобто

$$H(t, \tilde{x}(t), \psi(t), \tilde{u}(t)) = \max_{u \in U} H(t, \tilde{x}(t), \psi(t), u). \tag{2.7}$$

2. Змінні $\psi(t)$ задовольняють системі диференціальних рівнянь

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H(t, \tilde{x}(t), \psi(t), \tilde{u}(t))}{\partial x_i}, \ i = \overline{1, n}. \tag{2.8}$$

3. В момент часу $t = T$ оптимальна траєкторія задовольняє співвідношенню

$$\psi_i(T) = -\frac{\partial F(\tilde{x}(T))}{\partial x_i}, \ i = \overline{1, n}. \tag{2.9}$$

Критерій оптимальності Беллмана. *Розглянемо задачу*

$$\begin{cases} \varphi(T_1, x(T_1)) \to \inf \\ \dot{x}_i = f(t, x(t), u(t)), \ T_0 \leq t \leq T_1, \\ x(T_0) = x_0, (T_1, x(T_1)) \in M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \ \forall t \in [T_0, T_1], \end{cases} \tag{2.10}$$

де T_0– фіксований момент часу, T_1 – не фіксований, що визначаєтьcя моментом першого попадання точки $(T_1, x(T_1))$ у замкнену множину M. Позначимо J_{T_0,x_0}– множину допустимих керувань, що переводять систему з положення (T_0, x_0) в множину M.

Для того, щоб керування $u^*(t) \in J_{T_0,x_0}$ і відповідна інтегральна крива $x^*(t)$ були оптимальними, необхідно і достатньо існування функції $z(s, y) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^1$ такої, що задовольняє умови:

1. $z(s, y) = \varphi(s, y)$ при $(s, y) \in M$;

2. якщо $u(t) \in J_{T_0,x_0}$, а $x(t)$ відповідна інтегральна крива, то функція $t \mapsto z(t, x(t))$ неспадна на $[T_0, T_1]$;

3. $z(t, x^*(t)) \equiv const$ на $[T_0, T_1^*]$.

Принцип оптимальності Беллмана. [7], [163, 164] *Якщо $\{u^*, x^*\}$ – оптимальний процес в задачі (2.10) , то звуження керування u^* на $[t, T_1^*]$ є оптимальним керуванням задачі оптимального керування з початковими даними $(t, x^*(t))$, де $T_0 \leq t \leq T_1$.*

2.4 Необхідні відомості з теорії усереднення диференціальних операторів

Нехай вимірна симетрична періодична матриця $a(x) = ((a_{ij}(x)))_{i,j=1}^n$ задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості: $\exists\ v_1 > 0,\ v_2 > 0\ \ \forall \eta \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$v_1 \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\eta_i\eta_j \leq v_2 \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2. \tag{2.11}$$

Матриця $a^\varepsilon(x) = a(\frac{x}{\varepsilon})$ при малих ε описує мікронеоднорідне середовище. Математичне поняття усередненої матриці відповідає фізичним уявленням про ефективне однорідне середовище.

Означення 2.1. *[38] Стала додатньо визначена матриця a^0 називаєтьcя усередненою до матриці a^ε, якщо для довільної обмеженої області $G \subset \mathbb{R}^n$ та для довільної $f \in H^{-1}(G)$ розв'язки задачі Діріхле*

$$u^\varepsilon \in H_0^1(G), \quad div(a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f$$

володіють наступною властивістю слабкої збіжності: при $\varepsilon \to 0$

$$u^\varepsilon \stackrel{w}{\to} u^0 \ \text{в}\ H_0^1(G), \quad a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \stackrel{w}{\to} a^0 \nabla u^0 \ \text{в}\ L_2(G),$$

де u^0 – розв'язок задачі Діріхле з усередненою матрицею

$$u^0 \in H_0^1(G), \quad div(a^0 \nabla u^0) = f.$$

При наведених припущеннях щодо матриці $a(x)$ усереднена матриця завжди існує і в найпростішому випадку одновимірного простору може бути обчислена за формулою $a^0 =< a^{-1} >^{-1}$, де $< \cdot >$ визначає середнє значення періодичної функції.

Введемо до розгляду множину $\mathcal{E}\,(v_1, v_2, \Omega)$ – клас вимірних симетричних матриць $a(x) = ((a_{ij}(x)))_{i,j=1}^n$, що задовольняють умови (2.11).

Нехай a^ε $(\varepsilon > 0)$ — послідовність матриць з класу $\mathcal{E}(v_1, v_2, \Omega)$, a^0 -— також матриця з цього класу.

Означення 2.2. *[37] Послідовність матриць a^ε G-збігається до матриці a^0 в області Ω ($a^\varepsilon \stackrel{G}{\to} a^0$), якщо при будь-якому $f \in H^{-1}(\Omega)$ для розв'язків задачі Діріхле*

$$div(a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f, \quad u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$$

мають місце співвідношення

$$u^\varepsilon \stackrel{w}{\to} u^0 \text{ в } H_0^1(\Omega),$$

$$p^\varepsilon = a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \stackrel{w}{\to} p^0 = a^0 \nabla u^0 \text{ в } L_2(\Omega),$$

де u^0 -— розв'язок задачі Діріхле

$$div(a^0 \nabla u^0) = f, \quad u^0 \in H_0^1(\Omega).$$

У тому випадку, коли послідовність $a^\varepsilon(x)$ має спеціальну структуру $a(\frac{x}{\varepsilon})$, $a(x)$ періодична, поняття G-граничної матриці зводиться до поняття усередненої матриці.

Лема 2.13. ***(властивості G-збіжності)*** *[37, 38]*

1. G-гранична матриця визначена єдиним чином;

2. якщо $a^\varepsilon \in \mathcal{E}(v_1, v_2, \Omega)$ та $a^\varepsilon \to a^0$ сильно в $L_2(\Omega)$, то $a^\varepsilon \stackrel{G}{\to} a^0$;

3. якщо $a^\varepsilon \stackrel{G}{\to} a^0$ в області Ω, то $a^\varepsilon \stackrel{G}{\to} a^0$ у будь-якій підобласті;

4. клас $\mathcal{E}(v_1, v_2, \Omega)$ компактний відносно G-збіжності.

Розглянемо диференціальні оператори

$$A^\varepsilon = -div(a^\varepsilon \nabla), \; A^0 = -div(a^0 \nabla).$$

Будемо говорити, що оператор A^ε G-збігається до оператора A^0 ($A^\varepsilon \stackrel{G}{\to} A^0$), якщо $a^\varepsilon \stackrel{G}{\to} a^0$.

Розглянемо задачу на власні значення для A^ε

$$\begin{gathered} A^\varepsilon(u_k^\varepsilon) = \lambda_k^\varepsilon \rho^\varepsilon(x) u_k^\varepsilon \text{ в } \Omega,\ u_k^\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \\ 0 < \lambda_1^\varepsilon \le \lambda_2^\varepsilon \le \cdots \le \lambda_k^\varepsilon \le \cdots, \\ \int\limits_\Omega \rho^\varepsilon u_k^\varepsilon u_l^\varepsilon = \delta_{kl},\ k,l = \overline{1,\infty}; \end{gathered} \tag{2.12}$$

та задачу на власні значення для усередненого оператора A^0

$$\begin{gathered} A^0(u_k^0) = \lambda_k^0 \rho^0(x) u_k^0 \text{ в } \Omega,\ u_k^0 \in H_0^1(\Omega), \\ 0 < \lambda_1^0 \le \lambda_2^0 \le \cdots \le \lambda_k^0 \le \cdots, \\ \int\limits_\Omega \rho^0 u_k^0 u_l^0 = \delta_{kl},\ k,l = \overline{1,\infty}. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Власні значення задач (2.12), (2.13) занумеровані у порядку неспадання, і кожне повторюється стільки разів, яка його кратність. Будемо припускати, що функції $\rho^\varepsilon(x),\ \rho^0(x)$ задовольняють наступним умовам

$$0 < c_1 \le \rho^\varepsilon(x) \le c_2,\ 0 < c_1 \le \rho^0(x) \le c_2,$$

$$\rho^\varepsilon \xrightarrow{w} \rho^0 \text{ в } L_2(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Лема 2.14. ***(спектральні властивості G-збіжних операторів)*** *Якщо* $A^\varepsilon \xrightarrow{G} A^0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то*

$$\forall\ k \ge 1 \quad \lambda_k^\varepsilon \to \lambda_k^0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Якщо кратність власного значення λ_k^0 *рівна* s, *тобто* $\lambda_{k-1}^0 < \lambda_k^0 = \cdots = \lambda_{k+s-1}^0 < \lambda_{k+s}^0,\ \lambda_0^0 = 0$, *то існує послідовність* $\bar{u}^\varepsilon \to u_k^0$ *в* $L_2(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$, *де* $\bar{u}^\varepsilon$ *— лінійна комбінація власних фунцій задачі* (2.12), *що відповідають власним значенням* $\lambda_k^\varepsilon, \lambda_{k+1}^\varepsilon, \cdots, \lambda_{k+s-1}^\varepsilon$.

У випадку простого спектру

$$0 < \lambda_1^0 < \lambda_2^0 < \cdots < \lambda_k^0 < \cdots$$

задачі (2.13) маємо, що для кожного $k \geq 1$:

$$u_k^\varepsilon \to u_k^0 \text{ в } L_2(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Розглянемо початково-крайову задачу для параболічного рівняння

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t,x)}{\partial t} + A^\varepsilon y(t,x) = f^\varepsilon(t,x), \ (t,x) \in Q_T := (0,T) \times \Omega, \\ y(t,x)|_{\partial\Omega} = 0, \\ y(t,x)|_{t=0} = y_0^\varepsilon \end{cases} \tag{2.14}$$

Лема 2.15. ***(про G-збіжність для параболічних операторів)*** *Якщо при $\varepsilon \to 0$ маємо, що $A^\varepsilon \xrightarrow{G} A^0$, $f^\varepsilon \to f^0$ слабо в $L^2(Q_T)$, $y_0^\varepsilon \to y_0$ слабо в $L^2(\Omega)$, то мають місце збіжності*

$$y^\varepsilon \to y \text{ в } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.15}$$

$$y^\varepsilon \to y \text{ в } C([\delta,T];L^2(\Omega)) \ \forall \ \delta \in (0,T), \tag{2.16}$$

де y^ε – розв'язок (2.14), y – розв'язок усередненої початково крайової задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t,x)}{\partial t} + A^0 y(t,x) = f^0(t,x), \ (t,x) \in Q_T, \\ y(t,x)|_{\partial\Omega} = 0, \\ y(t,x)|_{t=0} = y_0 \end{cases} \tag{2.17}$$

Якщо ж, крім того, $y_0^\varepsilon \to y_0$ сильно в $L^2(\Omega)$, то має місце збіжність

$$y^\varepsilon \to y \text{ в } C([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.18}$$

Розглянемо початково-крайову задачу для гіперболічного рівняння

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} + A^\varepsilon y(t,x) = f^\varepsilon(t,x), \ (t,x) \in Q_T, \\ y(t,x)|_{\partial\Omega} = 0, \\ y(t,x)|_{t=0} = y_0^\varepsilon, \ y_t(t,x)|_{t=0} = y_1^\varepsilon \end{cases} \tag{2.19}$$

Лема 2.16. ***(про G-збіжність для гіперболічних операторів)*** *Якщо при $\varepsilon \to 0$ маємо, що $A^\varepsilon \xrightarrow{G} A^0$, $f^\varepsilon \to f^0$ слабо в $L^2(Q_T)$, $y_0^\varepsilon \to y_0$ слабо в $H_0^1(\Omega)$, $y_1^\varepsilon \to y_1$ слабо в $L^2(\Omega)$, то мають місце збіжності*

$$y^\varepsilon \to y \text{ в } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.20}$$

$$y^\varepsilon \to y \text{ слабо } \text{ в } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.21}$$

де y^ε - розв'язок (2.19), y - розв'язок усередненої початково крайової задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} + A^0 y(t,x) = f^0(t,x), \ (t,x) \in Q_T, \\ y(t,x)|_{\partial\Omega} = 0, \\ y(t,x)|_{t=0} = y_0, \ y_t(t,x)|_{t=0} = y_1. \end{cases} \tag{2.22}$$

Висновки до розділу 2

У підрозділі 2.1 наведено перелік основних функціональних просторів та теорем про збіжність, які будуть використовуватись в роботі.

У підрозділі 2.2 наведено необхідні в подальших розділах результати щодо розв'язності лінійних еволюційних задач першого та другого порядків.

У підрозділі 2.3 представлено основні теореми з класичної теорії оптимального керування, такі як принцип максимуму Понтрягіна, критерій та принцип оптимальності Беллмана, теорема про мінімізацію коерцитивної форми.

У підрозділі 2.4 викладено необхідні відомості з теорії усереднення, наводиться означення G-збіжності, та перераховано основні її властивості, включно із застосуваннями до параболічних і гіперболічних рівнянь.

Розділ 3

Наближене оптимальне керування для систем зі збуреннями в коефіцієнтах

В цьому розділі розглядаються задачі оптимального керування тепловими і хвильовими процесами в мікронеоднорідних середовищах. Відомо [6], [38], що такі процеси описуються за допомогою початково-крайових задач для параболічних та гіперболічних рівнянь, де коефіцієнти диференціального оператора, а також коефіцієнти цільового функціонала залежать від функцій виду $a(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ – малий параметр. При цьому ми вважаємо, що цільовий функціонал є в певному сенсі збуреним і не є, взагалі кажучи, квадратичним при $\varepsilon > 0$. На основі формули точного синтезу для лінійно-квадратичної задачі оптимального керування з усередненими параметрами в цьому розділі будується і обґрунтовується наближене керування у формі оберненого зв'язку. В першому і другому підрозділах розглянуто параболічну задачу на скінченному та нескінченному часовому проміжку, у третьому розглянуто задачу наближеного синтезу для хвильового рівняння, у четвертому досліджується задача наближеної оптимальної стабілізації розв'язків параболічного включення з неавтономними збуреннями в коефіцієнтах.

3.1 Наближений розподілений синтез для параболічного рівняння

Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область, $\varepsilon \in (0,\,1)$ - малий параметр. В області $Q_T = (0,\,T) \times \Omega$ керований процес $\{y,\,u\}$ описується задачею

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + A^\varepsilon y = u(t,\,x), \\ \quad y\,|_{\partial\Omega} = 0, \\ \quad y\,|_{t=0} = y_0^\varepsilon, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$J_\varepsilon(y,u) = \int_\Omega q_\varepsilon(x, y(T,x))y(T,x)dx + \int_{Q_T} u^2(t,x)dtdx \to \inf, \tag{3.2}$$

де $A^\varepsilon = -div(a^\varepsilon \nabla)$, $a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, a – вимірна, періодична, симетрична матриця, що задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості (2.11), $q_\varepsilon : \Omega \times R \mapsto R$ – функція типу Каратеодорі, тобто вимірна по першій змінній і неперервна по другій, та існують не залежні від $\varepsilon \in (0,\,1)$ константа $C > 0$ та функції $C_1 \in L^2(\Omega)$, $C_2 \in L^1(\Omega)$ такі, що для всіх $\xi \in R$ та м.в. $x \in \Omega$ виконуються нерівності

$$|q_\varepsilon(x,\xi)| \leq C|\xi| + C_1(x), \tag{3.3}$$

$$q_\varepsilon(x,\xi)\xi \geq -C_2(x). \tag{3.4}$$

Як приклад можемо розглянути функцію

$$q_\varepsilon(x,\xi) = q_1(x/\varepsilon)\xi + q_2(x/\varepsilon)f(x/\varepsilon,\xi), \tag{3.5}$$

де q_1, q_2, f – обмежені, $q_1 > 0$.

За умов (3.4) відомо [155], що оператор суперпозиції (в літературі можна зустріти ще як оператор Немицького) $q_\varepsilon(x,\,\bullet) : L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ є неперервним.

Лема 3.1. *Задача оптимального керування* (3.1), (3.2) *має розв'язок* $\{y^\varepsilon,\ u^\varepsilon\}$ *(оптимальний процес) у класі* $W(0,T)\times L^2(Q_T)$.

Доведення. Позначимо y_u^ε - розв'язок (3.1) при фіксованому $u \in L^2(Q_T)$. Розглянемо функціонал $\varphi : L^2(Q_T) \mapsto \mathbb{R}$,

$$\varphi(u) = \int_\Omega q_\varepsilon(x, y_u^\varepsilon(T,x))y_u^\varepsilon(T,x)dx.$$

В силу умови (3.4) функціонал φ обмежений знизу. Доведемо, що він слабо напівнеперервний знизу. Дійсно, нехай $u_n \to u$ слабо в $L^2(Q_T)$. В силу леми 2.15

$$y_{u_n}^\varepsilon \to y_u^\varepsilon \text{ в } C([0,T];L^2(\Omega)).$$

Звідси в силу неперервності оператора суперпозиції виводимо, що

$$\varphi(u_n) \to \varphi(u).$$

Тоді Лема 2.12 про мінімізацію коерцитивної форми гарантує існування мінімуму u^ε для функціоналу J_ε. Лема доведена.

□

Зауважимо, що у загальному випадку знайти формулу оптимального синтезу для задачі (3.1), (3.2) не уявляється можливим.

Основне припущення, яке буде робитись в цьому розділі – це припущення про те, що перехід до усереднених параметрів значно спрощує структуру задачі (3.1), (3.2) і дозволяє побудувати для неї оптимальне керування у формі оберненого зв'язку.

У даному підрозділі введемо наступну умову:

існує функція Каратеодорі $q : \Omega \times R \mapsto R$ така, що

$$\forall\, r > 0 \quad q_\varepsilon(x,\xi) \to \ q(x,\xi) \text{ слабко в } L_2\,(\Omega)\, \text{рівномірно по } |\xi| \le r. \quad (3.6)$$

Задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + A^0 y = u(t,\, x), \\ \qquad y\,|_{\partial\Omega} = 0, \\ \qquad y\,|_{t=0} = y_0, \end{cases} \quad (3.7)$$

$$J(y,u) = \int_\Omega q(x, y(T,x)) y(T,x) dx + \int_Q u^2(t,x) dt dx \to \inf, \quad (3.8)$$

будемо називати усередненою [38, 6] до задачі (3.1), (3.2), де $A^0 = -div(a^0\nabla)$, постійна матриця a^0 є усередненою для a^ε, $y_0 \in L^2(\Omega)$ таке, що

$$y_0^\varepsilon \to y_0 \text{ слабо в } L_2\,(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0. \quad (3.9)$$

З умови (3.6) і леми 2.6 (Мазура) виводимо, що функція q задовольняє (3.3), (3.4), отже в силу леми 3.1 задача оптимального керування (3.7), (3.8) розв'язна в класі $W\,(0,T) \times L^2\,(Q_T)$.

Зауваження 3.1. *Відомо [183], що якщо $q(x,\xi) = g(x)\xi$, де g – невід'ємна обмежена функція, то задача* (3.7), (3.8) *допускає оптимальне керування в формі синтезу*

$$u(t) = -Q(t)y(t), \quad \inf J = (Q(0)y_0, y_0),$$

де $\forall\ t \in [0,T]$ самоспряжений оператор $Q(t) \in L(L^2(\Omega))$ є розв'язком деякого диференціально-операторного рівняння типу Ріккаті.

Ми будемо припускати, що задача з усередненими коефіцієнтами вже допускає форму оптимального синтезу, тобто будемо вважати виконаними наступні умови:

$$\text{задача } (3.7), (3.8) \text{ має єдиний розв'язок } \{\overline{y}, \overline{u}\}\,; \quad (3.10)$$

$$\begin{gathered}\text{існує відображення } u:\ [0,T]\times\Omega\times L^2(\Omega)\mapsto L^2(\Omega)\\ \text{таке, що } \overline{u}(t,x)\equiv u\,[t,x,\,\overline{y}(t,x)];\end{gathered}\tag{3.11}$$

$$\begin{gathered}\text{існують константи } D_1>0,\ D_2>0 \text{ такі, що}\\ \text{для всіх } t\in[0,T] \text{ та } y,z\in L^2(\Omega) \text{ виконуються нерівності}\\ \|u\,[t,x,y]\|\le D_1\left(\|y\|+1\right),\\ \|u\,[t,x,y]-u\,[t,x,z]\|\le D_2\,\|y-z\|\,.\end{gathered}\tag{3.12}$$

Перед формулюванням основного результату підрозділу наведемо приклад функції $q_\varepsilon:\Omega\times R\mapsto R$, для якої виконуються умови (3.3), (3.4), (3.6), (3.10) – (3.12).

Приклад 3.1. *Покладемо* $q_\varepsilon(x,\xi)=g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\xi$, *де* g *– вимірна, обмежена, періодична функція, додатне число* $\langle g\rangle$ *– її середнє значення [38]. Тоді виконані умови* (3.3), (3.4), (3.6) *з* $q(x,\xi)=\langle g\rangle\,\xi$. *Крім того, задача* (3.7), (3.8) *стає класичною лінійно-квадратичною задачею, яка має єдиний розв'язок [91], отже, виконується* (3.10). *Нехай* $\{X_i\}$, $\{\lambda_i\}$ *– розв'язки спектральної задачі*

$$\begin{cases}A^0X_i=\lambda_iX_i,\\ X_i\,|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

$\{X_i\}\subset H_0^1(\Omega)$ *- ортонормований базис в* $L_2(\Omega)$, $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots$, $\lambda_i\to\infty$, $i\to\infty$.

Користуючись методом Фур'є, легко встановлюється вигляд оптимального керування в формі оберненого зв'язку [63]:

$$u[t,x,y]=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\,(t)\,(y(t),X_i)\,X_i(x),\tag{3.13}$$

де

$$\beta_i(t) = -e^{2\lambda_i(t-T)}\left(\frac{1}{\langle g\rangle} + \frac{1}{2\lambda_i}\left(1 - e^{2\lambda_i(t-T)}\right)\right)^{-1}.$$

З останньої формули маємо, що

$$\exists\,\beta > 0\,\forall i \geq 1 \quad \sup_{t\in[0,T]} |\beta_i(t)| \leq \beta,$$

отже, мають місце умови (3.11), (3.12) *з* $D_1 = D_2 = \beta$.

Далі, використовуючи відображення (3.11), розглянемо задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + A^\varepsilon y = u[t,\, x, y], \\ \qquad y\,|_{\partial\Omega} = 0, \\ \qquad y\,|_{t=0} = y_0^\varepsilon \end{cases} \tag{3.14}$$

В силу умов (3.12) відомо [245], що задача (3.14) має єдиний розв'язок y_ε в класі $W(0,T)$.

Основним результатом підрозділу є наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови* (3.3),(3.4), (3.6), (3.10) – (3.12) *і, крім того, існує додатна функція* $l \in L^\infty(\Omega)$ *така, що для всіх* $\varepsilon \in (0,1)$

$$|q_\varepsilon(x,\xi)\ - \ q_\varepsilon(x,\eta)| \leq l(x)|\xi - \eta|. \tag{3.15}$$

Тоді для довільного $\eta > 0$ *існує* $\bar\varepsilon \in (0,1)$ *таке, що* $\forall \varepsilon \in (0,\bar\varepsilon)$

$$|J_\varepsilon(y^\varepsilon, u^\varepsilon) - J_\varepsilon(y_\varepsilon, u[t,x,y_\varepsilon(t,x)])| < \eta,$$

де $\{y^\varepsilon,\, u^\varepsilon\}$ *– оптимальний процес в задачі* (3.1),(3.2), y_ε*- розв'язок задачі* (3.14), *керування* $u[t,x,y_\varepsilon(t,x)]$ *визначається з* (3.11).

Доведення. Покажемо, що при $\varepsilon \to 0$ і розв'язок задачі (3.14) y_ε, і розв'язок задачі (3.1), (3.2) y^ε прямують у певному сенсі до $\overline{y}$, де $\{\overline{y}, \overline{u}\}$ – оптимальний процес в задачі (3.7),(3.8). Розглянемо спочатку задачу (3.14). Для м.в. $t \in (0,T)$ для розв'язку y_ε справедливі оцінки

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|y_\varepsilon\left(t\right)\right\|^2 + v_1\left\|y_\varepsilon\left(t\right)\right\|^2_{H_0^1} \leq D_1(\left\|y_\varepsilon\left(t\right)\right\| + 1)\left\|y_\varepsilon\left(t\right)\right\|,$$

$$\frac{d}{dt}\left\|y_\varepsilon\left(t\right)\right\|^2 + 2v_1\left\|y_\varepsilon\left(t\right)\right\|^2_{H_0^1} \leq \left(2D_1 + 1\right)\left\|y_\varepsilon\left(t\right)\right\|^2 + D_1^2. \tag{3.16}$$

Використовуючи лему Гронуола, з (3.16) одержуємо, що послідовність $\{y_\varepsilon\}$ обмежена в $W\left(0,T\right)$. Тоді за лемою про компактність існує функція $z \in W\left(0,T\right)$ така, що по підпослідовності

$$\begin{gathered} y_\varepsilon \to z \ \text{ в } \ L^2\left(Q\right) \ \text{ і } \ \text{м.с.} \ \text{ в } Q, \\ y_\varepsilon(t) \to z(t) \text{ в } L^2\left(\Omega\right) \ \text{ для } \ \text{м.в.}\, t \in (0,T), \\ y_\varepsilon(t) \to z(t) \text{ в } L^2\left(\Omega\right) \ \text{ слабо } \forall\, t \in [0,T]\,, \\ y_\varepsilon \to z \text{ слабо } \ \text{ в } L^2\left(0,T; H_0^1\left(\Omega\right)\right). \end{gathered} \tag{3.17}$$

Звідси і з (3.12) виводимо, що

$$u[t,x,y_\varepsilon] \to u[t,x,z] \text{ в } L^2(Q). \tag{3.18}$$

З Леми 2.15 одержуємо, що z – розв'язок задачі (3.14) з оператором A^0 та початковими даними y^0, причому при $\varepsilon \to 0$

$$y_\varepsilon \to z \text{ в } C\left([\delta,T]; L^2(\Omega)\right) \quad \forall \delta > 0. \tag{3.19}$$

Оскільки задача оптимального керування (3.7), (3.8) має єдиний розв'язок $\{\overline{y}, \overline{u}\}$, і для керування $\overline{u}$ справедлива формула $\overline{u}(t,x) = u[t,x,\overline{y}(t,x)]$, то $\overline{y}$ є розв'язком задачі (3.14) з оператором A^0 та початковими даними y^0. Але ця задача також має єдиний розв'язок, отже $\overline{y} \equiv z$ і, крім того, збіжності (3.17) – (3.19) мають місце при $\varepsilon \to 0$, (а не лише по підпослідовності).

Для продовження доведення теореми встановимо наступний результат:

Лема 3.2. *Нехай для* $\varepsilon_n \to 0$ *функції* $q_n := q_{\varepsilon_n}$ *задовольняють умови* (3.3), (3.4), (3.6), (3.15), *і* $y_n \to y$ *в* $L^2(\Omega)$. *Тоді*

$$q_n(x, y_n) \to q(x, y) \text{ слабко в } L^2(\Omega).$$

Доведення. Для довільної $\phi \in L^2(\Omega)$ розглянемо

$$I_n := \int_\Omega (q_n(x, y_n(x)) - q(x, y(x)))\phi(x)dx =$$

$$= \int_\Omega (q_n(x, y_n(x)) - q_n(x, y(x)))\phi(x)dx + \int_{\Omega_1(r)} (q_n(x, y(x)) - q(x, y(x)))\phi(x)dx +$$

$$+ \int_{\Omega \backslash \Omega_1(r)} (q_n(x, y(x)) - q(x, y(x)))\phi(x)dx = I_n^{(1)} + I_n^{(2)}(r) + I_n^{(3)}(r),$$

де $\Omega_1(r) = \{x \in \Omega \,|\, |y(x)| \le r\}$. Доведемо, що

$$\forall \eta > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n \ge N \;\; I_n < \eta.$$

З умови (3.15) виводимо, що

$$\exists N_1 \; \forall n \ge N_1 \; I_n^{(1)} < \frac{\eta}{3}.$$

З умови (3.3) виводимо, що

$$I_n^{(3)}(r) \le \int_{\Omega \backslash \Omega_1(r)} (C|y(x)| + |C_1(x)|)|\phi(x)|dx.$$

Отже, оскільки $\mu(\Omega \backslash \Omega_1(r)) \to 0$ при $r \to \infty$, то

$$\exists r > 0 \;\; \forall n \ge 1 \;\; I_n^{(3)}(r) < \frac{\eta}{3}.$$

З умови (3.6) виводимо, що

$$\exists\, N(r) > 0 \;\; \forall\, n \geq N(r) \;\; I_n^{(2)}(r) < \frac{\eta}{3}.$$

Вибираючи $N = \max\{N_1,\, N(r)\}$, маємо шукану слабку збіжність. Лема доведена. □

Зі збіжності (3.19) виводимо

$$y_\varepsilon(T) \to \overline{y}(T) \text{ в } L^2(\Omega).$$

Зі збіжностей (3.18) виводимо

$$u[t, x, y_\varepsilon] \to \overline{u}(t, x) \text{ в } L^2(Q).$$

Тоді, використовуючи Лему 3.2, маємо

$$J_\varepsilon\left(y_\varepsilon, u\left[t, x, y_\varepsilon\right]\right) \to J\left(\overline{y}, \overline{u}\right),\ \ \varepsilon \to 0. \tag{3.20}$$

Тепер розглянемо оптимальний процес $\{y^\varepsilon,\, u^\varepsilon\}$ задачі (3.1),(3.2).

Використовуючи умову (3.4), маємо нерівність

$$-\int_\Omega C_2(x)dx + \int_Q u^{\varepsilon 2}(t, x)dtdx \leq\; J_\varepsilon\left(y^\varepsilon, u^\varepsilon\right) \leq \int_\Omega z_\varepsilon^2(T, x)dx,$$

де z_ε – розв'язок (3.1) з керуванням $u \equiv 0$. Для z_ε справедлива оцінка

$$\frac{d}{dt}\left\|z_\varepsilon\left(t\right)\right\|^2 + 2v_1\left\|z_\varepsilon\left(t\right)\right\|_{H_0^1}^2 \leq 0,$$

отже, послідовність $\{\,u^\varepsilon\}$ є обмеженою в $L^2\left(Q_T\right)$. Тоді існує $v \in L^2\left(Q\right)$ така, що по деякій підпослідовності

$$u^\varepsilon \to\ v \text{ слабо } \text{ в}\, L^2(Q),\ \ \varepsilon \to 0.$$

З обмеженості $\{ u^{\varepsilon}\}$ в $L^2(Q_T)$, оцінки

$$\frac{d}{dt}\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|^2 + 2v_1 \left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|^2_{H_0^1} \leq \left|\left(y^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t)\right)\right|, \tag{3.21}$$

і леми Гронуола виводимо, що послідовність $\{y^{\varepsilon}\}$ є обмеженою в $W(0,T)$ і по підпослідовності збігається до деякої функції $y \in W(0,T)$ при $\varepsilon \to 0$ в сенсі (3.17). Використовуючи Лему 2.15, одержуємо, що y – розв'язок задачі (3.7) з керуванням v, причому при $\varepsilon \to 0$

$$y^{\varepsilon} \to y \ \text{ в } C\left([\delta, T]; L^2(\Omega)\right) \ \forall \delta > 0. \tag{3.22}$$

Покажемо, що процес $\{y,\, v\}$ є оптимальним в задачі (3.7),(3.8). З оптимальності $\{y^{\varepsilon},\, u^{\varepsilon}\}$ для довільного $u \in L^2(Q_T)$ маємо виконання нерівності

$$J_{\varepsilon}\left(y^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}\right) \leq J_{\varepsilon}\left(p^{\varepsilon},\, u\right), \tag{3.23}$$

де p_{ε} є розв'язок задачі (3.1) з керуванням u. Тоді для p_{ε} справедлива оцінка (3.21) з заміною u^{ε} на u, отже $\{ p^{\varepsilon}\}$ є обмеженою в $W(0,T)$. Повторюючи попередні міркування, одержуємо, що p_{ε} збігається до деякої функції $p \in W(0,T)$ при $\varepsilon \to 0$ в сенсі (3.17), причому p – розв'язок задачі (3.7) з керуванням u і, крім того, p_{ε} збігається до p в сенсі (3.22). Тоді при $\varepsilon \to 0$ в силу Леми 3.2

$$J_{\varepsilon}\left(p^{\varepsilon},\, u\right) \to J\left(p,\, u\right),$$

$$\underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} J_{\varepsilon}\left(y^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}\right) \geq J(y, v). \tag{3.24}$$

З (3.27), (3.24) остаточно виводимо нерівність

$$J\left(y,\,v\right)\leq J\left(p,\,u\right),$$

яка означає, що $\{y,\,v\}$ є оптимальним процесом в задачі (3.7), (3.8). В силу єдиності $\{y,\,v\}\equiv\{\overline{y},\overline{u}\}$. Тепер доведемо, що

$$J_{\varepsilon}\left(y^{\varepsilon},u^{\varepsilon}\right)\to J\left(\overline{y},\overline{u}\right),\ \varepsilon\to 0. \tag{3.25}$$

Для цього зафіксуємо керування $u=\overline{u}$ в задачі (3.1). Нехай g_{ε} – розв'язок цієї задачі. Використовуючи попередні міркування, приходимо до наступних співвідношень

$$J_{\varepsilon}\left(y^{\varepsilon},\,u^{\varepsilon}\right)\leq J_{\varepsilon}\left(g_{\varepsilon},\,\overline{u}\right),$$

$$J_{\varepsilon}\left(g_{\varepsilon},\overline{u}\right)\to J\left(\overline{y},\overline{u}\right),\ \varepsilon\to 0. \tag{3.26}$$

З (3.24), (3.26) одержуємо нерівності

$$J(\overline{y},\overline{u})\leq\varliminf_{\varepsilon\to 0}J_{\varepsilon}\left(y^{\varepsilon},u^{\varepsilon}\right),$$

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0}J_{\varepsilon}\left(y^{\varepsilon},u^{\varepsilon}\right)\leq J(\overline{y},\overline{u}),$$

які й означають виконання (3.25). Крім того, з (3.22) і (3.25) випливає, що

$$\int_{Q_T}u^{\varepsilon 2}(t,x)dtdx\ \to\int_{Q_T}\overline{u}^2(t,x)dtdx,$$

що разом зі слабкою збіжністю гарантує сильну збіжність

$$u^{\varepsilon}\to\ \overline{u}\ \text{в}\,L^2(Q_T),\ \varepsilon\to 0. \tag{3.27}$$

З (3.20) і (3.25) остаточно одержуємо твердження теореми. □

Зауваження 3.2. *Збіжності* (3.18) *і* (3.27) *гарантують близькість не лише критеріїв якості, але й керувань і фазових змінних в наступному сенсі:*

$$u^\varepsilon - u[t, x, y_\varepsilon] \to 0 \text{ в } L^2(Q_T),\ \varepsilon \to 0,$$
$$y^\varepsilon - y_\varepsilon \to 0 \text{ в } C\left([\delta, T]; L^2(\Omega)\right)\ \forall \delta > 0.$$

3.2 Наближений розподілений регулятор для параболічного рівняння

Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область, $\varepsilon \in (0,1)$ – малий параметр. У циліндрі $Q = (0,+\infty) \times \Omega$ керований процес $\{y,u\}$ описується задачею

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + A^\varepsilon y = u(t,x), \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y(0,x) = y_0^\varepsilon, \end{cases} \tag{3.28}$$

$$u \in U \subseteq L^2(Q), \tag{3.29}$$

$$J_\varepsilon(y,u) = \int\limits_Q q_\varepsilon(t,x,y(t,x))y(t,x)dtdx + \int\limits_Q u^2(t,x)dtdx \to \inf, \tag{3.30}$$

де U є опуклою та замкненою підмножиною простору $L^2(Q)$, $0 \in U$, $A^\varepsilon = -div(a^\varepsilon \nabla)$, $a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, a є вимірною, симетричною, періодичною матрицею, яка задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості (2.11).

Функція $q_\varepsilon : (0,+\infty) \times \Omega \times R \mapsto R$ є функцією Каратеодорі, тобто вимірною за першими двома змінними та неперервною за третьою змінною, та існують функції $C_1 \in L^2(Q)$, $C_2 \in L^1(Q)$ і константа $C > 0$, що не залежать від $\varepsilon \in (0,\,1)$, такі що для всіх $\xi \in R$ і майже всіх $(t,x) \in Q$ виконуються наступні нерівності

$$\begin{gathered} |q_\varepsilon(t,x,\xi)| \le C|\xi| + C_1(t,x), \\ q_\varepsilon(t,x,\xi)\xi \ge -C_2(t,x). \end{gathered} \tag{3.31}$$

Тоді оператор суперпозиції $q_\varepsilon(t,x,\ \cdot) :\ L^2(Q) \mapsto L^2(Q)$ є неперервним [155].

Лема 3.3. *Задача оптимального керування* (3.28) – (3.30) *має розв'язок* $\{y^{\varepsilon},\, u^{\varepsilon}\}$ *(оптимальний процес) у класі* $W(0,\infty)\times L^2(Q)$.

Доведення. Позначимо y_u^{ε} – розв'язок (3.28) при фіксованому $u \in L^2(Q)$. Розглянемо функціонал $\varphi : L^2(Q) \mapsto \mathbb{R}$,

$$\varphi(u) = \int_Q q_\varepsilon(t,x,y_u^\varepsilon(t,x))y_u^\varepsilon(t,x)dtdx.$$

В силу умови (3.31) функціонал φ обмежений знизу. Нехай $u_n \to u$ слабо в $L^2(Q)$. В силу Леми 2.15 для всіх $T > 0$

$$y_{u_n}^\varepsilon \to y_u^\varepsilon \text{ в } C([0,T];L^2(\Omega)).$$

Звідси в силу неперервності оператора суперпозиції виводимо, що

$$q_\varepsilon(t,x,y_{u_n}^\varepsilon(t,x))y_{u_n}^\varepsilon(t,x) \to q_\varepsilon(t,x,y_u^\varepsilon(t,x))y_u^\varepsilon(t,x) \text{ м.с. на } Q.$$

Тоді за лемою Фату

$$\liminf \varphi(u_n) \geq \varphi(u)$$

і за Лемою 2.12 про мінімізацію коерцитивної форми одержуємо існування мінімуму u^ε для функціоналу J_ε. Лема доведена.

□

Зауважимо, що у загальному випадку знайти формулу оптимального керування в формі оберненого зв'язку для задачі (3.28) – (3.30) не уявляється можливим.

Основне припущення цього розділу, як і попереднього, буде полягати в тому, що перехід до усереднених параметрів може значно спростити структуру задачі (3.28) – (3.30) і дозволяє побудувати для неї оптимальний регулятор.

В даному підрозділі введемо наступну умову:

припустимо, що існує функція Каратеодорі $q : (0, +\infty) \times \Omega \times R \mapsto R$, така що

$$\begin{gathered} \forall\, r > 0 \;\; \forall\, T > 0 \quad q_\varepsilon(t, x, \xi) \to \; q(t, x, \xi) \text{ слабко } \text{ в } L_2\,(Q_T) \\ \text{рівномірно } \text{ для } |\xi| \le r. \end{gathered} \tag{3.32}$$

Введемо наступну задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + A^0 y = u(t,\, x), \\ \qquad y|_{\partial\Omega} = 0, \\ \qquad y|_{t=0} = y_0, \end{cases} \tag{3.33}$$

$$u \in U \subseteq L^2(Q), \tag{3.34}$$

$$J(y, u) = \int_Q q(t, x, y(t, x))y(t, x)dtdx + \int_Q u^2(t, x)dtdx \to \inf, \tag{3.35}$$

як усереднену для задачі (3.28) – (3.30). Тут стала матриця a^0 є усередненою для a^ε, $A^0 = -div(a^0\nabla)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, така що

$$y_0^\varepsilon \to y_0 \text{ слабко } \text{ в } L^2\,(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{3.36}$$

З умови (3.32) і Леми 2.6 виводимо, що функція q задовольняє (3.31), отже, в силу Леми 3.5 задача оптимального керування (3.33) – (3.35) розв'язна в класі $W(0, \infty) \times L^2\,(Q)$.

Зауваження 3.3. *Відомо [183], що якщо $q(x, \xi) = g(x)\xi$, де g – невід'ємна обмежена функція, то задача (3.33) – (3.35) допускає оптимальний регулятор*

$$u(t) = -Qy(t), \quad \inf J = (Qy_0, y_0),$$

де самоспряжений оператор $Q \in L(L^2(\Omega))$ є розв'язком деякого операторного рівняння типу Ріккаті.

Ми будемо припускати, що задача з усередненими коефіцієнтами вже допускає оптимальний регулятор, тобто будемо вважати виконаними наступні умови:

$$\text{задача}\,(3.33) - (3.35)\,\text{має єдиний розв'язок}\,\{\overline{y}, \overline{u}\}\,; \tag{3.37}$$

$$\text{існує вимірне відображення}\, u: \ [0, +\infty) \times \Omega \times L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega), \ \text{таке що}$$
$$\overline{u}(t, x) \equiv u\,[t, x, \, \overline{y}(t, x)]; \tag{3.38}$$

$$\begin{gathered} \exists \ D > 0 \ \text{таке що} \ \forall \ t \geq 0, \ y, z \in L^2(\Omega) \\ u[t, x, 0] \in L^2(Q), \\ \|u\,[t, x, y] - u\,[t, x, z]\| \leq D\,\|y - z\|\,. \end{gathered} \tag{3.39}$$

Більше того,

$$\exists \ \hat{T} > 0 \ \forall \ t \geq \hat{T} \ \forall \ y \in L^2(\Omega) \ \int\limits_{\Omega} u[t, x, y(x)]y(x)dx < \nu_1 \lambda \|y\|^2, \tag{3.40}$$

де $\lambda > 0$ взяте з нерівності Пуанкаре (2.1).

Перед тим, як ми сформулюємо основний результат, наведемо типовий приклад задачі (3.28) – (3.30), для якої викоуються умови (3.31), (3.32), (3.37) – (3.40).

Приклад 3.2. *Нехай* $\{X_i\}$, $\{\lambda_i\}$ *– розв'язки спектральної задачі*

$$\begin{cases} A^0 X_i = \lambda_i X_i, \\ X_i \,|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

$$U = \left\{ v \in L^2(Q) \middle| \ \ \forall i \in \overline{1, p} \ \ \left| \int\limits_{\Omega} v(t, x) X_i(x) dx \right| \leq \xi_i \ \ \textit{для м. в.} \ \ t > 0 \right\}, \tag{3.41}$$

де $p \geq 1$, *and* $\xi_1 > 0, ..., \xi_p > 0$ – *фіксовані числа,*

$$q_\varepsilon(x,\xi) = g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\xi,$$

тут g – *вимірна, обмежена, невід'ємна, періодична функція з середнім значенням* $\langle g \rangle$ *[38]. Тоді умови* (3.31), (3.32) *виконуются для* $q(x,\xi) = \langle g \rangle \xi$. *Крім того, задача* (3.33) – (3.35) *стає класичною лінійно-квадратичною задачею, що має єдиний розв'язок [91]. Отже, умова* (3.37) *виконуєтьcя.*

Припустимо, що

$$\forall\ i \in \overline{1,p} \quad \Big|(y_0, X_i)\Big| > \frac{\xi_i}{R_i},$$

де $R_i = -\lambda_i + \sqrt{\lambda_i^2 + 1}$.

У цьому випадку, використовуючи метод розкладання Фур'є, легко отримати оптимальне керування у формі оберненого зв'язку для задачі (3.33) – (3.35) *[206]:*

$$u[t,x,y(t)] = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i(t)\,(y(t),X_i) + \beta_i(t))\,X_i(x) - \sum_{i=p+1}^{\infty} R_i\,(y(t),X_i)\,X_i(x), \tag{3.42}$$

де

$$\alpha_i(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,t_i], \\ -R_i & t > t_i, \end{cases} \qquad \beta_i(t) = \begin{cases} -\xi_i sign\,(y(t),X_i)\,, & t \in [0,t_i], \\ 0, & t > t_i, \end{cases}$$

а $t_i > 0$ – *єдиний розв'язок рівняння*

$$t_i = \frac{1}{\lambda_i}\ln\left(\frac{R_i}{\sqrt{\lambda_i^2+1}}\left(1 + \frac{\lambda_i}{\xi_i}\,|(y(t),X_i)|\right)e^{\lambda_i t}\right), t \in [0,t_i],$$

де y – *це розв'язок задачі* (3.33) *з керуванням (3.42).*

Використовуючи (3.42), ми можемо визначити оптимальний регулятор $u:\ [0,+\infty) \times \Omega \times L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ *у такому вигляді*

$$u[t,x,y] = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i(t)\,(y,X_i) + \beta_i(t))\,X_i(x) - \sum_{i=p+1}^{\infty} R_i\,(y,X_i)\,X_i(x), \tag{3.43}$$

де

$$\alpha_i(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in [0, t_i], \\ -R_i \;\; t > t_i, \end{cases} \qquad \beta_i(t) = \begin{cases} -\xi_i sign\,(y_0, X_i)\,, \quad t \in [0, t_i], \\ 0, \quad t > t_i, \end{cases}$$

$$t_i = \frac{1}{\lambda_i} \ln \left(\frac{R_i}{\sqrt{\lambda_i^2 + 1}} \left(1 + \frac{\lambda_i}{\xi_i} \left| (y_0, X_i) \right| \right) e^{\lambda_i t} \right).$$

Тоді умови (3.38), (3.39) *виконуються. Крім того, для* $t \geq \hat{T} := \max\limits_{1 \leq i \leq p} \{t_i\}$ *ми виводимо нерівність*

$$(u[t, y], y) \leq 0,$$

з якої випливає (3.40).

Повернемось до задачі (3.28) – (3.30). Використовуючи регулятор (3.38), розглянемо задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + A^{\varepsilon} y = u[t,\, x, y], \\ \qquad y\,|_{\partial\Omega} = 0, \\ \qquad y\,|_{t=0} = y_0^{\varepsilon}. \end{cases} \tag{3.44}$$

За умов (3.39) задача (3.44) має єдиний розв'язок $y_\varepsilon \in C([0, +\infty); L^2(\Omega))$, який належить класу $W\,(0, T)\;\; \forall\, T > 0$ [245].

Більше того, завдяки (3.40) для деякого $\gamma > 0$

$$\forall\; t \geq \hat{T} \;\; \frac{d}{dt} \|y_\varepsilon(t)\|^2 + \gamma \|y_\varepsilon(t)\|^2 \leq 0. \tag{3.45}$$

Зокрема, $y_\varepsilon \in W\,(0, \infty)$ і $J_\varepsilon(y_\varepsilon, u[t, x, y_\varepsilon]) < \infty$.

Основним результатом підрозділу є наступна теорема.

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови* (3.31), (3.32), (3.37) – (3.40) *і, крім того, існує додатна функція* l, $l \in L^\infty(Q_T)\ \forall\ T > 0$, *така що для всіх* $\varepsilon \in (0, 1)$

$$|q_\varepsilon(t, x, \xi_1) \;-\; q_\varepsilon(t, x, \xi_2)| \leq l(t, x)|\xi_1 - \xi_2|. \tag{3.46}$$

Тоді для довільного $\eta > 0$ *існує* $\bar{\varepsilon} \in (0,1)$, *такий що* $\forall \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$

$$|J_\varepsilon(\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon) - J_\varepsilon(y_\varepsilon, u[t,x,y_\varepsilon(t,x)])| < \eta,$$

де $\{\bar{y}^\varepsilon, \, \bar{u}^\varepsilon\}$ *є оптимальним процесом для задачі* (3.28) – (3.30), y_ε – *розв'язок задачі* (3.44), *керування* $u[t,x,y_\varepsilon(t,x)]$ *визначається з* (3.38).

Доведення. Початок доведення повторює міркування основного результату попереднього підрозділу. А саме, розглянемо задачу (3.44). Для майже всіх (м. в.) $t > 0$ і для деякого $D_1 > 0$ виконується така оцінка для розв'язку y_ε

$$\frac{d}{dt}\|y_\varepsilon(t)\|^2 + 2v_1\|y_\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1} \le D_1\left(\|y_\varepsilon(t)\|^2 + 1\right). \tag{3.47}$$

Скориставшись лемою Гронуола, з (3.47) одержимо, що для кожного $T > 0$ послідовність $\{y_\varepsilon\}$ є обмеженою в $W(0,T)$. Тоді, за лемою про компактність, існує функція z, така, що по підпослідовності длч кожного $T > 0$

$$\begin{gathered} y_\varepsilon \to z \text{ в } L^2(Q_T) \ \text{ і } \ \text{майже скрізь в } \ Q, \\ y_\varepsilon(t) \to z(t) \text{ в } L^2(\Omega) \ \text{ для } \ \text{м. в.}\, t > 0, \ \text{ і } \ \text{слабко } \forall\, t \ge 0. \end{gathered} \tag{3.48}$$

Крім того, з (3.45)

$$y_\varepsilon \to z \text{ слабко } \text{ в } \ L^2(Q). \tag{3.49}$$

З (3.39) ми виводимо, що

$$u[t,x,y_\varepsilon] \to u[t,x,z] \text{ в } L^2(Q_T) \ \ \forall\, T > 0, \tag{3.50}$$

$$u[t,x,y_\varepsilon] \to u[t,x,z] \text{ слабко } \text{ в } \ L^2(Q). \tag{3.51}$$

Використовуючи Лему 2.15, одержуємо, що z – розв'язок задачі (3.44) з оператором A^0 та початковою умовою y^0, а також

$$y_\varepsilon \to z \text{ в } C\left([\delta, T]; L^2(\Omega)\right) \ \ \forall 0 < \delta < T. \tag{3.52}$$

Оскільки задача оптимального керування (3.33), (3.35) має єдиний розв'язок $\{\overline{y}, \overline{u}\}$ і формула $\overline{u}(t,x) = u[t,x,\overline{y}(t,x)]$ виконується для керування $\overline{u}$, то $\overline{y}$ є розв'язком задачі (3.44) з оператором A^0 та початковою умовою y^0. Проте, ця задача також має єдиний розв'язок, тож $\overline{y} \equiv z$ і, крім того, збіжності (3.48) – (3.52) мають місце при $\varepsilon \to 0$ (не лише по підпослідовності).

Аналогічно до Леми 3.2 доводиться наступний результат

Лема 3.4. *Нехай функції q_ε задовольняють умовам* (3.31), (3.32), (3.46) *і для деяких $T > 0$ $y_\varepsilon \to y$ in $L^2(Q_T)$. Тоді*

$$q_\varepsilon(t,x,y_\varepsilon) \to q(t,x,y) \text{ слабко } \text{ в } L^2(Q_T).$$

У всіх подальших міркуваннях будемо позначати через J_ε^T (або J^T) функціонал (3.30) (або (3.35)) над Q_T.

З Леми 3.4 та (3.48), (3.50) ми отримуємо, що для кожного $T > 0$

$$J_\varepsilon^T\left(y_\varepsilon, u\left[t,x,y_\varepsilon\right]\right) \to J^T\left(\overline{y}, \overline{u}\right), \ \varepsilon \to 0. \tag{3.53}$$

Крім того, з (3.45), (3.47) для $T > \hat{T}$

$$\int\limits_T^\infty \|y_\varepsilon(t)\|^2 dt \le \frac{1}{\gamma}\|y_0^\varepsilon\|^2 e^{(D_1+\gamma)\hat{T}} e^{-\gamma T}. \tag{3.54}$$

Тоді з (3.53), (3.54) випливає збіжність

$$J_\varepsilon\left(y_\varepsilon, u\left[t,x,y_\varepsilon\right]\right) \to J\left(\overline{y}, \overline{u}\right), \ \varepsilon \to 0. \tag{3.55}$$

Тепер розглянемо оптимальний процес $\{\bar{y}^\varepsilon,\ \bar{u}^\varepsilon\}$ задачі (3.28) – (3.30). Нехай z_ε – розв'язок задачі (3.28) з керуванням $u \equiv 0$. Тоді

$$2v_1\lambda \int\limits_0^\infty \left\|z_\varepsilon\left(t\right)\right\|^2 dt \le \|y_0^\varepsilon\|^2.$$

Ця нерівність разом з умовами (3.31) та оптимальністю $\{\bar{y}^\varepsilon,\, \bar{u}^\varepsilon\}$ приводять до нерівності

$$-\int_Q C_2(t,x)dtdx + \int_Q \left(\bar{u}^\varepsilon\right)^2(t,x)dtdx \le$$

$$\le J_\varepsilon\left(\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon\right) \le J_\varepsilon\left(z^\varepsilon, 0\right) \le C\int_Q |z^\varepsilon(t,x)|^2 dtdx + \int_Q |C_1(t,x)||z^\varepsilon(t,x)|dtdx \le$$

$$(C+1/2)\int\limits_0^\infty \left\|z_\varepsilon(t)\right\|^2 dt + \frac{1}{2}\|C_1\|^2_{L^2(Q)} \le \frac{C+1/2}{2v_1\lambda}\|y_0^\varepsilon\|^2 + \frac{1}{2}\|C_1\|^2_{L^2(Q)}.$$

Таким чином, послідовність $\{\,\bar{u}^\varepsilon\}$ є обмеженою в $L^2(Q)$. Тоді існує $v \in L^2(Q)$, таке, що по деякій підпослідовності

$$\bar{u}^\varepsilon \to\ v \text{ слабко } \text{ в } L^2(Q),\ \ \varepsilon \to 0.$$

В силу обмеженості $\{\bar{u}^\varepsilon\}$ в $L^2(Q)$ й оцінки

$$\frac{d}{dt}\left\|\bar{y}^\varepsilon(t)\right\|^2 + 2v_1\left\|\bar{y}^\varepsilon(t)\right\|^2_{H_0^1} \le 2\left|\left(\bar{y}^\varepsilon(t), \bar{u}^\varepsilon(t)\right|\right., \tag{3.56}$$

та за лемою Гронуола ми виводимо обмеженість послідовності $\{\bar{y}^\varepsilon\}$ в $W(0,T)$ для кожного $T > 0$. Тоді по підпослідовності вона збігається до деякої функції y при $\varepsilon \to 0$ у сенсі (3.48).

Використовуючи Лему 2.15, ми одержуємо що y – розв'язок задачі (3.33) з керуванням v, а $\bar{y}^\varepsilon$ прямує до y у сенсі (3.52).

Покажемо, що процес $\{y,\, v\}$ є оптимальним у задачі (3.33) – (3.35). З оптимальності $\{\bar{y}^\varepsilon,\, \bar{u}^\varepsilon\}$ для довільного $u \in L^2(Q)$ виконується наступна нерівність

$$J_\varepsilon\left(\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon\right) \le J_\varepsilon\left(p_\varepsilon,\, u\right), \tag{3.57}$$

де p_ε – розв'язок задачі (3.28) з керуванням u. Звідси, замінюючи u^ε на u, виконуватиметься оцінка (3.56) для p_ε. Таким чином, $\{\,p_\varepsilon\}$ є обмеженим у $W(0,T)$ для кожного $T > 0$. З наведеного вище міркування ми одержимо, що p_ε збігається до деякої функції p as $\varepsilon \to 0$ у сенсі (3.48). Крім того, p – розв'язок задачі (3.33) з керуванням u і p_ε збігається до p у сенсі (3.52). Аналізуючи задачу (3.33), ми виводимо, що для деяких $\delta > 0$, $C_\delta > 0$ для всіх $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}\|p(t)\|^2 + \delta\|p(t)\|^2 \leq C_\delta\|u(t)\|^2. \tag{3.58}$$

Зокрема, з нерівності (3.58) випливає, що для $T > 0$

$$\|p(T)\|^2 \leq \left(\|y_0\|^2 + C_\delta\|u\|_{L^2(Q)}\right) e^{-\frac{\delta T}{2}} + C_\delta \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} \|u(t)\|^2 dt. \tag{3.59}$$

Крім того, для деякого $D_2 > 0$ при кожному $T > 0$

$$\int_T^{+\infty} \|p_\varepsilon(t)\|^2 dt \leq D_2 \left(\|p_\varepsilon(T)\|^2 + \int_T^{+\infty} |u(t)|^2 dt \right). \tag{3.60}$$

Тоді з нерівності (3.57) ми отримаємо для всіх $T > 0$:

$$J_\varepsilon^T\left(\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon\right) \leq \int_{Q_T} q_\varepsilon(t, x, p_\varepsilon(t, x)) p_\varepsilon(t, x) dt dx + \int_0^{+\infty} |u(t)|^2 dt +$$

$$\int_T^{\infty} \int_\Omega C_2(t, x) dt dx + D_2 \|p_\varepsilon(T)\|^2 + D_2 \int_T^{+\infty} \|u(t)\|^2 dt. \tag{3.61}$$

Звідси

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon^T\left(\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon\right) \geq \int_{Q_T} q(t, x, y(t, x) y(t, x) dt dx +$$

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \|\bar{u}^\varepsilon(t)\|^2 dt \geq J^T(y, v), \tag{3.62}$$

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon^T\left(\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon\right) \leq D_2\|p(T)\|^2 + \int_{Q_T} q(t, x, p(t, x) p(t, x) dt dx +$$

$$\int_T^{\infty} \int_\Omega C_2(t, x) dt dx + \int_0^{+\infty} |u(t)|^2 dt + D_2 \int_T^{+\infty} |u(t)|^2 dt. \tag{3.63}$$

Таким чином, з нерівностей (3.62), (3.63) та (3.59) для $T \to \infty$ випливає, що

$$J(y, v) \le J(p, u),$$

отже, $\{y, v\} = \{\bar{y}, \bar{u}\}$ є оптимальним процесом у задачі (3.33)– (3.35).

Тепер у попередніх міркуваннях покладемо $u = \bar{u}$. Тоді, в силу (3.37), для вдповідних розв'язків $\bar{p}_\varepsilon$ задачі (3.28) будемо мати $\bar{p}_\varepsilon \to \bar{y}$ у сенсі (3.48) та

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_0^{+\infty} |\bar{u}^\varepsilon(t)|^2 dt \le \int_0^{+\infty} |\bar{u}(t)|^2 dt +$$

$$D_2 \|\bar{y}(T)\|^2 + D_2 \int_T^{+\infty} |\bar{u}(t)|^2 dt + \int_T^{\infty} \int_\Omega C_2(t, x) dt dx,$$

і для $T \to \infty$ одержимо

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_0^{+\infty} |\bar{u}^\varepsilon(t)|^2 dt \le \int_0^{+\infty} |\bar{u}(t)|^2 dt, \tag{3.64}$$

що разом із слабкою збіжністю гарантує сильну збіжність $\bar{u}^\varepsilon$ до $\bar{u}$ в $L_2(Q)$.

Оскільки нерівність (3.58) має місце для $\{\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon\}$, то сильна збіжність $\{\bar{y}^\varepsilon$ в $L^2(Q_T)$ і сильна збіжність $\bar{u}^\varepsilon$ до $\bar{u}$ в $L_2(Q)$ дозволяють нам перейти до границі для $\varepsilon \to 0$ та отримати

$$J_\varepsilon\left(\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon\right) \to J\left(\overline{y}, \overline{u}\right), \ \varepsilon \to 0. \tag{3.65}$$

Теорема доведена. □

Зауваження 3.4. *Теорема гарантує збіжність не лише для критерію якості, а також і для керувань та фазових змінних у такий спосіб:*

$$\bar{u}^\varepsilon - \ u[t, x, y_\varepsilon] \ \to \ 0 \ \textit{в} \ L^2(Q), \ \ \varepsilon \to 0,$$

$$\bar{y}^\varepsilon - \ y_\varepsilon \to \ 0 \ \textit{в} \ C\left([\delta, T]; L^2(\Omega)\right) \ \forall 0 < \delta < T.$$

3.3 Наближений синтез для хвильового рівняння

Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область, а $\varepsilon \in (0,1)$ – малий параметр. У циліндрі $Q_T = (0,T) \times \Omega$ керований процес $\{y,u\}$ описується задачею

$$\begin{cases} y_{tt}(t,x) + A^{\varepsilon}y(t,x) = u(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0^{\varepsilon}, \; y_t|_{t=0} = y_1^{\varepsilon}, \end{cases} \tag{3.66}$$

з критерієм якості

$$J_{\varepsilon}(u) = \int\limits_{\Omega} q_{\varepsilon}(x, y(T,x))y(T,x)dx + \int\limits_{Q_T} u^2(t,x)dtdx \to \inf, \tag{3.67}$$

де $A^{\varepsilon} = -div(a^{\varepsilon}\nabla)$, $a^{\varepsilon}(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, a – вимірна, симетрична, періодична матриця, що задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості (2.11).

Тут, як і в попередньому підрозділі, $q_{\varepsilon} : \Omega \times R \mapsto R$ є функцією Каратеодорі, й існують функції $C_1 \in L^2(\Omega)$, $C_2 \in L^1(\Omega)$ та константа $C > 0$, що не залежать від $\varepsilon \in (0,\,1)$, такі, що для всіх $\xi \in R$ і майже всіх $x \in \Omega$ виконуються наступні нерівності

$$\begin{gathered} |q_{\varepsilon}(x,\xi)| \le C|\xi| + C_1(x), \\ q_{\varepsilon}(x,\xi)\xi \ge -C_2(x). \end{gathered} \tag{3.68}$$

За цих умов оператор $q_{\varepsilon}(x,\,\cdot) : \; L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ є неперервним.

Лема 3.5. *Задача оптимального керування (3.66) – (3.67) має єдиний розв'язок* $\{\bar{y}^{\varepsilon},\, \bar{u}^{\varepsilon}\}$ *(оптимальний процес) у класі* $W_1(0,T) \times L^2(Q_T)$, *де* $W_1(0,T)$ *– це клас функцій* $y \in L^2\left(0,\,T;\,H_0^1(\Omega)\right)$, *які мають узагальнені похідні по* t *у класі* $L^2\left(0,\,T;\,L^2(\Omega)\right)$.

Доведення. Позначимо y_u^{ε} – розв'язок (3.66) при фіксованому $u \in L^2(Q_T)$.

Розглянемо функціонал $\varphi : L^2(Q_T) \mapsto \mathbb{R}$,

$$\varphi(u) = \int_\Omega q_\varepsilon(x, y_u^\varepsilon(T,x)) y_u^\varepsilon(T,x)dx.$$

В силу умови (3.68) функціонал φ обмежений знизу. Нехай $u_n \to u$ слабко в $L^2(Q_T)$. В силу Леми 2.16

$$y_{u_n}^\varepsilon \to y_u^\varepsilon \text{ в } C([0,T]; L^2(\Omega)).$$

Звідси в силу неперервності оператора суперпозиції виводимо, що

$$\varphi(u_n) \to \varphi(u).$$

Тоді Лема 2.12 про мінімізацію коерцитивної форми гарантує існування мінімуму u^ε для функціоналу J_ε. Лема доведена.

□

Зауважимо, що у загальному випадку знайти формулу оптимального синтезу для задачі (3.66) – (3.67) не уявляється можливим.

Будемо вважати, що перехід до усереднених параметрів значно спрощує структуру задачі (3.66) – (3.67), а також дозволяє побудувати для неї оптимальне керування у формі оберненого зв'язку.

У підрозділі 3.3 введемо таку умову:

припустимо, що існує функція Каратеодорі $q : \Omega \times R \mapsto R$, така що

$$\begin{gathered} \forall\, r > 0 \quad q_\varepsilon(x,\xi) \to \ q(x,\xi) \text{ слабко } \text{ в } L_2\,(\Omega) \\ \text{рівномірно } \text{ для } |\xi| \le r. \end{gathered} \tag{3.69}$$

Будемо розглядати наступну задачу

$$\begin{cases} y_{tt}(t,x) + A^0 y(t,x) = u(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0, \ y_t|_{t=0} = y_1, \end{cases} \tag{3.70}$$

$$J(u) = \int_\Omega q(x, y(T,x))y(T,x)dx + \int_{Q_T} u^2(t,x)dtdx \to \inf, \tag{3.71}$$

як усереднену для задачі (3.66) – (3.67). Тут стала матриця a^0 є усередненою для a^ε, $A^0 = -div(a^0\nabla)$, $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, $y_1 \in L^2(\Omega)$, такі що

$$\begin{aligned} &y_0^\varepsilon \to y_0 \ \text{ слабко } \text{ в } H_0^1(\Omega), \ \ \varepsilon \to 0, \\ &y_1^\varepsilon \to y_1 \ \text{ слабко } \text{ в } L^2(\Omega), \ \ \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Завдяки (3.69) функція $q(x,\xi)$ задовольняє умовам (3.68). Тоді задача оптимального керування (3.70) – (3.71) має розв'язок $\{\overline{y}, \overline{u}\}$.

Зауваження 3.5. *Відомо [183], що якщо $q(x,\xi) = g(x)\xi$, де g – невід'ємна обмежена функція, то задача (3.70) – (3.71) допускає оптимальне керування у формі синтезу*

$$u(t) = -Q_{21}(t)y(t) - Q_{22}(t)y_t(t),$$

де $Q_{21}(t) \in L(H_0^1(\Omega))$, $Q_{22}(t) \in L(L^2(\Omega))$ та

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) \\ Q_{21}(t) & Q_{22}(t) \end{pmatrix}$$

є розв'язком деякого матричного диференціально-операторного рівняння типу Ріккаті.

Ми будемо припускати, що задача з усередненими коефіцієнтами вже допускає форму оптимального синтезу, тобто будемо вважати виконаними наступні умови:

$$\text{задача (3.70)} - \text{(3.71) має єдиний розв'язок } \{\overline{y}, \overline{u}\}\,; \tag{3.73}$$

існує вимірна функція $u:\ [0,T] \times \Omega \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ така, що

$$\overline{u}(t,x) = u\left[t, x,\ \overline{y}(t,x), \overline{y}_t(t,x)\right] \text{ м. с. на } Q_T; \tag{3.74}$$

$$\exists\ D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ \text{такі що}\ \forall\ t \in [0,T],\ \forall\ y \in H_0^1(\Omega),\ \forall\ z \in L^2(\Omega)$$
$$\|u\,[t,x,y,z]\| \le D_1 \left(\|y\|_{H_0^1} + \|z\| + 1 \right),$$
$$\|u\,[t,x,y,z] - u\,[t,x,y_1,z_1]\| \le D_2 \left(\|y-y_1\|_{H_0^1} + \|z-z_1\| \right). \tag{3.75}$$

$$y_n \to y \text{ слабко в } H_0^1(\Omega),\ z_n \to z \text{ слабко в } L^2(\Omega) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \forall\ t \in [0,T]\ u\,[t,x,y_n,z_n] \to u\,[t,x,y,z] \text{ в } L^2(\Omega) \tag{3.76}$$

Для наочності наведемо типовий приклад функції $q_\varepsilon : \Omega \times R \mapsto R$, для якої мають місце умови (3.68), (3.69), (3.73), (3.75), (3.76).

Приклад 3.3. *Нехай* $q_\varepsilon(x,\xi) = g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\xi$, *де* g *є вимірною, обмеженою, додатною, періодичною функцією із середнім значенням* $\langle g \rangle$ *[38]. Тоді умови (3.68), (3.69) виконуються для* $q(x,\xi) = \langle g \rangle\,\xi$.

Нехай $\{X_i\}$, $\{\lambda_i\}$ *– розв'язки спектральної задачі*

$$\begin{cases} A^0 X_i = \lambda_i X_i, \\ X_i\,|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

$\{X_i\} \subset H_0^1(\Omega)$ *є ортонормованим базисом в* $L^2(\Omega)$, $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$, $\lambda_i \to \infty$, $i \to \infty$.

Шукатимемо розв'язок задачі (3.70) – (3.71) у вигляді

$$y(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) X_i(x), \quad u(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t) X_i(x).$$

Тоді ми маємо зліченну сім'ю одновимірних задач оптимального керування:

$$\begin{cases} \ddot{y}_i(t) = -\lambda_i y_i(t) + u_i(t), \\ y_i(0) = (y_0, X_i),\ \dot{y}_i(0) = (y_1, X_i), \\ (y_i(T))^2 + \langle g \rangle^{-1} \int\limits_0^T (u_i(t))^2 dt \to \inf. \end{cases} \tag{3.77}$$

Оптимальне керування зі зворотним зв'язком для кожної з цих задач визначається з формули [31]

$$u_i(t) = K_{1i}(t)y_i(t) + K_{2i}(t)\dot{y}_i(t), \tag{3.78}$$

де коефіцієнти $K_{1i}(t)$, $K_{2i}(t)$ *визначаються через* $\lambda_i, \langle g \rangle$ *та задовольняють оцінкам*

$$\exists\ K > 0\ \forall\ t \in [0,T],\ \forall\ i \geq 1\ |K_{1i}(t)| \leq \frac{K}{\sqrt{\lambda_i}},\quad |K_{2i}(t)| \leq \frac{K}{\lambda_i}. \tag{3.79}$$

Перейшовши до вихідної задачі, отримаємо оптимальне керування зі зворотним зв'язком

$$u[t,x,y,y_t] = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(K_{1i}(t)(y,X_i) + K_{2i}(t)(y_t,X_i)\Big)X_i(x). \tag{3.80}$$

З рівності Парсеваля матимем

$$\|u[t,x,\phi,\psi]\|^2 \leq 2\frac{K^2}{\lambda_1^2}(\|\phi\|^2_{H_0^1} + \|\psi\|^2), \tag{3.81}$$

$$\|u[t,x,\phi_1,\psi_1] - u^0[t,x,\phi_2,\psi_2]\|^2 \leq 2\frac{K^2}{\lambda_1^2}(\|\phi_1-\phi_2\|^2_{H_0^1} + \|\psi_1-\psi_2\|^2). \tag{3.82}$$

Звідси ми одразу ж отримаємо (3.75). Далі, для слабко збіжних послідовностей $y_n \to y$ *в* $H_0^1(\Omega)$, $z_n \to z$ *в* $L^2(\Omega)$, *і для довільного* $i \geq 1$ *можемо написати*

$$(u[t,x,y_n,z_n] - u[t,x,y,z], X_i) =$$

$$= K_{1i}(t)(y_n - y, X_i) + K_{2i}(t)(z_n - z, X_i) \to 0,\ n \to \infty.$$

Ця рівність та (3.81) означають, що збіжність (3.76) має місце у слабкому сенсі. Тоді з оцінки

$$\sum_{i=N}^{\infty}(u[t,x,y_n,z_n],X_i)^2 \leq \frac{K^2}{\lambda_N^2}(\|y_n\|^2_{H_0^1} + \|z_n\|^2).$$

ми виводимо сильну збіжність в $L^2(\Omega)$.

Тепер повернемось до нашого основного завдання. Використовуючи закон зворотнього зв'язку (3.74), розглянемо задачу

$$\begin{cases} y_{tt} + A^{\varepsilon} y = u[t,\, x, y, y_t], \ (t,x) \in Q_T, \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0^{\varepsilon}, \ y_t|_{t=0} = y_1^{\varepsilon}. \end{cases} \tag{3.83}$$

За умов (3.75) задача (3.83) має єдиний розв'язок y_{ε} у класі $W_1(0,T)$ [245].

Сформулюємо основний результат підрозділу 3.3.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови (3.68), (3.69), (3.73), (3.74), (3.75), (3.76) і, крім того, існує додатна функція $l \in L^{\infty}(\Omega)$, така, що для всіх $\varepsilon \in (0,1)$*

$$|q_{\varepsilon}(x,\xi_1) \ - \ q_{\varepsilon}(x,\xi_2)| \le l(x)|\xi_1 - \xi_2|. \tag{3.84}$$

Тоді для довільного $\eta > 0$ існує $\bar{\varepsilon} \in (0,1)$ такий, що $\forall \varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon})$

$$|J_{\varepsilon}(\bar{u}^{\varepsilon}) - J_{\varepsilon}(u[t,x,y_{\varepsilon},y_{\varepsilon t}])| < \eta \tag{3.85}$$

де $\{\bar{y}^{\varepsilon},\ \bar{u}^{\varepsilon}\}$ є оптимальним процесом для задачі (3.66) – (3.67), y_{ε} – розв'язок задачі (3.83), керування $u\,[t,x,y_{\varepsilon},y_{\varepsilon t}]$ визначається з (3.74).

Доведення. Розглянемо задачу (3.83). Відомо, що має місце наступна рівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|y_{\varepsilon t}\|^2 + (a^{\varepsilon}\nabla y_{\varepsilon}, \nabla y_{\varepsilon})\right) = \left(u[t,x,y_{\varepsilon},y_{\varepsilon t}], y_{\varepsilon t}\right). \tag{3.86}$$

Тоді за лемою Гронуола одержимо

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\|y_{\varepsilon t}(t)\|^2 + \|y_{\varepsilon}(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) \le C_1. \tag{3.87}$$

Тут і далі константи C_i залежать лише від параметрів задачі (3.66) – (3.67) та не залежать від ε.

Завдяки нерівностям (3.74) і (3.87) ми виводимо, що

$$\begin{aligned} \{y_\varepsilon\} &\text{ є обмеженою у } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)); \\ \{y_{\varepsilon t}\} &\text{ є обмеженою у } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \\ \{y_{\varepsilon tt}\} &\text{ є обмеженою у } L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)). \end{aligned} \tag{3.88}$$

Тоді за лемою про компактність ми робимо висновок, що існує функція $z(t,x) \in W_1(0,T)$ така, що по підпослідовності

$$\begin{aligned} &y_\varepsilon \to z \text{ в } C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C([0,T];H_{0w}^1(\Omega)), \\ &y_{\varepsilon t} \to z_t \text{ в } C([0,T];H^{-1}(\Omega)) \cap C([0,T];L_w^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{3.89}$$

З (3.89), (3.76) та з теореми Лебега про мажоровану збіжність отримаємо, що

$$u_\varepsilon(t,x) := u[t,x,y_\varepsilon,y_{\varepsilon t}] \to u[t,x,z,z_t] \text{ in } L^2\left(Q\right). \tag{3.90}$$

З Леми 2.16 про G-збіжність для гіперболічних операторів ми виводимо, що z є розв'язком задачі (3.83) з оператором A^0 та початковою умовою y^0, y^1.

Оскільки задача оптимального керування (3.70) – (3.71) має єдиний розв'язок $\{\overline{y},\overline{u}\}$ і формула $\overline{u}(t,x) = u[t,x,\overline{y}(t,x),\overline{y}_t(t,x)]$ є справедливою для керування $\overline{u}$, то $\overline{y}$ є розв'язком задачі (3.83) з оператором A^0 і початковою умовою y^0, y^1. Проте ця задача також має єдиний розв'язок, отже, $\overline{y} \equiv z$ і, крім того, збіжність (3.89) виконується при $\varepsilon \to 0$ (не лише по підпослідовності).

З Леми 3.2 та зі збіжностей (3.89), (3.90) отримаємо

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int\limits_\Omega q_\varepsilon(x,y_\varepsilon(T,x))y_\varepsilon(T,x)dx + \int\limits_Q u_\varepsilon^2(t,x)dtdx \to J(\bar{u}). \tag{3.91}$$

Тепер розглянемо оптимальний процес $\{\bar{y}^\varepsilon,\ \bar{u}^\varepsilon\}$ задачі (3.66) – (3.67). Маємо нерівність

$$-\int_\Omega C_2(x)dx + \int_Q (\bar{u}^\varepsilon)^2 (t,x)dtdx \le$$
$$\le J_\varepsilon(\bar{u}^\varepsilon) \le C\int_\Omega z_\varepsilon^2(T,x)dx + \int_\Omega C_1(x)z_\varepsilon(T,x)dx,$$

де z_ε – розв'язок задачі (3.66) з керуванням $u \equiv 0$. Для z_ε виконується оцінка (3.87), отже, послідовність $\{\bar{u}^\varepsilon\}$ обмежена в $L^2(Q)$. Тоді існує $v \in L^2(Q)$, таке, що по підпослідовності

$$\bar{u}^\varepsilon \to v \text{ слабко в } L^2(Q), \ \varepsilon \to 0.$$

В силу обмеженості $\{\bar{u}^\varepsilon\}$ in $L^2(Q)$ та рівності (3.86) ми виводимо обмеженість послідовності $\{\bar{y}^\varepsilon\}$ у сенсі (3.88). Отже, по підпослідовності вона збігається до деякої функції $y \in W_1(0,T)$ при $\varepsilon \to 0$ у значенні (3.89). Скориставшись Лемою 2.16, отримаємо, що y – розв'язок задачі (3.70) з керуванням v.

Покажемо, що процес $\{y, v\}$ є оптимальним у задачі (3.70) – (3.71). З оптимальності $\{\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon\}$ для довільного $u \in L^2(Q)$ випливає виконання нерівності

$$J_\varepsilon(\bar{u}^\varepsilon) \le J_\varepsilon(u) = \int\limits_\Omega q_\varepsilon(x, p_\varepsilon(T,x))p_\varepsilon(T,x)dx, \tag{3.92}$$

де p_ε – розв'язок задачі (3.66) з керуванням u. Зрозуміло, що $\{p^\varepsilon\}$ обмежена в сенсі (3.88) і по підпослідовності вона збігається до деякої функції $p \in W_1(0,T)$ при $\varepsilon \to 0$ у значенні (3.89). Крім того, p є розв'язком задачі (3.70) з керуванням u. Тоді

$$\begin{gathered} J_\varepsilon(u) \to J(u) = \int\limits_\Omega q(x, p(T,x))p(T,x)dx, \\ \liminf_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(\bar{u}^\varepsilon) \ge J(v) = \int\limits_\Omega q(x, y(T,x))y(T,x)dx. \end{gathered} \tag{3.93}$$

З (3.92),(3.93) ми зрештою отримуємо нерівність

$$J(v) \le J(u),$$

яка означає, що $\{y,\, v\}$ є оптимальним процесом у задачі (3.70) – (3.71). З єдиності випливає, що $\{y,\, v\} \equiv \{\overline{y}, \overline{u}\}$. Потім, повторюючи мікування попередніх підрозділів, ми можемо довести, що

$$J_\varepsilon\left(\bar{u}^\varepsilon\right) \to J\left(\overline{u}\right),\ \varepsilon \to 0. \tag{3.94}$$

Об'єднуючи (3.91) і (3.94), отримаємо твердження теореми.

□

Зауваження 3.6. *Збіжності (3.91) і (3.94) гарантують близькість не лише критеріїв якості, але й керувань і фазових змінних в наступному сенсі:*

$$\bar{u}^\varepsilon - u[t, x, y_\varepsilon, y_{\varepsilon t}] \to 0 \ \textit{в}\ L^2(Q_T),\ \varepsilon \to 0,$$

$$\bar{y}^\varepsilon - y_\varepsilon \to 0 \ \textit{в}\ C\left([0, T]; L^2\left(\Omega\right)\right).$$

3.4 Наближена оптимальна стабілізація розв'язків параболічного включення з неавтономними збуреннями в коефіцієнтах

Нехай задано триплет гільбертових просторів $V \subset H \subset V^*$ з компактними щільними вкладеннями, $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ – канонічна двоїстість між V та V^*, через $\|\cdot\|$, $(\cdot\,,\,\cdot)$ позначатимемо норму і скалярний добуток в H, через $\|\cdot\|_V$ – норму в просторі V. Будемо вважати, що виконується нерівність $\|u\| \leq C \cdot \|u\|_V$.

Розглядається задача оптимального керування з неавтономними збуреннями в коефіцієнтах і фіксованими параметрами $g \in H$, $\gamma > 0$:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + A_\varepsilon(t)y \in F_\varepsilon(t, y) + g \cdot v(t), \;\; t > 0, \\ y(0) = y_0 \in H, \end{cases} \tag{3.95}$$

$$v(\cdot) \in U = L^2(0, +\infty), \tag{3.96}$$

$$J(y, v) = \int_0^{+\infty} \Big(\|y(t)\|^2 + \gamma v^2(t) \Big)\, dt \to \inf \tag{3.97}$$

Вважаємо, що в певному сенсі (буде уточнено пізніше) при прямуванні малого параметра ε до нуля диференціальні оператори A_ε збігаються до оператора A і многозначні відображення F_ε збігаються до нуля. Тоді відповідна незбурена задача має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + Ay = g \cdot v(t), \\ y(0) = y_0 \in H, \end{cases} \tag{3.98}$$

$$v(\cdot) \in U = L^2(0, +\infty), \tag{3.99}$$

$$J(y,v)=\int_0^{+\infty}\left(\|y(t)\|^2+\gamma v^2(t)\right)dt\to\inf\,. \tag{3.100}$$

Будемо розглядати наступні умови на коефіцієнти.

Нехай для $\forall\varepsilon>0$ $\{A_\varepsilon(t):V\mapsto V^*\}_{t\geq 0}$ – лінійні, неперервні оператори, причому $\exists 0<\nu_1<\nu_2$ $\forall t\geq 0$ $\forall u,v\in V$ виконані умови

$$\nu_1\cdot\|u\|_V^2\leq\langle A_\varepsilon(t)u,u\rangle\leq\nu_2\cdot\|u\|_V^2\,, \tag{3.101}$$

$$\langle A_\varepsilon(t)u,v\rangle=\langle A_\varepsilon(t)v,u\rangle\,, \tag{3.102}$$

$$\text{функція } t\mapsto\langle A_\varepsilon(t)u,v\rangle \quad \text{вимірна.} \tag{3.103}$$

Нехай $\forall\varepsilon>0$ $\;F_\varepsilon:[0,+\infty)\times H\mapsto 2^H$ – опуклозначне, замкненозначне відображення,

$$\forall t\geq 0\;\; F_\varepsilon(t,\cdot)-\text{напівнеперервна}\quad\text{зверху}\quad[156], \tag{3.104}$$

$$\forall y\in H\;\, F_\varepsilon(\cdot,y):[0,+\infty)\mapsto 2^H-\text{вимірна }[156], \tag{3.105}$$

$$\forall t\geq 0,\;\forall y\in H\;\;\|F_\varepsilon(t,y)\|_+:=\sup_{\xi\in F_\varepsilon(t,y)}\|\xi\|\leq a_\varepsilon(t)+b_\varepsilon\|y\|\,, \tag{3.106}$$

де $a_\varepsilon\in L^2$, $b_\varepsilon>0$.

За умов (3.101) – (3.106) відомо [187], що $\forall v(\cdot)\in U$ $\forall y_0\in H$ $\forall T>0$ задача (3.95) має розв'язок у тому сенсі, що $\exists f\in L^2(0,T;H)$ $\;\exists y\in W(0,T)=\left\{y\in L^2(0,T;H)\;\middle|\frac{dy}{dt}\in L^2(0,T;V^*)\right\}$ такі, що $f(t)\in F_\varepsilon(t,y(t))$ майже скрізь (м. с.) і

$$\begin{cases}\frac{dy}{dt}+A_\varepsilon(t)y=f(t)+g\cdot v(t):=l(t),\\ y(0)=y_0\in H,\end{cases} \tag{3.107}$$

Крім того, якщо позначити розв'язок задачі (3.107) через $y=P_{A_\varepsilon}^{-1}(l,y_0)$, то відомо [187], що $y\in C([0,T];H)$ і якщо $l_k\to l$ слабко в $L^2(0,T;H)$, $\;y_0^k\to y_0$ в $\;H$, то $P_{A_\varepsilon}^{-1}(l_k,y_0^k)\to P_{A_\varepsilon}^{-1}(l,y_0)$ слабко в $W(0,T)$ і сильно в $C([0,T];H)$.

Лема 3.6. *За умов* (3.101) – (3.106) *для достатньо малих* $\varepsilon > 0$ *задача оптимального керування* (3.95) – (3.97) *має розв'язок.*

Доведення. Виведемо оцінки для розв'язку задачі (3.95) при фіксованому $u(\cdot) \in U$. В силу (3.101), (3.106) одержимо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|y(t)\right\|^2 + \nu_1 \left\|y(t)\right\|_V^2 \le \left\|f(t)\right\| \cdot \left\|y(t)\right\| + \left\|g\right\| \cdot \left\|y(t)\right\| \cdot \left|u(t)\right| \le$$

$$\le a_\varepsilon(t)\left\|y(t)\right\| + b_\varepsilon \left\|y(t)\right\|^2 + \left\|g\right\| \cdot \left\|y(t)\right\| \cdot \left|u(t)\right|.$$

Тоді справедливі наступні оцінки з константами $\delta > 0,\ C_1 > 0$, які не залежать від $\varepsilon > 0$:

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\ \forall t \ge s \ge 0$$

$$\left\|y(t)\right\|^2 \le \left\|y(s)\right\|^2 e^{-\delta(t-s)} + C_1 \int_s^t e^{-\delta(t-p)} \left(a_\varepsilon^2(p) + u^2(p)\right) dp \le$$

$$\le \left\|y(s)\right\|^2 e^{-\delta(t-s)} + C_1 \left(\left\|a_\varepsilon\right\|_U^2 + \left\|u\right\|_U^2\right), \qquad (3.108)$$

$$\int_s^t \left\|y(p)\right\|^2 dp \le \frac{1}{\delta}\left(\left\|y(s)\right\|^2 + C_1 \int_s^t \left(a_\varepsilon^2(p) + u^2(p)\right) dp\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\delta}\left(\left\|y(s)\right\|^2 + C_1 \left(\left\|a_\varepsilon\right\|_U^2 + \left\|u\right\|_U^2\right)\right). \qquad (3.109)$$

З цих оцінок випливає, що $J(y,u) < \infty$. Нехай $\tilde{J}_\varepsilon$ – значення задачі (3.95) – (3.97). Виберемо $\{u_n\} \subset U$ так, щоб $J(y_n, u_n) \le \tilde{J}_\varepsilon + \frac{1}{n}$. Тоді $\left\|u_n\right\|_U^2 \le \tilde{J}_\varepsilon + 1$ $\forall n \ge n_0$. Отже, $\exists \tilde{u} \in U$ таке, що по підпослідовності $u_n \xrightarrow{w} \tilde{u}$ в $L^2(0,T)$ $\forall T > 0$. Тоді $y_n = P_{A_\varepsilon}^{-1}(f_n + gu_n, y_0)$, $f_n(t) \in F_\varepsilon(t, y_n(t))$ майже скрізь і за умовою (3.106) та оцінкою (3.108) $\|f_n(t)\| \leq m + a_\varepsilon(t)$ майже скрізь. Тоді $f_n \xrightarrow{w} f$ в $L^2(0,T;H)$, $y_n \to \tilde{y}$ в $C([0,T];H)$, де $\tilde{y}_n = P^{-1}_{A_\varepsilon}(f + g\tilde{u}, y_0)$. В силу леми 2.6 (Мазура) $f(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} cl_H(co\bigcup_{k=n}^{\infty} f_k(t))$ майже скрізь.

Отже, з умови (3.104) $f(t) \in F(\tilde{y}(t))$ майже скрізь. Таким чином, $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ – допустимий процес у задачі (3.95) – (3.97) і з нерівності

$$J(y_n, u_n) \geq J_T(y_n, u_n) := \int_0^T \|y_n(t)\|^2 dt + \gamma \int_0^T u_n^2(t)dt$$

маємо $\forall T > 0$

$$\tilde{J}_\varepsilon \geq \varliminf_{n\to\infty} J_T(y_n, u_n) \geq \lim_{n\to\infty} \int_0^T \|y_n(t)\|^2 dt +$$

$$+\gamma \varliminf_{n\to\infty} \int_0^T u_n^2(t)dt \geq J_T(\tilde{y}, \tilde{u}).$$

Тому $\tilde{J}_\varepsilon = J(\tilde{y}, \tilde{u})$, отже, $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ – оптимальний процес у задачі. Лема доведена.

□

Якщо оператор A є самоспряженим і задовольняє оцінку $\langle Au, u\rangle \geq \nu_1 \|u\|_V^2$ (а це буде, зокрема, якщо $\forall t \geq 0 \;\; A_\varepsilon(t) \xrightarrow{G} A, \quad \varepsilon \to 0$ [37]), то A^{-1} є компактним самоспряженим оператором в H. Отже, спектральна задача

$$AX = \lambda X \tag{3.110}$$

має власні числа $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ..., \;\; \lambda_n \to \infty, \quad n \to \infty$, та власні функції $\{X_i\}_{i=1}^{\infty} \subset V$, які утворюють ортогональний базис в H.

Тоді з [32] маємо, що лінійно-квадратична задача оптимального керування (3.98) – (3.100) має єдиний розв'язок, що має вигляд

$$u[y] = (R, y), \tag{3.111}$$

де $R \in H$ визначається через $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ та коефіцієнт Фур'є функції g (див. підрозділ 4.2).

При цьому виконується нерівність

$$\|R\| \leq \frac{\|g\|}{2\gamma\lambda_1}.$$

Розглянемо задачу

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + A_\varepsilon(t)y \in F_\varepsilon(t,y) + g \cdot u[y], \ \ t > 0, \\ y(0) = y_0 \in H. \end{cases} \tag{3.112}$$

Відображення $F_\varepsilon^1(t,y) := F_\varepsilon(t,y) + g(R,y)$ задовольняє умови (3.104), (3.105),

$$\left\|F_\varepsilon^1(t,y)\right\|_+ \leq a_\varepsilon(t) + b_\varepsilon \|y\| + \|g\| \cdot \|R\| \cdot \|y\| \leq$$

$$a_\varepsilon(t) + \left(b_\varepsilon + \frac{\|g\|^2}{2\gamma\lambda_1^2}\right)\|y\|.$$

Отже, задача (3.112) розв'язна в $W(0,T)$ для довільного $T > 0$.

Якщо ж $b_\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \to 0$ і

$$\|g\|^2 < \frac{2\gamma\lambda_1\nu_1}{C^2}, \tag{3.113}$$

то для достатньо малих $\varepsilon > 0$ для $\forall t \geq s \geq 0$ мають місце оцінки

$$\begin{gathered} \|y(t)\|^2 \leq \|y(s)\|^2 e^{-\delta(t-s)} + C_1 \int_s^t e^{-\delta)(t-p)} a_\varepsilon^2(p)dp \leq \\ \leq \|y(s)\|^2 e^{-\delta(t-s)} + C_1 \|a_\varepsilon\|_U^2, \end{gathered} \tag{3.114}$$

$$\begin{gathered} \int_s^t \|y(p)\|^2 dp \leq \tfrac{1}{\delta}\left(\|y(s)\|^2 + C_1 \int_s^t a_\varepsilon^2(p)dp\right) \leq \\ \leq \tfrac{1}{\delta}\left(\|y(s)\|^2 + C_1 \|a_\varepsilon\|_U^2\right). \end{gathered} \tag{3.115}$$

З цих оцінок, зокрема, отримаємо, що $J(y, u[y]) < \infty$.

Теорема 3.4. *Нехай виконані умови* (3.101) – (3.106), (3.113),

$$b_\varepsilon \to 0, \ \|a_\varepsilon\|_U \to 0, \ \varepsilon \to 0, \tag{3.116}$$

$$\forall t \geq 0 \ A_\varepsilon(t) \xrightarrow{G} A, \ \varepsilon \to 0, \tag{3.117}$$

$$\forall \Delta > 0 \ \forall \ T > 0 \ \exists \ \tau_0 \ \forall \ \varepsilon > 0 \ \forall \ \tau \in (0, \tau_0)$$

$$\sup_{t \in [0,T]} \|A_\varepsilon(t+\tau) - A_\varepsilon(t)\|_{L(V,V^*)} < \Delta. \tag{3.118}$$

Нехай $\{\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon\}$ *– оптимальний процес у задачі* (3.95) *–* (3.97)*,* $\tilde{J}_\varepsilon = J(\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon)$*,* $\hat{y}^\varepsilon$ *– розв'язок задачі* (3.112)*,* $\hat{J}_\varepsilon = J(\hat{y}^\varepsilon, u[\hat{y}^\varepsilon])$*. Тоді*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\tilde{J}_\varepsilon - \hat{J}_\varepsilon) = 0. \tag{3.119}$$

Доведення. Умови (3.117), (3.118) гарантують G-збіжність параболічних операторів $P_\varepsilon := \frac{d}{dt} + A_\varepsilon(t)$ до оператора $P := \frac{d}{dt} + A$ на $(0,T)$ [37], тобто $\forall l \in L^2(0,T;V^*)$ $\forall y_0 \in H$ $P_{A_\varepsilon}^{-1}(l, y_0^k) \to P_A^{-1}(l, y_0)$ слабко в $W(0,T)$. Звідси і з [187] випливає, що якщо $l_\varepsilon \to l$ слабко в $L^2(0,T;H)$, $y_0^\varepsilon \to y_0$ в H, то $P_{A_\varepsilon}^{-1}(l_\varepsilon, y_0^\varepsilon) \to P_A^{-1}(l, y_0)$ слабко в $W(0,T)$ і сильно в $C([0,T];H)$.

Перейдемо до доведення граничної рівності (3.119). Спочатку покажемо, що $\hat{J}_\varepsilon \to J_0$, $\varepsilon \to 0$, де $J_0 = J(\tilde{y}, \tilde{u})$, $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ – єдиний оптимальний процес у задачі (3.98) – (3.100).

Нехай $\hat{y}^\varepsilon$ – розв'язок задачі (3.112), $\hat{y}^\varepsilon = P_{A_\varepsilon}^{-1}(f_\varepsilon + gu[\hat{y}^\varepsilon], y_0)$, $f_\varepsilon(t) \in F_\varepsilon(t, \hat{y}^\varepsilon(t))$ майже скрізь. З оцінок (3.114) і умови (3.106) випливає, що $\|f_\varepsilon(t)\| \leq a_\varepsilon(t) + m \cdot b_\varepsilon$ майже скрізь. Тоді $f_\varepsilon \to 0$ в $L^2(0,T;H)$, $\hat{y}^\varepsilon \to \hat{y}$ в $C([0,T];H)$, $u[\hat{y}^\varepsilon(t)] \to u[\hat{y}(t)]$ $\forall t \in [0,T]$, тобто $\hat{y}$ – розв'язок задачі (3.98) при $v(t) = u[y](t)$. Така задача має єдиний розв'язок. Тому $J_0 = J(\hat{y}, u[\hat{y}])$, тобто $\{\hat{y}, u[\hat{y}]\}$ – оптимальний процес у задачі (3.98) – (3.100).

З оцінок (3.114) маємо, що $\forall t \geq 0$

$$\|\hat{y}^\varepsilon(t)\|^2 + \gamma u^2[\hat{y}^\varepsilon(t)] \leq \left(1 + \gamma \|R\|^2\right) \left(\|y_0\|^2 e^{-\delta t} + C_1 \|a_\varepsilon\|_U^2\right).$$

Оскільки $\forall t \geq 0 \ \ \|\hat{y}^{\varepsilon}(t)\| \to \|\hat{y}(t)\|, \ \ u^2[\hat{y}^{\varepsilon}(t)] \to u^2[\hat{y}(t)]$ при $\varepsilon \to 0$, то за теоремою Лебега

$$\begin{gathered}\forall T > 0 \ J_T(\hat{y}^{\varepsilon}, u[\hat{y}^{\varepsilon}]) := \int_0^T \left(\|\hat{y}^{\varepsilon}(t)\|^2 + \gamma u^2[\hat{y}^{\varepsilon}(t)]\right) dt \to \\ \to J_T(\hat{y}, u[\hat{y}]), \quad \varepsilon \to 0.\end{gathered} \tag{3.120}$$

З (3.114), (3.115) одержимо, що $\forall T > 0$

$$\begin{gathered}\int_0^{+\infty} \left(\|\hat{y}(t)\|^2 + \gamma u^2[\hat{y}(t)]\right) dt \leq \tfrac{1+\gamma\|R\|^2}{\delta} \|\hat{y}(T)\|^2 \leq \\ \leq \tfrac{1+\gamma\|R\|^2}{\delta} \|y_0\|^2 \cdot e^{-\delta T},\end{gathered} \tag{3.121}$$

$$\begin{gathered}\int_0^{+\infty} \left(\|\hat{y}^{\varepsilon}(t)\|^2 + \gamma u^2[\hat{y}^{\varepsilon}(t)]\right) dt \leq \\ \leq \tfrac{1+\gamma\|R\|^2}{\delta} \left(\|\hat{y}^{\varepsilon}(T)\|^2 + C_1 \int_T^{+\infty} a_{\varepsilon}^2(p)dp\right) \leq \\ \leq \tfrac{1+\gamma\|R\|^2}{\delta} \left(\|y_0\|^2 e^{-\delta T} + C_1 \int_0^{+\infty} a_{\varepsilon}^2(p)dp\right).\end{gathered} \tag{3.122}$$

Таким чином,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{J}_{\varepsilon} = J(\hat{y}, u[\hat{y}]) = J_0. \tag{3.123}$$

Тепер покажемо, що $\tilde{J}_{\varepsilon} \to J_0, \ \ \varepsilon \to 0$. Нехай $\tilde{J}_{\varepsilon} = J(\tilde{y}^{\varepsilon}, \tilde{u}^{\varepsilon})$, де $\{\tilde{y}^{\varepsilon}, \tilde{u}^{\varepsilon}\}$ – оптимальний процес в (3.95) – (3.97).

Тепер нехай z^{ε} – розв'язок задачі (3.95) з керуванням $u = 0 \in U$. Тоді з оптимальності $\tilde{u}^{\varepsilon}$ маємо:

$$\|\tilde{u}^{\varepsilon}\|_U^2 \leq \frac{1}{\gamma} \int_0^{+\infty} \|z^{\varepsilon}(t)\|^2 dt \leq \frac{\left(\|y_0\|^2 + C_1 \|a_{\varepsilon}\|_U^2\right)}{\gamma\delta}. \tag{3.124}$$

Тоді, повторюючи попередні міркування, маємо, що існує $\tilde{u} \in U$ таке, що по підпослідовності $\forall T > 0 \ \ \tilde{u}^{\varepsilon} \xrightarrow{w} \tilde{u}$ в $L^2(0,T)$, $\tilde{y}^{\varepsilon} \to \tilde{y}$ в $C([0,T];H)$, де $\tilde{y}$ – розв'язок задачі (3.98) з $u = \tilde{u}$. Зокрема, $\forall T > 0$

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0} \tilde{J}_\varepsilon \geq \varliminf_{\varepsilon\to 0} J_T(\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon) \geq J_T(\tilde{y}, \tilde{u}),$$

тобто

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0} \tilde{J}_\varepsilon \geq J(\tilde{y}, \tilde{u}). \tag{3.125}$$

За принципом оптимальності Беллмана $\forall T > 0$ процес $\{\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon\}$ на $[T, \infty)$ є оптимальним для задачі (3.95) – (3.97) з початковими даними $(T, \tilde{y}^\varepsilon(T))$, отже,

$$\int_T^{+\infty} \|\tilde{\mathrm{y}}^\varepsilon(t)\|^2 \, dt + \gamma \int_T^{+\infty} |\tilde{u}^\varepsilon(t)|^2 dt \leq \int_T^{+\infty} \|p^\varepsilon(t)\|^2 \, dt, \tag{3.126}$$

де p^ε – розв'язок задачі (3.95) на $[T, +\infty)$ з керуванням $u = 0$ та початковими даними $(T, \tilde{y}^\varepsilon(T))$. З (3.108), (3.109) маємо:

$$\int_T^{+\infty} \|p^\varepsilon(t)\|^2 \, dt \leq \frac{1}{\delta} \left(\|\tilde{\mathrm{y}}^\varepsilon(T)\|^2 + C_1 \int_T^{+\infty} a_\varepsilon^2(t) dt \right). \tag{3.127}$$

Тепер зафіксуємо $u \in U$ і відповідний розвязок w^ε задачі (3.95). Тоді аналогічно попереднім міркуванням $\forall T > 0$ $w^\varepsilon \to w$ в $C([0, T]; H)$ при $\varepsilon \to 0$, де w – розв'язок задачі (3.98) з керуванням u. Крім того,

$$\int_T^{+\infty} \|w^\varepsilon(t)\|^2 \, dt \leq \frac{1}{\delta} \left(\|\mathrm{w}^\varepsilon(T)\|^2 + C_1 \int_T^{+\infty} \left(u^2(t) + a_\varepsilon^2(t) \right) dt \right). \tag{3.128}$$

Тоді з нерівності

$$\tilde{J}_\varepsilon \leq J(w^\varepsilon, u)$$

та оцінок (3.126) – (3.128) для $\forall T > 0$ маємо:

$$J_T(\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon) \leq \int_0^T \|w^\varepsilon(t)\|^2 dt + \gamma \int_0^{+\infty} u^2(t)dt + \tfrac{1}{\delta} \|w^\varepsilon(T)\|^2 +$$
$$+\tfrac{C_1}{\delta} \int_T^{+\infty} u^2(t)dt + \tfrac{C_1}{\delta} \int_T^{+\infty} a_\varepsilon^2(t)dt. \tag{3.129}$$

Звідси

$$J_T(\tilde{y}, \tilde{u}) \leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} J_T(\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{y}^\varepsilon) \leq$$
$$\leq \tfrac{1}{\delta} \|w(T)\|^2 + \int_0^T \|w(t)\|^2 dt + \gamma \int_0^{+\infty} u^2(t)dt+ \tag{3.130}$$
$$+\tfrac{C_1}{\delta} \int_T^{+\infty} u^2(t)dt.$$

Тоді при $T \to \infty$ маємо, що $J(\tilde{y}, \tilde{u}) \leq J(w, u) \ \forall u \in U$.

Отже, $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ – оптимальний процес в задачі (3.98) – (3.100). Тепер в попередніх міркуваннях покладемо $u = \tilde{u}$. Тоді в силу єдиності $\tilde{w}^\varepsilon \to \tilde{y}$ в $C([0,T];H)$ і маємо оцінку

$$\gamma \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_0^{+\infty} |\tilde{u}^\varepsilon(t)|^2 dt \leq \int_0^{+\infty} \tilde{u}^2(t)dt+$$
$$+\tfrac{1}{\delta}|\tilde{y}(T)|^2 + \tfrac{C_1}{\delta} \int_T^{+\infty} \tilde{u}^2(t)dt, \tag{3.131}$$

з якої при $T \to \infty$ отримаємо

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int_0^{+\infty} |\tilde{u}^\varepsilon(t)|^2 dt \leq \int_0^{+\infty} \tilde{u}^2(t)dt.$$

Таким чином, $\tilde{u}^\varepsilon \to \tilde{u}$ в $L^2(0, +\infty)$ і оскільки

$$\tilde{J}_\varepsilon \leq J_T(\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon) + \frac{1}{\delta} \|\tilde{\mathrm{y}}^\varepsilon(T)\|^2 + \frac{C_1}{\delta} \int_T^{+\infty} a_\varepsilon^2(t)dt,$$

то

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \tilde{J}_\varepsilon \leq J_T(\tilde{y}, \tilde{u}) + \frac{1}{\delta} \|\tilde{\mathrm{y}}(\mathrm{T})\|^2.$$

Отже, при $T \to \infty$ одержуємо

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \tilde{J}_\varepsilon \leq J(\tilde{y}, \tilde{u}) = J_0,$$

що разом із (3.125) гарантує збіжність $\tilde{J}_\varepsilon \to J_0$, $\varepsilon \to 0$. Припускаючи від супротивного, що збіжність йде не по всій послідовності $\varepsilon \to 0$, можемо повторити попередні міркування і, в силу єдиності оптимального процесу $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$, прийдемо до протиріччя. Теорема доведена.

$\square$

Висновки до розділу 3

В цьому розділі розв'язані задачі конструювання та обґрунтування наближеного оптимального керування в формі оберненого зв'язку тепловими і хвильовими процесами в мікронеоднорідних середовищах.

Основним об'єктом вивчення виступає задача оптимального керування, яка складається з лінійного еволюційного рівняння параболічного або гіперболічного типу, диференціальний оператор якої містить коефіцієнти, що залежать від швидко коливних функцій виду $a(\frac{x}{\varepsilon})$, де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, та з неквадратичного цільового функціоналу типу Немицького, що є в певному сенсі збуреним по відношенню до випадку $\varepsilon = 0$.

Основним припущенням є припущення про те, що відповідна усереднена (при $\varepsilon = 0$) задача допускає оптимальне керування у формі оберненого зв'язку.

У підрозділі 3.1 на основі формули точного оптимального синтезу для задачі оптимального керування розв'язками параболічного рівняння на скінченному часовому проміжку обґрунтовано наближене керування в формі оберненого зв'язку.

У підрозділі 3.2 на основі формули точного оптимального регулятора для задачі оптимального керування розв'язками параболічного рівняння на нескінченному часовому проміжку обґрунтовано наближене керування в формі оберненого зв'язку.

У підрозділі 3.3 на основі формули точного оптимального синтезу для задачі оптимального керування розв'язками гіперболічного рівняння на скінченному часовому проміжку обґрунтовано наближене керування в формі оберненого зв'язку.

У підрозділі 3.4 розв'язано задачу про обґрунтування наближеного регулятора для розв'язків параболічного включення, в якому коефіцієнти головної частини диференціального оператора та многозначна функція взаємодії зазнають неавтономних збурень.

Основні результати розділу опубліковано в роботах [56], [57], [60], [206], [210], [214], [215].

Розділ 4

Наближене оптимальне керування для слабко нелінійних розподілених систем

У цьому розділі розглядаються задачі оптимального керування дифузійними і хвильовими процесами з нелінійними та многозначними збуреннями. Такі процеси описуються за допомогою початково-крайових задач для слабко-нелінійних параболічних рівнянь та систем типу реакції-дифузії, слабко-нелінійних гіперболічних рівнянь та еволюційних включень субдиференціального типу. У всіх задачах цього розділу розглядається зосереджене керування $u(t)$, квадратичний цільовий функціонал та збурення виду $\varepsilon F(y)$, де y - фазова змінна, $\varepsilon > 0$ – малий параметр. Задачі оптимального керування у формі оберенного зв'язку для відповідних лінійно-квадратичних задач (при $\varepsilon = 0$) у класі обмежених зосереджених керувань були розв'язані в [209].

У даному розділі на основі формул точного (параметричного за наявності обмежень) синтезу для лінійно-квадратичних задач будується і обгрунтовується наближене керування в формі оберненого зв'язку для відповідної слабо-нелінійної задачі. У першому і другому підрозділах розглянуто задачу керування для рівняння реакції-дифузії на скінченному та нескінченному часовому проміжку, в третьому розглянуто задачу наближеного синтезу для слабо-нелінійного хвильового рівняння, в четвертому досліджується задача наближеного оптимального керування для класів еволюційних включень субдиференціального типу.

4.1 Обмежений наближений синтез у задачі оптимального керування для рівняння реакції-дифузії

Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область, $\varepsilon \in (0,\,1)$ – малий параметр. В області $Q_T = (0,\,T) \times \Omega$ керований процес описується задачею

$$\begin{cases} y_t^\varepsilon(x,t) = \Delta y^\varepsilon(x,t) - \varepsilon f(y^\varepsilon(x,t)) + g(x)v(t),\ (t,x) \in Q_T, \\ y^\varepsilon(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega, \\ y^\varepsilon(x,0) = y_0^\varepsilon(x); \end{cases} \tag{4.1}$$

$$v(\cdot) \in U = \{v \in L^2(0,T) : |v(t)| \le \xi \text{ майже скрізь на } [0;T]\}; \tag{4.2}$$

$$J^\varepsilon(v) = \left(\int\limits_\Omega q(x)y^\varepsilon(x,T)dx\right)^2 + \gamma\int\limits_0^T v^2(t)dt \to \inf; \tag{4.3}$$

де $g,\ y_0^\varepsilon,\ q \in L_2(\Omega)$, $\gamma > 0$, ε – малий параметр.

Нехай $f \in C(\mathbb{R})$ і знайдуться такі сталі $C_1, C_2 > 0$, $\alpha > 0$ та $p \ge 2$, що для всіх $y \in \mathbb{R}$ справедливі оцінки

$$|f(y)| \le C_1\left(1 + |y|^{p-1}\right), \qquad yf(y) \ge \alpha|y|^p - C_2. \tag{4.4}$$

Як приклад можна розглянути $f(y) = y^3 - ky$, $k \in \mathbb{R}$ (тут $p = 4$).

З [203] маємо, що за умов (4.4) для довільних $\varepsilon > 0$, $y_0^\varepsilon \in L^2(\Omega)$, $v(\cdot) \in U$ існує принаймні один (можливо, не єдиний) розв'язок початково-крайової задачі (4.1) в класі

$$W^T = L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0,T;L^p(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega)),$$

тобто існує функція $y^\varepsilon \in W^T$ така, що $y^\varepsilon(x,0) = y_0^\varepsilon(x)$ і для всіх $\xi \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $\eta \in C_0^\infty(0,T)$ має місце рівність

$$\begin{aligned} -\int_0^T (y^\varepsilon,\xi)\eta_t(t)dt + \int_0^T \Big[(y^\varepsilon,\xi)_{H_0^1} + \varepsilon(f(y^\varepsilon),\xi)\Big]\eta(t)dt = \\ = \int_0^T (g,\xi)v(t)\eta(t)dt, \end{aligned} \tag{4.5}$$

де тут і далі будемо позначати через $\|\cdot\|$ і $(\cdot,\cdot)$ відповідно норму і скалярний добуток в $L^2(\Omega)$, через $\|\cdot\|_{H_0^1}$ і $(\cdot,\cdot)_{H_0^1}$ відповідно норму і скалярний добуток в $H_0^1(\Omega)$. При цьому функція

$$t \mapsto \|y^\varepsilon(t)\|$$

є абсолютно неперервною на $[0,T]$ і для м.в. $t>0$ справедлива рівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y^\varepsilon(t)\|^2 + \|y^\varepsilon(t)\|_{H_0^1}^2 = -\varepsilon(f(y^\varepsilon)(t),y^\varepsilon(t)) + v(t)(g,y^\varepsilon(t)), \tag{4.6}$$

з якої в силу (4.4) для довільних $t \ge s \ge 0$ випливають наступні апріорні оцінки

$$\frac{d}{dt}\|y^\varepsilon(t)|^2 + \|y^\varepsilon(t)\|_{H_0^1}^2 + \delta\|y^\varepsilon(t)\|^2 + 2\varepsilon\alpha\|y^\varepsilon(t)\|_{L^p}^p \le C_3|v(t)|^2 + C_4, \tag{4.7}$$

$$|y^\varepsilon(t)|^2 \le |y^\varepsilon(s)|^2 e^{-\delta(t-s)} + C_5, \tag{4.8}$$

де тут і надалі всі константи залежать лише від Ω, g, C_1, C_2, α, p, ξ і не залежать від ε.

Лема 4.1. *Для довільного $\varepsilon \in (0,1)$, задача оптимального керування (4.1) – (4.3) має розв'язок.*

Доведення. Нехай $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ мінімізуюча послідовність, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ відповідні розв'язки початково-крайової задачі (4.1). Тоді $d = \inf\limits_{v \in U} J(v) = \lim\limits_{n\to\infty} J(v_n)$, а тому послідовність $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ обмежена в $L^2(0,T)$. Отже, з точністю до підпослідовності, $v_n \to \widetilde{v},\ n \to \infty$ слабко в $L^2(0,T)$ і в силу опуклості $\widetilde{v} \in U$.

Тоді, використовуючи оцінки (4.7), (4.8) і лему про компактність, маємо наступні збіжності [202] при $n \to \infty$ по деякій підпослідовності

$$\begin{aligned}
&y_n \to \widetilde{y} \quad \text{слабко в } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0,T;L^p(\Omega));\\
&y_n \to \widetilde{y} \quad \text{сильно в } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega));\\
&y_n(x,t) \to \widetilde{y}(x,t) \quad \text{м.с. в } Q_T;
\end{aligned}$$

де $\widetilde{y}(x,t)$ розв'язок початково-крайової задачі (4.1) з керуванням $\widetilde{v}$.

Звідси, використовуючи слабку напівнеперервність знизу квадрату норми, отримуємо

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} J(v_n) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \left((q, y_n(T))^2 + \gamma \int\limits_0^T v_n^2(t)dt \right) \geq$$

$$\geq (q, \widetilde{y}(T))^2 + \gamma \, \underline{\lim}_{n\to\infty} \int\limits_0^T v_n^2(t)dt \geq (q, \widetilde{y}(T))^2 + \gamma \int\limits_0^T \widetilde{v}^2(t)dt = J(\widetilde{v}),$$

але

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} J(v_n) = \lim_{n\to\infty} J(v_n) = \inf_{v\in U} J(v) = d,$$

тому $\widetilde{v}$ оптимальне керування. Лема доведена. □

Таким чином, для кожного $\varepsilon \in (0,1)$ задача оптимального керування (4.1) – (4.3) має розв'язок $\widehat{v}^{\varepsilon}(t)$ і відповідну оптимальну траєкторію $\widehat{y}^{\varepsilon}(x,t)$.

Збурення в початкових умовах будемо вважати такими, що

$$y_0^{\varepsilon} \to y_0 \text{ слабко в } L^2(\Omega),\ \varepsilon \to 0. \tag{4.9}$$

Відомо [206], що при $\varepsilon = 0$ задача оптимального керування (4.1) – (4.3) має єдиний розв'язок, який при певних додаткових припущеннях на параметри задачі допускає форму оберненого зв'язку. А саме, введемо позначення

$$b(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{\lambda_i(t-T)} q_i g_i \in C([0,T]),$$
$$\Re(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i e^{\lambda_i(t-T)} X_i(x) \in C([0,T]; L^2(\Omega)),$$

де $g_i = (g, X_i)$, $q_i = (q, X_i)$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ та $\{X_i(x)\}_{i=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ – розв'язки спектральної задачі

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \lambda\psi, \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

Будемо розглядати наступні припущення:

$$\text{Функція } b(t) \text{ додатна і строго монотонно зростає на } [0;T]. \tag{4.11}$$

$$\begin{cases} \dfrac{|(\Re(0), y_0)| \cdot b(0)}{\gamma + \int\limits_0^T b^2(s)ds} < \xi, \\ \dfrac{|(\Re(0), y_0)| \cdot b(T)}{\gamma + \int\limits_0^T b^2(s)ds} > \xi. \end{cases} \tag{4.12}$$

За виконання цих припущень оптимальний синтез в задачі (4.1) – (4.3) у випадку $\varepsilon = 0$ має вигляд

$$u[t,y] = \begin{cases} -\dfrac{(\Re(t), y(t)) + \xi \int\limits_\tau^T b(s)ds}{\gamma + \int\limits_t^\tau b^2(s)ds}\, b(t), & t \in [0,\tau], \\ \xi, & t \in [\tau, T], \end{cases} \tag{4.13}$$

де точка переключення τ визначається з рівняння

$$\frac{(\Re(0), y_0) + \xi \int\limits_{\tau}^{T} b(s)ds}{\gamma + \int\limits_{0}^{\tau} b^2(s)ds}\, b(\tau) = -\xi. \tag{4.14}$$

Як показано в [71], це рівняння має єдиний розв'язок за виконання (4.11),(4.12).

Основним результатом підрозділу є доведення того факту, що формула (4.13) задає наближений синтез вихідної задачі оптимального керування (4.1) – (4.3).

Отже, вважаючи виконаними припущення (4.11),(4.12), розглянемо задачу

$$\begin{cases} y_t^\varepsilon(x,t) = \Delta y^\varepsilon(x,t) - \varepsilon f(y^\varepsilon(x,t)) + g(x)u^\varepsilon[t, y^\varepsilon], \ (t,x) \in Q_T, \\ y^\varepsilon(x,t) = 0, \ x \in \partial\Omega, \\ y^\varepsilon(x,0) = y_0^\varepsilon(x), \end{cases} \tag{4.15}$$

де $u^\varepsilon[t, \cdot]$ задається формулою (4.13) з точкою переключення $\tau = \tau^\varepsilon$, яка є розв'язком рівняння

$$\frac{(\Re(0), y_0^\varepsilon) + \xi \int\limits_{\tau^\varepsilon}^{T} b(s)ds}{\gamma + \int\limits_{0}^{\tau^\varepsilon} b^2(s)ds}\, b(\tau^\varepsilon) = -\xi. \tag{4.16}$$

За умови (4.9) рівняння (4.16) має єдиний розв'язок для достатньо малих $\varepsilon > 0$. Отже, рівняння (4.15) може розглядатись, як рівняння реакції-дифузії типу Каратеодорі, тобто з вимірною по часовій змінній правою частиною. Такі рівняння розглядалися в [218], де було показано існування розв'язку $y^\varepsilon = y^\varepsilon(x,t)$ в класі W^T.

Має місце теорема.

Теорема 4.1. *Для достатньо малих* $\varepsilon \in (0,1)$ *задача (4.15) має розв'язок* $y^\varepsilon \in W^T$ *і справедлива гранична рівність*

$$J(u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]) - J(\widehat{v}^\varepsilon) \to 0, \ \varepsilon \to 0,$$

де $\{\widehat{v}^\varepsilon, \widehat{y}^\varepsilon\}$ *- деякий оптимальний процес задачі (4.1) – (4.3).*

Доведення. Спочатку розглянемо задачу про збіжність оптимальних процесів. Отже, нехай $\{\widehat{v}^\varepsilon, \widehat{y}^\varepsilon\}$ деякий оптимальний процес задачі оптимального керування (4.1) – (4.3). Тоді маємо оцінку для $\widehat{y}^\varepsilon$:

$$\begin{gathered}\|\widehat{y}^\varepsilon(t)\|^2 + \int\limits_0^t \|\widehat{y}^\varepsilon(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds + 2\varepsilon\alpha \int\limits_0^t \|\widehat{y}^\varepsilon(s)\|^p_{L_p(\Omega)} ds \le \\ \le \|\widehat{y}^\varepsilon(0)\|^2 + C_6 \int\limits_0^t (\|g\|^2 |\widehat{v}^\varepsilon(s)| + 1) ds.\end{gathered} \tag{4.17}$$

Таким чином, отримуємо, що для послідовності $\{\widehat{y}^\varepsilon\}$:

$$\begin{aligned}&\{\widehat{y}^\varepsilon\} \quad \text{обмежена} \quad \text{в} \quad L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \\ &\left\{\varepsilon^{\frac{1}{p}}\ \widehat{y}^\varepsilon\right\} \quad \text{обмежена} \quad \text{в} \quad L^p(0,T; L^p(\Omega));\end{aligned} \tag{4.18}$$

але тоді для $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

$$\left\{\varepsilon^{\frac{1}{q}}\ f(\widehat{y}^\varepsilon)\right\} \quad \text{обмежена} \quad \text{в} \quad L^q(0,T; L^q(\Omega));$$

і отже

$$\{\widehat{y}^\varepsilon_t\} \text{ обмежена в } L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)) + L^q(0,T; L^q(\Omega)) \subset L^q(0,T; H^{-s}(\Omega)),$$

де $s \ge \max\left\{1, \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right) n\right\}$. Тоді за лемою про компактність отримуємо, що по підпослідовності при $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}&\widehat{y}^\varepsilon \to \widehat{y} \quad \text{слабко в} \quad L^2(0,T; H_0^1(\Omega)); \\ &\widehat{y}^\varepsilon \to \widehat{y} \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T; L^2(\Omega)); \\ &\widehat{y}^\varepsilon(t) \to \widehat{y}(t) \quad \text{слабко в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при кожному} \quad t \in [0,T].\end{aligned} \tag{4.19}$$

Звідси $\widehat{y}^{\varepsilon}(x,t) \to \widehat{y}(x,t)$ майже скрізь в Q_T, а тому і $f(\widehat{y}^{\varepsilon}(x,t)) \to f(\widehat{y}(x,t))$ майже скрізь в Q_T.

Нам потрібно перейти до границі при $\varepsilon \to 0$ у співвідношенні

$$-\int\limits_0^T (\widehat{y}^{\varepsilon}, w)\eta_t dt + \int\limits_0^T (\widehat{y}^{\varepsilon}, w)_{H_0^1}\eta dt + \varepsilon \int\limits_0^T (f(\widehat{y}^{\varepsilon}), w)\eta dt - \int\limits_0^T (g\widehat{v}^{\varepsilon}, w)\eta dt = 0 \tag{4.20}$$

при фіксованих $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ і $\eta \in C_0^{\infty}(0,T)$.

Оскільки $\{\widehat{v}^{\varepsilon}\} \subset U$, то $\widehat{v}^{\varepsilon} \to \widehat{v}$ слабко в $L^2(0,T)$, крім того

$$\varepsilon \int\limits_0^T (f(\widehat{y}^{\varepsilon}), w)\eta dt \leq \varepsilon^{\frac{1}{p}} \|\varepsilon^{\frac{1}{q}} f(\widehat{y}^{\varepsilon})\|_{L^q(Q_T)} \cdot \|w\eta\|_{L^p(Q_T)} \to 0,\ \varepsilon \to 0.$$

Отже, після переходу до границі в (4.20) маємо, що $\widehat{y}(x,t)$ – розв'язок задачі

$$\begin{cases} y_t(x,t) = \Delta y(x,t) + g(x)v(t),\ (t,x) \in Q_T, \\ y(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega, \\ y(x,0) = y_0(x). \end{cases} \tag{4.21}$$

При цьому для $J(\widehat{v}^{\varepsilon})$ маємо

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0} J(\widehat{v}^{\varepsilon}) = \varliminf_{\varepsilon\to 0} \left((q, \widehat{y}^{\varepsilon}(T))^2 + \gamma \int\limits_0^T (\widehat{v}^{\varepsilon}(t))^2 \, dt \right) \geq$$

$$\geq \varliminf_{\varepsilon\to 0} (q, \widehat{y}^{\varepsilon}(T))^2 + \gamma \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^T (\widehat{v}^{\varepsilon}(t))^2 \, dt = (q, \widehat{y}(T))^2 + \varliminf_{\varepsilon\to 0} \gamma \int\limits_0^T (\widehat{v}^{\varepsilon}(t))^2 \, dt \geq$$

$$\geq (q, \widehat{y}(T))^2 + \gamma \int\limits_0^T \widehat{v}^2(t) dt = J(\widehat{v}).$$

З іншого боку, оскільки $\{\widehat{v}^{\varepsilon}, \widehat{y}^{\varepsilon}\}$ – оптимальний процес в (4.1) – (4.3), то для довільного керування $v \in U$ і будь-якого розв'язку y^{ε} крайової задачі

(4.1) з цим керуванням маємо

$$J(\widehat{v}^{\varepsilon}) \le (q, y^{\varepsilon}(T))^2 + \gamma \int_0^T v^2(t)dt.$$

Повторюючи попередні міркування, маємо, що $y^{\varepsilon} \to y$ в сенсі збіжностей (4.19), де y розв'язок (4.21) з керуванням v. Отже,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} J(\widehat{v}^{\varepsilon}) \le (q, y(T))^2 + \gamma \int_0^T v^2(t)dt = J(v).$$

Таким чином, ми отримали

$$J(\widehat{v}) \le \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} J(\widehat{v}^{\varepsilon}) \le \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} J(\widehat{v}^{\varepsilon}) \le J(v).$$

Звідси $J(\widehat{v}) \le J(v)$ для всіх керувань $v \in U$, отже $\{\widehat{v}, \widehat{y}\}$ – оптимальний процес в (4.1) – (4.3) при $\varepsilon = 0$.

Крім того, при $v = \widehat{v}$ з попередніх міркувань маємо

$$J(\widehat{v}) \le \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} J(\widehat{v}^{\varepsilon}) \le \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} J(\widehat{v}^{\varepsilon}) \le J(\widehat{v}),$$

отже існує границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J(\widehat{v}^{\varepsilon}) = J(\widehat{v})$ і в силу єдиності оптимального керування задачі (4.1) – (4.3) при $\varepsilon = 0$ маємо, що збіжність іде по всій послідовності $\varepsilon \to 0$ (а не по підпослідовності). При цьому $\widehat{y}^{\varepsilon} \to \widehat{y}$ в $C([\delta, T]; L_2(\Omega))$ для довільного $\delta > 0$ та

$$\widehat{v}^{\varepsilon} \to \widehat{v} \text{ в } L^2(0, T).$$

Тепер розглянемо початково-крайову задачу (4.15). Як вже зазначалось, в силу вигляду $u^{\varepsilon}[t, \cdot]$ маємо, що для достатньо малих $\varepsilon > 0$ існує розв'язок $y^{\varepsilon} = y^{\varepsilon}(x, t)$ крайової задачі (4.15). Крім того, справедлива оцінка

$$\begin{gathered} \|y^{\varepsilon}(t)\|^2 + 2\int_0^t \|y^{\varepsilon}(s)\|^2_{H_0^1} ds + 2\varepsilon\alpha \int_0^t \|y^{\varepsilon}(s)\|^p_{L_p} ds \le \\ \le \|y^{\varepsilon}(0)\|^2 + C_7 + C_8 \int_0^t \|y^{\varepsilon}(s)\| ds. \end{gathered} \tag{4.22}$$

З (4.22) за лемою Гронуолла-Беллмана

$$\|y^\varepsilon(t)\|^2 \leq (\|y^\varepsilon(0)\|^2 + C_9)e^{C_{10}T}. \tag{4.23}$$

Зокрема,

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \sup_{t\in[0,T]} |u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]| < \infty.$$

Звідси маємо, що для $\{y^\varepsilon\}$ справедливі обмеження (4.18) Отже,

$$y^\varepsilon \to \overline{y} \text{ в сенсі збіжностей (4.19).}$$

Звідси випливає, що для кожного $t \in [0, T]$ $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon] \to u[t, \overline{y}]$ при $\varepsilon \to 0$, де $u[t, \overline{y}]$ має форму (4.13) з точкою переключення $\tau = \lim_{\varepsilon\to 0} \tau^\varepsilon$, яка є розв'язком рівняння (4.14), причому збіжність точок переключення випливає з єдиності розв'язку рівнянь (4.14), (4.16), а $\overline{y}$ – це розв'язок (4.15) з керуванням $u[t, \overline{y}]$. Але задача

$$\begin{cases} z_t(x,t) = \Delta z(x,t) + g(x)u[t,z], \ (t,x) \in Q_T, \\ z(x,t) = 0, \ x \in \partial\Omega, \\ z(x,0) = y_0(x), \end{cases}$$

має єдиний розв'язок, отже $\overline{y} = \widehat{y}$ і $u[t, \overline{y}] = \widehat{v}$ – оптимальний процес у (4.1) – (4.3) при $\varepsilon = 0$. Теорема доведена. $\square$

Зауваження 4.1. *Справедливі наступні збіжності при* $\varepsilon \to 0$

$$\widehat{y}^\varepsilon - y^\varepsilon \to 0 \quad \textit{в} \quad C([\delta, T]; L^2(\Omega)) \quad \forall\ \delta > 0;$$
$$\widehat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon[\cdot, y^\varepsilon] \to 0 \quad \textit{в} \quad L^2(0, T).$$

4.2 Наближена стабілізація у задачі оптимального керування для рівняння реакції-дифузії

Основним об'єктом вивчення в цьому підрозділі є наступна задача оптимальної стабілізації: знайти керування

$$u(\cdot) \in U = L_2(0, +\infty), \tag{4.24}$$

що доставляє найменше значення функціоналу

$$J(u) = \int_0^{+\infty} \left(\int_\Omega (y^\varepsilon(x,t))^2 dx + \gamma u^2(t) \right) dt, \ \gamma > 0, \tag{4.25}$$

визначеному на розв'язках задачі

$$\begin{cases} y_t^\varepsilon(x,t) = \Delta y^\varepsilon(x,t) - \varepsilon f(y^\varepsilon(x,t)) + g(x)u(t), \quad x \in \Omega, \ t > 0, \\ y^\varepsilon(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ y^\varepsilon(x,0) = \varphi^\varepsilon(x), \end{cases} \tag{4.26}$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з кусково-гладкою межею, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $g \in L_2(\Omega)$ і нелінійне збурення $f \in C(\mathbb{R})$ задовольняє умову: знайдуться такі сталі $C > 0$, $\alpha > 0$, $p \geq 2$, що для кожного $y \in \mathbb{R}$ справедливі оцінки

$$|f(y)| \leq C(1 + |y|^{p-1}), \quad yf(y) \geq \alpha |y|^p. \tag{4.27}$$

Зауваження 4.2. *Умови (4.27) є частковим випадком умов (4.4) з попереднього підрозділу, отже, справедливі всі висновки щодо поведінки розв'язків задачі (4.26) на скінченному часовому проміжку.*

За умов (4.27) для довільних $\varepsilon > 0$, $\varphi^\varepsilon \in L^2(\Omega)$, $u(\cdot) \in U$ існує принаймні один (можливо, не єдиний) розв'язок крайової задачі (4.26) в класі

$$W = L^2_{loc}(0,+\infty; H^1_0(\Omega)) \cap L^p_{loc}(0,+\infty; L^p(\Omega)) \cap C([0,+\infty); L^2(\Omega)),$$

тобто існує функція $y^\varepsilon \in W$ така, що $y^\varepsilon(x,0) = \varphi^\varepsilon(x)$ і для всіх $T > 0$, $\xi \in H^1_0(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $\eta \in C^\infty_0(0,T)$ має місце рівність (4.5). При цьому для м.в. $t > 0$ справедлива рівність (4.6), з якої в силу (4.27) для довільних $t \geq s \geq 0$ випливають наступні апріорні оцінки

$$\frac{d}{dt}\|y^\varepsilon\|^2 + \|y^\varepsilon\|^2_{H^1_0} + \delta\|y^\varepsilon\|^2 + 2\varepsilon\alpha\|y\|^p_{L^p} \leq C_1|u(t)|^2, \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} \|y^\varepsilon(t)\|^2 \leq \|y^\varepsilon(s)\|^2 e^{-\delta(t-s)} + C_1\int_s^t e^{-\delta(t-\tau)}|u(\tau)|^2 d\tau \leq \\ \leq \|y^\varepsilon(s)\|^2 e^{-\delta(t-s)} + C_1\|u\|^2_U, \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} \int_s^t \|y^\varepsilon(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{1}{\delta}\left(\|y^\varepsilon(s)\|^2 + C_1\int_s^t |u(\tau)|^2 d\tau\right) \leq \\ \leq \frac{1}{\delta}\Big(\|y^\varepsilon(s)\|^2 + C_1\|u\|^2_U\Big), \end{aligned} \tag{4.30}$$

де $\|u\|^2_U = \int\limits_0^{+\infty} |u(t)|^2 dt$ і константи $\delta > 0$, $C_1 > 0$ залежать лише від Ω, g, C, α, p.

Оцінки (4.29), (4.30) гарантують, що для всіх $\varepsilon > 0$, $u \in U$, $\varphi^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ функціонал (4.25) на розв'язках задачі (4.26) визначений коректно.

Лема 4.2. *Для для довільних $\varepsilon > 0$, $\varphi^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ задача оптимального керування (4.24) – (4.26) має принаймні один розв'язок $\{\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon\}$.*

Доведення. Для скорочення викладок під час доведення опустимо параметр ε. Нехай $J := \inf\limits_{u \in U} J(u)$, $\{u_n\} \subset U$ – мінімізуюча послідовність, $\{y_n\} \subset W$ – відповідні розв'язки (4.26) і для кожного $n \geq 1$

$$J(u_n) \leq J + \frac{1}{n}. \tag{4.31}$$

Тоді для всіх $n \geq 1$ також маємо $\|u_n\|_U^2 \leq J + 1$.

Звідси існує $\tilde{u} \in U$ такий, що для кожного $T > 0$ по підпослідовності $u_n \overset{w}{\to} \tilde{u}$ в $L^2(0,T)$. Тоді з оцінок (4.28) – (4.30) аналогічно доведенню леми 4.1 маємо, що існує $\tilde{y} \in W$ – розв'язок (4.26) з керуванням $\tilde{u}$ таке, що по підпослідовності

$$y_n \to \tilde{y} \text{ в } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Позначимо

$$J_T(u) := \int_0^T \|y(t)\|^2 dt + \gamma \int_0^T u^2(t)dt.$$

Тоді з нерівності

$$J(u_n) \geq J_T(u_n) = \int_0^T \|y_n(t)\|^2 dt + \gamma \int_0^T u_n^2(t)dt$$

випливає ланцюжок нерівностей

$$\begin{gathered} J \geq \varliminf_{n\to\infty} J_T(u_n) \geq \varliminf_{n\to\infty} \int_0^T \|y_n(t)\|^2 dt + \\ +\gamma \varliminf_{n\to\infty} \int_0^T u_n^2(t)dt \geq \int_0^T \|\tilde{y}(t)\|^2 dt + \gamma \int_0^T \tilde{u}^2(t)dt = J_T(\tilde{u}). \end{gathered} \tag{4.32}$$

Звідси в силу довільності $T > 0$ одержуємо

$$J \geq J(\tilde{u}),$$

що і означає, що $\{\widetilde{y}, \widetilde{u}\}$ – оптимальний процес.

$\square$

Нехай $\{\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon\}$ – оптимальний процес в (4.24) – (4.26), $\widetilde{J}_\varepsilon$ – відповідне значення функціоналу.

Припустимо, що збурення початкових даних такі, що

$$\varphi^\varepsilon \to \varphi \in L^2(\Omega) \ \text{ слабко } \ \text{в } L^2(\Omega).$$

Розглянемо задачу (4.24) – (4.26) з $\varepsilon = 0$ і початковою умовою φ. У цьому випадку (4.24) – (4.26) – лінійно-квадратична задача без обмежень, яка згідно з [28] має єдиний оптимальний регулятор $u[y]$, що стабілізує розв'язки задачі (4.26) і має вигляд

$$u[y] = (\mathcal{R}, y), \tag{4.33}$$

де

$$\mathcal{R}(x) = -\frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_i X_i(x)}{\lambda_i(1+\gamma_i)} \in L^2(\Omega),$$

$\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ – додатні розв'язки нелінійної системи

$$\gamma_i = \frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{g_j^2}{\lambda_j(\lambda_i+\lambda_j)(1+\gamma_i)}.$$

Тут $\{X_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ – власні функції та власні числа спектральної задачі (4.10), $g_i = \int\limits_\Omega g(x)X_i(x)dx,\ i \geq 1$.

Розглянемо задачу

$$\begin{cases} y_t(x,t) = \Delta y(x,t) - \varepsilon f(y(x,t)) + g(x)u[y], \quad x \in \Omega,\ t > 0, \\ y(x,t)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \\ y(x,0) = \varphi^\varepsilon(x). \end{cases} \tag{4.34}$$

Нехай $\widehat{y^\varepsilon} = \widehat{y^\varepsilon}(x,t)$ – розв'язок задачі (4.34), $\widehat{u^\varepsilon} := u[\widehat{y^\varepsilon}]$, $\widehat{J_\varepsilon} := J(u[\widehat{y^\varepsilon}])$.

Лема 4.3. *За умови*

$$\|g\|^2 < 2\gamma\lambda_1^2 \tag{4.35}$$

задача (4.34) для кожного $\varepsilon > 0$ та $\varphi^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ має принаймні один розв'язок $y^\varepsilon \in W$, причому для будь-якого розв'язку (4.34) з W справедливо

$$J(u[y^\varepsilon]) < \infty.$$

Доведення. Доведення глобальної розв'язності задачі (4.34) повторює відповідні міркування для задачі (4.26). При цьому для кожного розв'язку $y^\varepsilon \in W$ задачі (4.34) справедлива оцінка

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y^\varepsilon\|^2 + \|y^\varepsilon\|^2_{H_0^1} + \alpha\varepsilon\|y^\varepsilon\|^p_{L^p} \le \|g\|\|\mathcal{R}\|\|y^\varepsilon\|^2. \tag{4.36}$$

Оскільки для кожного $i \ge 1$ числа $\gamma_i > 0$, то $\|\mathcal{R}\| \le \dfrac{\|g\|}{2\gamma\lambda_1}$. Отже, з умови (4.35) та нерівності Пуанкаре маємо, що існує $\kappa > 0$:

$$\frac{d}{dt}\|y^\varepsilon\|^2 + \kappa\|y^\varepsilon\|^2 \le 0.$$

Таким чином, для всіх $t \ge s \ge 0$ справедливі наступні нерівності

$$\|y^\varepsilon(t)\|^2 \le e^{-\kappa(t-s)}\|y^\varepsilon(s)\|^2, \quad |u[y^\varepsilon](t)| \le e^{-\frac{\kappa}{2}(t-s)}\|\mathcal{R}\| \cdot \|y^\varepsilon(s)\|, \tag{4.37}$$

зокрема,

$$J(u[y^\varepsilon]) < \infty.$$

Лема доведена. $\square$

Наведені вище леми дозволяють сформулювати основний результат підрозділу.

Теорема 4.2. *Нехай виконані умови (4.27), (4.35),* $\varphi^\varepsilon \xrightarrow{w} \varphi$ *в* $L^2(\Omega)$. *Нехай* $\{\widetilde{y}^\varepsilon, \widetilde{u}^\varepsilon\}$ *– оптимальний процес в задачі (4.24) – (4.26),* $\widetilde{J}_\varepsilon = J(\widetilde{u}^\varepsilon)$, $\widehat{y}^\varepsilon$ *– розв'язок задачі (4.34),* $\widehat{J}_\varepsilon = J(u[\widehat{y}^\varepsilon])$. *Тоді*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\widetilde{J}_\varepsilon - \widehat{J}_\varepsilon| = 0. \tag{4.38}$$

Доведення. Гранична рівність (4.38) буде доведена, якщо показати, що виконуються граничні рівності

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\widetilde{J}_\varepsilon - J_0| = 0, \tag{4.39}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\widehat{J}_\varepsilon - J_0| = 0, \tag{4.40}$$

де $J_0 = J(\widetilde{u})$, $\{\widetilde{y}, \widetilde{u}\}$ – (єдиний) оптимальний процес в задачі (4.24) – (4.26) з $\varepsilon = 0$ та початковою функцією $\varphi(x)$.

Спочатку доведемо рівність (4.39). Нехай z^ε – розв'язок задачі (4.26) з керуванням $u = 0 \in U$. Тоді з (4.29), (4.30) та оптимальності $\widetilde{u}^\varepsilon$ маємо оцінку

$$\|\widetilde{u}^\varepsilon\|_U^2 \le \frac{1}{\gamma} J(\widetilde{u}^\varepsilon) \le \frac{1}{\gamma} \int\limits_0^{+\infty} \|z^\varepsilon(t)\|^2 dt \le \frac{\|\varphi^\varepsilon\|^2}{\gamma\delta}. \tag{4.41}$$

Таким чином, існує $\widetilde{u} \in U$ таке, що по підпослідовності

$$\widetilde{u}^\varepsilon \xrightarrow{w} \widetilde{u} \quad \text{в} \quad L^2(0, +\infty).$$

Крім того, оцінки (4.28) – (4.30), (4.41) дозволяють для послідовності $\{\widetilde{y}^{\varepsilon}\}$ повторити міркування Теореми 4.1 і стверджувати, що існує $\widetilde{y}$ – розв'язок задачі (4.26) при $\varepsilon = 0$ з керуванням $\widetilde{u}$ та початковою функцією φ такий, що по підпослідовності для довільних $0 < \tau < T$

$$\widetilde{y}^{\varepsilon} \to \widetilde{y} \quad \text{в} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap C([\tau,T];L^2(\Omega)).$$

Тоді для всіх $T > 0$

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0} \widetilde{J}_{\varepsilon} \geq \varliminf_{\varepsilon \to 0} J_T(\widetilde{u}^{\varepsilon}) \geq J_T(\widetilde{u}),$$

отже,

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0} \widetilde{J}_{\varepsilon} \geq J(\widetilde{u}). \tag{4.42}$$

За принципом оптимальності Беллмана для кожного $T > 0$ процес $\{\widetilde{y}^{\varepsilon}, \widetilde{u}^{\varepsilon}\}$ на $[T, +\infty)$ є оптимальним для задачі (4.24) – (4.26) з початковими даними $(T, \widetilde{y}^{\varepsilon}(T))$. Тоді для довільного $T > 0$ справедлива нерівність

$$\int\limits_T^{+\infty} \|\widetilde{y}^{\varepsilon}(t)\|^2 dt + \gamma \int\limits_T^{+\infty} |\widetilde{u}^{\varepsilon}(t)|^2 dt \leq \int\limits_T^{+\infty} \|p^{\varepsilon}(t)\|^2 dt, \tag{4.43}$$

де p^{ε} – розв'язок задачі (4.26) на $[T, +\infty)$ з керуванням $u = 0$ та початковими даними $(T, \widetilde{y}^{\varepsilon}(T))$.

З оцінок (4.29), (4.30) одержимо

$$\int\limits_T^{+\infty} \|p^{\varepsilon}(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{\delta} \|\widetilde{y}^{\varepsilon}(T)\|^2. \tag{4.44}$$

Тепер зафіксуємо довільне $u \in U$ і відповідний йому розв'язок ω^{ε} задачі (4.26).

Проводячи аналогічні до попередніх міркування, маємо, що по підпослідовності для кожного $T > 0$

$$\omega^\varepsilon \to \omega \quad \text{в} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap C([\tau,T];L^2(\Omega)),$$

де ω – єдиний розв'язок задачі (4.26) при $\varepsilon = 0$ з керуванням u та початковою функцією φ. Крім того,

$$\int\limits_T^{+\infty} \|\omega^\varepsilon(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{\delta}\left(\|\omega^\varepsilon(T)\|^2 + C_1 \int\limits_T^{+\infty} |u(t)|^2 dt\right). \tag{4.45}$$

Тоді з нерівності $\widetilde{J}_\varepsilon \leq J(u)$ та оцінок (4.43) – (4.45) для довільного $T > 0$ отримуємо:

$$\begin{gathered} J_T(\widetilde{u}^\varepsilon) \leq \int\limits_0^T \|\omega^\varepsilon(t)\|^2 dt + \gamma \int\limits_0^{+\infty} |u(t)|^2 dt + \\ + \frac{1}{\delta}\|\omega^\varepsilon(T)\|^2 + \frac{C_1}{\delta} \int\limits_T^{+\infty} |u(t)|^2 dt. \end{gathered} \tag{4.46}$$

Звідси

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} J_T(\widetilde{u}^\varepsilon) \geq \int\limits_0^T \|\widetilde{y}(t)\|^2 dt + \gamma \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^T |\widetilde{u}^\varepsilon(t)|^2 dt \geq J_T(\widetilde{u}), \tag{4.47}$$

$$\begin{gathered} \varlimsup_{\varepsilon\to 0} J_T(\widetilde{u}^\varepsilon) \leq \frac{1}{\delta}\|\omega^\varepsilon(T)\|^2 + \\ + \int\limits_0^T \|\omega(t)\|^2 dt + \gamma \int\limits_0^{+\infty} |u(t)|^2 dt + \frac{C_1}{\delta} \int\limits_T^{+\infty} |u(t)|^2 dt. \end{gathered} \tag{4.48}$$

Таким чином, з нерівностей (4.47), (4.48) при $T \to \infty$ випливає, що

$$J(\widetilde{u}) \leq J(u),$$

отже, $\{\widetilde{y}, \widetilde{u}\}$ – оптимальний процес в задачі (4.24) – (4.26) з $\varepsilon = 0$ та початковою функцією φ, причому внаслідок єдиності керування $\widetilde{u}$ має вигляд (4.33).

Тепер у попередніх міркуваннях покладемо $u = \widetilde{u}$. Тоді для відповідних розв'язків $\widetilde{\omega}^\varepsilon$ задачі (4.26) в силу єдиності розв'язку в задачі (4.26) з $\varepsilon = 0$ маємо, що $\widetilde{\omega}^\varepsilon \to \widetilde{y}$ і з (4.43) – (4.46) отримуємо оцінку:

$$\begin{gathered}\int_0^T \|\widetilde{y}^\varepsilon(t)\|^2 dt + \gamma \int_0^{+\infty} (\widetilde{u}^\varepsilon(t))^2 dt \le \\ \le \gamma \int_0^{+\infty} |\widetilde{u}(t)|^2 dt + \int_0^T \|\widetilde{\omega}^\varepsilon(t)\|^2 dt + \int_T^{+\infty} \|\widetilde{\omega}^\varepsilon(t)\|^2 dt \le \\ \le \frac{1}{\delta}\|\widetilde{\omega}^\varepsilon(T)\|^2 + \gamma \int_0^{+\infty} |\widetilde{u}(t)|^2 dt + \int_0^T \|\widetilde{\omega}^\varepsilon(t)\|^2 dt + \frac{C_1}{\delta} \int_T^{+\infty} |\widetilde{u}(t)|^2 dt.\end{gathered} \tag{4.49}$$

Тоді

$$\gamma \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \int_0^{+\infty} |\widetilde{u}^\varepsilon(t)|^2 dt \le \int_0^{+\infty} |\widetilde{u}(t)|^2 dt + \frac{1}{\delta}\|\widetilde{y}(T)\|^2 + \frac{C_1}{\delta} \int_T^{+\infty} |\widetilde{u}(t)|^2 dt$$

і при $T \to \infty$ одержуємо

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \int_0^{+\infty} |\widetilde{u}^\varepsilon(t)|^2 dt \le \int_0^{+\infty} |\widetilde{u}(t)|^2 dt, \tag{4.50}$$

що разом зі слабкою збіжністю гарантує сильну збіжність $\widetilde{u}^\varepsilon$ до $\widetilde{u}$ в $L^2(0, +\infty)$.

Далі з нерівностей (4.43), (4.44) отримуємо наступну нерівність

$$\widetilde{J}_\varepsilon \le J_T(\widetilde{u}^\varepsilon) + \frac{1}{\delta}\|\widetilde{y}^\varepsilon(T)\|^2.$$

Тоді

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \widetilde{J}_\varepsilon \le J_T(\widetilde{u}) + \frac{1}{\delta}\|\widetilde{y}(T)\|^2$$

і при $T\to\infty$ одержуємо

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \widetilde{J}_\varepsilon \le J(\widetilde{u}), \tag{4.51}$$

що разом з (4.42) означає, що по деякій підпослідовності

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{J}_\varepsilon = J(\widetilde{u}).$$

Припускаючи від супротивного, що ця збіжність йде не по всій послідовності $\varepsilon\to 0$, можемо повторити попередні міркування і в силу єдиності оптимального процесу $\{\widetilde{y},\widetilde{u}\}$ прийти до протиріччя.

Таким чином, з (4.41), (4.42), (4.51) маємо:

$$\widetilde{u}^\varepsilon \to \widetilde{u} \text{ в } L^2(0,+\infty),$$

$$\widetilde{y}^\varepsilon \to \widetilde{y} \text{ в } L^2(0,+\infty;L^2(\Omega)), \tag{4.52}$$

$$\widetilde{J}_\varepsilon \to J_0,\ \varepsilon\to 0.$$

Доведемо граничну рівність (4.40). Оцінки (4.35) – (4.37) дозволяють стверджувати, що для кожного $T>0$ послідовність $\{\widehat{y}^\varepsilon\}$ обмежена в сенсі (4.18), а отже, скориставшись лемою про компактність, можемо перейти до границі (з точністю до підпослідовності) при $\varepsilon\to 0$ в рівності (4.5) з

$$u(t) = u[\widehat{y}^\varepsilon](t) = (\mathcal{R}, \widehat{y}^\varepsilon(t))$$

і одержати, що $\widehat{y}$ – розв'язок задачі (4.34) при $\varepsilon=0$ та початковою функцією φ. Але ця задача має єдиний розв'язок $\widetilde{y}$, отже, $\widetilde{y}\equiv\widehat{y}$ на $[0,+\infty)$,

$u[\widehat{y}^\varepsilon](t) \to \widetilde{u}(t)$ для всіх $t \geq 0$ і збіжність йде по всій послідовності $\varepsilon \to 0$.

Крім того, оскільки для довільних $t \geq s \geq 0$ мають місце нерівності $\|\widehat{y}^\varepsilon(t)\| \leq \|\widehat{y}^\varepsilon(s)\|$, $\|\widetilde{y}(t)\| \leq \|\widetilde{y}(s)\|$, то з неперервності $\widehat{y}^\varepsilon(\cdot)$ і $\widetilde{y}(\cdot)$ та (4.52) випливає, що

$$\widehat{y}^\varepsilon(t) \to \widetilde{y}(t) \text{ в } L^2(\Omega) \text{ для всіх } t > 0.$$

Оскільки для будь-якого $t \geq 0$

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(t)\|^2 + \gamma |u[\widehat{y}^\varepsilon](t)|^2 \leq \big(1 + \gamma \|\mathcal{R}\|^2\big) \|\varphi^\varepsilon\|^2 e^{-\kappa t},$$

то за теоремою Лебега

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{J}_\varepsilon = J(\widetilde{u}) = J_0,$$

і при цьому

$$\widehat{y}^\varepsilon \to \widetilde{y} \text{ в } L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)),$$

$$u[\widehat{y}^\varepsilon] \to \widetilde{u} \text{ в } L^2(0, +\infty).$$

Теорема доведена. □

4.3 Обмежений наближений синтез у задачі оптимального керування для слабко-нелінійного хвильового рівняння

В цьому підрозділі розглядається задача оптимального керування

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = \Delta y - \varepsilon f(y) + g(x)v(t), \;\; x \in \Omega, \;\; t \in (0,T), \\ y(x,t) = 0, \;\; x \in \partial\Omega, \\ y(x,0) = y_0^{\varepsilon}(x), \;\; y_t(x,0) = y_1^{\varepsilon}(x), \end{cases} \tag{4.53}$$

$$v(\cdot) \in U = \{v \in L^2(0,\ T) : \;\; |v(t)| \le \xi \text{ м. с. на } [0,\ T]\}, \tag{4.54}$$

$$\begin{gathered} J(y,v) = \alpha \left(\int_{\Omega} q_0(x) y(x,T) dx - \psi_0 \right)^2 + \\ + \beta \left(\int_{\Omega} q_1(x) y_t(x,T) dx - \psi_1 \right)^2 + \gamma \int_0^T v^2(t) dt \to \inf, \end{gathered} \tag{4.55}$$

де $\Omega \subset R^n$ – обмежена область, $n \ge 3$, $g(x) \in L^2(\Omega)$, $q_0,\ q_1 \in L^2(\Omega)$, $\gamma > 0$, $\alpha,\ \beta \ge 0$, $\alpha + \beta \ne 0$, $\psi_0,\ \psi_1 \in R$, нелінійне збурення $f \in C(R)$ задовольняє умови:

існують сталі $C_i > 0$, $i = \overline{1,3}$, такі, що для всіх $s \in R$

$$|f(s)| \le C_1 \left(1 + |s|^{\frac{n}{n-2}}\right), \quad F(s) := \int_0^s f(t)dt \ge -C_2 s^2 - C_3. \tag{4.56}$$

З умов (4.56) зокрема випливає існування сталої $C_4 > 0$ такої, що для довільного $s \in R$ справедлива оцінка

$$|F(s)| \le C_4 \left(1 + |s|^{\frac{2n-2}{n-2}}\right). \tag{4.57}$$

Під розв'язком початково-крайової задачі (4.53) будемо розуміти функцію $y \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ таку, що $y_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ і для всіх $\xi \in H_0^1(\Omega)$ і $\eta \in C_0^\infty(0,\ T)$ вірна рівність

$$
\begin{gathered}
-\int_0^T (y_t,\xi)\eta_t dt+ \\
+\int_0^T \left((y,\xi)_{H_0^1}+\varepsilon(f(y),\xi)-v(t)(g,\xi)\right)\eta dt=0.
\end{gathered}
\tag{4.58}
$$

Відомо [262], що за умов (4.56) для будь-якого розв'язку задачі (4.53) справедливо $y\in C([0,T];H_0^1(\Omega))$, $y_t\in C([0,T];L^2(\Omega))$. Крім того, для довільного значення параметру $\varepsilon>0$, для кожного керування $v(\cdot)\in L^2(0,\,T)$ і довільних початкових даних $y_0^\varepsilon\in H_0^1(\Omega)$, $y_1^\varepsilon\in L^2(\Omega)$ задача (4.53) має принаймні один розв'язок, та для всіх $\varepsilon>0$ і $t\in[0,T]$ має місце оцінка

$$
\begin{gathered}
\|y_t(t)\|^2+\|y(t)\|_{H_0^1}^2\le \\
\le C_5\left(\|y_1^\varepsilon\|^2+\|y_0^\varepsilon\|_{H_0^1}^{\frac{2n-2}{n-2}}+1+\int_0^t|v(s)|\cdot\|y_t^\varepsilon(s)\|\,ds\right),
\end{gathered}
\tag{4.59}
$$

де константа $C_5>0$ залежить лише від констант задачі (4.53) і не залежить від ε.

Крім того, справедлива наступна лема про збіжність.

Лема 4.4. *[262] Нехай $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ – послідовність розв'язків задач*

$$
\begin{cases}
y_{tt}(x,t)=\Delta y(x,t)-f_n(y)+g(x)v_n(t),\ x\in\Omega,\ t\in(0,T),\\
y(x,t)=0,\ x\in\partial\Omega,\\
y(x,0)=y_0^n(x),\ y_t(x,0)=y_1^n(x),
\end{cases}
\tag{4.60}
$$

де послідовність $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ задовольняє умови (4.56) рівномірно по n і для кожного $r>0$ має місце збіжність

$$
\max_{|y|\le r}|f_n(y)-f(y)|\to 0 \text{ при } n\to\infty.
$$

Тоді якщо

$$\begin{cases} v_n \to v \text{ } \textit{слабко} \text{ } \textit{в} \text{ } L^2(0,T), \\ y_0^n \to y_0 \text{ } \textit{слабко} \text{ } \textit{в} \text{ } H_0^1(\Omega), \\ y_1^n \to y_1 \text{ } \textit{слабко} \text{ } \textit{в} \text{ } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{4.61}$$

то існує $y(\cdot)$ – *розв'язок задачі*

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = \Delta y(x,t) - f(y) + g(x)v(t), \ x \in \Omega, \ t \in (0,T), \\ y(x,t) = 0, \ x \in \partial\Omega, \\ y(x,0) = y_0(x), \ y_t(x,0) = y_1(x), \end{cases} \tag{4.62}$$

такий, що для довільної послідовності $t_n \to t_0$ *принаймні по послідовності*

$$\begin{cases} y_n(t_n) \to y(t_0) \text{ } \textit{слабко} \text{ } \textit{в} \text{ } H_0^1(\Omega), \\ y_{n_t}(t_n) \to y_t(t_0) \text{ } \textit{слабко} \text{ } \textit{в} \text{ } L^2(\Omega). \end{cases} \tag{4.63}$$

Якщо ж у (4.61) *збіжності сильні, то і в* (4.63) *збіжності сильні.*

Лема 4.5. *При виконанні умов* (4.56) *для довільних* $\varepsilon > 0$, $y_0^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, $y_1^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ *задача оптимального керування* (4.53) – (4.55) *має розв'язок* $\{\tilde{y}_\varepsilon, \ \tilde{u}_\varepsilon\}$.

Доведення. При фіксованому $\varepsilon > 0$ доведемо розв'язність задачі оптимального керування (4.53) – (4.55). Надалі індекс ε будемо опускати, враховуючи той факт, що розв'язність задачі (4.53) – (4.55) не залежить від малості ε.

Нехай $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset U$ – мінімізуюча послідовність, $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ – відповідні розв'язки задачі (4.60) з $f_n = f$, $y_0^n = y_0$, $y_1^n = y_1$, $n = \overline{1,\infty}$. Оскільки $d := \inf\limits_{v \in U} J(y,v) = \lim\limits_{n\to\infty} J(y_n, v_n)$, то з вигляду критерію (4.55) маємо, що послідовність $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена в $L^2([0,\,T])$, отже, по підпослідовності $v_n \to v,\;\; n \to \infty$, слабко в $L^2([0,\,T])$, причому $v \in U$ в силу опуклості.

Тоді з Леми 4.4 про збіжність випливає, що існує розв'язок $y(\cdot)$ задачі (4.53) з керуванням $v(\cdot)$ такий, що виконується (4.63) з $t_n = T$. Тоді

$$d = \varliminf_{n\to\infty} J(y_n, v_n) \geq$$
$$\geq \varliminf_{n\to\infty} \Big(\alpha\left((q_0, y_n(T)) - \psi_0\right)^2 + \beta\left((q_1, y_{n_t}(T)) - \psi_1\right)^2\Big) +$$
$$+\gamma \varliminf_{n\to\infty} \int_0^T \; v_n^2(t)dt =$$
$$= \alpha\left((q_0, y(T)) - \psi_0\right)^2 + \beta\left((q_1, y_t(T)) - \psi_1\right)^2 +$$
$$+\gamma \varliminf_{n\to\infty} \int_0^T \; v_n^2(t)dt \geq J(y, v),$$

тобто $\{y, v\}$ – оптимальний процес задачі (4.53) – (4.55).

$\square$

Збурення в початкових умовах будемо вважати такими, що

$$\begin{gathered} y_0^{\varepsilon} \to y_0 \text{ слабко } \text{ в } H_0^1(\Omega), \\ y_1^{\varepsilon} \to y_1 \text{ слабко } \text{ в } L^2(\Omega). \end{gathered} \tag{4.64}$$

У роботі [137] при $\varepsilon = 0$ знайдено і обґрунтовано за певних припущень на параметри задачі формулу точного синтезу задачі (4.53) – (4.55). Точніше, нехай $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{X_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ – власні числа і функції оператора $-\Delta$ в $H_0^1(\Omega)$. Використовуючи коефіцієнти Фур'є функцій q, y_0, y_1, розглянемо функції

$$R_1(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i X_i(x) \cos \lambda_i (T - t),$$

$$R_2(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{q_i}{\lambda_i}X_i(x)\sin\lambda_i(T-t),$$

$$b(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{q_i}{\lambda_i}g_i\sin\lambda_i(T-t),$$

$$\Phi=\sum_{i=1}^{\infty}q_iy_0^i\cos\lambda_iT+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{q_i}{\lambda_i}y_1^i\sin\lambda_iT.$$

Будемо розглядати наступні припущення:

$$\beta=0, \tag{4.65}$$

$$\text{функція } b(t) \text{ додатна і монотонно спадає,} \tag{4.66}$$

$$-\frac{\alpha(\Phi-\psi_0)}{\gamma+\alpha\int\limits_0^T b^2(s)ds}>\xi, \tag{4.67}$$

$$\xi\int\limits_0^T b(s)ds<\psi_0-\Phi. \tag{4.68}$$

За виконання цих припущень оптимальний синтез в задачі (4.53) – (4.55) при $\varepsilon=0$ має вигляд

$$u[t,y]=\begin{cases}\xi, \;\; t\in[0,\tau],\\ -\frac{\alpha((R_1(t),y(t))+(R_2(t),y_t(t))-\psi_0)}{\gamma+\alpha\int_t^T b^2(s)ds}, \;\; t\in[\tau,T],\end{cases} \tag{4.69}$$

де точка переключення τ визначається з рівняння

$$-\frac{\alpha(\Phi - \psi_0 + \xi \int\limits_0^{\tau} b(s)ds)}{\gamma + \alpha \int\limits_{\tau}^{T} b^2(s)ds} = \xi. \tag{4.70}$$

Як показано в [209], за виконання умов (4.66)-(4.68) це рівняння має єдиний розв'язок.

Основна мета – показати, що при достатньо малих $\varepsilon > 0$ формула (4.69) дає наближений синтез цієї задачі.

Отже, вважаючи виконаними припущення (4.65) – (4.68), розглянемо задачу

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = \Delta y - \varepsilon f(y) + g(x)u^{\varepsilon}[t,y], \ \ x \in \Omega, \ \ t \in (0,T), \\ y(x,t) = 0, \ \ x \in \partial\Omega, \\ y(x,0) = y_0^{\varepsilon}(x), \ \ y_t(x,0) = y_1^{\varepsilon}(x), \end{cases} \tag{4.71}$$

де $u^{\varepsilon}[t,\cdot]$ задається формулою (4.69) з точкою переключення $\tau = \tau^{\varepsilon}$, яка є розв'язком рівняння

$$-\frac{\alpha(\Phi^{\varepsilon} - \psi_0 + \xi \int\limits_0^{\tau^{\varepsilon}} b(s)ds)}{\gamma + \alpha \int\limits_{\tau^{\varepsilon}}^{T} b^2(s)ds} = \xi, \tag{4.72}$$

де

$$\Phi^{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{\infty} q_i (y_0^{\varepsilon})^i \cos \lambda_i T + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i}{\lambda_i} (y_1^{\varepsilon})^i \sin \lambda_i T.$$

За умови (4.64) рівняння (4.72) має єдиний розв'язок для достатньо малих $\varepsilon > 0$.

Оскільки $u^\varepsilon[t,\cdot]$ має вигляд

$$u[t,y] = (R_1^\varepsilon(t), y(t)) + (R_2^\varepsilon(t), y_t(t)) + R_3^\varepsilon(t), \tag{4.73}$$

де $R_1^\varepsilon, R_2^\varepsilon \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $R_3^\varepsilon \in L^\infty(0,\,T)$ такі, що

$$\sup_{\varepsilon>0}\sup_{t\in[0,T]} \left(\|R_1^\varepsilon(t)\| + \|R_2^\varepsilon(t)\| + |R_3^\varepsilon(t)|\right) < \infty, \tag{4.74}$$

то розв'язність задачі (4.71) з використанням оцінок (4.74), (4.59) та нерівності Гронуолла - Беллмана встановлюється аналогічно задачі (4.53), причому для будь-якого розв'язку задачі (4.71) для достатньо малих $\varepsilon > 0$ і для довільного $t \in [0,T]$ справедлива апріорна оцінка

$$\|y_t(t)\|^2 + \|y(t)\|^2_{H_0^1} \le C_6 \left(\|y_1^\varepsilon\|^2 + \|y_0^\varepsilon\|^{\frac{2n-2}{n-2}}_{H_0^1} + 1 \right), \tag{4.75}$$

де константа $C_6 > 0$ не залежить від $\varepsilon > 0$.

Основним результатом підрозділу є наступна теорема.

Теорема 4.3. *Нехай виконуються умови* (4.56),*(4.65)-(4.68). Тоді справедливі граничні рівності*

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0} \left| \tilde{J}_\varepsilon - J\left(y_\varepsilon, u[t,y_\varepsilon]\right) \right| = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T |\tilde{u}_\varepsilon(t) - u[t,y_\varepsilon]|^2 = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\max_{t\in[0,\,T]} \|\tilde{y}_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)\| = 0,
\end{aligned} \tag{4.76}$$

де $\{\tilde{y}_\varepsilon,\ \tilde{u}_\varepsilon\}$ *– оптимальний процес у* (4.53) *–* (4.55), $\tilde{J}_\varepsilon := J(\tilde{y}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon)$, y_ε *- розв'язок* (4.71).

Доведення. Спочатку покажемо, що

$$J(\tilde{y}_\varepsilon,\ \tilde{u}_\varepsilon) \to J(\tilde{y},\ \tilde{u}),$$

$$\tilde{y}_\varepsilon \to \tilde{y} \quad \text{в } C([0,T]; L^2(\Omega)),$$

$$\tilde{u}_\varepsilon \to \tilde{u} \ \text{ в } L^2(0,T),$$

де $\{\tilde{y},\ \tilde{u}\}$ – оптимальний процес задачі (4.53) – (4.55) при $\varepsilon = 0$ з початковими даними $y_0,\ \ y_1$.

Зафіксуємо $v(\cdot) \in U$ і нехай $y_\varepsilon(\cdot)$ – відповідний розв'язок задачі (4.53). Тоді з оцінки (4.59) і леми Гронуолла - Беллмана випливає, що для всіх $t \in [0,T]$

$$\|y_{\varepsilon_t}(t)\|^2 + \|y_\varepsilon(t)\|^2_{H_0^1} \leq C(v),$$

де константа $C(v)$ не залежить від ε. Тоді з оцінки

$$J(\tilde{y}_\varepsilon,\ \tilde{u}_\varepsilon) \leq J(y_\varepsilon,\ v)$$

маємо, що множина функцій $\{\tilde{u}_\varepsilon\}$ обмежена в $L^2(0,\ T)$, а отже, по деякій підпослідовності $\varepsilon_n \to 0 \ \ \tilde{u}_{\varepsilon_n} \to \tilde{u}$ слабко в $L^2(0,\ T)$.

Оскільки послідовність $f_n(y) = \varepsilon_n f(y)$ задовольняє всі умови леми 4.4 про збіжність з граничною нульовою функцією, то можемо стверджувати, що існує розв'язок $\tilde{y}(\cdot)$ задачі (4.53) при $\varepsilon = 0$ з керуванням $\tilde{u}$ та початковими даними $y_0,\ \ y_1$ такий, що по підпослідовності виконуються граничні рівності (4.63), зокрема, $\tilde{y}_{\varepsilon_n}(T) \to \tilde{y}(T)$ слабко в $L^2(\Omega)$. Тоді, аналогічно до попередніх міркувань,

$$\varliminf_{\varepsilon_n \to 0} J\left(\tilde{y}_{\varepsilon_n},\ \tilde{u}_{\varepsilon_n}\right) \geq J(\tilde{y},\ \tilde{u}).$$

З іншого боку, для довільного допустимого керованого процесу $\{\tilde{y}_{\varepsilon_n}, v\}$ задачі (4.53) – (4.55) при $\varepsilon = 0$ маємо:

$$J\left(\tilde{y}_{\varepsilon_n},\ \tilde{u}_{\varepsilon_n}\right) \leq J\left(\tilde{y}_{\varepsilon_n},\ v\right). \tag{4.77}$$

Застосовуючи знову Лему 4.4, отримуємо, що існує розв'язок $y(\cdot)$ задачі (4.53) при $\varepsilon = 0$ з керуванням v та початковими даними $y_0,\ \ y_1$ такий, що по підпослідовності виконуються граничні рівності (4.63). Тоді з нерівності (4.77) одержимо

$$\overline{\lim_{\varepsilon_n \to 0}} J\left(\tilde{y}_{\varepsilon_n},\ \tilde{u}_{\varepsilon_n}\right) \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{\varepsilon_n \to 0}} \left(\alpha\left((q_0, y_{\varepsilon_n}(T)) - \psi_0\right)^2 + \beta\left((q_1, y_{\varepsilon_{nt}}(T)) - \psi_1\right)^2\right) +$$

$$+\gamma \int_0^T v^2(t)dt = J(y, v).$$

Отже,

$$J(\tilde{y}, \tilde{u}) \leq \underline{\lim_{\varepsilon_n \to 0}} J\left(\tilde{y}_{\varepsilon_n},\ \tilde{u}_{\varepsilon_n}\right) \leq \overline{\lim_{\varepsilon_n \to 0}} J\left(\tilde{y}_{\varepsilon_n},\ \tilde{u}_{\varepsilon_n}\right) \leq J(y,\ v), \tag{4.78}$$

тобто $\{\tilde{y},\ \tilde{u}\}$ – оптимальний процес задачі (4.53) – (4.55) при $\varepsilon = 0$ з початковими даними $y_0,\ \ y_1$. Крім того, при $v = \tilde{u}$ з (4.78) отримуємо, що існує границя

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0} J\left(\tilde{y}_{\varepsilon_n},\ \tilde{u}_{\varepsilon_n}\right) = J(\tilde{y},\ \tilde{u}). \tag{4.79}$$

При цьому, оскільки при $\varepsilon = 0$ задача (4.53) – (4.55) має єдиний розв'язок, то збіжність має місце при $\varepsilon \to 0$ (а не лише по підпослідовності $\varepsilon_n \to 0$).

Крім того, оскільки

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\alpha\left((q_0,\tilde{y}_\varepsilon(T))-\psi_0\right)^2+\beta\left((q_1,\tilde{y}_{\varepsilon_t}(T))-\psi_1\right)^2\Big)=$$

$$=\alpha\left((q_0,\tilde{y}(T))-\psi_0\right)^2+\beta\left((q_1,\tilde{y}_t(T))-\psi_1\right)^2$$

то з (4.79) одержимо, що існує границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\ \tilde{u}_\varepsilon^2(t)dt=\int_0^T\ \tilde{u}(t)dt,$$

тобто $\tilde{u}_{\varepsilon_n}\to\tilde{u}$ сильно в $L^2(0,T)$.

Тепер для y_ε – розв'язку (4.71) покажемо, що

$$J(y_\varepsilon,u[t,y_\varepsilon])\to J(\tilde{y},\tilde{u}),\ \varepsilon\to 0,$$

$$u[t,y_\varepsilon]\to\tilde{u}\ \text{в}\ L^2(0,\,T),$$

$$y_\varepsilon\to\tilde{y}\ \text{в}\ C\left([0,T];L^2(\Omega)\right),$$

де $\{\tilde{y},\ \ \tilde{u}\}$ – оптимальний процес задачі (4.53) – (4.55) при $\varepsilon=0$ з початковими даними $y_0,\ \ y_1$. В силу (4.75) існує функція $y(\cdot)$ така, що по деякій підпослідовності $\varepsilon_n\to 0$ виконуються граничні рівності (4.63).

При цьому в силу слабкої збіжності початкових даних та єдиності розв'язку рівняння (4.70) точка

$$\tau=\lim_{\varepsilon\to 0}\tau^\varepsilon$$

є розв'язком рівняння (4.70).

Звідси випливає, що

$$u\left[t,\ y_{\varepsilon_n}\right]\to u[t,y]\ \ \text{в}\ \ L^2(0,\ T),$$

де $u(\cdot,y]$ має форму (4.69).

Покладемо $v_n(t) = u\,[t,\, y_{\varepsilon_n}]$. Тоді з Леми 4.4 про збіжність для пари $\{y_{\varepsilon_n},\; v_n\}$ маємо, що по підпослідовності виконуються граничні рівності (4.63), де $y(\cdot)$ – розв'язок задачі

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = \Delta y + g(x)u[t,y], \;\; x \in \Omega, \;\; t \in (0,T), \\ \\ y(x,t) = 0, \;\; x \in \partial\Omega, \;\; t \in (0,T), \\ \\ y(x,0) = y_0(x), \;\; y_t(x,0) = y_1(x), \;\; x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \tag{4.80}$$

Але легко бачити [93], що задача (4.80) має єдиний розв'язок. Отже, $y(t) \equiv \tilde{y}(t)$ і теорема доведена. $\square$

4.4 Наближені керування в формі оберненого зв'язку для еволюційних включень субдиференціального типу

4.4.1 Випадок скінченного часового інтервалу

Нехай H – сепарабельний гільбертів простір, $\|\,.\,\|$ і $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – норма і скалярний добуток в H , $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ – власна опукла, напівнеперервна знизу функція, $cl_H(D(\varphi)) = H$, $\partial\varphi$ – її субдиференціал, $F : H \to 2^H$ - многозначне відображення, $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Для заданих $p \in L^1(0, T; H)$, $g \in H$ розглядається задача оптимального керування

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y) + \varepsilon F(y) + p(t) + g \cdot u(t),\ t \in (0, T), \\ \\ y(0) = y_0 \in H, \end{cases} \tag{4.81}$$

$$u(\,\cdot\,) \in U \subset L^2(0, T) \ - \ \text{замкнена, опукла,} \tag{4.82}$$

$$J(y, u) \to \inf. \tag{4.83}$$

Нехай $\{\hat{y}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon\}$ – оптимальний процес в (4.81) – (4.83), $\hat{J}_\varepsilon = J(\hat{y}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon)$ – значення задачі. Нехай при $\varepsilon = 0$ задача (4.81) – (4.83) допускає синтез $u = u[t, y]$, на якому реалізується значення $\hat{J}_0$ цієї задачі.

Основною метою є доведення твердження, що формула $u[t, y]$ дає наближений синтез вихідної задачі (4.81) – (4.83) при малих $\varepsilon > 0$, тобто що для будь-якого розв'язку $\tilde{y}_\varepsilon(\,\cdot\,)$ задачі

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y) + \varepsilon F(y) + p(t) + g \cdot u[t, y],\ t \in (0, T), \\ \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{4.84}$$

справедлива гранична рівність

$$\left| J(\tilde{y}_\varepsilon,\, u[t, \tilde{y}_\varepsilon]) - \hat{J}_\varepsilon \right| \to 0,\ \varepsilon \to 0.$$

Сформулюємо основні умови, накладені на параметри задачі:

1) $\forall R > 0$ множина $M_R = \{u \in H|\ \|u\| \le R,\, \varphi(u) \le R\}$ – компакт в H;

2) $F : H \to C_v(H)$, де $C_v(H)$ – сукупність всіх непорожніх, обмежених, замкнених, опуклих підмножин H;

3) F – напівнеперервна зверху в тому сенсі, що $\forall \varepsilon > 0,\ \forall u_0 \in H,\ \exists \delta > 0$

$$\forall u \in O_\varepsilon(u_0)\ F(u) \subset O_\varepsilon(F(u_0)),$$

де для $A \subset H$,

$$O_\varepsilon(A) = \{u \in H|\ \inf_{z \in A} \|u - z\| < \varepsilon\}$$

– ε-окіл множини A;

4) $\exists C_1,\, C_2 \ge 0,\ \forall u \in H\ \ \|F(u)\|_+ := \sup_{z \in F(u)} \|z\| \le C_1 + C_2 \|u\|$;

5) функціонал J – напівнеперервний знизу на $C\left([0, T]\,; H\right) \times L^2_w(0, T)$;

6) функціонал J – неперервний на $C\left([0, T]\,; H\right) \times L^2(0, T)$;

7) $\exists \gamma > 0,\ \exists C_3 \ge 0,\ \forall y \in C\left([0, T]\,; H\right)\, \forall u \in U$

$$J(y, u) \ge -C + \gamma \int\limits_0^T |u(t)|^2\, dt;$$

8) задача (4.81) – (4.83) при $\varepsilon = 0$ має єдиний розв'язок $\{\hat{y}, \hat{u}\}$, причому $\hat{u}$ має форму оберненого зв'язку, тобто $\hat{u}(t) = u[t, \hat{y}(t)]$, де функція $u : [0, T] \times H \to R$ вимірна по першій змінній і неперервна;

9) $\forall y \in H,\ \forall t \in [0, T],\ \exists \alpha\,(\cdot),\ \beta\,(\cdot) \in L^2(0, T),\ |u[\,t, y]| \le \alpha(t) + \beta(t)\, \|y\|$.

Зауваження 4.3. *Умови 1) – 4) потрібні для розв'язності (4.81) при кожному фіксованому $u \in U$ [262], умови 5) – 7) – для розв'язності (4.81) –*

(4.83), а умови 8), 9) продиктовані виглядом і властивостями синтезованого керування у лінійно-квадратичних задачах при наявності обмежень на керування.

Приклад 4.1. *У випадку*

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \ u \in H_0^1(\Omega), \\ \\ +\infty, \ \textit{інакше}, \end{cases}$$

$\partial\varphi(u) = -\Delta u$ *і маємо включення параболічного типу, для якого* $H = L^2(\Omega)$, *і умова 1) виконується в силу компактності вкладення* $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

Приклад 4.2. *Іншим прикладом може слугувати крайова задача, яка виникає в багатьох задачах механіки та фізики з вільною межею та в процесах, які описують потік однорідного газу через однорідне пористе середовище [158]*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \Delta\beta(u) \ni f, \ \textit{на } (0,+\infty)\times\Omega, \\ \\ \beta(u(t,x)) \ni 0 \ \textit{на } (0,+\infty)\times\Omega, \end{cases} \tag{4.85}$$

де $\beta = \partial j$, $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– неперервна,* $\lim\limits_{|r|\to\infty} \dfrac{j(r)}{|r|} = \infty$.

Тоді (4.85) зводиться до включення вигляду

$$\frac{du}{dt} \in -\partial\varphi(u) + f,$$

де

$$\varphi(u) = \begin{cases} \int_\Omega j(u(x))dx, \ u \in L^1(\Omega), \ j(u) \in L^1(\Omega), \\ \\ +\infty, \ \textit{інакше}, \end{cases}$$

з $\overline{D(\varphi)} = H^{-1}(\Omega)$.

Приклад 4.3. *Прикладом многозначного збурення, що задовольняє умови 2)-4), може слугувати многозначне відображення [113],[202]*

$$F : L^2(\Omega) \mapsto 2^{L^2(\Omega)},$$

$$F(y) := [\chi(y), \theta(y)] = \{z \mid \chi(y(x)) \le z(x) \le \theta(y(x)) \text{ для м.в. } x \in \Omega\},$$

де $\chi : R \mapsto R$ *– напівнеперервна знизу функція,* $\theta : R \mapsto R$ *– напівнеперервна зверху функція,*

$$|\chi(y)| + |\theta(y)| \le C_1 + C_2 |y| .$$

Нам знадобляться наступні відомі результати [202] щодо властивостей розв'язків задачі

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y) + l(t), \ t \in (0,T), \\ \\ y(0) = y_0 \in H, \end{cases} \tag{4.86}$$

та задачі

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y) + F(y(t)), \ t \in (0,T), \\ \\ y(0) = y_0 \in H. \end{cases} \tag{4.87}$$

Під розв'язком (інтегральним) задачі (4.86) будемо розуміти неперервну функцію $y : [0,T] \mapsto H$, для якої $y(0) = y_0$ і $\forall\ u \in D(\partial\phi)$ $\forall\ v \in -\partial\phi(u)$ $\forall\ t \ge s \ge 0$

$$\|y(t) - u\|^2 \le \|y(s) - u\|^2 + 2\int\limits_s^t (l(p) + v, y(p) - u)dp \tag{4.88}$$

Відомо [160], що для довільних $y_0 \in H$, $l \in L^1(0,T;H)$ задача (4.86) має єдиний інтегральний розв'язок, який будемо позначати $y(\cdot) = I(y_0)l(\cdot)$.

При цьому якщо для довільних $g \in L^1(0,T;H)$, $z_0 \in H$ розглянути $z(\cdot) = I(z_0)g(\cdot)$, то для всіх $0 \le s \le t \le T$ справедливі нерівності

$$\|y(t) - z(t)\|^2 \le \|y(s) - z(s)\|^2 + 2\int\limits_s^t (l(p) - g(p), y(p) - z(p))dp, \quad (4.89)$$

$$\|y(t) - z(t)\| \le \|y(s) - z(s)\| + \int\limits_s^t \|l(p) - g(p)\|dp. \quad (4.90)$$

Неперервна функція $y : [0,T] \mapsto H$ називається (інтегральним) розв'язком задачі (4.87), якщо $y(0) = y_0$ і існує $f \in L^1(0,T;H)$ така, що $f(t) \in F(t, y(t))$ для м.в. $t \in (0,T)$ і $\forall\ u \in D(\partial\phi)$ $\forall\ v \in -\partial\phi(u)$ $\forall\ t \ge s \ge 0$ виконується (4.88).

Відомо [202], що за виконання умов 1)-4) задача (4.87) для кожного $y_0 \in H$ має принаймні один розв'язок і кожен розв'язок (4.87) є абсолютно неперервною (а отже, диференційовною м.с.) функцією, що задовольняє включення (4.87) м.с.

Лема 4.6. *[139] Якщо $\{l_n(\cdot)\} \subset L^1(0,T;H)$ – рівномірно інтегрована, тобто $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall \Omega \subset (0,T)$, $\mu(\Omega) < \delta$, $\forall n \ge 1$ $\int\limits_\Omega \|f_n(t)\|\, dt < \varepsilon$, то по деякій підпослідовності*

$$y_n(\cdot) := I(y_0)l_n(\cdot) \to y(\cdot) \ \text{ в } C([0,T];H).$$

Якщо $l_n \to l$ слабо в $L^1(0,T;H)$, то $y(\cdot) = I(y_0)l(\cdot)$.

Якщо $l_n(t) \in F(y_n(t))$ м.с., то $l(t) \in F(y(t))$ м.с.

Лема 4.7. *За умов 1) – 7) $\forall \varepsilon > 0$ задача (4.81) – (4.83) має принаймні один розв'язок.*

Доведення. Оскільки $\forall u(\cdot) \in U$, $g \cdot u \in L^2(0,T;H)$, $p(\cdot) \in L^1(0,T;H)$, то з [139] маємо, що $\forall \varepsilon > 0$ $\forall u(\cdot) \in U$ існує $y(\cdot) \in C([0,T];H)$ – інтегральний розв'язок (4.81). Нехай $\{y_n, u_n\}$ – мінімізуюча послідовність в (4.81) – (4.83) при фіксованому ε. Тоді $\hat{J}_\varepsilon = \lim\limits_{n\to\infty} J(y_n, u_n)$, а з оцінки 7) випливає, що $\{u_n\}$ – обмежена в $L^2(0,T)$. Тому по деякій підпослідовності $u_n \to \tilde{u}$ слабо в $L^2(0,T)$, причому $\tilde{u} \in U$.

Нехай $y_n(\cdot)$ – інтегральний розв'язок (4.81) з керуванням $u_n(\cdot)$. Тоді $\exists f_n \in L^1(0,T;H)$, $f_n(t) \in F(y_n(t))$ майже скрізь, така що $y_n(\cdot)$ – інтегральний розв'язок задачі

$$\begin{cases} \frac{dy_n}{dt} \in -\partial\varphi(y_n(t)) + \varepsilon f_n(t) + p(t) + g \cdot u_n(t), \\ \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{4.91}$$

Покладемо $l_n := \varepsilon f_n + p + g \cdot u_n \in L^1(0,T;H)$, а для розв'язку $y_n(\cdot)$ задачі (4.91) введемо позначення $y_n(\cdot) = I(y_0)l_n(\cdot)$. Тоді з [158] маємо, що $\forall t \in [0,T]$ справедлива оцінка

$$\|y_n(t)\| \le C + \int\limits_0^t \|l_n(s)\|\, ds, \tag{4.92}$$

де константа $C \ge 0$ не залежить від u і ε. Отже, з умови 4) отримаємо:

$$\begin{aligned} &\|y_n(t)\| \le C + \varepsilon \int\limits_0^t \|f_n(s)\|\, ds + \int\limits_0^t \|p(s)\|\, ds + \|g\| \int\limits_0^t |u_n(s)|\, ds \le \\ &\le C + \varepsilon \int\limits_0^t (C_1 + C_2 \|y_n(s)\|)\, ds + \int\limits_0^t \|p(s)\|\, ds + \|g\| \int\limits_0^t |u_n(s)|\, ds, \end{aligned} \tag{4.93}$$

і за лемою Гроноулла одержимо, що $\{y_n(\cdot)\}$ – обмежена в $C([0,T];H)$.

Оскільки з 4) маємо, що $\|f_n(t)\| \le C_1 + C_2\|y_n(t)\|$, то легко бачити, що $\{l_n\}$ – рівномірно інтегрована, причому по підпослідовності $l_n \to \tilde{l} =$

$\varepsilon\tilde{f}+p+g\cdot\tilde{u}$ слабо в $L^1(0,T;H)$. Тоді з леми 4.6 по підпослідовності $y_n(\cdot)\to\tilde{y}(\cdot)$ в $C([0,T];H)$, де $\tilde{y}(\cdot)=I(y_0)\tilde{l}(\cdot)$ і $\tilde{f}(t)\in F(\tilde{y}(t))$ майже скрізь. Отже, $\{\tilde{y}(\cdot),\tilde{u}(\cdot)\}$ – допустимий процес в задачі (4.81) – (4.83) і з умови 5) отримаємо, що $\hat{J}_\varepsilon=\lim\limits_{n\to\infty}J(y_n,u_n)\geq J(\tilde{y},\tilde{u})$, тобто $\{\tilde{y},\tilde{u}\}$ – розв'язок (4.81) – (4.83). Лему доведено. □

Теорема 4.4. *Нехай виконуються умови 1) – 9). Тоді формула $u[t,y]$ реалізує наближений синтез вихідної задачі (4.81) – (4.83) при малих $\varepsilon>0$, тобто справедлива гранична рівність*

$$|J(\tilde{y}_\varepsilon,\, u[t,\tilde{y}_\varepsilon])-J(\hat{y}_\varepsilon,\,\hat{u}_\varepsilon)|\to 0,\ \varepsilon\to 0,$$

де $\tilde{y}_\varepsilon(\,\cdot\,)$ - розв'язок задачі (4.84), $\{\hat{y}_\varepsilon,\,\hat{u}_\varepsilon\}$ - оптимальний процес в задачі (4.81) - (4.83).

Доведення. Спочатку покажемо, що за умов 1) – 7) для будь-якого розв'язку $\{\hat{y}_\varepsilon,\,\hat{u}_\varepsilon\}$ задачі (4.81) – (4.83) маємо:

$$\hat{J}_\varepsilon\to\hat{J}_0,\quad\varepsilon\to 0,\tag{4.94}$$

$$\begin{aligned}&\hat{y}_\varepsilon\to\hat{y}\ \text{в}\ C([0,T];H),\\&\hat{u}_\varepsilon\to\hat{u}\,\text{слабо}\ \text{ в}\ L^2(0,T),\end{aligned}\tag{4.95}$$

де $\{\hat{y},\,\hat{u}\}$ – єдиний оптимальний процес в (4.81) – (4.83) при $\varepsilon=0$, $\hat{J}_0=J(\hat{y},\hat{u})$ – відповідне значення задачі.

Дійсно,

$$\hat{J}_\varepsilon=J(\hat{y}_\varepsilon,\hat{u}_\varepsilon)\geq -C+\gamma\int\limits_0^T|\hat{u}_\varepsilon(t)|^2\,dt$$

і для фіксованого $u\in U$ відповідного допустимого процесу $\{y_\varepsilon,\,u\}$ маємо

$$\hat{J}_{\varepsilon} \leq J\left(y_{\varepsilon}, u\right),$$

отже,

$$\gamma \int\limits_{0}^{T} \left|\hat{u}_{\varepsilon}(t)\right|^{2} dt \leq J\left(y_{\varepsilon}, u\right) + C.$$

З оцінки (4.93) і за лемою Гронуолла отримаємо, що $\left\{y_{\varepsilon}\left(\cdot\right)\right\}_{\varepsilon>0}$ – обмежена в $C\left([0,T]\,;H\right)$. Тоді в силу умови 6) числа $J\left(y_{\varepsilon}, u\right)$ обмежені рівномірно по $\varepsilon > 0$, а отже, $\left\{\hat{u}_{\varepsilon}\left(\cdot\right)\right\}_{\varepsilon>0}$ – обмежена в $L^{2}(0,T)$.

Розглянемо довільну послідовність $\varepsilon_{n} \to 0$. Тоді по підпослідовності $\hat{u}_{\varepsilon_{n}}\left(\cdot\right) \to \hat{u}\left(\cdot\right)$ слабо в $L^{2}(0,T)$, причому $\hat{u} \in U$. Тоді аналогічно до міркувань Леми 4.7, оскільки послідовність $\left\{\hat{y}_{\varepsilon_{n}}\left(\cdot\right)\right\}$ задовольняє оцінку (4.93), маємо, що $\hat{l}_{\varepsilon_{n}} = \varepsilon_{n}\hat{f}_{n} + p + g\cdot\hat{u}_{\varepsilon_{n}}$, $\hat{f}_{n}(t) \in F\left(\hat{y}_{\varepsilon_{n}}(t)\right)$ є рівномірно інтегрованою, причому по підпослідовності $\hat{l}_{\varepsilon_{n}} \to \hat{l} = p + g\cdot\hat{u}$ слабо в $L^{1}(0,T;H)$. Отже, $\hat{y}_{\varepsilon_{n}}\left(\cdot\right) \to \hat{y}\left(\cdot\right)$ в $C\left([0,T]\,;H\right)$, де $\hat{y}\left(\cdot\right) = I(y_{0})\hat{l}\left(\cdot\right)$. Тоді в силу 5)

$$\varliminf_{n\to\infty} \hat{J}_{\varepsilon_{n}} = \varliminf_{n\to\infty} \hat{J}\left(\hat{y}_{\varepsilon_{n}}, \hat{u}_{\varepsilon_{n}}\right) \geq J(\hat{y}, \hat{u}).$$

З іншого боку, $\forall u \in U$ для відповідного допустимого процесу $\{y_{\varepsilon},\, u\}$ маємо:

$$\hat{J}_{\varepsilon_{n}} \leq J(y_{\varepsilon_{n}}, u).$$

Для послідовності $\{y_{\varepsilon_{n}}\}$ застосовні попередні міркування, згідно з якими $y_{\varepsilon_{n}}\left(\cdot\right) \to y\left(\cdot\right)$ в $C\left([0,T]\,;H\right)$, де $y\left(\cdot\right) = I(y_{0})l\left(\cdot\right)$, $l\left(\cdot\right) = p + gu$. Тоді в силу 6)

$$\lim_{n\to\infty} J(y_{\varepsilon_{n}}, u) = J(y, u).$$

Відомо [158], що при $\varepsilon = 0$ і фіксованому $u \in U$, задача (4.81) має єдиний інтегральний розв'язок $y(\cdot) = I(y_0)l(\cdot)$. Тоді з нерівності

$$J(\hat{y}, \hat{u}) \leq \varliminf_{n\to\infty} \hat{J}_{\varepsilon_n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \hat{J}_{\varepsilon_n} \leq \lim_{n\to\infty} J(y_{\varepsilon_n}, u) = J(y, u) \tag{4.96}$$

і довільності $u \in U$ одержимо, що $\{\hat{y},\, \hat{u}\}$ – оптимальний процес в (4.81) – (4.83) при $\varepsilon = 0$. При цьому з (4.96) при $y = \hat{y},\ \ u = \hat{u}$ маємо, що

$$\hat{J}_0 = J(\hat{y}, \hat{u}) = \lim_{n\to\infty} \hat{J}_{\varepsilon_n},$$

і по $\varepsilon_n \to 0$ мають місце граничні рівності (4.95).

Нехай тепер, від супротивного, $\exists \delta > 0$ таке, що для деякої послідовності $\varepsilon_n \to 0$ виконується нерівність:

$$\forall n \geq 1 \quad \left| \hat{J}_{\varepsilon_n} - \hat{J}_0 \right| \geq \delta.$$

Тоді, повторюючи попередні міркування, можемо виділити підпослідовність $\varepsilon_{n_k} \to 0$ таку, що $\hat{J}_{\varepsilon_{n_k}} \to \hat{J}_0$, що і доводить, що (4.94), (4.95) мають місце при $\varepsilon \to 0$.

Тепер проаналізуємо задачу (4.84).

Нехай $u[t, y]$ – формула оптимального керування задачі (4.81) – (4.83) при $\varepsilon = 0$ у формі оберненого зв'язку. Розглянемо задачу (4.84). Покладемо $F_1(t, y) = p(t) + gu[t, y]$. Тоді $F_1(t, \cdot)$ – неперервне, $\forall y \in H$ $F_1(\cdot, y)$ – вимірне, $\|F_1(t, y)\| \leq p(t) + \alpha(t)\|g\| + \beta(t)\|g\|\|y\| = \alpha_1(t) + \beta_1(t)\|y\|$, де $\alpha_1(\cdot),\ \beta_1(\cdot) \in L^1(0, T)$.

Тоді $\forall \varepsilon > 0$ відображення $\varepsilon F + F_1$ задовольняє умови глобальної розв'язності з [139], тобто $\forall \varepsilon > 0$ існує $\tilde{y}_\varepsilon(\cdot) \in C([0, T]; H)$ – інтегральний розв'язок (4.84). Позначимо $\tilde{u}_\varepsilon(t) = u[t, \tilde{y}_\varepsilon(t)]$. Оскільки ми вже показали, що $\hat{J}_\varepsilon \to$

$\hat{J}_0, \quad \varepsilon \to 0$, то теорему буде доведено, якщо показати, що

$$J\left(\tilde{y}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon\right) \to \hat{J}_0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Нехай послідовність $\varepsilon_n \to 0$ – довільна. Позначимо $\tilde{y}_n = \tilde{y}_{\varepsilon_n}(\cdot)$, $\tilde{u}_n = \tilde{u}_{\varepsilon_n}(\cdot)$. Тоді $\exists \tilde{f}_n \in L^1(0,T;H)$, $\tilde{f}_n(t) \in F\left(\tilde{y}_n(t)\right)$ майже скрізь, така, що $\tilde{y}_n(\cdot) = I(y_0)\tilde{l}_n(\cdot)$, де $\tilde{l}_n = \varepsilon_n \tilde{f}_n + p + g \cdot \tilde{u}_n$.

З оцінки (4.93), нерівності $|\tilde{u}_n(t)| \le \alpha(t)+\beta(t)\left\|\tilde{y}_n(t)\right\|$ і за лемою Гронуолла отримаємо, що $\{\tilde{y}_n(\cdot)\}$ – обмежена в $C\left([0,T];H\right)$. Тоді $\exists C(\cdot) \in L^2(0,T)$: $\forall n > 0$ $|\tilde{u}_n(t)| \le C(t)$ майже скрізь. Це означає, що по підпослідовності $\tilde{u}_n(\cdot) \to \tilde{u}(\cdot)$ слабо в $L^2(0,T)$, $\left\{\tilde{l}_n\right\}$ – рівномірно інтегрована. Отже, по підпослідовності $\tilde{y}_n(\cdot) \to \tilde{y}(\cdot)$ в $C\left([0,T];H\right)$, де $\tilde{y}(\cdot) = I(y_0)\tilde{l}(\cdot)$, $\tilde{l}(\cdot) = p + g\tilde{u}$.

Оскільки в силу 8)

$$\tilde{u}_n(t) = u[t, \tilde{y}_n(t)] \to u[t, \tilde{y}(t)]$$

майже скрізь, то $\tilde{u}(t) = u[t, \tilde{y}(t)]$ і за теоремою Лебега $\tilde{u}_n(\cdot) \to \tilde{u}(\cdot)$ в $L^2(0,T)$. Таким чином, $\tilde{y}(\cdot)$ – розв'язок задачі

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y) + p(t) + g \cdot u[t,y], \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{4.97}$$

Проте за умовою 8) задача (4.97) має єдиний розв'язок $\hat{y}(\cdot)$, де $\{\hat{y}, u[t,\hat{y}]\}$ – оптимальний процес в задачі (4.81) – (4.83) при $\varepsilon = 0$. Таким чином, $\tilde{y} \equiv \hat{y}$, $\tilde{u} \equiv \hat{u} = u[t,\hat{y}]$ і $\hat{J}_0 = J(\hat{y},\hat{u})$. Тоді в силу умови 6)

$$J(\tilde{y}_n, \tilde{u}_n) \to \hat{J}_0 = J(\hat{y}, \hat{u}), \quad n \to \infty.$$

В силу єдиності розв'язку задачі (4.97) збіжність іде по всій послідовності. Теорема доведена. $\square$

Зауваження 4.4. *Для процесу* $\{\tilde{y}_\varepsilon,\ \tilde{u}_\varepsilon\}$ *і оптимального процесу* $\{\hat{y}_\varepsilon,\ \hat{u}_\varepsilon\}$ *задачі (4.81) – (4.83) також мають місце граничні рівності:*

$$\tilde{y}_\varepsilon - \hat{y}_\varepsilon \to 0,\ \ \varepsilon \to 0 \ \ \textit{в} \ \ C\left([0,T]\,;H\right),$$

$$\tilde{u}_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon \to 0,\ \ \ \varepsilon \to 0 \ \textit{слабко} \ \ \textit{в} \ \ L^2(0,T).$$

4.4.2 Випадок нескінченного часового інтервалу

В позначеннях попереднього підрозділу розглядається задача стабілізації

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y(t)) - \varepsilon F(y(t)) + g\cdot u(t),\ t>0, \\ \\ y(0) = y_0 \in H, \end{cases} \tag{4.98}$$

$$u(\cdot) \in U \subseteq L^2(0,+\infty) \text{ замкнена, } \text{ опукла, } 0 \in U, \tag{4.99}$$

$$J(y,u) = \int\limits_0^{+\infty} \left(\|y(t)\|^2 + \gamma u^2(t)\right) dt \to \inf. \tag{4.100}$$

Нехай $\{\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon\}$ – оптимальний процес в (4.98)–(4.100), $\tilde{J}_\varepsilon = J(\tilde{y}^\varepsilon, \tilde{u}^\varepsilon)$.

Нехай при $\varepsilon = 0$ відома формула оптимального регулятора $u[y]$. Це, зокрема, виконується у випадку параболічного включення з

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx,\ u \in H_0^1(\Omega), \\ \\ +\infty,\ \text{інакше.} \end{cases}$$

В цьому випадку $\partial\varphi(u) = -\Delta u$ і за умови $U = L^2(0,+\infty)$ формулу регулятора виписано в підрозділі 4.2.

Розглянемо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} \in -\partial\varphi(y(t)) - \varepsilon F(y(t)) + g \cdot u[y(t)],\ t > 0, \\ \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{4.101}$$

Нехай $\hat{y}^\varepsilon$ – розв'язок задачі (4.101), $\hat{J}_\varepsilon = J(\hat{y}^\varepsilon, u[\hat{y}^\varepsilon])$.

Мета – обґрунтувати граничну рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\tilde{J}_\varepsilon - \hat{J}_\varepsilon| = 0. \tag{4.102}$$

Будемо розглядати наступні умови на параметри задачі (4.98) – (4.100):

$$\forall\ R > 0\ M_R = \{u \in H | \|u\| \leq R,\ \varphi(u) \leq R\}\ -\ \text{компакт в } H, \tag{4.103}$$

$$F : H \to C_v(H)\ -\ \text{напівнеперервна зверху}, \tag{4.104}$$

$$\exists C_1 > 0\ \forall u \in H\ \|F(u)\|_+ := \sup_{z \in F(u)} \|z\| \leq C_1(1 + \|u\|), \tag{4.105}$$

$$\exists C_2 > 0\ \forall u \in H\ \inf_{\xi \in F(u)} (\xi, u) \geq -C_2\|u\|^2, \tag{4.106}$$

$$\exists\ \delta > 0\ \exists\ K > 0\ \forall\ y \in D(\partial\varphi)\ \forall u \in -\partial\varphi(y)\ (u, y) \leq -\delta\|y\|^2, \tag{4.107}$$

задача (4.98) – (4.100) при $\varepsilon = 0$ має єдиний розв'язок $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$, причому має місце закон оберненого зв'язку

$$\tilde{u}(t) = u[\tilde{y}(t)], \tag{4.108}$$

відображення $u : H \to H$ неперервне,

$$\sup_{y\neq 0}\frac{|u[y]|}{\|y\|}<\frac{\|g\|}{\delta}. \tag{4.109}$$

Лема 4.8. *За умов (4.103) – (4.107) задача (4.98) – (4.100) для достатньо малих $\varepsilon>0$ має розв'язок $\{\tilde{y}^\varepsilon,\tilde{u}^\varepsilon\}$.*

Доведення. З попереднього підрозділу випливає, що при фіксованому $u\in U$, $\|u\|_U^2:=\int\limits_0^{+\infty}u^2(t)dt<\infty$ задача (4.98) для $\forall\varepsilon>0$ має принаймні один (сильний) розв'язок, для якого справедливі наступні оцінки з константами $\delta_1>0$ $C>0$, які не залежать від $\varepsilon>0$:

$$\exists\varepsilon_0>0\ \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\ \forall t\geq s\geq 0$$

$$\|y(t)\|^2\leq\|y(s)\|^2e^{-\delta_1(t-s)}+C\int\limits_s^t e^{-\delta_1(t-p)}u^2(p)dp\leq$$

$$\leq\|y(s)\|^2e^{-\delta_1(t-s)}+C\|u\|_U^2, \tag{4.110}$$

$$\int\limits_s^t\|y(p)\|^2dp\leq\frac{1}{\delta_1}\left(\|y(s)\|^2+C\int\limits_s^t u^2(p)dp\right)\leq$$

$$\leq\frac{1}{\delta_1}\left(\|y(s)\|^2+C\|u\|_U^2\right). \tag{4.111}$$

З цих оцінок випливає, що $J(y,u)<\infty$. Крім того, ці оцінки дозволяють провести всі міркування доведення Леми 3.6 і одержати твердження леми.

□

Теорема 4.5. *Нехай виконані умови (4.103) – (4.109), $\{\tilde{y}^\varepsilon,\tilde{u}^\varepsilon\}$ – оптимальний процес в задачі (4.98)–(4.100), $\tilde{J}_\varepsilon=J(\tilde{y}^\varepsilon,\tilde{u}^\varepsilon)$, $\hat{y}^\varepsilon$ – розв'язок задачі (4.101), $\hat{J}_\varepsilon=J(\hat{y}^\varepsilon,u[\hat{y}^\varepsilon])$. Тоді*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|\tilde{J}_\varepsilon-\hat{J}_\varepsilon|=0. \tag{4.112}$$

Доведення. Спочатку покажемо, що $\hat{J}_\varepsilon \to J_0$, $\varepsilon \to 0$, де $J_0 = J(\tilde{y}, \tilde{u})$ $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ – єдиний оптимальний процес у задачі (4.98)–(4.100) при $\varepsilon = 0$.

Нехай $\hat{y}^\varepsilon$ – розв'язок задачі (4.101), $\hat{y}^\varepsilon = I_\varepsilon(y_0, u[\hat{y}^\varepsilon])f_\varepsilon$, $f_\varepsilon(t) \in F(\hat{y}^\varepsilon(t))$ майже скрізь. З оцінок (4.110) і умови (4.105) випливає, що $\|f_\varepsilon(t)\| \leq m$ майже скрізь. Тоді аналогічно попереднім міркуванням отримаємо, що $\hat{y}^\varepsilon \to \hat{y}$ в $u[\hat{y}^\varepsilon(t)] \to u[\hat{y}(t)]$ $\forall t \in [0, T]$, тобто $\hat{y}$ - розв'язок задачі (4.101) при $\varepsilon = 0$. В силу максимальної монотонності $\partial\varphi$ [158] задача (4.101) при $\varepsilon = 0$ має єдиний розв'язок. Тому в силу (4.108) $J_0 = J(\hat{y}, u[\hat{y}])$, тобто $\{\hat{y}, u[\hat{y}]\}$ оптимальний процес в (4.98)–(4.100) при $\varepsilon = 0$.

З оцінок (4.110) маємо, що $\forall t \geq 0$

$$\|\hat{y}^\varepsilon(t)\|^2 + \gamma u^2[\hat{y}^\varepsilon(t)] \leq e^{-\delta_2 t}\|y_0\|^2(1 + \tilde{C}^2).$$

Оскільки $\forall t \geq 0$

$\|\hat{y}^\varepsilon(t)\| \to \|\hat{y}(t)\|$, $u^2[\hat{y}^\varepsilon(t)] \to u^2[\hat{y}(t)]$ при $\varepsilon \to 0$, то за теоремою Лебега

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{J}_\varepsilon = J(\hat{y}, u[\hat{y}]) = J_0. \tag{4.113}$$

Той факт, що $\tilde{J}_\varepsilon \to J_0$, $\varepsilon \to 0$, встановлюється аналогічно доведенню теореми 3.4 (міркування після формули (3.124).

Теорема доведена. $\square$

Висновки до розділу 4

В цьому розділі розв'язані задачі конструювання та обґрунтування наближеного зосередженого оптимального керування в формі оберненого зв'язку для дифузійних і хвильових процесів з нелінійними та многозначними збуреннями.

Основним об'єктом вивчення виступає задача оптимального керування, яка складається з еволюційного рівняння або включення першого або другого порядку, права частина якого містить нелінійні або многозначні збурення виду $\varepsilon F(y)$, де y – фазова змінна, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, та зосередежне обмежене керування $u(t)$, та з квадратичного критерію якості.

Основним інструментом при побудові наближеного регулятора виступає точна форма (параметричного за наявності точки переключення) синтезу для відповідної лінійно-квадратичної задачі при $\varepsilon = 0$.

У підрозділі 4.1 на основі формули точного обмеженого параметричного синтезу для незбуреної задачі обґрунтовано наближене керування в формі оберненого зв'язку для слабо-нелінійного рівняння типу реакції-дифузії.

У підрозділі 4.2 на основі формули точного оптимального регулятора для незбуреної задачі обґрунтовано наближений регулятор для слабо-нелінійного рівняння типу реакції-дифузії.

У підрозділі 4.3 на основі формули точного обмеженого параметричного синтезу для незбуреної задачі обґрунтовано наближене керування в формі оберненого зв'язку для слабо-нелінійного хвильового рівняння.

У підрозділі 4.4 розв'язано задачу наближеного синтезу на скінченному та нескінченному часовому проміжку для класів еволюційних включень субдиференціального типу з многозначними напівнеперервними зверху функціями взаємодії.

Основні результати розділу опубліковано в роботах [55], [58], [68], [69], [71], [72], [206], [209].

Розділ 5

Оптимальне керування в задачах з нелокальними крайовими умовами

У цьому розділі розглядаються задачі оптимального керування еліптичними і параболічними рівняннями у секторіальних областях із квадратичними критеріями якості та нелокальними крайовими умовами. Основними результатами є одержання точних і наближень формул оптимальних керувань для відповідних задач. На відміну від класичних задач, де метод Фур'є дозволяє звести вихідну до зліченної кількості одновимірних задач оптимального керування, наявність нелокальних крайових умов зумовлює появу ряду принципових ускладнень.

При розгляді еліптичних задач основна складність полягає в тому, що система власних функцій оператора Лапласа з розглянутими нелокальними крайовими умовами не утворює базис Рісса в $L^2(0, \pi)$ і навіть не є повною. Тому для застосування методу Фур'є вона доповнюється приєднаними функціями і декомпозиція проводиться, використовуючи біортонормовані системи функцій. Як наслідок, маємо відсутність "гарних" апріорних L^2-оцінок і лише часткове розщеплення нашої задачі. Аналіз відповідних задач та побудова точного і наближеного оптимального керування для різних класів допустимих функцій проведено в першому підрозділі.

При розгляді параболічних задач, використовуючи ряди Фур'є-Бесселя, задача зводиться до зліченної послідовності нескінченновимірних задач, які, в силу часткової декомпозиції, є залежними між собою. Аналіз відповідних рядів та інтегральних рівнянь вдається провести лише для певного класу початкових функцій. Доведення розв'язності відповідних задач оптимального керування з квадратичним критерієм якості та задачі з мінімальною енергією проведено в другому і третьому підрозділах.

5.1 Задача оптимального керування для еліптичного рівняння з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі

5.1.1 Ряди Фур'є і біортонормовані системи функцій

Тут наводяться необхідні теоретичні відомості [105] щодо рядів Фур'є по біортонормованим системам функцій в просторі $L^2(0,\pi)$ з нормою і скалярним добутком

$$\|f\| = \Big(\int_0^\pi f^2(x)dx\Big)^{\frac{1}{2}},\ (f,g) = \int_0^\pi f(x)g(x)dx.$$

Системи функцій $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$, $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ називаються біортонормованими в просторі $L^2(0,\pi)$, якщо

$$(\phi_i,\psi_j) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \neq j, \\ 1, \text{ якщо } i = j \end{cases}$$

Система функцій $\{f_k\}$, $k = 1,2,...$, простору $L^2(0,\pi)$ утворює базис Рісса данного простору, якщо існує повна ортонормована система функцій $\{e_k\}$, $k = 1,2,...$, і лінійний неперервний оборотний оператор $D : L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$ такий, що $e_k = Df_k$, $k = 1,2,...$

Однією з важливих властивостей базису Рісса є можливість розкладу довільної функції простору в функціональний ряд за базисними функціям.

Лема 5.1. *Довільна послідовність функцій* $\{p_k\}$, $k = 1, 2, ...,$ *простору* $L^2(0, \pi)$, *що утворює базис Рісса, має єдину біортонормовану послідовність* $\{q_k\}$, $k = 1, 2, ...,$ *яка також є базисом Рісса простору* $L^2(0, \pi)$. *При цьому будь-яка функція* $f \in L^2(0, \pi)$ *розкладається єдиним чином у збіжний по нормі* $L^2(0, \pi)$ *ряд*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, p_k,$$

де $c_k = (f, q_k)$, $k = 1, 2, ...$

Наступний результат є одним з критеріїв базисності набору функцій.

Лема 5.2. *Система функцій* $\{f_k\}$, $k = 1, 2, ...,$ *простору* $L^2(0, \pi)$ *є базисом Рісса данного простору тоді і лише тоді, коли послідовність функцій* $\{f_k\}$, $k = 1, 2, ...,$ *є повною в просторі* $L^2(0, \pi)$ *та існують сталі* ρ_1, ρ_2 *такі, що для будь-якого натурального* n *та для будь-яких чисел* γ_1, γ_2, $..., \gamma_n$ *виконуються нерівності*

$$\rho_1 \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^2 \le ||\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \, f_k||^2 \le \rho_2 \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^2.$$

Тепер розглянемо наступну крайову задачу в круговому секторі $Q = \{(r, \theta) | r \in (0, 1), \, \theta \in (0, \pi)\}$

$$\begin{cases} \Delta y := \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = 0,\ (r,\theta)\in Q, \\ y(1,\theta) = p(\theta),\ \ \theta\in(0,\pi), \\ y(r,0) = 0,\ \ r\in(0,1), \\ \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,0) = \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\pi),\ \ r\in(0,1), \end{cases}$$

де $p \in C^1([0,\pi])$, $p(0) = 0$ – задана функція.

Відомо [105], що використовуючи наступні повні біортонормальні в $L^2(0,\pi)$ базисні системи функцій (системи Самарського-Іонкіна):

$$\Psi:\ \ \psi_0(\theta) = \frac{2}{\pi^2},\ \ \psi_{2n}(\theta) = \frac{4}{\pi^2}(\pi-\theta)\sin 2n\theta,\ \ \psi_{2n-1}(\theta) = \frac{4}{\pi^2}\cos 2n\theta, \quad (5.1)$$

$$\Phi:\ \ \varphi_0(\theta) = \theta,\ \ \varphi_{2n}(\theta) = \sin 2n\theta,\ \ \varphi_{2n-1}(\theta) = \theta\cos 2n\theta, \quad (5.2)$$

можна довести, що ця задача має єдиний розв'язок $y \in C(\bar{Q}) \cap C^2(Q)$, який задається формулою

$$y(r,\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} A_n r^{2n}\sin 2n\theta + \sum_{i=1}^{\infty} B_n r^{2n}(\ln r \sin 2n\theta + \theta\cos 2n\theta),$$

де

$$A_n = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}(\pi-\tau)p(\tau)\sin 2n\tau d\tau,$$

$$B_0 = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}p(\tau)d\tau,\ \ B_n = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}p(\tau)\cos 2n\tau d\tau.$$

5.1.2 Існування оптимального керування

У круговому секторі $Q = \{(r,\theta)|r \in (0,1),\ \theta \in (0,\pi)\}$ розглядається задача оптимального керування

$$\begin{cases} \Delta y = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = u(r,\theta),\ (r,\theta) \in Q, \\ y(1,\theta) = p(\theta),\ \ \theta \in (0,\pi), \\ y(r,0) = 0,\ \ r \in (0,1), \\ \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,0) = \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\pi),\ \ r \in (0,1), \end{cases} \tag{5.3}$$

$$J(u) = \int_0^1 \|y(r)\|_D^2\, dr + \int_0^1 \|u(r)\|_D^2\, dr \to \inf, \tag{5.4}$$

де $p \in C^1([0,\pi])$, $p(0) = 0$ – задана функція, $\|\cdot\|_D$ - норма в $L^2(0,\pi)$, що задається рівністю

$$\forall v \in L^2(0,\pi),\ \ \|v\|_D^2 = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2,\ \ v_n = (v,\psi_n),\ \ \psi_n \in \Psi. \tag{5.5}$$

Зауваження 5.1. *Вибір норми $\|\cdot\|_D$ в функціоналі (5.4) дозволяє частково розщепити задачу (5.3)-(5.4). В силу леми 5.2 норма $\|\cdot\|_D$ еквівалентна стандартній нормі $\|\cdot\|$ в $L^2(0,\pi)$*

Основною метою розділу є встановлення класичної розв'язності (5.3) – (5.4), тобто відшукання оптимального серед допустимих процесів $\{u,y\} \in C(\overline{Q}) \times (C(\overline{Q}) \bigcap C^2(Q))$, а також обґрунтування конструктивного методу знаходження наближеного оптимального керування.

Теорема 5.1. *Задача оптимального керування* (5.3) – (5.4) *має єдиний розв'язок* $\{\tilde{u},\tilde{y}\} \in C(\overline{Q}) \times (C(\overline{Q}) \bigcap C^2(Q))$.

Доведення. При фіксованому керуванні будемо шукати розв'язок задачі (5.3) $y = y(r,\theta)$ у вигляді

$$y(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(r)\varphi_n(\theta).$$

Тоді задача (5.3) – (5.4) зводиться до наступної: на допустимих парах $\{u_n(r), y_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ задачі

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy_0}{dr}\right) = r \cdot u_0(r),\ \ y_0(1) = p_0, \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered} r\tfrac{d}{dr}\left(r\tfrac{dy_{2k-1}}{dr}\right) - (2k)^2 y_{2k-1} = r^2 u_{2k-1}(r), \\ y_{2k-1}(1) = p_{2k-1}, \end{gathered} \tag{5.7}$$

$$\begin{gathered} r\tfrac{d}{dr}\left(r\tfrac{dy_{2k}}{dr}\right) - (2k)^2 y_{2k} - 4k y_{2k-1} = r^2 u_{2k}(r), \\ y_{2k}(1) = p_{2k}, \end{gathered} \tag{5.8}$$

де $\forall k \leq 0$ $p_k = \int_0^{\pi} p(\theta)\psi_k(\theta)d\theta$, мінімізувати критерій якості

$$\begin{gathered} J(u) = \int_0^1 \left[y_0^2(r) + u_0^2(r)\right] dr + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \left[y_{2k-1}^2(r) + y_{2k}^2(r) + \right. \\ \left. + u_{2k-1}^2(r) + u_{2k}^2(r)\right] dr = J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} J_k. \end{gathered} \tag{5.9}$$

При цьому оптимальний процес $\{\tilde{u}_n(r), \tilde{y}_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ має бути таким, щоб виконувалися умови:

$$\tilde{u}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_n(r)\varphi_n(\theta) \in C(\bar{Q}), \tag{5.10}$$

$$\tilde{y}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_n(r)\varphi_n(\theta) \in C(\bar{Q}) \bigcap C^2(Q). \tag{5.11}$$

При фіксованих керуваннях $\{u_k(r)\}_{k=0}^{\infty} \subset C([0,1])$ розв'язки задачі (5.6)–(5.8) мають вигляд

$$y_0(r) = p_0 + \int_0^1 G_0(r,s)u_0(s)ds, \tag{5.12}$$

$$y_{2k-1}(r) = p_{2k-1}r^{2k} + \frac{1}{4k}\int_0^1 sG_k(r,s)u_{2k-1}(s)ds, \tag{5.13}$$

$$\begin{gathered} y_{2k}(r) = p_{2k}r^{2k} + p_{2k-1}r^{2k}\ln r + \\ +\tfrac{1}{4k}\int_0^1 sG_k(r,s)u_{2k}(s)ds + \tfrac{1}{4k}\int_0^1 s\bar{G}_k(r,s)u_{2k-1}(s)ds, \end{gathered} \tag{5.14}$$

де в прямокутнику

$$\Pi = [0,1]\times[0,1]$$

ядра G_i мають вигляд

$$G_0(r,s) = \begin{cases} s\ln r, \; s\in[0,r], \\ \\ s\ln s, \; s\in[r,1], \end{cases} \quad \max_{\Pi}|G_0(r,s)| \le e^{-1}, \tag{5.15}$$

$$G_k(r,s) = \begin{cases} s^{2k}(r^{2k} - r^{-2k}, \; s\in[0,r], \\ \\ r^{2k}(s^{2k} - s^{-2k}), \; s\in[r,1], \end{cases} \quad \max_{\Pi}|G_k(r,s)| \le 1 \tag{5.16}$$

а з формули (5.14) ядро $\bar{G}_k(r,s)$ має вигляд

$$\bar{G}_k(r,s) =$$

$$= \begin{cases} \tfrac{1}{2k}\left(\left(\tfrac{s}{r}\right)^{2k} - (rs)^{-2k}\right) + r^{2k}s^{2k}\ln(rs) - \left(\tfrac{s}{r}\right)^{2k}\ln\tfrac{s}{r}, \; s\in[0,r], \\ \tfrac{1}{2k}\left(\left(\tfrac{r}{s}\right)^{2k} - (rs)^{-2k}\right) + r^{2k}s^{2k}\ln(rs) - \left(\tfrac{r}{s}\right)^{2k}\ln\tfrac{r}{s}, \; s\in[r,1], \end{cases} \tag{5.17}$$

$$\max_{\Pi}\left|\bar{G}_k(r,s)\right| \le \tfrac{1}{k}.$$

Тоді формули (5.12)–(5.14) $\forall k \le 0$ визначають $y_k \in C([0,1])\bigcap C^2(0,1)$. Крім того, оскільки функціонали $J_0 : L^2(0,1) \to R$, $J_k : L^2(0,1)\times L^2(0,1) \to$

R є строго опуклими, неперервними і коерцитивними, то кожна з відповідних оптимізаційних задач має єдиний розв'язок в $L^2(0,1)$. Для його знаходження прирівнюємо до нуля похідні Фреше і одержуємо наступні інтегральні рівняння Фредгольма:

$$\begin{gathered} u_0(s) = -\int_0^1 \left(\int_0^1 G_0(r,\xi)G_0(r,s)dr\right) u_0(\xi)d\xi - \\ -p_0\int_0^1 G_0(r,s)dr, \end{gathered} \tag{5.18}$$

для вектора $z_k(s) = \begin{pmatrix} u_{2k-1}(s) \\ u_{2k}(s) \end{pmatrix}$, $k \geq 1$

$$z_k(s) = -\frac{1}{(4k)^2}\int_0^1 A_k(\xi,s)z_k(\xi)d\xi + f_k(s), \tag{5.19}$$

де

$$A_k(\xi,s) = \xi \cdot s \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \int_0^1 \left(G_k(r,s)G_k(r,\xi) + \bar{G}_k(r,s)\bar{G}_k(r,\xi)\right)dr & \frac{1}{2}\int_0^1 \bar{G}_k(r,s)G_k(r,\xi)dr \\ \frac{1}{2}\int_0^1 \bar{G}_k(r,\xi)G_k(r,s)dr & \int_0^1 G_k(r,s)G_k(r,\xi)dr \end{pmatrix}, \tag{5.20}$$

$$f_k(s) =$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \int_0^1 \left[p_{2k-1}r^{2k}sG_k(r,s) + \left(p_{2k}r^{2k} + p_{2k-1}r^{2k}\ln r\right)s\bar{G}_k(r,s)\right]dr \\ \int_0^1 \left(p_{2k}r^{2k} + p_{2k-1}r^{2k}\ln r\right)sG_k(r,s)dr \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

Оскільки $\max\limits_{\Pi}\|A_k(\xi,s)\| \leq 4$, $\max\limits_{s\in[0,1]}\|f_k(s)\| \leq \frac{1}{4k^2}\left(|p_{2k-1}| + |p_{2k}|\right)$, то рівняння (5.18), (5.19) мають єдиний розв'язок $\tilde{u}_0 \in C([0,1])$, $\tilde{z}_k = \begin{pmatrix} \tilde{u}_{2k-1} \\ \tilde{u}_{2k} \end{pmatrix} \in$

$C([0,1])$, причому $\forall k \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\max_{r\in[0,1]} |\tilde{u}_{2k-1}(r)| \leq \tfrac{1}{k^2}\left(|p_{2k-1}| + |p_{2k}|\right), \\
&\max_{r\in[0,1]} |\tilde{u}_{2k}(r)| \leq \tfrac{1}{k^2}\left(|p_{2k-1}| + |p_{2k}|\right).
\end{aligned} \tag{5.22}$$

З оцінок (5.22) та ознаки Вейєрштраса випливає, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_n(r)\varphi_n(\theta)$ збігається рівномірно на $\bar{Q}$ і визначає функцію $\tilde{u}(r,\theta) \in C(\bar{Q})$, тобто виконується умова (5.10).

Доведемо умову (5.11).

За формулами (5.15) – (5.17) відповідний ряд має вигляд

$$p_0 \cdot \theta + \theta \cdot \int\limits_0^1 G_0(r,s)u_0(s)ds + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(p_{2n-1} \cdot r^{2n} \cdot \theta \cos 2n\theta +$$

$$+\big(p_{2n} \cdot r^{2n} + p_{2n-1} \cdot r^{2n} \cdot \ln r\big) \sin 2n\theta\Big) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \theta \cos 2n\theta \cdot \frac{1}{4n} \int\limits_0^1 sG_n(r,s)\tilde{u}_{2n-1}(s)ds + \tag{5.23}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n\theta \Big(\frac{1}{4n}\int\limits_0^1 sG_n(r,s)\tilde{u}_{2n}(s)ds + \frac{1}{4n}\int\limits_0^1 s\bar{G}_n(r,s)\tilde{u}_{2n-1}(s)ds\Big).$$

Функції $r^{2n}\sin 2n\theta$ і $r^{2n}(\ln r \cdot \sin 2n\theta + \theta \cos 2n\theta)$ є гармонічними, $p \in C^1([0,\pi])$, $p(0) = 0$, отже, в силу [105] перший ряд в (5.23) є функцією з класу $C(\bar{Q}) \bigcap C^2(Q)$.

З оцінок (5.22) за ознакою Вейєрштраса маємо, що $\tilde{y} \in C(\bar{Q})$.

Залишилося дослідити рівномірну на $\forall [a,b]\times[c,d]\subset(0,1)\times(0,\pi)$ збіжність рядів з похідних по r,θ першого та другого порядку від функцій

$$B_n(r,\theta)=\frac{1}{4n}\int\limits_0^1 sG_n(r,s)\tilde{u}_{2n-1}(s)ds\cdot\theta\cos 2n\theta=b_n(r)\cdot\theta\cos 2n\theta,$$

$$C_n(r,\theta)=\frac{1}{4n}\int\limits_0^1 sG_n(r,s)\tilde{u}_{2n}(s)ds\cdot\sin 2n\theta=c_n(r)\cdot\sin 2n\theta,$$

$$D_n(r,\theta)=\frac{1}{4n}\int\limits_0^1 s\bar{G}_n(r,s)\tilde{u}_{2n-1}(s)ds\cdot\sin 2n\theta=d_n(r)\cdot\sin 2n\theta.$$

З оцінок (5.22) одержимо, що ряди з похідних $\frac{\partial}{\partial\theta}$, $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ збігаються на $\bar{Q}$ рівномірно за ознакою Вейєрштрасса.

Для $\forall r\in[a,b]$, $\forall n>1$

$$b_n(r)=\frac{1}{4n}\Big((r^{2n}-r^{-2n})\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+$$

$$+r^{2n}\int\limits_r^1(s^{2n+1}-s^{1-2n})\tilde{u}_{2n-1}(s)ds\Big),$$

$$b_n'(r)=\frac{1}{2}(r^{2n-1}+r^{-2n-1})\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+$$

$$+\frac{1}{2}r^{2n-1}\int\limits_r^1(s^{2n+1}-s^{1-2n})\tilde{u}_{2n-1}(s)ds, \tag{5.24}$$

(доданки, які не містять інтегралів, взаємно знищуються)

$$b_n''(r)=\frac{1}{2}\Big((2n-1)r^{2n-2}+$$

$$+(-2n-1)r^{-2n-2}\Big)\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+$$

$$+\frac{1}{2}(2n-1)r^{2n-2}\int\limits_r^1 (s^{2n+1}-s^{1-2n})\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+\tilde{u}_{2n-1}(r). \tag{5.25}$$

Оскільки $\int\limits_0^r s^{2n+1}ds = \frac{r^{2n+1}}{2n+2}$,

$$\int\limits_r^1 (s^{2n+1}-s^{1-2n})ds = -\frac{n}{1-n^2}-\frac{r^{2n+2}}{2n+2}+\frac{r^{2-2n}}{2-2n},$$

то існує $C_1>0$ таке, що

$$|b_n'(r)| \le \frac{C_1}{n^2}(|p_{2n-1}|+|p_{2n}|),$$

а, отже, ряди

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial}{\partial r}B_n(r,\theta),\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial}{\partial r}C_n(r,\theta),\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}B_n(r,\theta),\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}C_n(r,\theta)$$

збігаються рівномірно на $[a,b]\times[c,d]$.

З тих же оцінок

$$|b_n''(r)| \le \frac{C_2}{n}(|p_{2n-1}|+|p_{2n}|)$$

і, таким чином, ряди $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial r^2}B_n(r,\theta)$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial r^2}C_n(r,\theta)$ збігаються рівномірно на $[a,b]\times[c,d]$.

Для функції $d_n(r)$ маємо для $\forall r\in[a,b]$:

$$d_n(r)=\frac{1}{8n^2}r^{-2n}\cdot\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds-\frac{1}{8n^2}\cdot r^{2n}\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+$$

$$+\frac{1}{4n}r^{2n}\int\limits_0^r s^{2n+1}\ln s\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+\frac{1}{4n}r^{2n}\ln r\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds-$$

$$-\frac{r^{-2n}}{4n}\int\limits_0^r s^{2n+1}\ln s\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+\frac{r^{-2n}\ln r}{4n}\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+$$

$$+\frac{1}{8n^2}r^{2n}\int\limits_r^1 s^{-2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds-\frac{1}{8n^2}r^{2n}\int\limits_r^1 s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+$$

$$+\frac{1}{4n}r^{2n}\int\limits_r^1 s^{2n+1}\ln s\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+\frac{1}{4n}r^{2n}\ln r\int\limits_r^1 s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds-$$

$$-\frac{1}{4n}r^{2n}\ln s\int\limits_r^1 s^{-2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+\frac{1}{4n}r^{2n}\int\limits_r^1 s^{-2n+1}\ln r\tilde{u}_{2n-1}(s)ds,$$

$$d_n'(r)=-\frac{1}{4n}r^{-2n-1}\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds-\frac{1}{4n}r^{2n-1}\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+$$

$$+\frac{1}{2}r^{2n-1}\int\limits_0^r s^{2n+1}\ln s\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+$$

$$+\frac{1}{4n}\left(2nr^{2n-1}\ln r+r^{2n-1}\right)\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+$$

$$+\frac{1}{2}r^{-2n-1}\int\limits_0^r s^{2n+1}\ln s\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+$$

$$+\frac{1}{4n}\left(-2nr^{-2n-1}\ln r+r^{-2n-1}\right)\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+$$

$$+\frac{1}{4n}r^{2n-1}\int\limits_r^1 s^{-2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds-\frac{1}{4n}r^{2n-1}\int\limits_r^1 s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+$$

$$+\frac{1}{2}r^{2n-1}\int\limits_r^1 s^{2n+1}\ln s\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+$$

$$+\frac{1}{4n}\big(2nr^{2n-1}\ln r+r^{2n-1}\big)\int\limits_r^1 s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds-$$

$$-\frac{1}{4n}\big(2nr^{2n-1}\ln r+r^{2n-1}\big)\int\limits_r^1 s^{-2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)ds+$$

$$+\frac{1}{2}r^{2n-1}\int\limits_r^1 s^{-2n+1}\ln s\tilde{u}_{2n-1}(s)ds.$$

Оскільки

$$\int\limits_0^r s^{2n+1}\ln sds=\frac{1}{2n+2}r^{2n+2}\ln r-\frac{r^{2n+2}}{(2n+2)^2},$$

то існує $C_3>0$ таке, що

$$|d_n'(r)|\leq\frac{C_3}{n^2}(|p_{2n-1}|+|p_{2n}|),$$

отже, ряди $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\partial}{\partial r}D_n(r,\theta)$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}D_n(r,\theta)$ збігаються рівномірно на $[a,b]\times[c,d]$.

Легко бачити, що $\exists C_4>0$ таке, що

$$|d_n''(r)|\leq\frac{C_4}{n}(|p_{2n-1}|+|p_{2n}|),$$

отже, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial r^2}D_n(r,\theta)$ збігається рівномірно на $[a,b]\times[c,d]$.

Таким чином, $\tilde{y}\in C(\bar{Q})\bigcap C^2(Q)$ і теорема доведена.

$\square$

5.1.3 Наближене оптимальне керування

Тепер розглянемо процедуру наближеного знаходження оптимального керування в задачі (5.3) – (5.4).

Розглянемо рівняння (5.8) – (5.9), які однозначно визначають компоненти оптимального керування $\tilde{u}(r,\theta)$. За теоремою Банаха про нерухому точку маємо, що якщо функція $u(s)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$u(s) = \int_0^1 A(\xi,s)u(\xi)d\xi + f(s), \tag{5.26}$$

де A, f – визначені в (5.20), (5.21) неперервні функції, для яких

$\max\limits_{s\in[0,1]} \|A(\xi,s)\| \leq \rho < 1$, $\max\limits_{s\in[0,1]} \|f(s)\| \leq L$, то рекурентна процедура

$$\begin{gathered} u^{(i+1)}(s) = \textstyle\int_0^1 A(\xi,s)u^{(i)}(\xi)d\xi + f(s), \\ i \geq 0,\ u^0(s) \equiv 0, \end{gathered} \tag{5.27}$$

визначає рівномірну збіжну на $[0,1]$ до розв'язку рівняння (5.26) послідовність $\{u^{(i)}(s)\}_{i=0}^{\infty}$, причому швидкість збіжності визначається з умови

$$\max_{s\in[0,1]} \left\|u(s) - u^{(i)}(s)\right\| \leq \frac{\rho^i}{1-\rho} \cdot L. \tag{5.28}$$

Застосуємо цей результат до рівнянь (5.18), (5.19), вважаючи, що

$$A(\xi,s) = A_0(\xi,s) = -\int_0^1 G_0(r,\xi)G_0(r,s)dr,$$

$$f(s) = f_0(s) = -p_0 \cdot \int_0^1 G_0(r,s)dr.$$

Нехай $\forall i > 0$ $u_0^{(i)}(s)$ рекурентно визначається з формули

$$u_0^{(i+1)}(s) = \int_0^1 A_0(\xi,s)u_0^{(i)}(\xi)d\xi + f_0(s),\ u_0^{(0)} \equiv 0. \tag{5.29}$$

Для $k \geq 1$ $z_k^{(i)}(s) = \begin{pmatrix} u_{2k-1}^{(i)}(s) \\ u_{2k}^{(i)}(s) \end{pmatrix}$ рекурентно визначається з формули

$$z_k^{(i+1)}(s) = -\frac{1}{(4k)^2}\int_0^1 A_k(\xi, s) z_k^{(i)}(\xi) d\xi + f_k(s),$$

$$z_k^{(0)} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.30}$$

При цьому

$$\max_{s\in[0,1]} \left\| \tilde{u}_0(s) - u_0^{(i)}(s) \right\| \leq \frac{(e^{-2})^i}{1-e^{-2}} \cdot |p_0|\, e^{-1}, \tag{5.31}$$

$$\max_{s\in[0,1]} \left\| \tilde{z}_k(s) - z_k^{(i)}(s) \right\| \leq \frac{\left(\frac{1}{4k^2}\right)^i}{4k^2-1} \cdot \left(|p_{2k-1}| + |p_{2k}|\right). \tag{5.32}$$

У якості наближеного керування розглянемо функцію

$$u_N^{(i)}(r,\theta) = \sum_{k=0}^{2N-1} u_k^{(i)}(r)\varphi_k(\theta) =$$

$$= u_0^{(i)}(r) \cdot \theta + \sum_{k=0}^{2N-1} \left(u_{2k-1}^{(i)}(r)\theta\cos 2k\theta + u_{2k}^{(i)}(r)\sin 2k\theta \right), \tag{5.33}$$

де $\{u_k^{(i)}(r)\}_{i=0}^{\infty}$ визначається з (5.29), (5.30).

Відповідний розв'язок задачі (5.3) матиме вигляд

$$\bar{y}(r,\theta) = \bar{y}_0(r)\theta + \sum_{k=1}^{\infty}(\bar{y}_{2k-1}(r)\theta\cos 2k\theta +$$

$$+\bar{y}_{2k}(r)\sin 2k\theta), \tag{5.34}$$

де $\{\bar{y}_k\}_{k=0}^{\infty}$ визначаються формулами

$$\bar{y}_0(r) = p_0 + \int_0^1 G_0(r,s) u_0^{(i)}(s) ds, \tag{5.35}$$

$$\bar{y}_{2k-1}(r) = \begin{cases} p_{2k-1}r^{2k} + \frac{1}{4k}\int_0^1 sG_k(r,s)u_{2k-1}^{(i)}(s)ds, \ 1 \le k \le N, \\ \\ p_{2k-1}r^{2k}, \ \ k > N, \end{cases} \tag{5.36}$$

$$\bar{y}_{2k}(r) = \begin{cases} p_{2k}r^{2k} + p_{2k-1}r^{2k}\ln r + \frac{1}{4k}\int_0^1 sG_k(r,s)u_{2k}^{(i)}(s)ds + \\ \\ +\frac{1}{4k}\int_0^1 s\bar{G}_k(r,s)u_{2k-1}^{(i)}(s)ds, 1 \le k \le N-1, \\ \\ p_{2k}r^{2k} + p_{2k-1}r^{2k}\ln r + \\ \\ +\frac{1}{4k}\int_0^1 s\bar{G}_k(r,s)u_{2k-1}^{(i)}(s)ds, \ k = N, \\ \\ p_{2k-1}r^{2k}, \ \ k > N. \end{cases} \tag{5.37}$$

Підставляючи (5.33), (5.34) у критерій (5.4), маємо, що

$$\left|J(\tilde{u}) - J(u_N^{(i)})\right| \le 2\left|p_0\right|^2 \left(\tfrac{1}{7}\right)^i + \\ + \left(\tfrac{1}{4}\right)^i 5 \cdot \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\left(\left|p_{2k-1}\right|^2 + \left|p_{2k}\right|^2\right) + \\ +5 \cdot \textstyle\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^3}\left(\left|p_{2k-1}\right|^2 + \left|p_{2k}\right|^2\right). \tag{5.38}$$

Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 5.2. *Формула* (5.33) *реалізує наближене оптимальне керування в задачі* (5.3) – (5.4) *в тому сенсі, що* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \ \ \exists i_0 \ \ \forall N \ge N_0 \ \ \forall i \ge i_0$

$$\left|J(\tilde{u}) - J(u_N^{(i)})\right| < \varepsilon.$$

Для ілюстрації описаного методу проведено обчислення в пакеті Mathematica. У Таблиці 5.1 наведено результати обчислювального експерименту для знаходження значень критерію (5.4) для перших семи кроків ітерації за припущення, що $u_0 \equiv 0, \ \ p_0 \equiv 1$.

Крок ітерації	**Значення функціоналу на к-тому кроці ітерації**
$k = 1$	$J_1 = 0.968006$
$k = 2$	$J_2 = 0.968643$
$k = 3$	$J_3 = 0.968208$
$k = 4$	$J_4 = 0.968252$
$k = 5$	$J_5 = 0.968247$
$k = 6$	$J_6 = 0.968248$
$k = 7$	$J_7 = 0.968248$

Табл. 5.1: Результати обчислень для знаходження значень критерію (5.4)

Отже, за результатами обчислень можна стверджувати, що з кожним кроком ітерації значення функціоналу на відповідному наближеному оптимальному керуванні збігається до деякого точного значення. До того ж проведені обчислення демонструють, що швидкість такої збіжності є навіть більшою, ніж встановлено в умові (5.28).

Ще одним способом знаходження наближеного керування, придатного для практичної реалізації, може слугувати звуження множини допустимих елементів. У цьому контексті розглянемо задачу (5.3) – (5.4) з керуванням, що залежить лише від кутової змінної

$$\begin{cases} \Delta y = u(\theta),\ r \in (0,1),\ \theta \in (0,\pi), \\ y(1,\theta) = p(\theta),\ p(0) = 0, \\ y(r,0) = 0,\ r \in (0,1), \\ \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,0) = \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\pi),\ r \in (0,1), \end{cases} \tag{5.39}$$

$$J(y,u) = \int\limits_0^1 \|y(r)\|_D^2 dr + \|u\|_D^2 \to \inf. \tag{5.40}$$

Метод декомпозиції, використаний при розв'язанні більш загальної задачі (5.3) – (5.4) з використанням біортонормованих систем функцій Самарського-Іонкіна [44]

$$\Phi = \{\varphi_0(\theta) = \theta,\ \varphi_{2n}(\theta) = \sin 2n\theta,\ \varphi_{2n-1}(\theta) = \theta\cos 2n\theta,\ n \geq 1\},$$

$$\Psi = \{\psi_0(\theta) = \frac{2}{\pi^2},\ \psi_{2n}(\theta) = \frac{4}{\pi^2}(\pi - \theta)\sin 2n\theta,$$

$$\psi_{2n-1}(\theta) = \frac{4}{\pi^2}\cos 2n\theta,\ n \geq 1\} \tag{5.41}$$

приводить до наступної задачі – на розв'язках $\{y_k(r)\}_{k=0}^{\infty}$ зліченної керованої системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dr}(r\frac{dy_0}{dr}) = r \cdot u_0,\ y_0(1) = p_0, \tag{5.42}$$

$$r \cdot \frac{d}{dr}(r \cdot \frac{dy_{2k-1}}{dr}) - (2k)^2 y_{2k-1} = r^2 \cdot u_{2k-1},\ y_{2k-1}(1) = p_{2k-1}, \tag{5.43}$$

$$r\frac{d}{dr}(r \cdot \frac{dy_{2k}}{dr}) - (2k)^2 y_{2k} - 4k \cdot y_{2k-1} = r^2 \cdot u_{2k},\ y_{2k}(1) = p_{2k}, \tag{5.44}$$

мінімізувати критерій якості

$$J(y,u) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 y_n^2(r)dr + u_n^2 \right). \tag{5.45}$$

Тоді шуканий оптимальний процес $\{\tilde{u}, \tilde{y}\}$ задається рядами:

$$\tilde{u}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_n \varphi_n(\theta) \in C([0,\pi]), \tag{5.46}$$

$$\tilde{y}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_n(r) \varphi_n(\theta) \in C(\bar{Q}) \bigcap C^2(Q). \tag{5.47}$$

Для фіксованого набору $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ рівняння (5.42) – (5.44) зводяться заміною $r = e^t$, $t \in (-\infty, 0)$, до рівнянь Ейлера, що з урахуванням умов при $r = 1$ і умов $\lim\limits_{r\to 0} y_n(r) = 0$ призводить до таких формул

$$y_0(r) = p_0 - \frac{u_0}{4} + \frac{r^2}{4} u_0, \tag{5.48}$$

$$y_1(r) = p_1 r^2 + \frac{u_1}{4} r^2 \ln r. \tag{5.49}$$

При $k \geq 2$:

$$y_2(r) = p_2 r^2 + r^2 \left(\frac{u_1}{8} \ln^2 + (\frac{u_2}{4} + p_1 - u_1) \ln r \right), \tag{5.50}$$

$$y_{2k-1}(r) = \left(p_{2k-1} - \frac{u_{2k-1}}{4 - (2k)^2} \right) r^{2k} + r^2 \frac{u_{2k-1}}{4 - (2k)^2}, \tag{5.51}$$

$$y_{2k}(r) = p_{2k} r^{2k} - \frac{1}{4 - (2k)^2} \left(u_{2k} + \frac{4k \cdot u_{2k-1}}{4 - (2k)^2} \right) r^{2k} +$$

$$+\frac{1}{4-(2k)^2}\left(u_{2k}+\frac{4k\cdot u_{2k-1}}{4-(2k)^2}\right)r^2+ \tag{5.52}$$

$$+\left(p_{2k-1}-\frac{u_{2k-1}}{4-(2k)^2}\right)r^{2k}\ln r.$$

Для критерію (5.45) одержимо

$$J(y,u)=\int\limits_0^1 y_0^2(r)dr+u_0^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^1 (y_{2k-1}^2(r)+y_{2k}^2(r))dr+u_{2k-1}^2+u_{2k}^2\right)=$$

$$=J_0+\sum_{k=1}^{\infty}J_k.$$

Тоді набір $\{\tilde{y}_k(r),\tilde{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$ буде розв'язком задачі (5.63)–(5.66) тоді і лише тоді, коли $\tilde{u}_0$ є розв'язком задачі

$$J_0\to\inf, \tag{5.53}$$

а $\forall k\geq 1\ \ \{\tilde{u}_{2k-1},\tilde{u}_{2k}\}$ є розв'язком задачі

$$J_k\to\inf, \tag{5.54}$$

і при цьому $\tilde{u}(\theta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\tilde{u}_k\cdot\varphi_k(\theta)$ належить класу $AC([0,\pi])$, $\tilde{u}'\in L^2(0,\pi)$.

Дослідимо розв'язність задач (5.53) і (5.54) $\forall k\geq 1$.

Для всіх $k\geq 2$

$$J_k=(1+a_k)u_{2k}^2+(1+b_k)u_{2k-1}^2+2c_k\cdot u_{2k}\cdot u_{2k-1}+$$

$$+d_k\cdot u_{2k}+e_k\cdot u_{2k-1}+f_k,$$

де

$$a_k = \frac{1}{4k+1} \cdot \frac{1}{(4-4k^2)^2} + \frac{1}{5(4-4k^2)^2} - \frac{2}{(2k+3)\cdot(4-4k^2)^2},$$

$$b_k = \frac{1}{4k+1} \cdot \frac{1}{(4-4k^2)^2} - \frac{2}{(2k+3)\cdot(4-4k^2)^2} +$$

$$+ \frac{1}{5(4-4k^2)^2} + \frac{1}{4k+1} \cdot \left(\frac{4k}{(4-4k^2)^2}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4k}{(4-4k^2)^2}\right)^2 + \frac{2}{(4k+1)^3} \cdot \frac{1}{(4-4k^2)^2} -$$

$$- \frac{2}{2k+3} \cdot \left(\frac{4k}{(4-4k^2)^2}\right)^2 - \frac{2}{(4k+1)^2} \cdot \frac{4k}{(4-4k^2)^3} +$$

$$+ \frac{2}{(2k+3)^2} \cdot \frac{4k}{(4-4k^2)^3},$$

$$c_k = \frac{1}{4k+1} \cdot \frac{4k}{(4-4k^2)^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4k}{(4-4k^2)^3} - \frac{2}{2k+3} \cdot \frac{4k}{(4-4k^2)^3} -$$

$$- \frac{1}{(4k+1)^2} \cdot \frac{1}{(4-4k^2)^2} + \frac{1}{(2k+3)^2} \cdot \frac{1}{(4-4k^2)^2},$$

$$d_k = -\frac{1}{4k+1} \cdot \frac{2p_{2k}}{4-4k^2} + \frac{2}{2k+3} \cdot \frac{p_{2k-1}}{4-4k^2} +$$

$$+ \frac{2}{(4k+1)^2} \cdot \frac{p_{2k-1}}{4-4k^2} - \frac{2}{(2k+3)^2} \cdot \frac{p_{2k-1}}{4-4k^2},$$

$$e_k = -\frac{1}{4k+1} \cdot \frac{2p_{2k}}{4-4k^2} + \frac{2}{2k+3} \cdot \frac{p_{2k-1}}{4-4k^2} -$$

$$-\frac{1}{4k+1}\cdot\frac{8kp_{2k}}{4-4k^2}--\frac{2}{(4k+1)^3}\cdot\frac{2p_{2k}}{4-4k^2}+$$

$$+\frac{2}{2k+3}\cdot\frac{4kp_{2k-1}}{(4-4k^2)^2}+\frac{2}{(4k+1)^2}\cdot\frac{4kp_{2k-1}}{(4-4k^2)^2}+$$

$$+\frac{2}{(4k+1)^2}\cdot\frac{p_{2k}}{4-4k^2}-\frac{2}{(2k+3)^2}\cdot\frac{4kp_{2k-1}}{(4-4k^2)^2},$$

$$f_k=\frac{1}{4k+1}\cdot p_{2k-1}^2+\frac{1}{4k+1}\cdot p_{2k}^2+$$

$$+\frac{2}{(4k+1)^3}\cdot p_{2k-1}^2-\frac{2}{(4k+1)^2}\cdot p_{2k}\cdot p_{2k-1}.$$

Легко бачити, що

$$|a_k|+|b_k|+|c_k|\le C\cdot k^{-4},\ |d_k|+|e_k|\le C\cdot k^{-3}.$$

Точка мінімуму J_k визначається з лінійної системи

$$\begin{cases}(1+a_k)\cdot u_{2k}+c_k\cdot u_{2k-1}=-d_k,\\ \\ (1+b_k)\cdot u_{2k-1}+c_k\cdot u_{2k}=-e_k.\end{cases}$$

Таким чином,

$$\tilde{u}_{2k}=\frac{-(1+b_k)d_k+e_k\cdot c_k}{\Delta_k},$$

$$\tilde{u}_{2k-1}=\frac{-(1+a_k)e_k+c_k\cdot d_k}{\Delta_k},$$

де $\Delta_k=(1+a_k)(1+b_k)-c_k^2$.

Зауваження 5.2. *Оскільки* $\Delta_k \sim 1, \quad k \to \infty$, *то для всіх достатньо великих* $k \geq 1$ *маємо*

$$|\tilde{u}_{2k}| + |\tilde{u}_{2k-1}| \leq \tilde{C} \cdot k^{-3}, \tag{5.55}$$

що зокрема говорить про швидшу збіжність наближеного керування

$$\tilde{u}_N(\theta) = \sum_{k=0}^{N} \tilde{u}_k \cdot \varphi_k(\theta) \tag{5.56}$$

до точного в порівнянні з випадком розподіленого керування, коефіцієнти якого задовольняють оцінки (5.22).

5.2 Задача оптимального керування для параболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі

5.2.1 Ряди Фур'є-Бесселя

Наведемо деякі необхідні в цьому підрозділі факти теорії функцій Бесселя [257], [255].

Для $n \geq 0$ функція Бесселя n-того порядку $J_n(x)$, яка задається збіжним рядом

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \cdot (\frac{x}{2})^{2k+n},$$

є розв'язком диференціального рівняння Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{n^2}{x^2}) y = 0$$

і задовольняє інтегральній формулі

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} cos(n\varphi - x sin\varphi) d\varphi,$$

рекурентним формулам

$$2n \frac{J_n(x)}{x} = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x),$$

$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}(x^n \cdot J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x), \ \frac{d}{dx}\left(\frac{J_n(x)}{x^n}\right) = -\frac{J_{n+1}(x)}{x^n},$$

асимптотичній формулі

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(cos(x - \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}) + \frac{K \cdot \theta(x)}{x} \right),$$

де $K = K(n) > 0$ – константа, яка залежить лише від числа n, $0 \leq \theta(x) \leq 1$, та властивості ортогональності

$$\int_0^1 x \cdot J_n(\lambda_k^{(n)} x) J_n(\lambda_m^{(n)} x) dx = \begin{cases} 0, \ k \neq m, \\ \frac{1}{2}(J_n'(\lambda_m^{(n)})^2, \ k = m, \end{cases}$$

де $\{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ є додатною, зростаючою послідовністю розв'язків рівняння $J_n(\lambda) = 0$. Для таких розв'язків виконується така асимптотична формула:

$$\lambda_k^{(n)} = k \cdot \pi + q + \frac{L \cdot \theta(k)}{k}, \ k \geq 1,$$

де $q = q(n) \in \mathbf{Z}$, $L = L(n) > 0$ – константи, які залежить лише від числа n, $0 \leq \theta(k) \leq 1$.

Означення 5.1. *Ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(n)}(f) \cdot J_n(\lambda_m^{(n)} r)$$

називається рядом Фур'є-Бесселя, де коефіцієнти Фур'є-Бесселя $A_m^{(n)}(f)$ *задаються формулою*

$$A_m^{(n)}(f) = \frac{\int\limits_0^1 x \cdot f(x) J_n(\lambda_m^{(n)} x) dx}{\int\limits_0^1 x \cdot J_n^2(\lambda_m^{(n)} x) dx} =$$

$$= \frac{2}{(J_n'(\lambda_m^{(n)}))^2} \int_0^1 x \cdot f(x) J_n(\lambda_m^{(n)} x) dx.$$

Лема 5.3. *Нехай* $f \in C^2(0,1)$, $|f(0)| < \infty$, $f(1) = 0$. *Тоді функція* f *розкладається у ряд Фур'є-Бесселя, який абсолютно і рівномірно збігається на* $\forall[a,b] \subset (0,1)$. *У цьому випадку виконується нерівність Бесселя*

$$\sum_{m=1}^{\infty}(A_m^{(n)}(f))^2 \cdot \int\limits_0^1 rJ_n^2(\lambda_m^{(n)}r)dr \leq \int\limits_0^1 rf^2(r)dr.$$

Лема 5.4. *Нехай* $f \in C^1([0,1])$. *Тоді для* $p \geq 0$ *існує константа* $C > 0$, *яка залежить від функції Бесселя* J_p *така, що*

$$\forall\lambda > 0 \quad \left|\int\limits_0^1 f(x)xJ_p(\lambda x)dx\right| \leq \frac{C}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \max_{x\in[0,1]} \left(|f(x)| + |f'(x)|\right).$$

Доведення. Відомо [78], що $f(x) = v(x) - \varphi(x)$, де $v(x) = V_0^x[f]$ – повна варіація функції f на $[0,x]$, а функції v і φ є абсолютно неперервними. Тоді за теоремою про середнє значення $\exists\xi \in (0,1)$:

$$\int\limits_0^1 v(x)\sqrt{x}\sqrt{x}J_p(\lambda x)dx = v(1)\int\limits_\xi^1 \sqrt{x}J_p(\lambda x)dx =$$

$$= V_0^1[f] \cdot \int\limits_\xi^1 \sqrt{x}J_p(\lambda x)dx.$$

З асимптотичної формули для $J_p(x)$ одержимо, що існує константа $C_1 = C_1(p) > 0$, яка залежить від J_p, така що

$$\forall t > 0 \quad \left|\int\limits_0^t \sqrt{x}J_p(x)dx\right| \leq C_1.$$

Тоді з нерівності $V_0^1[f] \leq \max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$ ми отримаємо

$$\left|\int\limits_0^1 v(x)xJ_p(\lambda x)dx\right| \le \max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\left|\int\limits_\xi^1 \sqrt{x}J_p(\lambda x)dx\right| \le$$

$$\le 2\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}}\left|\int\limits_0^\lambda \sqrt{x}J_p(x)dx\right| \le \frac{2C_1}{\lambda^{\frac{3}{2}}}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|.$$

Аналогічно, для $\varphi(x) = v(x) - f(x)$ одержимо

$$\left|\int\limits_0^1 \varphi(x)\sqrt{x}\sqrt{x}J_p(\lambda x)dx\right| \le |v(1) - f(1)| \cdot \frac{2C_1}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \le$$

$$\le \frac{2C_1}{\lambda^{\frac{3}{2}}}\max_{x\in[0,1]}(|f'(x)| + |f(x)|).$$

□

Наступна лема випливає з Леми 5.4 та з інтегрування за частинами в інтегралі $\int\limits_0^1 xf(x)J_n(\lambda_m^{(n)})dx$ при використанні рекурентних формул.

Лема 5.5. *Нехай $f \in C^{p+1}([0,1])$, $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$, $k = \overline{0, p-1}$, $p \ge 1$. Тоді f розкладається у ряд Фур'є-Бесселя, який абсолютно і рівномірно збігається на $[0,1]$. У цьому випадку існує константа $C = C(n) > 0$, яка залежить від J_p, така що*

$$\forall m \ge 0\ |A_m^{(n)}(f)| \le \frac{C}{(\lambda_m^{(n)})^{p+\frac{3}{2}}} \cdot \max_{x\in[0,1]}\sum_{i=0}^{p+1}|f^{(i)}(x)|.$$

5.2.2 Існування оптимального керування

У області $Q = (0,T)\times\Omega$, $\Omega = \{(r,\theta)|r\in(0,1),\ \theta\in(0,\pi)\}$ розглянемо задачу: знайти функцію стану $y = y(t,r,\theta)$ та керування $u = u(t,\theta)$, такі що

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y + g(r)u(t,\theta),\ (t,r,\theta)\in Q, \\ y(t,1,\theta) = 0,\ t\in(0,T),\ \theta\in(0,\pi), \\ y(t,r,0) = 0,\ t\in(0,T),\ r\in(0,1), \\ \frac{\partial y}{\partial\theta}(t,r,0) = \frac{\partial y}{\partial\theta}(t,r,\pi),\ t\in(0,T),\ r\in(0,1), \\ y(0,r,\theta) = h(r)p(\theta), \end{cases} \tag{5.57}$$

$$J(y,u) = \int\limits_0^1 r\|y(T,r)\|_D^2 dr + \int\limits_0^T \|u(t)\|_D^2 dt \to \inf, \tag{5.58}$$

де g, h, p – задані функції, $\|\cdot\|_D$ – норма у просторі $L^2(0,\pi)$, визначена в (5.5) за допопомогою біортонормованих систем Самарського-Іонкіна (5.1), (5.2).

За припущення, що $g, h \in C([0,1])$, p задовольняє умови

$$p\in C^1([0,\pi]),\ p(0) = 0,\ \frac{\partial p}{\partial\theta}(0) = \frac{\partial p}{\partial\theta}(\pi), \tag{5.59}$$

будемо шукати розв'язок задачі (5.57) з фіксованим керуванням $u\in C([0,T]\times[0,\pi])$ у вигляді

$$y(t,r,\theta) = y_0(t,r)\varphi_0(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(y_{2n-1}(t,r)\varphi_{2n-1}(\theta) + y_{2n}(t,r)\varphi_{2n}(\theta)\right), \tag{5.60}$$

де функції $\{y_n(t,r)\}_{n=0}^{\infty}$ визначаються з наступних початково-крайових задач у області $\Pi=(0,T)\times(0,1)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial y_0}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial y_0}{\partial r})+u_0(t)g(r),\ (t,r)\in\Pi, \\ y_0(t,1)=0,\ t\in(0,T), \\ y_0(0,r)=p_0\cdot h(r),\ r\in(0,1), \end{cases} \tag{5.61}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y_{2n-1}}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial y_{2n-1}}{\partial r})-(\frac{2n}{r})^2 y_{2n-1}+u_{2n-1}(t)g(r),\ (t,r)\in\Pi, \\ y_{2n-1}(t,1)=0,\ t\in(0,T), \\ y_{2n-1}(0,r)=p_{2n-1}\cdot h(r),\ r\in(0,1), \end{cases} \tag{5.62}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y_{2n}}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial y_{2n}}{\partial r})-(\frac{2n}{r})^2 y_{2n}-\frac{4n}{r^2}y_{2n-1}+u_{2n}(t)g(r),\ (t,r)\in\Pi, \\ y_{2n}(t,1)=0,\ t\in(0,T), \\ y_{2n}(0,r)=p_{2n}\cdot h(r),\ r\in(0,1), \end{cases} \tag{5.63}$$

де $\forall n\geq 0\ \ u_n(t)=\int\limits_0^{\pi} u(t,\theta)\psi_n(\theta)d\theta,\ \ p_n=\int_0^{\pi} p(\theta)\cdot\psi_k(\theta)d\theta.$

Таким чином, вихідна задача оптимального керування (5.57) – (5.58) зводиться до наступної: серед допустимих пар $\{u_n(t),y_n(t,r)\}_{n=0}^{\infty}$ задачі (5.61) – (5.63) одна пара мінімізує критерій якості

$$J(y,u)=\sum_{n=0}^{\infty}(\int_0^1 r y_n^2(T,r)dr+\int_0^T u_n^2(t)dt)=J_0+\sum_{n=1}^{\infty}J_n \tag{5.64}$$

де

$$J_0=\int_0^1 r y_0^2(T,r)dr+\int_0^T u_0^2(t)dt,$$

$$J_n = \int\limits_0^1 r\left(y_{2n-1}^2(T,r) + y_{2n}^2(T,r)\right) + \int_0^1 \left(u_{2n-1}^2(t) + u_{2n}^2(t)\right) dt.$$

При цьому оптимальний процес $\{\tilde{u}_n(t), \tilde{y}_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ має бути таким, що формула

$$\tilde{u}(t,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_n(t)\varphi_n(\theta) \tag{5.65}$$

визначає функцію з $C([0,T]\times[0,\pi])$, а формула (5.60) визначає функцію з $C(\bar{Q})$, для яких

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \theta} \in C(\bar{Q}), \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial r \partial \theta}, \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \theta^2} \in C(Q).$$

Для розв'язання такої задачі робимо додаткове припущення на параметри задачі: нехай функція p є елементом підпростору, породженого $\{\varphi_i\}_{i=0}^{2N}$, тобто, нехай для будь-якого $N \geq 0$

$$p \in L_N = \mathrm{span}\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{2N}\}. \tag{5.66}$$

При реалізації припущення (5.66) для $n > N$ ми отримаємо, що $p_{2n-1} = 0$, $p_{2n} = 0$, отже, мінімальне значення функціоналу J_n дорівнює нулю і досягається при значеннях $u_{2n-1}(t) \equiv 0$, $y_{2n-1}(t,r) \equiv 0$, $u_{2n}(t) \equiv 0$, $y_{2n}(t,r) \equiv 0$.

Таким чином, при реалізації припущення (5.66) на оптимальний процес ряди (5.60), (5.64), (5.65) містять скінченну кількість ненульових членів, тому вони є збіжними. Властивості неперервності та гладкості функцій $\tilde{u}$ і $\tilde{y}$ випливають з відповідних властивостей функцій $\tilde{u}_n(t)\varphi_n(\theta)$ і $\tilde{y}_n(t,r)\varphi_n(\theta)$. Звідси, нам потрібно розв'язати задачу (5.61) – (5.64) лише для номерів $n \in \overline{0,N}$.

Дослідимо існування класичних розв'язків задачі (5.57) з фіксованим керуванням.

Для $n \geq 0$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial z}{\partial r}) - (\frac{2n}{r})^2 z, \ (t,r) \in \Pi, \\ z(t,1) = 0, \ z(0,r) = z_0(r), \end{cases} \tag{5.67}$$

де $z_0 \in C^2([0,1]), \ \ z_0(0) = z_0(1) = 0$.

Використовуючи метод Фур'є, ми отримаємо, що розв'язок задачі (5.67) визначається формулою

$$z(t,r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(2n)}(z_0) \cdot J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 t}. \tag{5.68}$$

Оскільки за Лемою 5.5

$$\exists K(n) > 0 \ \forall m \geq 1 \ |A_m^{(2n)}(z_0)| \leq \frac{K(n)}{(\lambda_m^{(2n)})^{\frac{3}{2}}}, \tag{5.69}$$

тоді з асимптотичної формули для $\lambda_m^{(2n)}$ одержимо, що за ознакою Вейєрштрасса ряд (5.68) є рівномірно збіжним на компакті $\overline{\Pi}$, so $z \in C(\overline{\Pi})$. Проте через експоненту на будь-якому компакті Π ряди $\frac{\partial z}{\partial t}, \ \ \frac{\partial z}{\partial r}, \ \ \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ збігаються рівномірно. Таким чином, формула (5.68) визначає класичний розв'язок задачі (5.67).

Тепер для $n \geq 0$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial z}{\partial r}) - (\frac{2n}{r})^2 z + \sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m^{(2n)}(t) J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r), \\ \\ z(t,1) = 0, \ z(0,r) = 0, \end{cases} \tag{5.70}$$

де $\forall m \geq 1 \ \ c_m^{(2n)} \in C([0,T])$. У правій частині рівняння ряд збігається рівномірно на будь-якому компакті з Π і виконується наступна умова

$$\exists C = C(n) > 0 \ \forall m \geq 1 \ \forall t \in [0, T] \ |c_m^{(2n)}(t)| \leq \frac{C}{\lambda_m^{(2n)}}. \tag{5.71}$$

Використовуючи метод Фур'є, ми отримаємо, що розв'язок задачі (5.70) визначається формулою

$$z(t, r) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m^{(2n)}(t) \cdot J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r), \tag{5.72}$$

де

$$d_m^{(2n)}(t) = \int\limits_0^t C_m^{(2n)}(s) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 (t-s)} ds.$$

Формальне диференціювання формули (5.72) та використання рекурсивних формул дають нам наступне:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(-(\lambda_m^{(2n)})^2 d_m^{(2n)}(t) + c_m^{(2n)}(t) \right) J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r),$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^{(2n)}}{2} \cdot d_m^{(2n)}(t) \left(J_{2n-1}(\lambda_m^{(2n)} r) - J_{2n+1}(\lambda_m^{(2n)} r) \right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda_m^{(2n)})^2}{4} \cdot d_m^{(2n)}(t) \left(J_{2n-2}(\lambda_m^{(2n)} r) - 2 J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r) + J_{2n+3}(\lambda_m^{(2n)} r) \right).$$

За умовою (5.71) виконується оцінка

$$\forall m \geq 1 \ \forall t \in [0, T] \ |d_m^{(2n)}(t)| \leq \frac{C}{(\lambda_m^{(2n)})^3}.$$

Оскільки з інтегральної формули ми отримаємо $\sup\limits_{p \geq 0, x \geq 0} |J_p(x)| \leq 1$, то з асимптотичної формули для $\lambda_m^{(2n)}$ будемо мати, що за ознакою Вейєрштраса ряд (5.72) є рівномірно збіжним на $\overline{\Pi}$, отже, $z \in C(\overline{\Pi})$. Крім того, з асимптотичної формули для $J_{2n}(x)$ одержимо:

$$\forall \delta > 0 \ \exists C_\delta > 0 \ \forall m \geq 1 \ \forall r \in [\delta, 1] \ |J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r)| \leq \frac{C_\delta}{\sqrt{\lambda_m^{(2n)}}}.$$

Це означає, що на будь-якому компакті з Π ряди $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ є рівномірно збіжними. Таким чином, при виконанні умови (5.71) формула (5.72) визначає класичний розв'язок задачі (5.70).

Для спрощення викладок введемо деякі позначення:

$$g_m^{(2n)} = A_m^{(2n)}(g), \ h_m^{(2n)} = A_m^{(2n)}(h).$$

Припустимо, що функції $g, \ h$ задовольняють умові

$$g, \ h \in C^2([0,1]), \ g(0) = h(0) = g(1) = h(1) = 0. \tag{5.73}$$

Тоді за Лемою 5.5 виконується така оцінка

$$\exists K = K(n) > 0, \ \forall m \geq 1 \ |g_m^{(2n)}| + |h_m^{(2n)}| \leq \frac{K}{(\lambda_m^{(2n)})^{\frac{3}{2}}}. \tag{5.74}$$

Умова (5.73), оцінка (5.74) і попередні міркування дозволяють нам стверджувати, що формули

$$\begin{gathered} y_0(t,r) = p_0 \sum_{m=1}^{\infty} h_m^{(0)} J_0(\lambda_m^{(0)} r) e^{-(\lambda_m^{(0)})^2 t} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} g_m^{(0)} J_0(\lambda_m^{(0)} r) \int_0^t u_0(s) e^{-(\lambda_m^{(0)})^2 (t-s)} ds, \\ y_{2n-1}(t,r) = p_{2n-1} \sum_{m=1}^{\infty} h_m^{(2n)} J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 t} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} g_m^{(2n)} J_{2n}(\lambda_m^{(0)} r) \int_0^t u_{2n-1}(s) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 (t-s)} ds \end{gathered} \tag{5.75}$$

визначають класичні розв'язки задач (5.61) і (5.62) відповідно при фіксованих $u_0, \ u_{2n-1} \in C([0,T])$.

Згідно з міркуваннями, наведеними вище, розв'язок задачі (5.63) має вигляд

$$\begin{gathered} y_{2n}(t,r) = p_{2n}\sum_{m=1}^{\infty} h_m^{(2n)} J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 t} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} g_m^{(2n)} J_{2n}(\lambda_m^{(0)} r) \int_0^t u_{2n}(s) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 (t-s)} ds + z(t,r), \end{gathered} \tag{5.76}$$

де $z(t,r)$ – розв'язок задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial z}{\partial r}) - (\frac{2n}{r})^2 z - \frac{4n}{r^2} y_{2n-1}(t,r), \\ z(t,1) = 0, \;\; z(0,r) = 0. \end{cases} \tag{5.77}$$

Покажемо, що задача (5.77) є частинним випадком задачі (5.70). Розглянемо функції

$$\alpha_k^{(2n)}(t) = -4np_{2n-1} \cdot h_k^{(2n)} e^{-(\lambda_k^{(2n)})^2 t} -$$

$$-4n \cdot g_k^{(2n)} \cdot \int_0^t u_{2n-1}(s) e^{-(\lambda_k^{(2n)})^2 (t-s)} ds,$$

$$f_k^{(2n)}(r) = \frac{1}{r^2} J_{2n}(\lambda_k^{(2n)} r).$$

Тоді права частина рівняння (5.77) має вигляд

$$f(t,r) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(2n)} f_k^{(2n)}(r).$$

Використовуючи рекурентні формули, отримаємо

$$\begin{gathered} f_k^{(2n)}(r) = (\lambda_k^{(2n)})^2 (a_n \cdot J_{2n+2}(\lambda_k^{(2n)} r) + \\ + b_n \cdot J_{2n}(\lambda_k^{(2n)} r) + c_n J_{2n-2}(\lambda_k^{(2n)} r)), \end{gathered} \tag{5.78}$$

де

$$a_n = \frac{1}{4n(4n+2)},\ b_n = \frac{2}{(4n+2)(4n-2)},\ c_n = \frac{1}{4n(4n-2)}.$$

Наведена нижче умова сильніша, ніж (5.73):

$$h \in C^4([0,1]),\ h^{(p)}(0) = h^{(p)}(1) = 0,\ p = \overline{0,2}. \tag{5.79}$$

Тоді з Леми 5.5 випливає, що $\exists C = C(n) > 0 \ \ \forall k \geq 1$:

$$|h_k^{(2n)}| \leq \frac{C}{(\lambda_k^{(2n)})^{\frac{7}{2}}}. \tag{5.80}$$

З оцінки (5.80) матимем існування константи $C = C(n) > 0$, яка залежить від n і u_{2n-1}, така що

$$\forall k \geq 1\ \forall t \in [0,T]\ |h_k^{(2n)}(t)| \leq \frac{C}{(\lambda_k^{(2n)})^{\frac{7}{2}}}. \tag{5.81}$$

Тоді з формули (5.78) та з нерівності $\sup\limits_{p\geq 0, x\geq 0} |J_p(x)| \leq 1$ одержимо, що за ознакою Вейєрштрасса ряд для $f(t,r)$ рівномірно збігається на $\overline{\Pi}$, отже, $f \in C(\overline{\Pi})$. Зокрема, $\forall t \in [0,T] \ \ f(t,\cdot) \in C([0,1]),\ \ f(t,1) = 0$. Крім того, оскільки для кожного $t \in [0,T]$ функція $y_{2n-1}(t,\cdot)$ належить до класу $C^2(0,1)$, тоді $f(t,\cdot) \in C^2(0,1)$. За Лемою 5.3 функція $f(t,\cdot)$ розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний ряд Фур'є-Бесселя на будь-якому компакті з $(0,1)$. Знайдемо такий розклад та покажемо, що він задовольняє умовам задачі (5.70).

Згідно з (5.78) для фіксованого $k \geq 1$ функція $f_k^{(2n)}(r)$ розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний ряд Фур'є-Бесселя

$$f_k^{(2n)}(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(2n)}(f_k^{(2n)}) \cdot J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r).$$

Тоді для $f(t,r)$ будемо мати формальний розклад

$$f(t,r)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(2n)}(t)\cdot A_m^{(2n)}(f_k^{(2n)})\right)\cdot J_{2n}(\lambda_m^{(2n)}r). \tag{5.82}$$

Перестановка індексів m і k для цього ряду матиме місце, якщо ми доведемо абсолютну збіжність ряду (5.82). Спершу розглянемо випадок $n>1$. Тоді $f_k^{(2n)}(0)=f_k^{(2n)}(1)=0$ і, використовуючи рекурентні формули, отримаємо з (5.78):

$$\begin{aligned}
(f_k^{(2n)}(r))' &= (\lambda_k^{(2n)})^3\cdot\sum_{i=-3}^{3}\gamma_i J_{2n+i}(\lambda_k^{(2n)}r),\\
(f_k^{(2n)}(r))'' &= (\lambda_k^{(2n)})^4\cdot\sum_{i=-4}^{4}\tilde{\gamma}_i J_{2n+i}(\lambda_k^{(2n)}r),\\
\frac{f_k^{(2n)}(r)}{r} &= (\lambda_k^{(2n)})^3\cdot\sum_{i=-3}^{3}\beta_i J_{2n+i}(\lambda_k^{(2n)}r),\\
\left(\frac{f_k^{(2n)}(r)}{r}\right)' &= (\lambda_k^{(2n)})^4\cdot\sum_{i=-4}^{4}\tilde{\beta}_i J_{2n+i}(\lambda_k^{(2n)}r),
\end{aligned} \tag{5.83}$$

де константи $\{\gamma_i\}$, $\{\tilde{\gamma}_i\}$, $\{\beta_i\}$, $\{\tilde{\beta}_i\}$ залежать лише від числа n.

Звідси, інтегруючи за частинами, одержимо

$$\begin{aligned}
\int_0^1 rf_k^{(2n)}(r)J_{2n}(\lambda_m^{(2n)}r)dr &= -\frac{1}{\lambda_m^{(2n)}}\int_0^1 r(f_k^{(2n)}(r))'J_{2n+1}(\lambda_m^{(2n)}r)dr+\\
&+\frac{2n}{\lambda_m^{(2n)}}\int_0^1 r\cdot\frac{f_k^{(2n)}(r)}{r}\cdot J_{2n+1}(\lambda_m^{(2n)}r)dr.
\end{aligned} \tag{5.84}$$

Застосувавши Лему 5.4 і формули (5.83) до рівності (5.84), будемо мати, що існує константа $C=C(n)>0$, така що $\forall m\geq 1$ $\forall k\geq 1$

$$\left|\int_0^1 rf_k^{(2n)}(r)J_{2n}(\lambda_m^{(2n)}r)dr\right|\leq\frac{C\cdot(\lambda_k^{(2n)})^4}{(\lambda_m^{(2n)})^{\frac{5}{2}}}. \tag{5.85}$$

Використавши асимптотичну формулу [247, 257]

$$\frac{2}{J'_{2n}} = \lambda_m^{(2n)} \cdot \pi + K(n) \cdot \theta(n, \lambda_m^{(2n)}),$$

де $K = K(n) > 0$ залежить від n і $0 \leq \theta(n, \lambda_m^{(2n)}) \leq 1$, отримаємо, що існує така константа $C = C(n) > 0$, що

$$\forall m \geq 1 \ \forall k \geq 1 \ |A_m^{(2n)}(f_k^{(2n)})| \leq \frac{C \cdot (\lambda_k^{(2n)})^4}{(\lambda_m^{(2n)})^{\frac{3}{2}}}, \tag{5.86}$$

і вона залежить лише від J_{2n}.

Тепер підсилимо умови (5.73), (5.79) до наступних:

$$\begin{gathered} g \in C^4([0,1]), \ h \in C^6([0,1]), \\ g^{(p)}(0) = g^{(p)}(1) = 0, \ p = \overline{0,2}, \\ h^{(p)}(0) = h^{(p)}(1) = 0, \ h = \overline{0,4}. \end{gathered} \tag{5.87}$$

Тоді з Леми 5.5 отримаємо, що існує константа $C = C(n) > 0$, яка залежить від n і u_{2n-1}, така що

$$\forall k \geq 1 \ \forall t \in [0,T] \ |\alpha_k^{(2n)}(t)| \leq \frac{C}{(\lambda_m^{(2n)})^{5+\frac{1}{2}}}. \tag{5.88}$$

Таким чином, якщо ми позначимо

$$c_m^{(2n)}(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(2n)}(t) \cdot A_m^{(2n)}(f_k^{(2n)}), \tag{5.89}$$

то з (5.86) і (5.88) одержимо, що за ознакою Вейєрштрасса ряд (5.89) є абсолютно і рівномірно збіжним на $[0,T]$. Зокрема, $c_m^{(2n)} \in C([0,T])$, а

$$\forall m \geq 1 \ \forall t \in [0,T] \ |c_m^{(2n)}(t)| \leq \frac{C}{(\lambda_m^{(2n)})^{\frac{3}{2}}}.$$

Звідси, з (5.72) випливає, що розв'язок задачі (5.77) має вигляд

$$z(t,r)=\sum_{m=1}^{\infty} J_{2n}(\lambda_m^{(2n)}r)\cdot\int\limits_0^t c_m^{(2n)}(s)e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2(t-s)}ds, \tag{5.90}$$

де $c_m^{(2n)}$ визначається з рівності (5.89).

Доведемо рівність (5.90) для випадку $n=1$. Тут

$$f_k^{(2)}(r)=\tfrac{1}{r^2}J_2(\lambda_k^{(2)}r)=(\lambda_k^{(2)})^2\cdot(a_2\cdot J_4(\lambda_k^{(2)}r)+$$

$$+b_2\cdot J_2(\lambda_k^{(2)}r)+c_2J_0(\lambda_k^{(2)}r)), \tag{5.91}$$

$$f_k^{(2)}(1)=0,\ \ f_k^{(2)}(0)=c_2(\lambda_k^{(2)})^2.$$

Інтегруючи за частинами, будемо мати

$$\int\limits_0^1 rf_k^{(2)}(r)J_2(\lambda_m^{(2)}r)dr=\tfrac{2f_k^{(2)}(0)}{\lambda_m^{(2)}}\int\limits_0^1 J_3(\lambda_m^{(2)}r)dr-$$

$$-\tfrac{1}{\lambda_m^{(2)}}\int\limits_0^1 r(f_k^{(2)}(r))'J_3(\lambda_m^{(2)}r)dr+ \tag{5.92}$$

$$+\tfrac{2}{\lambda_m^{(2)}}\int\limits_0^1 r\cdot\tfrac{f_k^{(2)}(r)-f_k^{(2)}(0)}{r}\cdot rJ_3(\lambda_m^{(2)}r)dr.$$

Підставляючи (5.91) для $f_k^{(2)}(r)$ у (5.92), ми можемо оцінити доданки з функціями J_2 і J_4 аналогічно до (5.85). Оцінимо доданки з функцією J_0. Використовуючи асимптотичну формулу

$$\int\limits_0^1 J_3(\lambda_m^{(2)}r)dr=\frac{1}{\lambda_m^{(2)}}+\frac{K\cdot\theta(\lambda_m^{(2)})}{(\lambda_m^{(2)})^{\frac{3}{2}}},$$

де константа $K>0$, $\ 0\le\theta(\lambda_m^{(2)})\le 1$, будемо мати

$$\left|\frac{2J_0(0)c_2\cdot(\lambda_k^{(2)})^2}{(\lambda_k^{(2)})^2}\int\limits_0^1 J_3(\lambda_m^{(2)}r)dr\right| \le \frac{2c_2\cdot K(\lambda_k^{(2)})^2}{(\lambda_m^{(2)})^2}. \tag{5.93}$$

Оцінюючи інший доданок, отримаємо, що існує константа $C>0$, така що $\forall m\ge 1,\ \ \forall k\ge 1$

$$\begin{gathered}\left|\tfrac{1}{\lambda_m^{(2)}}\int\limits_0^1 r\cdot c_2(\lambda_k^{(2)})^2\cdot\lambda_k^{(2)}J_1(\lambda_k^{(2)}r)J_3(\lambda_m^{(2)}r)dr\right| = \\ = \tfrac{c_2\cdot(\lambda_k^{(2)})^3}{\lambda_m^{(2)}}\left|\int\limits_0^1 r\cdot J_1(\lambda_k^{(2)}r)J_3(\lambda_m^{(2)}r)dr\right| \le \tfrac{C\cdot(\lambda_k^{(2)})^4}{(\lambda_m^{(2)})^{\frac{5}{2}}}.\end{gathered} \tag{5.94}$$

Остаточно, оскільки

$$J_0(\lambda x)-1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{\lambda x}{2}\right)^{2k},$$

де у правій частині стоїть збіжний на R степеневий ряд із парних додатних ступенів змінної x, тоді функція

$$f(x)=\frac{J_0(\lambda x)-1}{x}\in C^1([0,1]),$$

і, скориставшись теоремою про середнє значення, будемо мати, що $\exists\theta\in(0,1)$:

$$f'(x)=\frac{-\lambda xJ_1(\lambda x)-(J_0(\lambda x)-1)}{x^2}=$$

$$=-\frac{\lambda^2}{2}(J_0(\lambda x)+J_2(\lambda x))+$$

$$+\frac{\theta\lambda^3}{2}(J_0(\theta\lambda x)+J_2(\theta\lambda x)).$$

Таким чином, з Леми 5.5 випливає, що

$$\left| \frac{2}{\lambda_m^{(2)}} \int\limits_0^1 \frac{J_0(\lambda_k^{(2)} r) - 1}{r} \cdot r J_3(\lambda_m^{(2)} r) dr \right| \leq \frac{C \cdot (\lambda_k^{(2)})^3}{(\lambda_m^{(2)})^{\frac{5}{2}}} \tag{5.95}$$

з деякою константою $C > 0$.

Отже, існує константа $C > 0$, яка залежить лише від J_2, така що

$$\forall m \geq 1 \ \forall k \geq 1 \ |A_m^{(2)}(f_k^{(2)})| \leq \frac{C (\lambda_k^{(2)})^4}{\lambda_m^{(2)}}. \tag{5.96}$$

З (5.96) отримаємо, що для $n = 1$

$$\forall m \geq 1 \ \forall t \in [0, T] \ |c_m^{(2)}(t)| \leq \frac{C}{\lambda_m^{(2)}}.$$

Звідси, для $n = 1$ розв'язок задачі (5.77) має вигляд (5.90).

Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 5.3. *Нехай p – початкова умова і $u(t, \theta)$ – неперервна на $[0, T] \times [0, \pi]$ функція керування для задачі (5.57). Припустимо, що p і $u(t, \theta)$ задовольняють умові (5.66) для кожного $t \in [0, T]$. Крім того, припустимо, що функції g і h задовольняють умову (5.87).*

Тоді класичний розв'язок задачі (5.57) має вигляд

$$y(t, r, \theta) = y_0(t, r)\varphi_0(\theta) + \sum_{n=1}^{N} (y_{2n-1}(t, r)\varphi_{2n-1}(\theta) + y_{2n}(t, r)\varphi_{2n}(\theta)),$$

де

$$\begin{gathered} y_0(t, r) = p_0 \sum_{m=1}^{\infty} h_m^{(0)} J_0(\lambda_m^{(0)} r) e^{-(\lambda_m^{(0)})^2 t} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} g_m^{(0)} J_0(\lambda_m^{(0)} r) \int\limits_0^t u_0(s) e^{-(\lambda_m^{(0)})^2 (t-s)} ds, \end{gathered} \tag{5.97}$$

$$
\begin{aligned}
y_{2n-1}(t,r) = p_{2n-1}\sum_{m=1}^{\infty} h_m^{(2n)} J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 t} + \\
+\sum_{m=1}^{\infty} g_m^{(2n)} J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r)\int_0^t u_{2n-1}(s) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 (t-s)} ds,
\end{aligned}
\tag{5.98}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{2n}(t,r) = p_{2n}\sum_{m=1}^{\infty} h_m^{(2n)} J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 t} + \\
+\sum_{m=1}^{\infty} g_m^{(2n)} J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r)\int_0^t u_{2n}(s) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 (t-s)} ds - \\
-4np_{2n-1}\cdot\sum_{m=1}^{\infty} J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r)\sum_{k=1}^{\infty} h_k^{(2n)} A_m^{(2n)}(f_k^{(2n)})\times \\
\times\int_0^t e^{-(\lambda_k^{(2n)})^2 s}\cdot e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 (t-s)} ds - \\
-4n\sum_{m=1}^{\infty} J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r)\sum_{k=1}^{\infty} g_k^{(2n)} A_m^{(2n)}(f_k^{(2n)})\times \\
\times\int_0^t\int_0^s u_{2n-1}(\tau) e^{-(\lambda_k^{(2n)})^2 (s-\tau)}\cdot e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 (t-s)} d\tau ds.
\end{aligned}
\tag{5.99}
$$

Тепер переходимо до доведення основного результату цього підрозділу – існування розв'язку задачі оптимального керування (5.57) – (5.58).

Для $n\ge 1$ розглянемо задачу оптимального керування (5.61) – (5.63) з критерієм якості J_n щодо невідомої векторної функції $\begin{pmatrix} u_{2n-1} \\ u_{2n} \end{pmatrix}$.

Розглянемо наступні функції

$$
\varphi_n(t,r) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m^{(2n)} J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 t},
$$

$$
\psi_n(t,s,r) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m^{(2n)} J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 (t-s)},
$$

$$
\gamma_n(t,r) = -4np_{2n-1}\cdot\sum_{m=1}^{\infty} J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r)\sum_{k=1}^{\infty} h_k^{(2n)} A_m^{(2n)}(f_k^{(2n)})\times
$$

$$\times \int\limits_0^t e^{-(\lambda_k^{(2n)})^2 s-(\lambda_m^{(2n)})^2(t-s)}ds,$$

$$z_n(t,s,r) = -4n\sum_{m=1}^{\infty} J_{2n}(\lambda_m^{(2n)}r)\sum_{k=1}^{\infty} g_k^{(2n)}A_m^{(2n)}(f_k^{(2n)})\times$$

$$\times \int\limits_s^t e^{-(\lambda_k^{(2n)})^2(\tau-s)-(\lambda_m^{(2n)})^2(t-\tau)}d\tau$$

які є неперервними за сукупністю значень.

Тоді, змінюючи порядок інтегрування в останньому доданку рівняння (5.99), ми отримаємо

$$y_{2n-1}(t,r) = p_{2n-1}\cdot\varphi_n(t,r) + \int\limits_0^t \psi_n(t,s,r)u_{2n-1}(s)ds,$$

$$y_{2n}(t,r) = p_{2n}\cdot\varphi_n(t,r) + \int\limits_0^t \psi_n(t,s,r)u_{2n}(s)ds+$$

$$+\gamma_n(t,r) + \int\limits_0^t z_n(t,s,r)u_{2n-1}(s)ds.$$

Таким чином, прирівнявши похідну Фреше функціоналу J_n до нуля, одержимо, що оптимальне керування $\begin{pmatrix} \tilde{u}_{2n-1} \\ \tilde{u}_{2n} \end{pmatrix}$ визначається як розв'язок матричного інтегрального рівняння Фредгольма

$$\begin{pmatrix} u_{2n-1}(t) \\ u_{2n}(t) \end{pmatrix} = -\int\limits_0^T K_n(t,s)\begin{pmatrix} u_{2n-1}(s) \\ u_{2n}(s) \end{pmatrix}ds - b_n(t), \tag{5.100}$$

де

$$b_n(t) = \begin{pmatrix} p_{2n-1}\cdot\int\limits_0^1 r\varphi_n(T,r)\psi_n(T,t,r)dr \\ \int\limits_0^1 r(p_{2n}\cdot\varphi_n(T,r)+\gamma_n(T,r))z_n(T,t,r)dr \end{pmatrix},$$

$$K_n(t,s)=\begin{pmatrix} \int\limits_0^1 r\Big(\psi_n(T,t,r)\psi_n(T,s,r)+z_n(T,t,r)z_n(T,s,r)\Big)dr & \int\limits_0^1 rz_n(T,t,r)\psi_n(T,s,r)dr \\ \int\limits_0^1 r\psi_n(T,t,r)z_n(T,s,r)dr & \int\limits_0^1 r\psi_n(T,t,r)\psi_n(T,s,r)dr \end{pmatrix}.$$

Отже, згідно [211], задача оптимального керування (5.61) – (5.64) зводиться до системи інтегральних рівнянь Фредгольма. Завдяки умовам малості на початкові умови задачі така система має єдиний розв'язок. Отже, ми довели основний результат цього підрозділу.

Теорема 5.4. *Нехай функція p задовольняє умову (5.66) у задачі (5.57) – (5.58), і*

$$g,h\in C^6([0,1]),$$

$$g^{(p)}(0)=h^{(p)}(0)=g^{(p)}(1)=h^{(p)}(1)=0,\ p=\overline{0,4},$$

та виконується така нерівність: $\forall n=\overline{0,N}$

$$\begin{gathered} 2\int\limits_0^1 rg^2(r)dr+16n^2T^2\cdot C\max_{x\in[0,1]}(\sum_{i=0}^6|g^{(i)}(x)|^2)+ \\ +8nT\sqrt{\int\limits_0^1 rg^2(r)dr}\cdot\sqrt{C\cdot\max_{x\in[0,1]}(\sum_{i=0}^6|g^{(i)}(x)|^2)}<\tfrac{1}{T}, \end{gathered} \tag{5.101}$$

де константа $C=C(n)$ *залежить лише від* J_{2n}.

Тоді задача оптимального керування (5.57) – (5.58) має єдиний розв'язок $\widetilde{u}(t,\theta)$, *і*

$$\widetilde{u}(t,\theta)=\sum_{n=0}^N\widetilde{u}_n(t)\varphi_n,$$

де функції $\{\widetilde{u}_n\}_{n=0}^N$ *визначаються з рівняння (5.100).*

5.3 Задача з мінімальною енергією

В області $Q = (0,T)\times\Omega$, де $\Omega = \{(r,\theta)|r \in (0,1),\ \theta \in (0,\pi)\}$, розглядається наступна задача оптимального керування: потрібно знайти таку функцію стану $y = y(t,r,\theta)$ та керування $u = u(r,\theta)$, що

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y + q(t)u(r,\theta),\ (t,r,\theta) \in Q, \\ y(t,1,\theta) = 0,\ t \in (0,T),\ \theta \in (0,\pi), \\ y(t,r,0) = 0,\ t \in (0,T),\ r \in (0,1), \\ \frac{\partial y}{\partial \theta}(t,r,0) = \frac{\partial y}{\partial \theta}(t,r,\pi),\ t \in (0,T),\ r \in (0,1), \end{cases} \tag{5.102}$$

$$y(0,r,\theta) = h(r,\theta), \tag{5.103}$$

$$y(T,r,\theta) = z(r,\theta), \tag{5.104}$$

$$J(u) = \int\limits_0^1 r\|u^2(r)\|_D^2 dr \to \inf, \tag{5.105}$$

де $q \in C([0,T])$, $h, z \in C(\overline{\Omega})$ – задані функції, $\|\cdot\|_D$ – норма у просторі $L^2(0,\pi)$, що визначена в (5.5) за допопомогою біортонормованих систем Самарського-Іонкіна (5.1), (5.2).

Як і в попередньому підрозділі, використання рядів Фур'є-Бесселя дозволяє частково розщепити задачу оптимального керування (5.102) – (5.105). В данному підрозділі для досить широкого класу вихідних даних буде отримано розв'язок згаданої вище нескінченновимірної проблеми моментів і, отже, буде обгрунтовано класичну розв'язність задачі (5.102) – (5.105).

Зафіксуємо керування

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r)\varphi_n(\theta) \tag{5.106}$$

і для нього шукатимемо розв'язок вихідної задачі у вигляді

$$\begin{gathered}y(t,r,\theta)=y_0(t,r)\varphi_0(\theta)+\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\left(y_{2n-1}(t,r)\varphi_{2n-1}(\theta)+y_{2n}(t,r)\varphi_{2n}(\theta)\right),\end{gathered} \tag{5.107}$$

де функції $\{y_n(t,r)\}_{n=0}^{\infty}$ визначаються з таких початково-крайових задач у області $\Pi=(0,T)\times(0,1)$:

$$\begin{cases}\frac{\partial y_0}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial y_0}{\partial r})+q(t)u_0(r),\ (t,r)\in\Pi,\\ y_0(t,1)=0,\ t\in(0,T),\\ y_0(0,r)=h_0(r),\ r\in(0,1),\end{cases} \tag{5.108}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial y_{2n-1}}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial y_{2n-1}}{\partial r})-(\frac{2n}{r})^2y_{2n-1}+q(t)u_{2n-1}(r),\ (t,r)\in\Pi,\\ y_{2n-1}(t,1)=0,\ t\in(0,T),\\ y_{2n-1}(0,r)=h_{2n-1}(r),\ r\in(0,1),\end{cases} \tag{5.109}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial y_{2n}}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial y_{2n}}{\partial r})-(\frac{2n}{r})^2y_{2n}-\frac{4n}{r^2}y_{2n-1}+q(t)u_{2n}(r),\ (t,r)\in\Pi,\\ y_{2n}(t,1)=0,\ t\in(0,T),\\ y_{2n}(0,r)=h_{2n}(r),\ r\in(0,1),\end{cases} \tag{5.110}$$

де $\forall n\geq 0\ \ h_n=\int_0^{\pi}h(r,\theta)\cdot\psi_n(\theta)d\theta$.

Отже, вихідна задача оптимального керування (5.102) – (5.105) з мінімальною енергією зводиться до наступної: серед допустимих пар $\{u_n(r),$

$y_n(t,r)\}_{n=0}^{\infty}$ задачі (5.108) – (5.110) потрібно знайти такі пари, на яких досягає мінімуму функціонал якості

$$J = \int\limits_0^1 r u_0^2(r)dr + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 r(u_{2n-1}^2(r) + u_{2n}^2(r))dr \tag{5.111}$$

і виконуються умови

$$y_0(T,r) = z_0(r) = \frac{2}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi} z(r,\theta)d\theta, \tag{5.112}$$

$$\forall n \geq 1 \ y_{2n-1}(T,r) = z_{2n-1}(r) = \frac{4}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi} z(r,\theta)\cos 2n\theta d\theta, \tag{5.113}$$

$$\forall n \geq 1 \ y_{2n}(T,r) = z_{2n}(r) = \frac{4}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi} z(r,\theta)(\pi-\theta)\sin 2n\theta d\theta. \tag{5.114}$$

При цьому оптимальний процес $\{\tilde{u}_n, \tilde{y}_n\}_{n=0}^{\infty}$ повинен бути таким, що формула (5.106) визначає функцію $\tilde{u} \in C(\overline{\Omega})$ і формула (5.107) визначає функцію $\tilde{y} \in C(\bar{Q})$, для яких

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \theta} \in C(\bar{Q}), \ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial r \partial \theta}, \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \theta^2} \in C(Q). \tag{5.115}$$

Для розв'язання цієї задачі потрібно зробити додаткові припущення на початкові дані: нехай для деякого $N \geq 0$

$$\forall r \in [0,1] \ h(r,\cdot), z(r,\cdot) \in L_N := \mathrm{span}\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{2N}\}, \tag{5.116}$$

тобто

$$h(r,\theta) = \sum_{n=0}^{2N} h_n(r)\varphi_n(\theta), \ z(r,\theta) = \sum_{n=0}^{2N} z_n(r)\varphi_n(\theta).$$

З умови (5.116) випливає, що $n > N \;\; h_{2n-1} = h_{2n} = 0, \;\; z_{2n-1} = z_{2n} = 0$. Отже, мінімум функціоналу якості

$$J_n := \int_0^1 r(u_{2n-1}^2(r) + u_{2n}^2(r))dr$$

дорівнює нулю і досягається на допустимих у задачах (5.109), (5.110) з умовами (5.113) і (5.114) парах $\{u_{2n-1} = 0, \; y_{2n-1} = 0\}, \;\; \{u_{2n} = 0, \; y_{2n} = 0\}$.

Таким чином, за умови (5.116), на оптимальному процесі ряди (5.106), (5.107) містять лише скінченну кількість ненульових членів. Це забезпечує виконання умови (5.115) як тільки буде знайдено розв'язок задачі (5.108) – (5.114) для $n = \overline{1, N}$.

Основним результатом підрозділу є наступна теорема.

Теорема 5.5. *Нехай для задачі (5.102) – (5.105) виконуються умови (5.116), а також*

$$q \in C([0,1]), \quad \exists q_0 > 0 \;\; \forall t \in [0,T] \;\; q(t) \geq q_0, \tag{5.117}$$

$$h_0 \in C^2([0,1]), \quad h_0(0) = h_0(1) = 0, \; k = \overline{0,2}, \tag{5.118}$$

$$z_0 \in C^4([0,1]), \quad z_0^{(k)}(0) = z_0^{(k)}(1) = 0, \; k = \overline{0,2}, \tag{5.119}$$

$$\forall n = \overline{1,N} \;\; h_{2n} \in C^2([0,1]), \quad h_{2n}(0) = h_{2n}(1) = 0, \; k = \overline{0,2}, \tag{5.120}$$

$$\forall n = \overline{1,N} \;\; z_{2n} \in C^4([0,1]), \; z_{2n}^{(k)}(0) = z_{2n}^{(k)}(1) = 0, \; k = \overline{0,2}, \tag{5.121}$$

$$h_{2n-1} \in C^6([0,1]), \quad h_{2n-1}^{(k)}(0) = h_{2n-1}^{(k)}(1) = 0, \; k = \overline{0,4}, \tag{5.122}$$

$$z_{2n-1} \in C^6([0,1]), \quad z_{2n-1}^{(k)}(0) = z_{2n-1}^{(k)}(1) = 0, \; k = \overline{0,4}. \tag{5.123}$$

Тоді задача оптимального керування (5.102) – (5.105) має єдиний класичний розв'язок

$$\overline{u}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{2N} \overline{u}_n(r)\varphi_n(\theta), \; \overline{y}(t,r,\theta) = \sum_{n=0}^{2N} \overline{y}_n(t,r)\varphi_n(\theta),$$

де $\{\overline{u}_n, \overline{y}_n\}_{n=0}^{2N}$ *є розв'язком задач (5.108) – (5.110) з умовами (5.112) – (5.114).*

Доведення. Як і в попередньому підрозділі, для розв'язання задачі (5.108) – (5.110) будемо використовувати ряд Фур'є-Бесселя

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(n)}(f) J_n(\lambda_m^{(n)} r), \tag{5.124}$$

де

$$A_m^{(n)}(f) = \frac{\int\limits_0^1 r f(r) J_n(\lambda_m^{(n)} r) dr}{\int\limits_0^1 r J_n^2(\lambda_m^{(n)} r) dr},$$

J_n є функцією Бесселя порядку n, $n \geq 0$, $\{\lambda_m^{(n)}\}_{m=1}^{\infty}$ – додатна монотонно зростаюча послідовність розв'язків рівняння $J_n(\lambda) = 0$.

При цьому з теореми 5.5 виплива, що якщо функція $f \in C^{p+1}([0,1])$, $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$, $k = \overline{0, p-1}$, то ряд (5.124) абсолютно й рівномірно збігається на $[0,1]$, і виконуються наступні оцінки

$$\exists C = C(n) \; \forall m \geq 1 \; |A_m^{(n)}(f)| \leq \frac{C}{(\lambda_m^{(n)})^{p+\frac{1}{2}}} \cdot \max_{x \in [0,1]} \sum_{i=0}^{p+1} |f^{(i)}(x)|. \tag{5.125}$$

Тут і надалі будемо позначати літерою C константи, які залежать лише від $n \in \overline{0, N}$.

Для $n \geq 0$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial y}{\partial r}) - (\frac{2n}{r})^2 y + \sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m(t) J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r), \; (t,r) \in \Pi, \\ \\ y(t,1) = 0, \; y(0,r) = 0, \; t \in (0,T), \; r \in (0,1), \end{cases} \tag{5.126}$$

де $\{C_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C([0,T])$ є заданими функціями, що задовольняють оцінці

$$\forall m \geq 1 \quad \max_{t\in[0,T]} |C_m(t)| \leq \frac{C}{\lambda_m^{(2n)}}. \tag{5.127}$$

Зважаючи на оцінки [257]

$$\forall n \geq 0 \;\; \forall r \geq 0 \;\; |J_n(r)| \leq 1, \tag{5.128}$$

$$\forall n \geq 0 \;\; \forall r \geq 0 \;\; |J_n(r)| \leq \frac{C}{\sqrt{r}} \tag{5.129}$$

та такі рекурентні формули

$$J_0'(r) = -J_1(r), \;\; 2J_n'(r) = J_{n-1}(r) - J_{n+1}(r), \; n \geq 1, \tag{5.130}$$

з умов (5.127) за ознакою Вейерштрасса ми одержимо, що формула

$$y(t,r) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_0^t C_m(s) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 (t-s)} ds \right) J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r) \tag{5.131}$$

визначає класичний розв'язок задачі (5.126).

Тоді, використовуючи умови

$$h_0 \in C^2([0,1]), \; h_0(0) = h_0(1) = 0, \tag{5.132}$$

$$\forall n \geq 1 \; h_{2n-1} \in C^2([0,1]), \; h_{2n-1}(0) = h_{2n-1}(1) = 0, \tag{5.133}$$

з оцінки (5.125) при фіксованих керуваннях

$$u_0(r) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(0)} J_0(\lambda_m^{(0)} r),$$

$$u_{2n-1}(r) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(2n-1)} \cdot J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r), n \geq 1,$$

де

$$|u_m^{(0)}| \le \frac{C}{\lambda_m^{(0)}},\ |u_m^{(2n-1)}| \le \frac{C}{\lambda_m^{(2n)}},\ m \ge 1, \tag{5.134}$$

класичні розв'язки задач (5.108) і (5.109) матимуть наступний вигляд

$$\begin{gathered} y_0(t,r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(0)}(h_0) J_0(\lambda_m^{(0)} r) e^{-(\lambda_m^{(0)})^2 t} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(0)} \int_0^t q(s) e^{-(\lambda_m^{(0)})^2 (t-s)} ds \cdot J_0(\lambda_m^{(0)} r), \end{gathered} \tag{5.135}$$

$$\begin{gathered} y_{2n-1}(t,r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(2n)}(h_{2n-1}) J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 t} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(2n-1)} \int_0^t q(s) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 (t-s)} ds \cdot J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r). \end{gathered} \tag{5.136}$$

Тоді з рівностей (5.112), (5.113) ми отримаємо такі відношення

$$\begin{gathered} u_m^{(0)} \cdot \int_0^T q(t) e^{-(\lambda_m^{(0)})^2 (T-t)} dt = \alpha_m^{(0)} := \\ := A_m^{(0)}(z_0) - A_m^{(0)}(h_0) e^{-(\lambda_m^{(0)})^2 T}, \end{gathered} \tag{5.137}$$

$$\begin{gathered} u_m^{(2n-1)} \cdot \int_0^T q(t) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 (T-t)} dt = \alpha_m^{(2n-1)} := \\ := A_m^{(2n)}(z_{2n-1}) - A_m^{(2n)}(h_{2n-1}) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 T}. \end{gathered} \tag{5.138}$$

З цих відношень значення керувань $u_m^{(0)}$, $u_m^{(2n-1)}$ визначаються однозначно.

Припустимо, що виконуються наступні умови

$$\exists q_0 > 0 \ \ \forall t \in [0,T] \ \ q(t) \ge q_0, \tag{5.139}$$

$$z_0 \in C^4([0,1]),\ z_0^{(k)}(0) = z_0^{(k)}(1) = 0,\ k = \overline{0,2}, \tag{5.140}$$

$$z_{2n-1} \in C^4([0,1]) \; z_{2n-1}^{(k)}(0) = z_{2n-1}^{(k)}(1) = 0, \;\; k = \overline{0,2}. \tag{5.141}$$

Тоді з (5.125), (5.137), (5.138) будемо мати, що для керувань

$$u_m^{(0)} = \alpha_m^{(0)} \left(\int\limits_0^T q(t) e^{-(\lambda_m^{(0)})^2 (T-t)} dt \right)^{-1}, \tag{5.142}$$

$$u_m^{(2n-1)} = \alpha_m^{(2n-1)} \left(\int\limits_0^T q(t) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 (T-t)} dt \right)^{-1} \tag{5.143}$$

виконуються такі оцінки

$$\forall m \geq 1 \;\; |u_m^{(0)}| \leq \frac{C}{(\lambda_m^{(0)})^{\frac{3}{2}}}, \;\; |u_m^{(2n-1)}| \leq \frac{C}{(\lambda_m^{(2n)})^{\frac{3}{2}}}, \tag{5.144}$$

і, зокрема, з (5.144) випливає оцінка (5.134).

Таким чином, якщо функція h задовольняє умовам (5.116), (5.132), (5.133), функція z задовольняє умовам (5.116), (5.140), (5.141), а функція q задовольняє умові (5.139), то формули

$$u_0(r) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(0)} J_0(\lambda_m^{(0)} r), \;\; u_{2n-1}(r) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(2n-1)} J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r), \tag{5.145}$$

визначають єдині допустимі керування у задачах (5.108), (5.112) і (5.109), (5.113), крім того, для них виконується оцінка (5.144).

Щоб розв'язати задачу (5.110), введемо певний набір функцій

$$f_k^{(2n)}(r) := \frac{1}{r^2} J_{2n}(\lambda_k^{(2n)} r), \quad k \geq 1, \quad n \geq 0. \tag{5.146}$$

Використовуючи рекурентну формулу [257]

$$2n \frac{J_n(r)}{r} = J_{n-1}(r) + J_{n+1}(r),$$

ми можемо записати кожну функцію з (5.146) у вигляді

$$
\begin{gathered}
f_k^{(2n)}(r) = (\lambda_k^{(2n)})^2 \Big(a_n J_{2n+2}(\lambda_k^{(2n)} r) + \\
b_n J_{2n}(\lambda_k^{(2n)} r) + c_n J_{2n-2}(\lambda_k^{(2n)} r) \Big),
\end{gathered} \tag{5.147}
$$

де додатні константи $a_n,\ b_n, c_n$ залежать лише від n.

При $n > 1$ функції $f_k^{(2n)} \in C^2([0,1])$, $f_k^{(2n)}(0) = f_k^{(2n)}(1) = 0$. Отже, з (5.125) і (5.147) отримаємо

$$
\forall m \geq 1 \ \ \forall k \geq 1 \ \ |A_m^{(2n)}(f_k^{(2n)})| \leq \frac{C(\lambda_k^{(2n)})^4}{(\lambda_m^{(2n)})^{\frac{3}{2}}}. \tag{5.148}
$$

При $n = 1$ $f_k^{(2)}(1) = 0$, $f_k^{(2)}(0) = C_2 \cdot (\lambda_k^{(2)})^2$, отже, з [247] одержимо

$$
\forall m \geq 1 \ \ \forall k \geq 1 \ \ |A_m^{(2)}(f_k^{(2)})| \leq \frac{C(\lambda_k^{(2)})^4}{\lambda_m^{(2)}}. \tag{5.149}
$$

Формально, розв'язок задачі (5.110) визначається з формули

$$
\begin{gathered}
y_{2n}(t,r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(2n)}(h_{2n}) J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 t} + \\
+ \sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(2n)} \cdot \left(\int_0^t q(s) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 (t-s)} ds \right) J_{2n}(\lambda_m^{(2n)} r) + \overline{y}(t,r),
\end{gathered} \tag{5.150}
$$

де $\overline{y}(t,r)$ є розв'язком задачі (5.126) з

$$
\begin{gathered}
C_m(t) = -4n \sum_{k=1}^{\infty} A_m^{(2n)}(f_k^{(2n)}) \cdot A_k^{(2n)}(h_{2n-1}) e^{-(\lambda_k^{(2n)})^2 t} - \\
-4n \sum_{k=1}^{\infty} A_m^{(2n)}(f_k^{(2n)}) \cdot u_k^{(2n-1)} \cdot \int_0^t q(s) e^{-(\lambda_k^{(2n)})^2 (t-s)} ds.
\end{gathered} \tag{5.151}
$$

Підсилимо умови на функції h і z до наступних:

$$h_{2n-1},\ z_{2n-1} \in C^6([0,1]),$$
$$h_{2n-1}^{(k)}(0) = z_{2n-1}^{(k)}(0) = h_{2n-1}^{(k)}(1) = z_{2n-1}^{(k)}(1) = 0,\ k = \overline{0,5}. \tag{5.152}$$

Тоді з (5.125)

$$\forall m \geq 1 \ \ |A_k^{(2n)}(h_{2n-1})| \leq \frac{C}{(\lambda_k^{(2n)})^{5+\frac{1}{2}}}, \tag{5.153}$$

а для множини $\{u_m^{(2n-1)}\}_{m=1}^{\infty}$, що визначається формулою (5.143), виконується така формула

$$\forall m \geq 1 \ \ |u_m^{(2n-1)}| \leq \frac{C}{(\lambda_m^{(2n)})^{3+\frac{1}{2}}}. \tag{5.154}$$

Оцінки (5.148), (5.149), (5.153), (5.154) гарантують виконання умови (5.127) для функцій $\{C_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$. Отже, якщо h_{2n} задовольняє (5.133), $u_m^{(2n)}$ задовольняє (5.134), то формула (5.150) визначає класичний розв'язок задачі (5.110).

З рівності (5.114) отримаємо відношення

$$\begin{gathered}
u_m^{(2n)} \cdot \int_0^T q(t) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 (T-t)} dt = \alpha_m^{(2n)} := \\
:= A_m^{(2n)}(z_{2n}) - A_m^{(2n)}(h_{2n}) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 T} + \\
+4n \sum_{k=1}^{\infty} A_m^{(2n)}(f_k^{(2n)}) \cdot A_k^{(2n)}(h_{2n-1}) e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 T} \times \\
\times \int_0^T e^{((\lambda_m^{(2n)})^2 - (\lambda_k^{(2n)})^2) t} dt + \\
+4n \sum_{k=1}^{\infty} A_m^{(2n)}(f_k^{(2n)}) \cdot u_k^{(2n-1)} \cdot e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 T} \times \\
\times \int_0^T \int_0^t e^{(\lambda_k^{(2n)})^2 s} \cdot e^{((\lambda_m^{(2n)})^2 - (\lambda_k^{(2n)})^2) t} ds dt.
\end{gathered} \tag{5.155}$$

Нам потрібно показати, що множина функцій $\{u_m^{(2n)}\}_{m=1}^{\infty}$, що визначаються з (5.155), задовольняє оцінці (5.134), тобто

$$\forall m \geq 1 \ \ |u_m^{(2n)}| \leq \frac{C}{\lambda_m^{(2n)}}. \tag{5.156}$$

В силу (5.139), достатньо довести, що

$$\forall m \geq 1 \ \ |\alpha_m^{(2n)}| \leq \frac{C}{(\lambda_m^{(2n)})^3}. \tag{5.157}$$

Нехай виконується наступна умова

$$z_{2n} \in C^4([0,1]), \quad z_{2n}^{(k)}(0) = z_{2n}^{(k)}(1) = 0, \quad k = \overline{0,2}. \tag{5.158}$$

Звідси $A_m^{(2n)}(z_{2n})$ задовольняє нерівність (5.157). Отже, h_{2n} задовольняє (5.133), тобто

$$h_{2n} \in C^2([0,1]), \quad h_{2n}(0) = h_{2n}(1) = 0, \tag{5.159}$$

тоді $A_m^{(2n)}(h_{2n}) \cdot e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2 T}$ також задовольняє і (5.157).

В силу (5.149), (5.153) отримаємо

$$
\begin{gathered}
|4n\sum_{k=1}^{\infty}A_m^{(2n)}(f_k^{(2n)})\cdot A_k^{(2n)}(h_{2n-1})\times \\
\times e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2T}\cdot\int\limits_0^T e^{((\lambda_m^{(2n)})^2-(\lambda_k^{(2n)})^2)t}dt|\leq \\
\leq C\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m^{(2n)}}\cdot\frac{1}{(\lambda_k^{(2n)})^{\frac{3}{2}}}\cdot e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2T}\cdot\frac{1}{(\lambda_m^{(2n)})^2}e^{(\lambda_m^{(2n)})^2T}\leq\frac{C}{(\lambda_m^{(2n)})^3}.
\end{gathered}
\tag{5.160}
$$

З (5.149), (5.154) одержимо

$$
\begin{gathered}
|4n\sum_{k=1}^{\infty}A_m^{(2n)}(f_k^{(2n)})\cdot u_k^{(2n-1)}\cdot e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2T}\times \\
\times\int\limits_0^T e^{(\lambda_m^{(2n)})^2t}\cdot\left(e^{-(\lambda_k^{(2n)})^2t}\cdot\int\limits_0^t e^{(\lambda_k^{(2n)})^2s}ds\right)dt|\leq \\
\leq C\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda_k^{(2n)})^{\frac{1}{2}}}{\lambda_m^{(2n)}}\cdot e^{-(\lambda_m^{(2n)})^2T}\cdot\frac{1}{(\lambda_m^{(2n)})^2}\cdot\frac{1}{(\lambda_k^{(2n)})^2}\cdot e^{(\lambda_m^{(2n)})^2T}\leq\frac{C}{(\lambda_m^{(2n)})^3}.
\end{gathered}
\tag{5.161}
$$

Таким чином, наведені вище міркування і доводять теорему. □

Висновки до розділу 5

В цьому розділу розв'язані задачі оптимального керування еліптичними і параболічними рівняннями в секторальних областях з квадратичними критеріями якості та нелокальними крайовими умовами.

Основним об'єктом вивчення виступає лінійно-квадратична задача оптимального керування, яка складається з квадратичного функціоналу та лінійного рівняння еліптичного чи параболічного типу в області типу кругового сектору $\Omega = \{(r,\theta)|r \in (0,1),\ \theta \in (0,\pi)\}$ з рівністю потоків на радіусах $\theta = 0$ і $\theta = \pi$ і умовою Діріхле при $\theta = 0$.

Основним інструментом є ряди Фур'є по біортонормованих системах базисних функцій Самарського-Іонкіна, що породжені вказаними крайовими умовами. Необхідні теоретичні відомості щодо таких рядів містяться в підрозділі 5.1.1.

В підрозділі 5.1.2 доведено існування оптимального керування для еліптичного рівняння в круговому секторі Ω з нелокальними крайовими умовами.

В підрозділі 5.1.3 побудовано і обґрунтовано наближене оптимальне керування, а також побудоване оптимальне керування в класі функцій, що залежать лише від кутової змінної θ.

При розгляді параболічних задач з вказаними крайовими умовами використовуються ряди Фур'є-Бесселя, необхідні теоретичні відомості щодо яких містяться в підрозділі 5.2.1.

У підрозділі 5.2.2 доведено існування оптимального керування для параболічного рівняння в області $(0,T)\times\Omega$ з нелокальними крайовими умовами.

У підрозділі 5.3 для параболічного рівняння в області $(0,T)\times\Omega$ з нелокальними крайовими умовами доведено розв'язність задачі з мінімальною енергією.

Основні результати розділу опубліковано в роботах [59], [70], [207], [211], [212], [213].

Розділ 6

Мінімаксні оцінки та регулятори для збурених систем

У цьому розділі розглядається задача точного та наближеного мінімаксного оцінювання функціоналу від розв'язків параболічних та гіперболічних задачі зі швидко коливними коефіцієнтами. Вимірюється не сама величина, яка описує досліджуване явище, а спостерігається деяке значення від розв'язку із оператором, що визначає спосіб вимірювання. Проблема ускладняється не лише через наявність швидко коливних коефіцієнтів типу $a(\frac{x}{\varepsilon})$ в головній частині оператора, та невідомих функції, які входять до рівняння та початкових умов, а ще й через те, що спостереження є нелінійним (має оператор типу суперпозиції), що є в певному сенсі збуреним по відношенню до лінійного випадку ($\varepsilon = 0$). Перехід до задачі з усередненими параметрами дозволяє звільнитися від нелінійності у спостереженні та скористатись традиційним мінімаксним підходом для знаходження розв'язку. На основі точної мінімаксної оцінки для задачі з незбуреними ($\varepsilon = 0$) параметрами будується і обґрунтовується наближена мінімаксна оцінка для вихідної задачі. У першому і другому підрозділах розглянуто параболічну та гіперболічну задачу мінімаксного оцінювання в детермінованому випадку з нелінійним спостереженням, у третьому – параболічну задачу мінімаксного оцінювання з нелінійним стохастичним спостереженням, у четвертому – задачу знаходження мінімаксних оцінок функціоналів від періодичних розв'язків крайових задач Неймана для параболічних рівнянь.

6.1 Наближені мінімаксні оцінки функціоналів від розв'язку параболічної задачі зі швидко коливними коефіцієнтами при нелінійних детермінованих спостереженнях

У циліндрі $Q_T = (0, T) \times \Omega$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область, розглядається задача

$$\begin{cases} \frac{\partial y^\varepsilon}{\partial t} + A^\varepsilon y^\varepsilon = f(t,x), \\ y^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \\ y^\varepsilon|_{t=0} = y_0(x), \end{cases} \tag{6.1}$$

де $A^\varepsilon = -div(a^\varepsilon(x)\nabla)$, $a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ – задана вимірна періодична симетрична матриця, що задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості (2.11).

Згідно Леми 2.10 при фіксованих $f \in L^2(Q_T)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ існує єдиний розв'язок задачі (6.1) в просторі

$$W(0,T) = \left\{ y \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \mid \; y_t \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)) \right\}.$$

Спостерігається функція

$$\nu^\varepsilon(x) = \int_0^T C^\varepsilon(t, x, y^\varepsilon(t,x)) \cdot y^\varepsilon(t,x) dt + g(x), \tag{6.2}$$

де $C^\varepsilon = C^\varepsilon(t,x,\xi) : (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – задана вимірна функція. Функції $f \in L^2(Q_T)$ і $y_0 \in L^2(\Omega)$ з (6.1), а також функція $g \in L^2(\Omega)$ з (6.2) невідомі, проте відомо, що вони належать опуклій замкненій множині G з простору $L^2(\Omega) \times L^2(Q_T) \times L^2(\Omega)$

$$\{y_0,\, f,\, g\} \in G = \left\{ \alpha \left\| y_0 \right\|^2 + \beta \left\| f \right\|^2_{Q_T} + \gamma \left\| g \right\|^2 \leq 1 \right\}. \tag{6.3}$$

Тут і надалі $\|\cdot\|$ і $(\cdot\ ,\ \cdot)$ - норма і скалярний добуток в $L^2(\Omega)$, $\|\cdot\|_{Q_T}$, $(\cdot\ ,\ \cdot)_{Q_T}$ - норма і скалярний добуток в $L^2(Q_T)$.

Класична постановка задачі мінімаксного оцінювання [106] полягає в тому, щоб оцінити функціонал

$$l(y^\varepsilon) = \int_{Q_T} l(t,x) y^\varepsilon(t,x) dt\; dx, \tag{6.4}$$

де $l \in L^2(Q_T)$ – задана функція, y^ε – розв'язок задачі (6.1), у класі функціоналів від спостереження

$$\hat{\hat{l}}(y^\varepsilon) = \int_\Omega \nu^\varepsilon(x) u(x) dx, \;\; u \in L^2(\Omega), \tag{6.5}$$

де функція $\hat{u}^\varepsilon$ є розв'язком задачі

$$\sup_{\{y_0,f,g\}\in G} \left(l(y^\varepsilon) - \hat{\hat{l}}(y^\varepsilon) \right)^2 \to \inf. \tag{6.6}$$

При цьому значення (6.6)

$$\sigma^2_\varepsilon := \inf_u J^\varepsilon(u), \tag{6.7}$$

де

$$J^\varepsilon(u) = \sup_{\{y_0,f,g\}\in G} \left(l(y^\varepsilon) - \hat{\hat{l}}(y^\varepsilon) \right)^2, \tag{6.8}$$

називається похибкою мінімаксного оцінювання.

Нелінійність C^ε і наявність швидко коливних коефіцієнтів у A^ε, C^ε змушує нас шукати наближений розв'язок задачі (6.1) – (6.6), використовуючи теорію усереднення.

А саме, нехай a^0 – усереднена матриця для $a^\varepsilon(x)$, $A^0 = -div(a^0\nabla)$, $C^0 = C^0(t,x)$ – задана функція з простору $L^\infty(Q_T)$, яка не залежить від фазової змінної y і є усередненою (у певному сенсі, див. (6.23)) функцією для $C^\varepsilon(t,x,\xi)$.

Тоді [106] при фіксованому $u \in L^2(\Omega)$ розв'язок задачі (6.8) при $\varepsilon = 0$

$$\begin{cases} \left(l(y) - \hat{\hat{l}}(y)\right)^2 \to \sup, \\ \\ \{y_0,\, f,\, g\} \in G, \end{cases} \tag{6.9}$$

має вигляд

$$y_0 = -\frac{\lambda}{\alpha} z(0), \quad f = -\frac{\lambda}{\beta} z, \quad g = -\frac{\lambda}{\gamma} u, \tag{6.10}$$

де

$$\lambda^2 = \left(\frac{\|z(0)\|^2}{\alpha} + \frac{\|z\|^2_{Q_T}}{\beta} + \frac{\|u\|^2}{\gamma} \right)^{-1},$$

$$\hat{\hat{l}}(y) = \int_\Omega \nu^0(x) u(x) dx, \;\; u \in L^2(\Omega), \tag{6.11}$$

спостереження

$$\nu^0(x) = \int_0^T C^0(t,x) \cdot y(t,x) dt + g(x),$$

а z є розв'язком задачі

$$\begin{cases} -\frac{\partial z}{\partial t} + A^0 z = -l + C^0 \cdot u, \\ \\ z|_{\partial\Omega} = 0, \\ z|_{t=T} = 0. \end{cases} \tag{6.12}$$

Для значення задачі (6.9) маємо

$$J^0(u) = \sup_{\{y_0, f, g\} \in G} \left(l(y) - \hat{\hat{l}}(y) \right)^2 = \frac{\|z(0)\|^2}{\alpha} + \frac{\|z\|^2_{Q_T}}{\beta} + \frac{\|u\|^2}{\gamma}. \tag{6.13}$$

Тоді задача

$$\sigma_0^2 = \inf_u J^0(u) \tag{6.14}$$

має єдиний розв'язок $\hat{u}^0$, який характеризується наступною системою [106]:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + A^0 p = -\frac{1}{\beta} z, \\ \\ p|_{\partial\Omega} = 0, \\ \\ p|_{t=0} = \frac{1}{\alpha} z(0), \end{cases} \tag{6.15}$$

$$\hat{u}^0 = \gamma \int_0^T C^0(t,x) p(t,x) d, \tag{6.16}$$

де z є розв'язком задачі (6.12).

Основна питання, яке досліджується в підрозділі - чи буде оцінка

$$\hat{l}(y^\varepsilon) = \int_\Omega \nu^\varepsilon(x) \hat{u}^0(x) dx$$

слугувати наближеною мінімаксною оцінкою для вихідної задачі (6.1) – (6.6) при достатньо малих $\varepsilon > 0$.

Спочатку встановимо існування розв'язку задачі (6.1) – (6.6).

Нехай $C^\varepsilon : (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функція Каратеодорі така, що $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon \in (0,1)$ для майже всіх (м. в.) $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$

$$|C^\varepsilon(t,x,\xi)| \le C_1(t,x), \tag{6.17}$$

де $C_1 \in L^\infty(Q_T)$ – задана невід'ємна функція.

Теорема 6.1. *За умов* (2.11), (6.17) *задача* (6.1) – (6.6) *має розв'язок, тобто існує така функція* $\hat{u}^{\,\varepsilon}$*, на якій досягається рівність* (6.7).

Доведення. Для фіксованих u, y_0, f, g маємо

$$l(y^\varepsilon) - \hat{\hat{l}}(y^\varepsilon) = -(g,u) - (z^\varepsilon(0), y_0) - (z^\varepsilon, f)_{Q_T},$$

де z^ε – розв'язок задачі

$$\begin{cases} -\frac{\partial z^\varepsilon}{\partial t} + A^\varepsilon z^\varepsilon = -l + C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon(t,x)) \cdot u, \\ z^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \\ z^\varepsilon|_{t=T} = 0. \end{cases} \tag{6.18}$$

Оскільки функції $u \in L^2(\Omega)$ і $C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon) \in L^\infty(Q_T)$, то задача (6.18) в силу Леми 2.10 має розв'язок z^ε в класі $W(0,T)$.

При фіксованому $u \in L^2(\Omega)$ задача максимізації (6.8) має вигляд

$$\begin{cases} \left((z^\varepsilon(0), y_0) + (z^\varepsilon, f)_{Q_T} + (g,u)\right)^2 \to \sup, \\ \alpha \|y_0\|^2 + \beta \|f\|^2_{Q_T} + \gamma \|g\|^2 \le 1. \end{cases} \tag{6.19}$$

Оскільки $C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon)$ (а отже, і z^ε) залежить від $\{y_0,\, f\}$, то формули (6.10) – (6.13), (6.15), (6.16), взагалі кажучи, не мають місця.

Таким чином, функціонал $u \mapsto J^\varepsilon(u)$ є опуклим, напівнеперервним знизу, і для того, щоб існувала $\hat{u}^\varepsilon$, така що

$$\sigma_\varepsilon^2 = \inf_u J^\varepsilon(u) = J^\varepsilon(\hat{u}^\varepsilon),$$

згідно з теоремою Вейєрштрасса достатньо довести, що

$$\lim_{\|u\|\to\infty} J^\varepsilon(u) = \infty.$$

Для цього зафіксуємо $u \in L^2(\Omega)$ і набір $\{y_0, f, g\} \in G$. Їм відповідають розв'язок $y^\varepsilon(t,x)$ задачі (6.1) і розв'язок $z^\varepsilon(t,x)$ задачі (6.18) з правою частиною $C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon(t,x)) \cdot u(x)$. Розглянемо задачу (6.1) – (6.6) із фіксованою функцією $C^\varepsilon(t,x) := C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon(t,x))$. Згідно з міркуваннями, наведеними при аналізі усередненої задачі (6.9) – (6.16), розв'язок задачі (6.19) має вигляд

$$\bar{y}_0^\varepsilon = -\frac{\lambda}{\alpha} z^\varepsilon(0), \quad \bar{f}^\varepsilon = -\frac{\lambda}{\beta} z^\varepsilon, \quad \bar{g}^\varepsilon = -\frac{\lambda}{\gamma} u,$$

де

$$\lambda^2 = \left(\frac{\|z^\varepsilon(0)\|^2}{\alpha} + \frac{\|z^\varepsilon\|^2_{Q_T}}{\beta} + \frac{\|u\|^2}{\gamma} \right)^{-1}.$$

Розглянемо відображення $\Psi : G \to G$, $\Psi(y_0, f, g) = \left\{\bar{y}_0^\varepsilon, \bar{f}^\varepsilon, \bar{g}^\varepsilon\right\}$.

Нехай

$$\left\{y_0^k, f^k, g^k\right\} \to \{y_0, f, g\} \in G \;\text{ слабко }\; \text{в } L^2(\Omega) \times L^2(Q_T) \times L^2(\Omega).$$

Звідси для розв'язку y_k^ε задачі (6.1) з умовами f^k, y_0^k за лемою про компактність маємо збіжність

$$y_k^\varepsilon \to y^\varepsilon \text{ в } L^2(Q_T),$$

де $y^\varepsilon = y^\varepsilon(t,x)$ – розв'язок задачі (6.1) з умовами $f,\ \ y_0$.

Тоді з умови (6.17) і теореми Лебега одержимо

$$C^\varepsilon(t,x,y_k^\varepsilon(t,x)) \to C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon(t,x)) \text{ в } L^2(Q_T). \tag{6.20}$$

Отже, для z_k^ε – розв'язку задачі (6.18) з y_k^ε, згідно Леми 2.15 маємо

$$z_k^\varepsilon \to z^\varepsilon \text{ в } C\left([0,T];\ L^2(\Omega)\right), \tag{6.21}$$

де $z^\varepsilon = z^\varepsilon(t,x)$ - розв'язок задачі (6.18) з y^ε.

Зі збіжностей (6.20), (6.21) випливає, що Ψ - неперервне відображення і $\Psi(G)$ - компакт. Отже, за теоремою Шаудера Ψ має нерухому точку, тобто $\exists \left\{\hat{y}_0^\varepsilon, \hat{f}^\varepsilon, \hat{g}^\varepsilon\right\} \in G$:

$$\left\{\hat{y}_0^\varepsilon, \hat{f}^\varepsilon, \hat{g}^\varepsilon\right\} = \Psi\left(\hat{y}_0^\varepsilon, \hat{f}^\varepsilon, \hat{g}^\varepsilon\right).$$

Нехай $\hat{y}^\varepsilon$ – розв'язок задачі (6.1), який відповідає $\hat{y}_0^\varepsilon,\ \hat{f}^\varepsilon$, $\hat{z}^\varepsilon$ – розв'язок задачі (6.18), який відповідає $\hat{y}^\varepsilon$. Тоді в силу (6.13)

$$\frac{\|\hat{z}^\varepsilon(0)\|^2}{\alpha} + \frac{\|\hat{z}^\varepsilon\|_{Q_T}^2}{\beta} + \frac{\|u\|^2}{\gamma} \le J^\varepsilon(u). \tag{6.22}$$

Отже, $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} J^\varepsilon(u) = \infty$ і теорема доведена. □

Перейдемо до побудови наближеної мінімаксної оцінки для задачі (6.1) – (6.6).

Нехай стала, додатно визначена матриця a^0 є усередненою для матриці $a^\varepsilon(x)$ [38], $C^0 \in L^\infty(Q_T)$ така, що

$$\forall r > 0 \;\; C^\varepsilon(t,x,\xi) \to C^0(t,x), \;\; \varepsilon \to 0 \text{ в } L^2(Q_T)$$
$$\text{рівномірно по } |\xi| \le r. \tag{6.23}$$

Введемо функціонал

$$\hat{l}(y^\varepsilon) = \int_\Omega \nu^\varepsilon(x)\hat{u}^0(x)dx, \tag{6.24}$$

де $\hat{u}^0 \in L^2(\Omega)$ визначається з усередненої задачі (6.9) – (6.16), і величину

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = J^\varepsilon(\hat{u}^0) = \sup_{\{y_0,f,g\}\in G} \left((l,y^\varepsilon)_{Q_T} - (\nu^\varepsilon,\hat{u}^0)\right)^2, \tag{6.25}$$

де y^ε – розв'язок задачі (6.1), спостереження ν^ε має вигляд (6.2).

Наступна теорема є основним результатом цього підрозділу.

Теорема 6.2. *Оцінка* (6.24) *є наближеною мінімаксною оцінкою для вихідної задачі* (6.1) – (6.6), *а похибки* (6.7) *і* (6.25) *є близькими при достатньо малих* $\varepsilon > 0$, *тобто* $\forall \eta > 0 \; \exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$

$$\left|\sigma_\varepsilon^2 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2\right| < \eta. \tag{6.26}$$

Доведення. За Теоремою 6.1

$$\sigma_\varepsilon^2 = \inf_u J^\varepsilon(u) = J^\varepsilon(\hat{u}^\varepsilon).$$

Тоді

$$J^\varepsilon(\hat{u}^\varepsilon) \le J^\varepsilon(0) = \sup_{\{y_0,f,g\}\in G} (l,y^\varepsilon)^2_{Q_T}, \tag{6.27}$$

де y^ε – розв'язок задачі (6.1). Для $\forall \{y_0,f,g\} \in G$ в силу умови (6.16) для м. в. t виконується нерівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|^{2}+\nu_{1}\left\|\nabla y^{\varepsilon}(t)\right\|^{2}\leq\left\|f(t)\right\|\cdot\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|.$$

З нерівності Пуанкаре звідси виводимо, що

$$\forall\varepsilon\in(0,1)\sup_{\{y_0,f,g\}\in G}\left\|y^{\varepsilon}\right\|_{Q_T}\leq C, \tag{6.28}$$

де константа $C>0$ не залежить від ε.

З нерівностей (6.27), (6.28) і (6.22) виводимо, що $\{\hat{u}^{\varepsilon}\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ обмежена в $L^2(\Omega)$, отже, по підпослідовності для деякої функції $v\in L^2(\Omega)$

$$\hat{u}^{\varepsilon}\to v \text{ слабко в } L^2(\Omega),\varepsilon\to 0. \tag{6.29}$$

Доведемо, що $v=\hat{u}^0$, де $\hat{u}^0$ – функція, на якій оцінка $\hat{\hat{l}}(y)$ вигляду (6.11) є мінімаксною оцінкою усередненої задачі.

Нехай $\varepsilon=\varepsilon_k\to 0$, $\hat{u}^{\varepsilon_k}:=\hat{u}^k$. Тоді в силу (6.22)

$$\sigma_{\varepsilon_k}^2=J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k)\geq\frac{\left\|\hat{z}^k(0)\right\|^2}{\alpha}+\frac{\left\|\hat{z}^k\right\|_{Q_T}^2}{\beta}+\frac{\left\|\hat{u}^k\right\|^2}{\gamma},$$

де трійка $\left\{\hat{y}_0^k,\hat{f}^k,\hat{g}^k\right\}\in G$ є нерухомою точкою відображення Ψ_k з Теореми 6.1, збудованого по функції $\hat{u}^k$.

Тоді по підпослідовності

$$\left\{\hat{y}_0^k,\hat{f}^k,\hat{g}^k\right\}\to\left\{\hat{y}_0,\hat{f},\hat{g}\right\} \text{ слабко в } L^2(\Omega)\times L^2(Q_T)\times L^2(\Omega),$$

а $\hat{z}^k$ є розв'язком задачі (6.18) з $\hat{y}^k$ і $\hat{u}^k$, $\hat{y}^k$ – розв'язок задачі (6.1) при $\varepsilon=\varepsilon_k$ з умовами $\hat{f}^k$, $\hat{y}_0^k$. Тоді за лемою про компактність

$$\hat{y}^k\to\hat{y} \text{ в } L^2(Q_T), \tag{6.30}$$

де $\hat{y}$ – розв'язок задачі (6.1) з умовами $\hat{f}$, $\hat{y}_0$ і $\varepsilon=0$.

Доведемо, що має місце збіжність

$$C^{\varepsilon_k}(t,x,\hat{y}^k)\hat{u}^k \to C^0(t,x)v \text{ слабко } \text{ в } L^2(Q_T). \tag{6.31}$$

Зі збіжності (6.23) випливає, що $\forall r>0$

$$\alpha_k(r) := \sup_{|\xi|\le r} \int_{Q_T} \left| C^{\varepsilon_k}(t,x,\hat{y}^k(t,x)) - C^0(t,x) \right|^2 dt\, dx \to 0, k \to \infty.$$

Покладемо

$$Q_T(k,r) = \left\{ (t,x) \middle| \, \left| \hat{y}^k(t,x) \right| \le r \right\}.$$

Згідно з нерівністю Чебишова і збіжністю (6.30) одержимо

$$\mu \left(Q_T \backslash Q_T(k,r) \right) \le \frac{1}{r} \int_{Q_T} \left| \hat{y}^k(t,x) \right| dt\, dx \le \frac{C}{r}, \tag{6.32}$$

де константа $C>0$ не залежить від $k,\ r$.

Тоді

$$\begin{gathered} \textstyle\int_{Q_T} \left| C^{\varepsilon_k}(t,x,\hat{y}^k(t,x)) - C^0(t,x) \right|^2 dt\, dx = \\ = \textstyle\int_{Q_T(k,r)} \left| C^{\varepsilon_k}(t,x,\hat{y}^k(t,x)) - C^0(t,x) \right|^2 dt\, dx + \\ + \textstyle\int_{Q_T \backslash Q_T(k,r)} \left| C^{\varepsilon_k}(t,x,\hat{y}^k(t,x)) - C^0(t,x) \right|^2 dt\, dx \le \\ \le \alpha_k(r) + 2 \left\| C_1 \right\|^2_{L^\infty(Q_T)} \cdot \tfrac{C}{r}, \end{gathered} \tag{6.33}$$

де функція C_1 взята з умови (6.17).

Остання нерівність (6.33) означає, що

$$C^{\varepsilon_k}(t,x,\hat{y}^k) \to C^0(t,x) \text{ в } L^2(Q_T).$$

Тоді, в силу нерівності Гельдера

$$\int_{Q_T} \left| C^{\varepsilon_k}\left(t,x,\hat{y}^k(t,x)\right) - C^0\left(t,x\right)\right| \cdot \left|\hat{u}^k(x)\right| dt\cdot dx \to 0,\ k\to\infty.$$

Отже, по підпослідовності

$$\left(C^{\varepsilon_k}\left(t,x,\hat{y}^k(t,x)\right) - C^0\left(t,x\right)\right)\cdot \hat{u}^k(x) \to 0,\ k\to\infty \text{ для м. в. } (t,x).$$

З леми Ліонса

$$\left(C^{\varepsilon_k}\left(t,x,\hat{y}^k\right) - C^0\left(t,x\right)\right)\cdot \hat{u}^k \to 0,\ k\to\infty \text{ слабко в } L^2(Q_T). \tag{6.34}$$

Оскільки

$$C^0(t,x)(\hat{u}^k - v) \to 0,\ k\to\infty \text{ слабко в } L^2(Q_T), \tag{6.35}$$

то зі збіжностей (6.34), (6.35) отримуємо збіжність (6.31).

Тоді з Леми 2.15

$$\hat{z}^k \to \hat{z} \text{ в } C\left([0,T];\ L^2(\Omega)\right),$$

де $\hat{z}$ є розв'язком задачі (6.18) при $\varepsilon = 0$ і з правою частиною $C^0(t,x)\cdot v$.

Таким чином,

$$\begin{gathered}\varliminf_{k\to\infty} J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k) \ge \varliminf_{k\to\infty}\left(\frac{\left\|\hat{z}^k(0)\right\|^2}{\alpha} + \frac{\left\|\hat{z}^k\right\|^2_{Q_T}}{\beta} + \frac{\left\|\hat{u}^k\right\|^2}{\gamma}\right) \ge \\ \ge \frac{\|\hat{z}(0)\|^2}{\alpha} + \frac{\|\hat{z}\|^2_{Q_T}}{\beta} + \frac{\|v\|^2}{\gamma} = J^0(v).\end{gathered} \tag{6.36}$$

З іншого боку, оскільки $\hat{u}^k$ така що

$$\inf_u J^{\varepsilon_k}(u) = J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k),$$

то $\forall u \in L^2(\Omega)$

$$J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k) \leq J^{\varepsilon_k}(u) = \left((\bar{z}^k(0), \bar{y}_0^k) + (\bar{z}^k, \bar{f}^k)_{Q_T} + (\bar{g}^k, u)\right)^2, \tag{6.37}$$

де $\left\{\bar{y}_0^k, \bar{f}^k, \bar{g}^k\right\}$ – розв'язок задачі (6.19) з функцією u, $\bar{z}^k$ – розв'язок задачі (6.18) при $\varepsilon = \varepsilon_k$ і з правою частиною $C^{\varepsilon_k}(t, x, \bar{y}^k) \cdot u$, $\bar{y}^k$ – розв'язок задачі (6.1) при $\varepsilon = \varepsilon_k$ з відповідними умовами $\bar{y}_0^k, \bar{f}^k$.

Аналогічно до попередніх міркувань (6.33) – (6.35), але з фіксованою функцією u, одержуємо, що

$$\left\{\bar{y}_0^k, \bar{f}^k, \bar{g}^k\right\} \to \left\{\bar{y}_0, \bar{f}, \bar{g}\right\} \text{ слабко в } L^2(\Omega) \times L^2(Q_T) \times L^2(\Omega),$$

$$\bar{y}^k \to \bar{y} \text{ в } L^2(Q_T),$$

$$\bar{z}^k \to \bar{z} \text{ в } C\left([0, T];\, L^2(\Omega)\right),$$

де $\bar{z}$ є розв'язком задачі (6.18) при $\varepsilon = 0$ і з правою частиною $C^0(t, x) \cdot u$, $\bar{y}$ – розв'язок задачі (6.1) при $\varepsilon = 0$ з відповідними умовами $\bar{y}_0$, $\bar{f}$.

Тоді

$$\lim_{k \to \infty} J^{\varepsilon_k}(u) = \left((\bar{z}(0), \bar{y}_0) + (\bar{z}, \bar{f})_{Q_T} + (\bar{g}, u)\right)^2. \tag{6.38}$$

Покажемо, що права частина (6.38) – це $J^0(u)$. Дійсно, $\forall \{y_0, f, g\} \in G$

$$J^{\varepsilon_k}(u) \geq \left((z^k(0), y_0) + (z^k, \bar{f})_{Q_T} + (g, u)\right)^2, \tag{6.39}$$

де z^k – розв'язок задачі (6.18) з правою частиною $C^{\varepsilon_k}(t, x, y^k) \cdot u$, y^k – розв'язок задачі (6.1) з умовами y_0, f.

Аналогічно до міркувань (6.33) – (6.35), ми можемо перейти до границі в нерівності (6.39) і в силу довільності $\{y_0, f, g\}$ отримати, що

$$\lim_{k\to\infty} J^{\varepsilon_k}(u) = J^0(u). \tag{6.40}$$

Таким чином, $\forall u \in L^2(\Omega)$

$$J^0(v) \leq \varliminf_{k\to\infty} J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k) \leq J^0(u). \tag{6.41}$$

Із (6.41) одержуємо, що $v = \hat{u}^0$ і

$$\sigma_\varepsilon^2 \to \sigma_0^2 = J^0(\hat{u}^0),\ \ \varepsilon \to 0.$$

Залишилося показати, що

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \to \sigma_0^2, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{6.42}$$

Нехай $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$. Тоді

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon_k}^2 = J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^0) = \Big((\tilde{z}_k(0), \tilde{y}_0^k) + (\tilde{z}_k, \tilde{f}^k)_{Q_T} + (\tilde{g}^k, \hat{u}^0)\Big)^2,$$

де $\tilde{z}_k$ – розв'язок задачі (6.18) з правою частиною $C^{\varepsilon_k}(t, x, \tilde{y}_k) \cdot \hat{u}^0$, $\tilde{y}_k$ – розв'язок задачі (6.1) з умовами $\tilde{y}_0^k$, $\tilde{f}^k$, $\Big\{\tilde{y}_0^k, \tilde{f}^k, \tilde{g}^k\Big\}$ – розв'язок задачі (6.19) з функціями $\tilde{z}_k$, $\hat{u}^0$.

Тоді з (6.40)

$$\lim_{k\to\infty} J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^0) = J^0(\hat{u}^0),$$

що і доводить (6.42). $\square$

6.2 Наближене мінімаксне оцінювання функціоналів від розв'язків хвильового рівняння при нелінійних спостереженнях

В позначеннях попереднього підрозділу розглянемо наступну задачу: у циліндрі $Q_T = (0,T) \times \Omega$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область, процес описується системою

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y^\varepsilon}{\partial t^2} = div(a^\varepsilon(x)\nabla y^\varepsilon) + f(t,x), \\ \\ y^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \\ \\ y^\varepsilon|_{t=0} = y_0(x), \;\; y^\varepsilon_t|_{t=0} = y_1(x) \end{cases} \tag{6.43}$$

де $a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \;\; a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ – задана симетрична матриця, що задовольняє умовам рівномірної еліптичності та обмеженості (2.11).

Спостерігається функція

$$\nu^\varepsilon(x) = \int_0^T C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon(t,x)) \cdot y^\varepsilon(t,x)dt + g(x), \tag{6.44}$$

де $C^\varepsilon = C^\varepsilon(t,x,\xi) : (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – задана вимірна функція.

Функції $y_0 \in H^1_0(\Omega), \;\; y_1 \in L^2(\Omega), \; f \in L^2(Q_T)$ з (6.43), а також функція $g \in L^2(\Omega)$ з (6.44) невідомі, проте відомо, що вони належать опуклій замкненій множині G з простору $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(Q_T) \times L^2(\Omega)$

$$\{y_0, \, y_1, f, \, g\} \in G =$$

$$= \left\{ \alpha_0 \left\| y_0 \right\|^2_{H^1_0} + \alpha_1 \left\| y_1 \right\|^2 + \beta \left\| f \right\|^2_{Q_T} + \gamma \left\| g \right\|^2 \le 1 \right\}. \tag{6.45}$$

Розглядається наступна задача мінімаксного оцінювання [106]: оцінити функціонал

$$l(y^\varepsilon) = \int_{Q_T} l(t,x) y^\varepsilon(t,x)dtdx, \tag{6.46}$$

де $l \in L^2(Q_T)$ – задана функція, y^ε – розв'язок задачі (6.43), у класі функціоналів від спостережень

$$\hat{\hat{l}}(y^\varepsilon) = \int_\Omega \nu^\varepsilon(x) u(x) dx, \ \ u \in L^2(\Omega), \tag{6.47}$$

де функція $\hat{u}^\varepsilon$ є розв'язком задачі

$$J^\varepsilon(u) := \sup_{\{y_0,y_1,f,g\}\in G} \left(l(y^\varepsilon) - \hat{\hat{l}}(y^\varepsilon) \right)^2 \to \inf. \tag{6.48}$$

При цьому значення (6.48)

$$\sigma_\varepsilon^2 := \inf_u J^\varepsilon(u) \tag{6.49}$$

називається похибкою мінімаксного оцінювання.

Для дослідження використаємо підхід з попереднього підрозділу. А саме, нелінійність C^ε і наявність швидко коливних коефіцієнтів диктує нам перехід до усереднених параметрів. Нехай a^0 – стала матриця, що є усередненою до $a^\varepsilon(x)$, $C^0 = C^0(t,x)$ – задана функція з простору $L^\infty(Q_T)$, яка не залежить від фазової змінної y і є усередненою функцією для $C^\varepsilon(t,x,\xi)$ в сенсі (6.23).

Розглядаємо задачу (6.43) з диференціальним оператором $div(a^0\nabla)$ і спостереженням $C^0(t,x)$.

Існування та методи знаходження розв'язку відповідної задачі мінімаксного оцінювання добре відомі [106], [107]. Нехай $\hat{u}^0 \in L^2(\Omega)$ – розв'язок відповідної задачі (6.48). Основна питання, яке досліджується у цьому підрозділі – чи буде оцінка

$$\hat{l}(y^{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \nu^{\varepsilon}(x)\hat{u}^{0}(x)dx,$$

при достатньо малих $\varepsilon > 0$ слугувати наближеною мінімаксною оцінкою для вихідної задачі (6.43) – (6.48), тобто чи буде вірно, що $\forall \eta > 0 \ \ \exists \varepsilon_0 > 0$ $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\left|\sigma_{\varepsilon}^{2} - \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\right| < \eta, \tag{6.50}$$

де

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = J^{\varepsilon}(\hat{u}^{0}) = \sup_{\{y_0, y_1, f, g\} \in G} \left((l, y^{\varepsilon})_{Q_T} - (\nu^{\varepsilon}, \hat{u}^{0})\right)^{2}, \tag{6.51}$$

y^{ε} – розв'язок задачі (6.43), ν^{ε} має вигляд (6.44).

Спочатку доведемо розв'язність (6.43) – (6.48).

Зауважимо, що оскільки симетрична матриця $a \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ задовольняє умови еліптичності та обмеженості (2.11), то тим самим умовам буде задовольняти і усереднена стала матриця a^0.

Крім того, за виконання (2.11) в силу Леми 2.11 для фіксованих $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, $y_1 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(Q_T)$ задача (6.43) має єдиний розв'язок y^{ε} в класі

$$W_1(0,T) = \left\{ y \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \ | \ y_t \in L^2(0,T; L^2(\Omega)) \right\}.$$

Теорема 6.3. *Нехай функція* $C^{\varepsilon} : (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *неперервна по третьому аргументу і обмежена. Тоді задача* (6.43) – (6.48) *має розв'язок, тобто існує така функція* $\hat{u}^{\,\varepsilon}$*, на якій досягається рівність* (6.49).

Доведення. Для фіксованих u, y_0, y_1, f, g маємо

$$l(y^\varepsilon) - \hat{\hat{l}}(y^\varepsilon) = -(g,u) - (z_t^\varepsilon(0), y_0) + (z^\varepsilon(0), y_1) + (z^\varepsilon, f)_{Q_T},$$

де z^ε – розв'язок задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z^\varepsilon}{\partial t^2} = div(a^\varepsilon(x)\nabla z^\varepsilon) + l - C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon(t,x)) \cdot u, \\ z^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \\ z^\varepsilon|_{t=T} = z_t^\varepsilon|_{t=T} = 0. \end{cases} \tag{6.52}$$

Оскільки функції $u \in L^2(\Omega)$ і $C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon) \in L^\infty(Q_T)$, то задача (6.52) в силу Леми 2.11 має розв'язок $z^\varepsilon \in W_1(0,T)$.

При фіксованому $u \in L^2(\Omega)$ задача максимізації в (6.48) має вигляд

$$\begin{cases} \left(-(g,u) - (z_t^\varepsilon(0), y_0) + (z^\varepsilon(0), y_1) + (z^\varepsilon, f)_{Q_T}\right)^2 \to \sup, \\ \alpha_0 \left\|y_0\right\|_{H_0^1}^2 + \alpha_1 \left\|y_1\right\|^2 + \beta \left\|f\right\|_{Q_T}^2 + \gamma \left\|g\right\|^2 \le 1. \end{cases} \tag{6.53}$$

Оскільки $C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon)$ (а отже, і z^ε) залежить від $\{y_0, y_1,\ f\}$, то (6.53) не допускає, взагалі кажучи, явного розв'язання (на відміну від випадку, коли C^ε не залежить від y^ε [106]).

Аналогічно до міркувань з доведення Теореми 6.1 попереднього підрозділу для доведення існування розв'язку $\hat{u}^\varepsilon$ достатньо показати коерцитивність функціоналу J^ε, тобто

$$\lim_{\|u\|\to\infty} J^\varepsilon(u) = \infty.$$

Розглянемо фіксовані $u \in L^2(\Omega)$ і набір $\{y_0,\, y_1, f,\, g\} \in G$. Їм відповідають розв'язок $y^\varepsilon(t,x)$ задачі (6.43) і розв'язок $z^\varepsilon(t,x)$ задачі (6.52) з правою частиною $C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon(t,x)) \cdot u(x)$. Розглянемо задачу (6.43) – (6.48) із фіксованою функцією $C^\varepsilon(t,x) := C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon(t,x))$. Згідно з [106], розв'язок задачі максимізації (6.53) в цьому випадку має вигляд

$$\bar{y}_0^\varepsilon = -\frac{\lambda}{\alpha_0}\Lambda^{-1}z_t^\varepsilon(0), \quad \bar{y}_1^\varepsilon = \frac{\lambda}{\alpha_1}z^\varepsilon(0), \quad \bar{f}^\varepsilon = \frac{\lambda}{\beta}z^\varepsilon, \quad \bar{g}^\varepsilon = -\frac{\lambda}{\gamma}u,$$

де Λ – це канонічний ізоморфізм між $H_0^1(\Omega)$ та $H^{-1}(\Omega)$,

$$\lambda^2 = \left(\frac{\|z_t^\varepsilon(0)\|_{H^{-1}}^2}{\alpha_0} + \frac{\|z^\varepsilon(0)\|^2}{\alpha_1} + \frac{\|z^\varepsilon\|_{Q_T}^2}{\beta} + \frac{\|u\|^2}{\gamma}\right)^{-1}.$$

Розглянемо відображення $\Psi : G \to G$,

$$\Psi(y_0,\, y_1, f,\, g) = \left\{\bar{y}_0^\varepsilon, \bar{y}_1^\varepsilon, \bar{f}^\varepsilon, \bar{g}^\varepsilon\right\}.$$

Нехай

$$\left\{y_0^k, y_1^k, f^k, g^k\right\} \to \{y_0, y_1, f, g\} \in G \text{ слабко в}$$

$$H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(Q_T) \times L^2(\Omega).$$

Звідси для розв'язку задачі (6.43) з умовами f^k, y_0^k, y_1^k за лемою про компактність маємо

$$y_k^\varepsilon \to y^\varepsilon \text{ в } C([0,T];L^2(\Omega)) \text{ і слабко в } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{6.54}$$

$$y_{kt}^\varepsilon \to y_t^\varepsilon \text{ в } C([0,T];H^{-1}(\Omega)) \text{ і слабко в } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{6.55}$$

де $y^\varepsilon = y^\varepsilon(t,x)$ – розв'язок задачі (6.43) з умовами f, y_0, y_1.

Тоді з обмеженості C^ε і теореми Лебега одержимо

$$C^\varepsilon(t,x,y_k^\varepsilon(t,x)) \to C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon(t,x)) \text{ в } L^2(Q_T). \tag{6.56}$$

Отже, для z_k^ε – розв'язку задачі (6.52) з y_k^ε, згідно Леми 2.16 маємо, що $z_k^\varepsilon \to z^\varepsilon$ в сенсі (6.54), (6.55), де $z^\varepsilon = z^\varepsilon(t,x)$ – розв'язок задачі (6.52) з y^ε. Звідси маємо, що

$$\Psi(y_0^k, y_1^k, f^k, g^k) \to \Psi(y_0, y_1, f, g) \text{ в } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(Q_T) \times L^2(\Omega).$$

Отже, Ψ – неперервне відображення і $\Psi(G)$ – компакт. Тоді за теоремою Шаудера Ψ має нерухому точку, тобто $\exists \left\{\hat{y}_0^\varepsilon, \hat{y}_1^\varepsilon, \hat{f}^\varepsilon, \hat{g}^\varepsilon\right\} \in G$:

$$\left\{\hat{y}_0^\varepsilon, \hat{y}_1^\varepsilon, \hat{f}^\varepsilon, \hat{g}^\varepsilon\right\} = \Psi\left(\hat{y}_0^\varepsilon, \hat{y}_1^\varepsilon, \hat{f}^\varepsilon, \hat{g}^\varepsilon\right).$$

Нехай $\hat{y}^\varepsilon$ – розв'язок задачі (6.43), який відповідає $\hat{y}_0^\varepsilon$, $\hat{y}_1^\varepsilon$, $\hat{f}^\varepsilon$, $\hat{z}^\varepsilon$ – розв'язок задачі (6.52), який відповідає $\hat{y}^\varepsilon$. Тоді

$$\frac{\|\hat{z}_t^\varepsilon(0)\|_{H^{-1}}^2}{\alpha_0} + \frac{\|\hat{z}^\varepsilon(0)\|^2}{\alpha_1} + \frac{\|\hat{z}^\varepsilon\|_{Q_T}^2}{\beta} + \frac{\|u\|^2}{\gamma} \le J^\varepsilon(u). \tag{6.57}$$

Отже, $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} J^\varepsilon(u) = \infty$ і теорема доведена.

$\square$

Тепер перейдемо до побудови та обґрунтування усередненої мінімаксної оцінки.

Нехай стала, додатно визначена матриця a^0 є усередненою для матриці $a^\varepsilon(x)$ [38], функція $C^0 = C^0(t,x) \in L^\infty(Q_T)$ така, що

$$\begin{gathered} \forall r > 0 \quad C^\varepsilon(t,x,\xi) \to C^0(t,x), \quad \varepsilon \to 0 \;\text{ в } L^2(Q_T) \\ \text{рівномірно по } |\xi| \le r. \end{gathered} \tag{6.58}$$

Розглянемо задачу (6.43) – (6.48) з диференціальним оператором $A^0 = div(a^0\nabla)$ і спостереженням

$$\nu^0(x) = \int_0^T C^0(t,x) \cdot y(t,x)dt + g(x).$$

Відомо [106], що при фіксованому $u \in L^2(\Omega)$ розв'язок задачі

$$\begin{cases} \left(l(y) - \hat{\hat{l}}(y)\right)^2 \to \sup, \\ \{y_0, y_1, f, g\} \in G, \end{cases} \tag{6.59}$$

має вигляд

$$y_0 = -\frac{\lambda}{\alpha_0}\Lambda^{-1} z_t(0),\ y_1 = \frac{\lambda}{\alpha_1} z(0),\quad f = \frac{\lambda}{\beta} z,\ g = -\frac{\lambda}{\gamma} u, \tag{6.60}$$

де

$$\lambda^2 = \left(\frac{\|z_t(0)\|^2_{H^{-1}}}{\alpha_0} + \frac{\|z(0)\|^2}{\alpha_1} + \frac{\|z\|^2_{Q_T}}{\beta} + \frac{\|u\|^2}{\gamma} \right)^{-1},$$

а z є розв'язком задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = div(a^0 \nabla z) + l - C^0 \cdot u, \\ z|_{\partial\Omega} = 0, \\ z|_{t=T} = 0,\ z_t|_{t=T} = 0. \end{cases} \tag{6.61}$$

Для значення задачі (6.59) маємо

$$\begin{gathered} J^0(u) = \sup_{\{y_0, y_1, f, g\} \in G} \left(l(y) - \hat{\hat{l}}(y)\right)^2 = \\ = \frac{\|z_t(0)\|^2_{H^{-1}}}{\alpha_0} + \frac{\|z(0)\|^2}{\alpha_1} + \frac{\|z\|^2_{Q_T}}{\beta} + \frac{\|u\|^2}{\gamma}. \end{gathered} \tag{6.62}$$

Тоді задача

$$\sigma_0^2 = \inf_u J^0(u) \tag{6.63}$$

має єдиний розв'язок $\hat{u}^0$, який задається рівністю

$$\hat{u}^0 = -\gamma \int_0^T C^0(t, x) p(t, x) dt, \tag{6.64}$$

де p є розв'язком системи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = div(a^0 \nabla p) - \frac{1}{\beta} z, \\ \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = div(a^0 \nabla q) - C^0 \hat{u}, \\ p|_{\partial\Omega} = 0, \ q|_{\partial\Omega} = 0, \\ p|_{t=0} = \frac{1}{\alpha_0} \Lambda^{-1} q_t(0), \ p_t|_{t=0} = -\frac{1}{\alpha_1} z(0), \\ q|_{t=0} = \ q_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{6.65}$$

Введемо до розгляду функціонал

$$\hat{l}(y^\varepsilon) = \int_\Omega \nu^\varepsilon(x) \hat{u}^0(x) dx, \tag{6.66}$$

де $\hat{u}^0 \in L^2(\Omega)$ визначається з (6.64), і величину

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = J^\varepsilon(\hat{u}^0) = \sup_{\{y_0, y_1, f, g\} \in G} \left((l, y^\varepsilon)_{Q_T} - (\nu^\varepsilon, \hat{u}^0) \right)^2, \tag{6.67}$$

де y^ε – розв'язок задачі (6.43), спостереження ν^ε має вигляд (6.44).

Наступна теорема є основним результатом підрозділу 6.2.

Теорема 6.4. *За виконання умови* (6.58) *оцінка* (6.66) *є наближеною мінімаксною оцінкою для вихідної задачі* (6.43) – (6.48), *а похибки* (6.49) *і* (6.67) *є близькими при достатньо малих* $\varepsilon > 0$, *тобто* $\forall \eta > 0 \ \ \exists \varepsilon_0 > 0$ $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\left| \sigma_\varepsilon^2 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \right| < \eta. \tag{6.68}$$

Доведення. За Теоремою 6.3

$$\sigma_\varepsilon^2 = \inf_u J^\varepsilon(u) = J^\varepsilon(\hat{u}^\varepsilon).$$

Тоді

$$J^{\varepsilon}(\hat{u}^{\varepsilon}) \leq J^{\varepsilon}(0) = \sup_{\{y_0, y_1, f, g\} \in G} (l, y^{\varepsilon})^2_{Q_T}\,, \tag{6.69}$$

де y^{ε} – розв'язок задачі (6.43). Для $\forall \{y_0, y_1, f, g\} \in G$ для м. в. t виконується рівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|y^{\varepsilon}_t(t)\|^2 + (a^{\varepsilon}\nabla y^{\varepsilon}(t), \nabla y^{\varepsilon}(t))\Big) = (f(t),\, y^{\varepsilon}_t(t)).$$

З цієї рівності та та леми Гронуола виводимо, що

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \sup_{\{y_0, y_1, f, g\} \in G} \sup_{t \in [0,T]} \Big(\|y^{\varepsilon}(t)\|^2_{H^1_0} + \|y^{\varepsilon}_t(t)\|^2\Big) \leq C, \tag{6.70}$$

де константа $C > 0$ не залежить від ε.

З нерівностей (6.69), (6.70) і (6.57) виводимо, що $\{\hat{u}^{\varepsilon}\}_{\varepsilon \in (0,1)}$ обмежена в $L^2(\Omega)$, отже, по підпослідовності для деякої функції $v \in L^2(\Omega)$

$$\hat{u}^{\varepsilon} \to v \;\; \text{слабко} \;\; \text{в } L^2(\Omega), \;\; \varepsilon \to 0. \tag{6.71}$$

Доведемо, що $v = \hat{u}^0$.

Нехай $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$, $\hat{u}^{\varepsilon_k} := \hat{u}^k$. Тоді в силу (6.57)

$$\sigma^2_{\varepsilon_k} = J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k) \geq \frac{\left\|\hat{z}^k_t(0)\right\|^2_{H^{-1}}}{\alpha_0} + \frac{\left\|\hat{z}^k(0)\right\|^2}{\alpha_1} +$$
$$+ \frac{\left\|\hat{z}^k\right\|^2_{Q_T}}{\beta} + \frac{\left\|\hat{u}^k\right\|^2}{\gamma},$$

де $\left\{\hat{y}^k_0,\; \hat{y}^k_1, \hat{f}^k, \hat{g}^k\right\} \in G$ є нерухомою точкою відображення Ψ_k з Теореми 6.3, збудованого по функції $\hat{u}^k$.

Тоді по підпослідовності

$$\left\{\hat{y}^k_0, \hat{y}^k_1, \hat{f}^k, \hat{g}^k\right\} \to \left\{\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{f}, \hat{g}\right\} \;\; \text{слабко} \;\; \text{в}$$

$$H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(Q_T) \times L^2(\Omega),$$

а $\hat{z}^k$ є розв'язком задачі (6.52) з $\hat{y}^k$ і $\hat{u}^k$, $\hat{y}^k$ – розв'язок задачі (6.43) при $\varepsilon = \varepsilon_k$ з умовами $\hat{f}^k$, $\hat{y}_0^k$, $\hat{y}_1^k$. Тоді, скориставшись лемою 2.16 і лемою про компактність, виводимо, що

$$\hat{y}^k \to \hat{y} \text{ в } C([0,T]; L^2(\Omega)), \tag{6.72}$$

де $\hat{y}$ – розв'язок задачі (6.43) з умовами $\hat{f}$, $\hat{y}_0$, $\hat{y}_1$ і $\varepsilon = 0$.

Тоді, повторюючи відповідні міркування з попереднього підрозділу, можемо стверджувати, що має місце збіжність

$$C^{\varepsilon_k}(t, x, \hat{y}^k)\hat{u}^k \to C^0(t, x)v \ \text{ слабко } \text{ в } L^2(Q_T). \tag{6.73}$$

Тоді з леми 2.16

$$\hat{z}^k \to \hat{z} \ \text{ в } C\left([0,T];\, L^2(\Omega)\right), \ \hat{z}_t^k \to \hat{z}_t \text{ в } C([0,T]; H^{-1}(\Omega)), \tag{6.74}$$

де $\hat{z}$ є розв'язком задачі (6.52) з диференціальним оператором $div(a^0\nabla)$ і з правою частиною $C^0(t,x) \cdot v$.

Таким чином,

$$\begin{gathered} \varliminf_{k\to\infty} J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k) \geq \\ \varliminf_{k\to\infty} \left(\frac{\left\|\hat{z}_t^k(0)\right\|_{H^{-1}}^2}{\alpha_0} + \frac{\left\|\hat{z}^k(0)\right\|^2}{\alpha_1} + \frac{\left\|\hat{z}^k\right\|_{Q_T}^2}{\beta} + \frac{\left\|\hat{u}^k\right\|^2}{\gamma} \right) \geq \\ \geq \frac{\|\hat{z}_t(0)\|_{H^{-1}}^2}{\alpha_0} + \frac{\|\hat{z}(0)\|^2}{\alpha_1} + \frac{\|\hat{z}\|_{Q_T}^2}{\beta} + \frac{\|v\|^2}{\gamma} = J^0(v). \end{gathered} \tag{6.75}$$

З іншого боку, оскільки $\hat{u}^k$ така що

$$\inf_u J^{\varepsilon_k}(u) = J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k),$$

то $\forall u \in L^2(\Omega)$

$$J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k) \le J^{\varepsilon_k}(u) = \left(-(\bar{z}_t^k(0), \bar{y}_0^k) + (\bar{z}^k(0), \bar{y}_1^k) + (\bar{z}^k, \bar{f}^k)_{Q_T} - (\bar{g}^k, u)\right)^2,$$

де $\left\{\bar{y}_0^k, \bar{y}_1^k, \bar{f}^k, \bar{g}^k\right\}$ – розв'язок задачі (6.53) з функцією u, $\bar{z}^k$ – розв'язок задачі (6.52) при $\varepsilon = \varepsilon_k$ і з правою частиною $C^{\varepsilon_k}(t, x, \bar{y}^k) \cdot u$, $\bar{y}^k$ – розв'язок задачі (6.43) при $\varepsilon = \varepsilon_k$ з відповідними умовами $\bar{y}_0^k$, $\bar{y}_1^k$, $\bar{f}^k$.

Аналогічно до попередніх міркувань, але з фіксованою функцією u, одержуємо, що

$$\left\{\bar{y}_0^k, \bar{y}_1^k, \bar{f}^k, \bar{g}^k\right\} \to \left\{\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{f}, \bar{g}\right\} \quad \text{слабко} \;\; \text{в}$$
$$H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(Q_T) \times L^2(\Omega),$$

$$\bar{y}^k \to \bar{y} \;\; \text{в} \; C([0,T]; L^2(\Omega)), \;\; \bar{z}^k \to \bar{z} \;\; \text{в} \;\; \text{сенсі} \;\; (6.74),$$

де $\bar{z}$ є розв'язком задачі (6.52) з диференціальним оператором $div(a^0\nabla)$ і з правою частиною $C^0(t,x)\cdot u$, $\bar{y}$ – розв'язок задачі (6.43) з диференціальним оператором $div(a^0\nabla)$ та відповідними умовами $\bar{y}_0$, $\bar{f}$.

Тоді

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty} J^{\varepsilon_k}(u) = \\ &= \left(-(\bar{z}_t(0), \bar{y}_0) + (\bar{z}(0), \bar{y}_1) + (\bar{z}, \bar{f})_{Q_T} - (\bar{g}, u)\right)^2 = J^0(u).\end{aligned} \tag{6.76}$$

Таким чином, $\forall u \in L^2(\Omega)$

$$J^0(v) \le \varliminf_{k\to\infty} J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k) \le J^0(u). \tag{6.77}$$

Із (6.77) одержуємо, що $v = \hat{u}^0$ і

$$\sigma_\varepsilon^2 \to \sigma_0^2 = J^0(\hat{u}^0), \;\; \varepsilon \to 0.$$

Повторюючи попередні міркування з функцією $u = \hat{u}^0$, аналогічно (6.76) виводимо

$$\lim_{k\to\infty} J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^0) = J^0(\hat{u}^0).$$

Таким чином,

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \to \sigma_0^2, \qquad \varepsilon \to 0,$$

і теорема доведена.

$\square$

6.3 Наближені гарантовані середньоквадратичні оцінки функціоналів від розв'язків параболічних задач зі швидко коливними коефіцієнтами при нелінійних стохастичних спостереженнях

У позначеннях підрозділу 6.1 в циліндрі $Q_T = (0,T) \times \Omega$ розглядаємо задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial y^\varepsilon}{\partial t} + A^\varepsilon y^\varepsilon = f_1(t,x), \\ y^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \\ y^\varepsilon(0,x) = f_0(x), \end{cases} \tag{6.78}$$

де $A^\varepsilon = -div(a^\varepsilon(x)\nabla)$, $a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ – задана періодична, симетрична матриця, що задовольняє умови рівномірної еліптичності (2.11).

Припустимо, що при деяких f_0, f_1 спостерігається реалізація випадкової функції $\nu^\varepsilon(x)$, $x \in \Omega$ вигляду

$$\nu^\varepsilon(x) = \int_0^T C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon(t,x)) \cdot y^\varepsilon(t,x)dt + \eta(x), \tag{6.79}$$

де $C^\varepsilon = C^\varepsilon(t,x,\xi) : (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – задана вимірна обмежена функція, така що $\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in (0,1)$ для майже всіх (м. в.) $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$

$$|C^\varepsilon(t,x,\xi)| \leq C_1(t,x), \tag{6.80}$$

де $C_1 \in L^\infty(Q_T)$ – задана невід'ємна функція; $\eta(x)$ - випадкове поле, для якого $E\eta(x) = 0$ і функція $E\eta^2(x)$ вимірна та інтегрована.

Функції $f \in L^2(Q_T)$ і $f_0 \in L^2(\Omega)$ з (6.78) невідомі, проте відомо, що вони належать обмеженій замкненій опуклій множині F з простору $L^2(\Omega) \times$

$L^2(Q_T)$.

Кореляційна функція $R(x_1, x_2) = E\eta(x_1)\eta(x_2)$ невідома, але відомо, що вона належить обмеженій множині V з простору $L^2(\Omega \times \Omega)$.

Наша задача полягатиме в тому, щоб оцінити функціонал

$$l(y^\varepsilon) = \int_{Q_T} l(t,x) y^\varepsilon(t,x) dt\, dx, \tag{6.81}$$

де $l \in L^2(Q_T)$ – задана функція, y^ε – розв'язок задачі (6.78).

Означення 6.1. *Лінійною оцінкою функціоналу $l(y^\varepsilon)$ назвемо вираз*

$$\hat{l}(y^\varepsilon) = \int_\Omega u(x)\nu^\varepsilon(x) dx + C = (u,\, \nu^\varepsilon) + C, \tag{6.82}$$

де $u \in L^2(\Omega)$ – задана функція, $\nu^\varepsilon(x)$ – спостереження (6.79)*, $C \in \mathbb{R}^1$ – константа.*

Означення 6.2. *Вираз*

$$\sigma_\varepsilon(u,c) = \left(\sup_{F,V} E(l(y^\varepsilon) - \hat{l}(y^\varepsilon))^2 \right)^{1/2} \tag{6.83}$$

назвемо гарантованою середньоквадратичною похибкою оцінювання.

Означення 6.3. *Оцінка*

$$\hat{\hat{l}}(y^\varepsilon) = \int_\Omega \hat{u}(x)\nu^\varepsilon(x) dx + \hat{c} = (\hat{u},\, \nu^\varepsilon) + \hat{c}, \tag{6.84}$$

для якої $(\hat{u}, \hat{c}) \in Arg \min \sigma_\varepsilon(u,c)$, тобто $\inf_{u,c} \sigma_\varepsilon^2(u,c) = \sigma_\varepsilon^2(\hat{u}, \hat{c})$, називається гарантованою лінійною середньоквадратичною оцінкою (ГЛСО) функціоналу $\hat{l}(y^\varepsilon)$, а величина $\sigma_\varepsilon(\hat{u}, \hat{c})$ – гарантованою середньоквадратичною похибкою (ГСП) оцінки $\hat{\hat{l}}(y^\varepsilon)$.

Нехай для деякого $\gamma > 0$ множина V містить підмножину V_1 вигляду

$$V_1 = \left\{ R : \int_{\Omega\times\Omega} \left(R(x_1,x_2) - R_0(x_1,x_2)\right)^2 dx_1 dx_2 \le \gamma^2 \right\}. \tag{6.85}$$

де $R_0 \in L^2(\Omega \times \Omega)$ - відома кореляційна функція.

Має місце наступний результат.

Лема 6.1. *Існує ГЛСО функціоналу $l(y^\varepsilon)$ і при цьому*

$$\hat{c} = \frac{1}{2}\left(\alpha_\varepsilon^+(\hat{u}) + \alpha_\varepsilon^-(\hat{u})\right), \tag{6.86}$$

$$\begin{gathered} \sigma_\varepsilon^2(\hat{u},\hat{c}) = \tfrac{1}{4}\left(\alpha_\varepsilon^+(\hat{u}) - \alpha_\varepsilon^-(\hat{u})\right)^2 + \\ + \sup_V \textstyle\int_{\Omega\times\Omega} R(x_1,x_2)\hat{u}(x_1)\hat{u}(x_2)dx_1dx_2, \end{gathered} \tag{6.87}$$

де

$$\alpha_\varepsilon^+(\hat{u}) = \sup_F \; S_\varepsilon(f,\hat{u}), \quad \alpha_\varepsilon^-(\hat{u}) = \inf_F \; S_\varepsilon(f,\hat{u}),$$

$$S_\varepsilon(f,\hat{u}) = l(y^\varepsilon) - \int_{Q_T} \hat{u}(x)\, C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon(t,x)) \cdot y^\varepsilon(t,x)dtdx.$$

Доведення. Дійсно, згідно з означенням 6.2 має місце рівність

$$\sigma_\varepsilon^2(u,c) = \sup_F \; (S_\varepsilon(f,u) - c)^2 +$$

$$+ \sup_V E(\int_\Omega u(x)\eta(x)dx)^2 =$$

$$= \sup_F \; (S_\varepsilon(f,u) - c)^2 +$$

$$+ \sup_V \int_{\Omega\times\Omega} R(x_1,x_2)u(x_1)u(x_2)dx_1dx_2.$$

Зауважимо, що $\sigma_\varepsilon^2(u,c)$ – опуклий напівнеперервний знизу функціонал за змінною $u \in L^2(\Omega)$. Крім того, виконується нерівність

$$\sigma_\varepsilon^2(u,c) \geq \sup_F \left(S_\varepsilon(f,u) - c\right)^2 +$$

$$+\sup_{V_1} \int_{\Omega\times\Omega} R(x_1,x_2)u(x_1)u(x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \sup_F \left(S_\varepsilon(f,u) - c\right)^2 + \int_{\Omega\times\Omega} R_0(x_1,x_2)u(x_1)u(x_2)dx_1dx_2 +$$

$$+\sup_{V_1} \int_{\Omega\times\Omega} \left(R(x_1,x_2) - R_0(x_1,x_2)\right) u(x_1)u(x_2)dx_1dx_2.$$

Далі одержимо, що

$$\begin{gathered}\sup_{V_1} \textstyle\int_{\Omega\times\Omega} \left(R(x_1,x_2) - R_0(x_1,x_2)\right) u(x_1)u(x_2)dx_1dx_2 = \\ = |\gamma| \textstyle\int_\Omega u^2(x)dx.\end{gathered} \tag{6.88}$$

З останньої рівності випливає, що $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \sigma_\varepsilon^2(u,c) = \infty$. Отже, функціонал σ_ε є коерцитивним і слабо напівнеперервним знизу, тому за теоремою Вейєрштраса існує $\hat{u}$ таке, що

$$\inf_u \sigma_\varepsilon^2(u,c) = \sigma_\varepsilon^2(\hat{u},c). \tag{6.89}$$

Зауважимо далі, що виконується нерівність

$$\alpha_\varepsilon^-(u) \leq S_\varepsilon(f,u) \leq \alpha_\varepsilon^+(u),$$

звідки випливає, що

$$\sigma_\varepsilon^2(u,c) = \left(\frac{1}{2}\left(\alpha_\varepsilon^+(u) - \alpha_\varepsilon^-(u)\right) + \left|c - \frac{1}{2}\left(\alpha_\varepsilon^+(u) + \alpha_\varepsilon^-(u)\right)\right|\right)^2 + \tag{6.90}$$

$$+\sup_V \int_{\Omega\times\Omega} R(x_1,x_2)u(x_1)u(x_2)dx_1dx_2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{4}\left(\alpha_\varepsilon^+(u) - \alpha_\varepsilon^-(u)\right)^2 +$$

$$+\sup_V \int_{\Omega\times\Omega} R(x_1,x_2)u(x_1)u(x_2)dx_1dx_2 \geq$$

$$\geq \min_u \left\{\frac{1}{4}\left(\alpha_\varepsilon^+(u) - \alpha_\varepsilon^-(u)\right)^2 + \sup_V \int_{\Omega\times\Omega} R(x_1,x_2)u(x_1)u(x_2)dx_1dx_2\right\},$$

а мінімум в останній нерівності досягається при $u = \hat{u}$, а отже,

$$\hat{c} = \frac{1}{2}\left(\alpha_\varepsilon^+(\hat{u}) + \alpha_\varepsilon^-(\hat{u})\right), \tag{6.91}$$

і при цьому

$$\sigma_\varepsilon^2(\hat{u},\hat{c}) = \frac{1}{4}\left(\alpha_\varepsilon^+(\hat{u}) - \alpha_\varepsilon^-(\hat{u})\right)^2 +$$

$$+\sup_V \int_{\Omega\times\Omega} R(x_1,x_2)\hat{u}(x_1)\hat{u}(x_2)dx_1dx_2.$$

$\square$

Для побудови наближеної оцінки переходимо до усереднених параметрів. А саме, нехай стала, додатно визначена матриця a^0 є усередненою для матриці $a^\varepsilon(x)$, $A^0 = -div(a^0\nabla)$, вимірна обмежена функція $C^0(t,x) \in L^\infty(Q_T)$ є усередненою до C^ε в тому сенсі, що

$$\forall r \;\; C^\varepsilon(t,x,\xi) \to C^0(t,x) \text{ при } \varepsilon \to 0 \;\; \text{рівномірно} \;\; \text{по} \;\; |\xi| \leq r. \tag{6.92}$$

При фіксованому $u \in L^2(\Omega)$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial y^0}{\partial t} + A^0 y^0 = f_1(t,x), \\ y^0|_{\partial\Omega} = 0, \\ y^0(0,x) = f_0(x). \end{cases} \tag{6.93}$$

Припустимо, що при деяких $f_1(t,x) \in L^2(Q_T)$, $f_0(x) \in L^2(\Omega)$ спостерігається реалізація випадкової функції $\nu^0(x)$, $x \in \Omega$ вигляду

$$\nu^0(x) = \int_0^T C^0(t,x) \cdot y^0(t,x)dt + \eta(x). \tag{6.94}$$

Нехай функція $\hat{u}_0 \in L^2(\Omega)$ і число $\hat{c}^0$ знаходиться із розв'язку задачі

$$\inf_{u,c} \sigma_0^2(u,c) = \sigma_0^2(\hat{u}^0, \hat{c}^0), \tag{6.95}$$

де

$$\begin{gathered} \sigma_0^2(\hat{u}^0, \hat{c}^0) = \tfrac{1}{4}\left(\alpha_0^+(\hat{u}^0) - \alpha_0^-(\hat{u}^0)\right)^2 + \\ + \sup_V \int_{\Omega\times\Omega} R(x_1,x_2)\hat{u}^0(x_1)\hat{u}^0(x_2)dx_1dx_2, \end{gathered} \tag{6.96}$$

$$\alpha_0^+(\hat{u}^0) = \sup_F \; S_0(f,\hat{u}^0), \quad \alpha_0^-(\hat{u}^0) = \inf_F \; S_0(f,\hat{u}^0), \tag{6.97}$$

$$S_0(f,\hat{u}^0) = l(y^0) - \int_{Q_T} \hat{u}^0(x)\, C^0(t,x) \cdot y^0(t,x)dtdx,$$

тут $l(y^0)$ – функціонал вигляду (6.81), y^0 – розв'язок задачі (6.78) при $\varepsilon = 0$.

Означення 6.4. *Оцінку вигляду*

$$\hat{l}_0(y^\varepsilon) = (\hat{u}^0, \nu^\varepsilon) + \hat{c}^0, \tag{6.98}$$

де ν^ε – спостереження вигляду (6.79), *y^ε – розв'язок задачі* (6.78), *назвемо наближеною гарантованою середньоквадратичною оцінкою (НГСО) до гарантованої лінійної середньоквадратичної оцінки.*

Теорема 6.5. *Має місце гранична рівність*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{F,V} E\left(l(y^\varepsilon) - \hat{l}_0(y^\varepsilon)\right)^2 = \sigma_0^2, \tag{6.99}$$

де

$$\begin{gathered}\sigma_0^2 = \sup_F \left(l(y^0) - \int_{Q_T} \hat{u}^0(x)\, C^0(t,x) \cdot y^0(t,x) dt dx - \hat{c}_0\right)^2 + \\ + \sup_V \int_{\Omega\times\Omega} R(x_1,x_2)\hat{u}^0(x_1)\hat{u}^0(x_2) dx_1 dx_2\end{gathered} \tag{6.100}$$

Доведення. Зауважимо, що

$$\begin{gathered}\sup_{F,V} E\left(l(y^\varepsilon) - \hat{l}_0(y^\varepsilon)\right)^2 = \sup_F \bigl(l(y^\varepsilon) - \\ - \int_{Q_T} \hat{u}^0(x)\, C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon(t,x)) \cdot y^\varepsilon(t,x) dt dx - \hat{c}^0\bigr)^2 + \\ + \sup_V \int_{\Omega\times\Omega} R(x_1,x_2)\hat{u}^0(x_1)\hat{u}^0(x_2) dx_1 dx_2.\end{gathered} \tag{6.101}$$

Нехай $\left\{\hat{f}_0^k, \hat{f}_1^k\right\}$ – максимізуюча послідовність у (6.101). Тоді по підпослідовності

$$\left\{\hat{f}_0^k, \hat{f}_1^k\right\} \to \left\{\hat{f}_0, \hat{f}_1\right\} \text{ слабко в } L^2(\Omega) \times L^2(Q_T).$$

Тоді з леми про компактність та Леми 2.15 випливає

$$\hat{y}^k \to \hat{y}^0 \text{ в } L^2(Q_T), \tag{6.102}$$

де $\hat{y}^0$ – розв'язок задачі (6.93) з умовами $\hat{f}_1$, $\hat{f}_0$.

Аналогічно міркуванннням попередніх підрозділів звідси виводимо

$$C^{\varepsilon_k}(t,x,\hat{y}^k)\hat{u}^k \to C^0(t,x)\hat{u}^0 \text{ слабко в } L^2(Q_T). \tag{6.103}$$

Із збіжностей (6.102) і (6.103) ми одержуємо рівність (6.99). Теорему доведено.

□

Знайдемо вигляд НГСО у випадку, коли $V = V_1$, а множина F має вигляд

$$\begin{gathered} F = \Big\{ (f_0,\, f_1) :\ \Phi(f_0,\, f_1) = \int_\Omega q_0^2(x) \left(f_0(x) - \bar{f}_0(x)\right)^2 dx + \\ + \int_{Q_T} q_1^2(t,x) \left(f_1(t,x) - \bar{f}_1(t,x)\right)^2 dxdt \le 1 \Big\}, \end{gathered} \tag{6.104}$$

де $q_0(x)$, $q_1(t,x)$ – неперервні функції у відповідних замкнених областях, причому $\alpha_0 \ \ \alpha_1 < 0$ такі, що $q_0^2(x) \ge \alpha_0$, $q_1^2(t,x) \ge \alpha_1$, $\bar{f}_0(x)$, $\bar{f}_1(t,x)$ - відомі функції із $L^2(\Omega)$ та $L^2(Q_T)$ відповідно.

Знайдемо функцію $\hat{u}^0(x)$ та константу $\hat{c}^0$ для цього випадку. Спочатку введемо функції $\hat{z}(t,x)$ та $\hat{p}(t,x)$ як узагальнені розв'язки систем рівнянь

$$\begin{cases} -\frac{\partial \hat{z}}{\partial t} + A^0 \hat{z} = -l(t,x) + C^0(t,x)\hat{u}^0(x), \\ \hat{z}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \hat{z}(T,x) = 0, \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + A^0 \hat{p} = q_1^{-2}(t,x)\hat{z}(t,x), \\ \hat{p}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \hat{p}(0,x) = q_0^{-2}(x)\hat{z}(0,x), \end{cases} \tag{6.105}$$

а також виконується рівність

$$R_0 \hat{u}^0 + |\gamma|\, \hat{u}^0(x) = \int_0^T C^0(t,x)\hat{p}(t,x)dt. \tag{6.106}$$

Система (6.105) має єдиний розв'язок в просторі $W(0,T) \times W(0,T)$.

Теорема 6.6. *Має місце рівність*

$$\sigma_0^2 = l(\hat{p}), \tag{6.107}$$

функція $\hat{u}^0(x)$ *визначається із систем рівнянь* (6.105) *і при цьому*

$$\hat{c}^0 = \int_\Omega \hat{z}(0,x)\bar{f}_0(x)dx + \int_{Q_T} \hat{z}(t,x)\bar{f}_1(t,x)dtdx. \tag{6.108}$$

Доведення. Нехай $\hat{z}(t,x)$ є узагальненим розв'язком першого рівняння системи (6.105). Введемо функції $\alpha_0^+(u)$, $\alpha_0^-(u)$, як наведено у виразах (6.95), де

$$S_0(f,u) = \int_\Omega \hat{z}(0,x)f_0(x)dx + \int_{Q_T} \hat{z}(t,x)f_1(t,x)dtdx. \tag{6.109}$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, одержимо

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\left(\alpha_0^+(u) - \alpha_0^-(u)\right) = \\ = \left(\int_\Omega \hat{z}^2(0,x)\, q_0^{-2}(x)dx + \int_{Q_T} \hat{z}^2(t,x)q_1^{-2}(t,x)dtdx\right)^{\frac{1}{2}} = \\ = d_1(\hat{z}), \end{gathered} \tag{6.110}$$

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\left(\alpha_0^+(u) + \alpha_0^-(u)\right) = \int_\Omega \hat{z}(0,x)\bar{f}_0(x)dx + \\ + \int_{Q_T} \hat{z}(t,x)\bar{f}_1(t,x)dtdx = d_2(\hat{z}). \end{gathered} \tag{6.111}$$

Звідси, враховуючи вираз для $\sup\limits_{V_1}(Ru,u)$ та вираз (6.87), отримаємо

$$\begin{gathered} J^0(u) = d_1^2(\hat{z}) + \int_{\Omega\times\Omega} R_0(x_1,x_2)u(x_1)u(x_2)dx_1dx_2 + \\ + |\gamma| \int_\Omega u^2(x)dx. \end{gathered} \tag{6.112}$$

Оскільки $J^0(u)$ – опуклий слабко-напівнеперервний знизу функціонал і $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} J^0(u) = \infty$, то існує єдина функція $\hat{u}^0(x) \in L^2(\Omega)$, яка знаходиться із розв'язку задачі

$$\inf_u J^0(u) = J^0(\hat{u}^0).$$

Тоді для функції $\hat{u}^0(x)$ справедлива тотожність

$$\frac{d}{d\tau} J^0(\hat{u}^0 + \tau v)|_{\tau=0} \equiv 0 \quad \forall v(x) \in L^2(\Omega). \tag{6.113}$$

Введемо функцію $\hat{p}(t,x)$ як узагальнений розв'язок другого рівняння системи (6.105). Оскільки $q_1^{-2}(t,x)\hat{z}(t,x) \in L^2(Q_T)$, то у просторі $W(0,T)$ існує єдиний розв'язок цього рівняння із системи (6.105). Тоді

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau} J^0(\hat{u}^0 + \tau v)|_{\tau=0} = |\gamma| \int_\Omega \hat{u}^0(x) v(x) dx +$$

$$+ \int_\Omega \int_\Omega R_0(x,x_1)\hat{u}^0(x_1)\, dx_1 v(x) dx - \tag{6.114}$$

$$- \int_\Omega \int_0^T C^0(t,x)\hat{p}(t,x)\, dt \cdot v(x) dx \equiv 0.$$

Звідси одержимо, що функція $\hat{u}^0(x)$ є розв'язком рівняння

$$\begin{gathered} |\gamma|\, \hat{u}^0(x) + \textstyle\int_\Omega R_0(x,x_1)\hat{u}^0(x_1)\, dx_1 = \\ = \textstyle\int_0^T C^0(t,x)\hat{p}(t,x)\, dt. \end{gathered} \tag{6.115}$$

Доведемо далі, що виконується рівність (6.107). Оскільки

$$\begin{gathered} \sigma_0^2 = d_1^2(\hat{z}) + \textstyle\int_{\Omega\times\Omega} R_0(x_1,x_2)\hat{u}^0(x_1)\hat{u}^0(x_2) dx_1 dx_2 + \\ + |\gamma| \textstyle\int_\Omega (\hat{u}^0(x))^2 dx, \end{gathered} \tag{6.116}$$

то, враховуючи рівняння для $\hat{p}(t,x)$ системи (6.105), одержимо, що

$$d_1(\hat{z}) = \int_{\Omega} \hat{z}(0,x)\,\hat{p}(0,x)dx + \int_{Q_T} \hat{z}(t,x)\hat{p}(t,x)dtdx = \tag{6.117}$$

$$= \int_{Q_T} l(t,x)\hat{p}(t,x)dtdx - \int_{Q_T} \hat{u}^0(x)C^0(t,x)\hat{p}(t,x)dtdx,$$

а згідно з (6.115) маємо

$$|\gamma| \int_{\Omega} (\hat{u}^0(x))^2 dx + \int_{\Omega\times\Omega} R_0(x,x_1)\hat{u}^0(x)\hat{u}^0(x_1)\,dx_1dx =$$

$$= \int_{Q_T} \hat{u}^0(x)C^0(t,x)\hat{p}(t,x)\,dtdx.$$

Звідси одержимо, що

$$\sigma_0^2 = \int_{Q_T} l(t,x)\hat{p}(t,x)dtdx, \tag{6.118}$$

що і доводить рівність (6.107). Теорема доведена.

$\square$

Зауваження 6.1. *Якщо функція $f_1(t,x)$ – відома і дорівнює $\bar{f}_1(t,x)$, то тоді система рівнянь для визначення $\hat{u}^0(x)$ матиме вигляд*

$$\begin{cases} -\frac{\partial \hat{z}}{\partial t} + A^0\hat{z} = -l(t,x) + C^0(t,x)\hat{u}^0(x), \\ \hat{z}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \hat{z}(T,x) = 0, \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + A^0\hat{p} = 0, \\ \hat{p}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \hat{p}(0,x) = q_0^{-2}(x)\hat{z}(0,x), \end{cases} \tag{6.119}$$

а також виконується рівність (6.106).

Приклад 6.1. *Знайдемо розв'язок системи (6.119) у випадку, коли*

$$R_0 = 0, \quad q_0(x) = q_0, \quad C^0(t,x) = C(t).$$

Нехай $\{\psi_k\}$, $\{\lambda_k\}$ – розв'язки спектральної задачі

$$\begin{cases} A^0\psi = \lambda\psi, \\ \psi\,|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

Будемо шукати функції $\hat{z}(t,x)$ та $\hat{p}(t,x)$ у вигляді

$$\hat{z}(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\psi_k(x), \;\; \hat{p}(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)\psi_k(x). \tag{6.120}$$

Розкладемо функцію $l(t,x)$ в ряд

$$l(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k(t)\psi_k(x). \tag{6.121}$$

Тоді для $z_k(t)$ і $p_k(t)$ будемо мати систему рівнянь

$$\begin{cases} -\dot{z}_k(t) + \lambda_k z_k(t) = l_k(t) - C(t)x_k, \;\; z_k(T) = 0, \\ \dot{p}_k(t) + \lambda_k p_k(t) = 0, \;\; p_k(0) = q_0^{-2} z_k(0), \end{cases} \tag{6.122}$$

де

$$x_k = \int_0^T C(\tau)p_k(\tau)d\tau. \tag{6.123}$$

Оскільки розв'язок першого рівняння системи (6.122) має вигляд

$$z_k(t) = z_{1k}(t) - x_k z_{2k}(t), \tag{6.124}$$

де $z_{ik}(t), \; i = 1,2$ – розв'язки рівнянь

$$\dot{z}_{1k}(t) + \lambda_k z_{1k}(t) = l_k(t), \;\; z_k(T) = 0, \tag{6.125}$$

$$\dot{z}_{2k}(t) + \lambda_k z_{2k}(t) = C(t),\ z_{2k}(T) = 0, \tag{6.126}$$

то розв'язок другого рівняння системи (6.122) $p_k(t)$ *буде мати вигляд*

$$p_k(t) = p_{1k}(t) - x_k p_{2k}(t), \tag{6.127}$$

де $p_{ik}(t),\ i = 1, 2$ – *розв'язки рівнянь*

$$\dot{p}_{1k}(t) + \lambda_k p_{1k}(t) = 0,\ p_{1k}(0) = q_0^{-2} z_{1k}(0), \tag{6.128}$$

$$\dot{p}_{2k}(t) + \lambda_k p_{2k}(t) = 0,\ p_{2k}(0) = q_0^{-2} z_{2k}(0), \tag{6.129}$$

тобто

$$p_{1k}(0) = e^{-\lambda_k t} q_0^{-2} z_{1k}(0), \quad p_{2k}(0) = e^{-\lambda_k t} q_0^{-2} z_{2k}(0). \tag{6.130}$$

Звідси та з (6.127) *одержимо*

$$p_k(t) = e^{-\lambda_k t} q_0^{-2} \left(z_{1k}(0) - x_k z_{2k}(0) \right), \tag{6.131}$$

а згідно з (6.123)

$$x_k = \int_0^T C(t) e^{-\lambda_k t} dt \,\cdot\, q_0^{-2} \left(z_{1k}(0) - x_k z_{2k}(0) \right), \tag{6.132}$$

а, отже, $x_k = b_k z_k(0)$, *де*

$$b_k = \left(1 + \int_0^T C(t) e^{-\lambda_k t} dt \,\cdot\, q_0^{-2} z_{2k}(0) \right)^{-1} \times$$

$$\times \int_0^T C(t) e^{-\lambda_k t} dt \,\cdot\, q_0^{-2} z_{1k}(0).$$

Тоді із рівностей (6.106) *і* (6.123) *отримаємо, що*

$$\hat{u}^0(x) \ = |\gamma|^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)\psi_k(x)$$

і при цьому

$$\hat{c}^0 = \int_\Omega \hat{z}(0,x)\bar{f}_0(x)dx. \tag{6.133}$$

6.4 Мінімаксні оцінки функціоналів від періодичних за часом розв'язків крайових задач Неймана для параболічних рівнянь

В цьому підрозділі будемо використовувати наступні позначення: нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область з гладкою границею $\partial\Omega = \Gamma$ класу C^2; $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Sigma = (0,T) \times \Gamma$ – бокова поверхня циліндра Q; через $d\Gamma$ будемо позначати елемент міри на поверхні Γ; через $L^2((0,T) \times \Gamma)$ позначимо простір функцій, сумовних з квадратом на поверхні $(0,T) \times \Gamma$; $L^\infty(R^1 \times \Omega)$ – простір вимірних і майже скрізь обмежених на множині $R^1 \times \Omega$ функцій; $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ – простір функцій, визначених і вимірних (стосовно міри Лебега dt) на інтервалі $(0,T)$ зі значеннями у гільбертовому просторі $H^1(\Omega)$ і таких, що

$$\int_0^T ||f(\cdot,t)||^2_{H^1(\Omega)} dt < \infty;$$

аналогічно визначається простір $L^2(0,T;(H^1(\Omega))')$, де через $(H^1(\Omega))'$ позначений спряжений до $H^1(\Omega)$ простір. Через $W(0,T;\Omega)$ позначимо простір функцій $f \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, таких що $\partial f/\partial t \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))')$, де похідна $\partial f/\partial t$ береться від функції f, яка розглядається як розподіл на $(0,T)$ зі значеннями в $H^1(\Omega)$. Цей простір є гільбертовим відносно норми

$$\|f\|_{W(0,T;\Omega)} = \left(\int_0^T \left(||f(\cdot,t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||\partial f(\cdot,t)/\partial t||^2_{(H^1(\Omega))'} \right) dt \right)^{1/2}.$$

Через $W^*(R^1;\Omega)$ будемо позначати клас функцій $\tilde{U} \in W(0,T;\Omega)$, які задовольняють умову $\tilde{U}(0,x) = \tilde{U}(T,x), \quad \forall x \in \Omega$, і продовжені за змінною t періодично з періодом $T > 0$, так що $\forall \tilde{U} \in W^*(R^1;\Omega)$: $\tilde{U}(t+T,x) = \tilde{U}(t,x) \;\; \forall t \in R^1, \quad x \in \Omega$.

Позначимо через $S := (f_1, f_2)$ множину пар функцій $\tilde{f}_1(t,x)$ і $\tilde{f}_2(t,x)$, заданих відповідно в області $R^1 \times \Omega$ і на її границі $R^1 \times \Gamma$ і таких, що задовольняють умови:

$$\tilde{f}_1(t+T, x) = \tilde{f}_1(t, x) \;\; \forall t \in R^1, \; x \in \Omega,$$

$$\tilde{f}_2(t+T, x) = \tilde{f}_2(t, x) \; \forall t \in R^1, \; x \in \Gamma,$$

$$\tilde{f}_1 \in L^2((0,T) \times \Omega), \quad \tilde{f}_2 \in L^2((0,T) \times \Gamma),$$

$$\int_0^T \int_\Omega \tilde{f}_1(t,x) dt\, dx + \int_0^T \int_\Gamma \tilde{f}_2(t,x) dt\, dx = 0.$$

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} + A(t)U(t,x) = G(t,x), \quad (t,x) \in R^1 \times \Omega, \tag{6.134}$$

з крайовою умовою Неймана

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial \nu_A} = g(t,x), \quad (t,x) \in R^1 \times \Gamma, \tag{6.135}$$

де $A = A(t)$ – диференціальний оператор, заданий в області $(0,T) \times \Omega$, вигляду

$$A(t)U(t,x) = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial/\partial x_i \left(a_{ij}(t,x) \partial U(t,x)/\partial x_j \right),$$

коефіцієнти $a_{ij}(t,x)$ якого задовольняють умови

$$a_{ij}(t+T, x) = a_{ij}(x,t) \;\; \forall t \in R^1, \; x \in \Omega, \; a_{ij} \in L^\infty(R^1 \times \Omega),$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \alpha > 0, \ \forall \xi_i \in R^1$$

майже скрізь в $R^1 \times \Omega$; через $\nu(x)$ позначена зовнішня по відношенню до області Ω одинична нормаль в точці $x \in \Gamma$,

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \frac{\partial U(t,x)}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i),$$

де $\cos(\nu, x_i)$ – і-й направляючий косинус нормалі ν.

Можна показати, що задача (6.134) – (6.135) має розв'язок

$$U \in W^*(R^1; \Omega) \tag{6.136}$$

тоді і лише тоді, коли

$$(G, g) \in S, \tag{6.137}$$

і цей розв'язок визначений з точністю до константи. При цьому під узагальненим розв'язком задачі (6.134) – (6.136) будемо розуміти функцію U, яка задовольняє (6.136) й інтегральну тотожність

$$\int_0^T \left(\frac{\partial U(\cdot,t)}{\partial t}, V(\cdot,t) \right) dt + \int_0^T a(t; U(\cdot,t), V(\cdot,t)) dt =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega GV \, dx \, dt + \tag{6.138}$$

$$+ \int_0^T \int_\Gamma gV \, d\Gamma \, dt \quad \forall V \in L^2(0,T; H^1(\Omega)),$$

де

$$a(t; U, V) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x,t) \frac{\partial U(x)}{\partial x_j} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} dx;$$

через $(\cdot,\cdot)$ позначено відношення дуальності на $(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)$, узгоджене зі скалярним добутком в $L^2(\Omega)$.

Із сформульованого вище твердження безпосередньо випливає, що крайова задача Неймана вигляду

$$-\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + A^*(t)V(t,x) = \tilde{G}(t,x), \quad (t,x) \in R^1 \times \Omega, \tag{6.139}$$

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial \nu_{A^*}} = \tilde{g}(t,x), \quad (t,x) \in R^1 \times \Gamma, \tag{6.140}$$

спряжена до задачі (6.134), (6.135), має розв'язок

$$V \in W^*(R^1;\Omega) \tag{6.141}$$

тоді і лише тоді, коли $(\tilde{G},\tilde{g}) \in S$ і цей розв'язок визначений з точністю до константи. Під узагальненим розв'язком задачі (6.139) – (6.141) будемо розуміти функцію V, яка задовольняє (6.141) й інтегральну тотожність

$$-\int_0^T \left(\frac{\partial V(\cdot,t)}{\partial t}, U(t,\cdot)\right) dt + \int_0^T a(t;U(t,\cdot),V(t,\cdot))dt =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \tilde{G}(t,x)U(t,x)dx\,dt + \int_0^T \int_\Gamma \tilde{g}(t,x)U(t,x)d\Gamma\,dt, \tag{6.142}$$

$$\forall U \in L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Розв'язки $U(t,x)$ і $V(t,x)$ задач (6.134) – (6.136) і (6.139) – (6.141) визначаються єдиним чином, якщо їх пронормувати умовами

$$\int_0^T \int_\Omega U(t,x)dx\,dt = 0, \quad \int_0^T \int_\Omega V(t,x)dx\,dt = 0, \tag{6.143}$$

і для них виконуються нерівності

$$\|U\|_{W(0,T;\Omega)} \leq C_T \left(\|G\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \right), \tag{6.144}$$

$$\|V\|_{W(0,T;\Omega)} \leq \tilde{C}_T \left(\left\|\tilde{G}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\tilde{g}\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \right), \tag{6.145}$$

де C_T і $\tilde{C}_T$ – константи, які залежать лише від T.

Перейдемо до постановки задачі мінімаксного оцінювання.

Покладемо $H := (L^2(\Omega))^m$. Позначимо через G_0 множину трійок функцій $\tilde{f}(t,x)$, $\tilde{h}(t,x)$ і $\tilde{\xi}(t,x) := (\tilde{\xi}_1(t,x), ..., \tilde{\xi}_m(t,x))$, заданих відповідно на множинах $R^1 \times \Omega$, $R^1 \times \Gamma$ і $\bar{Q}_m$, які задовольняють умови:

$$(\tilde{f}, \tilde{h}) \in S, \quad \tilde{\xi} := (\tilde{\xi}_1, ..., \tilde{\xi}_m) \in H,$$
$$\int_0^T \int_\Omega \left((\tilde{f}(t,x) - f_0(t,x))^2 q^2(t,x) + \sum_{k=1}^m \tilde{\xi}_k^2(t,x) r_k^2(t,x) \right) dx\, dt +$$
$$+ \int_0^T \int_\Gamma (\tilde{h}(t,x) - h_0(t,x))^2 q_1^2(t,x) d\Gamma\, dt \leq 1,$$

де $f_0(t,x)$, $h_0(t,x)$ – задані функції, такі що $(f_0, h_0) \in S$, $q(t,x)$ і $q_1(t,x)$ – неперервні T-періодичні по t функції відповідно на множинах $R^1 \times \bar{\Omega}$ i $R^1 \times \Gamma$, а $r_k \in C(\bar{Q})$, $\quad k = \overline{1,m}$.

Нехай деякий T-періодичний у часі процес описується функцією $\varphi(t,x)$, яка задовольняє крайову задачу Неймана

$$\varphi \in W^*(R^1; \Omega), \tag{6.146}$$

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + A(t)\varphi(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in R^1 \times \Omega, \tag{6.147}$$

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial\nu_A} = h(t,x), \quad (t,x) \in R^1 \times \Gamma, \tag{6.148}$$

де $(f,h) \in S$.

Припустимо, що в області Ω на проміжку часу $t \in [0,T]$ спостерігаються функції

$$y_k(\varphi,\xi_k;t,x) = \int_0^T \int_\Omega g_k(t,x,\tau,y)\varphi(\tau,y)dy\,d\tau + \xi_k(t,x),$$
$$(t,x) \in (0,T) \times \Omega, \tag{6.149}$$

де $\varphi(t,x)$ – розв'язок задачі (6.134) – (6.136), $\xi_k \in L^2((0,T)\times\Omega)$, $k = \overline{1,m}$, – похибки у спостереженнях, g_k – функції, задані на множині $[0,T]\times\bar\Omega\times R^1\times\bar\Omega$ такі, що $g_k(t,x,\tau+T,y) = g_k(t,x,\tau,y)$ $\forall\tau \in R^1$, $t \in [0,T]$, $x,y \in \Omega$, $g_k \in L^2(Q\times Q)$, і, крім того, припускається, що існує хоча б одне число i_0, $1 \le i_0 \le m$, таке що

$$\int_0^T \int_\Omega g_{i_0}(t,x,\tau,y)dy\,d\tau \neq 0. \tag{6.150}$$

Іншими словами, не всі інтегральні оператори, що визначаються першими доданками у правих частинах (6.149), переводять константи в нуль. Умова (6.150) забезпечує взаємно однозначну відповідність між розв'язками $\varphi(x)$ крайової задачі Неймана (6.146) – (6.148), які відповідають фіксованим f і h і функціями $y_{i_0}(\varphi,\xi;t,x)$ при заданих реалізаціях похибок $\xi_{i_0}(t,x)$.

Будемо далі вважати, що функції $f(t,x)$ і $h(t,x)$ у правих частинах рівнянь (6.147) і (6.148), а також функції $\xi_k(t,x)$, які описують похибки у спостереженнях (6.149), не відомі точно, а відомо лише, що

$$F := (f,h,\xi) \in G_0. \tag{6.151}$$

Нехай в області $Q = (0, T) \times \Omega$ задана функція $l_0 \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$, T-періодична по t, $l_0(t, t+T, x) = l_0(t, x)$. Задача оцінювання полягає в тому, щоб за спостереженнями вигляду (6.149) за станом системи, яка описується крайовою задачею Неймана (6.134) – (6.136) при умовах (6.151), оцінити лінійний функціонал

$$l(\varphi) = \int_0^T \int_\Omega l_0(t, x)\varphi(t, x)dx\, dt \tag{6.152}$$

в класі лінійних за спостереженнями оцінок вигляду

$$\hat{l}(\varphi) = \int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^m u_k(t, x)y_k(\varphi, \xi_k; t, x)dx\, dt + c, \tag{6.153}$$

де $u_k \in L^2(Q)$, $k = \overline{1, m}$, $c \in R^1$. Покладемо $u := (u_1, ..., u_m)$.

Означення 6.5. *Оцінку*

$$\hat{\hat{l}}(\varphi) = \int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^m \hat{u}_k(t, x)y_k(\varphi, \xi_k; t, x)dx\, dt + \hat{c},$$

в якій функції $\hat{u}(t, x)$ і число $\hat{c}$ визначаютьcя з умови

$$\inf_{u \in H, c \in R^1} \sup_{\tilde{F} \in G_0, a \in R^1} \left[l(\tilde{\varphi} + a) - \hat{l}(\tilde{\varphi} + a) \right]^2, \tag{6.154}$$

де

$$\hat{l}(\tilde{\varphi}) = \int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^m u_k(t, x)y_k(\tilde{\varphi}, \tilde{\xi}_k; t, x)dx\, dt + c, \tag{6.155}$$

а $\tilde{\varphi}$ – деякий розв'язок крайової задачі

$$\tilde{\varphi} \in W * (R^1; \Omega), \tag{6.156}$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}(t, x)}{\partial t} + A(t)\tilde{\varphi}(t, x) = \tilde{f}(t, x), \quad (t, x) \in R^1 \times \Omega, \tag{6.157}$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}(t,x)}{\partial \nu_A} = \tilde{g}(t,x), \quad (t,x) \in R^1 \times \Gamma, \tag{6.158}$$

назвемо мінімаксною оцінкою виразу (6.152), *а величину*

$$\sigma(\varphi) := \left\{ \left[l(\varphi) - \hat{\hat{l}}(\varphi) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

– *мінімаксною похибкою оцінювання.*

Тут під знаком супремума, коли константа a змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, функція $\tilde{\varphi}(t,x)+a$ пробігає множину всіх розв'язків задачі (6.156) – (6.158) при фіксованих $\tilde{f}(t,x)$ і $\tilde{g}(t,x)$, звідки легко випливає, що цей супремум буде скінченною величиною в тому і лише в тому випадку, якщо вектор-функція $u(t,x)$ належить гіперплощині

$$\begin{gathered} U = \Big\{ u \in H : \textstyle\int_0^T \int_\Omega l_0(t,x)dx\,dt - \\ - \textstyle\int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^m u_k(\tau,\xi)\tilde{g}_k(\tau,\xi)d\xi\,d\tau = 0 \Big\}, \end{gathered} \tag{6.159}$$

де

$$\tilde{g}_k(\tau,\xi) = \int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^m g_k(\tau,\xi,t,x)dx\,dt.$$

Ця гіперплощина визначається рівнянням $F(u) = c$, де

$$c = \int_\Omega l_0(t,x)dx\,dt,$$

а

$$F(u) = \sum_{k=1}^N \int_0^T \int_\Omega u_k(\tau,\xi)\tilde{g}_k(\tau,\xi)d\xi\,d\tau$$

– відмінний від нуля (внаслідок (6.150)) лінійний неперервний функціонал у просторі H, і тому вона є непорожньою замкненою множиною в цьому просторі.

Дійсно, співвідношення $l(\tilde{\varphi}+a)-\hat{l}(\tilde{\varphi}+a)$ у лівій частині умови (6.154), враховуючи вираз (6.155) для $\hat{l}(\tilde{\varphi})$ і формулу (6.149), в якій φ і η слід замінити на $\tilde{\varphi}$ і $\tilde{\eta}$ відповідно, можна представити у вигляді

$$l(\tilde{\varphi}+a)-\hat{l}(\tilde{\varphi}+a)=\int_0^T\int_\Omega l_0(t,x)(\tilde{\varphi}(t,x)+a)dx\,dt-$$

$$-\sum_{k=1}^N\int_0^T\int_\Omega u_k(t,x)y_k(\tilde{\varphi}+a,\tilde{\xi}_k;t,x)dx\,dt-c=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega l_0(t,x)(\tilde{\varphi}(t,x)+a)dx\,dt-$$

$$-\int_0^T\int_\Omega\sum_{k=1}^m u_k(t,x)\int_0^T\int_\Omega g_k(t,x,\tau,\xi)(\tilde{\varphi}(\tau,\xi)+a)d\xi\,d\tau\,dx\,dt-$$

$$-\int_0^T\int_\Omega\sum_{k=1}^m u_k(t,x)\tilde{\xi}_k(t,x)dx\,dt-c=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega[l_0(t,x)-$$

$$\left.-\int_0^T\int_\Omega\sum_{k=1}^m u_k(\tau,\xi)g_k(\tau,\xi,t,x)d\xi\,d\tau\right]\bar{\varphi}(t,x)dx\,dt+$$

$$+a\int_0^T\int_\Omega[l_0(t,x)-$$

$$\left.-\int_0^T\int_\Omega\sum_{k=1}^m u_k(\tau,\xi)g_k(\tau,\xi,t,x)d\xi\,d\tau\right]dx\,dt-$$

$$-\int_0^T\int_\Omega\sum_{k=1}^m u_k(\tau,\xi)\tilde{\xi}_k(t,x)dx\,dt-c. \qquad (6.160)$$

Звідси, враховуючи оцінку (6.144) для розв'язку $\tilde{\varphi}(t,x)$ задачі (6.156) – (6.158), який задовольняє умову (6.143), і той факт, що функції $\tilde{f}$, $\tilde{\xi}_i$, $\quad i=\overline{1,m}$, і $\tilde{g}$ належать обмеженим множинам відповідно в $L^2(Q)$ і $L^2((0,T)\times\Gamma)$, приходимо до висновку, що ліва частина співвідношення (6.154) буде скінченною тоді і лише тоді, коли $u=(u_1,...,u_m)\in U$.

Очевидно, що

$$\sigma(\varphi)\le\sigma=\sup_{\tilde{F}\in G_0,a\in R^1}\left[l(\tilde{\varphi}+a)-\hat{\hat{l}}(\tilde{\varphi}+a)\right]^2=$$

$$=\left\{\sup_{\tilde{F}\in G_0}\left[l(\tilde{\varphi})-\hat{\hat{l}}(\tilde{\varphi})\right]^2\right\}^{1/2}.$$

Зауваження 6.2. *Зауважимо, що дане вище означення мінімаксної оцінки є більш загальним, ніж відповідні означення в [83, 106, 233], оскільки воно враховує як наявність додаткових співвідношень на дані задачі, так і багатозначність її розв'язку.*

Покажемо, що задача мінімаксного оцінювння зводиться до розв'язання задачі оптимального керування системою, яка описується крайовою задачею, спряженою до задачі (6.146) – (6.148) з квадратичною функцією вартості.

З цією метою при фіксованому $u=(u_1,...,u_m)\in U$ введемо до розгляду функцію $z(t,x;u)=z(t,x;u_1,...,u_m)$ як розв'язок задачі

$$z\in W^*(R^1;\Omega), \tag{6.161}$$

$$-\tfrac{\partial z(t,x;u)}{\partial t} + A(t)z(t,x;u) = l_0(t,x)-$$

$$-\textstyle\int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^m u_k(\tau,\xi) g_k(\tau,\xi,t,x) d\xi\, d\tau, \tag{6.162}$$

$$(t,x) \in R^1 \times \Omega,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \nu_{A^*}} = 0, \quad (t,x) \in R^1 \times \Gamma, \tag{6.163}$$

$$\begin{gathered}\textstyle\int_0^T \int_\Omega q^{-2}(t,x) z(t,x;u) dx\, dt+ \\ +\textstyle\int_0^T \int_\Gamma q_1^{-2}(t,x) z(t,x;u) d\Gamma\, dt = 0.\end{gathered} \tag{6.164}$$

Функція $z(t,x;u)$ визначається з рівнянь (6.161) – (6.164) єдиним чином. Дійсно, умова $u \in U$ співпадає з умовою однозначної розв'язності задачі (6.161) – (6.163) у класі функцій $W^*(R^1;\Omega)$, для яких виконується рівність (6.143). Позначимо цей розв'язок через $z_0(t,x;u)$ і покладемо

$$c_0 = \frac{\int_0^T \int_\Omega q^{-2}(t,x) z_0(t,x;u) dx\, dt + \int_0^T \int_\Gamma q_1^{-2}(t,x) z_0(t,x;u) d\Gamma\, dt}{\int_0^T \int_\Omega q^{-2}(t,x) dx\, dt + \int_0^T \int_\Gamma q_1^{-2}(t,x) d\Gamma\, dt}.$$

Тоді функція $z(t,x;u) = z_0(t,x;u) + c_0$ – єдиний розв'язок задачі (6.161) – (6.164). Має місце наступний результат.

Лема 6.2. *Задача знаходження мінімаксної оцінки функціоналу $l(\varphi)$ еквівалентна задачі оптимального керування системою, яка описується крайовою задачею* (6.161) – (6.164) *з функцією вартості вигляду*

$$J(u) = \int_0^T \int_\Omega q^{-2}(t,x) z^2(t,x;u) dx\, dt+$$

$$\int_0^T \int_\Gamma q_1^{-2}(t,x) z^2(t,x;u) d\Gamma\, dt+ \tag{6.165}$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_0^T\int_\Omega r_k^{-2}(t,x)u_k^2(t,x)dx\,dt.$$

Доведення. Враховуючи (6.161) – (6.164), (6.160) і той факт, що другий доданок у правій частині співвідношення (6.160) обертається в нуль для $u\in U$, знаходимо

$$l(\tilde\varphi+a)-\hat l(\tilde\varphi+a)=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega[l_0(t,x)-$$

$$-\int_0^T\int_\Omega\sum_{k=1}^{m}u_k(\tau,\xi)g_k(\tau,\xi,t,x)d\xi\,d\tau]\tilde\varphi(t,x)dx\,dt-$$

$$-\int_0^T\int_\Omega\sum_{k=1}^{m}u_k(t,x)\tilde\xi_k(t,x)dx\,dt-c.$$

Далі, оскільки $\tilde\varphi(t,x)$ є розв'язком крайової задачі (6.156) – (6.158), то в силу (6.138) виконується тотожність

$$\int_0^T\left(\frac{\partial\tilde\varphi(t,\cdot)}{\partial t},V(t,\cdot)\right)dt+\int_0^T a\left(t;\tilde\varphi(t,\cdot),V(t,\cdot)\right)dt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega\tilde f V\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Gamma\tilde h V\,d\Gamma\,dt \tag{6.166}$$

$$\forall V\in L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Поклавши у цій тотожності $V(t,x)=z(t,x;u)$, одержимо

$$\int_0^T\left(\frac{\partial\tilde\varphi(t,\cdot)}{\partial t},z(t,\cdot\,;u)\right)dt+$$

$$+\int_0^T a\left(t;\tilde{\varphi}(t,\cdot),z(t,\cdot\,;u)\right)dt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega \tilde{f} z\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Gamma \tilde{h} z\,d\Gamma\,dt.$$

Інтегруючи за частинами перший доданок у лівій частині останньої рівності по t на проміжку $(0,T)$, що є законним через те, що $z,\ \tilde{\varphi}\in W(0,T;\Omega)$, і враховуючи T-періодичність функцій z і $\tilde{\varphi}$, одержимо

$$\begin{gathered}-\int_0^T\left(\tilde{\varphi}(t,\cdot),\tfrac{\partial z(t,\cdot\,;u)}{\partial t}\right)dt+\int_0^T a\left(t;\tilde{\varphi}(t,\cdot),z(t,\cdot\,;u)\right)dt=\\=\int_0^T\int_\Omega \tilde{f} z\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Gamma \tilde{h} z\,d\Gamma\,dt.\end{gathered}\tag{6.167}$$

Оскільки $z(t,x;u)$ є розв'язком задачі (6.161) – (6.163), то в силу (6.148) виконується тотожність

$$-\int_0^T\left(\frac{\partial z(t,\cdot\,;u)}{\partial t},U(t,\cdot)\right)dt+\int_0^T a\left(t;U(t,\cdot),z(t,\cdot\,;u)\right)dt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega[l_0(t,x)-$$

$$-\int_0^T\int_\Omega\sum_{k=1}^m u_k(\tau,\xi)g_k(\tau,\xi,t,x)d\xi\,d\tau]U(t,x)dx\,dt$$

$\forall U\in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, покладаючи в якій $U(t,x)=\tilde{\varphi}(t,x)$, знаходимо

$$-\int_0^T\left(\frac{\partial z(t,\cdot\,;u)}{\partial t},\tilde{\varphi}(t,\cdot)\right)dt+\int_0^T a\left(t;\tilde{\varphi}(t,\cdot),z(t,\cdot\,;u)\right)dt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega[l_0(t,x)-\tag{6.168}$$

$$-\int_0^T\int_\Omega\sum_{k=1}^m u_k(\tau,\xi)g_k(\tau,\xi,t,x)d\xi\,d\tau]\tilde\varphi(t,x)dx\,dt.$$

З рівностей (6.167) і (6.168) випливає, що

$$=\int_0^T\int_\Omega[l_0(t,x)-$$

$$-\int_0^T\int_\Omega\sum_{k=1}^m u_k(\tau,\xi)g_k(\tau,\xi,t,x)d\xi\,d\tau]\tilde\varphi(t,x)dx\,dt=$$

$$=\int_0^T\int_\Omega\tilde f z\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Gamma\tilde h z\,d\Gamma\,dt.$$

Звідси отримуємо, що при $u\in U$

$$\inf_{c\in R^1}\sup_{\tilde F\in G_0,a\in R^1}\left[l(\tilde\varphi+a)-\hat l(\tilde\varphi+a)\right]^2=$$

$$=\inf_{c\in R^1}\sup_{\tilde F\in G_0}\left\{\int_0^T\int_\Omega z(t,x;u)\left(\tilde f(t,x)-f_0(t,x)\right)dx\,dt+\right.$$

$$+\int_0^T\int_\Gamma z(t,x;u)\left(\tilde h(t,x)-h_0(t,x)\right)d\Gamma\,dt-$$

$$-\int_0^T\int_\Omega\sum_{k=1}^m u_k(t,x)\tilde\xi_k(t,x)dx\,dt+$$

$$\left.+\int_0^T\int_\Omega z(t,x;u)f_0(t,x)dx\,dt+\int_0^T\int_\Gamma z(t,x;u)h_0(t,x)d\Gamma\,dt-c\right\}^2. \quad (6.169)$$

Для знаходження верхньої межі у правій частині (6.169) введемо позначення

$$\Sigma:=\int_0^T\int_\Omega z(t,x;u)\left(\tilde f(t,x)-f_0(t,x)\right)dx\,dt+$$

$$+\int_0^T \int_\Gamma z(t,x;u)\left(\tilde{h}(t,x)-h_0(t,x)\right) d\Gamma\, dt-$$

$$-\int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^m u_k(t,x)\tilde{\xi}_k(t,x)dx\, dt$$

і, скориставшись узагальненою нерівністю Коші-Буняковського і співвідношеннями *(ii2)*, отримаємо, що має місце нерівність

$$|\Sigma| \leq \left\{\int_0^T \int_\Omega q^{-2}(t,x)z^2(t,x;u)dx\, dt+\right.$$

$$+\int_0^T \int_\Gamma q_1^{-2}t,x)z^2(t,x;u)d\Gamma\, dt+$$

$$\left.+\int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^m r_k^{-2}(t,x)u_k^2(t,x)dx\, dt\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\left\{\int_0^T \int_\Omega \left(\tilde{f}(t,x)-f_0(t,x)\right)^2 q^2(t,x)dx\, dt+\right.$$

$$+\int_0^T \int_\Gamma \left(\tilde{h}(t,x)-h_0(t,x)\right)^2 q_1^2(t,x)d\Gamma\, dt+$$

$$\left.+\int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^m \tilde{\xi}_k^2(t,x)r_k^2(t,x)dx\, dt\right\}^{1/2}\leq$$

$$\leq \left\{\int_0^T \int_\Omega q^{-2}(t,x)z^2(t,x;u)dx\, dt+\right.$$

$$+\int_0^T \int_\Gamma q_1^{-2}t,x)z^2(t,x;u)d\Gamma\, dt+$$

$$+\int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^m r_k^{-2}(t,x)u_k^2(t,x)dx\,dt\Bigg\}^{1/2} =: a,$$

в якій знак рівності досягається при $\tilde{F}_0 = (\tilde{f}_0, \tilde{h}_0, \tilde{\xi}_0) \in G_0$, де

$$\tilde{f}_0(t,x) = \pm\frac{1}{a}q^{-2}(t,x)z(t,x;u) + f_0(t,x),$$

$$\tilde{h}_0(t,x) = \pm\frac{1}{a}\, q_1^{-2}(t,x)z(t,x;u)\big|_\Gamma + h_0(t,x),$$

$$\tilde{\xi}_0(t,x) = \left(\tilde{\xi}_1^{(0)}(t,x), ..., \tilde{\xi}_m^{(0)}(t,x)\right),$$

$$\tilde{\xi}_k^{(0)}(t,x) = \mp\frac{1}{a}r_k^{-2}(t,x)u_k(t,x).$$

Дійсно, в силу (6.164) маємо

$$\int_0^T \int_\Omega \tilde{f}_0(t,x)dx\,dt + \int_0^T \int_\Gamma \tilde{h}_0(t,x)d\Gamma\,dt =$$

$$= \pm\frac{1}{a}\Bigg\{\int_0^T \int_\Omega q^{-2}(t,x)z(t,x;u)dx\,dt +$$

$$+\int_0^T \int_\Gamma q_1^{-2}t,x)z(t,x;u)d\Gamma\,dt\Bigg\} +$$

$$+\int_0^T \int_\Omega f_0(t,x)dx\,dt + \int_0^T \int_\Gamma h_0(t,x)d\Gamma\,dt = 0.$$

Тому

$$\inf_{c\in R^1} \sup_{\tilde{F}\in G_0, a\in R^1} \left[l(\tilde{\varphi}+a) - \hat{l}(\tilde{\varphi}+a)\right]^2 =$$

$$= \inf_{c \in R^1} \sup_{\tilde{F} \in G_0} \left\{ \int_0^T \int_\Omega z(t,x;u)\tilde{f}(t,x)dx\,dt + \int_0^T \int_\Gamma \tilde{h} z\, d\Gamma\, dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^m u_k(t,x)\tilde{\xi}_k(t,x)dx\,dt - c \right\}^2 =$$

$$= \inf_{c \in R^1} \sup_{|\Sigma| \le a} \left(\Sigma + \int_0^T \int_\Omega z(t,x;u) f_0(t,x)dx\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^T \int_\Gamma z(t,x;u)h_0(t,x)d\Gamma\, dt - c \right)^2 =$$

$$= a^2 = \int_0^T \int_\Omega q^{-2}(t,x) z^2(t,x;u)dx\,dt +$$

$$+ \int_0^T \int_\Gamma q_1^{-2} t,x) z^2(t,x;u)d\Gamma\, dt +$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^m r_k^{-2}(t,x)u_k^2(t,x)dx\,dt = J(u),$$

де функціонал J визначається формулою (6.165), а інфімум по c досягається при

$$c = \int_0^T \int_\Omega z(t,x;u) f_0(t,x)dx\,dt + \int_0^T \int_\Gamma z(t,x;u)h_0(t,x)d\Gamma\, dt.$$

Лему доведено. □

Наступним кроком є представлення для одержаних мінімаксних оцінок через розв'язки систем інтегро-диференціальних рівнянь.

Розв'язуючи задачу оптимального керування (6.161) – (6.165) з використанням міркувань, які містяться в [120] з відповідними модифікаціями, аналогічними тим, які зроблені при доведенні Леми 6.2, прийдемо до наступних результатів.

Теорема 6.7. *Мінімаксна оцінка функціоналу $l(\varphi)$ має вигляд*

$$\hat{\hat{l}}(\varphi) = \int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^m \hat{u}_k(t,x) y_k(\varphi, \xi_k; t, x) dx\, dt + \hat{c},$$

де

$$\hat{u}_k(t,x) = r_k^2(t,x) \int_0^T \int_\Omega p(\tau,\xi) g_k(t,x,\tau,\xi) d\xi\, d\tau, \quad k = \overline{1,m},$$

$$\hat{c} = \int_0^T \int_\Omega z(t,x) f_0(t,x) dx\, dt +$$

$$+ \int_0^T \int_\Gamma z(t,x) h_0(t,x) d\Gamma\, dt,$$

а функції $z(t,x)$ і $p(t,x)$ визначаються з розв'язку наступної задачі:

$$z \in W^*(R^1;\Omega), \tag{6.170}$$

$$-\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} + A^*(t) z(t,x) = l_0(t,x) -$$

$$-\sum_{k=1}^m \int_0^T \int_\Omega r_k^2(\tau,\xi) g_k(\tau,\xi,t,x) \times \tag{6.171}$$

$$\times \int_0^T \int_\Omega p(t',y) g_k(\tau,\xi,t',y) dy\, dt'\, d\xi\, d\tau, \quad (t,x) \in R^1 \times \Omega,$$

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial \nu_{A^*}} = 0, \quad (t,x) \in R^1 \times \Gamma, \tag{6.172}$$

$$\int_0^T \int_\Omega q^{-2}(t,x) z(t,x) dx\, dt + \int_0^T \int_\Gamma q_1^{-2}(t,x) z(t,x) d\Gamma\, dt = 0, \tag{6.173}$$

$$p \in W^*(R^1; \Omega), \tag{6.174}$$

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + A(t) p(t,x) = q^{-2}(t,x) z(t,x), \quad (t,x) \in R^1 \times \Omega, \tag{6.175}$$

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial \nu_A} = q_1^{-2} z(t,x), \quad (t,x) \in R^1 \times \Gamma, \tag{6.176}$$

$$\int_0^T \int_\Omega [l_0(t,x) -$$

$$-\sum_{k=1}^m \int_0^T \int_\Omega r_k^2(\tau,\xi) g_k(\tau,\xi,t,x) \times \tag{6.177}$$

$$\times \int_0^T \int_\Omega p(t',y) g_k(\tau,\xi,t',y) dy\, dt'\, d\xi\, d\tau \Big] dx\, dt = 0.$$

Задача (6.170) – (6.177) *однозначно розв'язна.*

Похибка мінімаксного оцінювання функціоналу $l(\varphi)$ *задовольняє нерівність*

$$\sigma(\varphi) \le \sigma = [l(p)]^{1/2} = \left[\int_0^T \int_\Omega l_0(t,x) p(t,x) dx\, dt \right]^{1/2}.$$

Альтернативне представлення для мінімаксних оцінок значень функціоналу $l(\varphi)$, яке не залежить від конкретного вигляду цього функціоналу, що визначається функцією $l_0(t,x)$, отримано в наступній теоремі.

Теорема 6.8. *Мінімаксна оцінка функціоналу* (6.152) *має вигляд*

$$\hat{\hat{l}}(\varphi) = l(\hat{\varphi}) = \int_0^T \int_\Omega l_0(t,x)\hat{\varphi}(t,x)dx\,dt, \tag{6.178}$$

де функція $\hat{\varphi}(t,x)$ *визначаеться з розв'язку задачі:*

$$\hat{p} \in W^*(R^1;\Omega), \tag{6.179}$$

$$-\frac{\partial \hat{p}(t,x)}{\partial t} + A^*(t)\hat{p}(t,x) =$$

$$\sum_{k=1}^m \int_0^T \int_\Omega r_k^2(\tau,\eta) g_k(\tau,\eta,t,x)\left[y_k(\varphi,\xi_k;\tau,\eta) - \right. \tag{6.180}$$

$$\left. - \int_0^T \int_\Omega \hat{\varphi}(t',y) g_k(\tau,\eta,t',y)dy\,dt'\right] d\eta\,d\tau = 0, \quad (t,x) \in R^1 \times \Omega,$$

$$\frac{\partial \hat{p}(t,x)}{\partial \nu_{A^*}} = 0, \quad (t,x) \in R^1 \times \Gamma, \tag{6.181}$$

$$\int_0^T \int_\Omega q^{-2}(t,x)\hat{p}(t,x)dx\,dt + \int_0^T \int_\Gamma q_1^{-2}(t,x)\hat{p}(t,x)d\Gamma\,dt = 0, \tag{6.182}$$

$$\hat{\varphi} \in W^*(R^1;\Omega), \tag{6.183}$$

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial \hat{\varphi}(t,x)}{\partial t} + A^*(t)\hat{\varphi}(t,x) = \\ = q^{-2}(t,x)\hat{p}(t,x) - f_0(t,x), \quad (t,x) \in R^1 \times \Omega, \end{gathered} \tag{6.184}$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}(t,x)}{\partial \nu_A} = q_1^{-2}\hat{p}(t,x) + h_0(t,x), \quad (t,x) \in R^1 \times \Gamma, \tag{6.185}$$

$$\int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^m \int_0^T \int_\Omega r_k^2(\tau,\eta) g_k(\tau,\eta,t,x) \left[y_k(\varphi,\xi_k;\tau,\eta) - \right.$$

$$\left. - \int_0^T \int_\Omega \hat{\varphi}(t',y) g_k(\tau,\eta,t',y) dy\, dt' \right] d\eta\, d\tau\, dx\, dt = 0. \tag{6.186}$$

Задача (6.179) – (6.186) *має єдиний розв'язок.*

Наслідок 1. *Функція* $\hat{\varphi}(t,x)$, *яка визначається з розв'язку задачі* (6.179) – (6.186), *може бути прийнята у якості оцінки того розв'язку* $\varphi(t,x)$ *вихідної задачі Неймана* (6.146) – (6.148), *який спостерігається.*

Висновки до розділу 6

У цьому розділі вивчено задачу мінімаксного оцінювання функціоналів від розв'язків параболічних та гіперболічних задачі за наявності збурень у коефіцієнтах. У перших двох підрозділах у коефіцієнтах диференціальних операторів наявні швидко коливні функції типу $a(\frac{x}{\varepsilon})$, а спостереження є нелінійним і в певному сенсі збуреним по відношенню до лінійного випадку $(\varepsilon = 0)$. У третьому підрозділі наявні випадкові збурення при спостереженнях. У четвертому підрозділі коефіцієнти не є автономними і залежать від часової змінної.

У підрозділі 6.1 доведено розв'язність та обґрунтовано наближену мінімаксну оцінку в задачі мінімаксного оцінювання функціоналів від розв'язків параболічних рівнянь зі швидко коливними коефіцієнтами та нелінійним спостереженням. Для доведення існування точної мінімаксної оцінки застосовано теорему Шаудера про нерухому точку. Шляхом переходу до усереднених параметрів побудовано й обґрунтовано наближену мінімаксну оцінку.

У підрозділі 6.2 аналогічні результати одержано в задачі мінімаксного оцінювання функціоналів від розв'язків гіперболічних рівнянь зі швидко коливними коефіцієнтами та нелінійним спостереженням.

У підрозділі 6.3 побудовано і обґрунтовано наближені гарантовані середньоквадратичні оцінки функціоналів від розв'язків параболічних задач зі швидко коливними коефіцієнтами при нелінійних спостереженнях із випадковими збуреннями.

У підрозділі 6.4 розв'язано задачу мінімаксного оцінювання розв'язків періодичних за часом лінійних параболічних рівнянь з крайовими умовами Неймана.

Основні результати розділу опубліковано в роботах [54], [61], [62], [216], [217].

Висновки

Дисертація присвячена розвитку теорії оптимального керування та гарантованого оцінювання нескінченновимірними системами з малим параметром, зокрема, побудові та обґрунтуванню наближених оптимальних керувань у формі оберненого зв'язку та мінімаксних оцінок для різних класів розподілених систем з малим параметром.

У розділі 1 проведено аналіз літературних джерел за темою дисертаційних досліджень.

У розділі 2 наведено основні поняття і результати теорії еволюційних рівнянь, оптимального керування розподіленими системами та теорії усереднення диференціальних операторів, які використовуються в дисертації.

У розділі 3 розв'язані задачі конструювання та обґрунтування наближеного оптимального керування у формі оберненого зв'язку тепловими і хвильовими процесами в мікронеоднорідних середовищах.

Основним об'єктом вивчення виступає задача оптимального керування, яка складається з лінійного еволюційного рівняння параболічного або гіперболічного типу, диференціальний оператор якої містить коефіцієнти, що залежать від швидко коливних функцій виду $a(\frac{x}{\varepsilon})$, де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, та з неквадратичного цільового функціоналу типу Немицького, що є в певному сенсі збуреним по відношенню до випадку $\varepsilon = 0$.

Основним припущенням є припущення про те, що відповідна усереднена (при $\varepsilon = 0$) задача допускає оптимальне керування в формі оберненого зв'язку.

У підрозділі 3.1 на основі формули точного оптимального синтезу для задачі оптимального керування розв'язками параболічного рівняння на скінченному часовому проміжку обґрунтовано наближене керування у формі оберненого зв'язку.

У підрозділі 3.2 на основі формули точного оптимального регулятора для задачі оптимального керування розв'язками параболічного рівняння на нескінченному часовому проміжку обґрунтовано наближене керування у формі оберненого зв'язку.

У підрозділі 3.3 на основі формули точного оптимального синтезу для задачі оптимального керування розв'язками гіперболічного рівняння на скінченному часовому проміжку обґрунтовано наближене керування в формі оберненого зв'язку.

У підрозділі 3.4 розв'язано задачу про обґрунтування наближеного регулятора для розв'язків параболічного включення, в якому коефіцієнти головної частини диференціального оператора та многозначна функція взаємодії зазнають неавтономних збурень.

В розділі 4 розв'язані задачі конструювання та обґрунтування наближеного зосередженого оптимального керування у формі оберненого зв'язку для дифузійних і хвильових процесів із нелінійними та многозначними збуреннями.

Основним об'єктом вивчення виступає задача оптимального керування, яка складається з еволюційного рівняння або включення першого або другого порядку, права частина якого містить нелінійні або многозначні збурення виду $\varepsilon F(y)$, де y – фазова змінна, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, та зосередежне обмежене керування $u(t)$, та з квадратичного критерію якості.

Основним інструментом при побудові наближеного регулятора виступає точна форма (параметричного за наявності точки переключення) синтезу для відповідної лінійно-квадратичної задачі при $\varepsilon = 0$.

У підрозділі 4.1 на основі формули точного обмеженого параметричного синтезу для незбуреної задачі обґрунтовано наближене керування в формі оберненого зв'язку для слабо-нелінійного рівняння типу реакції-дифузії.

У підрозділі 4.2 на основі формули точного оптимального регулятора для незбуреної задачі обґрунтовано наближений регулятор для слабо-нелінійного рівняння типу реакції-дифузії.

У підрозділі 4.3 на основі формули точного обмеженого параметричного синтезу для незбуреної задачі обгрунтовано наближене керування у формі оберненого зв'язку для слабо-нелінійного хвильового рівняння.

У підрозділі 4.4 розв'язано задачу наближеного синтезу на скінченному та нескінченному часовому проміжку для класів еволюційних включень субдиференціального типу з многозначними напівнеперервними зверху функціями взаємодії.

У розділі 5 розв'язані задачі оптимального керування еліптичними і параболічними рівняннями в секторіальних областях із квадратичними критеріями якості та нелокальними крайовими умовами.

Основним об'єктом вивчення виступає лінійно-квадратична задача оптимального керування, яка складається з квадратичного функціоналу та лінійного рівняння еліптичного чи параболічного типу в області типу кругового сектору $\Omega = \{(r,\theta)|r \in (0,1),\ \ \theta \in (0,\pi)\}$ з рівністю потоків на радіусах $\theta = 0$ і $\theta = \pi$ і умовою Діріхле при $\theta = 0$.

Основним інструментом є ряди Фур'є по біортонормованим системам базисних функцій Самарського-Іонкіна, що породжені вказаними крайовими умовами. Необхідні теоретичні відомості щодо таких рядів містяться в підрозділі 5.1.1.

У підрозділі 5.1.2 доведено існування оптимального керування для еліптичного рівняння в круговому секторі Ω з нелокальними крайовими умовами.

У підрозділі 5.1.3 побудовано і обґрунтовано наближене оптимальне керування, а також побудоване оптимальне керування в класі функцій, що залежать лише від кутової змінної θ.

При розгляді параболічних задач із вказаними крайовими умовами використовуються ряди Фур'є-Бесселя, необхідні теоретичні відомості щодо яких містяться в підрозділі 5.2.1.

У підрозділі 5.2.2 доведено існування оптимального керування для параболічного рівняння в області $(0,T)\times\Omega$ з нелокальними крайовими умовами.

У підрозділі 5.3 для параболічного рівняння в області $(0,T)\times\Omega$ з нелокальними крайовими умовами доведено розв'язність задачі з мінімальною енергією.

У розділі 6 розв'язано задачу мінімаксного оцінювання функціоналів від розв'язків параболічних та гіперболічних задач за наявності збурень у коефіцієнтах. У перших двох підрозділах у коефіцієнтах диференціальних операторів наявні швидко коливні функції типу $a(\frac{x}{\varepsilon})$, а спостереження є нелінійним і в певному сенсі збуреним по відношенню до лінійного випадку $(\varepsilon=0)$. У третьому підрозділі наявні випадкові збурення при спостереженнях. У четвертому підрозділі коефіцієнти не є автономними і залежать від часової змінної.

У підрозділі 6.1 доведено розв'язність та обґрунтовано наближену мінімаксну оцінку в задачі мінімаксного оцінювання функціоналів від розв'язків параболічних рівнянь зі швидко коливними коефіцієнтами та нелінійним спостереженням. Для доведення існування точної мінімаксної оцінки застосовано теорему Шаудера про нерухому точку. Шляхом переходу до усереднених параметрів побудовано і обґрунтовано наближену мінімаксну оцінку.

У підрозділі 6.2 аналогічні результати одержано в задачі мінімаксного оцінювання функціоналів від розв'язків гіперболічних рівнянь зі швидко коливними коефіцієнтами та нелінійним спостереженням.

У підрозділі 6.3 побудовано і обґрунтовано наближені гарантовані середньоквадратичні оцінки функціоналів від розв'язків параболічних задач зі швидко коливними коефіцієнтами при нелінійних спостереженнях із випадковими збуреннями.

У підрозділі 6.4 розв'язано задачу мінімаксного оцінювання розв'язків періодичних за часом лінійних параболічних рівнянь із крайовими умовами Неймана.

Список використаних джерел

[1] Акуленко Л. Д. Асимптотические методы оптимального управления / Л. Д. Акуленко. -– М.: Наука, 1987. -– 368 с.

[2] Алексеев В. М. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. -– М.: Наука, 1979. -– 430 с.

[3] Александров В. В. Оптимальное управление движением / В.В. Александров, В.Г. Болтянский, С.С. Лемак, Н.А. Парусников. – М.: Физматлит, 2005. – 276 с.

[4] Асеев С. М., Кряжимский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста / С. М. Асеев, А. В. Кряжимский // Тр. МИАН. - 2007. - т. 257. - С. 3–271

[5] Асланян А. А. Условия оптимальности в задачах управления системами с импульсным воздействием / А. А. Асланян. // Доклады АН УССР. Серия А. – 1982. – №11. – С. 3-6.

[6] Бахвалов Н. С. Осреднение процессов в периодических средах / Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. — М.: Наука, 1984. — 352 с.

[7] Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. — М.: Издательство иностранной литературы, 1960. — 400 с.

[8] Белозеров В. Е. Геометрические методы модального управления / В. Е. Белозеров, В. Е. Капустян. – К.: Наукова думка, 1999. – 260 с.

[9] Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М.: Наука, 1974. — 503 с.

[10] Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению / Г. А. Блисс. — М.: Иностраная литература, 1950. — 348 с.

[11] Бублик Б.Н. Основы теории управления / Б.Н. Бублик, Н.Ф. Кириченко. – К.: Вища школа, 1975. – 328 с.

[12] Бублик Б. Н., Кириченко Н. Ф., Наконечный А. Г. Минимаксные оценки и регуляторы в динамических системах / Б.Н. Бублик, Н.Ф. Кириченко, А.Г. Наконечный. - К.: 1978.- 32 с. - Препр. / АН УССР. Ин - т кибернетики; 78 - 31.

[13] Бублик Б. Н. Синтез оптимального сосредоточенного управления для уравнения теплопроводности / Б. Н. Бублик, А. И. Невидомский. // Модели и системы обработки информации. — 1982. — №1. — С. 78–87.

[14] Бублик Б. М. Оптимальний регулятор для рівняння теплопровідності зі змінним ваговим коефіцієнтом в функціоналі / Б. М. Бублик, О. І. Невідомський. // Доповіді АН УРСР. Серія А. — 1985. — № 10. — С. 56–58.

[15] Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. — М.: Наука, 1965. — 474 с.

[16] Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. — М.: Наука, 1975. — 568 с.

[17] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями / Дж. Варга. — М.: Наука, 1977. — 622 с.

[18] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. - М.: Наука, 1980. - 520 с.

[19] Васильева А.Б. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления / А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев. // Итоги науки и техники. Серия математический анализ. — 1982. — Т. 20 — С. 3-77.

[20] Васильева А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А. Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. - М.: Высшая школа, 1990.

[21] Верес М.М. Мінімаксні методи оцінювання в лінійних задачах із параметром / М.М. Верес, О.Г. Наконечний. – К.: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2007. – 115 с.

[22] Волин Ю.М. О принципе максимума в банаховом пространстве / Ю. М. Волин, Г. М. Островский. // Кибернетика. — 1969. — № 5. — С. 132–135.

[23] Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

[24] Гаращенко Ф.Г. Прикладні задачі теорії стійкості / Ф.Г. Гаращенко, В.В. Пічкур. – К.: Київський університет, 2014. – 142 с.

[25] Гребенников Е. А. Метод усреднения в прикладных задачах / Е. А. Гребенников. — М.: Наука, 1986. — 256 с.

[26] Дыхта В. А. Оптимальное импульсное управление / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонюк. — М.: Физматлит, 2003. — 255 с.

[27] Дмитриев М. Г. Теория сингулярных возмущений и некоторые задачи оптимального управления / М. Г. Дмитриев. // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21, №10. — С. 1693–1698.

[28] Егоров А. И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности / А. И. Егоров. // Известия АН СССР. Серия математика. — 1965. — Т. 29, №6. — С. 1205–1260.

[29] Егоров А. И. Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами / А. И. Егоров. // Математический сборник. — 1966. — Т. 69, №3. — С. 371–421.

[30] Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А. И. Егоров. — М.: Наука, 1978. — 463 с.

[31] Егоров А. И. Оптимальное управление линейными системами / А. И. Егоров. — К.: Вища школа, 1988. — 278 с.

[32] Егоров А. И. Синтез оптимального управления тепловым процессом с ограниченным управлением. Часть 1. / А. И. Егоров, Т. Ф. Михайлова. // Автоматика. – 1990. – №3. – С. 57–61.

[33] Егоров А. И. Синтез оптимального управления тепловим процессом с ограниченным управлением. Часть 2 / А. И. Егоров, Т. Ф. Михайлова. // Автоматика. — 1990. — №4 — С. 31–39.

[34] Егоров А.И. Основы теории управления / А. И. Егоров. – М.: Физматлит, 2004. – 504 с.

[35] Егоров Ю. В. Необходимые условия оптимальности в банаховом пространстве / Ю. В. Егоров. // Математический сборник. — 1964. — Т. 64 (106), №1. — С. 79–101.

[36] Егоров Ю. В. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами / Ю. В. Егоров. // Математика на службе инженера. — 1973. — С. 187–199.

[37] Жиков В. В. О G-сходимости параболических операторов / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. // Український математичний журнал. — 1981. — Т. 36, №11. — С. 11-57.

[38] Жиков В. В. Усреднение дифференциальных операторов / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. — М.: ФизМатЛит, 1993. – 464 с.

[39] Згуровский М. З. Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами / М. З. Згуровский, В. С. Мельник. — К.: Наукова думка, 1999. — 630 с.

[40] Згуровский М. З. Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями / М. З. Згуровский, В. С. Мельник, А. Н. Новиков. — К.: Наукова думка, 2004. — 588 с.

[41] Згуровский М. З. Дифференциально-операторные включения и вариационные неравенства в бесконечномерных пространствах / М. З. Згуровский, П.О. Касьянов, В. С. Мельник. — К.: Наукова думка, 2008. — 460 с.

[42] Зубов В.И. Устойчивость движения / В.И. Зубов. - М.:Высшая школа, 1973.

[43] Иваненко В.И. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами / В. И. Иваненко, В. С. Мельник. — К.: Наукова думка, 1988. — 288 с.

[44] Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н. И. Ионкин. // Дифференциальные уравнения. — 1977. — Т. 13, № 2. — С. 294–304.

[45] Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967 — 624 с.

[46] Калман Р. Е., Бьюси Р. С. Новые результаты в теории линейной фильтрации и упреждения / Р.Е. Калман, Р.С. Бьюси. - Труды Американского общества инженерной механики. Сер. Д., 1961, N 1, с.123 - 140.

[47] Капустян Е. А. Синтез оптимального ограниченного управления для параболической краевой задачи с быстро осциллирующими коэффициентами / Е. А. Капустян, А. Г. Наконечний. // Проблемы управления и информатики. — 1999. — №6. — С. 44–57.

[48] Капустян В. Е. Асимптотический анализ ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах / В. Е. Капустян. // Украинский математический журнал. — 1993. — Т. 45, №8. — С. 1072–1083.

[49] Капустян В. Е. Асимптотика управлений в оптимальных сингулярно возмущенных параболических задачах. Глобальные ограничения на управления / В.Е. Капустян // Доклады РАН. - 1993. - т. 333, N 4. - С.428-431.

[50] Капустян В. Е. Оптимальная стабилизация ограниченным сосредоточеным управлением решений параболической краевой задачи / В. Е.

Капустян. // Проблемы управления и информатики. — 1999. — №6. — С. 58–67.

[51] Капустян В. Е. Оптимальная стабилизация сосредоточенным управлением решений параболических уравнений с нелокальными краевыми условиями / В. Е. Капустян, И. С. Лазаренко. // Компьютерная математика. — 2011. — № 2. — С. 133-141.

[52] Капустян В. О. Наближене оптимальне керування для параболіко-гіперболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами і напіввизначеним критерієм якості / В. О. Капустян, І. О. Пишнограєв // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013. – № 4. – С. 24–36.

[53] Капустян В.О. Асимптотики розділених глобально обмежених оптимальних керувань для сингулярно збурених параболічних періодичних задач у критичному випадку / В.О. Капустян, І.Д. Фартушний // Наукові вісті НТУУ КПІ. - 2007. - №3. - С.57-66

[54] Капустян О. А. Мінімаксні оцінки функціоналів від періодичних за часом розв'язків крайових задач Неймана для параболічних рівнянь / О. А. Капустян, В. О. Капустян, Ю. К. Подлипенко. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2005. – Випуск 2. – С. 220-232.

[55] Капустян О. А. Наближені екстремальні розв'язки для еволюційних включень субдиференціального типу / О. А. Капустян, В. В. Ясінський. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2009. – № 4. – С. 109-116.

[56] Капустян О. А. Задача наближеної стабілізації для параболічного включення / О. А. Капустян. // Журнал обчислювальної та прикладної математики, 2011. – № 1. – С. 62-67.

[57] Капустян О.А. Наближений розв'язок однієї нескінченновимірної задачі оптимальної стабілізації з неавтономними збуреннями в коефіцієнтах / О. А. Капустян, В. В. Ясінський. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2012. – № 4. – С. 111-115.

[58] Капустян О. А. Наближений регулятор для еволюційного включення субдиференціального типу / О. А. Капустян, В. В. Ясінський. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2012. - № 1. – с. 87-93 (ISSN 1681- 6048).

[59] Капустян О. А. Задача оптимального керування для еліптичного рівняння з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі / О. А. Капустян, В. О. Капустян, О. К. Мазур // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2012. – № 2 (108). – С. 3-9.

[60] Капустян О. А. Обґрунтування наближеного синтезу в розподіленій задачі оптимального керування з цільовим функціоналом типу Немицького / О. А. Капустян. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2016. - № 3. – С. 73-78.

[61] Капустян О. А. Наближене мінімаксне оцінювання функціоналів від розв'язку параболічної задачі зі швидко коливними коефіцієнтами при нелінійних спостереженнях / О. А. Капустян, О. Г. Наконечний. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2019. – № 2. -– С. 94-104.

[62] Капустян О. А. Наближене мінімаксне оцінювання функціоналів від розв'язків хвильового рівняння при нелінійних спостереженнях / О. А. Капустян, О. Г. Наконечний. // Кібернетика і системний аналіз. – 2020 (подано до друку).

[63] Капустян О. В. Наближений синтез в імпульсній розподіленій задачі оптимального керування зі швидко осцилюючими коефіцієнтами / О. В. Капустян, О. А. Капустян, А. В. Русіна. // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2014. – №2. – С. 61–66.

[64] Капустян О. В. Наближений синтез розподіленого обмеженого керування в параболічній задачі зі швидко осцилюючими коефіцієнтами / О. В. Капустян, А. В. Русіна. // Український математичний журнал. – 2015. – Т. 67, №3. – С. 355–365.

[65] Капустян О. В. Наближений синтез розподіленого обмеженого керування в параболічній задачі зі швидко осцилюючими коефіцієнтами / О. В. Капустян, А. В. Русіна. // IV Міжнародна Ганська конференція, Тези доповідей. – 2014. – С. 68.

[66] Капустян О. В. Наближена оптимальна стабілізація розв'язків параболічної задачі розподіленим обмеженим керуванням / О. В. Капустян, А. В. Русіна. // XXVI Міжнародна конференція "Проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності" Тези доповідей. – 2015. – С. 93.

[67] Капустян О. В. Усереднений синтез оптимального керування для хвильового рівняння / О. В. Капустян, А. В. Сукретна. // Український математичний журнал. – 2003. – Т. 55, №5. – С. 612–620.

[68] Капустян О. А. Наближений синтез оптимального керування для задачі оптимальної стабілізації зі швидко осцилюючими коефіцієнтами /

О. А. Капустян. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2005. – № 1. -– с. 29–33.

[69] Капустян О. А. Наближений обмежений синтез для однієї слабо нелінійної крайової задачі / О. В. Капустян, О. А. Капустян, А. В. Сукретна. // Нелінійні коливання. – 2009. – №3. – С. 291-298.

[70] Капустян О. А. Розв'язність задачі оптимального керування з мінімальною енергією для однієї параболічної крайової задачі з нелокальними крайовими умовами / О. А. Капустян, О. К. Мазур // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2015. – № 3 (120). – С. 6–10.

[71] Капустян О. В. Наближений синтез для задачі оптимального керування для нелінійного хвильового рівняння / О. В. Капустян, О. А. Капустян, А. В. Сукретна. // Наукові вісті НТУУ КПІ. – 2010. – №4. – С. 72-77.

[72] Капустян О. В. Наближена стабілізація для нелінійної параболічної задачі / О. В. Капустян, О. А. Капустян, А. В. Сукретна. // Український математичний журнал. – 2011. – Т. 63, №5. – С. 654-661.

[73] Капустян О. В. Глобальний атрактор параболічного включення з неавтономною головною частиною / О. В. Капустян, Т.Б. Шкляр. // Нелінійні коливання. – 2012. – Т. 15, №1. – С. 77-88.

[74] Касьянов П.О. Про розв'язність одного класу параметризованих операторних включень / В.О. Капустян, П.О. Касьянов, О.П. Когут // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, №12. – С. 1619-1630

[75] Когут П. И. Вариационная сходимость задач оптимального управления для систем эллиптического типа / П. И. Когут. // Проблемы управления и информатики. — 1995. — №3. — С. 72–84.

[76] Когут П. И. S-сходимость в теории усреднения задач оптимального управления / П. И. Когут. // Український математичний журнал. — 1997. — Т. 49, №11. — С. 1488–1498.

[77] Когут П. И. Предельный анализ одного класса задач оптимального управления в густых сингулярных соединениях / П. И. Когут, Т. А. Мельник. // Проблемы управления и информатики. — 2005. — №1. — С. 13–31.

[78] Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Наука, 1976. — 543 с.

[79] Кондратьев Г. В. Геометрическая теория синтеза оптимальных стационарных гладких систем управления / Г. В. Кодратьев. — М.: Физматлит, 2003. — 143 с.

[80] Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости / В. И. Коробов. // Математический сборник. — 1979. — Т. 109(151), №4(8). — С. 582-606.

[81] Коробов В. І. Розв'язок задачі синтезу за допомогою функціоналу керованості для систем в нескінченновимірних просторах / В. І. Коробов, Г. М. Скляр. // Доповіді АН УРСР. Серія А. — 1983. — №5. — С. 11-14.

[82] Коробов В. И. Синтез управлений в уравнениях, содержащих неограниченный оператор / В. И. Коробов, Г. М. Скляр. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1986. — №45. — С. 45-63.

[83] Красовский Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — М.: Наука, 1968. — 475 с.

[84] Красовский Н. Н., Субботин А. Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.Н. Субботин. - М.: Наука, 1974. - 455 с.

[85] Крылов Н. М. Введение в нелинейную механику / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. — К.: Издательство АН УРСР, 1937. — 365 с.

[86] Кунцевич В.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова / В.М. Кунцевич, М.М. Лычак. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

[87] Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А. Б. Куржанский. – М.:Наука, 1977. – 392 с.

[88] Летов А. М. Динамика полета и управление / А. М. Летов. — М.: Наука, 1969. — 359 с.

[89] Ли Э.Б. Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли, Л. Маркус. – М.: Наука, 1972. – 576 с.

[90] Лигун А. А. Оптимальное управление параболическими уравнениями с последействием / А. А. Лигун, В. Е. Капустян, Ю. И. Волков. // Специальные вопросы теории приближений и оптимального управления распределенными системами. — 1990. — С. 75–154.

[91] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 416 с.

[92] Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами / Ж.-Л. Лионс. — М.: Наука, 1987. — 368 с.

[93] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Пер. с фр. Л.Р. Волевича / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

[94] Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике / Ж.-Л. Лионс, Г. Дюво. – М.: Наука, 1980. – 382 с.

[95] Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики / К. А. Лурье. — М.: Физматлит, 1975. — 478 с.

[96] Максимов В. И. О моделировании управлений в параболических ва- риационных неравенствах / В.И. Максимов // Дифф. уравнения. - 1991. - т.27, N 9. - С.1603 - 1609.

[97] Матвеев А. С. Оптимальное управление некоторыми системами с распределенными параметрами / А. С. Матвеев, В. А. Якубович. // Сибирский математический журнал. — 1978. — Т. 19, №5. — С. 1109–1140.

[98] Марченко В. А. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей / В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов. — К.: Наукова Думка, 1974. — 279 с.

[99] Мельник В. С. Об оптимальном управлении некоторыми распределенными объектами с неквадратичным функционалом / В. С. Мельник. // Автоматика. — 1983. — №3. — С. 54–57.

[100] Мельник В. С. Метод монотоних операторів у теорії оптимальних систем з обмеженнями / В. С. Мельник. // Доповіді АН УРСР. Серія А. — 1984. — №7. — С. 70.

[101] Мельник В. С. О разрешимости задачи оптимального управления для систем с распределенными параметрами / В. С. Мельник. // Адаптивные системы автоматического управления. — 1985. — №13. — С. 3–9.

[102] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – Москва: Наука, 1976. – 391 с.

[103] Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев. — М.: Наука, 1971. — 424 с.

[104] Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н. Н. Моисеев. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

[105] Моисеев Е. И. О разрешимости нелокальной краевой задачи с равенством потоков на части границы и сопряженной к ней системе / Е. И. Моисеев, В. Э. Амбарцумян. // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 5. — С. 718–725.

[106] Наконечный А. Г. Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах / А. Г. Наконечный. – Киев: КГУ, 1985. – 83 с.

[107] Наконечний О.Г. Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними — К.: Видавництво Київського університету, 2004. — 103 с.

[108] Наконечный А. Г., Данилов В. Я., Ляшко В. И. Оптимизационные методы в задачах гидроакустики / А.Г. Наконечный, В.Я. Данилов, В.И. Ляшко. - К.: 1984.- 40 с. - Препр. / АН УССР. Ин - т кибернетики; 84 - 31.

[109] Наконечный А. Г., Подлипенко Ю. К. Минимаксное прогнозирование решений параболических уравнений по неполным данным // Доповіді НАН України. - 1997. - N 9. - С.107 - 112.

[110] Наконечный А. Г., Подлипенко Ю. К., Зайцев Ю. А. Минимаксное прогнозное оценивание по неполным данным решений начально - краевых задач для параболических уравнений с разрывными коэффициентами. // Кибернетика и системный анализ. - 2000. - N 6. - С. 68 -78.

[111] Немыцкий В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. — М.: ГИТТЛ, 1949. — 550 с.

[112] Новоженов М. М. Обобщенное правило множителей Лагранжа для распределенных систем с фазовыми ограничениями / М. М. Новоженов, В. И. Плотников. // Дифференциальные уравнения. — 1982. — Т. 18, №4. — С. 584–592.

[113] Обен Ж. П. Прикладной нелинейный анализ / Ж. П. Обен, И. Экланд. — М.: Мир, 1988. — 510 с.

[114] Перегуда О. В. Наближений синтез розподіленого оптимального керування для гіперболічного рівняння зі швидко коливними коефіцієнтами / О. В. Перегуда, А. В. Русіна. // Нелінійні коливання. – 2016. – Т. 19, №4. – С. 547–554.

[115] Перестюк Н. А. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / [Н. А. Перестюк, В. А. Плотников, А. М. Самойленко, Н. В. Скрипник]. — К.: Институт математики, 2007. — 425 с.

[116] Плотников В. И. Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида / В. И. Плотников. // Известия АН СССР. Серия математика. — 1972. — Т. 36, №3. — С. 652–679.

[117] Плотников В. И. Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве / В. И. Плотников, В. И. Сумин. // Сибирский математический журнал. — 1981. — Т. 22, №6. — С. 142–161.

[118] Плотников В. А. Метод усреднения в задачах оптимального управления / В. А. Плотников. — К.: Лыбедь, 1992. — 188 с.

[119] Плотников А.В., Скрипник Н.В. Дифференциальные уравнения с четкой и нечеткой многозначной правой частью / А.В. Плотников, Н.В. Скрипник — Одесса: Астропринт, 2009. — 192 с.

[120] Подлипенко Ю. К. Минимаксное оценивание решений вырожденных краевых задач Неймана для эллиптических уравнений по наблюдениям, распределенных по системе поверхностей / Ю. К. Подлипенко, Н. В. Грищук. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2004. — № 2. — С. 104-128.

[121] Подлипенко Ю. К. Оцінювання параметрів вироджених еліптичних крайових задач Неймана в умовах невизначеності / Ю. К. Подлипенко, Н. В. Грищук. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2004. — Випуск 1. — С. 262-269.

[122] Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. — М.: Наука, 1969. — 384 с.

[123] Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Пшеничный Б.Н. - М.: Наука, 1980. - 319 с.

[124] Рахимов М. Р. О задаче синтеза оптимального управления колебательными процессами / М. Р. Рахимов. // Изв. АН Туркмен. ССР. Сер. физ. - тех., хим. и геолог. наук. — 1976. — №4. — С. 24–28.

[125] Рахимов М. Р. О некоторых задачах квадратического регулятора для линейных гиперболических уравнений / М. Р. Рахимов. // Дифференциальные уравнения. — 1987. — Т. 23, №1. — С. 143–154.

[126] Рахимов М. Р. О применении метода динамического программирования к задачам квадратического регулятора для линейных гиперболических уравнений / М. Р. Рахимов. // Доклады АН СССР. — 1987. — Т. 292, №3. — С. 553–558.

[127] Райтум У. Е. К обобщению понятия G-сходимости для квазилинейных эллиптических систем уравнений / У. Е. Райтум. // Латвийский математический ежегодник. — 1985. — Т. 29. — С. 73–83.

[128] Русіна А. В. Наближене оптимальне керування в формі оберненого зв'язку для параболічної системи зі швидко коливними коефіцієнтами / А. В. Русіна. // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Серія: Математика, Механіка. – 2015. – №33. – С. 56–60.

[129] Русіна А. В. Наближений регулятор для гіперболічного рівняння зі швидко коливними коефіцієнтами / А. В. Русіна. // Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" Тези доповідей. – 2016. – С. 114.

[130] Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – К.: Выща школа, 1987. – 289 с.

[131] Санчес-Паленция Э. Неоднородные среды и теория колебаний / Э. Санчес-Паленция. — М.: Мир, 1984. — 472 с.

[132] Серовайский С. Я. Задача управления в коэффициентах для уравнений параболического типа / С. Я. Серовайский. // Известия вузов. Серия математика. — 1982. — №12. — С. 44–50.

[133] Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами / Т. К. Сиразетдинов. — М.: Наука, 1977. — 479 с.

[134] Скрыпник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптичных граничных задач / И. В. Скрыпник. — М.: Наука, 1990. — 442 с.

[135] Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби / А.И. Субботин. - М.:Наука, 1991.

[136] Сукретна А. В. Наближена оптимальна стабілізація розв'язків параболічної крайової задачі обмеженим керуванням / А. В. Сукретна. // Нелінійні коливання. — 2006. — Т. 9, № 2. — С. 264-279.

[137] Сукретна А. В. Обмежений наближений синтез оптимального керування для хвильового рівняння / А. В. Сукретна. // Український математичний журнал. – 2007. – Т. 59, № 8. – С. 1094-1104.

[138] Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби / А.И. Субботин. — М.: Наука, 1991. — 215 с.

[139] Толстоногов А. А. О решениях эволюционных включений / А. А. Толстоногов. // Сибирский математический журнал, 1992. – Т. 33, № 3. – С.165-175.

[140] Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления / Р. П. Федоренко. – М.: Наука, 1978. – 488 с.

[141] Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем / А. А. Фельдбаум. — М.: Наука, 1966. — 624 с.

[142] Флеминг У. Оптимальное управлений детерминированными и стохастическими системами / У. Флеминг, Р. Ришел. — М.: Мир, 1978. — 316 с.

[143] Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами / А. В. Фурсиков. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 350 с.

[144] Черноусько Ф. Л. Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром / Ф. Л. Черноусько. // Прикладная математика и механика. — 1968. — Т. 32, №1. — С. 15–26.

[145] Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях / Ф.Л. Черноусько, В.Б. Колмановский. - М.: Наука, 1978. - 351 с.

[146] Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы / А.А. Чикрий. - К.: Наукова думка, 1992. - 383 с.

[147] Шкляр Т. Б. Глобальний атрактор неавтономного еволюційного включення типу реакції-дифузії / Т. Б. Шкляр // Наукові Вісті НТУУ "КПІ фіз-мат науки. – 2011. – №4(78). – С. 98-104.

[148] Якубович В. А. К абстрактной теории оптимального управления. Часть 1 / В. А. Якубович. // Сибирский математический журнал. — 1977. — Т. 18, №3. — С. 685–707.

[149] Якубович В. А. К абстрактной теории оптимального управления. Часть 2 / В. А. Якубович. // Сибирский математический журнал. — 1978. — Т. 19, №2. — С. 436–460.

[150] Якубович В. А К абстрактной теории оптимального управления. Часть 3 / В. А. Якубович. // Сибирский математический журнал. — 1979. — Т. 20, №4. — С. 885–910.

[151] Acquistapace P. Initial boundary value problems and optimal control for non-autonomous parabolic systems / P. Acquistapace, F. Flandoli, B. Terreni. // SIAM J. Control Optim. — 1991. — 29. — P. 89–118.

[152] Acquistapace P. Boundary control problems for non-autonomous parabolic systems, Stabilization of Flexible Structures / P. Acquistapace, B. Terreni. // Lecture Notes in Control and Inform. Sci. — 1990. — Vol. 147. — P. 156–166.

[153] Acquistapace P. Infinite-horizon linear-quadratic regulator problems for nonautonomous parabolic systems with boundary control / P. Acquistapace, B. Terreni. // SIAM J. Control Optim. — 1996. — Vol. 34, no. 1. — P. 1–30.

[154] Amann H. Feedback stabilization of linear and semilinear parabolic systems / H. Amann. // Proceedings of Trends in Semigroup Theory and Applications (Trieste, 1987), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Marcel Dekker, New York. — 1989. — P. 21–57.

[155] Appell J. Nonlinear superposition operators / J. Appell, P. Zabreiko. – Cambridge University Press, 1990.

[156] Aubin J.-P. Set-Valued Analysis / J.-P. Aubin, H. Frankowska. — Boston: Birkhäuser, 1990.

[157] Banks H. T. The linear regulator problem for parabolic systems / H. T. Banks, K. Kunish. // SIAM J. Control Optim. — 1984. — Vol. 22, no. 5. — P. 684–699.

[158] Barbu V. Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces / V. Barbu. — Leyden: Noordhoff, 1976. — 360 p.

[159] Barbu V. Optimal Control of Variational Inequalities / V. Barbu. — London: Pitman, 1984. — 298 p.

[160] Barbu V. Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems / V. Barbu. — New York: Academic press, 1993. — 476 p.

[161] Barbu V. A representation formula for the solutions to the operator Riccati equation / V. Barbu, G. Da Prato. // Differential Integral Equations. — 1992. — Vol. 5, no. 4. — P. 821–829.

[162] Basar T. H^{∞}-Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamical Game Approach, 2nd ed. / T. Basar, P. Bernhard. — Boston, MA: Birkh*ä*user, 1995.

[163] Bellman R. Introduction to the mathematical theory of control processes. Vol.1. / R. Bellman. — New York, London: Academic Press, 1967. — 263 p.

[164] Bellman R. Introduction to the mathematical theory of control processes. Vol.2. / R. Bellman. — New York, London: Academic Press, 1971. — 327 p.

[165] Bensoussan A. Regular perturbations in optimal control, Singular Perturbations in Systems and Control / A. Bensoussan. // M. D. Ardema(ed.) Springer-Verlag. – 1983. – P. 169–183.

[166] Bensoussan A. Remarks on the theory of robust control / A. Bensoussan, P. Bernhard. // Internat. Ser. Numer. Math., Basel, Switzerland: Birkhäuser. — 1992. — Vol. 107. — P. 149–166.

[167] Bensoussan A. The linear quadratic control problem for infinite dimensional systems over infinite horizon; survey and examples / A. Bensoussan, M. C. Delfour, S. K. Mitter. // Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control and the 15th Symposium on Adaptive Processes (Clearwater, 1976), Inst. Electr. Electron. Engrs., New York. — 1976. — P. 746–751.

[168] Berkovitz L. D. Variation methods in problems of control and programming / L. D. Berkovitz. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1961. – №3. – P. 145–169.

[169] Budnicki Z. Modern control theory / Z. Budnicki. - N.Y.: Springer, 2005

[170] Burmeister E. Mathematical theories of economic growth / E. Burmeister, A. R. Dobell. – New York: The MacMillan Company, 1970. – 444 p.

[171] Buttazzo G. Some relaxation problems in optimal control theory / G. Buttazzo. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1987. – Vol. 125. – P. 272–287.

[172] Buttazzo G., Dal Maso G. F-Convergence and Optimal Control Problems / G. Buttazzo, G. Dal Maso. // Journal of Optimization Theory and Applications. - 1982. - Vol. 38. - P. 385-407.

[173] Caratheodory C. Calculus of variations and partial differential equations of first order / C. Caratheodory. – San Francisco: Holden-Day, 1967. – 398 p.

[174] Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A. Infinite horizon optimal control. Deterministic and stochastic systems / D.A. Carlson, A.B. Haurie, A. Leizarowitz. - Berlin: Springer, 1991.

[175] Casas E. Approximation of optimal control problems in the coefficient for the p-Laplace equation. Convergence result / E. Casas, P. I. Kogut, G. Leugering. // SIAM Journal of Control and Optimization. – 2016. – Vol. 54, №3. – P. 1406–1422.

[176] Chen G., Fulling S.A., Narcowich F. J., Sun S. Exponential decay of energy of evolution equations with locally distributed damping / G. Chen, S.A. Fulling, F.J. Narcowich, S. Sun. // SIAM J. Appl. Math. - 1991. - Vol. 51, №1. - P. 266-301.

[177] Chepyzhov V. V. Attractors for equations of mathematical physics / V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik. - Rhode Island: American Mathematical Society, Providence. - 2002. -v.49. - 324 p.

[178] Chipot M. Elements of nonlinear analysis / M. Chipot. – Basel: Birkhauser Verlag, 2000. – 272 p.

[179] Chikrii, A. A. An analytical method in dynamic pursuit games / A. A. Chikrii. // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2010. – Vol. 271, Issue 1, December 2010. – P. 69-85.

[180] Clarke F.H. Optimization and nonsmooth analysis / F.H. Clarke. - New York: J. Wiley, 1983.

[181] Colombini F. On the convergence of solutions of hyperbolic equations / F. Colombini, S. Spagnolo. // Communications in Partial Differential Equations. – 1978. – Vol. 3, №1. – P. 77–103.

[182] Cruz J. Feedback Systems / J. Cruz. – New York: Mac Graw Hill, 1972. – 338 p.

[183] Curtain R. F., Pritchard A.J. Infinite-dimensional linear systems theory / R. F. Curtain, A.J. Pritchard. – New York: Springer-Verlag, 1978

[184] Curtain R. F. An introduction to infinite-dimensional linear systems theory / R. F. Curtain, H. Zwart. // Texts in Applied Mathematics, 21. – New York: Springer-Verlag, 1995.

[185] Da Prato G. Synthesis of optimal control for an infinite dimensional periodic problem / G. Da Prato. // SIAM J. Control Optim. – 1987. - Vol. 25. – P. 706–714.

[186] Delfour M. C. The linear quadratic optimal control problem over an infinite time horizon for a class of distributed parameter systems / M. C. Delfour. // Control of Distributed Parameter Systems (S.P. Banks and A. J. Pritchard, eds.). – Oxford, England: Pergamon Press. – 1978. – P. 57–66.

[187] Denkowski Z. Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations / Z. Denkowski, S. Mortola. // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1993. – Vol. 78, №2. – P. 365–391.

[188] De Giorgi E. Sulla convergenza delli integrali dell energia per operatori ellittici del secondo ordine / E. De Giorgi, S. Spagnolo. // Bollettino dell Unione Matematica Italiana. – 1973. – Vol. 8. – P. 391–411.

[189] Durante T. Asymptotic analysis of an optimal control problem involving a thick two-level junction with alternative type of controls / T. Durante, T.

A. Melńyk. // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2010. – Vol. 144, №2. – P. 205–225.

[190] Dzhalladova I. Dynamic system with random structure for modeling security and risk management in cyberspace / I. Dzhalladova, M. Ruzickova // Opuscula Mathematica. – 2019. – Volume 39, Issue 1. – P. 23-37.

[191] Egorov A. I. Optimal Stabilization of the Distributed Parameter Systems / A. I. Egorov. // Lecture Notes in Computer Science. – 1975. – Vol. 27. – P. 167–172.

[192] Evans L. C. Partial differential equations / L. C. Evans.– American Mathematical Society, 1998. – 662 p.

[193] Feinberg E. A. Optimality conditions for partially observable Markov decision processes / E. A. Feinberg, P. O. Kasyanov, M. Z. Zgurovsky. // Solid Mechanics and Applications. – 2014. – Vol. 211. – P. 251–264.

[194] Fursikov A. V. Stabilization for the 3D Navier-Stokes system by feedback boundary control / A. V. Fursikov. // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2004. – Vol. 10, №1. – P. 289–314.

[195] Fursikov A. V. Stabilizability of quasi linear parabolic equation by feedback boundary control / A. V. Fursikov. // Sbornik: Mathematics. – 2001. – Vol. 192, №4. – P. 593–639.

[196] Fursikov A. V. Stabilizability of two-dimensional Navier-Stokes equations with help of boundary feedback control / A. V. Fursikov. // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. – 2001. – Vol. 3. – P. 259–301.

[197] Gaycgori V. G. Control of systems with fast and slow motions / V. G. Gaycgori. – Moscow: Nauka, 1991. – 223 p.

[198] Gluzman M. O. Lyapunov type functions for classes of autonomous parabolic feedback control problems / M. O. Gluzman, N. V. Gorban, P. O. Kasyanov. // Applied Mathematical Letters. – 2015. – Vol. 39. – C. 19–21.

[199] Goodwin G. C. Control system design / G. C. Goodwin, S. F. Graeb, M. E. Salgado. – Prentice-Hall, New Jersey, 2001.

[200] Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons / H. Halkin // Econometrica. - 1974. - vol. 42. - P. 267–272.

[201] Hostetter G. H. Design of feedback control systems / G. H. Hostetter. – Oxford University 416 References Press, Oxford, 2002.

[202] Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness / O. V.Kapustyan, V. S. Melńik, J. Valero, V. V. Yasinsky. – Kyiv: Naukova Dumka, 2008. – 215 p.

[203] Kapustyan O.V. On the connectedness and asymptotic behaviour of solutions of reaction-diffusion systems / O. V.Kapustyan, J. Valero. // J. Math. Anal. Appl. – 2006. – Vol. 323. – P. 614-633.

[204] Kapustyan O. V. Approximate synthesis in impulsive distributed optimal control problem with rapidly oscillating coefficients / O. V. Kapustyan, O. A. Kapustian, A. V. Rusina. // XXIV International conference "Problems of decision making under uncertainties Book of Abstracts. -– 2014. – P. 52.

[205] Kapustyan O. V. Global attractor of a parabolic inclusion with nonautonomous main part / O. V. Kapustyan, O. A. Kapustian, T. B. Shklyar. // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 187, №4. – P. 458–470.

[206] Kapustyan O. V. Approximate bounded synthesis for distributed systems / O. V. Kapustyan, O. A. Kapustian, A. V. Sukretna. – Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2013. – 235 p.

[207] Kapustyan O. A. Problem of Optimal Control for the Poisson Equation with Nonlocal Boundary Conditions / O. V. Kapustyan, O. A. Kapustyan, O. K. Mazur. //Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 201, Issue 3. – PP. 325–334 (Translated from Neliniini Kolyvannya, 2013, July–September, 2013, Vol. 16, No. 3, pp. 350—358).

[208] Kapustyan E. A. The minimax problems of pointwise observation for a parabolic boundary value problem / E. A. Kapustyan, A. G. Nakonechnyj // Journal of Automation and Information Sciences. – 2002. – Vol. 34(5-8). – PP. 52-63.

[209] Kapustian O. A. Approximate Averaged Synthesis of the Problem of Optimal Control for a Parabolic Equation / O. A. Kapustian, A. V. Sukretna. // Ukrainian Mathematical Journal. – 2004. – Volume 56, Issue 10. -– PP. 1653-1664.

[210] Kapustian O. A. Averaging in the optimal control problem for the reaction-diffusion equation with multivalued interaction function / O. A. Kapustian // Таврійський вісник інформатики і математики (Tavrian Bullettin of Informatics and Mathematics). – 2013. – Vol. 4. – P. 55-64.

[211] Kapustian O. A. Distributed optimal control in one non-self-adjoint boundary value problem / O. A. Kapustian, V. O. Kapustyan, O. K. Mazur. // Continuous and Distributed Systems, Series: Solid Mechanics and Its Applications, Springer. – 2014. – Vol. 31, Issue 12. – P. 45-52.

[212] Kapustian O. A. The Optimal Control Problem for Parabolic Equation with Nonlocal Boundary Conditions in Circular Sector / O. V. Kapustyan, O. A. Kapustian, V. O. Kapustyan, O. K. Mazur. // Continuous and Distributed Systems II. Theory and Applications, Series: Studies in Systems, Decision and Control, Springer. –2015. – Vol. 30. – P. 297-314.

[213] Kapustian O. A. The Optimal Control Problem with Minimum Energy for One Nonlocal Distributed System / O. A. Kapustian, O. K. Mazur. // Chapter 23 in Book *Advances in Dynamical Systems and Control*, Series: Studies in Systems, Decision and Control, Springer International Publishing Switzerland. – 2016. – Vol. 69. – P. 417-427.

[214] Kapustian O.A. Approximate homogenized synthesis for distributed optimal control problem with superposition type cost functional / O. A. Kapustian, V. V. Sobchuk // Statistics, Optimization and Information Computing. – 2018. – Vol. 6, № 4. – P. 233-239.

[215] Kapustian O.A. Approximate optimal regulator for distributed control problem with superposition functional and rapidly oscillating coefficients / O. A. Kapustian. // Modern Mathematics and Mechanics (Part of the Understanding Complex Systems (UCS) book series). -– 2019. – P. 481-491

[216] Kapustian O. Minimax Estimation of Solutions of the First Order Linear Hyperbolic Systems with Uncertain Data / O. Kapustian, O. Nakonechnyi, Yu. Podlipenko // Statistics, Optimization and Information Computing. – 2019. – Vol.7 (4). – P. 695-708.

[217] Kapustian O. A. Approximate Guaranteed Mean Square Estimates of Functionals on Solutions of Parabolic Problems with Fast Oscillating Coefficients Under Nonlinear Observations / O. A. Kapustian, O. G.

Nakonechnyi, A. O. Chikrii // Cybernetics and Systems Analysis. – September 2019. – Vol. 55, Iss. 5. – P. 785–795 Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, No. 5, September–October, 2019, pp. 95–105.

[218] Kasyanov P. O. Regularity of weak solutions and their attractors for a parabolic feedback control problem / P. O. Kasyanov, L. Toscano, N. V. Zadoianchuk. // Set-Valued and Variational analysis. – 2013. – Vol. 21, №2. – P. 271–282.

[219] Kesavan S. Homogenization of an optimal control problem / S. Kesavan, J. Saint Jean Paulin. // SIAM Journal of Control and Optimization. – 1997. – Vol. 35, №5. – P. 1557–1573.

[220] Khalil H. K. Nonlinear systems / H. K. Khalil. – Prentice-Hall, New Jersey, 2002.

[221] Kirk D. E. Optinal control theory. An introduction / D. E. Kirk. – Mineola, New York: Dover, 2004. – 452 p.

[222] Kogut P. I. Optimal Control Problems for Partial Differential Equations on Reticulated Domains: Approximation and Asymptotic Analysis / P. I. Kogut, G. Leugering. – Boston: Birkhauser, 2011. – 653 p.

[223] Kokotovic P. V. Foundations of adaptive control / P. V. Kokotovic. – Berlin: Springer, 1991.

[224] Krotov V. F. Global methods in optimal control theory / V. F. Krotov. – New York: Marcel Dekker, 1996. – 408 p.

[225] Li X. Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems / X. Li, J. Yong. // Systems and Control: Foundations and Applications. – Boston, MA: Birkhäuser Boston, Inc., 1995.

[226] Lions J.-L. Some methods in the mathematical analysis of systems of their control / J.-L. Lions. – Beijing, China: Science Press, 1981. – 542 p.

[227] Luz, M. Minimax-robust filtering problem for stochastic sequences with stationary increments and cointegrated sequences / M. Luz, M. Moklyachuk. // Statistics, Optimization and Information Computing. – 2014. – Vol. 2, September 2014. – P. 176-199.

[228] Marx S. Semi-global stabilization by an output feedback law from a hybrid state controller / S. Marx, V. Andrieu, C. Prieur. // Automatica. – 2016. – Vol. 74, №1. – P. 90–98.

[229] Medina P. K. Feedback stabilizability of time–periodic parabolic equations / P. K. Medina. – University of Zurich, Ph.D. Thesis, 1991.

[230] Migorski S. On asymptotic limits of control problems with parabolic and hyperbolic equations / S. Migorski. // Rivista di Matematica Pura e Applicata. – 1992. – Vol. 12. – P. 33–50.

[231] Molchanyuk I.V., Plotnikov A.V. Necessary and sufficient conditions of optimality in the problems of control with fuzzy parameters / I. V. Molchanyuk, A. V. Plotnikov // Ukrainian Mathematical Journal. - 2009. - 61(3). - P. 457-466

[232] Nakonechnii O. Minimax state estimates for abstract Neumann problems / O. Nakonechnii, S. Zhuk. // Minimax Theory and its Applications. – 2018. – 3(1). – P. 1-21.

[233] Nakonechnyi A. G. Minimax prediction estimation of solutions of initial-boundary-value problems for parabolic equations with discontinuous coefficients based on imperfect data / A. G. Nakonechnyi, Yu. K. Podlipenko,

Yu. A. Zaitsev. // Cybernetics and Systems Analysis. – 2000. – Vol. 36 (Iss. 6). – P. 845-854.

[234] Pankov A. G-convergence and homogenization of nonlinear partial differential operators / A. Pankov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 249 p.

[235] Papageorgiou N. S. A convergence result for a sequence of distributed-parameter optimal control problems / N. S. Papageorgiou. // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1991. – Vol. 68. – P. 305–332.

[236] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations / A. Pazy. – New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1983.

[237] Perestyuk M. O. Approximate optimal control in the feedback form for impulse parabolic problem with quickly-oscillating coefficients / M. O. Perestyuk, O. V. Kapustyan, A. V. Rusina. // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, Book of Abstracts. – 2014. – P. 119–122.

[238] Pindyck R. S. Optimal planning for economic stabilization / R. S. Pindyck. – Amsterdam: North-Holland, 1973. – 159 p.

[239] Robinson J. Infinite-dimensional dynamical systems / J. Robinson. // Cambridge University Press. – 2001. – №9. – P. 465.

[240] Rosenbluelh A. Behavior, Purpose and Teleology / A. Rosenbluelh, N. Wiener, J. Bigelow. // Philosophy of Science. – 1943. – Vol. 10, №1. – P. 18–24.

[241] Rusina A. V. An approximated optimal stabilization for solutions of impulsive parabolic problems with fast-oscillating coefficients / A. V. Rusina. // Journal of Applied Mathematics and Statistics. – 2016. – Vol. 3, №3. – P. 110–121.

[242] Rusina A. V. Approximate Optimal Control in Feedback Form for Parabolic System with Quickly-Oscillating Coefficients / A. V. Rusina. // III International conference Nonlinear Analysis and Applications, Book of Abstracts. – 2015. – P. 58–59.

[243] Rusina A. V. Approximate optimal control in feedback form for parabolic system with quickly-oscillating coefficients / A. V. Rusina. // SIAM Conference on Control and Its Applications, Book of Abstracts. – 2015. – P. 73.

[244] Samoilenko A. M. Impulsive differential equations / A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. – Singapore: World Scientific, 1995. – 462 p.

[245] Sell G. R. Dynamics of Evolutionary Equations / G. R. Sell, Y. You. – New York: Springer, 2002. – 670 p.

[246] Simon J. Compact sets in the space Lp(0, T;B) / J. Simon. // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1986. – Vol. 146, №1. – P. 65–96.

[247] Scherberg M. G. The degree of convergence of a series of Bessel functions / M. G. Scherberg. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1933. — V.35. — P. 172-183.

[248] Sontag E. D. Smooth stabilization implies coprime factorization / E.D. Sontag // IEEE Trans. Automat. Control. - 1989. - v.34(4). - P. 435 - 443.

[249] Sontag E.D., Wang Y. New characterizations of inputto- state stability / E.D. Sontag, Y. Wang. // IEEE Trans. Autom. Contr. - 1996. - v.24. - P. 1283- 1294.

[250] Spagnolo S. Convergence of Parabolic Equations / S. Spagnolo // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. - 1977. - Vol. 14B. - P. 547-568

[251] Stanzhitskii A. N. Study of optimal control problems on the half-line by the averaging method / A. N. Stanzhitskii, T. V. Dobrodzii. // Differential Equations. – 2011. – Vol. 47, №2. – P. 264–277.

[252] Stanzhytskyi A. N. On existence of an optimal feedback control for stochastic systems / A. N. Stanzhytskyi, E. A. Samoilenko, V. V. Mogilova. // Differential Equations. – 2013. – Vol. 49, №11. – P. 1456–1464.

[253] Stanzhytsky O.M. Pontryagin's maximum principle for dynamic systems on time scales / Stanzhytsky O.M., Bohner M., Kenzhebaev K., Lavrova O. // Journal of difference equations and applications, 2017.

[254] Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics / R. Temam. -– New York: Springer, 1993. -– 530 p.

[255] Tihonov A. N. Equations of mathematical physics / A. N. Tihonov, A. A. Samarskyi. – Moscow: Nauka, 1966.

[256] Vinter R. B. Optimal control / R. B.Vinter. – Boston: Birkhauser, 2000.

[257] Watson G. N. Theory of Bessel Functions / G. N. Watson. – Cambridge: University press, 1945. – 798 p.

[258] Wu X. Optimal control and observation locations for time-varying systems on a finite-time horizon / X. Wu, B. Jacob, H. Elbern. // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2016. – Vol. 54, №1. – P. 291–316.

[259] Zabczyk J. Infinite-dimensional systems in control theory / A. J. Pritchard, J. Zabczyk. // Bull. Inst. Internat. Statist. – 1977. – Vol. 47, no. 2. – P. 286–314.

[260] Zgurovsky M. Z. Nonlinear analysis and control of physical processes and fields / M. Z. Zgurovsky, V. S. Melńik. -– Berlin: Springer, 2004. -– 508 p.

[261] Zgurovsky M. Z. Evolution inclusions and variational inequalities for Earth data processing / M. Z. Zgurovsky, V. S. Melńik, P. O. Kasyanov. – N.Y.: Springer, 2011. – 250 p.

[262] Evolution inclusions and variation inequalities for Earth data processing III. Long-time behavior of evolution inclusions solutions in Earth data analysis / [M. Z. Zgurovsky, P. O. Kasyanov, O. V. Kapustyan, etc.]. -– Berlin: Springer, 2012. -– 340 p.

ДОДАТОК 1. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Kapustyan O. A. Approximate Averaged Synthesis of the Problem of Optimal Control for a Parabolic Equation / O. A. Kapustyan, A. V. Sukretna // Ukrainian Mathematical Journal. – 2004. – Volume 56, Issue 10. -– PP. 1653-1664.

2. Капустян О. А. Наближений синтез оптимального керування для задачі оптимальної стабілізації зі швидко осцилюючими коефіцієнтами / О. А. Капустян. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2005. – № 1. -– С. 29-33 (ISSN 1681- 6048).

3. Капустян О. А. Мінімаксні оцінки функціоналів від періодичних за часом розв'язків крайових задач Неймана для параболічних рівнянь / О. А. Капустян, В. О. Капустян, Ю. К. Подлипенко. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2005. – Випуск 2. – С. 220-232.

4. Kapustyan O. A. Approximate bounded synthesis for one weakly nonlinear boundary-value problem / O. V. Kapustyan, O. A. Kapustyan, A. V. Sukretna // Nonlinear Oscillations. – 2009. – Vol. 12, Issue 3, July 2009. – PP. 297–304 (Translated from Neliniini Kolyvannya, Vol. 12, No. 3, PP. 291–298, July–September, 2009).

5. Капустян О. А. Наближені екстремальні розв'язки для еволюційних включень субдиференціального типу / О. А. Капустян, В. В. Ясінський. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2009. – № 4. – С. 109-116.

6. Капустян О. В. Наближений синтез для задачі оптимального керування для нелінійного хвильового рівняння / О. В. Капустян, О. А. Капустян, А. В. Сукретна. // Наукові вісті НТУУ КПІ. – 2010. – № 4. – С. 72-77.

7. Kapustyan O. A. Approximate stabilization for a nonlinear parabolic boundary-value problem / O. V. Kapustyan, O. A. Kapustyan, A. V. Sukretna // Ukrainian Mathematical Journal. – 2011. – Volume 63, Issue 5, October 2011. – PP. 759-767 (Translated from Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, 2011, Vol. 63, № 5, PP. 654-661).

8. Капустян О. А. Задача наближеної стабілізації для параболічного включення / О. А. Капустян. // Журнал обчислювальної та прикладної математики, 2011. – № 1 (104). – С. 62-67.

9. Капустян О.А. Наближений розв'язок однієї нескінченновимірної задачі оптимальної стабілізації з неавтономними збуреннями в коефіцієнтах / О. А. Капустян, В. В. Ясінський. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2012. – № 4. – С. 111-115.

10. Капустян О. А. Наближений регулятор для еволюційного включення субдиференціального типу / О. А. Капустян, В. В. Ясінський. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2012. – № 1. -– С. 87–93.

11. Капустян О. А. Задача оптимального керування для еліптичного рівняння з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі / О. А. Капустян, В. О. Капустян, О. К. Мазур // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2012. – № 2 (108). – С. 3-9.

12. Kapustyan O. V. Approximate bounded synthesis for distributed systems / O. V. Kapustyan, O. A. Kapustian, A. V. Sukretna. -– Saarbrucken:

Lambert Academic Publishing, 2013. -– 235 p.

13. Kapustian O. A. Averaging in the optimal control problem for the reaction-diffusion equation with multivalued interaction function / O. A. Kapustian // Таврійський вісник інформатики і математики (Tavrian Bullettin of Informatics and Mathematics). – 2013. – Vol. 4. – PP. 55–64.

14. Kapustyan O. A. Problem of Optimal Control for the Poisson Equation with Nonlocal Boundary Conditions / O. V. Kapustyan, O. A. Kapustyan, O. K. Mazur. //Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 201, Issue 3. – PP. 325-334 (Translated from Neliniini Kolyvannya, 2013, July–September, 2013, Vol. 16, No. 3, PP. 350-–358).

15. Kapustian O. A. Distributed optimal control in one non-self-adjoint boundary value problem / O. A. Kapustian, V. O. Kapustyan, O. K. Mazur. // Continuous and Distributed Systems, Series: Solid Mechanics and Its Applications, Springer. – 2014. – Vol. 31, Issue 12. – PP. 45–52.

16. Капустян О. А. Розв'язність задачі оптимального керування з мінімальною енергією для однієї параболічної крайової задачі з нелокальними крайовими умовами / О. А. Капустян, О. К. Мазур // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2015. – № 3 (120). – С. 6–10.

17. Kapustian O. A. The Optimal Control Problem for Parabolic Equation with Nonlocal Boundary Conditions in Circular Sector / O. V. Kapustyan, O. A. Kapustian, V. O. Kapustyan, O. K. Mazur // Continuous and Distributed Systems II. Theory and Applications, Series: Studies in Systems, Decision and Control, Springer. – 2015. – Vol. 30. – PP. 297–314.

18. Kapustian O. A. The Optimal Control Problem with Minimum Energy for One Nonlocal Distributed System / O. A. Kapustian, O. K. Mazur // Chapter 23 in Book *Advances in Dynamical Systems and Control*, Series: Studies in Systems, Decision and Control, Springer International Publishing Switzerland. – 2016. – Vol. 69. – PP. 417–427.

19. Капустян О. А. Обґрунтування наближеного синтезу в розподіленій задачі оптимального керування з цільовим функціоналом типу Немицького / О. А. Капустян // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2016. - № 3. – С. 73–78.

20. Kapustian O.A. Approximate homogenized synthesis for distributed optimal control problem with superposition type cost functional / O. A. Kapustian, V. V. Sobchuk // Statistics, Optimization and Information Computing. – 2018. – Vol. 6, № 4. – PP. 233–239.

21. Kapustian O.A. Approximate optimal regulator for distributed control problem with superposition functional and rapidly oscillating coefficients / O. A. Kapustian // Modern Mathematics and Mechanics (Part of the Understanding Complex Systems (UCS) book series). -– 2019. -– PP. 481–491

22. Kapustian O. Minimax Estimation of Solutions of the First Order Linear Hyperbolic Systems with Uncertain Data / O. Kapustian, O. Nakonechnyi, Yu. Podlipenko // Statistics, Optimization and Information Computing. – 2019. – Vol.7 (4). – PP. 695–708.

23. Капустян О. А. Наближене мінімаксне оцінювання функціоналів від розв'язку параболічної задачі зі швидко коливними коефіцієнтами при нелінійних спостереженнях / О. А. Капустян, О. Г. Наконечний. //

Системні дослідження та інформаційні технології. – 2019. – № 2. -– С. 94–104.

24. Kapustian O. A. Approximate Guaranteed Mean Square Estimates of Functionals on Solutions of Parabolic Problems with Fast Oscillating Coefficients Under Nonlinear Observations / O. A. Kapustian, O. G. Nakonechnyi, A. O. Chikrii // Cybernetics and Systems Analysis. – September 2019. – Vol. 55, Iss. 5. – PP. 785-–795 (Translated from Kibernetika i Sistemnyi Analiz, No. 5, September–October, 2019, PP. 95-–105).

25. О. А. Капустян. Мінімаксне оцінювання функціоналів від розв'язків крайової задачі для параболічного рівняння зі швидко осцилюючими коефіцієнтами. // Міжнародна конференція "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU-2008), Київ-Рівне, 12-17 травня 2008 р. – С. 123–124.

26. О. А. Капустян, А. В. Сукретна. Наближене оптимальне керування для нелінійного хвильового рівняння. // Міжнародна наукова конференція "Проблеми стійкості та оптимізації динамічних систем детермінованої та стохастичної структури Чернівці, 17-21 жовтня 2010 р. – С.73–74.

27. О. А. Капустян, А. В. Сукретна. The problems of approximated synthesis and stabilization for nonlinearly perturbed evolution equations // Міжнародна конференція пам'яті член-кореспондента НАНУ В.С. Мельника "Nonliear Analysis and Applications Київ, 4-6 квітня 2012 р. – С. 41.

28. О. В. Капустян, О. А. Капустян. Approximated regulator in optimal control problem for parabolic inclusion // XX Міжнародна конференція "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU-2012), Брно, Чехія, 17-21 вересня 2012 р. – С. 53.

29. O. A. Kapustian, O. K. Mazur. The optimal control problem for parabolic equation with non-local boundary conditions in circular sector // Міжнародна конференція "Dynamical System Modelling and Stability Investigation: Modelling and Stability м. Київ, 28-30 травня 2015. – С. 151.

30. O. A. Kapustian. The Optimal Control Problem with Minimum Energy for Parabolic Equation with Nonlocal Boundary Conditions in the Class of Non-stationary Controls // XXVIII Міжнародна конференція "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU-2016), Брно, Чехія, 25-30 серпня 2016 р. – С. 59.

31. О. А. Капустян, О. Г. Наконечний, Ю. К. Подлипенко. Minimax estimates of solutions of the first order linear hyperbolic systems under uncertainties // XXXII Міжнародна конференція "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU-2018), Прага, Чехія, 27-31 серпня 2018 р. – С. 68.

32. O. A. Kapustian, O. G. Nakonechnyi. Approximate Estimation of Functionals of the Solutions of Parabolic Equation Under Nonlinearity in Output // Proceedings of 2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT-2019), Kyiv, 18-20 December, 2019. – PP. 16–21.

ДОДАТОК 2. ДОВІДКА ПРО ВИКОРИСТАННЯ В БЮДЖЕТНІЙ ТЕМІ №11БФ015-06

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

м. Київ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Проректор з наукової роботи

Київського національного

університету

імені Тараса Шевченка

_________ проф. Жилінська О.І.

«10» 06 2020 р.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка * Україна * Ідентифікаційний код 02070944

ДОВІДКА

про використання результатів дисертаційної роботи Капустян Олени Анатоліївни «Оптимальне керування та гарантоване оцінювання у розподілених системах з малим параметром», поданої на здобуття наукового ступеню доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень.

Результати дисертаційної роботи Капустян Олени Анатоліївни «Оптимальне керування та гарантоване оцінювання у розподілених системах з малим параметром» були використані при виконанні бюджетної теми «Проблеми теорії прийняття рішень та системного аналізу стохастичних мереж» (№11БФ015-06, номер державної реєстрації 0111U005864, виконувалась у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка у 2011-2015 роках). Зокрема, в рамках даної бюджетної теми для задач оптимальної стабілізації розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь та включень обґрунтовано форму наближеного регулятора на основі формули точного синтезу відповідної лінійно-квадратичної задачі, а також розроблено алгоритм побудови наближеного оптимального керування для рівняння Пуассона з нелокальними крайовими умовами.

Заст. декана з навчально-методичної роботи

факультету комп'ютерних наук та кібернетики

к. ф.-м. н., доцент О.Ф. Кашпур

Керівник бюджетної теми

завідувач кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень

д.ф.-м.н., професор О.Г. Наконечний

ДОДАТОК 3. ДОВІДКА ПРО ВИКОРИСТАННЯ

В БЮДЖЕТНІЙ ТЕМІ №16БФ015-02

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

м. Київ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Проректор з наукової роботи

Київського національного

університету

імені Тараса Шевченка

_______ проф. Жилінська О.І.

«10» ___06___ 2020 р.

ДОВІДКА

про використання результатів дисертаційної роботи Капустян Олени Анатоліївни «Оптимальне керування та гарантоване оцінювання у розподілених системах з малим параметром», поданої на здобуття наукового ступеню доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень.

Результати дисертаційної роботи Капустян Олени Анатоліївни «Оптимальне керування та гарантоване оцінювання у розподілених системах з малим параметром» були використані при виконанні бюджетної теми «Розробка нових математичних методів системного аналізу і теорії оптимальних рішень та їх застосування» (№16БФ015-02, номер державної реєстрації 0116U002529, виконувалась у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка у 2016-2018 роках). У рамках даної бюджетної теми досліджено нові задачі оптимального керування для систем з розподіленими параметрами, зокрема, запропоновано алгоритм побудови наближеного синтезу для задачі мінімізації енергетичного функціоналу типу суперпозиції, доведено розв'язність задачі оптимального керування з мінімальною енергією для параболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами.

Заст. декана з навчально-методичної роботи

факультету комп'ютерних наук та кібернетики

к. ф.-м. н., доцент О.Ф. Кашпур

Керівник бюджетної теми

завідувач кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень

д.ф.-м.н., професор О.Г. Наконечний

ДОДАТОК 4. ДОВІДКА ПРО ВИКОРИСТАННЯ В БЮДЖЕТНІЙ ТЕМІ №19БФ015-02

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

м. Київ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Проректор з наукової роботи

Київського національного

університету

імені Тараса Шевченка

________ проф. Жилінська О.І.

«10» 06 2020 р.

ДОВІДКА

про використання результатів дисертаційної роботи Капустян Олени Анатоліївни «Оптимальне керування та гарантоване оцінювання у розподілених системах з малим параметром», поданої на здобуття наукового ступеню доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень.

Результати дисертаційної роботи Капустян Олени Анатоліївни «Оптимальне керування та гарантоване оцінювання у розподілених системах з малим параметром» були використані при виконанні бюджетної теми «Розробка нових математичних методів аналізу та оптимізації систем в умовах невизначеності» (№19БФ015-02, номер державної реєстрації 0119U100338, виконується у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка у 2019-2021 роках). Зокрема, в рамках даної бюджетної теми отримані представлення мінімаксних оцінок для параболічних систем зі швидко коливними коефіцієнтами та досліджено їх близькість до оцінок відповідних систем з усередненими параметрами.

Заст. декана з навчально-методичної роботи

факультету комп'ютерних наук та кібернетики

к. ф.-м. н., доцент О.Ф. Кашпур

Керівник бюджетної теми

завідувач кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень

д.ф.-м.н., професор О.Г. Наконечний

ДОДАТОК 5. ДОВІДКА ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ В НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЦЕС

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

м. Київ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Проректор з наукової роботи

Київського національного

університету

імені Тараса Шевченка

________ проф. Жилінська О.І.

«10» ___06___ 2020 р.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка * Україна * Ідентифікаційний код 02070944

ДОВІДКА

про використання у навчальному процесі результатів дисертаційної роботи Капустян Олени Анатоліївни «Оптимальне керування та гарантоване оцінювання у розподілених системах з малим параметром», поданої на здобуття наукового ступеню доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень.

Наукові результати, одержані в процесі написання дисертаційної роботи Капустян Олени Анатоліївни «Оптимальне керування та гарантоване оцінювання у розподілених системах з малим параметром», впроваджені у 2011-2019 н.р. у навчальний процес кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка при викладанні дисциплін «Прийняття рішень в умовах невизначеності» (1 рік магістратури), «Сучасні проблеми оптимізації та ідентифікації» (1-2 рік магістратури) та «Методи оптимізації та моделювання систем» (4 курс бакалаврату).

Заст. декана з навчально-методичної роботи
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
к. ф.-м.н., доцент О.Ф. Кашпур

Завідувач кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень
д. ф.-м.н., професор О.Г. Наконечний

Викладач дисциплін «Прийняття рішень в умовах невизначеності»,
«Сучасні проблеми оптимізації та ідентифікації»,
професор кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень
д.ф.-м.н., професор О.Г. Наконечний

Викладач дисципліни «Методи оптимізації
та моделювання систем»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень
к. ф.-м. н., доцент П.М. Зінько