ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Кафедра моделювання складних систем

А.В. Шатирко

Методичні вказівки
до лабораторних занять з дисципліни
«Керування динамічними системами»

Навчальний посібник

для студентів спеціальності
121 «Інженерія програмного забезпечення»
освітнього рівня «бакалавр»

Київ - 2023

УДК 517.9:004.4 (075.8), 681.5.01(075.8)

Ш77

Рецензенти:
доктор фіз.-мат. наук, проф. О.І. Провотар
доктор техн. наук, проф. О.С. Бичков

Рекомендовано до друку вченою радою
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(Протокол № 5 від 27 листопада 2023 р.)

Ухвалено науково-методичною комісією
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(Протокол № 4 від 07 листопада 2023 р.)

Шатирко А.В.
Методичні вказівки до лабораторних занять з дисципліни «Керування динамічними системами»: навчальний посібник / А.В. Шатирко. – Київ: 2023. – 54 с.

Викладено матеріали до лабораторного практикуму з обов'язкової навчальної дисципліни «Керування динамічними системами». В посібнику наведено умови лабораторних робіт, порядок розрахунку семестрової оцінки, надані посилання на теоретичний матеріал лабораторного практикуму, варіанти завдань для виконання лабораторних робіт. Для студентів другого курсу факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які навчаються за освітньо-професійною програмою «Програмна інженерія» спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення».

УДК 517.9 (075.8), 681.5.01(075.8)

Ш77

ЗМІСТ

I. ПЕРЕДМОВА

1. Мета дисципліни – ознайомлення з методами розв'язання різних типів звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними, систем диференціальних рівнянь, постановкою та розв'язуванням задач Коші; засвоєння основних теоретичних положень теорії керування, принципів і методів вирішення проблем, пов'язаних з керуванням складними системами та оволодіння практичними навичками розв'язування задач керування.

2. Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни:

1. Успішне опанування курсів: математичного аналізу.

2. Знати: теоретичні відомості з математичного аналізу, дискретної математики, алгебри, методів оптимізації, аналітичної геометрії, фізики, механіки, основи застосування різноманітних програмних пакетів.

3. Вміти: знаходити похідні, обчислювати інтеграли, розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь з параметрами, володіти методами матричної алгебри, користуватись основними законами фізики, користуватися пакетами математичних програм

4. Володіти навичками: самостійної та колективної роботи при розв'язанні поставлених математичних задач, англійською мовою на рівні не нижче Intermediate

3. Анотація навчальної дисципліни:

Навчальна дисципліна „Управління динамічними системами " є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти галузі знань 12 „Інформаційні технології" зі спеціальності

121“Інженерія програмного забезпечення”, освітньо-наукової програми “Програмна інженерія”

Дана дисципліна є обов’язковою навчальною дисципліною за програмою ***“Програмна інженерія”***.

Викладається у 3 семестрі в **обсязі – 180 год.**

(6 кредитів ECTS) зокрема: *лекції – 42 год.,лабораторні – 42 год., консультації – 2 год., самостійна робота – 94 год.* У курсі передбачено **2 *модуля, 2 змістових модуля*** та 2 ***модульних контрольних роботи,*** завершується дисципліна – **іспитом.**

В результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен:

знати: основні означення, класифікацію, теореми, типи диференціальних рівнянь та систем рівнянь; основні означення, класифікацію, методи та підходи розв’язання задач теорії оптимального керування.

вміти: розв’язувати аналітично основні класи звичайних диференціальних рівнянь першого та вищих порядків, шукати розв’язки систем лінійних однорідних та неоднорідних диференціальних рівнянь, розв’язувати однорідні диференціальні рівняння в частинних похідних; досліджувати на керованість та спостережуваність лінійні моделі задач теорії керування, розв’язувати задачі стабілізації руху, розв’язувати задачі теорії керування в лінійній постановці методами варіаційного числення, динамічного програмування та завдяки принципу максимуму; застосовувати пакети математичних програм у випадках коли задачі неможливо розв’язати аналітично; спілкуватися з колегами з питань проектування та розробки програм, складати письмові звіти.

Дисципліна „Управління динамічними системами” є базовою для засвоєння дисциплін «Моделювання систем», «Екологічні та економічні процеси та їх моделювання» й інших вибіркових дисциплін прикладного математичного спрямування освітньої програми «Програмна інженерія».

4. Завдання (навчальні цілі):

набуття знань, умінь та навичок (компетенцій) на рівні новітніх досягнень теорії оптимального керування та основ диференціальних рівнянь, відповідно до кваліфікації бакалавр з програмної інженерії. Зокрема, розвивати:

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово;
- здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями;
- здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел;
- здатність до алгоритмічного та логічного мислення.

5. Результати навчання за дисципліною:

Результат навчання (1. знати; 2. вміти; 3. комунікація; 4. автономність та відповідальність)		Форми (та/або методи і технології) викладання і навчання	Методи оцінювання та пороговий критерій оцінювання (за необхідності)	Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни
Код	**Результат навчання**			
РН1.1	*Знати основні означення, класифікацію, теореми, типи диференціальних рівнянь та систем рівнянь, методи та підходи їх аналітичного та чисельного розв'язання*	*Лекція, лабораторні заняття, самостійна робота*	*Поточне оцінювання, модульна контрольна робота 1, іспит*	15%
РН1.2	*Знати основні положення, методи та підходи аналізу, синтезу, та розв'язання задач теорії оптимального керування*	*Лекція, лабораторні заняття, самостійна робота*	*Поточне оцінювання, модульна контрольна робота 2, іспит*	15%
Н2.1	*Вміти правильно класифікувати диференціальні*	*Лабораторна робота,*	*Поточне оцінювання, лабораторна*	25%

	рівняння та системи рівнянь й отримувати їх аналітичні розв’язки. Вміти застосовувати відповідні чисельні алгоритми (пакети програм) у випадку неможливості аналітичного розв’язання	*самостійна робота*	*робота 1, модульна контрольна робота 1, іспит*	
РН2.2	*Вміти застосовувати різні методи до аналізу (дослідження на керованість, спостережуваність, стійкість) та синтезу (будувати керування та відповідну траєкторію) в задачах оптимального керування*	*Лабораторна робота, самостійна робота*	*Поточне оцінювання,лабораторна робота 2, модульна контрольна робота 2, іспит*	25%
РН3.1	*Обґрунтовувати власний погляд на*	*Лекція, лабораторна робота,*	*Поточне оцінювання, іспит*	10%

	задачу, спілкуватися з колегами з питань проектування та розробки моделей, розв'язування задач.	*самостійна робота*		
РН4.1	*Приймати кваліфіковані рішення, спираючись на застосування методів математичного моделювання.*	*Лабораторна робота, самостійна робота*	*Поточне оцінювання, контрольні роботи 1, 2, іспит*	10%

6. Співвідношення результатів навчання дисципліни із програмними результатами навчання

Результати навчання дисципліни **Програмні результати навчання**	**РН 1.1**	**РН 1.2**	**РН 2.1**	**РН 2.2**	**РН 3.1**	**РН 4.1**
(з опису освітньої програми)						
ПРН01. Аналізувати, цілеспрямовано шукати і вибирати необхідні для вирішення професійних завдань інформаційно-довідникові ресурси і знання з урахуванням сучасних досягнень науки і техніки.						

7. Схема формування оцінки.

7.1 Форми оцінювання студентів:

- семестрове оцінювання:

Максимальна кількість балів які можуть бути отримані студентом: *60 балів*:

1. Контрольна робота 1: РН 1.1., РН2.1, РН4.1 — 20/12 балів.

2. Контрольна робота 2: РН 1.2 , РН2.2, РН4.1 — 20/12 балів.

3. Поточне опитування на лаборторних заняттях: РН1.1, РН1.2, РН2.1, РН2.2, РН3.1, РН4.1 – 20/12 балів

- підсумкове оцінювання у формі екзамену:

Максимальна кількість балів які можуть бути отримані студентом: *40 балів*:

- *результати навчання, які будуть оцінюватись: РН1.1, РН1.2, РН2.1, РН2.2, РН3.1, РН4.1;*

- *форма проведення і види завдань: письмова робота.*

Види завдань: 6 письмових завдань (2 теоретичних питання, 4 практичних завдання) .

Студент отримує загальну позитивну оцінку з дисципліни, якщо його оцінка за екзамен становить не менше, ніж 24 бали.

Студент допускається до екзамену, якщо протягом семестру він:

- Загалом набрав не менше ніж 36 балів;
- виконав і вчасно здав 2 (дві) контрольні роботи
- виконав і вчасно здав 2 (дві) лабораторні роботи

Критерії оцінювання на екзамені

Завдання	Тема завдання	Максимальний відсоток від 40 балів	Всього балів
Завдання 1	Письмова відповідь на теоретичне питання з Частини 1 «Основи диференціальних рівнянь»	10%	4
Завдання 2	Письмова відповідь на теоретичне питання з Частини 2 «Теорія керування»	10%	4
Завдання 3	Тестове завдання з Частини 1: знайти загальний роз'язок диференціального рівняння	20%	8
Завдання 4	Тестове завдання з Частини 1: знайти загальний роз'язок системи диференціальних рівнянь	20%	8
Завдання 5	Тестове завдання з Частини 2:дослідити систему на керованість, спостережуваність,	20%	8

	розв'язати задачу стабілізації		
Завдання 6	Тестове завдання з Частини 2:розв'язати задачу теорії керування одним з запропонованих методів (варіаційного числення, динамічного програмування, принцип максимуму)	20%	8

\

7.2 Організація оцінювання:

Терміни проведення форм оцінювання:

1. Контрольна робота 1: до 7 тижня семестру.

2. Контрольна робота 2: до13 тижня семестру

Студент має право на одне перескладання кожної контрольної роботи із можливістю отримання максимально 80% початково визначених за цю контрольну роботу балів. Термін перескладання визначається викладачем.

У випадку встановлення фактів порушення студентами академічної доброчесності передбачених пунктом 9.8.2 «Положення про організацію освітнього процесу у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка» що діє від 07.05.2018, вони будуть притягнуті до відповідальності передбаченої пунктом 9.8.3 цього положення.

7.3 Шкала відповідності оцінок

Відмінно / Excellent	90-100
Добре / Good	75-89
Задовільно / Satisfactory	60-74
Незадовільно / Fail	0-59

8. Структура навчальної дисципліни. Тематичний план лекцій і лабораторних занять

п/п	Назва лекції (теми)	Кількість годин		
		Лекц.	Лабора-торні заняття	Самост роб.

Частина 1.
Основи диференціальних рівнянь

	Вступ Приклади застосування ДР та принципи побудови динамічних математичних моделей. Проблеми математичного моделювання, системного аналізу та інформатики, їх зв‘язок з методами та теорією ДР. Приклади використання ДР в задачах механіки, біології, економіки, керування	2	2	4
	Тема 1. ДР першого порядку, розв'язні та нерозв’язні відносно похідної.	4	6	12
	Тема 2. Звичайні ДР вищих порядків. Лінійні ДР.	4	6	14
	Тема 3. Системи диференціальних рівнянь	4	4	4
	Тема 4. Якісна теорія диференціальних рівнянь	2	2	4
	Тема 5. Диференціальні рівняння з частинними похідними.	2	2	4

Модульна контрольна робота 1	2	

Частина 2.

Теорія керування

	Вступ Постановка задач оптимального керування, приклади задач оптимального керування	2		
	Тема 1. Керованість, спостережуваність та ідентифікація систем керування	6	2	3
	Тема 2. Стійкість руху та аналітичне конструювання регуляторів систем керування.	4	4	0
	Тема 3. Методи варіаційного числення для вирішення задач оптимального керування.	4	2	
	Тема 4. Метод динамічного програмування.	4	4	0
	Тема 5. Принцип максимуму Понтрягіна для систем з неперервним часом	4	4	0
Модульна контрольна робота 2			2	
Консультація		2		
Іспит				
ВСЬОГО		42	42	94

Загальний обсяг 180 *год.,* в тому числі:

лекцій **– 42** *год.*

лабораторні – **42** *год*.

консультації – **2** *год.*

самостійна робота **- 94** *год.*

Теми, винесені на самостійне вивчення:

Застосування операційного числення до розв’зання диференціальних рівнянь. Пряме та обернене перетворення Лапласа.

Розв’язок задач диференціальних рівнянь та теорії керування в середовищах пакетів програм MATLAB, MAPLE, MATEMATIKA, PYTON, Sage.

Структурно дисципліна складається з двох модулів: ***Основи диференціальних рівнянь***, та ***Теорія керування***. В кожному модулі передбачено виконання лабораторної роботи.

II. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Аналітичне розв’язування диференціальних рівнянь за допомогою комп’ютерних пакетів програм

Диференціальні рівняння першого порядку

Рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної, має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Диференціальне рівняння є зв'язком між координатами точки й кутовим коефіцієнтом дотичної dy/dx до графіка розв'язку в тій самій точці. Якщо знати x та y, то можна обчислити $f(x, y)$, тобто dy/dx.

Диференціальне рівняння визначає векторне поле, яке називається *полем напрямків*, і задача інтегрування рівнянь зводиться до знаходження кривих, які називаються *інтегральними кривими*, напрямок дотичних до яких у кожній точці збігається з напрямком векторного поля.

Рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

або, у більш загальному вигляді,

$$f_1(x) f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0$$

називається *рівнянням із відокремлюваними змінними*. Розділимо його на $f_2(y)g_1(x)$ і одержимо

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = 0.$$

Оскільки при диференціалах стоять функції, що залежать лише від відповідних змінних, то рівність можна інтегрувати. Узявши інтеграли, отримаємо

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = C \text{ або } \Phi(x, y) = C.$$

Рівняння, що зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними

Розглянемо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c),$$

де a, b, c – сталі величини.

Зробимо заміну $ax + by + c = z.$ Отримаємо

$$adx + bdy = dz \text{ і } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a).$$

Підставивши отриманий вираз у вихідне рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z) \text{ або } \frac{dz}{dx} = a + bf(z).$$

Розділивши змінні, запишемо

$$\frac{dz}{a + bf(z)} - dx = 0 \text{ і } \int \frac{dz}{a + bf(z)} - x = C.$$

Після підстановки в рівняння отримаємо загальний інтеграл

$$F\left(ax + by + c\right) - x = c.$$

Однорідні рівняння

Нехай рівняння має вигляд

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Якщо функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ однорідні однакового степеня, то рівняння називається *однорідним*. Нехай функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ однорідні зі степенем *k*, тобто

$$M(tx,ty)=t^kM(x,y), \qquad N(tx,ty)=t^kN(x,y).$$

Робимо заміну $y=ux$, $dy=udx+xdu$.

Після підстановки заміни в рівняння одержуємо

$$M(x,ux)dx+N(x,ux)(udx+xdu)=0,$$

або

$$x^kM(1,u)dx+x^kN(1,u)(udx+xdu)=0.$$

Скоротивши на x^k і розкривши дужки, запишемо

$$M(1,u)dx+uN(1,u)dx+xN(1,u)du=0.$$

Згрупувавши доданки, одержимо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\left[M(1,u)+uN(1,u)\right]dx+xN(1,u)du=0,$$

або

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{N(1,u)}{M(1,u)+uN(1,u)}du=C.$$

Узявши інтеграли та замінивши $u=y/x$, отримаємо загальний інтеграл

$$\Phi(x,y/x)=C.$$

Рівняння, що зводяться до однорідних

Нехай маємо рівняння

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right).$$

Розглянемо два випадки:

1. $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0.$

Тут система алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$$

має єдиний розв'язок (x_0, y_0).

Зробимо заміну $x = x_1 + x_0$, $y = y_1 + y_0$ та отримаємо

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1(x_1 + x_0) + b_1(y_1 + y_0) + c_1}{a_2(x_1 + x_0) + b_2(y_1 + y_0) + c_2}\right) =$$

$$= f\left(\frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + (a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1)}{a_2 x_1 + b_2 y_1 + (a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2)}\right).$$

Оскільки (x_0, y_0) – розв'язок системи алгебраїчних рівнянь, то диференціальне рівняння набуває вигляду

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1 x_1 + b_1 y_1}{a_2 x_1 + b_2 y_1}\right)$$

і вже є однорідним нульового степеня.

Робимо заміну $y_1 = u x_1$, $dy_1 = u dx_1 + x_1 du$.

Підставляємо заміну в рівняння

$$u + x_1 \frac{du}{dx_1} = f\left(\frac{a_1 x_1 + b_1 u x_1}{a_2 x_1 + b_2 u x_1}\right).$$

Отримаємо

$$x_1 du + \left[u - f\left(\frac{a_1 + b_1 u}{a_2 + b_2 u}\right)\right] dx_1 = 0.$$

Розділивши змінні, матимемо

$$\int \frac{du}{u - f\left(\frac{a_1 + b_1 u}{a_2 + b_2 u}\right)} + \ln x_1 = C$$

.

Нехай загальний інтеграл диференціального рівняння $\Phi(u, x_1) = C$.

Повернувшись до вихідних змінних, запишемо

$$\Phi\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}, x - x_0\right) = C.$$

2. Нехай $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, тобто коефіцієнти рядків лінійно залежні

та $a_1x+b_1y=\alpha(a_2x+b_2y)$.

Робимо заміну $a_2x+b_2y=z$. Звідси $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx}-a_2\right)$.

Підставивши праву частину останнього виразу в диференціальне рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx}-a_2\right)=f\left(\frac{\alpha z+c_1}{z+c_2}\right), \text{ або } \frac{dz}{dx}=a_2+b_2 f\left(\frac{\alpha z+c_1}{z+c_2}\right).$$

Розділивши змінні, отримаємо

$$\int \frac{dz}{a_2+b_2 f\left(\frac{\alpha+c_1}{z+c_2}\right)}-x=C.$$

Загальний інтеграл $\Phi(a_2x+b_2y,x)=C$.

Лінійні рівняння першого порядку

Рівняння, що є лінійним відносно невідомої функції та її похідної, називається *лінійним диференціальним рівнянням*. Воно має загальний вигляд

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x).$$

Якщо $q(x)\equiv 0$, тобто

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0,$$

то рівняння називається *однорідним*. Однорідне рівняння є рівнянням із відокремлюваними змінними і розв'язується таким чином:

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx,\ \int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx+\ln C,\ \ln y=-\int p(x)dx+\ln C.$$

Звідси отримуємо $y=Ce^{-\int p(x)dx}$.

Розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати методом варіації довільних сталих (методом невизначених множників Лагранжа). Він полягає в тому, що розв'язок неоднорідного рівняння шукають у такому самому вигляді, як і розв'язок однорідного, але C вважають невідомою функцією від x, тобто $C = C(x)$ і $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$.

Для знаходження $C(x)$ підставимо y у рівняння

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Звідси $dC(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$

Проінтегрувавши останній вираз, одержимо

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right].$$

Якщо використовувати початкові умови $y(x_0) = y_0$, то розв'язок можна записати у формі Коші:

$$y(x, x_0, y_0) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_t^x p(\xi)d\xi} q(t)dt.$$

Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Рівняння

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ \dots\ + a_n(x)y = b(x)$$

називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n -го порядку*.

Рівняння

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ \dots\ + a_n(x)y = 0$$

називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням* n*-го порядку.*

Якщо при $x \in [a,b]$, $a_0(x) \neq 0$ коефіцієнти $b(x)$, $a_i(x)$, $i = \overline{0,n}$ неперервні, то для рівняння

$$y^{(n)} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} y^{(n-1)} - \ \dots \ - \frac{a_n(x)}{a_0(x)} y + \frac{b(x)}{a_0(x)}$$

виконуються умови теореми існування та єдиності та існує єдиний розв'язок $y = y(x)$, що задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ \dots\ + a_n y = 0.$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді $y = e^{\lambda x}$. Продиференціювавши його, одержимо

$$y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},\ \dots\ y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Підставивши $y,\ y',\ \dots\ ,y^{(n)}$ у диференціальне рівняння, отримаємо

$$\lambda^{(n)} e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{(n-1)} e^{\lambda x} + \ \dots\ + a_n e^{\lambda x} = 0.$$

Скоротивши це рівняння на $e^{\lambda x}$, одержимо характеристичне рівняння

$$\lambda^{(n)} + a_1 \lambda^{(n-1)} + \ \dots\ + a_n = 0.$$

Алгебраїчне рівняння n-го степеня має n коренів. Залежно від їхнього вигляду матимемо різні розв'язки.

1. Нехай $\lambda_1, \lambda_2,\ \dots\ ,\lambda_n$ дійсні та різні. Тоді функції $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x},\ \dots\ ,e^{\lambda_n x}$ є розв'язками, а оскільки всі λ_i різні, то $e^{\lambda_i x}$ –

лінійно незалежні розв'язки, тобто $\left\{e^{\lambda_i x}\right\}_{i=\overline{1,n}}$ є фундаментальною системою розв'язків. Її загальним розв'язком буде лінійна комбінація $y=\sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x}$.

2. Нехай маємо комплексно-спряжені корені $\lambda = p+iq,\ \overline{\lambda} = p-iq.$ Їм відповідають розв'язки $e^{(p+iq)x}, e^{(p-iq)x}$. Розкладаючи їх за формулою Ейлера, одержимо

$$e^{(p+iq)x} = e^{px}e^{iqx} = e^{px}\cos qx + ie^{px}\sin qx = u(x)+iv(x),$$

$$e^{(p-iq)x} = e^{px}e^{-iqx} = e^{px}\cos qx - ie^{px}\sin qx = u(x)-iv(x).$$

Як випливає із властивості 3.1.6, функції $u(x)$ та $v(x)$ будуть окремими розв'язками. Отже, кореням $\lambda = p+iq,\ \overline{\lambda} = p-iq$ відповідають два лінійно незалежні розв'язки $u=e^{px}\cos qx,$ $v=e^{px}\sin qx.$ Загальним розв'язком, що відповідає цим двом кореням, буде

$$y = C_1e^{px}\cos qx + C_2e^{px}\sin qx.$$

3. Нехай λ – корінь кратністю $k,$ тобто

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ \dots\ = \lambda_k,\ k \le n.$$

а) Розглянемо випадок $\lambda = 0.$ Тоді характеристичне рівняння

$$\lambda^{(n)} + a_1\lambda^{(n-1)} + \ \dots\ + a_n = 0$$

вироджується у рівняння

$$\lambda^{(n)} + a_1\lambda^{(n-1)} + \ \dots\ + a_{n-k}\lambda^{\kappa} = 0.$$

Диференціальне рівняння, що відповідає цьому характеристичному рівнянню, запишемо як

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ \dots\ + a_{n-k}y^{(k)} = 0\,.$$

Неважко бачити, що частковими лінійно незалежними розв'язками цього рівняння будуть функції $1, x, x^2, \ \dots\ , x^{k-1}.$

Загальним розв'язком, що відповідає кореню $\lambda = 0$ кратністю k, буде лінійна комбінація цих функцій

$$y = C_1 + C_2 x + \ \dots \ + C_k x^{k-1}.$$

б) Нехай $\lambda = \nu \neq 0$ – дійсний корінь. Зробивши заміну $y = e^{\nu x} z$, на підставі властивості 3.1.2 лінійних рівнянь після підстановки знову одержимо лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$z^{(k)} + b_1 z^{(k-1)} + \ \dots \ + b_k z = 0.$$

Причому, оскільки $y_i(x) = {}^{\lambda_i x}$, а $z_i(x) = e^{\mu_i x}$, то показники λ_i, μ_i пов'язані співвідношенням $\lambda_i = \nu_i + \mu_i$. Звідси кореню $\lambda = \nu$ кратністю k відповідає корінь $\mu = 0$ кратністю k. Як випливає з попереднього пункту, кореню $\mu = 0$ кратністю k відповідає загальний розв'язок $z = C_1 + C_2 x + \ \dots \ , + C_k x^{k-1}$. З огляду на те, що $y = e^{\nu x} z$, кореню $\lambda = \nu$ кратністю k відповідає розв'язок

$$y = C_1 e^{\nu x} + C_2 x e^{\nu x} + \ \dots \ + C_k x^{k-1} e^{\nu x}.$$

в) Нехай характеристичне рівняння має корені $\lambda = p + iq$, $\bar{\lambda} = p - iq$ кратністю k. Проводячи аналогічні викладки, одержимо, що їм відповідають лінійно незалежні розв'язки

$$e^{px}\cos qx,\ x e^{px}\cos qx,\ \dots\ ,\ x^{k-1} e^{px}\cos qx;$$

$$e^{px}\sin qx,\ x e^{px}\sin qx,\ \dots\ ,\ x^{k-1} e^{px}\sin qx,$$

а загальним розв'язком, що відповідає цим кореням, буде

$$y = C_1 e^{px}\cos qx + C_2 x e^{px}\cos qx + \ \dots \ + C_k x^{k-1} e^{px}\cos qx +$$

$$+ C_{k+1} e^{px}\sin qx + C_{k+2} x e^{px}\sin qx + \ \dots \ + C_{2k} x^{k-1} e^{px}\sin qx.$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Загальний вигляд лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ \dots \ + a_n(x)y = b(x)\ .$$

Теорема. Загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння складається із загального розв’язку лінійного однорідного рівняння і частинного розв’язку неоднорідного рівняння.

Як випливає з теореми для знаходження загального розв’язку лінійного неоднорідного рівняння, треба шукати загальний розв’язок однорідного рівняння, тобто будь-які n лінійно незалежні розв’язки та якийсь частинний розв’язок неоднорідного рівняння. Існує три методи побудови частинного розв’язку лінійного неоднорідного рівняння:

- Метод варіації довільної сталої побудови частинного розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння
- Метод Коші
- Метод невизначених коефіцієнтів

Всі вони детальо розглянуті у підручнику [1].

Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots \ + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

де a_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ – сталі величини, називається *лінійною однорідною системою зі сталими коефіцієнтами*. У матричному вигляді вона записується

$$\dot{x} = Ax.$$

Розв'язання систем однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами методом Ейлера

Розглянемо один із методів побудови розв'язку систем зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язок системи шукаємо у вигляді вектора

$$x(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1 e^{\lambda x}\\ \alpha_2 e^{\lambda x}\\ \dots\\ \alpha_n e^{\lambda x}\end{pmatrix}.$$

Підставивши його в систему диференціальних рівнянь, отримаємо

$$\begin{cases}\alpha_1\lambda e^{\lambda x}=a_{11}\alpha_1\lambda e^{\lambda x}+a_{12}\alpha_2\lambda e^{\lambda x}+\ \dots\ +a_{1n}\alpha_n\lambda e^{\lambda x}\\ \alpha_2\lambda e^{\lambda x}=a_{21}\alpha_1\lambda e^{\lambda x}+a_{22}\alpha_2\lambda e^{\lambda x}+\ \dots\ +a_{2n}\alpha_n\lambda e^{\lambda x}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_n\lambda e^{\lambda x}=a_{n1}\alpha_1\lambda e^{\lambda x}+a_{n2}\alpha_2\lambda e^{\lambda x}+\ \dots\ +a_{nn}\alpha_n\lambda e^{\lambda x}\end{cases}.$$

Скоротимо всі члени в усіх рівняннях на $e^{\lambda x}\neq 0$ і перенесемо їх праворуч. Запишемо

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ \dots\ +a_{1n}\alpha_n=0\\ a_{21}\alpha_1+(a_{22}-\lambda)\alpha_2+\ \dots\ +a_{2n}\alpha_n=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\ \dots\ +(a_{nn}-\lambda)\alpha_n=0\end{cases}.$$

Отримана однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь має розв'язок тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12}\alpha_2 & a_{1n}\alpha_n \\ a_{21}\alpha_1 & a_{22}-\lambda & a_{2n}\alpha_n \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 & a_{n2}\alpha_2 & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння також може бути записане у векторно-матричній формі

$$\det(A-\lambda E)=0$$

і називається *характеристичним* (чи *віковим*) рівнянням. Розкриємо його:

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0.$$

Алгебраїчне рівняння n-го степеня має n коренів. Розглянемо різні випадки.

1. Усі корені характеристичного рівняння $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (власні числа матриці A) дійсні й різні. Підставляючи їх по черзі в систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda_i)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda_i)\alpha_n = 0 \end{cases},$$

одержуємо відповідні ненульові розв'язки системи

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \dots \\ \alpha_n^1 \end{pmatrix},\ \alpha^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \dots \\ \alpha_n^2 \end{pmatrix},\ \dots,\ \alpha^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n \\ \alpha_2^n \\ \dots \\ \alpha_n^n \end{pmatrix},$$

що є власними векторами, які відповідають власним числам λ_i, $i=\overline{1,n}$. У такий спосіб одержимо n розв'язків

$$x_1(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1^1 e^{\lambda_1 x}\\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 x}\\ \dots\\ \alpha_n^1 e^{\lambda_1 x}\end{pmatrix},\quad x_2(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1^2 e^{\lambda_2 x}\\ \alpha_2^2 e^{\lambda_2 x}\\ \dots\\ \alpha_n^2 e^{\lambda_2 x}\end{pmatrix},\ \dots,\ x_n(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1^n e^{\lambda_n t}\\ \alpha_2^n e^{\lambda_n t}\\ \dots\\ \alpha_n^n e^{\lambda_n t}\end{pmatrix},$$

причому, оскільки $\lambda_1,\lambda_2,\ \dots\ ,\lambda_n$ різні, а $\alpha^1,\alpha^2,\ \dots\ ,\alpha^n$ – відповідні до них власні вектори, то розв'язки $x_1(t),\ \dots\ ,x_n(t)$ лінійно незалежні й загальний розв'язок системи

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t),$$

або, у векторно-матричній формі запису,

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_1^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_1^n e^{\lambda_n t}\\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_2^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_2^n e^{\lambda_n t}\\ \dots & & & \\ \alpha_n^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_n^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_n^n e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ \dots\\ C_n\end{pmatrix},$$

де $C_1,\ \dots\ ,C_n$ – довільні сталі.

2. Нехай $\lambda=p\pm iq$ – пара комплексно-спряжених коренів. Візьмемо один із них, наприклад $\lambda=p+iq$. Комплексному власному числу відповідає комплексний власний вектор

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \dots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1+is_1\\ r_2+is_2\\ \dots\dots\dots\\ r_n+is_n\end{pmatrix}$$

і, відповідно, розв'язок

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(r_1+is_1)e^{(p+iq)t}\\ (r_2+is_2)e^{(p+iq)t}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (r_n+is_n)e^{(p+iq)t}\end{pmatrix}.$$

Використовуючи залежність $e^{(p+iq)t} = e^{pt}(\cos qt + i\sin qt)$, перетворимо розв'язок до

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + is_1)e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) \\ (r_2 + is_2)e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (r_n + is_n)e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt - s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt - s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt - s_n\sin qt) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\sin qt + s_1\cos qt) \\ e^{pt}(r_2\sin qt + s_2\cos qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\sin qt + s_n\cos qt) \end{pmatrix} =$$

$$= u(t) + iv(t).$$

Як випливає із властивості 4.2.4 розв'язків однорідних систем, якщо комплексна функція $u(t) + iv(t)$ дійсного аргументу є розв'язком однорідної системи, то окремо її дійсна й уявна частини також будуть розв'язками, тобто комплексним власним числам $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ відповідають лінійно незалежні розв'язки

$$u(t) = \begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt - s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt - s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt - s_n\sin qt) \end{pmatrix},$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt + s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt + s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt + s_n\sin qt) \end{pmatrix}.$$

3. Якщо характеристичне рівняння має корінь λ кратністю γ, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\gamma = \lambda$, то розв'язок системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1^1 + \alpha_1^2 t + \ldots + \alpha_1^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \\ (\alpha_2^1 + \alpha_2^2 t + \ldots + \alpha_2^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha_n^1 + \alpha_n^2 t + \ldots + \alpha_n^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Підставивши його у вихідне диференціальне рівняння і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, одержимо $\gamma \cdot n$ рівнянь, що містять $\gamma \cdot n$ невідомих. Через те, що корінь характеристичного рівняння λ має кратність γ, ранг отриманої системи $\gamma n - \gamma = \gamma(n-1)$. Уводячи γ довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_\gamma$ і розв'язуючи систему, отримаємо

$$\alpha_i^j = \alpha_i^j(C_1, C_2, \ldots, C_\gamma), \ i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, \gamma}.$$

Аналітичне конструювангня регуляторів

Нехай досліджувана система є лінійною:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t, \Delta x(t)).$$

Позначивши $\Delta x(t) = x(t)$, $\Delta u(t) = u(t)$, перепишемо її у вигляді:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t, x(t)). \tag{2.1}$$

Задачу аналітичного конструювання регулятора для лінійної системи (2.1) сформулюємо таким чином: знайти матрицю $C(t)$ розмірності $m \times n$ таку, що при керуванні $u(t, x(t)) = C(t)x(t)$ нульовий розв’язок $x(t) \equiv 0$ системи (2.1), тобто системи рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A(t) + B(t)C(t))x(t) \tag{2.2}$$

буде асимптотично стійким за Ляпуновим.

Розглянемо спочатку лінійні стаціонарні системи

$$\frac{dx}{dt} = (A + BC)x\,. \tag{2.3}$$

Скористаємось відомими результатами дослідження стійкості розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь [1].

Теорема (критерій асимптотичної стійкості). Для асимптотичної стійкості за Ляпуновим лінійної стаціонарної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

необхідно й достатньо, щоб усі корені λ_j характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{2.4}$$

мали від'ємні дійсні частини:

$$\operatorname{Re}\lambda_j < 0, \quad j = \overline{1,n}\,. \tag{2.5}$$

Тут і далі E – одинична матриця.

Застосуємо цю теорему до задачі аналітичного конструювання регулятора системи (2.3). Запишемо для цієї системи характеристичне рівняння

$$\det(A + BC - \lambda E) = 0\,.$$

Корені даного рівняння будуть залежати від невідомих елементів матриці C, тобто $\lambda_j = \lambda_j(C)$.

Згідно з наведеною вище теоремою, невідомі елементи матриці C вибираємо з умови $\operatorname{Re}\lambda_j < 0, \quad j = \overline{1,n}$, що й забезпечить асимптотичну стійкість системи (2.3).

Теорема (Критерій Рауса-Гурвиця). Нехай характеристичне рівняння (2.4) має вигляд:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0\,. \tag{2.6}$$

Тоді для того, щоб усі корені характеристичного рівняння (2.6) мали від'ємні дійсні чистини: $\operatorname{Re}\lambda_j < 0, \quad j=\overline{1,n}$, необхідно й досить виконання умови додатності всіх головних мінорів матриці:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n+1} & a_2 \end{bmatrix},$$

де $a_j = 0$ при $j > n$, $a_0 > 0$.

Тобто має виконуватись система нерівностей:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{тощо.}$$

Якщо застосувати критерій Рауса-Гурвиця до задачі аналітичного конструювання регулятора системи (2.3), то отримаємо головні мінори, які будуть залежати від невідомих елементів матриці C. У результаті маємо систему нерівностей

$$\Delta_j(C) > 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Матриця C, що знаходиться з цієї системи нерівностей, згідно з теоремою 3.2 забезпечує від'ємність дійсних частин коренів характеристичного рівняння, тобто виконання умови (2.5). Тоді згідно з критерієм асимптотичної стійкості лінійна стаціонарна система (2.3) буде асимптотично стійкою за Ляпуновим.

Модальне керування

На основі результатів про керованість та спостережуваність розглянемо як приклад конструктивний спосіб знаходження керування $u(x)$ у лінійних стаціонарних системах і дослідимо умови існування матриці C, за яких система $\frac{dx}{dt} = (A + BC)x$ ($A, B, C - const$) буде асимптотично стійкою.

Розглянемо систему зі скалярним керуванням

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad A, b - const. \tag{2.7}$$

Тут A - $n \times n$ матриця, b – n-вектор-стовпчик, u – скаляр.

Теорема. Якщо система (2.7) цілком керована, тобто виконується умова

$$\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) \neq 0$$

то існує функція керування

$$u = c^T x, \tag{2.8}$$

де $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$, при якій система

$$\frac{dx}{dt} = (A + bc^T)x$$

має наперед задані довільні корені характеристичного рівняння

$$\det(A + bc^T - \lambda E) = 0. \tag{2.9}$$

Доведення цієї теореми можна знайти, зокрема, у [2,15]. Доведення побудовано так, що одночасно вказано алгоритм знаходження величин $c_1, \ldots, c_n$ за відомими значеннями коренів

$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ характеристичного рівняння (2.9). У процесі доведення отримано явний вигляд вектора c:

$$c=(S^{-1})^T\begin{bmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ p_1 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ p_{n-1} & p_{n-2} & \ldots & 1\end{bmatrix}^{-1}(p-a) \qquad (2.10)$$

Тут $S=(b,Ab,\ldots,A^{n-1}b)$, $\begin{pmatrix}p_n\\ p_{n-1}\\ \vdots\\ p_1\end{pmatrix}=S^{-1}A^nb$, $a-n$-вектор стовбчик, що знаходиться через відомі значення коренів $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ характеристичного рівняння (2.9), фактично це значення коефіцієнтів відповідного характеристичного поліному.

Для того, щоб розв'язати задачу аналітичного конструювання одномірного (відзначимо, що такий спосіб можна застосувати до конструювання багатомірного) регулятора, потрібно вибрати вектор a таким, щоб він забезпечував від'ємність дійсних частин коренів характеристичного рівняння (2.9) системи керування (2.7). За цієї умови вектор c, отриманий через вектор a згідно з формулою (2.10), і забезпечить асимптотичну стійкість лінійної системи. Тоді керування, за останньою теоремою, буде визначатися формулою (2.8).

Алгоритм розв'язку задачі модального керування.

0-й крок. Обчислити матрицю керованості

$$\boldsymbol{S_n=(b,Ab,\ldots,A^{n-1}b)},$$

та переконатися у цілком керованості досліджуваної системи.

1-й крок. Обчислити матрицю обернену до матриці керовності:

$$(S_n)^{-1}$$

2-й крок. Обчислити вектор $A^n b$

3-й крок. Обчислити вектор $\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = -S^{-1} A^n b$

4-й крок. Визначити характеристичний поліном за заданими коренями

$$(\lambda - \overline{\lambda}_1)(\lambda - \overline{\lambda}_2)\dots(\lambda - \overline{\lambda}_n) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

та скомпонувати вектор коефіцієнтів характеристичного полінома

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

5-й крок. Обчислити за формулою (3.25) вектор $\boldsymbol{c}$:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (S_n^{-1})^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right)$$

6-й крок. Записати шукане керування

$$u(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t)$$

III. УМОВИ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Наведені нижче умови завдань не є вичерпними чи абсолютно точними. Автору розробки надається можливість розширювати поставлене завдання та виходити за його рамки.

Метою виконання будь-якого проєкту є одержання нових знань, навичок та умінь. Поряд з цим він має носити ще й дослідницький та творчий характер. Так, наприклад у ньому має бути не тільки підтверджене уміння використовувати визначену інструментальну систему, але експериментально доведено, що якісь частини проєкту могли б мати іншу (наприклад більш ефективну) реалізацію.

Перевірка виконаних робіт здійснюється виключно за розкладом. Разом з проєктом має бути набір тестових файлів та інших матеріалів, що свідчать про правильність створених програм. Бажано, щоб автор проєкту інформував викладача про виконані етапи робіт.

IV. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

Аналітичне розв’язування диференціальних рівнянь за допомогою комп’ютерних пакетів програм

Теоретичні відомості надаються в повному обсязі у авторському підручнику [1] в розділах 1-4.

Мета: отримати навички аналітичного розв’язування певних класів диференціальних рівнянь в середовищі пакетів комп’ютерних програм

Завдання: згідно з варіантом, надати аналітичні розв’зки в зошитах, створити коди програм для пошуку загальних розв’язків відповідних диференціальних рівнянь та систем, знайти розв’язки відповідних задач Коші, побудувати поля напрямків (де необхідно), побудувати графіки.

Обладнання: персональний комп’ютер.

Програмне забезпечення: open source computer algebra system **Sage**

(*Sage* cells)

link: https://sagecell.sagemath.org/

Формулювання завдань для виконання:

Завдання №1

Розв’язати рівняння (показати вигляд загального розв’язку), побудувати поле напрямків, побудувати та показати розв’язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

Завдання №2

Побудувати поле напрямків, побудувати та показати розв'язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

Завдання №3

Розв'язати рівняння (показати вигляд загального розв'язку), побудувати поле напрямків, побудувати та показати розв'язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

Завдання №4

Розв'язати рівняння (показати вигляд загального розв'язку), побудувати та показати розв'язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

Завдання №5

Розв'язати системи рівняннь (показати вигляд загального розв'язку), побудувати та показати розв'язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

Таблиці варіантів:

Частина 1 (Завдання 1, 2)

В/З	***Завдання 1***	***Завдання 2***
В1	$(x^2-1)y'+2xy^2=0$	$xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$
В2	$y'=3\sqrt[3]{y^2};$	$(2x+y+1)\,\mathrm{d}x-$ $-(4x+2y-3)\,\mathrm{d}y=0$
В3	$xy'+y=y^2$	$(x+4y)y'=2x+3y-5$
В4	$y'-xy^2=2xy$	$(y+2)\,\mathrm{d}x=$ $=(2x+y-4)\,\mathrm{d}y$
В5	$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+t=1$	$2x^3y'=y(2x^2-y^2)$
В6	$y'=\cos(y-x)$	$(x^2+y^2)y'=2xy$

Частина 2 (Завдання 3)

В/З	***Завдання 3***
В1	$(2x+1)y' = 4x + 2y$
В2	$(xy + e^{x})\,dx - x\,dy = 0$
В3	$y = x(y' - x\cos x)$
В4	$(1-2xy)y' = y(y-1)$
В5	$y' = \frac{y}{3x - y^2}$
В6	$y' + y\operatorname{tg} x = \sec x$

Частина 3 (Завдання 4, 5)

В/З	***Завдання 4***	***Завдання 5***
В1	$y'' - 2y' + 2y = $ $= e^x + x\cos x$	$\dot{x} = Ax,$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
В2	$y'' - 2y' + 5y = $ $= 2xe^x + e^x \sin 2x$	$\dot{x} = Ax,$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$
В3	$y'' - 9y = $ $= e^{-3x}(x^2 + \sin 3x)$	$\dot{x} = Ax,$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
В4	$y'' - y = 4\,\mathrm{sh}\, x$	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z. \end{cases}$

B5	$y'' + 4y' + 3y = \operatorname{ch} x$	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$
B6	$y'' - 2y' + 2y =$ $= (x + \mathrm{e}^x)\sin x$	$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 3z. \end{cases}$

Оцінювання:

кожне повністю правильно виконане й належно оформлене завдання оцінюється в 1 (один) бал.

В разі застосування додатково до **Sage** іншого пакету, наприклад, **Maple**, **MatLab**, **Mathematica**, студент може отримати до дваох додаткових заохочувальних балів.

Оформлення результатів та формування звіту:

Фото розв’язків з зошита, коди програм та відповідні скріни зібрати в один файл Звіту (у форматі ***.doc*** або ***.docx***).

Назва файлу – ***Прізвище*** студента (*латиницею!!!*).

ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ
з Лабораторної роботи №1

Київський національний університет

імені Тараса Шевченка

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №1
з курсу
«Управління динамічними системами»
на тему:
«Аналітичне розв'язування диференціальних рівнянь за допомогою комп'ютерних пакетів програм»

Виконав:
студент групи К-2__
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
ПІБ

Київ – 20___

Зміст

Згідно з номером варіанту (№=   ) розв'язати наступні приклади

Умова Завдання №1 згідно з варіантом №1 Розв'язати рівняння (показати вигляд загального розв'язку), побудувати поле напрямків, побудувати розв'язки задач Коші

$$\textbf{54.}\ y' \operatorname{ctg} x + y = 2;$$

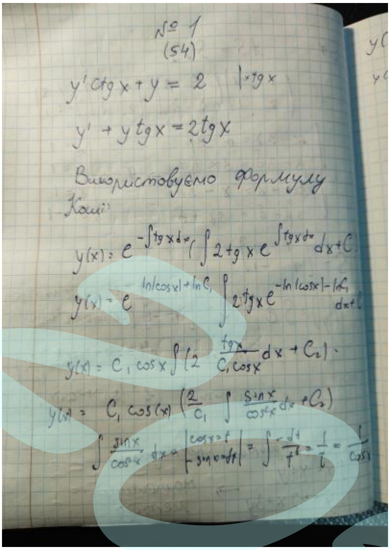
$$M_1\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$$

$$M_2\left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$$

$$M_3\left(-\frac{\pi}{3}, 1\right)$$

$$M_4\left(-\frac{\pi}{3}, -1\right)$$

Представлення розв’язку аналітично (в зошиті)



№ 1

(54)

$y' ctg x + y = 2 \quad | \cdot tg x$

$y' + y\, tg x = 2 tg x$

Використовуємо формулу Коші:

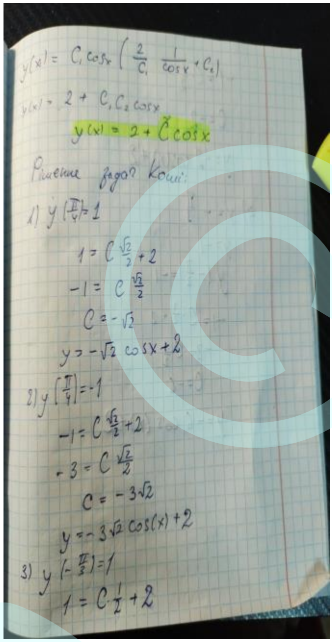
$y(x) = e^{-\int tg x\, dx}\left(\int 2 tg x\, e^{\int tg x\, dx} dx + C\right)$

$y(x) = e^{\ln|\cos x| + \ln C_1} \int 2 tg x\, e^{-\ln|\cos x| - \ln C_1} dx + C$

$y(x) = C_1 \cos x \int \left(2 \frac{tg x}{C_1 \cos x} dx + C_2\right)$

$y(x) = C_1 \cos(x) \left(\frac{2}{C_1} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + C_2\right)$

$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{matrix} \right| = \int -\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos x}$



$y(x) = C_1 \cos x \left(\frac{2}{C_1} \frac{1}{\cos x} + C_2\right)$

$y(x) = 2 + C_1 C_2 \cos x$

$y(x) = 2 + \tilde{C} \cos x$

Рішення задач Коші:

1) $y(\frac{\pi}{4}) = 1$

$1 = C\frac{\sqrt{2}}{2} + 2$

$-1 = C\frac{\sqrt{2}}{2}$

$C = -\sqrt{2}$

$y = -\sqrt{2} \cos x + 2$

2) $y(\frac{\pi}{4}) = -1$

$-1 = C\frac{\sqrt{2}}{2} + 2$

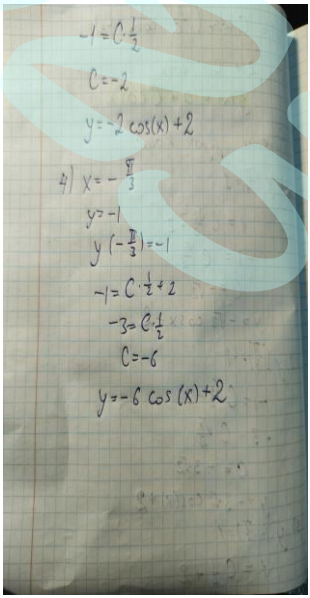
$-3 = C\frac{\sqrt{2}}{2}$

$C = -3\sqrt{2}$

$y = -3\sqrt{2}\cos(x) + 2$

3) $y(-\frac{\pi}{3}) = 1$

$1 = C\frac{1}{2} + 2$



$-1 = C\frac{1}{2}$

$C = -2$

$y = -2\cos(x) + 2$

4) $x = -\frac{\pi}{3}$

$y = -1$

$y(-\frac{\pi}{3}) = -1$

$-1 = C\cdot\frac{1}{2} + 2$

$-3 = C\cdot\frac{1}{2}$

$C = -6$

$y = -6\cos(x) + 2$

Код програми (Sage)

```
#general solution
y=function('y')(x)
de = diff(y,x)*cot(x)+y==2
solution=desolve(de,y)
#simplify the solution
solution=solution.simplify_full()
solution=solution.canonicalize_radical()
#print
solution.show()
#Couchy problem solution
points = [[(pi/4),1], [(pi/4),-1], [-(pi/3),1], [-(pi/3),-1]]
couchy_solutions = []
for i in range(4):
    couchy_solutions.append(desolve(de,y,ics=points[i]))
    couchy_solutions[i] = couchy_solutions[i].simplify_full()
    couchy_solutions[i] =
couchy_solutions[i].canonicalize_radical()
    couchy_solutions[i].show()

#Plot for Couchy problems
x,y=var('x,y')
f(x,y)=tan(x)*(2-y)

r = 8
plot = plot_slope_field(f,(x,-r,r),(y,-
r+4,r),headaxislength=3,headlength=3, axes_labels = ['$x$', '$y(x)$'])

points_for_graph = [[gp(pi/4),1], [gp(pi/4),-1],
[-gp(pi/3),1], [-gp(pi/3),-1]]
points_printsable = ["(π/4,1)", "(π/4,-1)", "(-π/3,1)",
"(-π/3,-1)"]

for i in range(4):
  plot += desolve_rk4(f,y,ics=points_for_graph[i],ivar=x,
output='plot',end_points=[-r,r], thickness=2,rgbcolor=hue(0.25*i),
legend_label=points_printsable[i])
show(plot,xmin=-r,xmax=r,ymin=-r+4,ymax=r)
```

Результат роботи програми (Sage) Screen

-

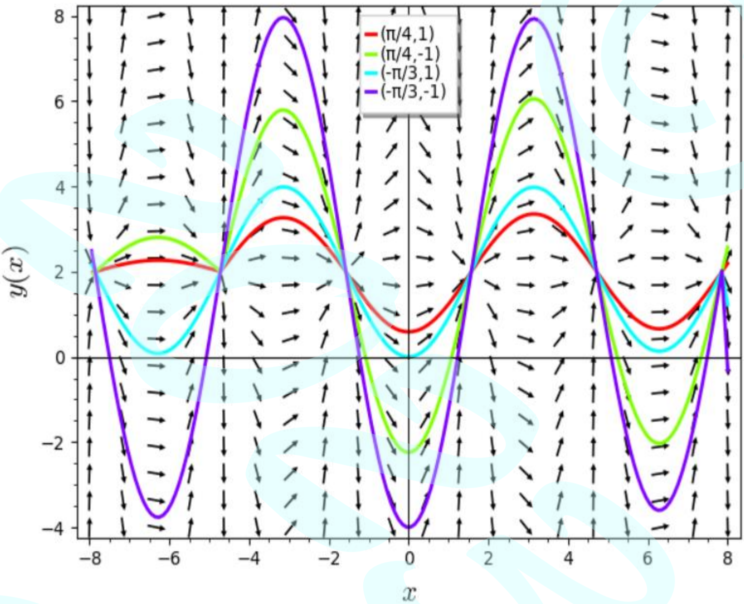
$C\cos(x)+2$

$-\sqrt{2}\cos(x)+2$

$-3\sqrt{2}\cos(x)+2$

$-2\cos(x)+2$

$-6\cos(x)+2$



Код програми (Maple)

```
ode := (diff(y(x), x))*cot(x)+y(x) = 2
general_solution := dsolve(ode)
ics1 := y((1/4)*pi) = 1
couchy_solution1 := dsolve([ode, ics1])
ics2 := y((1/4)*pi) = -1
couchy_solution2 := dsolve([ode, ics2])
ics3 := y(-(1/3)*pi) = 1
couchy_solution3 := dsolve([ode, ics3])
ics4 := y(-(1/3)*pi) = -1
couchy_solution4 := dsolve([ode, ics4])
with(DEtools)
DEplot((diff(y(x), x))*cot(x)+y(x) = 2, y(x), x = -10 .. 10,
y = -10 .. 10, [[y(3.14*(1/4)) = 1], [y(3.14*(1/4)) = -1], [y(-3.14*(1/3))
= 1], [y(-3.14*(1/3)) = -1]], color = black,
linecolor = ['blue', 'red', 'yellow', 'green'])
```

Результат роботи програми (Maple) Screen

$$ode := \left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right)\cot(x) + y(x) = 2$$

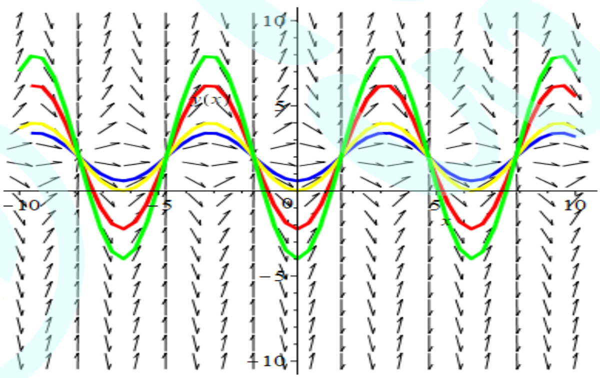
$$general\_solution := y(x) = 2 + \cos(x)\ \_C1$$

$$couchy\_solution1 := y(x) = 2 - \frac{\cos(x)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$couchy\_solution2 := y(x) = 2 - \frac{3\cos(x)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$couchy\_solution3 := y(x) = 2 - \frac{\cos(x)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$couchy\_solution4 := y(x) = 2 - \frac{3\cos(x)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$



Приклад використання пакету Mathematica до Лабораторної роботи №1

Додатково надано нижче можливий вигляд розв'язання цього ж прикладу в іншому середовищі, з іншими умовами задач Коші:

$$M_1\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$$
$$M_2\left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$$
$$M_3\left(-\frac{\pi}{3}, 1\right)$$
$$M_4\left(-\frac{\pi}{3}, -1\right)$$

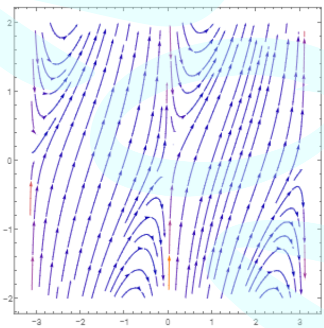
Код програми та Результат роботи (Mathematica) Screen

WOLFRAM MATHEMATICA

(unnamed)

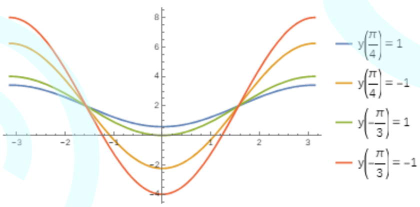
```
In[37]:= Clear[y, x]
         ode = y'[x] * Cot[x] + y[x] == 2;
         sol = DSolve[ode, y[x], x]

Out[39]= {{y[x] → 2 + c1 Cos[x]}}

In[40]:= initialConditions = {y[Pi/4] == 1, y[Pi/4] == -1, y[-Pi/3] == 1, y[-Pi/3] == -1};
         solutions = Table[DSolve[{ode, initialConditions[[i]]}, y[x], x], {i, 1, 4}]

Out[41]= {{{y[x] → 2 - √2 Cos[x]}}, {{y[x] → 2 - 3 √2 Cos[x]}}, {{y[x] → -2 (-1 + Cos[x])}}, {{y[x] → -2 (-1 + 3 Cos[x])}}}

In[43]:= StreamPlot[{1, 2 - y * Cot[x]}, {x, -Pi, Pi}, {y, -2, 2}]
```

Out[43]=



```
In[44]:= Plot[Evaluate[y[x] /. solutions], {x, -Pi, Pi}, PlotLegends → Table[initialConditions[[i]], {i, 1, 4}]]
```

Out[44]=



ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2
Аналітичне конструювання регуляторів.
Побудова фазових портретів.

Теоретичні відомості

надаються в повному обсязі у авторських навчальному підручнику [1] в розділі 3, та навчальному підручнику [2] в розділі 6.

Мета:

отримати навички аналітичного розв'язування задач стабілізації та модального керування лінійними стаціонарними системами, а також побудови особливих точок систем на площині, як аналітично, так й за допомогою програмних пакетів

Обладнання:

персональний комп'ютер.

Програмне забезпечення:

open source computer algebra system **Sage**
(*Sage* cells)
link: https://sagecell.sagemath.org/

Формулювання завдань для виконання:

згідно з варіантом

- Дослідити на стійкість задану систему. Визначити вигляд точки спокою. Намалювати фазовий портрет. (Все аналітично в зошиті).
- Розв'язати задачу модального керування (*непарні варіанти*);

  або задачу аналітичного конструювання регуляторів (*парні варіанти*), обравши одне керування з знайдених можливих. Визначити вигляд отриманої точки спокою. Намалювати фазовий портрет. (Все аналітично в зошиті).

- Зобразити фазові портрети особливих точок розімкненої системи та побудованої замкненої системи за допомогою програмних пакетів (бажано **Sage**). Траєкторії, сепаратриси, ізокліни (де треба) – різний колір та товщина.

Оформлення результатів та формування звіту:

Фото розв'язків з зошита, коди програм та відповідні скріни зібрати в один файл Звіту (у форматі ***.doc*** або ***.docx***).

Назва файлу – ***Прізвище*** студента (*латиницею!!!*).

Таблиця варіантів:

№1 $\begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$ $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -3$	№2 $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y \end{cases}$
№3 $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$ $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -2$	№4 $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$
№5 $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$ $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -4$	№6 $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$
№7 $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4y - 6x. \end{cases}$ $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -5$	№8 $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x, \\ \dot{y} = 2y - 4x. \end{cases}$
№9 $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$ $\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = -2$	№10 $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$

Значення вектора $\boldsymbol{b}$ в лінійній системі керування ($\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{1}}$) для непарних варіантів:

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \text{№варіанта} \\ \left(\text{ціла частина } \frac{\text{№}}{\boldsymbol{2}}\right) - \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

Значення матриці $\boldsymbol{B}$ в лінійній системі керування ($\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}$) для парних варіантів:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{0} & \text{№варіанта} \end{pmatrix}$$

Оцінювання:

кожне повністю правильно виконане й належно оформлене завдання оцінюється в 1 (один) бал.

В разі застосування додатково до **Sage** іншого пакету, наприклад, **Maple**, **MatLab**, **Mathematica**, студент може отримати до двоох додаткових заохочувальних балів.

ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ
з Лабораторної роботи №2

Київський національний університет

імені Тараса Шевченка

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №2
з курсу
«Управління динамічними системами»
на тему:
«Аналітичне конструюваня регуляторів.
Побудова фазових портретів»

Виконав:
студент групи К-2__
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
ПІБ

Київ – 20___

Зміст

Умова задачі згідно з варіантом

Дослідити на стійкість задану систему. Визначити вигляд точки спокою. Намалювати фазовий портрет.

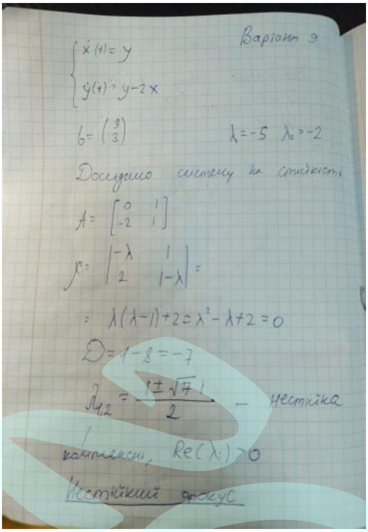
Розв'язати задачу модального керування. Визначити вигляд отриманої точки спокою. Намалювати фазовий портрет.

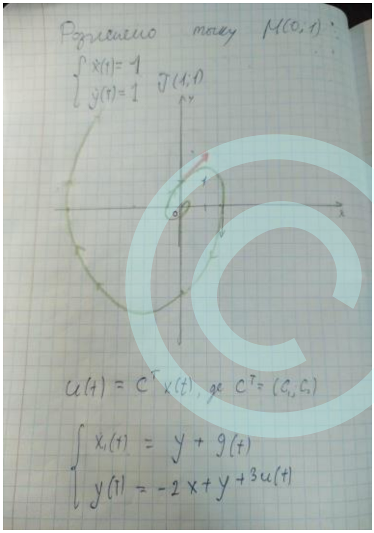
$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$$

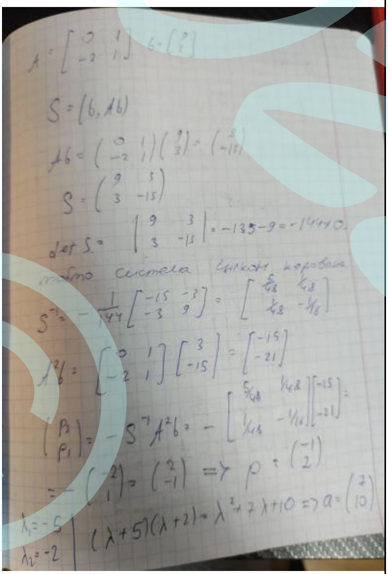
$$\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -2$$

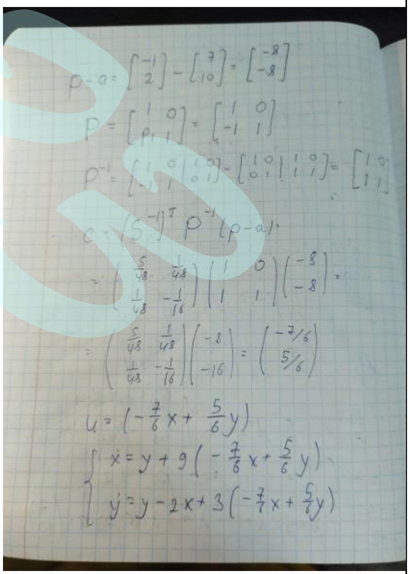
$$b = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

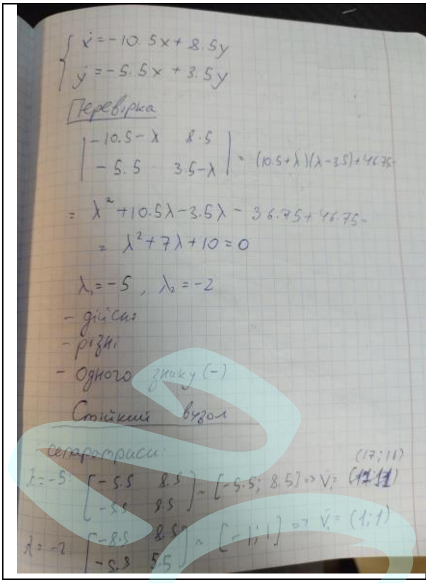
Представлення розв’язку аналтично (в зошиті)











$$\begin{cases} \dot{x} = -10.5x + 8.5y \\ \dot{y} = -5.5x + 3.5y \end{cases}$$

Перевірка

$$\begin{vmatrix} -10.5-\lambda & 8.5 \\ -5.5 & 3.5-\lambda \end{vmatrix} = (10.5+\lambda)(\lambda-3.5)+46.75 =$$

$$= \lambda^2 + 10.5\lambda - 3.5\lambda - 36.75 + 46.75 =$$

$$= \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$$

$\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -2$

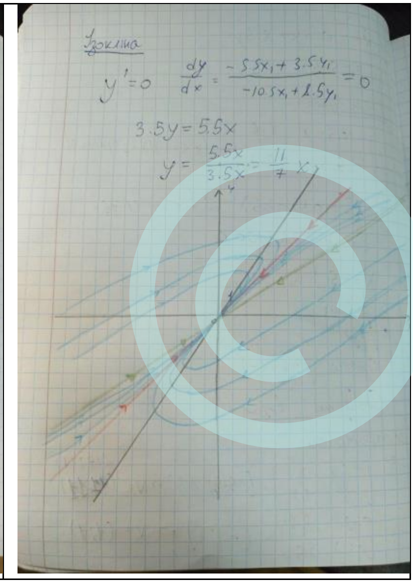
- дійсні
- різні
- одного знаку (-)

Стійкий вузол

сепаратриси:

$\lambda=-5$: $\begin{bmatrix} -5.5 & 8.5 \\ -5.5 & 8.5 \end{bmatrix} \sim [-5.5;\ 8.5] \Rightarrow V_1 = (17;11)$

$\lambda=-2$: $\begin{bmatrix} -8.5 & 8.5 \\ -5.5 & 5.5 \end{bmatrix} \sim [-1;\ 1] \Rightarrow V_2 = (1;1)$



Ізокліна

$y' = 0 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-5.5x_1 + 3.5y_1}{-10.5x_1 + 8.5y_1} = 0$

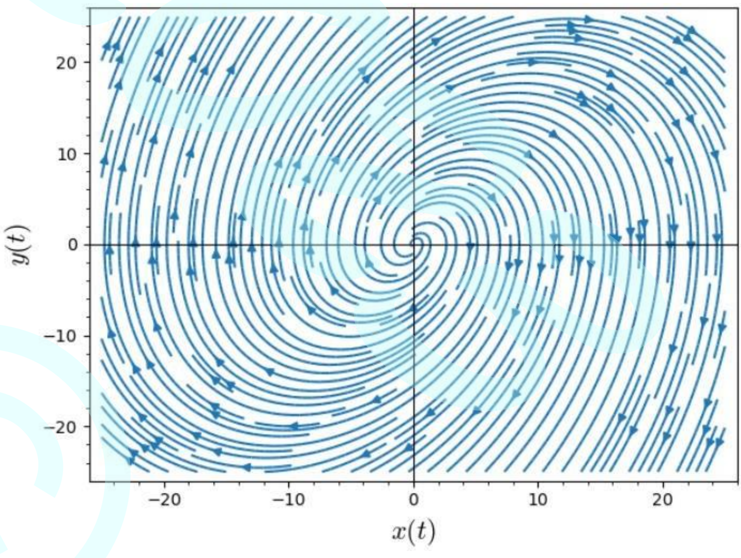
$3.5y = 5.5x$

$y = \frac{5.5x}{3.5x} = \frac{11}{7}x$

Код програми (Sage)

```
#Розімкнена система
x,y=var('x,y')
f(x,y)=y
g(x,y)=y-2*x
streamline_plot((f,g), (x, -25, 25), (y, -25, 25),
density=2.2,
axes_labels = ["$x(t)$", "$y(t)$"])
```

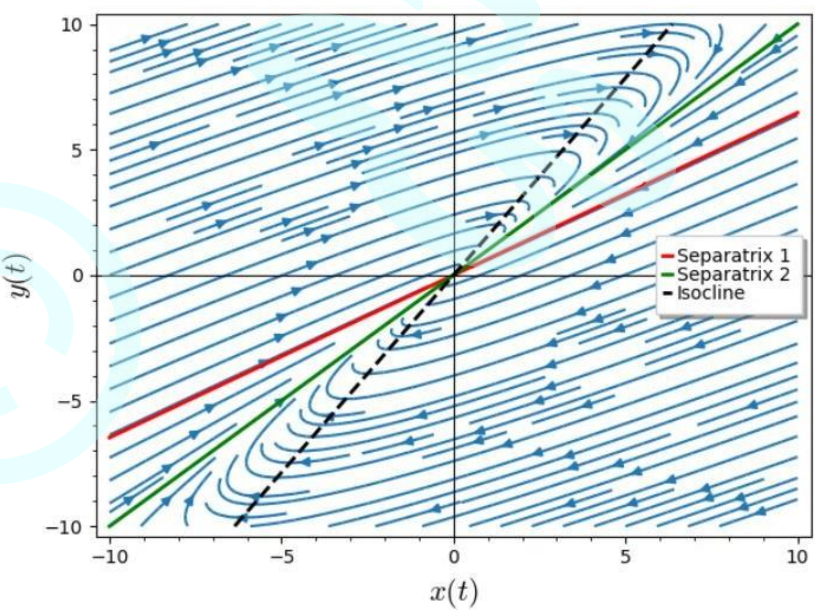
Результат роботи програми (Sage) Screen



Код програми (Sage)

```
#Замкнена система система
x,y=var('x,y')
f(x,y)=-10.5*x+8.5*yg(x,y)=-5.5*x+3.5*y
#сепаратриси та ізокліна
separatrix1 = line([(-10,-110/17), (10,110/17)],
rgbcolor=Color('red'),thickness=2, legend_label = 'Separatrix
1')
separatrix2 = line([(-10,-10), (10,10)], rgbcolor=Color('green'),
thickness=2,legend_label = 'Separatrix 2')
isocline = line([(-70/11,-10), (70/11,10)], rgbcolor=Color('black'),
thickness=2, linestyle ='dashed', legend_label = 'Isocline')
streamline_plot((f,g), (x, -10, 10), (y, -10, 10), density=1.5,
axes_labels =["$x(t)$", "$y(t)$"]) + separatrix1 + separatrix2 + isocline
```

Результат роботи програми (Sage) Screen



Код програми (Sage)

```
#загальний розв'язок 1
y=function('y')(x)
de=diff(y,x)==(-2*x+y)/y
solution=desolve(de,y)
solution.show()

#загальний розв'язок 2
y=function('y')(x)
de=diff(y,x)==(-5.5*x+3.5*y)/(-0.5*x+8.5*y)
solution=desolve(de,y)
solution.show()
```

Результат роботи програми (Sage) Screen

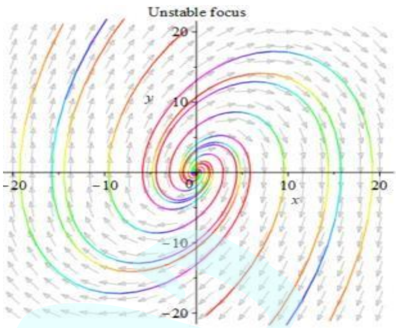
$$Cx = e^{\left(-\frac{1}{14}\,\sqrt{7}\left(\sqrt{7}\log\left(\frac{2\,x^{2} - x y(x) + y(x)^{2}}{x^{2}}\right) + 2\,\arctan\left(-\frac{\sqrt{7}(x - 2\,y(x))}{7\,x}\right)\right)\right)}$$

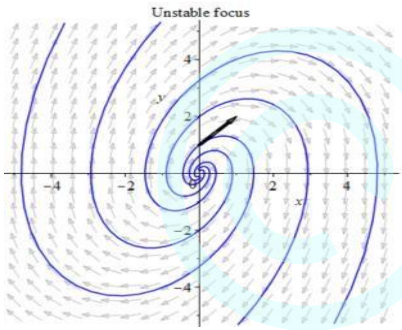
$$Cx = e^{\left(-\frac{5}{3}\,\log\left(-\frac{11\,x - 17\,y(x)}{x}\right) + \frac{2}{3}\,\log\left(-\frac{x - y(x)}{x}\right)\right)}$$

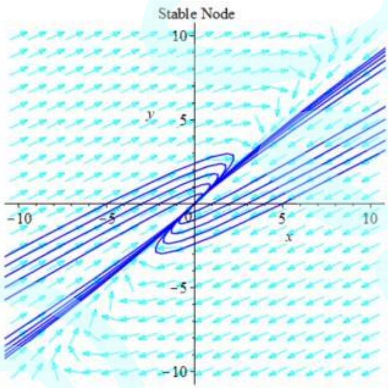
Код програми (Maple)

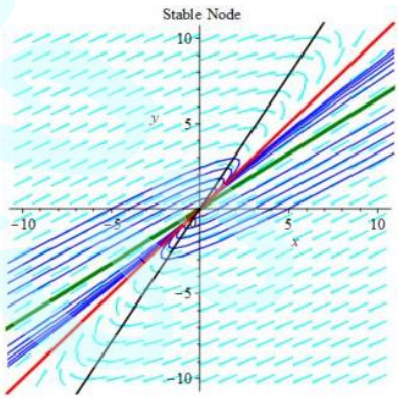
```
with(plots)
with(VectorCalculus)
with(LinearAlgebra)
with(DEtools)
f := diff(x(t), t) = y(t)
inits := [seq([0, 0, k], k = 1 .. 4), seq([0, 0, k], k = -4 .. -1)]
inits2 := [seq([0, 0, k], k = -2 .. 2)]
g := diff(y(t), t) = -2*x(t)+y(t)
DEplot([f, g], [x(t), y(t)], t = -20 .. 20, x = -20 .. 20, y = -20 .. 20, inits,
stepsize =.1, linecolor = sin(t), arrows = medium,
title = "Unstable focus", color = grey,thickness = 1, arrowsize = .2, labels =
[x, y],
labelfont = [TIMES, ITALIC, 12], size = 1.2)
deplot := DEplot([f, g], [x(t), y(t)], t = -5 .. 5, x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, inits2,
stepsize= .1, linecolor = blue, arrows = medium,
title = "Unstable focus", color = grey,thickness = 1, arrowsize = .2, labels =
[x, y],
labelfont = [TIMES, ITALIC, 12], size = 1.2)
vs2 := VectorSpace('cartesian', [0, 1])
b := PlotVector(vs2:-Vector([1, 1])) display([deplot, b])
f1 := diff(x(t), t) = -10.5*x(t)+8.5*y(t)
g1 := diff(y(t), t) = -5.5*x(t)+3.5*y(t)
init_c := [seq([0, 1.1*k, k], k = -5 .. 5), seq([0, k, 0], k = -5 .. 5)]
D1 := DEplot([f1, g1], [x(t), y(t)], t = -20 .. 20, x = -10 .. 10,
y = -10 .. 10, init_c, stepsize = .1, linecolor = blue, arrows = comet, title =
"Stable Node", color = cyan, thickness = 1, arrowsize = .2, labels = [x, y],
labelfont = [TIMES, ITALIC,12], size = 1.2)
A := `<|>`(`<,>`(-10.5, -5.5), `<,>`(8.5, 3.5))
v, e := Eigenvectors(Matrix(A))
separatrix1 := plot([e[1][1]*t, e[2][1]*t, t = -20 .. 20], color = "Green",
thickness = 4)
separatrix2 := plot([e[1][2]*t, e[2][2]*t, t = -20 .. 20], color = "Red",
thickness =3)
isocline := plot(-A[2][1]*x/A[2][2], x = -10 .. 10, color = "Black",
thickness = 2)
display([D1, separatrix1, separatrix2, isocline])
```

Результат роботи програми (Maple) Screen









РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА

Основні:

1. Д.Я.Хусаінов, А.В.Шатирко. Диференціальні рівняння: Підручник/К.: ВПЦ «Київський університет», 2023. – 410с.
2. Крак Ю.В., Шатирко А.В. Теорія керування для інформатиків. Підручник. / К.: ВПЦ "Київський університет", 2015. – 175 с.
3. Білоусова Л. І. Курс вищої математики у середовищі Maple / Л. І. Білоусова, М. М. Горонескуль. – Х. : УЦЗУ, КП «Міська друкарня», 2009. – 412 с.
4. Доля П.Г., Антоненко Г.М. Розв’язання задач вищої математики на комп’ютері. Учбовий посібник. / ХНУ імені В.Н.Каразіна, 2017. – 127 с.
5. C.Hanry Edwards, David E.Penny. Differential Equation and Boundary Value Problems: Computing and Modeling. Third Edition. – Pearson Education Inc., Upper Saddle River, 2008. – 804 p.
6. Gregory V. Bard. Sage for Undergraduates. American Mathematical Society, Providence,2015.
7. Judson, Thomas W. 2017. The Ordinary Differential Equations Project. Text draft. 365 pp. http://faculty.sfasu.edu/judsontw/ode/index.html.
8. https://www.sagemath.org/doc/reference/calculus/sage/calculus/desolvers.html
9. https://help.sagecrm.com/

\

Додаткові:

10. Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Т. Харченко І.І. Диференціальні рівняння для інформатиків.: Підручник. / К.: ВПЦ "Київський університет" 2008.
11. Гаращенко Ф.Г., Харченко І.І. Збірник задач і вправ з диференціальних рівнянь. / К.: ВПЦ "Київський університет" 2004. – 162 с.
12. Ляшко І.І., Боярчук О.К, Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. / К.: Вища школа, 1981. 504 с.
13. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах. / К.: Либідь, 2003. 502 с.
14. Хусаінов Д.Я., Бичков О.С. Диференціальні рівняння: Навчальний посібник. / К.: ВПЦ "Київський університет" 2001. – 132 с.
15. Крак Ю.В. Основи теорії керування та робототехніки / К.: ВПЦ "Київський університет", 2021. - 152 с.

https://csc.knu.ua/uk/library