МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Д. А. Клюшин
С. І. Ляшко

НЕКЛАСИЧНІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Методичні рекомендації

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ
2023

УДК 517.95:519.6(072)
К52

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук., проф. Д. А. Номіровський
(*Київський національний університет імені Тараса Шевченка*)
д-р. фіз.-мат. наук, старш. досл. С.С. Зуб
(*Національний науковий центр "Інститут метрології"*)

Рекомендовано до друку
вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(протокол № 10 від 25 квітня 2023 року)

Клюшин Д. А., Ляшко С. І.

К52 Некласичні задачі математичної фізики: метод. рекомендації / Д. А. Клюшин, С. І. Ляшко. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2023. – 51 с.

Наведено теоретичні основи та приклади некласичних задач математичної фізики. Продемонстровано застосування апріорних оцінок в негативних просторах для доведення існування розв'язків некласичних задач математичної фізики на прикладі рівняння в частинних похідних псевдопараболічного типу.

Для фахівців з обчислювальної математики та математичної фізики, а також студентів та аспірантів відповідних спеціальностей.

УДК 517.95:519.6(072)

Передмова

У запропонованих методичних рекомендаціях подані результати досліджень в області теорії оптимального керування некласичними рівняннями математичної фізики за допомогою нелінійних узагальнених впливів (у тому числі імпульсних). З єдиних позицій, заснованих на використанні апріорних нерівностей із негативними нормами скінченого порядку, будується теорія некласичних рівнянь математичної фізики, доводяться теореми про їх розв'язність та існування оптимального керування. Нерівності з негативними нормами вперше були отримані в роботах професора В.П. Діденко на початку 70-х років і виявилися дуже ефективними для аналізованих у книзі задач узагальненої оптимізації. На цьому шляху отримано результати щодо існування та єдиності розв'язків початково-крайових задач, існування оптимальних керувань, диференціальних властивостей критерію якості.

У методичних рекомендаціях викладається загальна теорія некласичних задач математичної фізики з узагальненими впливами, для яких a priori виконуються нерівності з негативними нормами.

В кожному параграфі використовується окрема нумерація формул, лем, теорем, означень.

Вступ

Інтенсивний розвиток науки і техніки призводять до того, що оптимізація різноманітних систем стає однією з найбільш актуальних проблем прикладної математики і кібернетики. В багатьох технічних застосуваннях суть об'єктів така, що вони мають просторову протяжність і їхній стан описується деякими класичними або некласичними рівняннями математичної фізики (системи з розподіленими параметрами). Вивчення об'єктів подібного роду потребує істотного узагальнення методів і засобів аналізу систем із зосередженими параметрами.

Багато задач фізики, економіки, екології, медицини тощо призводять до необхідності розгляду задач, що містять у правих частинах рівняння стану системи з розподіленими параметрами узагальнені функції скінченного порядку, у тому числі і по часовій змінній (імпульсне, точкове і подібне керування).

При розв'язанні задач сингулярного оптимального керування виникає ряд істотних проблем. Методи їх подолання, що складають елементи нової єдиної теорії, описані в цих методичних рекомендаціях.

1. Необхідні поняття з функціонального аналізу

Векторні і нормовані простори. Множина E називається *дійсною лінійною системою*, або *дійсним векторним простором*, якщо для кожних двох її елементів x та y визначено їх суму $x+y\in E$, і для будь-якого x та дійсного числа λ визначено добуток $\lambda x\in E$, які задовольняють умови (аксіоми лінійного простору):

1. $(x+y)+z=x+(y+z)$ (асоціативність додавання);
2. $x+y=y+x$ (комутативність додавання);
3. $\exists\theta\in E$, що $0\cdot x=\theta$ для довільного x;
4. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ (дистрибутивність);
5. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ (дистрибутивність);
6. $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$ (асоціативність множення);
7. $1\cdot x=x$.

Нейтральний елемент $x=\theta$ простору E, якщо це не призводить до плутанини, далі будемо позначати $x=0$.

Дійсна лінійна система E називається *дійсним лінійним нормованим простором* (в подальшому – *нормованим простором*), якщо кожному елементу $x\in E$ поставлено у відповідність дійсне число $\|x\|$ (або $\|x\|_E$), яке задовольняє умови (аксіоми *норми*):

1. $\|x\|\geq 0$ (невід'ємність);
2. $\|x\|=0$ тоді і тільки тоді, коли $x=0$ (віддільність);
3. $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$ (однорідність);
4. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (нерівність трикутника).

Послідовність $\{x_n\}$ елементів нормованого простору E називається *збіжною за нормою*, або *сильно збіжною*, або просто *збіжною*, до елемента

$x_0 \in E$, якщо $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$. Якщо $\{x_n\}$ збігається до елемента $x_0 \in E$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x_0\|$.

Послідовність $\{x_n\}$ елементів нормованого простору E називається *фундаментальною*, або *послідовністю Коші*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ при довільних $n, m > N$.

Нормований простір E називається *повним* (*банаховим*), якщо кожна фундаментальна послідовність збігається до деякого елемента того ж простору.

Підмножина M нормованого простору E називається *щільною* в просторі E, якщо для довільного елемента $x \in E$ існує послідовність $x_n \in M$, що збігається до x.

Підмножина M нормованого простору E називається *замкненою*, якщо з умов $x_n \in M$, $x_0 \in E$ виплива, що $x_0 \in M$. Замиканням множини M (позначатимемо $\bar{M}$) будемо називати перетин всіх замкнених множин, що містять множину M.

Для будь-якого нормованого простору E існує банахів простір $\tilde{E}$ такий, що 1) $E \subset \tilde{E}$; 2) $\|x\|_E = \|x\|_{\tilde{E}}$; 3) E щільна підмножина в $\tilde{E}$. Простір $\tilde{E}$ називається *поповненням* простору E.

Функціонали і спряжений простір. Оператори. Якщо кожному елементу $x \in E$ поставлено у відповідність деяке дійсне число $f(x)$, то на E задано *функціонал* f.

Функціонал f називається *лінійним*, якщо він задовольняє умову $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $\forall x, y \in E$, де α, β – довільні дійсні числа.

Функціонал f називається *неперервним*, якщо для будь-якого елемента $x_0 \in E$ виконується умова $f(x_n) \to f(x_0)$ при $x_n \to x_0$, де $x_n \in E$. Функціонал $f(x) = \|x\|$ є неперервним.

Лінійний функціонал називається *обмеженим* на E, якщо існує таке достатньо велике додатне число C, що для всіх $x \in E$ виконується нерівність $\|f(x)\| \le C\|x\|$. Лінійний функціонал є неперервним тоді і тільки тоді, коли він обмежений.

Множина лінійних неперервних функціоналів з нормою

$$\|f\| = \sup_{x \in E} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} f(x)$$

та операціями додавання функціоналів та множення на число:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

утворює банахів простір E^*, який називається *спряженим простором*.

Для будь-якого лінійного неперервного функціоналу f, заданого на лінійній підмножині G банахового простору E, існує функціонал $F \in E^*$, такий що $\|F\| = \|f\|$ (під нормою функціонала, що визначений на підмножині G, розуміється $\|f\| = \sup_{\|x\|_E = 1, x \in G} |f(x)|$) та $F(x) = f(x)$ для довільного $x \in G$ (теорема Хана-Банаха). Функціонал F називається *продовженням функціонала* f. Якщо підмножина G щільна в E, то таке продовження єдине.

Якщо $\{f_n\}$ – послідовність функціоналів з E^*, яка обмежена в кожній точці, то послідовність $\|f_n\|$ є обмеженою (теорема Банаха-Штейнгауза).

Послідовність $\{x_n\}$ елементів з E називається *слабко збіжною* до елемента $x_0 \in E$ (позначатимемо $x_n \xrightarrow{w} x_0$), якщо $f(x_n) \to f(x_0)$ для довільного $f \in E^*$. Будь-яка слабко збіжна послідовність є обмеженою. В скінченновимірному просторі слабка та сильна збіжності співпадають.

Функціонал f називається напівнеперервним знизу, якщо з $x_n \to x_0$ в E випливає, що $f(x_0) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n)$. Функціонал f називається слабко напівнеперервним знизу, якщо з умови $x_n \xrightarrow{w} x_0$ випливає, що $f(x_0) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n)$. Функціонал $f(x) = \|x\|$ є слабко напівнеперервним знизу.

Нехай E_1 і E_2 – нормовані простори. На множині $D \subset E_1$ задано *оператор, або відображення* A, із значеннями в E_2, якщо кожному елементу

$x \in D$ поставлено у відповідність елемент $y = Ax \in E_2$. Оператор A називається *лінійним*, якщо

1. $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D$ для довільних $x_1, x_2 \in D$, де α, β – дійсні числа;
2. $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = A(\alpha x_1) + A(\beta x_2)$ для довільних , α, β – дійсні числа.

Якщо A – лінійний оператор з E_1 в E_2 такий, що $D = E_1$, та з умови $x_n \to x_0$, $Q = \{(0 < t < T) \times \Omega\}$ випливає, що $A(x_n) \to A(x_0)$ в E_2, то A – *лінійний неперервний оператор*.

Оператор A називається *слабко неперервним*, якщо з умови $x_n \xrightarrow{w} x_0$ в ГР, де $x_n, x_0 \in Dx_n$, випливає, що $A(x_n) \to A(x_0)$ слабко в E_2.

Гільбертів простір. Дійсна лінійна система E називається *дійсним передгільбертовим простором*, якщо кожній парі елементів x, y поставлено у відповідність дійсне число (x, y), що задовольняє умови (аксіоми *скалярного добутку*):

1. $(x, x) \geq 0$, до того ж $(x, x) = 0$ тільки при $x = 0$;
2. $(x, y) = (y, x)$;
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
4. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$.

За скалярним добутком в H можна ввести норму $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Має місце нерівність Коші-Буняковського

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

для довільних $x, y \in H$.

Якщо відносно цієї норми простір H є повним, то він називається *гільбертовим.* Гільбертів простір є банаховим. Отже, на нього переносяться всі попередні означення і факти. Крім того, має місце аналогічна теорема про поповнення передгільбертових просторів.

Якщо $f \in H^*$, то існує єдиний елемент $u(f) \in H$, такий що $f(x) = (u, x)$ для довільного $x \in H$, та $\|f\|_{H^*} = \|u\|_H$ (теорема Рісса $H = H^*$). Таким чином, в гільбертовім просторі умова $x_n \xrightarrow{w} x_0$ $(x_n, x_0 \in H)$ рівносильна умові $\lim\limits_{n\to\infty}(u, x_n) = (u, x_0)$, $\forall u \in H$, а умова $f_n \xrightarrow{w} f_0$ $(f_n, f_0 \in H^*)$ рівносильна умові $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n, x) = (f_0, x)$, $\forall x \in H$.

З будь-якої обмеженої множини M гільбертова простору H можна виділити слабко збіжну послідовність, якщо ж крім того M є замкненою та опуклою, то з неї можна виділити послідовність, що збігається слабко до елемента з множини M.

Нехай H_1 і H_2 – векторні простори, кожній парі елементів $(x, y) \in H_1 \times H_2$ яких поставлено у відповідність дійсне число $\langle x, y \rangle$, що задовольняє умови (аксіоми лінійності):

1. $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$,
2. $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x, y_1 \rangle + \beta \langle x, y_2 \rangle$,

де α, β – довільні дійсні числа.

Функціонал $\langle \cdot, \cdot \rangle$ називається *білінійною формою* на декартовому добутку $H_1 \times H_2$.

Нехай H_1 і H_2 – лінійні нормовані простори, тоді якщо білінійна форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ задовольняє умову

$$\left| \langle x, y \rangle \right| \le C \|x\|_{H_1} \cdot \|y\|_{H_2}, \quad \forall x \in H_1, y \in H_2,$$

то білінійна форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ називається неперервною білінійною формою.

Оснащені гільбертові простори. Нехай H_0 – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_0$, в якому виділено лінійну підмножину H_+ щільну в H_0, яка сама є гільбертовим простором з іншим скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_+$ і нормою $\|\cdot\|_+$. Норми просторів H_+ та H_0 зв'язані нерівністю $\|x\|_0 \le C\|x\|_+$, $x \in H_+$ Кожний елемент $u \in H_0$ задає лінійний неперервний функціонал f_u над H_+ за формулою $f_u(x) = (u, x)_0$, $x \in H_+$. Введемо простір H_- як поповнення H_0 за нормою

$$\|u\|_- = \|f_u\| = \sup_{\substack{x \in H_+, \\ x \neq 0}} \frac{\left|(u,x)_0\right|}{\|x\|_+}.$$

Простір H_- є гільбертовим, та має місце ланцюжок щільних вкладень

$$H_+ \subset H_0 \subset H_-.$$

Введені таким чином простори, H_+, H_0 і H_- називаються *позитивним*, *нейтральним* і *негативним* просторами, відповідно, а ланцюжок вкладень – гільбертовим оснащенням простору H_0 просторами H_+ і H_-.

На декартовому добутку $H_- \times H_+$ вводиться неперервна білінійна форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ як

$$\langle v, x \rangle_0 = \lim_{n \to \infty} (u_n, x)_0,$$

де $u_n \to v$ в H_-, $x \in H_+, u_n \in H_0, v \in H_-, x \in H_+, u_n \in H_0, v \in H_-$ (розширення за неперервністю), до того ж $\left|\langle v, x \rangle_0\right| \le |v|_- |x|_+$, де $x \in H_+, v \in H_-$ (нерівність Шварца).

Для довільного $f \in (H_+)^*$ існує $v \in H_-$, такий що $f(x) = \langle v, x \rangle_0$ для довільного $x \in H_+$. Аналогічно, довільний функціонал $f \in (H_-)^*$ можна подати у вигляді $f(v) = \langle v, x \rangle_0$, $x \in H_+$ для довільного $v \in H_-$. Таким чином, мають місце рівності , $H_- = (H_+)^*$, $H_+ = (H_-)^*$.

Простори С.Л. Соболева W_2^l. Для цілого невід'ємного l позначимо через $W_2^l(Q)$ поповнення множини $C^\infty(\bar{Q})$ (нескінченну кількість разів диференційованих в області $\bar{Q}$ функцій) за нормою

$$\|u\|_{W_2^l} = \left(\int_Q u^2 + \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=l} \left(\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right)^2 dx \right)^{1/2},$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Q \subset R^n$ – обмежена область з гладкою межею.

Простори $W_2^l(Q)$ називаються просторами С.Л.Соболева. Якщо $l = 0$, то простір $W_2^0(Q)$ збігається з простором $L_2(Q)$ вимірних інтегровних з квадратом за Лебегом на множині Q функцій. Простори $W_2^l(Q)$ є гільбертовими зі скалярним добутком

$$(u,v)_l = \int_Q \left(uv + \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=l} \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} \frac{\partial^l v}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right) dx$$

та має місце такий ланцюжок щільних та цілком неперервних вкладень:

$$L_2(Q) \supset W_2^1(Q) \supset W_2^2(Q) \supset \ldots \supset W_2^l(Q) \supset \ldots .$$

Тому за парою $L_2(Q)$ та $W_2^l(Q)$ можна побудувати негативний простір С.Л.Соболева $W_2^{-l}(Q)$, як поповнення простору $L_2(Q)$, за нормою

$$\|f\|_{W_2^{-l}} = \sup_{u \in W_2^l, u \neq 0} \frac{\left|(f,u)_{L_2(Q)}\right|}{\|u\|_{W_2^l}}.$$

Функції з $W_2^l(Q)$ мають певну гладкість, а саме: якщо $k < l - \frac{n}{2}$, то $W_2^l(Q) \subset C^k(\bar{Q})$ та $\|u\|_{C^k(\bar{Q})} \le C\|u\|_{W_2^l(Q)}$, $u \in W_2^l(Q)$ (теорема вкладення).

Більш того, за певних умов можна розглядати звуження функції $u \in W_2^l(Q)$ на многовиди $D \subset \bar{Q}$ розмірністю менше за n (сліди функції u на D), при цьому указані звуження будуть мати певні властивості вимірності, сумовності, гладкості (теорема про сліди).

Диференціювання відображень. Нехай X та Y – нормовані простори, $F : X \to Y$ – відображення деякого околу U точки $x_0 \in X$ у простір Y. Відображення F називають *диференційованим за Фреше* в точці x_0, якщо існує лінійний неперервний оператор $F'_{x_0} : X \to Y$, що : $\forall x \in U$

$$\|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \left\|F(x) - F(x_0) - F'_{x_0}(x - x_0)\right\|_Y \le \varepsilon \|x - x_0\|_X \qquad .$$

Якщо відображення F є диференційованим за Фреше в кожній точці відрізку $[x, x_0]$ (тобто на множині $\{y \in X : y = \lambda x_0 + (1-\lambda)x, \lambda \in [0,1]\}$), то

$$\|F(x) - F(x_0)\|_Y \le \sup_{y \in [x, x_0]} \|F'\| \cdot \|x - x_0\|.$$

2. Існування та єдиність узагальненого розв'язку

Розглянемо систему, функціонування якої описується лінійними диференційними рівняннями з частинними похідними

$$Lu = F, u \in D(L), \tag{2.1}$$

в циліндричній області $Q = \{(0 < t < T) \times \Omega\}$, де $u(t,x)$ – шукана функція, що залежить від просторової $x \in \Omega$ і часової $t \in (0,T)$ змінних, Ω – обмежена область в R^n з гладкою межею $\partial\Omega$. Областю визначення $D(L)$ оператора L є множина гладких (нескінченну кількість разів диференційовних) в області $\bar{Q}$ функцій, що задовольняють деякі однорідні крайові умови ГР на межі ∂Q області ($D(L) = C^{\infty}_{\text{ГР}}$). Наприклад, для параболічного рівняння

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

це можуть бути класичні умови першого, другого або третього роду (за просторовою змінною)

$$u\big|_{x=L} = 0,\ \ u\big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \qquad \text{першого роду,}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{x\in\partial\Omega} = 0, \qquad \text{другого роду,}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, u + \alpha \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right| = 0, \qquad \text{третього роду,}$$

Будемо вважати, що оператор L діє з в $L_2(Q)$, де $L_2(Q)$ – це простір вимірних інтегровних з квадратом за Лебегом на множині Q функцій. Зауважимо, що множина $D(L)$ є лінійною та щільною в $L_2(Q)$, тому можна визначити спряжений за Лагранжем оператор $L^*: L_2(Q) \to L_2(Q)$, з областю визначення $D(L^*)$. Нагадаємо, що спряженим за Лагранжем оператором називається оператор L^*, що задовольняє умову

$$(Lu, v)_{L_2(Q)} = (u, L^* v)_{L_2(Q)},$$

де $u \in C^{\infty}_{\text{ГР}}, v \in C^{\infty}_{\text{ГР}^+}$, де ГР$^+$ означає спряжені крайові умови.

Наприклад, для параболічного оператора спряженим за Лагранжем буде оператор

$$L^{*}u \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

з тими самими умовами першого, другого чи третього роду.

Нехай відносно $L_2(Q)$ побудовано ланцюжки оснащених гільбертових просторів:

$$W_{\text{ГР}}^{-l} \supset L_2(Q) \supset W_{\text{ГР}}^{+l}, \quad W_{\text{ГР}^+}^{-l} \supset L_2(Q) \supset W_{\text{ГР}^+}^{+l},$$

де $W_{\text{ГР}}^{+l}$ – поповнення $D(L)$ за деякою позитивною нормою, тобто такою, що $W_{\text{ГР}}^{l} \subset L_2(Q)$ та $\|u\|_{L_2(Q)} \le C\|u\|_{W_{\text{ГР}}^{+l}}$, $u \in W_{\text{ГР}}^{+l}$. Аналогічно вводиться простір $W_{\text{ГР}^+}^{+l}$ як поповнення множини $D(L^{*})$ (гладких в області $\bar{Q}$ функцій, що задовольняють спряжені крайові умови ГР^{+}) за тією ж самою нормою $\|u\|_{W_{\text{ГР}}^{+l}}$. Негативні простори $W_{\text{ГР}}^{-l}, W_{\text{ГР}^+}^{-l}$ будуються за $L_2(Q)$ і відповідними позитивними просторами $W_{\text{ГР}}^{+l}, W_{\text{ГР}^+}^{+l}$.

Нехай оператори L та L^{*} задовольняють апріорні негативні оцінки виду

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_2(Q)} &\le C_1 \|Lu\|_{W_{\text{ГР}^+}^{-l}} \le C_2 \|u\|_{W_{\text{ГР}}^{+l}}, \\ \|v\|_{L_2(Q)} &\le C_1 \|L^{*}v\|_{W_{\text{ГР}^+}^{-l}} \le C_2 \|v\|_{W_{\text{ГР}^+}^{+l}}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

де L^{*} – оператор, спряжений за Лагранжем до L, $u \in D(L), v \in D(L^{*})$, C_1, C_2 – додатні сталі, що не залежать від функцій $u(t,x)$, $v(t,x)$.

Позначимо також через $\langle \cdot,\cdot \rangle_{W_{\text{ГР}}}, \langle \cdot,\cdot \rangle_{W_{\text{ГР}^+}}$ білінійні форми, побудовані розширенням скалярного добутку в $L_2(Q)$ за неперервністю до білінійної форми на $W_{\text{ГР}}^{-l} \times W_{\text{ГР}}^{+l}$ і $W_{\text{ГР}^+}^{-l} \times W_{\text{ГР}^+}^{+l}$, відповідно.

З наведених нерівностей (2.2) випливає, що оператор $L(\cdot)$ (відповідно, $L^{*}(\cdot)$) можна розширити за неперервністю до неперервно діючого з усього простору $W_{\text{ГР}}^{+l}$ (відповідно, $W_{\text{ГР}^+}^{+l}$) в простір $W_{\text{ГР}^+}^{-l}$ (відповідно, $W_{\text{ГР}}^{-l}$). Зауважимо, що нерівності (2.2) будуть мати місце і для розширених операторів при будь-яких $u(t,x)\in W^{+l}_{\text{ГР}}$, $v(t,x)\in W^{+l}_{\text{ГР}^+}$.   .

Для розширених операторів і довільних $u(t,x)\in W^{+l}_{\text{ГР}}$, $v(t,x)\in W^{+l}_{\text{ГР}^+}$ має місце рівність

$$\left\langle Lu,v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}=\left\langle u,L^{*}v\right\rangle_{W_{\text{ГР}}}. \tag{2.3}$$

Розв'язок прямої і спряженої задач:

$$Lu=F \tag{2.4}$$

$$L^{*}v=G, \tag{2.5}$$

будемо тлумачити в розумінні таких означень.

Означення 2.1. *Розв'язком задачі (2.4) з правою частиною* $F\in W^{-l}_{\text{ГР}^+}$ *називається функція* $u(t,x)\in W^{+l}_{\text{ГР}}$, *для якої існує послідовність функцій* $u_i(t,x)\in C^{\infty}_{\text{ГР}}(\overline{Q})$, $i=1,2,\ldots$ *таких, що*

$$\left\|u_i-u\right\|_{W^{+l}_{\text{ГР}}}\xrightarrow[i\to\infty]{}0,\ \left\|Lu_i-F\right\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}}\xrightarrow[i\to\infty]{}0 \quad .$$

Означення 2.2. *Сильним розв'язком задачі (2.4) з правою частиною* $F\in W^{-l}_{\text{ГР}^+}$ *називається функція* $u(t,x)\in W^{+l}_{\text{ГР}}$, *така, що*

$$Lu-F=0,$$

в просторі $W^{-l}_{\text{ГР}^+}$.

Означення 2.3. *Слабким розв'язком задачі (2.4) з правою частиною* $F\in W^{-l}_{\text{ГР}^+}$ *називається функція* $u(t,x)\in W^{+l}_{\text{ГР}}$, *така, що рівність*

$$\left\langle u,L^{*}v\right\rangle_{W_{\text{ГР}}}=\left\langle F,v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}},$$

виконується для будь-яких функцій $v\in C^{\infty}_{\text{ГР}^+}$.

Аналогічно вводяться означення і для розв'язку рівняння (2.5).

Лема 2.1. *Нехай для операторів* L *і* L^{*} *виконуються нерівності (2.2). Тоді означення 2.1, 2.2, 2.3 еквівалентні.*

Доведення проведемо за схемою $1\Leftrightarrow 2\Leftrightarrow 3$.

Нехай $u(t,x)$ – розв'язок задачі (2.4) в розумінні означення 2.1. Тоді, ураховуючи нерівності (2.2), за допомогою граничного переходу, доходимо до висновку, що значення розширеного оператора $L: W^{+l}_{\text{ГР}} \to W^{-l}_{\text{ГР}^+}$ на елементі $u(t,x)$, очевидно, дорівнює F, тобто $Lu = F$ в розумінні рівності елементів в просторі $W^{-l}_{\text{ГР}^+}$.

Нехай тепер, навпаки, $u(t,x)$ – розв'язок задачі (2.4) в розумінні означення 2.2. Оскільки множина $C^{\infty}_{\text{ГР}}(\bar{Q})$ щільна в $W^{+l}_{\text{ГР}}$, то можна вибрати послідовність $u_i(t,x) \in C^{\infty}_{\text{ГР}}(\bar{Q})$ таку, що $\|u - u_i\|_{W^{+l}_{\text{ГР}}} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$. Далі маємо

$$\|Lu_i - F\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} = \|Lu_i - Lu + Lu - F\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} \le$$
$$\le \|Lu_i - Lu\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} + \|Lu - F\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}}.$$

Оскільки $Lu = F$ в $W^{-l}_{\text{ГР}^+}$, то другий доданок праворуч дорівнює 0. Зважаючи на (2.2) і лінійність оператора L, дістаємо

$$\|Lu_i - F\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} \le \|Lu_i - Lu\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} \le C\|u_i - u\|_{W^{+l}_{\text{ГР}}} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

Таким чином, еквівалентність означень 2.1 і 2.2 доведено.

Також нескладно довести еквівалентність означень 2.2 і 2.3. Дійсно, з урахуванням рівності (2.3) твердження $2 \Rightarrow 3$ стає очевидним. Доведемо, що $3 \Rightarrow 2$. Нехай $u(t,x)$ – розв'язок задачі (2.4) в розумінні означення 2.3:

$$\langle F, v\rangle_{W_{\text{ГР}}} = \langle F, v\rangle_{W_{\text{ГР}^+}},\ \forall v \in C^{\infty}_{\text{ГР}^+},$$

або

$$\langle Lu, v\rangle_{W_{\text{ГР}^+}} = \langle F, v\rangle_{W_{\text{ГР}^+}},\ \forall v \in C^{\infty}_{\text{ГР}^+}.$$

Звідси за рахунок щільності множини $C^{\infty}_{\text{ГР}^+}$ в просторі $W^{+l}_{\text{ГР}^+}$ випливає, що $Lu = F$ в (Lu та F задають один той самий функціонал на $W^{+l}_{\text{ГР}^+}$).

Зауваження. *Аналогічне твердження має місце і відносно розв'язків спряженого рівняння* (*2.5*).

Теорема 2.1. *Нехай для операторів задач* (*2.4*), (*2.5*) *виконуються нерівності* (*2.2*). *Тоді для будь-якої функції* $F \in L_2(Q)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (*2.4*) *в розумінні означень 2.1–2.3*. До того ж $Lu = F$ в $L_2(Q)$.

Доведення. Розглянемо функціонал $l(v) \equiv \left(v, F\right)_{L_2(Q)}$ на функціях $v \in W^{+l}_{\text{ГР}^+}$. Внаслідок нерівності Коші-Буняковського і (2.2) дістаємо

$$\left|l\left(v\right)\right| = \left|\left(v, F\right)_{L_2(Q)}\right| \le \left\|v\right\|_{L_2(Q)} \cdot \left\|F\right\|_{L_2(Q)} \le$$
$$\le \left\|L^* v\right\|_{W^{-l}_{\text{ГР}}} \cdot \left\|L^* v\right\|_{L_2(Q)} \le C\left\|L^* v\right\|_{W^{-l}_{\text{ГР}}},$$

звідки випливає, що l можна розглядати як лінійний і неперервний від $L^* v \in W^{-}_{\text{ГР}}$ функціонал $l\left(v\right) = \overline{l}\left(L^* v\right)$. За теоремою Хана-Банаха розширимо за неперервністю функціонал $\overline{l}$ до лінійного і неперервного на весь простір $W^{-l}_{\text{ГР}}(Q)$. Внаслідок співвідношення $\left(W^{-l}_{\text{ГР}}\right)^* = W^{+l}_{\text{ГР}}$ існує функція $u(t, x) \in W^{+l}_{\text{ГР}}(Q)$ така, що $\overline{l}\,(w) = \left\langle u, w\right\rangle_{W_{\text{ГР}}}$ для всіх $w \in W^{-l}_{\text{ГР}}(Q)$. Розглянемо цей функціонал на елементах $w = L^* v$, $v \in C^{\infty}_{\text{ГР}^+}(\overline{Q})$. Тоді

$$\overline{l}\,(w) = \left\langle u, L^* v\right\rangle_{W_{\text{ГР}}} = l(v) = \left(v, F\right)_{L_2(Q)}$$

або

$$\left\langle u, L^* v\right\rangle_{W_{\text{ГР}}} = \left\langle F, v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}} ,$$

що і завершує доведення існування узагальненого розв'язку задачі (2.4) в розумінні означення 2.3, а отже і в розумінні означень 2.1, 2.2.

Єдиність цього розв'язку випливає з лівої частини нерівності в (2.2). Дійсно, якщо $u^* \in W^{+l}_{\text{ГР}}$ ще один розв'язок рівняння (2.1), то

$$\left\|u^* - u\right\|_{L_2(Q)} \le c_1\left\|Lu^* - Lu\right\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} = c_1\left\|F - F\right\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} = 0.$$

Таким чином, $u^* - u = 0$ в $L_2(Q)$, а отже і в $W^{+l}_{\text{ГР}}$, тому $u^* = u$ в $W^{+l}_{\text{ГР}}$.

Оскільки $Lu - F = 0$ в просторі $W^{-l}_{\text{ГР}^+}$, то зважаючи на вкладення $L_2(Q) \subset W^{-l}_{\text{ГР}^+}$, рівність $Lu - F = 0$ має місце і в просторі $L_2(Q)$.

Теорема 2.2. *Нехай нерівності* (2.2) *є вірними. Тоді для будь-якої функції* $G \in L_2(Q)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (2.5) *в розумінні аналогів означень 2.1–2.3 для розв'язків задачі* (2.5).

Доведення теореми 2.2 здійснюється аналогічно доведенню теореми 2.1.

Означення 2.4. *Розв'язком задачі* (*2.4*) *з правою частиною* $F \in W^{-l}_{\text{ГР}^+}$ *називається функція* $u(t,x) \in L_2(Q)$, *для якої існує послідовність функцій* $u_i(t,x) \in C^{\infty}_{\text{ГР}}(\overline{Q}), i = 1,2,...,$ *таких, що*

$$\|u_i - u\|_{L_2(Q)} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0, \ \ \|Lu_i - F\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 \quad .$$

Означення 2.5. *Слабким розв'язком задачі* (*2.4*) *з правою частиною* $F \in W^{-l}_{\text{ГР}^+}$ *називається функція* $u(t,x) \in L_2(Q)$, *така, що рівність*

$$\left(u, L^* v\right)_{L_2(Q)} = \left\langle F, v \right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}$$

виконується для будь-яких функцій $v \in C^{\infty}_{\text{ГР}^+}$.

Зрозуміло, що розв'язок рівняння (2.4) у розумінні означень 2.1–2.3 є розв'язком рівняння (2.4) і у розумінні означень 2.4–2.5. Аналогічним чином визначаються розв'язки задачі (2.5).

Зазначимо, що у випадку означень 2.4, 2.5 рівність

$$Lu = F$$

не має сенсу, оскільки значення оператора Lu на елементі $u \in L_2(Q)$ не визначене.

Лема 2.2. *Нехай для операторів* L *і* L^* *виконуються нерівності* (*2.2*). *Тоді означення 2.4 і 2.5 є еквівалентними*.

Доведення. Нехай $u(t,x)$ – розв'язок (2.4) в розумінні означення 2.5, тобто $u(t,x) \in L_2(Q)$ і

$$\left(u, L^* v\right)_{L_2(Q)} = \left\langle F, v \right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}, \quad \forall v \in C^{+\infty}_{\text{ГР}^+}. \tag{2.6}$$

Виберемо послідовність $F_p \in L_2(Q)$ таку, що $F_p \xrightarrow[p\to\infty]{} F$ в $W^{-l}_{\text{ГР}^+}$. Тоді, якщо $u_p(t,x) \in W^{+l}_{\text{ГР}}$ – розв'язок задачі $Lu = F_p$ в розумінні означення 2.1, який існує внаслідок теореми 2.1, то

$$Lu_p = F_p,$$

а значить,

$$\|Lu_p - F\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} = \|F_p - F\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0, \tag{2.7}$$

тобто послідовність $\left\{Lu_p\right\}_{p=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $W^{-l}_{\text{ГР}^+}$ (бо простір $W^{-l}_{\text{ГР}^+}$ – повний).

Беручи до уваги (2.2) і (2.7), дістаємо

$$\left\| u_{p_1} - u_{p_2} \right\|_{L_2(Q)} \le C \left\| Lu_{p_1} - Lu_{p_2} \right\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} \xrightarrow[p_1, p_2 \to \infty]{} 0 .$$

Таким чином, послідовність $\left\{ u_p \right\}_{p=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $L_2(Q)$, отже, існує $u^*\left(t,x\right) \in L_2(Q)$ така, що $\left\| u_p - u^* \right\|_{L_2(Q)} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$.

Далі маємо

$$\left(L^* v, u_p \right)_{L_2(Q)} = \left\langle L^* v, u_p \right\rangle_{W_{\text{ГР}}} = \left\langle F_p, v \right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}} , \ \forall v \in C^{+\infty}_{\text{ГР}^+} .$$

Спрямувавши в останній рівності $p \to \infty$, отримаємо

$$\left(L^* v, u^* \right)_{L_2(Q)} = \left\langle F, v \right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}} .$$

Зважаючи на співвідношення (2.6) і те, що остання рівність має місце для довільних функцій $v \in C^{\infty}_{\text{ГР}^+}$, стверджуємо, що $u\left(t,x\right) = u^*\left(t,x\right)$ в $L_2(Q)$, а оскільки $\left\| u_p - u^* \right\|_{L_2(Q)} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$, то і $\left\| u_p - u \right\|_{L_2(Q)} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$. Ураховуючи (2.7), пересвідчуємося, що $u\left(t,x\right)$ є розв'язком задачі (2.4) в розумінні означення 2.4.

Доведемо обернене твердження. Нехай $u\left(t,x\right)$ є розв'язком (2.4) в розумінні означення 2.4. Тоді

$$\begin{aligned} \left(u, L^* v \right)_{L_2(Q)} &= \left(u_i, L^* v \right)_{L_2(Q)} + \left(u - u_i, L^* v \right)_{L_2(Q)} = \\ &= \left(Lu_i, v \right)_{L_2(Q)} + \left(u - u_i, L^* v \right)_{L_2(Q)} = \\ &= \left\langle Lu_i - F, v \right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}} + \left\langle F, v \right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}} + \left(u - u_i, L^* v \right)_{L_2(Q)}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

для довільних функцій $v \in C^{\infty}_{\text{ГР}^+}$.

Зважаючи на нерівність Шварца, оцінимо перший і третій доданок правої частини

$$\left| \left\langle Lu_i - F, v \right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}} \right| \le \left\| v \right\|_{W^{+}_{\text{ГР}^+}} \left\| Lu_i - F \right\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 ,$$

$$\left| \left(u - u_i, L^* v \right)_{L_2(Q)} \right| \le \left\| L^* v \right\|_{L_2(Q)} \quad .$$

Переходячи до границі в (2.8) при $i \to \infty$, приходимо до потрібної рівності (2.6).

Теорема 2.3. *Нехай для операторів задач* (*2.4*), (*2.5*) *мають місце нерівності* (*2.2*). *Тоді для будь-якого функціонала* F *в правій частині* (*2.4*) *з простору* $W_{\text{ГР}^+}^{-l}(Q)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (*2.4*) *в розумінні означень 2.4 і 2.5.*

Доведення. Множина $L_2(Q)$ є щільною в просторі $W_{\text{ГР}^+}^{-l}(Q)$. Отже, для будь-якого елемента $F \in W_{\text{ГР}^+}^{-l}(Q)$ існує послідовність $F_i \in L_2(Q)$ така, що

$$\left\| F_i - F \right\|_{W_{\text{ГР}^+}^{-l}(Q)} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

За теоремою 2.1 для кожної функції $F_i \in L_2(Q)$ існує єдиний розв'язок $u_i \in W_{\text{ГР}}^{+l}$ задачі (2.4) в розумінні означення 2.1. Використовуючи нерівність (2.2), маємо

$$c\left\| u_i - u_j \right\|_{L_2(Q)} \le \left\| Lu_i - Lu_j \right\|_{W_{\text{ГР}^+}^{-l}} = \left\| F_i - F_j \right\|_{W_{\text{ГР}^+}^{-l}} \xrightarrow[i,j\to\infty]{} 0,.$$

Таким чином, послідовність $\{u_i\}$ – фундаментальна в просторі $L_2(Q)$, а тому зважаючи на повноту простору $L_2(Q)$ існує функція $u^*(t,x) \in L_2(Q)$ така, що $\left\| u_i - u^* \right\|_{L_2(Q)} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$. З іншого боку, з леми 2.1 маємо, що для довільної функції $v \in C_{\text{ГР}^+}^{\infty}$ виконується рівність

$$\left\langle v, Lu_i \right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}} = \left\langle F_i, v \right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}$$

або

$$\left(L^* v, u_i \right)_{L_2(Q)} = \left\langle F_i, v \right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}.$$

Переходячи до границі при $i \to \infty$ в останній рівності, дістаємо

$$\left(L^* v, u^* \right)_{L_2(Q)} = \left\langle F, v \right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}},$$

що з урахуванням леми 2.2 доводить теорему.

Теорема 2.4. *Якщо в умовах теореми 2.2 функціонал* G *в правій частині* (*2.5*) *належить простору* $W_{\text{ГР}}^{-l}(Q)$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (*2.5*) *в розумінні аналогів означень 2.4 і 2.5, для задачі* (*2.5*).

Доведення теореми 2.4 аналогічне доведенню теореми 2.3.

Лема 2.3. *Нехай $v(t,x)$ – розв'язок спряженого рівняння (2.5) з правою частиною $G \in L_2(Q)$ в розумінні аналогів означень 2.1–2.3, тоді має місце оцінка*

$$\|v\|_{W^{+l}_{\text{ГР}^+}} \le C \left\|L^* v\right\|_{L_2(Q)}, \tag{2.9}$$

Доведення. Дійсно, зважаючи на теорему 2.3 існує єдиний узагальнений розв'язок $u(t,x)$ задачі (2.4) з правою частиною $F \in W^{-l}_{\text{ГР}^+}$, що належить простору $L_2(Q)$. Звідси за лемою 2.2 маємо, що для будь-якої $F \in W^{-l}_{\text{ГР}^+}$ і будь-яких $v \in W^{+l}_{\text{ГР}^+}$ таких, що $L^* v \in L_2(Q)$, виконується рівність

$$\left(L^* v, u\right)_{L_2(Q)} = \left\langle F, v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}. \tag{2.10}$$

Використовуючи нерівність Шварца, отримуємо

$$\left|\left\langle F, v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}\right| \le \left\|L^* v\right\|_{L_2(Q)} \cdot \|u\|_{L_2(Q)},$$

або

$$\left|\left\langle F, \frac{v}{\left\|L^* v\right\|_{L_2(Q)}}\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}\right| \le \|u\|_{L_2(Q)}. \tag{2.11}$$

Розглянемо сукупність функцій

$$\left\{\frac{v}{\left\|L^* v\right\|_{L_2(Q)}}\right\}$$

з простору $W^{+l}_{\text{ГР}^+}$. Кожна така функція задає лінійний неперервний функціонал $l_v \in \left(W^{-l}_{\text{ГР}^+}\right)^* = W^{+l}_{\text{ГР}^+}$. Нерівність (2.11) означає, що ця сукупність функціоналів є обмеженою в кожній точці $F \in W^{-l}_{\text{ГР}^+}$. Тоді за теоремою Банаха-Штейгауза сукупність функціоналів є обмеженою рівномірно, а отже і множина функцій

$$\left\{\frac{v}{\left\|L^* v\right\|_{L_2(Q)}}\right\}$$

є обмеженою за нормою простору $\left(W^{-l}_{\text{ГР}^+}\right)^* = W^{+l}_{\text{ГР}^+}$, що і доводить нерівність (2.9).

Зауваження. *Аналогічне твердження має місце і відносно розв'язків прямої задачі* (*2.4*). *Тобто має місце оцінка*

$$\|u\|_{W_{\text{ГР}}^{+l}} \le C\|Lu\|_{L_2(Q)}, \tag{2.12}$$

де u – розв'язок (2.4) з правою частиною $F \in L_2(Q)$.

Лема 2.4. *Нехай* $u(t,x)$ *– розв'язок рівняння* (*2.4*) *з правою частиною* $F \in W_{\text{ГР}^+}^{-l}$ *в* розумінні *означень 2.4 і 2.5, тоді має місце оцінка*

$$\|u\|_{L_2(Q)} \le C\|F\|_{W_{\text{ГР}^+}^{-l}}. \tag{2.13}$$

Доведення. Застосувавши до правої частини (2.10) нерівність Шварца і (2.9), отримаємо

$$\left|\left(u, L^* v\right)_{L_2(Q)}\right| \le \|F\|_{W_{\text{ГР}^+}^{-l}} \cdot \|v\|_{W_{\text{ГР}^+}^{+l}} \le \|F\|_{W_{\text{ГР}^+}^{-l}} \cdot C\left\|L^* v\right\|_{L_2(Q)},$$

або

$$\left|\left(u, \frac{L^* v}{\left(L^* v\right(_{L_2(Q)}}\right)_{L_2(Q)}\right| \le C\|F\|_{W_{\text{ГР}^+}^{-l}},$$

звідки внаслідок теореми Банаха-Штейнгауза випливає (2.13).

Зауваження. *Аналогічно доводиться нерівність*

$$\|v\|_{L_2(Q)} \le C\|G\|_{W_{\text{ГР}}^{-}},$$

де $v(t,x)$ *– розв'язок рівняння* (*2.5*) *з правою частиною* $G \in W_{\text{ГР}}^{-}$ *в розумінні аналогів означень 2.4 та 2.5 для спряженого оператора*.

Теорема 2.5. *Нехай* $u(t,x)$ *– узагальнений розв'язок задачі* (*2.4*) *з правою частиною* F *в розумінні означень 2.4, 2.5 і* $u(t,x) \in W_{\text{ГР}}^{+l}$. *Тоді* $u(t,x)$ *– узагальнений розв'язок цієї ж задачі в розумінні означень 2.1-2.3*.

Доведення. Нехай $u(t,x) \in W_{\text{ГР}}^{+l}$ – розв'язок (2.4) за означенням 2.5, тобто

$$\left(u, L^* v\right)_{L_2(Q)} = \langle F, v\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}, \quad \forall v \in C_{\text{ГР}^+}^{+\infty}.$$

Тоді

$$\left\langle u, L^* v\right\rangle_{W_{\text{ГР}}} = \langle F, v\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}, \quad \forall v \in C_{\text{ГР}^+}^{+\infty}$$

отже, u – узагальнений розв'язок задачі (2.3) в розумінні означення 2.3.

Зауваження. *Аналогічне твердження має місце і для розв'язків задачі* (*2.5*).

3. Існування оптимального керування

Розглянемо наступну задачу оптимального керування. Нехай стан системи визначається з рівняння

$$Lu = f + A(h) \tag{3.1}$$

Функція стану $u(t,x)$ залежить через праву частину рівняння від керування h, визначеного на допустимій множині U_∂ простору керувань H. На розв'язках рівняння задано деякий функціонал $J(h)=\Phi(u(h))$, який необхідно мінімізувати на множині U_∂. Звичайно, необхідно вимагати, щоб функціонал Φ був коректно визначеним на розв'язках рівняння. Наприклад, якщо

$$\Phi(u(h)) = \int_Q u^2(t,x,h)dQ,$$

то розв'язок рівняння $u(t,x,h)$ повинен належати простору $L_2(Q)$. Якщо ж

$$\Phi(u(h)) = \int_Q u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dQ,$$

то $u(t,x,h) \in W_2^1(Q)$ (таку ситуацію позначатимемо $\Phi : L_2(Q) \to R^1$ та $\Phi : W_2^1(Q) \to R^1$, відповідно). Ясно, що гладкість розв'язку $u(t,x,h)$ залежить від гладкості правої частини (див. теореми §2). Тому чим ширший розглядається простір відображень $F(t,x,h) = f + A(h)$, тим вужчим стає клас допустимих функціоналів $\Phi(u(h))$, які ми маємо право вивчати.

Теорема 3.1. *Нехай стан системи визначається як розв'язок задачі* (*3.1*) *і виконуються наступні умови*:

1) критерій якості $\Phi : L_2(Q) \to R^1$ *є слабко напівнеперервним знизу за станом системи* $u(t,x,h)$ *функціоналом*;

2) множина допустимих керувань $U_\partial \subset H$ *– замкнена, опукла, обмежена в* ;

3) H *– гільбертів простір*;

4) A – слабко неперервний оператор, що діє з в $W^{-l}_{\Gamma P^+}$;

5) для операторів L і L^* мають місце оцінки (2.2).

Тоді існує оптимальне керування системою (3.1).

Доведення. Виберемо мінімізуючу послідовність керувань $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$, $h_k \in U_\partial$

$$J(h_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \inf_{h\in U_\partial} J(h). \tag{3.2}$$

Оскільки множина U_∂ замкнена, опукла та обмежена, то послідовності (3.2) можна виділити слабко збіжну в H до деякого $h^* \in U_\partial$ підпослідовність $\{h_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Беручи до уваги слабку неперервність оператора A, стверджуємо, що послідовність $\{A(h_{k_n})\}_{n=1}^{\infty}$ буде слабко збіжною, а отже, обмеженою в просторі $W^{-l}_{\Gamma P^+}$.

Застосовуючи лему 2.4 маємо, що послідовність $\{u_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, яка відповідає послідовності $\{h_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, є обмеженою за нормою простору $L_2(Q)$, а тому з неї можна виділити слабко збіжну підпослідовність $\left\{u_{k_{n_j}}\right\}_{j=1}^{\infty}$: $u_{k_{n_j}} \xrightarrow{w} u^*$ в $L_2(Q)$.

Зважаючи на те, що $u_{k_{n_j}} = u\left(h_{k_{n_j}}, t, x\right)$ – розв'язок рівняння (3.1) при $h = h_{k_{n_j}}$, та беручи до уваги співвідношення (2.6), маємо

$$\left(L^* v, u_{k_{n_j}}\right)_{L_2(Q)} = \left\langle F\left(h_{k_{n_j}}\right), v\right\rangle_{W_{\Gamma P^+}} \tag{3.3}$$

для довільної функції $v(t,x) \in C^{+\infty}_{\Gamma P^+}$, де $F(h) = f + A(h)$.

Оскільки $h_{k_{n_j}} \xrightarrow[j\to\infty]{} h^*$ слабко в H, а F – слабко неперервне відображення з H в $W^{-l}_{\Gamma P^+}$, то

$$\left\langle F\left(h_{k_{n_j}}\right), v\right\rangle_{W_{\Gamma P^+}} \xrightarrow[j\to\infty]{} \left\langle F\left(h^*\right), v\right\rangle_{W_{\Gamma P^+}}.$$

З іншого боку, ураховуючи, що $u_{k_{n_j}} \xrightarrow{w} u^*$, дістаємо

$$\left(L^*v, u_{k_{n_j}}\right)_{L_2(Q)} \xrightarrow[j\to\infty]{} \left(L^*v, u^*\right)_{L_2(Q)}.$$

Таким чином, переходячи в (3.3) до границі при $j \to \infty$, стверджуємо, що $u^*(t,x) = u(h^*)$ – розв'язок рівняння $Lu = F\left(h^*\right)$ в розумінні означення 2.5, а отже і в розумінні 2.4.

Оскільки за умовою теореми функціонал Φ є слабко напівнеперервним знизу за станом системи , то

$$J(h^*) = \Phi(u(h^*)) \le \varliminf_{j\to\infty} \Phi(u(h_{k_{n_j}}) = \varliminf_{j\to\infty} J(h_{k_{n_j}}) = \inf_{h\in U_\partial} J\left(h\right) \quad .$$

Отже h^* – оптимальне керування, і теорему 3.1 доведено.

Т е о р е м а 3.2. *Нехай стан системи визначається як розв'язок задачі* (*3.1*) *і виконуються такі умови*:

1) критерій якості $\Phi : W_{\text{ГР}}^{+l} \to R^1$ *є слабко напівнеперервним знизу за станом системи* $u\left(t,x,h\right)$ *функціоналом, обмеженим знизу*;

2) множина допустимих керувань $U_\partial \subset H$ *– замкнена*, *опукла і обмежена в* ;

3) H *– гільбертів простір*;

4) A *– слабко неперервний оператор*, *що діє з* H *в* $L_2(Q)$;

5) для операторів L *і* L^* *мають місце оцінки* (*2.2*).

Тоді існує оптимальне керування системою (*3.1*).

Д о в е д е н н я аналогічне доведенню попередньої теореми.

Зауваження. *Оскільки оператор* A *нелінійний*, *то функціонал* $J\left(h\right)$ *може виявитися неопуклим і оптимальне керування – неєдиним.*

Розглянемо застосування цих теорем для випадку оптимізації розподілених систем із зосередженим впливом.

Нехай вивчається система, що описується лінійним диференціальним рівнянням

$$Lu = f + A\left(h\right). \tag{3.4}$$

Вивчимо задачу імпульсного оптимального керування. Нехай права частина рівняння (3.4) задається наступним чином.

$$A_1\left(h_1\right)=\sum_{i=1}^{s}\delta(t-t_i)\otimes\varphi_i(x),\ h_1=\left\{(t_i,\varphi_i(x))\right\}_{i=1}^{s}; \tag{3.5}$$

де $t,t_i\in\left[0,T\right]$, $\varphi_i(x)\in L_2(\Omega)$, δ – дельта функція Дірака, тобто такий функціонал, що

$$\left\langle\delta(t),v\right\rangle=v(0)\ \ \forall v\in C^{\infty}\left(R\right).$$

Керуванням є вектор $h_1=\left\{(t_i,\varphi_i(x))\right\}_{i=1}^{s}\in U_\partial\subset H_1=R^s\times\left(L_2(\Omega)\right)^s$, де U_∂ – опукла, замкнена та обмежена множина в H_1.

Під $A_1(h_1)=\sum_{i=1}^{s}\delta(t-t_i)\otimes\varphi_i(x)$ будемо розуміти функціонал, що діє на гладких в $\bar{Q}$ функціях в такий спосіб:

$$l_{A_1(h_1)}\left(v\right)=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{s}v\left(t_i,x\right)\varphi_i\left(x\right)d\Omega.$$

Припустимо, що

$$W_{\text{ГР}^+}^{+l}\subset W_2^{1,0}\left(Q\right)\ (W_{\text{ГР}}^{+l}\subset W_2^{1,0}\left(Q\right))$$

і

$$\left\|\cdot\right\|_{W_2^{1,0}(Q)}\leq C\left\|\cdot\right\|_{W_{\text{ГР}^+}^{+l}}\ \ (\left\|\cdot\right\|_{W_2^{1,0}(Q)}\leq C\left\|\cdot\right\|_{W_{\text{ГР}}^{+l}}), \tag{3.6}$$

де $W_2^{1,0}\left(Q\right)$ – поповнення простору гладких в $\bar{Q}$ функцій за нормою

$$\left\|v\right\|_{W_2^{1,0}(Q)}=\left(\int_{Q}v^2+v_t^2dQ\right)^{\frac{1}{2}},$$

а також нехай $f\in W_{\text{ГР}^+}^{-l}$.

Доведемо, що в цьому випадку $F\left(h_1\right)=f+A_1\left(h_1\right)\in W_{\text{ГР}^+}^{-l}$, тобто доведемо, що функціонал $F(h_1)=l_{f+A_1\left(h_1\right)}$ можна розширити до лінійного неперервного функціонала над $W_{\text{ГР}^+}^{+l}$. Дійсно, лінійність

$$l_{f+A_1\left(h_1\right)}\left(v\right)=\left\langle f,v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}+\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{s}v\left(t_i,x\right)\varphi_i\left(x\right)d\Omega$$

є очевидною.

Доведемо обмеженість цього функціонала. Ясно, що

$$\left\langle l_{f+A_1(h_1)}(v)\right\rangle = \left|\langle f,v\rangle_{W_{\text{ГР}^+}} + \int_\Omega \sum_{i=1}^{s} v(t_i,x)\varphi_i(x)\,d\Omega\right| \le$$
$$\le \|f\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} \cdot \|v\|_{W^{+l}_{\text{ГР}^+}} + \left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{s} v(t_i,x)\varphi_i(x)\,d\Omega\right|. \qquad (3.7)$$

Розглянемо другий доданок справа. Зважаючи на нерівність Коші-Буняковського, дістаємо

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{s} v(t_i,x)\varphi_i(x)\,d\Omega\right| \le \sum_{i=1}^{s}\left|\int_\Omega v(t_i,x)\varphi_i(x)\,d\Omega\right| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{s}\left(\int_\Omega v^2(t_i,x)\,d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\varphi_i\|_{L_2(\Omega)}.$$

Оскільки множина U_∂ – обмежена в просторі H_1, то

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{s} v(t_i,x)\varphi_i(x)\,d\Omega\right| \le C\sum_{i=1}^{s}\left(\int_\Omega v^2(t_i,x)\,d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.8)$$

Неважко довести, що має місце нерівність

$$\left(\int_\Omega v^2(t_i,x)\,d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \le C\left(\int_Q v^2(t,x) + v_t^2(t,x)\,dQ\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Зважаючи на останню нерівність та (3.6), перепишемо (3.8) у вигляді

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{s} v(t_i,x)\varphi_i(x)\,d\Omega\right| \le$$
$$\le C\left(\int_Q v^2(t,x) + v_t^2(t,x)\,dQ\right)^{1/2} = C\|v\|_{W_2^{1,0}(Q)} \le C\|v\|_{W^{+l}_{\text{ГР}^+}(Q)}.$$

Повертаючись до співвідношень (3.7), остаточно дістаємо

$$\left|l_{f+A_1(h_1)}(v)\right| \le \|f\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} \|v\|_{W^{+l}_{\text{ГР}^+}} + \left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{s} v(t_i,x)\varphi_i(x)\,d\Omega\right| \le$$
$$\le \|f\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} \|v\|_{W^{+l}_{\text{ГР}^+}} + C\|v\|_{W^{+l}_{\text{ГР}^+}} \le \left(\|f\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} + C\right)\|v\|_{W^{+l}_{\text{ГР}^+}},$$

що і доводить обмеженість функціонала $l_{f+A_1(h_1)}(v)$ на множині гладких в $\bar{Q}$ функцій $v(t,x)$. Використовуючи теорему Хана-Банаха, розширюємо за неперервністю функціонал $l_{f+A_1(h_1)}$ до лінійного неперервного на всьому просторі $W^{+l}_{\text{ГР}^+}$.

Таким чином, доведено, що $F(h_1) = f + A_1(h_1) \in W^{-l}_{\text{ГР}^+}$, а тому, за теоремою 2.3 існує єдиний узагальнений розв'язок задачі $Lu = f + A_1(h_1)$ у розумінні означень 2.4, 2.5.

Доведемо, що відображення A_1 – слабко неперервне. Нехай $h^{(m)}$ – деяка слабко збіжна в H_1 послідовність $h^{(m)} \xrightarrow{w} h^*$. Оскільки в скінченновимірному евклідовому просторі слабка та сильна збіжності є еквівалентними, то $t_i^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} t_i^*$ сильно в R^1 при довільному $i = \overline{1,s}$. Покладемо $A_1^{(m)} = \sum_{i=1}^{s} \delta(t - t_i^{(m)}) \otimes \varphi_i^{(m)}(x)$. Доведемо, що при довільному

$$\left\| \delta(t - t_i^{(m)}) \otimes \varphi_i^{(m)}(x) - \delta(t - t_i^*) \otimes \varphi_i^{(m)}(x) \right\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \quad .$$

Дійсно,

$$\left\| \delta(t - t_i^{(m)}) \otimes \varphi_i^{(m)}(x) - \delta(t - t_i^*) \otimes \varphi_i^{(m)}(x) \right\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} =$$

$$= \sup_{\substack{v \in W^{+l}_{\text{ГР}^+}, \\ v \neq 0}} \frac{\left| \left\langle \delta(t - t_i^{(m)}) \otimes \varphi_i^{(m)}(x) - \delta(t - t_i^*) \otimes \varphi_i^{(m)}(x), v \right\rangle_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} \right|}{\|v\|_{W^{+l}_{\text{ГР}^+}}}.$$

Оскільки множина гладких в $\bar{Q}$ функцій $v(t,x)$ (тобто простір $C^{\infty}_{\text{ГР}^+}$) щільна в $W^{+l}_{\text{ГР}^+}$, то супремум можна брати лише по цих функціях. Тому останнє перепишемо у вигляді

$$\left\| \delta\left(t - t_i^{(m)}\right) \otimes \varphi_i^{(m)}(x) - \delta\left(t - t_i^*\right) \otimes \varphi_i^{(m)}(x) \right\|_{W^{-l}_{\text{ГР}^+}} =$$

$$= \sup_{v \in C^{\infty}_{\text{ГР}^+}, v \neq 0} \frac{\left| \int_{\Omega} \left(v(t_i^{(m)}, x) - v(t_i^*, x) \right) \varphi_i^{(m)}(x) d\Omega \right|}{\|v\|_{W^{+l}_{\text{ГР}^+}}}. \tag{3.9}$$

Оцінимо чисельник (3.9)

$$v\left(t_i^{(m)},x\right)-v\left(t_i^*,x\right)=\int\limits_{t_i^*}^{t_i^{(m)}} v_t(\eta,x)d\eta .$$

Застосовуючи до правої частини формулу Ньютона-Лейбніца, нерівність Коші-Буняковського, маємо

$$\left|v(t_i^{(m)},x)-v(t_i^*,x)\right|=\left|\int\limits_{t_i^*}^{t_i^{(m)}} 1\cdot v_t(\eta,x)d\eta\right|\le$$

$$\le\left|\int\limits_{t_i^*}^{t_i^{(m)}} d\eta\right|^{1/2}\cdot\left|\int\limits_{t_i^*}^{t_i^{(m)}} v_t^2(\eta,x)d\eta\right|^{1/2}\le\le\left|\int\limits_{t_i^*}^{t_i^{(m)}} d\eta\right|^{1/2}\cdot\left|\int\limits_{t_i^*}^{t_i^{(m)}} v_t^2(\eta,x)d\eta\right|^{1/2}\le \qquad (3.10)$$

$$\le\left|t_i^{(m)}-t_i^*\right|^{1/2}\cdot\left(\int\limits_0^T v_t^2(\eta,x)d\eta\right)^{1/2}.$$

З урахуванням (3.10) у чисельнику (3.9), ще раз застосуємо нерівність Коші-Буняковського

$$\left|\int\limits_\Omega\left(v(t_i^{(m)},x)-v(t_i^*,x)\right)\varphi_i^{(m)}(x)d\Omega\right|\le$$

$$\le\left(\int\limits_\Omega\left(v(t_i^{(m)},x)-v(t_i^*,x)\right)^2 d\Omega\right)^{1/2}\cdot\left(\int\limits_\Omega\left(\varphi_i^{(m)}(x)\right)^2 d\Omega\right)^{1/2}\le$$

$$\le\left(\int\limits_\Omega\left(t_i^{(m)}-t_i^*\left(\cdot\left(\int\limits_0^T v_t^2(\eta,x)d\eta\right)d\Omega\right)^{1/2}\cdot\left\|\varphi_i^{(m)}(x)\right\|_{L_2(\Omega)}\le \qquad (3.11)$$

$$\le\left|t_i^{(m)}-t_i^*\right|^{1/2}\cdot\left\|v_t\right\|_{L_2(Q)}\cdot\left\|\varphi_i^{(m)}(x)\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Зважаючи на нерівності $\left\|v_t\right\|_{L_2(Q)}\le\left\|v\right\|_{W_2^{1,0}(Q)}\le C\left\|v\right\|_{W_{\text{ГР}^+}^{+l}}$ і співвідношення (3.9) і (3.11), дістаємо

$$\left\|\delta(t-t_i^{(m)})\otimes\varphi_i^{(m)}(x)-\delta(t-t_i^*)\otimes\varphi_i^{(m)}(x)\right\|_{W_{\text{ГР}^+}^{-l}}\le$$

$$\le\left|t_i^{(m)}-t_i^*\right|^{1/2}\cdot\left\|\varphi_i^{(m)}\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Оскільки $\left\{\varphi_i^{(m)}\right\}$ слабко збігається до φ_i^* в $L_2(\Omega)$, то послідовність норм $\left\|\varphi_i^m\right\|_{L_2(\Omega)}$ обмежена і тому

$$\left\|\delta(t-t_i^{(m)})\otimes\varphi_i^{(m)}(x)-\delta(t-t_i^*)\otimes\varphi_i^{(m)}(x)\right\|_{W_{\text{ГР}^+}^{-l}}\le$$

$$\le C\left|t_i^{(m)}-t_i^*\right|^{1/2}\xrightarrow[m\to\infty]{}0.$$

Звідси випливає, що

$$\left\|A_1^{(m)}-\sum_{i=1}^{s}\delta(t-t_i^*)\otimes\varphi_i^{(m)}(x)\right\|_{W_{\text{ГР}^+}^{-l}}\xrightarrow[m\to\infty]{}0.$$

Доведемо тепер, що для довільної гладкої в $\bar{Q}$ функції $v(t,x)$ з :

$$\left\langle\sum_{i=1}^{s}\delta(t-t_i^*)\otimes\varphi_i^{(m)}(x),v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}\xrightarrow[m\to\infty]{}\left\langle A_1(t,x,h^*),v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}.$$

Дійсно,

$$\left\langle\sum_{i=1}^{s}\delta(t-t_i^*)\otimes\varphi_i^{(m)}(x),v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}=\sum_{i=1}^{s}\int_{\Omega}v(t_i^*,x)\varphi_i^{(m)}(x)d\Omega=$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\left(v(t_i^*,\cdot),\varphi_i^{(m)}(\cdot)\right)_{L_2(\Omega)}\xrightarrow[m\to\infty]{}\sum_{i=1}^{s}\left(v(t_i^*,\cdot),\varphi_i^*(\cdot)\right)_{L_2(\Omega)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\int_{\Omega}v(t_i^*,x)\varphi_i^*(x)d\Omega=\left\langle A_1(t,x,h^*),v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}.$$

Граничний перехід в останній рівності має місце, оскільки $\varphi_i^m(x)\xrightarrow[m\to\infty]{}\varphi_i^*(x)$ слабко в $L_2(\Omega)$. Оскільки послідовність норм $\left\|\sum_{i=1}^{s}\delta(t-t_i^*)\otimes\varphi_i^{(m)}(x)\right\|_{W_{\text{ГР}^+}^{-l}}$ є обмеженою (доведення аналогічне доведенню обмеженості $l_{f+A_1(h_1)}(v)$), то неважко довести, що

$$\left\langle\sum_{i=1}^{s}\delta(t-t_i^*)\otimes\varphi_i^{(m)}(x),v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}\xrightarrow[m\to\infty]{}\left\langle A_1(t,x,h^*),v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}.$$

вже для довільної функції $v\in W_{\text{ГР}^+}^{+l}$, а не тільки гладкої v.

Беручи до уваги все вищесказане, маємо

$$\left\langle A_1^{(m)}, v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}} = \left\langle A_1^{(m)} - \sum_{i=1}^{s} \delta(t-t_i^*) \otimes \varphi_i^{(m)}(x), v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}} +$$

$$+\left\langle \sum_{i=1}^{s} \delta(t-t_i^*) \otimes \varphi_i^{(m)}(x), v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}},$$

де $v \in W_{\text{ГР}^+}^{+l}$.

Спрямуємо $m \to \infty$. Перший доданок прямує до нуля, оскільки за нерівністю Шварца

$$\left|\left\langle A_1^{(m)} - \sum_{i=1}^{s} \delta(t-t_i^*) \otimes \varphi_i^{(m)}(x), v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}\right| \le$$

$$\le \left\| A_1^{(m)} - \sum_{i=1}^{s} \delta(t-t_i^*) \otimes \varphi_i^{(m)}(x)\right\|_{W_{\text{ГР}^+}^{-l}} \cdot \|v\|_{W_{\text{ГР}^+}^{+l}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Другий доданок прямує до $\left\langle A_1(t,x,h^*), v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}}$. Таким чином, маємо, що для довільної функції

$$\left\langle A_1^{(m)}, v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}} \xrightarrow[m\to\infty]{} \left\langle A_1^*, v\right\rangle_{W_{\text{ГР}^+}},$$

тобто відображення A_1 – слабко неперервне.

Таким чином, має місце

Теорема 3.3. *Нехай стан системи визначається як розв'язок задачі* (*3.1*) *та справджуються такі умови*:

1) критерій якості $\Phi : L_2(Q) \to R^1$ *є слабко напівнеперервним знизу за станом системи* $u(t,x,h)$ *функціоналом, обмеженим знизу*;

2) множина допустимих керувань $U_\partial \subset [0,T]^s \times (L_2(\Omega))^s \subset H_1$ *є обмеженою, замкненою та опуклою в гільбертовому просторі* ;

3) $H_1 = R^s \times \left(L_2(\Omega)\right)^s$;

4) $A_1(h_1) = \sum_{i=1}^{s} \delta(t-t_i) \otimes \varphi_i(x)$, $h_1 = \{(t_i, \varphi_i(x))\}_{i=1}^{s}$;

5) Мають місце оцінки (2.2) і (3.6).

Тоді існує оптимальне керування системою (3.1).

Аналогічно вивчаються задачі оптимального керування з наступними правими частинами

- Імпульсне керування:

$$A_2\left(h_2\right)=\sum_{i=1}^{s}\delta^{(k)}(t-t_i)\otimes\varphi_i(x),\ h_2=\left\{(t_i,\varphi_i(x))\right\}_{i=1}^{s};$$

- Точкове керування:

$$A_3\left(h_3\right)=\sum_{i=1}^{s}\delta(x_1-x_{1,i})\otimes\varphi_i(t,x_2,...,x_n),\ h_3=\left\{(x_{1,i},\varphi_i(t,x_2,\ldots,x_n))\right\}_{i=1}^{s};$$

- Імпульсно-точкове керування:

$$A_4\left(h_4\right)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{p}\delta(t-t_i)\otimes\delta(x_1-x_{1,j})\otimes\varphi_{ij}(x_2,...,x_n),h_4=\left\{(t_i,x_{1,j},\varphi_{ij}(x_2,...,x_n))\right\}_{i,j=1}^{s,p}$$

- Рухоме керування:

$$A_5\left(h_5\right)=\sum_{i=1}^{s}\delta(x_1-a_i(t))\otimes\varphi_i(t,x_2,...,x_n),\ h_5=\left\{(a_i(t),\varphi_i(t,x_2,\ldots,x_n))\right\}_{i=1}^{s}.$$

4. Дослідження моделей, що описуються псевдопараболічними рівняннями

Багато прикладних задач науки і техники приводять до необхідності розв'язувати задачі оптимального керування системами, функціонування яких описується рівняннями псевдопараболічного типу:

$$Lu \equiv A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + B(u) = F,\ u\Big|_{t=0} = 0, \tag{4.1}$$

де $A(\cdot), B(\cdot)$ – еліптичні диференціальні оператори другого порядку.

Будемо вивчати рівняння (1) у циліндричній області , Ω – регулярна область у R^n з кусочно-гладкою межею $\partial\Omega$. Нехай

$$A(u) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(x)u\ ; \tag{4.2а}$$

$$B(u) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(B_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + b(x)u\ , \tag{4.2б}$$

де $B_{ij}(x) = B_{ji}(x)$; $\left\{A_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$, $\left\{B_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ – неперервно диференційовані, а $a(x), b(x)$ – неперервні в замкнутій області $\bar{\Omega}$ функції. Диференціальний вираз в (4.2а) і 4.(2б) будемо вважати рівномірно еліптичними в Ω, а в (4.2б) невід'ємність тобто

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\xi_i\xi_j \ge \alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2;\ \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}\xi_i\xi_j \ge 0, \tag{4.3}$$

де α – позитивна константа, $\xi_i \in R^1; i = \overline{1,n}.$ Нехай, також, $a(x) \ge 0, b(x) \ge 0$.

Уведемо наступні позначення: $W_{\text{ГР}}^{+}(Q)$ – поповнення гладких у $\bar{Q}$ функцій, що задовольняють умовам

$$u\Big|_{t=0} = 0;\ \ u\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0\ , \tag{4.4}$$

за нормою

$$\|u\|_{W^+_{\text{ГР}}} = \left(\int\limits_Q u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} u_{x_i t} u_{x_j t} dQ \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.5}$$

де індекси внизу при $u(t,x)$ означають диференціювання по відповідним змінним. $W^+_{\text{ГР}^+}(Q)$ – поповнення гладких у $\bar{Q}$ функцій, що задовольняють умовам спряженої задачі

$$v\big|_{t=T} = 0;\ v\big|_{x\in\partial\Omega} = 0 \tag{4.6}$$

за нормою (4.5); $W^-_{\text{ГР}^+}$ – негативні простори, побудовані по $L_2(Q)$ і відповідними позитивними просторами $W^+_{\text{ГР}^+}$; $H^+_{\text{ГР}}$, $H^+_{\text{ГР}^+}$ – поповнення простору гладких у $\bar{Q}$ функцій, що задовольняють умовам (4.4), (4.6) відповідно по нормі

$$\|u\|^2_{H^+} = \int\limits_Q (u^2 + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} u_{x_i} u_{x_j}) dQ;$$

$H^-_{\text{ГР}}$, $H^-_{\text{ГР}^+}$ – відповідні негативні простори.

Доведемо, що для оператора рівняння (4.1) виконуються нерівності в негативних нормах.

Лема 4.1. *Для функцій $u(t,x) \in W^+_{\text{ГР}}$ справедливе співвідношення*

$$\|Lu\|_{W^-_{\text{ГР}^+}} \le C \|u\|_{W^+_{\text{ГР}}},$$

де C – тут і далі позначає додатну константу.

Доведення. Доведемо лему для гладких функцій $u(t,x)$, що задовольняють умовам (4.4). Потім, розширюючи по непепервності оператор $L(\cdot)$ і застосовуючи граничний перехід, одержуємо справедливість приведеного твердження, для усіх $u \in W^+_{\text{ГР}}$.

По визначенню негативної норми

$$\|Lu\|_{W^-_{\text{ГР}^+}} = \sup_{v\neq 0, v\in W^+_{\text{ГР}^+}} \frac{|(v, Lu)|}{\|v\|_{W^+_{\text{ГР}^+}}}, \tag{4.7}$$

тому що для гладких функцій $u(t,x)$, що задовольняють умовам (4.4), білінійна форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ збігається зі скалярним добутком у $L_2(Q)$. Досліджуємо чисельник у правій частині (4.7). Використовуючи операцію інтегрування частинами і інтегральна нерівність Коши-Буняковського, а також з огляду на умови (4.6), одержуємо

$$\left|\int_Q va(x)u_t dQ\right| \le \left(\int_Q a(x)v^2 dQ\right)^{1/2}\left(\int_Q a(x)u_t^2 dQ\right)^{1/2} \le C\|v\|_{W^+_{\text{ГР}^+}}\|u\|_{W^+_{\text{ГР}}} .$$

Тут врахована нерівність

$$\left(\int_Q v^2 dQ\right)^{1/2} \le C\|v\|_{W^+_{\text{ГР}^+}} .$$

Аналогічно маємо

$$\left|\int_Q vb(x)u dQ\right| \le \left(\int_Q b(x)v^2 dQ\right)^{1/2} .$$

Далі застосуємо формулу інтегрування частинами

$$\left|-\int_Q v\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial t}dQ\right| =$$

$$= \left|-\sum_{i,j=1}^n \int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}\left(vA_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial t}\right)dQ + \int_Q\sum_{i,j=1}^n v_{x_i}A_{ij}u_{x_j t}dQ\right|.$$

Застосовуючи формулу Остроградського-Гаусса, а також з огляду на умови (4.6), яким задовольняє функція ($v\big|_{x\in\partial\Omega}=0$), дійдемо висновку, що

$$\sum_{i,j=1}^n \int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}\left(vA_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial t}\right)dQ = 0 .$$

Знову застосовуючи нерівність Коши-Буняковського одержуємо, що

$$\left|-\int_Q v\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial t}dQ\right| = \left|\int_Q\sum_{i,j=1}^n v_{x_i}A_{ij}u_{x_j t}dQ\right| \le C\|u\|_{W^+_{\text{ГР}}}\|v\|_{W^+_{\text{ГР}^+}}$$

Аналогично

$$\left|\int_Q v\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}B_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}dQ\right| \le \|v\|_{W^+_{\text{ГР}^+}}\|u\|_{W^+_{\text{ГР}}} .$$

Підставляючи отримані співвідношення в (4.7), одержуємо справедливість твердження леми.

Аналогічний результат має місце для спряженого оператора $L^*(\cdot)$.

Лема 4.2. *Для функцій* $v(t,x)\in W^+_{\text{ГР}^+}$ *справедливе співвідношення*

$$\left\|L^* v\right\|_{W^-_{\text{ГР}}} \le C\left\|v\right\|_{W^+_{\text{ГР}^+}} ,$$

де оператор $L^*(\cdot)$ *має вид*

$$L^*(\cdot) = -A\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + B(\cdot) .$$

З приведених лем випливає, что оператор $L(\cdot)$ (відповідно $L^*(\cdot)$) можна розширити до неперервно діючого з усього простору $W^+_{\text{ГР}}(W^+_{\text{ГР}^+})$ у простір $W^-_{\text{ГР}^+}$ $(W^-_{\text{ГР}})$.

Лема 4.3. *Для усіх функцій* $u(t,x)\in W^+_{\text{ГР}}$ *має місце нерівність*

$$\left\|Lu\right\|_{W^-_{\text{ГР}^+}} \ge C\left\|u\right\|_{H^+_{\text{ГР}}} .$$

Доведення. Доведемо лему для гладких функцій, що задовольняють умовам (4.4).

Уведемо допоміжну функцію $v(x,t)$ в такий спосіб:

$$v(t,x) = -\int_T^t (\tau+1)^{-1} u(\tau,x)\,d\tau,$$

Очевидно, что $v\in W^+_{\text{ГР}^+}$. Доведемо наступне співвідношення

$$(v, Lu) \ge C\left\|v\right\|^2_{W^+_{\text{ГР}^+}} . \tag{4.8}$$

Використовуючи операцію диференціювання частинами, зв'язок між $u(t,x)$ і $v(t,x)$, і приналежність їх відповідним просторам, одержуємо

$$\int_Q va(x)u_t dQ = \int_Q \left(va(x)u\right)_t dQ + \int_Q (t+1)a(x)v_t^2 dQ \ge$$
$$\ge C\int_Q a(x)v_t^2 dQ \ge 0;$$

$$\int_Q vb(x)u dQ = -\int_Q vb(x)(t+1)v_t dQ = -\frac{1}{2}\int_Q \left(b(x)(t+1)v^2\right)_t dQ +$$

$$+\frac{1}{2}\int_Q b(x)v^2 dQ = \frac{1}{2}\int_\Omega b(x)v^2\Big|_{t=0} d\Omega + \frac{1}{2}\int_Q b(x)v^2 dQ \ge 0;$$

Далі аналогічно маємо

$$-\int_Q v\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} B_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} dQ = -\int_Q (t+1)\sum_{i,j=1}^n v_{x_i} B_{ij} v_{x_j t} dQ. \qquad (4.9)$$

Застосовуючи формулу інтегрування частинами, одержуємо

$$-\int_Q (t+1)\sum_{i,j=1}^n B_{ij} v_{x_i} v_{x_j t} dQ =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_Q \left((t+1)\sum_{i,j=1}^n B_{ij} v_{x_i} v_{x_j}\right)_t dQ + \frac{1}{2}\int_Q \sum_{i,j=1}^n B_{ij} v_{x_i} v_{x_j} dQ.$$

У силу симетричності і невиродженості матриці $\left\{B_{ij}\right\}_{i,j=1}^n$, а також з урахуванням формули Остроградського-Гаусса, справедливе співвідношення

$$-\int_Q (t+1)\sum_{i,j=1}^n B_{ij} v_{x_i} v_{x_j t} dQ =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_Q \left((t+1)\sum_{i,j=1}^n B_{ij} v_{x_i} v_{x_j}\right)_t dQ + \frac{1}{2}\int_Q \sum_{i,j=1}^n B_{ij} v_{x_i} v_{x_j} dQ \ge 0, \qquad (4.10)$$

Підставляючи (4.10) у (4.9) із приведених співвідношень, одержуємо справедливість наступного нерівності

$$C\left(\int_Q \sum_{i,j=1}^n A_{ij} v_{x_i t} v_{x_j t} dQ\right) \le (Lu, v)_{L_2},$$

звідки, з огляду на достаточно є очевидною нерівність

$$C\left(\int_Q v_t^2 + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} v_{x_i t} v_{x_j t} dQ\right) \le \left(\int_Q \sum_{i,j=1}^n A_{ij} v_{x_i t} v_{x_j t} dQ\right),$$

доходимо висновку, что співвідношення (4.8) має місце. Застосуємо до лівої частини (4.8) нерівність Шварца

$$C\|v\|^2_{W^+_{\text{гр}^+}} \le (v, Lu) \le \|v\|_{W^+_{\text{гр}^+}} \|Lu\|_{W^-_{\text{гр}^+}}.$$

Скоротимо на $\|v\|_{W^+_{\text{ГР}^+}}$ і врахуємо співвідношення між $u(t,x)$ і $v(t,x)$. Звідси випливає справедливість леми для гладких функцій, що задовольняють умовам (4.4). Граничним переходом одержимо справедливість леми для усіх $u \in W^+_{\text{ГР}}$.

Лема 4.4. *Для усіх функцій* $v(t,x) \in W^+_{\text{ГР}^+}$ *справедлива нерівність*

$$\|L^* v\|_{W^-_{\text{ГР}}} \geq C\|v\|_{H^+_{\text{ГР}^+}} .$$

Доведення. Нехай спочатку $v(t,x)$ гладка функція, що задовольняє умовам (4.6). Доведемо співвідношення

$$(u, L^* v) \geq C\|u\|^2_{W^+_{\text{ГР}^+}} , \tag{4.11}$$

де

$$u(t,x) = \int_0^t (2T-\tau)^{-1} v(\tau, x) d\tau .$$

Використовуючи операцію диференціювання частинами і визначення функції $u(t,x)$, одержуємо

$$-\int_Q ub(x) v_t dQ = -\int_Q (ub(x)v)_t dQ + \int_Q (2T-t) b(x) u_t^2 dQ =$$
$$= \int_Q (2T-t) b(x) u_t^2 dQ \geq 0,$$

тому що для функцій і $v(x,t)v(x,t)$ виконуються нульові умови на відповідних кінцях часового інтервалу:

$$\int_Q ub(x) v dQ = \int_Q ub(x)(2T-t)u_t dQ = \frac{1}{2}\int_Q \left(b(x)(2T-t)u^2\right)_t dQ +$$
$$+\frac{1}{2}\int_Q b(x)u^2 dQ = \frac{1}{2}\int_\Omega b(x) T u^2\Big|_{t=0} d\Omega + \frac{1}{2}\int_Q b(x) u^2 dQ \geq 0.$$

Далі одержуємо

$$\begin{aligned} &\int_Q u \sum_{i,j=1}^n \frac{d}{dx_i} A_{ij} \frac{d}{dx_j}\frac{dv}{dt} dQ \geq \int_Q (2T-t)\sum_{i,j=1}^n A_{ij} u_{x_i t} u_{x_j t} dQ, \\ &-\int_Q u \sum_{i,j=1}^n \frac{d}{dx_i} B_{ij} \frac{dv}{dx_j} dQ = \int_Q (2T-t) \sum_{i,j=1}^n u_{x_i} B_{ij} u_{x_i t} dQ. \end{aligned} \tag{4.12}$$

У силу симетричності і невід'ємності матриці $\left\{B_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ має місце нерівність

$$\int_{Q}(2T-t)\sum_{i,j=1}^{n}u_{x_i}B_{ij}u_{x_j t}dQ\geq 0\ . \tag{4.13}$$

Підставляючи (4.13) у (4.12) і з огляду на нерівність

$$C\left(\int_{Q}u_t^2+\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}u_{x_i t}u_{x_j t}dQ\right)\leq\left(\int_{Q}\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}u_{x_i t}u_{x_j t}dQ\right),$$

одержуємо справедливість (4.11). Далі, аналогично доведенню леми 4.3, застосовуючи нерівність Шварца і граничний перехід, имеем справедливість леми 4.4 для усіх $v\in W^{+}_{\Gamma P^{+}}$.

На підставі доведених лем і результатів глави 1 укладаємося, що виконуються твердження наступних теорем

Теорема 4.1. *Для будь-якої функції $F\in H^{-}_{\Gamma P^{+}}$ існує єдиний сильний розв'язок рівняння (4.1), (4.4).*

Теорема 4.2. *Якщо в умовах теореми 1 функціонал F належить простору $W^{-}_{\Gamma P^{+}}(Q)$, то існує єдиний слабкий розв'язок задачі (4.1), (4.4).*

При вивченні другої початково-крайової задачі будемо вважати, що стан системи описується трохи спрощеним стосовно (4.1) рівнянням. Це дозволяє розглядати задачу зі звичайними крайовими умовами Неймана (при вивченні некласичних рівнянь математичної фізики, яким є і псевдопараболічне рівняння, це не завжди вдається зробити, див., наприклад, другу початково-крайову задачу для псевдогиперболічного оператора).

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних:

$$Lu\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}+ku\right)=F\ , \tag{4.14}$$

у циліндричній області $Q=\{[0<t<T]\times\Omega\}$, де $u(t,x)$ – шукана функція, що залежить від просторової $x\in\Omega$ і часових $t\in[0,T]$ змінних, Ω – обмежена область у R^n з гладкою границею , $\Delta(\cdot)$ – оператор Лапласа, k – невід'ємна константа.

Будемо шукати функцію $u(t,x)$, що задовольняє рівнянню (4.14) а також умовам

$$u\big|_{t=0}=0\ ,\qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_{x\in\partial\Omega}=0, \tag{4.15}$$

де $\vec{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$.

Уведемо наступні позначення: $W^{+}_{\text{ГР}}$ – поповнення простору гладких у $\bar{Q}$ функцій, що задовольняють умовам (4.15) за нормою

$$\|u\|_{W^{+}_{\text{ГР}}}=\left(\int\limits_{Q}u_t^2+\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}u_{tx_i}u_{tx_j}\right),$$

$W^{+}_{\text{ГР}^{+}}$ – аналогічний простір, але функції задовольняють умовам

$$v\big|_{t=T}=0\ ,\qquad \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\bigg|_{x\in\partial\Omega}=0, \tag{4.16}$$

$W^{-}_{\text{ГР}}$, $W^{-}_{\text{ГР}^{+}}$ – негативні простори, побудовані по парам $W^{+}_{\text{ГР}}$, $L_2(Q)$ і $W^{+}_{\text{ГР}^{+}}$, $L_2(Q)$.

Лема 4.3. *Для довільних функцій $u(t,x)\in W^{+}_{\text{ГР}}$ має місце нерівність*

$$\|Lu\|_{W^{-}_{\text{ГР}^{+}}}\le c\|u\|_{W^{+}_{\text{ГР}}},c=const>0.$$

Доведення. Спочатку доведемо лему для гладких функцій $u(t,x)$, що задовольняють умовам (4.17), а потом розширюючи по неперервності оператор $L(\cdot)$ і використовуючи граничний перехід, одержуємо справедливість твердження леми.

За визначенням норми в просторі :

$$\|Lu\|_{W^{-}_{\text{ГР}^{+}}}=\sup_{v\ne0,v\in W^{+}_{\text{ГР}^{+}}}\frac{\left|\langle Lu,v\rangle_{W_{\text{ГР}^{+}}}\right|}{\|v\|_{W^{+}_{\text{ГР}^{+}}}}.$$

Оскільки білинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W_{\text{ГР}^{+}}}$, визначена на просторах $W^{+}_{\text{ГР}^{+}}$ і $W^{-}_{\text{ГР}}$, на гладких функціях, що задовольняють умовам (4.15), збігається зі скалярним добутком у просторі $L_2(Q)$, то

$$\|Lu\|_{W^{-}_{\text{ГР}^{+}}}=\sup_{v\ne0,v\in W^{+}_{\text{ГР}^{+}}}\frac{\left|(Lu,v)_{L_2(Q)}\right|}{\|v\|_{W^{+}_{\text{ГР}^{+}}}}. \tag{4.17}$$

Розглянемо

$$\left|\left(Lu,v\right)_{L_2(Q)}\right|=\left|\int_Q\left[vu_t+v\Delta u_t+vk\Delta u\right]dQ\right|.$$

Використовуємо інтегральну нерівність Коши-Буняковського:

$$\left|\int_Q vu_t dQ\right|\le\left(\int_Q u_t^{\,2}dQ\right)^{1/2}\left(\int_Q v^2 dQ\right)^{1/2}\le$$

$$\le\|u\|_{W^+_{\text{ГР}}}\|v\|_{L_2(Q)}\le c\|u\|_{W^+_{\text{ГР}}}\|v\|_{W^+_{\text{ГР}^+}}.$$

Покажемо, що

$$\left|\int_Q v\Delta u_t dQ\right|\le c\|v\|_{W^+_{\text{ГР}^+}}\|u\|_{W^+_{\text{ГР}}},$$

$$\left|\int_Q vk\Delta u dQ\right|\le c\|v\|_{W^+_{\text{ГР}^+}}\|u\|_{W^+_{\text{ГР}}}.$$

Спочатку розглянемо $\left|\int_Q v\Delta u_t dQ\right|$.

Інтегруючи частинами і використовуючи умови (4.15), одержуємо

$$-\int_Q v\Delta u_t dQ=-\sum_{i=1}^{n}\int_Q\left(vu_{tx_i}\right)_{x_i}dQ+\sum_{i=1}^{n}\int_Q v_{x_i}u_{tx_i}dQ\ . \qquad (4.18)$$

Використовуючи формулу Остроградського-Гаусса в першому праворуч інтегралі, переходимо до інтеграла по поверхні:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_Q\left(vu_{tx_i}\right)_{x_i}dQ=\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial Q}vu_{tx_i}\vec{n}_{x_i}d\left(\partial Q\right)=$$

$$=\int_{\partial Q}v\left(\sum_{i=1}^{n}u_{x_it}\vec{n}_{x_i}\right)d\left(\partial Q\right)=\int_{\partial\Omega\times[0,T]}v\left(\sum_{i=1}^{n}u_{x_it}\vec{n}_{x_i}\right)d\left(\partial\Omega\times[0,T]\right)=$$

$$=\int_{\partial\Omega\times[0,T]}v\left(\sum_{i=1}^{n}u_{x_it}\vec{n}_{x_i}\right)d\left(\partial\Omega\times[0,T]\right)=$$

$$=\int_{\partial\Omega\times[0,T]}v\frac{\partial u_t}{\partial\vec{n}}d\left(\partial\Omega\times[0,T]\right)=0,$$

оскільки в силу граничних умов $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{x\in\partial\Omega} = 0$, а виходить, і $\left.\frac{\partial u_t}{\partial \vec{n}}\right|_{x\in\partial\Omega} = 0$. З огляду на останнє і застосовуючи інтегральну нерівність Коши-Буняковського в (4.18) одержуємо

$$\left|-\int_Q v\Delta u_t dQ\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\int_Q v_{x_i} u_{tx_i} dQ\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\int_Q v_{x_i} u_{tx_i} dQ\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left(\int_Q v_{x_i}^2 dQ\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_Q u_{tx_i}^2 dQ\right)^{\frac{1}{2}} \le c\|u\|_{W_{\text{ГР}}^{+}}\|v\|_{W_{\text{ГР}^+}^{+}}$$

Аналогічно, інтегруючи частинами, з огляду на умови (4.15) і використовуючи інтегральну нерівність Коши-Буняковського, имеем

$$\left|\int_Q vk\Delta u dQ\right| \le c\|v\|_{W_{\text{ГР}^+}^{+}}\|v\|_{W_{\text{ГР}}^{+}} .$$

Остаточно знаходимо

$$\left|\left(Lu, v\right)_{L_2(Q)}\right| \le c\|v\|_{W_{\text{ГР}^+}^{+}}\|u\|_{W_{\text{ГР}}^{+}} .$$

Звідси, повертаючи до (4.4), одержуємо

$$\|Lu\|_{W_{\text{ГР}^+}^{-}} \le c\|u\|_{W_{\text{ГР}}^{+}} . \tag{4.18}$$

Тому що множина гладких функцій $u(t,x)$, що задовольняють умовам (4.15), щільно в просторі $W_{\text{ГР}}^{+}$, то, розширюючи по неперервності область визначення оператора $L(\cdot)$ (це дозволяє зробити нерівність (4.18)), одержуємо справедливість нерівності леми.

Лема 4.4. *Для довільних функцій $v(t,x)\in W_{\text{ГР}^+}^{+}$ має місце нерівність*

$$\|L^{*}v\|_{W_{\text{ГР}}^{-}} \le c\|v\|_{W_{\text{ГР}^+}^{+}}, c = const > 0 ,$$

де $L^{*}(\cdot)$ – спряжений оператор

$$L^{*}v \equiv -\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta\left(-\frac{\partial v}{\partial t} + kv\right) = G .$$

Доведення аналогічний міркуванням попередньої леми.

Лема 4.5. *Для довільних функцій* $u(t,x) \in W_{\text{ГР}}^{+}$ *має місце нерівність*

$$c\|u\|_{L_2(Q)} \le \|Lu\|_{W_{\text{ГР}^+}^{-}}, \; c = const > 0.$$

Доведення. Спочатку доведемо необхідну нерівність для гладких функцій $u(t,x)$, що задовольняють умовам (4.15), а потом розширюючи відповідним чином оператор $L(\cdot)$ і використовуючи граничний перехід, одержуємо справедливість твердження леми для довільних функцій $u(t,x) \in W_{\text{ГР}}^{+}$.

Уведемо допоміжний інтегральний оператор :

$$v(t,x) = I_t = \int_T^t a^{-1}(s) u(s,x)\, ds,$$

де $s \in [0,T]$.

Оцінимо

$$\begin{aligned} &(I_t u, Lu)_{L_2(Q)} = (L^* I_t u, u)_{L_2(Q)} = \\ &= (-v_t + \Delta v_t + \Delta k v, a v_t)_{L_2(Q)} = l_1 + l_2 + l_3. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Інтегруючи частинами і використовуючи умови (4.15), (4.16), яким, очевидно, задовольняють функції $u(t,x)$, $v(t,x)$, маємо

$$l_1 = -\int_Q a v_t^2 dQ,$$

$$l_2 = \int_Q a v_t \Delta v_t dQ = -\int_Q a \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 dQ,$$

$$l_3 = -\int_Q a v_t k \Delta v dQ = \int_Q ak \sum_{i=1}^n v_{x_i} v_{tx_i} dQ = \frac{1}{2}\int_Q \left(ak \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 \right)_t dQ -$$
$$-\frac{1}{2}\int_Q a_t k \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ = -\frac{a(0)}{2}\int_\Omega k \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 \Big|_{t=0} d\Omega - \frac{1}{2}\int_Q a_t k \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ.$$

Отримані вирази підставимо в (4.20) і виберемо $a(t) = -(t+1)$.

Тоді

$$(I_t u, Lu)_{L_2(Q)} \ge c\|v\|_{W_{\text{ГР}^+}^{+}}^2,$$

$$c\|I_t u\|_{W_{\text{ГР}^+}^{+}}^2 \ge c\|u\|_{L_2(Qq)}^2.$$

З нерівності Шварца:

$$\left(Lu, I_t u\right)_{L_2(Q)} \le \left\|Lu\right\|_{W^-_{\Gamma P^+}} \left\|I_t u\right\|_{W^+_{\Gamma P^+}}.$$

Скорочуючи на $\left\|I_t u\right\|_{W^+_{\Gamma P^+}}$, одержуємо

$$\left\|Lu\right\|_{W^-_{\Gamma P^+}} \ge c\left\|u\right\|_{L_2(Q)}.$$

Тому що множина розглянутих функцій щільно в просторі $W^+_{\Gamma P}$, то граничним переходом одержуємо твердження леми. Аналогічно доводиться наступна лема

Лема 4.6. *Для довільних функцій $v(t,x) \in W^+_{\Gamma P^+}$ має місце нерівність*

$$\left\|L^* v\right\|_{W^-_{\Gamma P}} \ge c\left\|v\right\|_{L_2(Q)}, c = const > 0.$$

Наявність лем 4.1–4.4 гарантує справедливість теорем.

Теорема 4.3. *Для будь-якої функції $F \in L_2(Q)$ існує єдиний сильний розв'язок рівняння (4.14), (4.15).*

Теорема 4.3. *Якщо в умовах теореми 1 права частина F належить простору $W^-_{\Gamma P^+}(Q)$, то існує єдиний слабкий розв'язок задачі (4.14), (4.15).*

Розглянемо аналог методу Галеркина для наближеного розв'язок задачі псевдопараболічного типу, розглянутої вище.

Нехай

$$Lu \equiv A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + B(u) = f, \tag{4.21}$$

$$u\big|_{t=0} = 0; u\big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{4.22}$$

де $A(\cdot)$ – рівномірно еліптичний, а $B(\cdot)$ – невід'ємний, диференціальні оператори другого порядку, визначені в деякій обмеженій області з кусково-гладкою межею,

$$A(u) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(x)u, \ ,$$

$$B(u) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(B_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + b(x)u \ ,$$

$A_{ij} = A_{ji}(x), \quad B_{ij} = B_{ji}(x)$ – неперервно диференційовані, а $a(x), b(x)$ – непепервні в замкнутій області функції,

$$.\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2; \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}\xi_i\xi_j \geq 0..$$

Також припускаємо, что $a(x) \geq 0, b(x) \geq 0.$

Рівняння (4.21) вивчається в циліндричній області $Q \equiv \{\Omega \times (0,T)\}$.

Для операторів задачі (4.21), (4.22) і спряженим до них справедливі апріорні оцінки в негативних нормах, що є необхідною і достатньою умовою існування відповідних узагальнених рішень.

Нехай спочатку $f \in L_2(Q)$. Будемо шукати наближене розв'язок у виді

$$u_n(t,x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(t)\omega_i(x) \ , \tag{4.23}$$

де $\omega_i(x)$ – ортонормованний базис у $L_2(\Omega)$, що складається з гладких функцій, що анулюються на межі області Ω, а функції $g_i(t)$ вибираються так, щоб виконувалися співвідношення

$$\begin{gathered} \left(A\left(\frac{du_n}{dt}\right), \omega_j\right)_{L_2(\Omega)} + \left(B(u_n), \omega_j\right)_{L(\Omega)} = \left(f, \omega_j\right)_{L_2(\Omega)}, \\ g_i(0) = 0, \ i, j = 1, 2, ..., n. \end{gathered} \tag{4.24}$$

Співвідношення (4.24) являє собою задачу Коші для системи n-лінійних звичайних диференціальних рівнянь:

$$g_k(0) = 0, k, j = 1, 2, ..., n.$$

Лема 4.7. *Для функцій $u(t,x) \in W_{\text{ГР}}^{+}$ справедлива нерівність*

$$\left((2T - t)u_t, Lu\right)_{L_2(Q)} \geq c\|u\|_{W_{\text{ГР}}^{+}}^2, c = const > 0. \tag{4.25}$$

Доведення. Розглянемо окремо вирази, що складають ліву частину (4.25):

$$\left((2T - t)u_t, a(x)u_t\right)_{L_2(Q)} = \int_Q (2T - t)a(x)u_t^2 dQ \geq 0 \ , \tag{4.26a}$$

$$\int_Q ub(x)(2T-t)u_t dQ = \frac{1}{2}\int_Q \left(b(x)(2T-t)u^2\right)_t dQ +$$
$$+\frac{1}{2}\int_Q b(x)u^2 dQ = \frac{1}{2}\int_\Omega b(x)Tu^2\left(_{t=0} d\Omega + \frac{1}{2}\int_Q b(x)u^2 dQ \ge 0;\right. \tag{4.26}$$

$$\left((2T-t)u_t, A(u_t)\right)_{L_2(Q)} =$$
$$= -\sum_{i,j=1}^n \int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}\left((2T-t)u_t A_{ij} u_{tx_j}\right) dQ + \int_Q \sum_{i,j=1}^n (2T-t) A_{ij} u_{tx_j} u_{tx_j} dQ. \tag{4.27}$$

Тут була застосована операція інтегрування частинами. Переходячи в першому виразі праворуч у співвідношенні (4.27) до інтеграла по межі області Q і з огляду на крайові умови для $u(t,x)$, одержуємо, что це вираз дорівнює нулю. Проінтегруємо частинами залишилося вираз в лівій частині (4.25):

$$\left((2T-t)u_t, B(u)\right)_{L_2(Q)} =$$
$$= -\sum_{i,j=1}^n \int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}\left((2T-t)u_t B_{ij} u_{x_j}\right) dQ + \int_Q \sum_{i,j=1}^n (2T-t) u_{tx_i} B_{ij} u_{x_j} dQ. \tag{4.28}$$

Перший вираз праворуч у (4.28) равно нулю внаслідок того, що $u\big|_{x\in\partial\Omega} = 0$. Розглянемо друге вираз. Проінтегруємо его частинами:

$$\int_Q \sum_{i,j=1}^n (2T-t) u_{tx_i} B_{ij} u_{x_j} dQ = \int_Q \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial t}\left((2T-t) u_{x_i} B_{ij} u_{x_j}\right) dQ -$$
$$-\int_Q \sum_{i,j=1}^n (2T-t) u_{x_i} B_{ij} u_{tx_j} + \int_Q \sum_{i,j=1}^n B_{ij} u_{x_i} u_{x_j},$$

відкіля, з огляду на граничні умови для функції $u(t,x)$ і симетричність матриці $\left\{B_{ij}\right\}_{i,j=1}^n$, одержуємо

$$\int_Q \sum_{i,j=1}^n (2T-t) u_{tx_i} B_{ij} u_{x_j} dQ \ge \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dQ \ge 0 \ . \tag{4.29}$$

Складаючи співвідношення (4.26), (4.27) і (4.29), і міркуючи аналогічно доведенню лем 4.4, 4.5, одержуємо справедливість твердження леми.

Теорема 4.3. *Для будь-якої функції $f(t,x) \in L_2(Q)$ послідовність наближень (4.23) збігається до сильного розв'язку задачі (4.1), (4.2) у нормі простору $L_2(Q)$.*

Доведення. Помноживши обидві частини рівності (4.24) на $(2T-t)g_j(t)$, просуммуємо по j від 0 до n і проінтегруємо по t від 0 до T. Одержуємо

$$\left((2T-t)u_{nt}, Lu_n\right)_{L_2(Q)} = \left((2T-t)u_{nt}, f\right)_{L_2(Q)} . \tag{4.30}$$

Використовуючи лему й інтегральну нерівність Коши-Буняковського, з (4.10) знаходимо

$$\left\|u_n\right\|_{W^+_{\text{ГР}^+}} \leq C\left\|f\right\|_{L_2(Q)} . \tag{4.31}$$

З (4.31) унаслідок того, що в сепарабельному гильбертовому просторі $W^+_{\text{ГР}}$ замкнута одинична куля є слабко компактною множиною, з послідовності (4.3) можна виділити слабко збіжну підпослідовність $\left\{u_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Нехай вона слабко сходиться к $\hat{u} \in W^+_{\text{ГР}}$ По теоремі Банаха-Сакса з її можна виділити підпослідовність (позначимо її знову $\left\{u_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$) таку, що

$$\hat{u}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} u_{n_k}$$

збігається сильно в $W^+_{\text{ГР}}$ до тієї ж функції $\hat{u} \in W^+_{\text{ГР}}$, тобто

$$\left\|\hat{u}_\nu - \hat{u}\right\|_{W^+_{\text{ГР}}} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0 .$$

Розглянемо фундаментальну послідовність $\left\{\hat{u}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Використовувавши негативну оцінку зверху і лінійність оператора $L(\cdot)$, запишемо

$$\left\|\hat{u}_i - \hat{u}_j\right\|_{W^+_{\text{ГР}}} \geq c\left\|L\hat{u}_i - L\hat{u}_j\right\|_{W^-_{\text{ГР}^+}} ,$$

звідси випливає фундаментальність послідовності $\left\{L\hat{u}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. У банаховом просторі $W^+_{\text{ГР}}$, вона має границю, позначимо її $\hat{f}$. Отже,

$$\left\|L\hat{u}_n - \hat{f}\right\|_{W^-_{\text{ГР}^+}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Помноживши обидві частини рівності (4.24) на довільну функцію $\varphi_i(t) \in L_2(0,T)$ і проінтегрувавши по t від 0 до T, одержимо

$$\left(Lu_n,\varphi_i\omega_i\right)_{L_2(Q)}=\left(f,\varphi_i\omega_i\right)_{L_2(Q)},i=1,2,...,n. \qquad (4.32)$$

На підставі визначення функції $\hat{u}_n$ має місце рівність

$$\left(\varphi_i\omega_i,f\right)_{L_2(Q)}=\left(\varphi_i\omega_i,L\hat{u}_n\right)_{L_2(Q)} . \qquad (4.33)$$

Унаслідок нерівності Шварца

$$\left(\varphi_i\omega_i,\hat{f}-L\hat{u}_n\right)_{L_2(Q)}\le C\left\|\varphi_i\omega_i\right\|_{W^+_{\text{ГР}^+}}\left\|\hat{f}-L\hat{u}_n\right\|_{W^-_{\text{ГР}^+}} \qquad (4.34)$$

Права частина цієї нерівності прямує до нуля при $n\to\infty$, отже, з (4.13) і (4.14) одержуємо

$$\left(\varphi_i\omega_i,f\right)_{L_2(Q)}=\left(\varphi_i\omega_i,\hat{f}\right)_{L_2(Q)},i=1,2,... \qquad (4.35)$$

Оскільки множина функцій $\left\{\varphi_i\omega_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ щільно в $L_2\left(Q\right)$, то $f=\hat{f}$.

Отже,

$$\left\|\hat{u}_\nu-\hat{u}\right\|_{W^+_{\text{ГР}}}\xrightarrow[\nu\to\infty]{}0 \ , \ \left\|L\hat{u}_n-f\right\|_{W^-_{\text{ГР}^+}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0 ,$$

а виходить, $\hat{u}\left(t,x\right)$ є розв'язком сильним задачі (4.1), (4.2). Оскільки оператор вкладення $W^+_{\text{ГР}}$ в $L_2\left(Q\right)$ є цілком неперервним, обрана вище що слабко сходиться в $W^+_{\text{ГР}}$ послідовність $\left\{u_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ буде збігатися до $\hat{u}\left(t,x\right)$ в $L_2\left(Q\right)$.

У силу справедливості оцінок у негативних нормах, отриманий розв'язок єдиний і вся послідовність (4.33) сильно збігається в $L_2\left(Q\right)$ до цього розв'язку.

Тепер припустимо, что права частина $f\left(t,x\right)$ рівняння (4.1) є елементом негативного гільбертова простору $W^-_{\text{ГР}^+}$. Через щільність множинаі $L_2\left(Q\right)$ в $W^-_{\text{ГР}^+}$ розглянемо послідовність $f_i\left(t,x\right)\in L_2\left(Q\right),i=1,2,...$, таку, что

$$\left\|f_i-f\right\|_{W^-_{\text{ГР}^+}}\xrightarrow[i\to\infty]{}0 .$$

Побудуємо послідовність наближень за правилом

$$u_{in}=\sum_{k=1}^{n}g_{ik}\left(t\right)\omega_k\left(x\right) , \qquad (4.36)$$

де $\omega_i\left(x\right)$ – функції, визначені вище, а $g_{ij}\left(t\right)$ – розв'язок задачі Коші:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{dg_{ik}(t)}{dt}\left(A(\omega_k),\omega_j\right)_{L_2(\Omega)}+\sum_{k=1}^{n}g_{ik}(t)\left(B(\omega_k),\omega_j\right)_{L_2(\Omega)}==\left(f_i,\omega_j\right)_{L_2(\Omega)},$$

$$g_{is}(0)=0,\ i=1,2,...;\ s,j=1,2,...,n. \qquad (4.37)$$

Теорема 4.4. *Для будь-якої функції* $f(t,x)\in W^{-}_{ГР^{+}}$ *послідовність наближень (4.36) збігається до слабкого розв'язку задачі (4.1), (4.2) при* $i\to\infty, n\to\infty$ *в нормі простору* $L_2(Q)$.

Доведення. Запишемо (4.37) у виді

$$\left(\omega_j, Lu_{in}\right)_{L_2(\Omega)}=\left(\omega_j, f_i\right)_{L_2(\Omega)}. \qquad (4.38)$$

Для функції $f(t,x)\in W^{-}_{ГР^{+}}$ це співвідношення має вид

$$\left(\omega_j, Lu_n\right)_{\Omega}=\left(\omega_j, f\right)_{\Omega}, g_k(0)=0, k,j=1,2,...,n, \qquad (4.39)$$

де $(\cdot,\cdot)_{\Omega}$ – білінійна форма, побудована по просторах і $\overset{0}{W}{}_2^{-1}(\Omega)$. Віднімаючи з (4.38) співвідношення (4.39), одержимо

$$\begin{aligned}&\left(\omega_j, L(u_{in}-u_n)\right)_{\Omega}=\left(\omega_j, f_i-f\right)_{\Omega},\\ &g_{ik}(0)=0,\ g_k(0)=0,\ i=1,2,...;\ k,j=1,2,...,n.\end{aligned} \qquad (4.40)$$

Множимо обидві частини (4.40) на

$$-\int_T^t(\tau+1)^{-1}\left[g_{ij}(\tau)-g_j(\tau)\right]d\tau,$$

підсумовуємо по j від до nn й інтегруємо по t від 0 до :

$$\begin{aligned}&-\left(\int_T^t(\tau+1)^{-1}\left[u_{in}(\tau,x)-u_n(\tau,x)\right]d\tau, L(u_{in}-u_n)\right)_Q=\\ &=-\left(\int_T^t(\tau+1)^{-1}\left[u_{in}(\tau,x)-u_n(\tau,x)\right]d\tau, L(u_{in}-u_n)\right)_Q=\\ &=-\left(\int_T^t(\tau+1)^{-1}\left[u_{in}-u_n\right]d\tau, f_i-f\right)_Q,\\ &=-\left(\int_T^t(\tau+1)^{-1}\left[u_{in}-u_n\right]d\tau, f_i-f\right)_Q,\end{aligned} \qquad (4.41)$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ – білінійна форма, побудована по просторах $W^{+}_{ГР^{+}}$ і $W^{-}_{ГР^{+}}$.

Позначимо $\overline{u} \equiv u_{in} - u_n$, введемо функцію

$$v = -\int_T^t (\tau+1)^{-1} \overline{u}(\tau, x)\, d\tau$$

і розглянемо почленно ліву частину (4.41). Очевидно, що $\overline{u} \in W^{+}_{\text{ГР}}, v \in W^{+}_{\text{ГР}^+}$. Інтегруючи частинами і з огляду на крайові умови, одержуємо

$$\left(v, a(x)\overline{u}_t\right)_{L_2(Q)} = \int_Q \left(va(x)\overline{u}\right)_t dQ + \int_Q (t+1)a(x)v_t^2 dQ \ . \qquad (4.42\text{а})$$

Переходячи в першому доданку праворуч до інтеграла по межі, маємо, що він дорівнює нулю.

$$\begin{gathered}\int_Q vb(x)\overline{u}dQ = -\int_Q vb(x)(t+1)v_t dQ = -\frac{1}{2}\int_Q \left(b(x)(t+1)v^2\right)_t dQ + \\ +\frac{1}{2}\int_Q b(x)v^2 dQ = \frac{1}{2}\int_\Omega b(x)v^2\Big|_{t=0} d\Omega + \frac{1}{2}\int_Q b(x)v^2 dQ \ge 0;\end{gathered} \qquad (4.42\text{б})$$

Аналогично

$$-\left(v, \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_j \partial t}\right)_{L_2(Q)} = \int_Q (t+1) \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} v_{x_i} v_{x_j t} dQ, \qquad (4.43)$$

$$-\left(v, \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} B_{ij} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_j}\right)_{L_2(Q)} \ge \frac{1}{2}\int_Q \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} v_{x_i} v_{x_j} dQ \ge 0. \qquad (4.44)$$

З (4.21)–(4.24) використовуючи нерівність Шварца і співвідношення між *u* і *v*, одержуємо

$$\left\| u_{in} - u_n \right\|_{L_2(Q)} \le C \left\| f_i - f \right\|_{W^{-}_{\text{ГР}^+}} \ ,$$

звідки і випливає справедливість теореми 4.2, оскільки нескладно довести, що послідовність u_n збігаєтьсяься до розв'язок задачі (4.21), (4.22) із правою частиною f.

Зауваження. *При* $f(t,x) \in W^{-}_{\text{ГР}^+}$ *для чисельного розв'язок задачі (4.21), (4.22) можна скористатися операцією осереднення, описаної вище відповідним чином підбираючи параметр осерердення.*

Контрольні питання

1. Узагальнені функції.
2. Оснащені гільбертові простори.
3. Простори Соболева.
4. Узагальнені розв'язки початково-крайових задач.
5. Існування та єдиність узагальнених розв'язків.
6. Метод Гальоркіна та його аналоги.
7. Оптимальне керування некласичними системами.
8. Узагальнена розв'язність псевдопараболічних систем (перша початково-крайова задача)
9. Узагальнена розв'язність псевдопараболічних систем (друга початково-крайова задача).
10. Аналоги методу Гальоркіна для систем псевдопараболічного типу (перша початково-крайова задача).
11. Аналоги методу Гальоркіна для систем псевдопараболічного типу (друга початково-крайова задача).
12. Узагальнена розв'язність псевдогіперболічних систем (перша початково-крайова задача)
13. Узагальнена розв'язність псевдогіперболічних систем (друга початково-крайова задача).
14. Аналоги методу Гальоркіна для систем псевдогіперболічного типу (перша початково-крайова задача).
15. Аналоги методу Гальоркіна для систем псевдогіперболічного типу (друга початково-крайова задача).

Література

1. Lyashko S. I. Generalized Optimal Control of Linear Systems with Distributed Parameters. – Boston: Kluwer Academic Publishers 2002. – 455 p.

2. Klyushin D. A., Lyashko S. I., Nomirovskii D. A., Petunin Yu. I., Semenov V. V. Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements. New York – Springer, 2012. – 202 p.

3. Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель В. Г. Функціональний аналіз : курс лекцій. – Львів : І. Е. Чижиков, 2014. – 560 с.

4. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Число: видавничий проект (Серія "Університетська бібліотека"). – Львів : І. Е. Чижиков, 2012. – 589 с.

5. Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій та функціонального аналізу. – Київ : Вища школа, 1974. – 456 с.

Навчальне видання

КЛЮШИН Дмитро Анатолійович
ЛЯШКО Сергій Іванович

НЕКЛАСИЧНІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Методичні рекомендації

Друкується за авторською редакцією

Формат 60х84$^{1/16}$. Ум. друк. арк. 3,02. Наклад 100. Зам. № 223-10738
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний.
Підписано до друку 06.10.23

Видавець та виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"
Б-р Тараса Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 230 31 28
e-mail: vpc@knu.ua; vpc_div.chief@univ.net.ua; redactor@univ.net.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої діяльності ДК № 1103 від 31.10.02