

## Узагальнена теорія абстрактних переписувальних систем.

Іванов Євген В'ячеславович

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.01 «Теоретичні основи інформатики та кібернетики» (113 – Прикладна математика). – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2025.

**Актуальність теми.** Теорія переписувальних систем є частиною теоретичних основ інформатики, що вивчає математичні моделі покрокового перетворення (переписування) об'єктів, які, типово, є пов'язаними з процесами обчислень або логічного виводу. Теорія абстрактних переписувальних систем (АПС) охоплює базові результати, важливі для теорії переписувальних систем, що можуть бути сформульовані на абстрактному рівні, що не накладає обмежень на структуру та подання елементів системи і правил переписування. Однією з центральних тем класичної теорії АПС є дослідження властивості Черча-Россера (або еквівалентної властивості конфлюентності), що виражає зв'язок між відношеннями конверсії (англ. *convertibility*) та редукції (англ. *reduction*) та має як наслідок властивість існування не більше однієї нормальної форми у кожного елемента системи. Методи перевірки конфлюентності досліджувалися протягом тривалого періоду 20-го століття та на початку 21-го століття. На абстрактному рівні такі методи вивчались у роботах М.Н.А. Newman, J.R. Hindley, В.К. Rosen, N.G. de Bruijn, G. Huet, R. Nederpelt, J.W. Klop, V. van Oostrom та інших дослідників; пов'язані дослідження включають роботи О.А. Летичевського, О.О. Летичевського, А.Ю. Дорошенко, К.А. Жереба та інших дослідників. Тепер такі методи є добре вивченими для систем, що мають спеціальні властивості, характерні для дискретних моделей обчислень, такі як термінальність або зліченність. Подібна ситуація має місце і для інших результатів теорії АПС (наприклад, принцип нетерової індукції застосовний до термінальних АПС). Однак, визначення застосовності методів і результатів, відомих для злічених або термінальних систем, до *незлічених нетермінальних* систем вважається деякими провідними дослідниками з теорії переписувальних систем важливою і фундаментальною відкритою проблемою<sup>1</sup>. При цьому, незлічені АПС зазвичай породжуються недискретними моделями систем і процесів. У зв'язку з цим є актуальною побудові теорії, що розширює та узагальнює класичні результати теорії абстрактних переписувальних систем на випадки, що становлять інтерес з точки зору аналізу недискретних математичних моделей систем і процесів.

**Метою** дисертаційної роботи є побудова теорії, що розширює та узагальнює класичні результати теорії АПС на випадки, що становлять інтерес з точки зору аналізу недискретних математичних моделей систем і процесів.

**Об'єкт дослідження** – абстрактні переписувальні системи.

---

<sup>1</sup> Endrullis J., Klop J.W., Overbeek R. Decreasing diagrams for confluence and commutation. *Logical methods in computer science*, 2020, P. 23:1-23:25.

**Предмет дослідження** – властивості абстрактних переписувальних систем, породжених недискретними математичними моделями, методи їх перевірки та зв'язки між такими властивостями.

**Основні результати:**

- *вперше* доведено повноту методу спадних діаграм ван Оострома–де Брейна для доведення конфлюентності бінарних відношень мінімальної незліченної потужності (попередні відомі результати: V. van Oostrom, 1994<sup>2</sup> – метод є повним для доведення конфлюентності відношень, що мають властивість кофінальності; J. Endrullis, J.W. Klop, R. Overbeek, 2018<sup>3</sup> – метод з двома мітками є повним для доведення конфлюентності відношень, що мають властивість кофінальності); за припущення континуум-гіпотези, з отриманого у дисертації результату випливає, що метод спадних діаграм є повним для доведення конфлюентності довільних бінарних відношень на множині дійсних чисел, множині послідовностей дійсних чисел, індексованих натуральними числами, множині неперервних дійсних функцій, множині орієнтованих графів із фіксованою зліченною множиною вузлів, і на різноманітних інших структурах, що становлять інтерес з точки зору інформатики та прикладної математики; доведення повноти було формалізовано та автоматично перевірено за допомогою відомої системи інтерактивного доведення теорем Isabelle<sup>4</sup>, обсяг формального доказу перевищує 300 сторінок у форматі Archive of Formal Proofs<sup>5</sup>;
- *вперше* отримано розв'язки проблем неповноти методу спадних діаграм з двома мітками та відсутності колапсу на рівні 2 ієрархії систем, що мають спадну властивість Черча–Россера (дані проблеми були сформульовані<sup>6</sup> у 2018 році як відкриті проблеми);
- *вперше* запропоновано узагальнення леми Ньюмана для строго індуктивних переписувальних систем;
- *вперше* запропоновано спеціальні принципи індукції для доведення властивостей елементів переписувальних систем, що не задовольняють припущенням про термінальність та зліченність;
- *дістали подальшого розвитку* формальні теорії для аналізу властивостей недискретних моделей.

Дисертація має теоретичний характер. За результатами виконаних досліджень опубліковано 21 працю у закордонних виданнях, проіндексованих у наукометричних базах Web of Science та/або Scopus та 10 праць апробаційного характеру.

---

<sup>2</sup> Van Oostrom V. Confluence for abstract and higher-order rewriting. PhD thesis, Vrije Universiteit Amsterdam, 1994.

<sup>3</sup> Endrullis J., Klop J.W., Overbeek R. Decreasing diagrams with two labels are complete for confluence of countable systems. *3rd International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2018)*, 2018, P. 14:1-14:15.

<sup>4</sup> <https://isabelle.in.tum.de>

<sup>5</sup> <https://isa-afp.org>

<sup>6</sup> Endrullis J., Klop J.W., Overbeek R. Decreasing diagrams with two labels are complete for confluence of countable systems. *3rd International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2018)*, 2018, P. 14:1-14:15 [**Open Problem 32, 33**]