

**ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Кафедра моделювання складних систем

М.В. Коробова

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Практикум

Навчальний посібник

для студентів спеціальності
124 «Системний аналіз»
освітнього рівня «бакалавр»

Київ – 2024

УДК 517.9

Рецензенти:

доктор технічних наук, старший науковий співробітник,

член-кореспондент НАН України Л.Ф. Гуляницький;

доктор фізико-математичних наук,

доцент А.В. Шатирко

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол № 15 від 28 травня 2024 року)

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол № 13 від 27 травня 2024 року)

К. ф.-м. н., доц. Коробова Марина Віталіївна

Практикум з дисципліни «Диференціальні рівняння» / М.В. Коробова. – Київ: 2024. – 40 с.

Викладено завдання для практичних занять, і, зокрема, рекомендовані для самостійної роботи студентів з обов'язкової навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння». У роботі також наведено приклади завдань для контрольних робіт, порядок розрахунку семестрових та екзаменаційних оцінок, коротка структура навчальної дисципліни. Для студентів другого курсу факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які навчаються за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз» спеціальності 124 «Системний аналіз».

© Коробова М.В., 2024

ЗМІСТ

I. Передмова	4
II. Тематичний план практичних занять на I семестр	15
III. Тематичний план практичних занять на II семестр	27
IV. Рекомендовані джерела	40

І. ПЕРЕДМОВА

1. Мета дисципліни: засвоєння основних теоретичних положень та опанування методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, систем диференціальних рівнянь, постановкою та розв'язуванням задачі Коші та крайової задачі, ознайомлення з методами дослідження стійкості та основами варіаційного числення.

2. Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни.

Для успішного вивчення дисципліни «Диференціальні рівняння» академічний рівень студента повинен відповідати таким вимогам:

1. Знати: основні розділи з математичного аналізу, методів оптимізації функцій, алгебри та аналітичної геометрії.

2. Вміти: знаходити похідні, обчислювати інтеграли, досліджувати функції на екстремум, розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь з параметрами.

3. Володіти: методами матричної алгебри, навичками помічати похідні та первісні від основних математичних функцій у різних математичних виразах; складати системи алгебраїчних рівнянь; методами обчислень коренів многочленів.

3. Анотація навчальної дисципліни.

Навчальна дисципліна «Диференціальні рівняння» є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за бакалаврським рівнем вищої освіти галузі знань 12 «Інформаційні технології» зі спеціальності «Системний аналіз» в рамках освітньо-професійної програми «Системний аналіз».

Дисципліна належить до переліку обов'язкових навчальних дисциплін. Викладається у 3 та 4 семестрах в обсязі 240 годин – 120 годин у 3 та 120 годин у 4 семестрі, (8 кредитів ECTS). Зокрема, лекції – 28 та 28 години, відповідно; консультації – 2 години; практичні заняття – 28 та 28 години, відповідно; самостійна робота – 62 та 64 годин. У курсі передбачено 4 змістовні частини та 4 контрольні роботи. У кожному семестрі дисципліна закінчується іспитом.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен:

знати основні означення, теореми, класифікацію, типи звичайних диференціальних рівнянь та систем рівнянь, методи їх розв'язування, основи теорії стійкості рівнянь та систем, а також елементи варіаційного числення;

вміти класифікувати та знаходити аналітичні розв'язки звичайних диференціальних рівнянь першого та вищих порядків, зокрема, лінійних рівнянь, також систем лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь, розв'язувати

лінійні диференціальні рівняння в частинних похідних, вміти класифікувати особливі точки диференціальних рівнянь на площині, будувати відповідні фазові портрети, досліджувати стійкість розв'язків нелінійних систем різними методами, а також знаходити допустимі екстремалі функціоналів різного типу і проводити їх дослідження.

Дисципліна «Диференціальні рівняння» є базовою для засвоєння дисциплін «Теорія керування», «Методи керування динамічними системами», «Екологічні й економічні процеси та їх моделювання», «Рівняння математичної фізики» та інших вибіркових дисциплін прикладного математичного спрямування освітньої програми «Системний аналіз».

4. Завдання (навчальні цілі).

Основними завданнями дисципліни «Диференціальні рівняння» є набуття знань, умінь та навичок (компетентностей) відповідно до кваліфікації «бакалавр із системного аналізу». Зокрема, розвивати:

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність планувати та управляти часом;
- здатність спілкуватися державною мовою усно, так і письмово;
- здатність оцінювати та забезпечувати якість виконуваних робіт;
- здатність використовувати системний аналіз як сучасну міждисциплінарну методологію, що базується на прикладних математичних методах та сучасних інформаційних технологіях і орієнтована на вирішення задач аналізу і синтезу технічних, економічних, соціальних, екологічних та інших складних систем;
- здатність формалізувати проблеми, описані природною мовою, у тому числі за допомогою математичних методів, застосовувати загальні підходи до математичного моделювання конкретних процесів;
- здатність представляти математичні аргументи і висновки з них з ясністю і точністю і в таких формах, які підходять для аудиторії як усно так і в письмовій формі;
- здатність розробляти експериментальні та спостережувальні дослідження і аналізувати дані, отримані в них;
- здатність системно аналізувати свою професійну і соціальну діяльність, оцінювати накопичений досвід.

5. Результати навчання за дисципліною:

Результат навчання (1. знати; 2. вміти; 3. комунікація; 4. автономність та відповідальність)		Форми (та/або методи і технології) викладання і навчання	Методи оцінювання та пороговий критерій оцінювання (за необхідності)	Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни
Код	Результат навчання			
РН.1.1	Знати методи розв'язування ДР першого порядку, розв'язаних та не розв'язаних відносно похідної.	Лекції, практичні заняття, самостійна робота	Поточне оцінювання, контрольна робота, іспити	10%
РН1.2	Знати математичні методи розв'язування ДР вищих порядків та крайових задач.	Лекції, практичні заняття, самостійна робота	Поточне оцінювання, контрольна робота, іспити	20%
РН1.3	Знати методи розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь та дослідження стійкості їх розв'язків і формулювання основних теорем.	Лекції, практичні заняття, самостійна робота	Поточне оцінювання, контрольна робота, іспити	20%
РН1.4	Знати методи розв'язування лінійних рівнянь першого порядку з частинними похідними та дослідження функціоналів на екстремум.	Лекції, практичні заняття, самостійна робота	Поточне оцінювання, контрольна робота, іспити	10%
РН2.1	Вміти правильно використовувати методи теорії ДР в задачах механіки, біології, економіки, керування, вибрати системний підхід до побудови динамічних моделей.	Лекції, практичні заняття, самостійна робота	Поточне оцінювання	10%

РН2.2	Вміти правильно застосовувати методи теорії диференціальних рівнянь до розв'язання прикладних задач.	Лекції, практичні заняття, самостійна робота	Поточне оцінювання	10%
РН3.1	Обґрунтовувати власний погляд на задачу, спілкуватися з колегами з питань розв'язування задач, складати письмові звіти.	Лекції, практичні заняття, самостійна робота	Поточне оцінювання, іспити	10%
РН4.1	Організувати свою самостійну роботу для досягнення результату.	Самостійна робота	Поточне оцінювання	10%

6. Співвідношення результатів навчання дисципліни із програмними результатами навчання.

Результати навчання дисципліни	РН 1.1	РН 1.2	РН 1.3	РН 1.4	РН 2.1	РН 2.2	РН 3.1	РН 4.1
Програмні результати навчання <i>(з опису освітньої програми)</i>								
ПР01. Знати і вміти застосовувати на практиці диференціальне та інтегральне числення, ряди та інтеграл Фур'є, аналітичну геометрію, лінійну алгебру та векторний аналіз, функціональний аналіз та дискретну математику в обсязі, необхідному для вирішення типових завдань системного аналізу.	+	+	+	+	+	+		
ПР04. Знати та вміти застосовувати базові методи якісного аналізу та інтегрування звичайних диференціальних рівнянь і систем, диференціальних рівнянь в частинних похідних, в тому числі рівнянь математичної фізики.	+	+	+	+				
ПР06. Знати та вміти застосовувати основні методи постановки та вирішення задач системного аналізу в умовах невизначеності цілей, зовнішніх умов та конфліктів.					+	+		

ПР13. Проектувати, реалізовувати, тестувати, впроваджувати, супроводжувати, експлуатувати програмні засоби роботи з даними і знаннями в комп'ютерних системах і мережах.					+	+	+	+
ПР15. Розуміти українську та іноземну мови на рівні, достатньому для обробки фахових інформаційно-літературних джерел, професійного усного і письмового спілкування, написання текстів за фаховою тематикою.					+	+	+	+

7. Схема формування оцінки.

7.1 Форми оцінювання студентів:

Семестрове оцінювання:

Максимальна кількість балів які можуть бути отримані студентом: 60 балів:

1. Контрольна робота 1 з першої теми: РН1.1 – 20/12 балів.
2. Контрольна робота 2 з другої теми: РН1.2 – 20/12 балів.
3. Поточне оцінювання: РН1.1, РН1.2, РН2.2, РН3.1 – 20/12 балів.
4. Контрольна робота 3 з третьої теми: РН1.3 – 20/12 балів.
5. Контрольна робота 4 з четвертої теми: РН1.4 – 20/12 балів.
6. Поточне оцінювання: РН1.3, РН1.4, РН2.1, РН4.1 – 20/12 балів.

Підсумкове оцінювання у формі іспиту:

- Максимальна кількість балів які можуть бути отримані студентом: **40 балів.**
- Результати навчання, які будуть оцінюватись: РН 1.1, РН 1.2, РН 1.3, РН 1.4, РН 3.1.
- Форма проведення: письмова робота.
- Види завдань: 5 письмових завдань (2 теоретичних питання та 3 практичні завдання).
- Студент отримує загальну позитивну оцінку з дисципліни, якщо його оцінка за іспит становить не менше ніж 24 бали.
- Студент допускається до іспиту, якщо протягом семестру він:
 - набрав не менше ніж 36 балів;
 - виконав і вчасно здав мінімум 2 (дві) контрольні роботи.

Критерії оцінювання на іспитах

Завдання	Тема завдання	Максимальний відсоток від 40 балів	Всього балів
Завдання 1	Питання з теоретичного матеріалу	20 %	8
Завдання 2		20 %	8
Завдання 3	Практичне завдання на основі теоретичного матеріалу	20 %	8
Завдання 4		20 %	8
Завдання 5		20 %	8

Питання на іспитах відповідають темам лекційних занять відповідного семестру. Завдання контрольних робіт відповідають змісту практичних занять відповідної частини.

7.2 Організація оцінювання

Терміни проведення форм оцінювання:

1. Контрольна робота 1: до 8 тижня III семестру включно.
2. Контрольна робота 2: до 14 тижня III семестру включно.
3. Контрольна робота 3: до 8 тижня IV семестру включно.
4. Контрольна робота 4: до 14 тижня IV семестру включно.

Студенти мають право на одне перескладання кожної контрольної роботи у визначений викладачем термін із можливістю отримання максимально 80 % початково визначених за цю контрольну роботу балів.

У випадку встановлення фактів порушення студентами академічної доброчесності, передбачених пунктом 9.8.2 «Положення про організацію освітнього процесу у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка», що діє від 07.05.2018, вони будуть притягнуті до відповідальності, передбаченої пунктом 9.8.3 цього положення.

7.3 Шкала відповідності оцінок

Відмінно / Excellent	90-100
Добре / Good	75-89
Задовільно / Satisfactory	60-74
Незадовільно / Fail	0-59

8. Структура навчальної дисципліни.

Тематичний план лекцій і практичних занять

№ п/п	Номер і назва теми	Кількість годин		
		Лекції	Практичні	Самостійна робота
Частина 1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку та методи їх розв'язування				
1	Вступ. Приклади застосування диференціальних рівнянь та принципи побудови динамічних математичних моделей.	4		6
2	Тема 1. ДР першого порядку, розв'язані відносно похідної. Поняття диференціального рівняння, його порядок. Задача Коші. Поняття загального розв'язку. Частинні і особливі розв'язки. Два означення інтегралу. Інтегровані типи диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної. Інтегрувальний множник.	6	12	10
3	Тема 2. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної. Основні поняття та означення. Теорема про достатні умови існування і єдиності розв'язку. Знаходження кривих, підозрілих на особливий розв'язок. Типи рівнянь, які розв'язуються в квадратурах. Загальний метод введення параметру.	4	2	8
4	Контрольна робота 1	2		
Частина 2. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків. Лінійні диференціальні рівняння. Крайові задачі				
5	Тема 3. Диференціальні рівняння вищих порядків. Основні поняття та означення. Задача Коші. Достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Загальний розв'язок та загальний інтеграл, частинний та особливий розв'язки. Проміжні та перші інтеграли. Інтегрування і пониження порядку диференціальних рівнянь з вищими похідними.	2	4	6

6	<p>Тема 4. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку.</p> <p>Загальні властивості лінійних однорідних диференціальних рівнянь n-ого порядку. Необхідні і достатні умови лінійної незалежності n розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку. Формула Остроградського-Ліувілля. Фундаментальна система розв'язків та її існування.</p>	2		6
7	<p>Тема 5. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.</p> <p>Побудова загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння. Структура загального розв'язку неоднорідного рівняння. Метод невизначених коефіцієнтів, метод варіації довільної сталої (Лагранжа), метод Коші знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-ого порядку.</p>	4	6	6
8	<p>Тема 6. Лінійні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами.</p> <p>Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку зі змінними коефіцієнтами, які зводяться до рівнянь з постійними коефіцієнтами (Ейлера, Лагранжа, Чебишова). Неоднорідні рівняння зі змінними коефіцієнтами.</p>	2	2	8
9	<p>Тема 7. Крайові задачі. Канонічні форми рівнянь.</p> <p>Методи зведення диференціальних рівнянь другого порядку до рівнянь, які не містять члена з першою похідною. Самоспряжені диференціальні оператори. Крайові задачі та крайові умови. Задача Штурма-Ліувілля. Функція Гріна.</p>	2		12
10	Контрольна робота 2		2	
	ВСЬОГО	28	28	62

Загальний обсяг 120 годин, у тому числі:

Лекцій – 28 год.,

Консультацій – 2 год.,

Практичних занять – 28 год.

Самостійної роботи – 62 год.

№ п/п	Номер і назва теми	Кількість годин		
		Лекції	Практич ні	Самостій на робота
Частина 3. Системи звичайних диференціальних рівнянь. Системи в симетричній формі				
11	<p>Тема 8. Системи звичайних диференціальних рівнянь.</p> <p>Основні поняття та означення. Задача Коші. Теореми про достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші та неперервну залежність розв'язку системи від початкових даних і параметрів. Загальний, частинний і особливий розв'язки. Інтеграл. Перший та загальний інтеграл. Кількість незалежних інтегралів. Пониження порядку систем з допомогою перших інтегралів. Системи диференціальних рівнянь у симетричній формі.</p>	4	2	12
12	<p>Тема 9. Лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь.</p> <p>Однорідні системи. Лінійно незалежні розв'язки. Інтегральна (фундаментальна) матриця. Визначник Вронського. Формула Якобі. Однорідні лінійні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Випадки інтегрованості лінійних систем у квадратурах. Матричний метод інтегрування однорідних стаціонарних систем. Структура фундаментальної системи розв'язків. Метод Ейлера. Неоднорідні системи. Метод варіації довільної сталої (Лагранжа), метод невизначених коефіцієнтів. Формула Коші.</p>	4	8	12
13	<p>Тема 10. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними.</p> <p>Однорідні лінійні диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними. Зв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними та систем звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі. Загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння з частинними похідними. Розв'язування задачі Коші.</p>	4	2	12

	Розв'язування неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.			
14	Контрольна робота 3		2	
Частина 4. Особливі точки диференціальних рівнянь на площині. Елементи теорії стійкості. Елементи варіаційного числення.				
15	<p>Тема 11. Особливі точки диференціальних рівнянь на площині. Методи дослідження стійкості розв'язків диференціальних рівнянь.</p> <p>Особливі точки диференціальних рівнянь на площині. Поле напрямів та інтегральні криві. Основні поняття та означення стійкості за Ляпуновим. Стійкість розв'язку систем звичайних диференціальних рівнянь. Перший метод Ляпунова. Дослідження стійкості лінійних нестационарних систем. Стійкість розв'язку лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Критерій Гурвіца. Дослідження стійкості за першим наближенням. Другий метод Ляпунова. Функції Ляпунова. Геометрична інтерпретація умов стійкості. Теореми Ляпунова про стійкість і асимптотичну стійкість. Теореми Четаєва і Ляпунова про нестійкість. Побудова функцій Ляпунова для лінійних стаціонарних систем.</p>	8	8	14
16	<p>Тема 12. Елементи варіаційного числення.</p> <p>Основні поняття варіаційного числення. Функціонали і деякі їх властивості. Приклади і класифікація задач варіаційного числення. Перша варіація функціоналу. Необхідні умови екстремуму. Основна лема варіаційного числення. Рівняння Ейлера для різних типів функціоналів. Екстремалі функціонала, що залежить від кількох функцій. Необхідні умови екстремуму для функціоналів, які залежні від похідних порядку вище першого. Умови екстремуму другого порядку. Достатні умови екстремуму функціоналів. Умовний екстремум. Задача Лагранжа. Ізопериметрична задача.</p>	8	4	14
17	Контрольна робота 4		2	
	ВСЬОГО	28	28	64

Загальний обсяг 120 годин, у тому числі:

Лекцій – 28 год.,

Практичних занять – 28 год.

Самостійної роботи – 64 год.

Теми, винесені на самостійне вивчення:

Принципи побудови динамічних математичних моделей.

Знаходження кривих, підозрілих на особливий розв'язок.

Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами.

Методи зведення диференціальних рівнянь другого порядку до рівнянь, які не містять члена з першою похідною.

Розв'язування крайових задач за допомогою функції Гріна.

Матричний метод інтегрування однорідних стаціонарних систем.

Поле напрямів та інтегральні криві.

Побудова функції Ляпунова.

Приклади і класифікація задач варіаційного числення. Достатні умови екстремуму функціоналу.

Виконання домашніх завдань по усім темам.

II. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

НА I СЕМЕСТР

Тема 1. Поняття диференціального рівняння, його порядок. Загальний
Заняття 1 розв'язок, загальний інтеграл. Задача Коші. Частинний та особливий розв'язки. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної. Рівняння з відокремлюваними змінними і ті, що до них зводяться

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. $(y^2 - 1)(x + 2)dx - x^2ydy = 0.$
2. $\sec^2 y \operatorname{tg} x dy + \sec^2 x \operatorname{tg} y dx = 0.$
3. $xy - (x^2 + 1)y' = 0; M(0; 1).$
4. $\frac{dy}{dx} + \frac{x^3(y-1)^3}{(x+1)y} = 0.$
5. $x^2dx + y^3e^{x+y}dy = 0.$
6. $xe^{y^2}dy + y^{-3} \ln \ln x dx = 0.$
7. $\frac{e^x - 1}{e^y} = e^{e^y} (1 + e^x)y'.$
8. $y' - y = 2x - 3.$
9. $x^2y' - \cos 2y = 1; y(+\infty) = 9\pi/4.$
10. $y' - \sqrt{4x + 2y - 1} = 0.$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. $2x(1 + y^2)dx + y(x^2 + 1)dy = 0; M(1; 0).$
2. $y' = e^{x+y}; M(0; 0).$
3. $ydx + (\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy = 0; M(1; 1).$
4. $\frac{dx}{dy} - \frac{\cos(\ln y)}{\sin(\ln x)} = 0.$
5. $\left(\frac{\cos x}{\ln y}\right)^2 dx + \frac{y}{x^2} dy = 0.$
6. $\frac{\sqrt{3 - \ln^2 x}}{y} dy = \frac{\ln^2 y - 1}{x \ln y} dx.$
7. $3y^2y' + 16x = 2xy^3; y(x)$ обмежене при $x \rightarrow \infty.$
8. $y' = \cos(y - x).$

Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані
Заняття 2, 3 відносно похідної. Однорідні рівняння та рівняння, що зводяться до однорідного. Узагальнено-однорідні рівняння

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. $(y + \sqrt{x^2 - y^2})dx - xdy = 0$.
2. $(x^2 - y^2)dy = 2xydx$; $M(1; 1)$.
3. $(2x + 3y)dx + (x + 2y)dy = 0$.
4. $xy' - x \cos \frac{y}{x} = y$.
5. $(2x^3 + 2y^2x)dy - (2x^2y + y^3)dx = 0$.
6. $(4x + y - 2)y' + (6x + y - 1) = 0$.
7. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.
8. $2 \frac{dx}{dy} = \left(\frac{x+y-1}{y+2}\right)^2$.
9. $y(x^2y^2 + 1)dx + (x^2y^2 - 1)xdy = 0$.
10. $(x^2 - y^4)dy - xydx = 0$.
11. $(xy^2 - y) - (x^3y^2 - 3x^2y + 3x)y' = 0$.
12. $(y + y\sqrt{x^2y^4 - 1})dx + 2xdy = 0$.

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$.
2. $xdy = (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx$.
3. $\left(xye^{\frac{x}{y}} + y^2\right)\frac{dx}{dy} - x^2e^{\frac{x}{y}} = 0$.
4. $6xy + 5y^2 + (3x^2 + 10xy - y^2)y' = 0$.
5. $(x^3 + 3y^2x)dx + (2y^3 + 3x^2y)dy = 0$.
6. $(y - 2x + 1)dy + (x - 2)dx = 0$.
7. $(x + 2y + 1)dx + (2x + 4y + 3)dy = 0$.
8. $y^3 + 2(x^2 - y^2x)y' = 0$.
9. $(xy^2 - y)dx = (x^3y^2 - 3x^2y + 3x)dy$.
10. $2(\sqrt{x^4y^2 + 1} - x^2y)dx - x^3dy = 0$.

Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно
Заняття 4 похідної. Лінійні неоднорідні рівняння. Метод варіації довільної сталої. Рівняння Бернуллі

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. $\frac{dy}{dx} - 2xy = 1.$
2. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x^2}.$
3. $\frac{dy}{dx} - y = 2x - x^2.$
4. $xy' + y = x \cos x; M(\pi/2; 1).$
5. $y' \sin x - y = 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$
6. $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \sin x \cos x.$
7. $x \cos x \frac{dy}{dx} + y(x \sin x + \cos x) = 1.$
8. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$
9. $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} + (2 - x) \ln y = x \left(e^{-2x} + e^{\frac{x^2}{2}} \right).$
10. $y'(x + \operatorname{ctg} y) = 1.$
11. $y' \cos x - y \sin x = y^4.$
12. $(x^2 y^3 + xy)y' = 1.$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. $\frac{dy}{dx} - y = x - 1; M(0; 1).$
2. $x \ln x \frac{dy}{dx} - y = x(\ln x - 1).$
3. $y' + y \operatorname{tg} x = x \cos^2 x; M(0; 1).$
4. $y' + y = \cos x + \sin x.$
5. $(y - y^3)dx + (2xy^2 - x - y^2)dy = 0.$
6. $(6x - y^2)y' - 2y = 0; M(0; -1).$
7. $dx + (x - e^{-y} \sec^2 y)dy = 0; M(2; 0).$
8. $y'(x + \ln y) = 1.$
9. $\sec^2 y \frac{dy}{dx} + x \operatorname{tg} y = x.$
10. $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}.$
11. $3 \frac{dx}{dy} - x \sin y + 3x^4 \sin y = 0.$
12. $xy' + y = xy^2 \ln x.$

Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно
Заняття 5 похідної. Рівняння Ріккати

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Знайти загальні розв'язки рівнянь.

1. $(x - x^4)y' - x^2 - y + 2xy^2 = 0$, $y_1(x) = x^2$.
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + x \cos x - 1 + \cos 2x$, $y_1(x) = x \sin x$.
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} + \left(2 + \frac{1}{x}\right)y - e^{4x}$, $y_1 = xe^{2x}$.
4. $x^2y' + (xy - 2)^2 = 0$, $y_1(x)$ є функція вигляду $\frac{a}{x}$.

Знайти розв'язки рівнянь, підбравши спочатку частинні розв'язки.

5. $x^2 \frac{dy}{dx} - x^2y^2 + 5xy - 3 = 0$.
6. $\frac{dy}{dx} + xy^2 + \frac{y}{x} - x^3 - 2 = 0$.

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Знайти загальні розв'язки рівнянь.

1. $y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}$, $y_1(x) = -\frac{1}{x}$.
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - x \sin x - \cos^2 x$, $y_1(x) = x \cos x$.
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x}}{\sin x} y^2 + y + e^x (\cos x - \sin x)$, $y_1 = e^x \sin x$.
4. $y' = \frac{y^2 - x^2y - 2x}{1 - x^3}$, $y_1(x)$ є функція вигляду ax^2 .

Знайти розв'язки рівнянь, підбравши спочатку частинні розв'язки.

5. $x^3 \frac{dy}{dx} - y^2 - x^2y + x^2 = 0$.
6. $\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2 + 1$.

Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно
Заняття 6 похідної. Рівняння в повних диференціалах. Інтегровальний множник. Випадки знаходження інтегровального множника

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Знайти розв'язки рівнянь.

1. $(2x + x^2 - y^2x)dx = (2y + x^2y - y^2)dy$.
2. $3y^2 + 2xy + 2x + (6xy + x^2 + 3)y' = 0$.
3. $\left(2x \ln(x+y) + \frac{x^2+y}{x+y}\right)dx + \left(\ln(x+y) + \frac{x^2+y}{x+y}\right)dy = 0$.
4. $(x^2 \cos y + 2y \cos x + 1)dy + (2x \sin y - y^2 \sin x)dx = 0$.
5. $\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - 2\frac{y}{x}dy = 0$.
6. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx - e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y} - 1\right)dy = 0$.

Розв'язати диференціальні рівняння методом інтегровального множника, знаючи, що він має вигляд $\mu = f(x)$ або $\mu = f(y)$.

7. $(2y + xy^3)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$.
8. $(6x - y^2)dy - 2ydx = 0$.
9. $y^2(x - 3y)dx - (3xy^2 - 1)dy = 0$.

Зінтегрувати рівняння за допомогою множників $\mu = f(x+y)$, $\mu = f(x-y)$, або $\mu = f(xy)$.

10. $y^2dx + (xy - 1)dy = 0$.
11. $(2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x)dy = 0$.
12. $ady - \left(\frac{ay}{x} - y - x\right)dx = 0$.

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Знайти розв'язки рівнянь.

1. $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$.
2. $\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3}{y^3}dy = 0$.
3. $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy = 0$.
4. $\frac{2y+x}{x^2+y^2}dy - \frac{y-2x}{x^2+y^2}dx = 0$.
5. $(x \ln y - x^2 + \cos y)dy + (x^2 + y \ln y - y - 2xy)dx = 0$.
6. $(2x \cos y - y^2 \sin x)dx + (2y \cos x - x^2 \sin y)dy = 0$.

Розв'язати диференціальні рівняння методом інтегрувального множника, знаючи, що він має вигляд $\mu = f(x)$ або $\mu = f(y)$.

7. $(1 + yx^2)dx + x^2(x + y)dy = 0$.

8. $(x + e^{-y}y^2)dy + dx = 0$.

9. $(2xy + ax)dx + dy = 0$.

Зінтегрувати рівняння за допомогою множників $\mu = f(x + y)$, $\mu = f(x - y)$, або $\mu = f(xy)$.

10. $dx + x(dy + dx) \operatorname{ctg}(x + y) = 0$.

11. $(2x^2y + x)dy - (x^2y^3 - y - 2xy^2)dx = 0$.

Тема 2. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно
Заняття 7 похідної. Метод параметризації

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. $y'^3 - 1 = 0$.

2. $(\frac{dy}{dx})^2 + 5\frac{dy}{dx} + 6 = 0$.

3. $y'^2 + 2xy' - 3x^2 = 0$.

4. $y = y' \ln y'$.

5. $x(2 + y'^2) = 1$.

6. $x = y' \sin y'$.

7. $x\sqrt{1 + y'^2} - y' = 0$.

8. $3y'^5 - yy' + 1 = 0$.

9. $xy'^2 - 2y' - y = 0$.

10. $y = 2xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

11. $y - xy' - a\sqrt[3]{1 - y'^3} = 0$.

12. $x^3y'^2 + x^2yy' + a = 0$.

13. $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$.

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. $y'^2 + 2y' + 1 = 0$.

2. $y'^2 + y' - 2 = 0$.

3. $y'^2 + xy' - x^2 = 0$.
4. $y = xy' + \sin y'$.
5. $y = y' \sin y' + \cos y'$.
6. $y - y' = \sqrt{1 + y'^2}$.
7. $x(y'^2 + 1) = 1$.
8. $x = ay' + b\sqrt{1 + y'^2}$.
9. $x = y\left(\frac{1}{\sqrt{y'}} - \frac{1}{y'}\right)$.
10. $xy'^2 + yy' + a = 0$.
11. $9yy'^2 + 4x^3y' - 4x^2y = 0$.

**Приклади завдань контрольної роботи № 1 на тему
«Диференціальні рівняння першого порядку»**

1. $2xdy + (x^2y^4 + 1)ydx = 0$.
2. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$.
3. $x(xy - 3)y' + xy^2 - y = 0$.
4. $(x + y + 2)^2y' = a^2, \quad M(a, -2)$.

Тема 3. Диференціальні рівняння вищих порядків. Задача Коші.
Заняття 8, 9 Загальний розв'язок та загальний інтеграл. Проміжні та перші інтеграли. Інтегрування і пониження порядку диференціальних рівнянь із вищими похідними

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. $y''' = 0$ при $x_0 = 0, y_0 = 1, y'_0 = 0, y''_0 = 2$.
2. $y''' = x + \cos x$.
3. $y'' = xe^x$, при $x_0 = 0, y_0 = 1, y'_0 = 0$.
4. $y'' + y^{-3} = 0$, при $x_0 = 1, y_0 = 1, y'_0 = 0$.
5. $y''' - y''^2 = 0$.
6. $xy^{IV} + y''' = e^{2x}$.
7. $y'''^3 - 2y'' - x = 0$.

8. $y''^2 + 2xy'' - 3x^2 = 0$.
9. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.
10. $x^2y''' - y''^2 = 0$.
11. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.
12. $y''y^3 = 1$.
13. $yy'' - y'^2 = 1$.
14. $y''^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$.
15. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.
16. $yy'' + y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}$.
17. $(x^2 + y^2)y'' - yy'^2 + xy'^3 + xy' - y = 0$.

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. $y^V = x - 1$.
2. $y''' = \frac{\ln x}{x^2}$.
3. $y'' + \ln y'' - x = 0$.
4. $xy'' + y' - x^2 - 1 = 0$.
5. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.
6. $y'''y' - 3y''^2 = 0$.
7. $y(xy'' + y') = (1 - x)xy'^2$.
8. $yy'' - y'^2 = y'$.
9. $xyy'' - xy'^2 = 2yy'$.
10. $y'' - 3yy' = 0$.
11. $yy''' - y'y'' = 0$.
12. $y''^2 + xy'' - x^3 = 0$.
13. $y''' + y' = 1$.
14. $x^3y'' - (y - xy')^2 = 0$.
15. $xyy'' - xy'^2 - yy' + \frac{xy'^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

Тема 4, 5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі
Заняття 10 сталими коефіцієнтами. Фундаментальна система розв'язків

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. $y'' + 5y' + 4y = 0$.
2. $y'' - 5y' + 4y = 0$, при $x_0 = 0, y_0 = 1, y'_0 = 0$.
3. $y'' - a^2y = 0$.
4. $y'' + y = 0$, при $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
5. $y''' + 8y = 0$.
6. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.
7. $y^V - 10y''' + 9y' = 0$.
8. $y^{IV} + a^4y = 0$.
9. $y^{VI} + 64y = 0$.

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. $y'' - 7y' + 10y = 0$.
2. $y'' + 9y = 0$.
3. $y'' + 3y' = 0$.
4. $y'' + 4y' + 13y = 0$.
5. $2y'' + y' - y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0$.
6. $y^{IV} - a^4y = 0$.
7. $y^V - 4y^{IV} = 0$.
8. $y^{VI} + 2y^V = 0$.
9. $y'' - 4y' + 29y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 7$.
10. $y^{IV} - 5y''' + 6y'' + 4y' - 8y = 0$.

Тема 5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих
Заняття 11, 12 порядків зі сталими коефіцієнтами. Методи Лагранжа, Коші і невизначених коефіцієнтів для пошуку частинних розв'язків

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. $y'' - y = x^2 + 1$ (НК).
2. $y''' - 4y' = x^2$ (НК).
3. $y'' + 4y' + 3y = x + e^{2x}$ (НК).

4. $y'' + 2y' - 3y = 2x - e^{3x}$ (HK).
5. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \cos x + xe^{-x}$ (HK).
6. $y'' - 7y' + 6y = x^2$ (Л).
7. $y'' + 4y = 4x \cos 2x$ (Л).
8. $y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$ (Л).
9. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$ (К).
10. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ (К).
11. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$ (К).

Написати частинний розв'язок рівнянь (числових значень коефіцієнтів не шукати!).

12. $y'' - 9y = 3x^2 + e^{3x} + x \sin 3x$.
13. $y''' - 5y'' + 4y' = xe^{4x} + e^x \cos 4x - 8$.
14. $y''' + 4y' = 1 - \sin 2x + e^{2x} \cos 2x$.
15. $y''' - 6y'' + 10y' = e^{3x} \cos 3x + xe^{3x} \sin x$.

Рекомендовані варіанти домашнього завдання

1. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$ (HK).
2. $y^{IV} + 8y'' + 16y = \cos x$ (HK).
3. $y^{IV} + y''' = x^2 - 1$ (HK).
4. $y^{IV} - y = xe^x + \cos x$ (HK).
5. $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$ (HK).
6. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^{x+1}}$ (Л).
7. $y'' + 4y = \sec 2x$ (Л).
8. $y'' + y' = x^2 + \cos^2 x$ (Л).
9. $y'' + y = \operatorname{tg} x$ (К).
10. $y'' + 4y = x^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$. (К).
11. $y'' - y = \frac{1}{x}$ (К).

Написати частинний розв'язок рівнянь (числових значень коефіцієнтів не шукати!).

12. $y^{IV} - 16y'' = 4x + xe^{4x} + x \sin 4x + x^4 e^{-4x} \cos 4x$.
13. $y^{IV} - 5y''' + 6y'' = 2 \sin 2x + x^2 e^{3x} + e^{-2x} \cos 3x$.

Тема 6. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі змінними
Заняття 13 коефіцієнтами. Формула Абеля. Рівняння, що зводяться до
лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. Функції x , x^2 , x^3 справджують деяке однорідне лінійне диференціальне рівняння. Переконатися, що вони утворюють фундаментальну систему, та скласти згадане рівняння.

Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння (найменшого можливого порядку), яке має такі частинні розв'язки:

2. $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$.

3. $y_1 = xe^{-x}$, $y_2 = e^{-x}$.

Розв'язати лінійні рівняння зі змінними коефіцієнтами.

4. $(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1(x) = x$.

5. $y'' - (x^2 + 1)y = 0$, $y_1(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.

6. $xy'' + 2y' + xy = 0$, $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ ($x \neq 0$).

7. $x^3y''' + xy' - y = 0$.

8. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$.

9. $x^2y'' + xy' + y = 0$.

10. $(2x + 3)^2y'' + (2x + 3)y' - y = 0$.

11. $2(2x + 1)^2y'' - (2x + 1)y' + 2y = 0$.

12. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$.

13. $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6y'}{x^2} - \frac{6y}{x^3} = \sqrt{x}$.

14. $(x + 1)^3y''' + 9(x + 1)^2y'' + 18(x + 1)y' + 6y = \ln(1 + x)$.

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. Побудувати диференціальне рівняння (найменшого можливого порядку), що має такі частинні розв'язки: $3x$, $x - 2$, $e^x + 1$.

Розв'язати лінійні рівняння зі змінними коефіцієнтами.

2. $(1 - x)y'' + xy' - y = 0$, $y_1(x) = e^x$.

3. $y'' - xy' + 2y = 0$, $y_1(x) = x^2 - 1$.

4. $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$, $y_1(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

5. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$.

6. $x^2y''' - 2y' = 0$.

7. $x^3 y''' - xy' - 3y = 0.$
8. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$
9. $(x + 1)^3 y''' - 3(x + 1)^2 y'' + 4(x + 1)y' - 4y = 0.$
10. $x^2 y'' - xy' - 3y = 5x^4.$
11. $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3.$
12. $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2.$
13. $x^2 y'' - 2y = \sin \ln x.$

Заняття 14 Контрольна робота № 2

Приклади завдань контрольної роботи № 2 на тему «Диференціальні рівняння вищих порядків»

1. $y''' + y'' + y' + y = 2xe^x + 3 \sin x$ (використати метод Лагранжа).
2. $x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 2x^3 + 3x.$
3. $y^3 y'' = y^4 - 1.$
4. Для даного рівняння записати його частинний розв'язок із невизначеними коефіцієнтами (числові значення коефіцієнтів не шукати!):

$$y''' + 4y' = (\operatorname{ch} x + 3x + 1) \sin 2x .$$

III. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

НА II СЕМЕСТР

Тема 7. Деякі питання теорії лінійних однорідних диференціальних
Заняття 15 рівнянь другого порядку. Крайова задача. Задача Штурма –
Ліувілля. Функція Гріна

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Яка з крайових задач має розв'язки:

1. $y'' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1.$
2. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1.$
3. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(2\pi) = 1.$
4. $y'' - y' - 2y = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y(\infty) = 0.$

Знайти власні значення і власні функції.

5. $y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(b) = 0.$
6. $y'' = \lambda y, \quad y(0) = y'(b) = 0.$
7. $x^2 y'' + \frac{1}{4} y = \lambda y, \quad y(1) = y(b) = 0.$

Побудувати функції Гріна для крайових задач.

8. $y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$
9. $y'' + y = f(x), \quad y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi).$
10. $x^3 y'' + 3x^2 y' + xy = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y(2) + 2y'(2) = 0.$
11. $xy'' + y' = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y(x)$ обмежене при $x \rightarrow \infty.$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Розв'язати крайову задачу.

1. $y'' + y = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 1.$
2. $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0.$

Знайти власні значення і власні функції.

3. $y'' = \lambda y, \quad y'(0) = y'(b) = 0.$
4. $x^2 y'' = \lambda y, \quad y(1) = y(a) = 0.$

Побудувати функції Гріна для крайових задач.

5. $y'' + y = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$
6. $xy'' - y' = f(x), \quad y'(1) = 0, \quad y(2) = 0.$
7. $\cos^2 x y'' - \sin 2x y' = f(x), \quad y(0) = y'(0), \quad y \left(\frac{\pi}{4} \right) + y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0.$

Тема 8, 9. Системи звичайних диференціальних рівнянь. Задача Коші.
Заняття 16, 17 Кількість незалежних інтегралів. Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь. Лінійно незалежні розв'язки лінійної однорідної системи. Інтегральна (фундаментальна) матриця. Однорідні лінійні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Матричний метод інтегрування однорідних стаціонарних систем. Метод Ейлера

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Розв'язати системи, використовуючи матричний метод.

1. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

Розв'язати системи, використовуючи метод Ейлера.

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x + v - y, & \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = x + y - v, & \lambda_2 = 2, \\ \dot{v} = 2x - y, & \lambda_3 = -1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - v, & \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = x + y, & \lambda_2 = 1 + 2i, \\ \dot{v} = 3x + v, & \lambda_3 = 1 - 2i. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 2v, & x(0) = 2, \\ \dot{y} = -x, & y(0) = 0, \\ \dot{v} = x + y - v, & v(0) = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - v, & \lambda_1 = 2, \\ \dot{y} = x + 2y - v, & \lambda_2 = 3, \\ \dot{v} = x - y + 2v, & \lambda_3 = 3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + v, & \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = x + y - v, & \lambda_2 = 1, \\ \dot{v} = 2v - y, & \lambda_3 = 2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - v, & \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = 2x - y - 2v, & \lambda_2 = 1, \\ \dot{v} = 2v - x + y, & \lambda_3 = 1. \end{cases}$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Розв'язати системи, використовуючи матричний метод.

$$1. \begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0, \\ \dot{y} + 3x + y = 0. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \dot{x} = 2v - x - 2y, \\ \dot{y} = 2v - 2x - y, \\ \dot{v} = 3v - 3x - 2y. \end{cases}$$

Розв'язати системи, використовуючи метод Ейлера.

$$3. \begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y - v, & \lambda_1 = 0, \\ \dot{y} = y - x + v, & \lambda_2 = 2, \\ \dot{v} = x - v, & \lambda_3 = -1. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, & \lambda_1 = 2, \\ \dot{y} = x + 3y - v, & \lambda_2 = 3 + i, \\ \dot{v} = 2y + 3v - x, & \lambda_3 = 3 - i. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - v, & x(0) = 3, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3v, & y(0) = 4, \\ \dot{v} = y + 2v - x, & v(0) = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = y - 2v - x, & \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = 4x + y, & \lambda_2 = -1, \\ \dot{v} = 2x + y - v, & \lambda_3 = -1. \end{cases}$$

Тема 8, 9. Розв'язування лінійних неоднорідних систем
Заняття 18, 19 диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Метод
варіації довільної сталої та метод невизначених коефіцієнтів
для пошуку частинних розв'язків систем

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t, \\ \dot{y} = 5x - y, \end{cases} \quad x(0) = -2, \quad y(0) = 4.$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2 \cos t. \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + \frac{1}{t} - 4 \ln t, \\ \dot{y} = -x + y + \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1.
$$\begin{cases} \dot{x} = y - 5 \cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + \frac{1}{\sin t}, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x, \\ \dot{y} = 2y - 5x - \operatorname{cosec}^2 t. \end{cases} \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Тема 10. Системи диференціальних рівнянь в симетричній формі. Метод
Заняття 20 інтегрованих комбінацій. Розв'язування лінійних однорідних та
неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з
частинними похідними. Розв'язування задачі Коші

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. $y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$
2. $x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial u} = 0.$
3. $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = x - y.$
4. $(u - y)^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = xy.$
5. $\cos y \frac{\partial u}{\partial x} + \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \cos y.$

Знайти розв'язки рівняння, що задовольняє вказаним умовам.

6. $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = 2x, \quad y = 1.$
7. $(1 + x^2) \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad x = 0, \quad u = y^2.$
8. $xu \frac{\partial u}{\partial x} + yu \frac{\partial u}{\partial y} + xy = 0, \quad y = x^2, \quad u = x^3.$
9. $y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad x = 0, \quad u = y^2.$
10. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u - xy, \quad x = 2, \quad u = y^2 + 1.$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. $(x + 2y) \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$
2. $(x - u) \frac{\partial v}{\partial x} + (y - u) \frac{\partial v}{\partial y} + 2u \frac{\partial v}{\partial u} = 0.$
3. $e^x \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = ye^x.$
4. $xy \frac{\partial u}{\partial x} + (x - 2u) \frac{\partial u}{\partial y} = uy.$

Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє вказаним умовам.

5. $\frac{\partial u}{\partial x} - (2e^x - y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = y, \quad x = 0.$
6. $x \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2, \quad y = 1, \quad u = x^2.$
7. $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = u^2(x - 3y), \quad x = 1, \quad uy + 1 = 0.$

8. $u \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} = 2xu, \quad x + y = 2, \quad yu = 1.$

9. $(x - u) \frac{\partial u}{\partial x} + (y - u) \frac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0, \quad x - y = 2, \quad u + 2x = 1.$

Заняття 21 Контрольна робота № 3

Приклади завдань контрольної роботи № 3 на тему «Крайова задача. Інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь»

1. Знайти розв'язок:

$$\begin{cases} \dot{x} - 2x - 3y = 0, \\ \dot{y} - x = 3 \sin t. \end{cases} \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

2. Використовуючи метод Ейлера, знайти загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - v, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3v, \\ \dot{v} = y - x + 2v. \end{cases} \quad (\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$$

3. Розв'язати рівняння:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}.$$

4. Побудувати функцію Гріна для крайової задачі:

$$y'' + y' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Тема 11. Поле напрямів. Інтегральні криві

Заняття 22

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Побудувати поле напрямів та накреслити схематично поведінку інтегральних кривих.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$

2. $\frac{dy}{dx} = 2x + 1.$

3. $\frac{dy}{dx} = y - x^2.$

4. $\frac{dy}{dx} = 2y - x$.
5. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$. Побудувати ізокліни $y' = 0$, $y' = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y' = 1$, $y' = \sqrt{3}$.
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y}$.
7. $\frac{dy}{dx} = -2xy$.

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Побудувати поле напрямів та накреслити схематично поведінку інтегральних кривих.

1. $\frac{dy}{dx} = y + x$.
2. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.
3. $\frac{dy}{dx} = y + x^2$.
4. $\frac{dy}{dx} = (y - 1)^2$.
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-3x}{x+3y}$.
6. $y\left(\frac{dy}{dx} + x\right) = 1$.
7. $\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$. Побудувати ізокліни $y' = 0$, $y' = \pm 1$, $y' = \pm 2$, $y' = \pm 3$.

Тема 11. Особливі точки диференціальних рівнянь на площині

Заняття 23

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Дослідити особливі точки для поданих нижче рівнянь та систем. Дати схематичний малюнок розміщення інтегральних кривих на площині (x, y) .

1. $y' = \frac{y}{x}$.
2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -6x - 5y. \end{cases}$
3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y. \end{cases}$
4. $y' = \frac{2x+y}{3x+4y}$.
5. $y' = \frac{y-2x}{2y-3x}$.

Знайти та дослідити особливі точки систем.

6. $y' = \frac{2y-x}{3x+6}$.
7. $y' = \frac{4y^2-x^2}{2xy-4y-8}$.

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Дослідити особливі точки для поданих нижче рівнянь та систем. Дати схематичний малюнок розміщення інтегральних кривих на площині (x, y) .

1. $y' = \frac{4x-y}{3x-2y}$. 2. $y' = \frac{x-4y}{2y-3x}$. 3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

4. $y' = \frac{4y-2x}{x+y}$. 5. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = y - x. \end{cases}$

Знайти та дослідити особливі точки систем.

6. $y' = \frac{2x+y}{x-2y-5}$. 7. $y' = \frac{2y}{x^2-y^2-1}$.

Тема 11. Стійкість за Ляпуновим. Стійкість розв'язку лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Критерій Гурвіца. Дослідження стійкості нелінійних систем за першим наближенням. Функції Ляпунова та їх побудова

Заняття 24, 25

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. Знайти стани рівноваги системи та дослідити їх на стійкість:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x, \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y. \end{cases}$$

2. Дослідити, при яких значеннях параметра a буде асимптотично стійким нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$$

При яких значеннях параметрів a і b є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи.

3. $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = ax + by. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(e + ax) - e^y, \\ \dot{y} = bx + \operatorname{tg} y. \end{cases}$

5. Знайти всі стани рівноваги системи та дослідити їх на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(y^2 - x), \\ \dot{y} = x - y - 1. \end{cases}$$

6. За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y. \end{cases}$$

7. Дослідити стійкість розв'язки із вказаними початковими умовами:

$$\dot{x} = 4x - t^2x, \quad x(0) = 0.$$

8. Дослідити стійкість нульового розв'язку, якщо відомо загальний розв'язок системи:

$$x_1(t) = C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t}, \quad x_2(t) = C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2.$$

Дослідити стійкість нульового розв'язку, користуючись відомими критеріями.

9. $y''' + y'' + y' + 2y = 0.$

10. $y^{IV} + 3.1y''' + 5.2y'' + 9.8y' + 5.8y = 0.$

11. Дослідити, при яких значеннях параметрів a і b нульовий розв'язок буде асимптотично стійким

$$y''' + ay'' + by' + 2y = 0.$$

12. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок:

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(v - y) - 2x, \\ \dot{y} = \sqrt{9 + 12x} - 3e^y, \\ \dot{v} = -3y. \end{cases}$$

13. Побудувати функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми:

$$V(x) = x^T Bx, \quad x = (x_1, x_2)^T, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{для системи}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2. \end{cases} \quad (*)$$

таким чином, щоб $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(*)} = -x_1^2 - x_2^2.$

Дослідити стійкість нульового розв'язку, побудувавши функцію Ляпунова.

14. $\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy, \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3, \\ \dot{y} = x^2 - y^3. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. Дослідити стійкість розв'язки із вказаними початковими умовами

$$3(t - 1)\dot{x} = x, \quad x(2) = 0.$$

2. Знайти стани рівноваги системи і дослідити їх на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = (x - 1)(y - 1), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$$

За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок.

3.
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases}$$

5. Знайти всі стани рівноваги системи та дослідити їх на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \sin(x + y). \end{cases}$$

6. Дослідити, при яких значеннях параметра a буде асимптотично стійким нульовий розв'язок

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases}$$

Дослідити стійкість нульового розв'язку, користуючись відомими критеріями.

7. $y'''' + 2y''' + 2y'' + 3y' + 3y = 0.$

8. $y^V + 2y^{IV} + 4y'''' + 6y''' + 5y'' + 4y' + 4y = 0.$

При яких значеннях параметрів a і b нульовий розв'язок є асимптотично стійким?

9. $y'''' + 3y''' + ay'' + by' + by = 0.$

10. $y^{IV} + y'''' + ay''' + y'' + by' + by = 0.$

11. Побудувати функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми:

$$V(x) = x^T Bx, \quad x = (x_1, x_2)^T, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{для системи}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 3x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_2. \end{cases} \quad (**)$$

таким чином, щоб $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(**)} = -x_1^2 - x_2^2.$

Дослідити стійкість нульового розв'язку, побудувавши функцію Ляпунова.

$$12. \begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases} \quad 13. \begin{cases} \dot{x} = 2y - x - y^3, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \dot{x} = -x - xy, \\ \dot{y} = y^3 - x^3. \end{cases}$$

Тема 12. Варіаційне числення. Функціонали, перша варіація функціоналу. Необхідні умови екстремуму функціоналу. Рівняння Ейлера. Екстремалі функціонала, що залежить від кількох функцій. Необхідні умови екстремуму для функціоналів, які залежні від похідних порядку вище першого. Умови екстремуму другого порядку. Достатні умови екстремуму функціоналів

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Знайти допустимі екстремалі функціоналів.

$$1. I[y(x)] = \int_{-1}^0 (12xy - y'^2) dx, \quad y(-1) = 1, \quad y(0) = 0.$$

$$2. I[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2) dx, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

$$3. I[y(x)] = \int_0^1 yy'^2 dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = \sqrt[3]{4}.$$

$$4. I[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y''^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \text{sh}1, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = \text{ch}1.$$

$$5. I[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + 2y'^2 + y''^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \\ y'(0) = 1, \quad y'(1) = -\text{sh}1.$$

$$6. I[y(x), v(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2v - 4y^2 + y'^2 - v'^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ v(0) = 0, \quad v\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$7. I[y(x), v(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + v'^2 - 2yv) dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ v(0) = 0, \quad v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Дослідити на екстремум функціонали.

$$8. I[y(x)] = \int_0^1 (y'^3 + y') dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2.$$

$$9. I[y(x)] = \int_0^3 \frac{y}{y'} dx, \quad y(0) = 1, \quad y(3) = 5.$$

$$10. I[y(x)] = \int_0^1 (1+x)y'^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

11. $I[y(x), v(x)] = \int_0^1 (y'^2 + v'^2) dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$,
 $v(0) = 0$, $v(1) = 2$.
12. $I[y(x), v(x)] = \int_1^2 (2xy - y'^2 - 2xvv'^2) dx$, $y(1) = -\frac{1}{6}$, $y(2) = \frac{2}{3}$,
 $v(1) = 0$, $v(2) = \ln 2$.

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Знайти допустимі екстремалі функціоналів.

1. $I[y(x)] = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y') dx$, $y(-1) = 0$, $y(2) = 3$.
2. $I[y(x)] = \int_{-\frac{\pi}{8}}^0 (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx$, $y(-\frac{\pi}{8}) = 2$, $y(0) = 1$.
3. $I[y(x)] = \int_0^1 \sqrt{y(1 + y'^2)} dx$, $y(0) = y(1) = -1$.
4. $I[y(x)] = \int_{-1}^0 (240y - y''^2) dx$, $y(-1) = 1$, $y(0) = 0$,
 $y'(-1) = -4.5$, $y'(0) = 0$,
 $y''(-1) = 16$, $y''(0) = 0$.
5. $I[y(x)] = \frac{1}{2} \int_0^1 y''^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 1$.
6. $I[y(x), v(x)] = \int_{-1}^1 (2xy - y'^2 + \frac{v'^3}{3}) dx$, $y(1) = 0$, $y(-1) = 2$,
 $v(1) = 1$, $v(-1) = -1$.
7. $I[y(x), v(x)] = \int_0^1 (y'^2 + v'^2 + 2y) dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = \frac{3}{2}$,
 $v(0) = 0$, $v(1) = 1$.

8. Знайти екстремалі функціоналу

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (4y^2 - 6y \cos 2x - y'^2) dx.$$

Дослідити на екстремум функціонали.

9. $I[y(x)] = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2} dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = 4$.
10. $I[y(x)] = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 2xy + 2y^2) dx$, $y(1) = y(2) = 0$.
11. $I[y(x), v(x)] = \int_0^1 (y'^2 + v'^2 + 4v) dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$,
 $v(0) = 0$, $v(1) = 0$.
12. $I[y(x), v(x)] = \int_{-1}^1 (2xy - y'^2 + \frac{v'^3}{3}) dx$, $y(1) = 0$, $v(1) = 1$,
 $y(-1) = 2$, $v(-1) = -1$.

**Приклади завдань контрольної роботи № 4 на тему
«Якісні методи дослідження розв'язків диференціальних рівнянь.**

Варіаційне числення»

1. Знайти та дослідити всі стани рівноваги системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2(x - y)y, \\ \dot{y} = 2 + x - y^2. \end{cases}$$

2. При яких значеннях параметрів a та b нульовий розв'язок рівняння є асимптотично стійким?

$$y^{IV} + y''' + (a - 8)y'' + y' + (2b + 1)y = 0.$$

3. При яких значеннях параметра $a \in R$ нульовий розв'язок системи є:

1) стійким; 2) асимптотично стійким; 3) нестійким?

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + a)x - 5y, \\ \dot{y} = 2ax - y. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити екстремаль такого функціоналу:

$$I[y(x)] = \int_1^2 (x^2(y')^2 + 12y^2) dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 8.$$

IV. РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА

1. Гаращенко Ф.Г. Диференціальні рівняння, варіаційне числення та їх застосування. / Ф.Г. Гаращенко, В.Т. Матвієнко, В.В. Пічкур, І.І Харченко. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2016. – 250 с.
2. Хусаїнов Д.Я. Диференціальні рівняння: підручник / Д.Я. Хусаїнов, А.В. Шатирко. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2023. – 413 с.
<http://csc.knu.ua/uk/filer/canonical/1685511009/2263/>
3. Гаращенко Ф.Г. Диференціальні рівняння для інформатиків.: Підручник. / Ф.Г. Гаращенко, В.Т. Матвієнко, І.І Харченко. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2008. – 351 с.
<https://csc.knu.ua/library/books/Differential.pdf>
4. Матвієнко В.Т. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння». Частина І. Розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку: рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні рівняння. / В.Т. Матвієнко, В.В. Пічкур, Д.І. Черній. – Київ, 2023. – 29 с.
<https://csc.knu.ua/uk/filer/canonical/1710784567/2420/>
5. Гудименко Ф.С. Збірник задач з диференціальних рівнянь. / Ф.С. Гудименко, І.А. Павлюк, В.О. Волкова. – К.: Вища школа, 1972. – 156 с.
6. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. / М.П. Моклячук. – К.: Либідь, 1994. – 328 с.
7. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посібник. / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. – К.: Либідь, 2003. – 504 с.
[dif_prukl_zad.pdf \(knu.ua\)](#)
8. Differential equations and boundary value problems: computing and codelling. / С. Henry Edwards, David E. Penney. The University of Georgia, David Calvis, Baldwin Wallace Collage. – 5th ed., 2014. 784 p.
9. Bard Gregory V. Sage for Undergraduates / Gregory V. Bard. – American Mathematical Society, Providence, 2015.