Ті $n \in N$, які не є кодами коректних ОТ, вважаємо номерами ОТ ${}^{\mathrm{N}}☼(s, o)$ для $f_{\varnothing}$.

Приклад 2.2.12. Кодування θ операторних термів алгебри КРФ задамо так:

$$\theta(o) = 0;$$

$$\theta({}'x_i) = 5 \cdot i + 5;$$

$$\theta(s_{x_i}) = 5 \cdot i + 1;$$

$$\theta(S^{x_{i_1},\ldots x_{i_n}}(t_0, t_1, \ldots, t_n)) = 5 \cdot C(C^{2n+1}(i_1, \ldots, i_n, \theta(t_0), \theta(t_1), \ldots, \theta(t_n)), n-1) + 2;$$

$$\theta(R_{x_i, x_j}(t_1, t_2)) = 5 \cdot C^4(i, j, \theta(t_1), \theta(t_2)) + 3;$$

$$\theta(M_{x_i}(t)) = 5 \cdot C(i, \theta(t)) + 4.$$

Приклад 2.2.13. Кодування ζ операторних термів алгебри ППА-Q-N задамо так:

$$\zeta(o) = 0;$$

$$\zeta({}'x_i) = 8 \cdot i + 8;$$

$$\zeta(s_{x_i}) = 8 \cdot i + 1;$$

$$\zeta((+_{x_i x_j}) = 8 \cdot C(i, j) + 2;$$

$$\zeta(\times_{x_i x_j}) = 8 \cdot C(i, j) + 3;$$

$$\zeta(\div_{x_i x_j}) = 8 \cdot C(i, j) + 4;$$

$$\zeta(S^{x_{i_1},\ldots,x_{i_n}}(t_0, t_1, \ldots, t_n)) = 8 \cdot C(C^{2n+1}(i_1, \ldots, i_n, \zeta(t_0), \zeta(t_1), \ldots, \zeta(t_n)), n-1) + 5;$$

$$\zeta({}^{N}\Delta(t_0, t_1, t_2)) = 8 \cdot C^3(\zeta(t_0), \zeta(t_1), \zeta(t_2)) + 6;$$

$$\zeta({}^{N}☼_{x_i}(t_1, t_2)) = 8 \cdot C^3(i, \theta(t_1), \theta(t_2)) + 7.$$

Завдання для самоконтролю

1. Укажіть, як задаються кодування і нумерація всіх МНР-програм.

2 Укажіть, як задаються кодування і нумерація всіх МТ.

3. Опишіть кодування операторного терма алгебри n-арних ЧРФ.

4. Опишіть кодування операторного терма алгебри n-арних ПРФ.

5. Опишіть кодування операторного терма ППА-*ar*-*N*.
6. Опишіть кодування операторного терма алгебри КРФ.
7. Опишіть кодування операторного терма ППА-*Q*-*N*.

Вправи

1. Знайдіть усі МНР-програми з кодами від 0 до 100 включно.
2. Знайдіть МНР-програми P_{111}, P_{128}, P_{289}, P_{555}.
3. Укажіть МНР-програму та її код для предикатів:
   1) "x – непарне число";
   2) "x – парне число";
   3) "$x = 3$";
   4) "$x \neq y$".
4. Укажіть МНР-програму та її код для функцій:
   1) $f(x) = 2x$;
   2) $f(x,y) = x - y$;
   3) $f(x) = [x/2]$;
   4) $f(x) = x/3$;
   5) $f(x) = sg(x)$;
   6) $f(x) = nsg(x)$;
   7) $f(x, y) = nsg(x+y)$;
   8) $f(x, y) = sg(x+y)$;
   9) $f(x, y) = sg(x \cdot y)$;
   10) $f(x, y) = nsg(x \cdot y)$;
   11) $f(x, y) = \max(x, y)$;
   12) $f(x, y) = \min(x, y)$.
5. Укажіть МТ та її код для функцій і предикатів:
   1) $f(x) = sg(x)$;
   2) $f(x) = nsg(x)$;
   3) $f(x, y) = nsg(x+y)$;
   4) $f(x, y) = sg(x+y)$;
   5) $f(x) = sg(x/2)$;
   6) $f(x) = nsg[x/2]$;
   7) "x – парне число";
   8) "x – непарне число".

2.3. Функція Ґьоделя. Елімінація примітивної рекурсії. Теза Чорча

Функція Ґьоделя **Γ** дозволяє кодувати одним натуральним числом довільну скінченну послідовність натуральних чисел.

Вона визначається так: $\mathbf{\Gamma}(x, y) = \mathrm{mod}(l(x), 1 + (y+1)\cdot r(x))$.

Отже, функція **Γ** є ПРФ.

Теорема 2.3.1 (про основну властивість функції Ґьоделя). Для довільної скінченної послідовності натуральних чисел b_0, $b_1,\ldots, b_n$ існує натуральне число t таке, що $\mathbf{\Gamma}(t, i) = b_i$ для всіх $i\in \{0,\ldots, n\}$.

Кодування за допомогою функції Ґьоделя $\mathbf{\Gamma}(x, y)$ довільних скінченних послідовностей натуральних чисел одним натуральним числом дозволяє при розширенні множини базових функцій промоделювати операцію примітивної рекурсії.

Теорема 2.3.2 (про елімінацію операції примітивної рекурсії). Функція $f = \mathrm{R}(g, h)$ може бути отримана з функцій g, h, базових функцій і функцій $+, \times, \dot{-}$ за допомогою скінченної кількості застосувань операцій суперпозиції S^{n+1} та мінімізації M.

Функцію **Γ** можна отримати з функцій **o**, s, I^n_m та $+, \times, \dot{-}$, mod, l, r за допомогою операцій S^{n+1} та M. Своєю чергою, функції l та r отримують із функцій $[\sqrt{x}]$, $[x/2]$, **o**, s, I^n_m, $+, \times, \dot{-}$ за допомогою операцій S^{n+1}. Функції $[\sqrt{x}]$, $[x/2]$ та mod можна отримати з **o**, s, I^n_m, $+, \times, \dot{-}$ за допомогою S^{n+1} та M. Проте $nsg(x) = 1 \dot{-} x$, тому функцію **Γ** можна отримати з функцій **o**, s, I^n_m, $+, \times, \dot{-}$ за допомогою операцій S^{n+1} та M.

Отже, функцію φ, а тому й функцію f, отримуємо з функцій g, h, **o**, s, I^n_m, $+, \times, \dot{-}$ за допомогою операцій S^{n+1} та M.

Наслідок 2.3.1. Клас ЧРФ збігається із класом функцій, отриманих із функцій **o**, s, I^n_m, $+, \times, \dot{-}$ за допомогою скінченної кількості застосувань операцій суперпозиції S^{n+1} та мінімізації M.

Розглянемо співвідношення між різними формальними уточненнями поняття алгоритмічно обчислюваної функції на множині N.

Теорема 2.3.3. Такі класи функцій збігаються:

1) ЧРФ;
2) програмованих n-арних функцій на N;
3) МНР-обчислюваних функцій;
4) функцій, обчислюваних за Тьюрінгом;
5) функцій, обчислюваних за Марковим;
6) функцій, обчислюваних за Постом.

Розглянуті нами формалізми задають один і той самий клас n-арних функцій на N. При цьому самі визначення формалізмів такі, що забезпечують ефективну обчислюваність описуваних ними функцій. Тому є всі підстави вважати, що ці формалізми є різними математичними уточненнями інтуїтивного поняття алгоритмічно обчислюваної функції. Уперше таке твердження щодо рекурсивних функцій висунув А. Чорч (1936), тому воно дістало назву *тези Чорча*.

С. Кліні узагальнив тезу Чорча на випадок часткових функцій. У цьому випадку тезу Чорча (ТЧ) можна сформулювати так:

Клас ЧРФ збігається із класом n-арних АОФ, заданих на множині натуральних чисел

Поняття АОФ не є строго визначеним математичним поняттям, тому теза Чорча математичному доведенню не підлягає.

Теза Чорча є *природно-науковим фактом*, підтвердженим такими результатами:

1) істотно різні формальні уточнення поняття АОФ, запропоновані різними авторами в різний час, виявилися еквівалентними в сенсі задання одного й того самого класу функцій;

2) перехід від задання функції в одному формалізмі до її задання в іншому формалізмі є конструктивним, тобто здійснюється певним алгоритмом (напр., за операторним термом

алгебри ЧРФ ефективно будується МНР-програма, що задає ту саму функцію);

3) для кожного з таких формалізмів усі задані в ньому функції алгоритмічно обчислювані в інтуїтивному сенсі;

4) усі відомі до цих пір алгоритмічно обчислювані n-арні функції на N виявилися частково рекурсивними. Нікому ще не вдалося навести приклад функції, яку можна було б вважати алгоритмічно обчислюваною в інтуїтивному сенсі, але яка не є ЧРФ.

З тези Чорча як наслідок випливає:

Клас РФ збігається із класом тотальних *n*-арних АОФ, заданих на множині натуральних чисел

Значення тези Чорча:

1) прийняття ТЧ перетворює інтуїтивні поняття алгоритму, обчислюваності, розв'язності в об'єкти математичного вивчення. Це дає можливість ставити й розв'язувати питання про алгоритмічну обчислюваність функцій, алгоритмічну розв'язність чи нерозв'язність масових проблем;

2) використання ТЧ як своєрідної аксіоми дозволяє в багатьох випадках замінити формальні задання алгоритмів на неформальні їх описи. Це істотно спрощує доведення, дозволяє виділити основну ідею доведення чи побудови, звільняючи їх від зайвих деталей.

Проте доведення на основі ТЧ завжди має бути ретельно аргументованим! При виникненні сумнівів треба провести суто формальне доведення.

Отже, у нас є всі підстави прийняти тезу Чорча й активно використовувати її в подальшому викладі.

Розглянемо приклад використання тези Чорча.

Приклад 2.3.1. Нехай f є ЧРФ. Доведемо, що ЧРФ є функція

$$h(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in E_f, \\ \text{невизначене в інших випадках.} \end{cases}$$

Розглянемо процес глобального обчислення всіх значень функції f. Такий процес розіб'ємо на етапи. На кожному етапі починаємо обчислення для наступного значення аргументу.

На етапі 0 робимо перший крок обчислення $f(0)$.

На етапі 1 робимо перший крок обчислення $f(1)$ і другий крок обчислення $f(0)$ і т. д.

На етапі n робимо перший крок обчислення $f(n)$, другий крок обчислення $f(n-1)$, …, $(n+1)$-й крок обчислення $f(0)$.

Якщо на якомусь етапі обчислення певного $f(m)$ завершується, то порівнюємо $f(m)$ та x. При $f(m) = x$ процес глобальних обчислень завершується, адже тоді $x \in E_f$, тому результатом роботи буде 1.

При $f(m) \neq x$ продовжуємо процес глобальних обчислень.

Ми описали алгоритм для обчислення функції $h(x)$, звідки за тезою Чорча функція $h(x)$ є ЧРФ.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення функції Ґьоделя.
2. Сформулюйте основну властивість функції Ґьоделя.
3. Сформулюйте теорему про елімінацію операції примітивної рекурсії.
4. Укажіть співвідношення між різними формальними уточненнями поняття алгоритмічно обчислюваної функції.
5. Сформулюйте тезу Чорча.
6. Укажіть, чи можна формально довести тезу Чорча.
7. Аргументуйте правильність тези Чорча.
8. Укажіть, у чому полягає значення тези Чорча.

Вправи

*1. Сформулюйте й доведіть теорему про моделювання операції примітивної рекурсії для випадку КЧРФ.

*2. Доведіть, що класи МТ- і НА-обчислюваних функцій збігаються.

*3. Доведіть, що кожна n-арна ЧРФ обчислювана за Постом.

*4. Доведіть рекурсивність функції f, заданої такою умовою:

1) $f(n)$ є $(n+1)$-ю цифрою після коми в десятковому розкладі числа e;

2) $f(n)$ є $(n+1)$-ю цифрою після коми в десятковому розкладі числа π.

5. Нехай функції f та g є ЧРФ. З'ясуйте, чи завжди є ЧРФ функція $h(x)$, задана умовою:

1) $h(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in D_f \cup D_g, \\ \text{невизначене в інших випадках;} \end{cases}$

2) $h(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in D_f \cup E_g, \\ \text{невизначене в інших випадках;} \end{cases}$

3) $h(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in E_f \cap D_g, \\ \text{невизначене в інших випадках;} \end{cases}$

4) $h(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in D_f \setminus D_g, \\ \text{невизначене в інших випадках.} \end{cases}$

3. НУМЕРАЦІЇ ЧРФ. УНІВЕРСАЛЬНІ ФУНКЦІЇ. ТЕОРЕМИ ПРО НЕРУХОМУ ТОЧКУ ДЛЯ ІНДЕКСНИХ ФУНКЦІЙ

У цьому розділі розглянемо ефективні нумерації алгоритмічно обчислюваних функцій, фундаментальне поняття універсальної функції і відповідні поняття універсальної алгоритмічної машини й універсальної програми, теорему про параметризацію (*s*-*m*-*n*-теорему), а також теореми Кліні про нерухому точку для індексних РФ. Твердження про існування нерухомих точок мають у математиці універсальний характер, зокрема, у теорії алгоритмів вони набувають вигляду теорем про псевдонерухому точку для індексних рекурсивних функцій (описані в цьому розділі) і нерухому точку для ефективних операцій на функціях і множинах (будуть розглянуті в розділі 8).

3.1. Ефективні нумерації алгоритмічно обчислюваних функцій

Наведемо приклади ефективних нумерацій АОФ.

Приклад 3.1.1. Ефективну нумерацію ϕ усіх ЧРФ задамо на основі кодування γ операторних термів алгебри ЧРФ (див. приклад 2.2.7).

Задання ЧРФ операторними термами неоднозначне, оскільки кожну ЧРФ можна описати нескінченною кількістю різних ОТ, отже, нумерація ϕ неоднозначна.

Число $n\in N$ вважаємо номером ЧРФ f, якщо n є кодом якогось ОТ і значенням цього ОТ є функція f. Числа, які не є кодами ОТ, і коди некоректних ОТ, які не задають ЧРФ, вважаємо номерами всюди невизначеної функції $f_{\varnothing}$.

Зрозуміло, що за кожною ЧРФ можна ефективно знайти її номер. З іншого боку, за кожним $n\in N$ ефективно визначається

ЧРФ f така, що $\phi(n) = f$. Справді, за n як за кодом будуємо ОТ, при цьому:

– якщо ОТ із таким кодом існує і задає ЧРФ, то $\phi(n)$ – саме ця f;

– якщо ОТ із таким кодом існує, але не задає ЧРФ, то $\phi(n) = f_\varnothing$;

– якщо ОТ із таким кодом не існує, то $\phi(n) = f_\varnothing$.

Отже, ϕ є ефективною нумерацією всіх ЧРФ.

Наприклад, для $f_\varnothing$ маємо ОТ $M(s)$, звідки номером ЧРФ $f_\varnothing$ є його код $\gamma(M(s)) = 19$ (див. приклад 2.2.7).

Приклад 3.1.2. Ефективну нумерацію всіх ПРФ задамо на основі кодування π ОТ алгебри ПРФ (приклад 2.2.9).

Така нумерація ПРФ неоднозначна.

Число $n \in N$ вважаємо номером ПРФ f, якщо n є кодом деякого ОТ і значенням ОТ є функція f.

Числа, які не є кодами ОТ, і коди тих ОТ, які не задають ПРФ, вважаємо номерами функції **o**.

Приклад 3.1.3. Ефективну нумерацію всіх програмованих n-арних функцій на N задамо на основі кодування β ОТ ППА-Ar-N (приклад 2.2.11). Зрозуміло, що така нумерація неоднозначна.

Число $n \in N$ вважаємо номером функції f, якщо n є кодом якогось ОТ і значенням цього ОТ є f. Числа, які не є кодами ОТ, і коди некоректних ОТ вважаємо номерами функції $f_\varnothing$.

Приклад 3.1.4. Ефективну нумерацію φ^n всіх n-арних МНР-обчислюваних функцій задамо на основі кодування МНР-програм (див. приклад 2.2.1).

Номером функції f буде код МНР-програми, яка обчислює f.

Кожна МНР-програма визначає єдину функцію фіксованої арності, тому така нумерація буде нумерацією функцій фіксованої арності n. Однак кожна n-арна МНР-обчислювана функція може бути задана нескінченною кількістю різних МНР-програм, тому така нумерація неоднозначна.

Приклад 3.1.5. Ефективну нумерацію всіх МНР-обчислюваних функцій можна ввести на основі кодування МНР-програм.

Номером n-арної функції f буде число $C(k, n)$, де k – код МНР-програми для f.

Приклад 3.1.6. Ефективну нумерацію всіх n-арних обчислюваних за Тьюрінгом функцій задамо на основі кодування МТ (див. приклад 2.2.5).

Номером функції f буде код МТ, яка обчислює f.

Кожна МТ визначає єдину функцію, якщо вказано її арність, тому це нумерація функцій фіксованої арності. Кожна n-арна обчислювана за Тьюрінгом функція може бути задана нескінченною кількістю різних МТ, тому ця нумерація неоднозначна.

Приклад 3.1.7. Ефективну нумерацію всіх обчислюваних за Тьюрінгом функцій можна ввести на основі кодування МТ.

Номером n-арної функції f буде число $C(k, n)$, де k – код МТ для f.

Згідно зі збігом класів ЧРФ, програмованих n-арних функцій на N, МНР- і МТ-обчислюваних функцій, нумерації прикладів 3.1.4, 3.1.6 можна розглядати як ефективні нумерації всіх n-арних ЧРФ для фіксованого n, а нумерації прикладів 3.1.1, 3.1.3, 3.1.5, 3.1.7 – як ефективні нумерації всіх ЧРФ.

Зафіксуємо для кожного $n \geq 1$ деяку ефективну нумерацію n-арних ЧРФ. Зазвичай це буде нумерація із прикладу 3.1.4 на основі кодування МНР-програм.

Інколи використовуватимемо нумерацію із прикладу 3.1.6 на основі кодування МТ.

Ці нумерації назвемо *стандартними нумераціями n-арних ЧРФ.*

Для стандартних нумерацій уведемо такі позначення:

n-арну ЧРФ із номером m позначатимемо φ_m^n.

У випадку $n = 1$ уживатимемо також спрощене позначення φ_m.

Область визначення та область значень функції φ_m^n позначимо, відповідно, D_m^n та E_m^n.

У випадку $n = 1$ уживатимемо позначення D_m та E_m.

Номер функції назвемо також *індексом* функції.

Номер функції у стандартній нумерації назвемо *стандартним індексом* функції.

Маючи деякий індекс ЧРФ f, можна ефективно знайти як завгодно великий індекс тієї самої f.

Приклад 3.1.8. Для кожної ЧРФ φ_m^n і кожного $j \in N$ ефективно знайдеться $k \in N$ таке, що $k > j$ та $\varphi_k^n = \varphi_m^n$.

Обмежимось розглядом випадку нумерації n-арних ЧРФ кодами МНР-програм. У кінець заданої МНР-програми P_m допишемо j команд вигляду $T(0, 0)$. Нехай k – код отриманої у такий спосіб МНР-програми. Тоді $k > j$ та $\varphi_k^n = \varphi_m^n$.

Ґьоделеві нумерації. Перехід від одної з описаних вище нумерацій ЧРФ до іншої такої нумерації ефективний: існує алгоритм, який за номером функції f в одній нумерації φ дозволяє знайти номер f в іншій нумерації ψ.

Наприклад, алгоритм переходу від нумерації прикладу 3.1.4 до нумерації прикладу 3.1.6: за номером k як за кодом МНР-програми будуємо програму P_k; за P_k будуємо МТ, що задає ту саму функцію; код такої МТ – шуканий номер у нумерації прикладу 3.1.6.

Нумерації з описаною вище властивістю називають ґьоделевими. Уточнимо поняття ґьоделевої нумерації для n-арних ЧРФ.

Нумерація ξ *ґьоделева*, якщо існують рекурсивні функції f та g такі:

– для кожного $m \in N$ маємо $\varphi_m^n = \xi_{f(m)}$;

– для кожного $k \in N$ маємо $\xi_k = \varphi_{g(k)}^n$.

Це означає, що існує пара алгоритмів, перший із яких за стандартним індексом функції знаходить її ξ-індекс, а другий за ξ-індексом функції – її стандартний індекс.

Приклад 3.1.9. Кожна ґьоделева нумерація ефективна.

Нехай нумерація ξ ґьоделева. За ЧРФ, заданою стандартним індексом (кодом МНР-програми) m як φ_m^n, ефективно (використовуючи РФ f) знаходимо її ξ-індекс $f(m)$; за ξ-індексом k ефективно (використовуючи РФ g) знаходимо ЧРФ, задану кодом МНР-програми (стандартним індексом) $g(m)$.

Важливе поняття обчислюваної нумерації вводимо так.

Нехай **F** – деякий клас функцій вигляду $X \to Y$, для якого задано нумерацію $\xi : N \to \mathbf{F}$. З кожною нумерацією ξ пов'язана функція $u : N \times X \to Y$, що визначається умовою $u(n, x) = \xi_n(x)$.

Таку функцію u називають *спряженою* з нумерацією ξ.

Нумерація *обчислювана*, якщо спряжена з нею функція є ЧРФ.

Приклад 3.1.10. Кожна ґьоделева нумерація обчислювана.

Справді, нехай нумерація ξ ґьоделева, нехай g – РФ із визначення ґьоделевої нумерації. Тоді спряжена з нумерацією ξ функція $u(n, x) = \xi_n(x) = \varphi^n_{g(k)}$ є ЧРФ за тезою Чорча.

Зворотне твердження неправильне. Кожна обчислювана нумерація в певному сенсі зводиться до ґьоделевої, водночас існують приклади неґьоделевих обчислюваних нумерацій.

Завдання для самоконтролю

1. Укажіть, як задати ефективну нумерацію всіх МНР-обчислюваних функцій фіксованої арності *n*.
2. Укажіть, як задати ефективну нумерацію всіх МТ-обчислюваних функцій фіксованої арності *n*.
3. Укажіть, як задати ефективну нумерацію всіх МНР- і МТ-обчислюваних функцій.
4. Укажіть, як задати ефективну нумерацію всіх *n*-арних ЧРФ.
5. Укажіть, як задати ефективну нумерацію всіх *n*-арних ПРФ.
6. Укажіть, які нумерації *n*-арних ЧРФ вважають стандартними.
7. Дайте визначення стандартного індексу ЧРФ.
8. Дайте визначення ґьоделевої нумерації *n*-арних ЧРФ.
9. Дайте визначення спряженої з нумерацією функції.
10. Дайте визначення обчислюваної нумерації.

Вправи

1. Задайте ефективну нумерацію всіх квазіарних РФ.
2. Задайте ефективну нумерацію всіх програмованих квазіарних функцій на *N*.
3. Чи існують $m, n \in N$ такі, що $m \neq n$, $m \in D_n$ та $n \in D_m$?
4. Чи існують $m, n \in N$ такі, що $m \neq n$, $m \in E_n$ та $n \in E_m$?
5. Чи існує РФ f: для всіх x маємо $D_x = \{f(x)\}$?

3.2. Універсальні функції. *s-m-n*-теорема

Для довільного класу k-арних функцій $\mathbf{F}$ клас усіх функцій із $\mathbf{F}$ фіксованої арності n будемо позначати $\mathbf{F}^n$.

Функція $u(y, x_1,..., x_n)$ *універсальна* для класу $\mathbf{F}^n$, якщо:

– для кожного значення m функція $u(m, x_1,..., x_n) \in \mathbf{F}^n$;

– для кожної $f \in \mathbf{F}^n$ існує таке m, що $f(x_1,..., x_n) = u(m, x_1,..., x_n)$ для всіх $x_1,..., x_n$.

Теорема 3.2.1. Нехай $\mathbf{T}$ – деякий клас тотальних n-арних функцій на N, який містить функції $\mathbf{o}$, s, I^n_m та є замкненим відносно суперпозиції. Нехай функція u універсальна для $\mathbf{T}^n$. Тоді $u \notin \mathbf{T}^{n+1}$.

Припустимо супротивне: така $u \in \mathbf{T}$, тобто $u \in \mathbf{T}^{n+1}$.

Визначимо функцію g так: $g(x_1,..., x_n) = u(x_1, x_1,..., x_n) + 1$.

Тоді маємо $g \in \mathbf{T}^n$. Згідно з універсальністю функції u, існує таке m, що для всіх значень $x_1,..., x_n$ маємо $g(x_1,..., x_n) = u(m, x_1,..., x_n)$. Звідси $g(m, x_2,..., x_n) = u(m, m, x_2,..., x_n)$. Однак за визначенням g маємо $g(m, x_2,\ldots, x_n) = u(m, m, x_2,..., x_n) + 1$. Дістали суперечність, тому що g та u тотальні.

Наслідок 3.2.1. Функція, універсальна для класу n-арних РФ, не є ЧРФ.

Справді, така функція тотальна й не є РФ.

Наслідок 3.2.2. Функція, універсальна для класу n-арних ПРФ, не є ПРФ.

Теорема 3.2.2. Існує РФ, універсальна для класу n-арних ПРФ.

На основі розглянутої вище ефективної нумерації ПРФ задамо алгоритм для обчислення функції $u(y, x_1,..., x_n)$, універсальної для класу n-арних ПРФ.

За y як за кодом ОТ алгебри ПРФ побудуємо відповідний ОТ і перевіримо, чи задає він n-арну ПРФ. Якщо ні (ОТ некоректний чи задає ПРФ арністю $\neq n$), то видаємо як результат значення 0 (тоді $u(y, x_1,..., x_n)$ – це функція $\mathbf{o}^n$). Якщо так, то обчислимо значення заданої цим термом n-арної ПРФ над $x_1,..., x_n$.

Отже, u – це тотальна $(n+1)$-арна АОФ, за тезою Чорча вона є РФ.

Наслідок 3.2.3. Існує РФ, яка не є ПРФ.

Наслідок 3.2.4. Для класів функцій маємо строгі включення: ПРФ $\subset$ РФ $\subset$ ЧРФ.

Теорема 3.2.3. Існує ЧРФ, універсальна для класу n-арних ЧРФ.

Розглянемо функцію $u(y, x_1,..., x_n) = \varphi_y^n(x_1,..., x_n)$. Вона є універсальною для класу n-арних ЧРФ:

– для кожного m функція $u(m, x_1,..., x_n) = \varphi_m^n(x_1,..., x_n)$ – ЧРФ;

– кожна n-арна ЧРФ f – це функція φ_m^n для деякого m, тобто

$$f(x_1,..., x_n) = \varphi_m^n(x_1,..., x_n) = u(m, x_1,..., x_n) \text{ для всіх } x_1,..., x_n.$$

Задамо алгоритм для обчислення функції u.

За y як за кодом МНР-програми відновимо програму P_y для функції φ_y^n. Потім запустимо P_y над значеннями $x_1,..., x_n$.

Отримаємо значення $\varphi_y^n(x_1,..., x_n)$.

За тезою Чорча така u – n-арна ЧРФ.

МНР-програма, яка обчислює універсальну ЧРФ, називається *універсальною МНР-програмою*.

Універсальна програма вміє декодувати довільне число y у програму P_y, а далі вона моделює роботу P_y. Тому така універсальна програма може бути задана у явному вигляді.

Отже, можна ефективно знайти індекс k універсальної функції u у стандартній нумерації $(n+1)$-арних ЧРФ, тобто u – функція φ_k^{n+1}.

Машина Тьюрінга, яка обчислює універсальну ЧРФ, називається *універсальною МТ*.

Таку МТ, здатну моделювати роботу довільної МТ за її кодом, теж можна задати у явному вигляді.

Універсальна МНР-програма й універсальна МТ є абстрактними моделями сучасних комп'ютерів. Вони реалізують у абстрактному вигляді *принцип програмного керування* – виконання заданої програми над заданими даними.

Особливе місце в теорії алгоритмів посідає ***s-m-n*-теорема**. Інша її назва – теорема про параметризацію.

Нехай маємо $(m+n)$-арну ЧРФ $\varphi_z^{m+n}(x_1,..., x_m, y_1,..., y_n)$. Тоді для кожного фіксованого значення $a_1,..., a_m$ аргументів $x_1,..., x_m$

функція φ_z^{m+n} стає n-арною ЧРФ $\varphi_k^n(y_1,..., y_n)$. Покажемо, що її індекс k може бути ефективно знайдений за z та $a_1,..., a_m$. Це означає, що існує $(m+1)$-арна РФ, яка обчислює зазначений індекс. Таку функцію традиційно позначають s_m^n, а твердження, відповідно, називають *s-m-n*-теоремою.

Теорема 3.2.4 (*s-m-n*-теорема). Для довільних $m, n \geq 1$ існує $(m+1)$-арна РФ $s_m^n(z, x_1,..., x_m)$ така, що для всіх $z, x_1,..., x_m$, $y_1,..., y_n$ маємо $\varphi_z^{m+n}(x_1,..., x_m, y_1,..., y_n) = \varphi^n_{s_n^m(z, x_1,...,x_m)}(y_1,..., y_n)$.

Приклад 3.2.1. Посилимо твердження теореми 3.2.4, знявши залежність функції s_m^n від n.

Використаємо МТ для задання ЧРФ. За z визначимо МТ із кодом z для функції φ_z^{m+n}. Задамо нову МТ M, яка ліворуч від початкового вмісту стрічки дописує слово $|^{x_1}\#|^{x_2}\#...\#|^{x_m}$, а далі моделює роботу МТ із кодом z. Така МТ M при вході $|^{y_1}\#|^{y_2}\#...\#|^{y_n}$ обчислює n-арну функцію φ_k^n, причому k – код МТ M – не залежить від n.

Теорема 3.2.5 (спрощена форма *s-m-n*-теореми). Для кожної ЧРФ $f(x_1,..., x_m, y_1,..., y_n)$ існує РФ $s(x_1,..., x_m)$ така: для всіх $x_1,..., x_m$, $y_1,..., y_n$ маємо $f(x_1,..., x_m, y_1,..., y_n) = \varphi^n_{s(x_1,...,x_m)}(y_1,..., y_n)$.

При $m = n = 1$ спрощена *s-m-n*-теорема формулюється так:

Теорема 3.2.6. Для кожної ЧРФ $f(x, y)$ існує РФ $s(x)$ така: для всіх значень x, y маємо $f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$.

Розглянемо приклади застосування *s-m-n*-теореми.

Приклад 3.2.2. Існує РФ $s(x, y)$ така: $\varphi_{s(x,y)}(z) = \varphi_x(z) + \varphi_y(z)$ для всіх $x, y, z \in N$.

Функція $f(x, y, z) = \varphi_x(z) + \varphi_y(z)$ є ЧРФ, тому за *s-m-n*-теоремою існує РФ $s(x, y)$: $f(x, y, z) = \varphi_{s(x,y)}(z) = \varphi_x(z) + \varphi_y(z)$ для всіх $x, y, z \in N$.

Приклад 3.2.3. Існує РФ $s(x)$ така: $D^2_{s(x)} = \{(u, v) | \ x = 2u + 3v^2\}$ для всіх $x \in N$.

Функція $f(x,u,v) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 2u + 3v^2, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$: $f(x, u, v) = \varphi^2_{s(x)}(u, v)$ для всіх $x, u, v \in N$. Зафіксуємо x; тоді $(u, v) \in D^2_{s(x)}$ $\Leftrightarrow$ $\varphi^2_{s(x)}(u, v)\downarrow$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x, u, v)\downarrow \Leftrightarrow x = 2u + 3v^2$.

Звідси отримуємо $D^2_{s(x)} = \{(u, v) \mid x = 2u + 3v^2\}$.

Приклад 3.2.4. Існують РФ $u(x, y)$ і $s(x, y)$ такі: для всіх $x, y \in N$ маємо $D_{u(x,y)} = D_x \cup D_y$ та $D_{s(x,y)} = D_x \cap D_y$.

Функція $f(x, y, z) = \begin{cases} z, \text{ якщо } z \in D_x \text{ або } z \in D_y, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ.

За s-m-n-теоремою існує РФ $u(x, y)$ така: $f(x, y, z) = \varphi_{u(x,y)}(z)$ для всіх $x, y, z \in N$. Зафіксуємо x та y. Маємо $z \in D_{u(x,y)} \Leftrightarrow \varphi_{u(x,y)}(z)\downarrow \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x, y, z)\downarrow \Leftrightarrow z \in D_x \cup D_y$. Звідси $D_{u(x,y)} = D_x \cup D_y$.

Функція $g(x, y, z) = \begin{cases} z, \text{ якщо } z \in D_x \text{ та } z \in D_y, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ.

За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x, y)$ така: $g(x, y, z) = \varphi_{s(x,y)}(z)$ для всіх $x, y, z \in N$. Зафіксуємо x та y. Маємо $z \in D_{s(x,y)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x,y)}(z)\downarrow \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(x, y, z)\downarrow \Leftrightarrow z \in D_x \cap D_y$. Звідси $D_{s(x,y)} = D_x \cap D_y$.

Приклад 3.2.5. Існують РФ s та t такі: для кожного $x \in N$ маємо $E_{s(x)} = D_x$ та $D_{t(x)} = E_x$.

Функція $f(x, y) = \begin{cases} y, \text{ якщо } y \in E_x, \\ \text{невизначене, якщо } y \notin E_x, \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ.

Тому за s-m-n-теоремою існує РФ $t(x)$: $f(x, y) = \varphi_{t(x)}(y)$ для всіх значень x, y. Тоді $y \in E_x \Leftrightarrow f(x, y)\downarrow \Leftrightarrow \varphi_{t(x)}(y)\downarrow \Leftrightarrow y \in D_{t(x)}$. Звідси $D_{t(x)} = E_x$.

Функція $g(x, y) = \begin{cases} y, \text{ якщо } y \in D_x, \\ \text{невизначене, якщо } y \notin D_x, \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ.

Тому за s-m-n-теоремою існує така РФ $s(x)$, що $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ для всіх значень x, y. За побудовою $E_{s(x)} = D_{s(x)}$. Маємо $y \in D_x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(x, y)\downarrow \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(y)\downarrow \Leftrightarrow y \in D_{s(x)} \Leftrightarrow y \in E_{s(x)}$. Звідси $D_x = E_{s(x)}$.

Приклад 3.2.6. Існує РФ $s(x, y)$: $D_{s(x,y)} = D_{2x+1} \cap E_{3y}$ для всіх $x, y \in N$.

Функція $f(x, y, z) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } z \in D_{2x+1} \text{ та } z \in E_{3y}, \\ \text{невизначене інакше}, \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x, y)$: $f(x, y, z) = \varphi_{s(x,y)}(z)$ для всіх $x, y, z \in N$. Зафіксуємо x та y. Тоді $z \in D_{s(x,y)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x,y)}(z)\downarrow \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x, y, z)\downarrow \Leftrightarrow z \in D_{2x+1} \cap E_{3y}$. Звідси $D_{s(x,y)} = D_{2x+1} \cap E_{3y}$.

Приклад 3.2.7. Існує РФ $s(x, y, z)$ така: для всіх $x, y, z \in N$ маємо $D_{s(x,y,z)} = E_{s(x,y,z)} = (D_{3x} \cup D_y) \setminus \{2, 5z\}$.

$$f(x, y, z, u) = \begin{cases} u, \text{ якщо } (u \in D_{3x} \text{ або } u \in D_y) \text{ та } u \neq 2,\ u \neq 5z, \\ \text{невизначене інакше}, \end{cases}$$

є ЧРФ за ТЧ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x, y, z)$ така: $f(x, y, z, u) = \varphi_{s(x,y,z)}(u)$ для всіх $x, y, z, u \in N$. Зафіксуємо значення x, y, z. За побудовою f маємо $D_{s(x,y,z)} = E_{s(x,y,z)}$. Тепер маємо $u \in E_{s(x,y,z)} \Leftrightarrow u \in D_{s(x,y,z)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x,y,z)}(u)\downarrow \Leftrightarrow f(x, y, z, u)\downarrow \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow u \in (D_{3x} \cup D_y) \setminus \{2, 5z\}$. Звідси $D_{s(x,y,z)} = E_{s(x,y,z)} = (D_{3x} \cup D_y) \setminus \{2, 5z\}$.

Приклад 3.2.8. Для кожної 1-арної ЧРФ f існує РФ $s(x)$ така, що для всіх $x \in N$ маємо $D_{s(x)} = f^{-1}(D_{3x+1})$.

Розглянемо функцію $g(x, y) = \varphi_{3x+1}(f(y))$. Вона є ЧРФ за ТЧ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$ така, що для всіх $x, y \in N$ маємо $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$. Зафіксуємо x. Тоді $y \in D_{s(x)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(y)\downarrow \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(x, y)\downarrow \Leftrightarrow \varphi_{3x+1}(f(y))\downarrow \Leftrightarrow f(y) \in D_{3x+1} \Leftrightarrow y \in f^{-1}(D_{3x+1})$. Звідси маємо $D_{s(x)} = f^{-1}(D_{3x+1})$.

Приклад 3.2.9. Для кожної 1-арної ЧРФ f існує РФ $s(x)$ така, що для всіх $x \in N$ маємо $D_{s(x)} = f(D_x)$.

Функція $h(x, y) = \begin{cases} 1, \ y = f(z) \text{ для деякого } z \in D_x, \\ \text{невизначене інакше}, \end{cases} =$

$= \begin{cases} 1, \text{ існує } z : \varphi_x(z)\downarrow \text{ та } y = f(z), \\ \text{невизначене інакше}, \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ (аргументувати!), тому за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$ така: $h(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ для всіх $x, y \in N$. Зафіксуємо x. Маємо $y \in D_{s(x)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(y)\downarrow \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(x, y)\downarrow \Leftrightarrow y = f(z)$ для деякого $z \in D_x \Leftrightarrow y \in f(D_x)$. Звідси $D_{s(x)} = f(D_x)$.

Приклад 3.2.10. Існує РФ $s(x)$ така, що $D_{s(x)} = \{x\}$ для всіх $x \in N$.

Функція $h(x, y) = \begin{cases} y, \text{ якщо } y = x, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$

є ЧРФ за ТЧ $\Rightarrow$ за s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$: $h(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ для всіх $x, y \in N \Rightarrow$ для всіх $x \in N$ маємо $D_{s(x)} = \{x\}$.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення універсальної функції.
2. Сформулюйте теореми про універсальні функції.
3. Дайте визначення універсальної ЧРФ.
4. Дайте визначення універсальної МНР-програми.
5. Дайте визначення універсальної МТ.
6. Опишіть принцип роботи універсальної МНР-програми.
7. Опишіть, як пов'язані універсальні алгоритмічні машини із програмуванням.
8. Сформулюйте s-m-n-теорему в загальному вигляді.
9. Сформулюйте s-m-n-теорему у спрощеній формі.

Вправи

1. Чи існує РФ f: для всіх $x \in N$ маємо $D_{f(x)} = \{0, 1, \ldots, x\}$?

2. Побудуйте нескінченну послідовність попарно різних натуральних чисел $n_0, n_1, \ldots$ таку, щоб для всіх $i \in N$ мати $D_{n_{i+1}} = \{n_i\}$.

3. Доведіть існування таких РФ s:

1) $D^3_{s(x)} = \{(u, v, w) \mid x = u^2 + v^2 + w^2\}$ для всіх $x \in N$;

2) $D^4_{s(x)} = \{(u, v, w, t) \mid x = 6u + 3v + 4w + 5t\}$ для всіх $x \in N$;

3) $D_{s(x,y)} = E_{2x+3} \cap D_{3y+2}$ для всіх $x, y \in N$;

4) $D_{s(x,y,z)} = (D_x \cap E_y) \cup D_z$ для всіх $x, y, z \in N$;

5) $E_{s(x,y)} = (D_{3x} \cap E_{2y}) \cup \{x, y\}$ для всіх $x, y \in N$;

6) $D_{s(x,y,z)} = (D_x \cup E_{3y}) \cap D_{2z}$ для всіх $x, y, z \in N$;

7) $E_{s(x,y,z)} = \varphi_z^{-1}(E_x \cap D_y)$ для всіх $x, y, z \in N$;

8) $D_{s(x,y,z)} = \varphi_z^{-1}(D_{x+7} \cup D_{2y+1})$ для всіх $x, y, z \in N$;

9) $E_{s(x,y,z)} = \varphi_z(E_{3x} \cap D_{5y})$ для всіх $x, y, z \in N$.

3.3. Теореми Кліні про псевдонерухому точку для індексних рекурсивних функцій

Теореми про нерухому точку зустрічаються в багатьох розділах математики. У цьому підрозділі розглянемо теореми про нерухому точку для індексних рекурсивних функцій (точніше кажучи, вони є теоремами про *псевдонерухому* точку). Такі теореми є твердженнями про індекси обчислюваних функцій, їхнє доведення може розглядатися як розвиток діагонального методу: воно використовує тільки s-m-n-теорему й обчислюваність універсальної ЧРФ.

Теорема 3.3.1. Нехай f – $(n+1)$-арна РФ. Тоді існує n-арна РФ g:

$$\varphi_{g(x_1,...,x_n)} = \varphi_{f(g(x_1,...,x_n),x_1,...,x_n)} \text{ для всіх значень } x_1,..., x_n.$$

За s-m-n-теоремою існує РФ $s(u, x_1,..., x_n)$: для всіх $u, x_1,..., x_n, y$

$$\varphi_{\varphi_u^{n+1}(u,x_1,...,x_n)}(y) = \varphi_{s(u,x_1,...,x_n)}(y). \qquad (1)$$

Нехай функція $f(s(u, x_1,..., x_n), x_1,..., x_n)$ має індекс k у нумерації $(n+1)$-арних ЧРФ, тобто це функція $\varphi_k^{n+1}(u, x_1,..., x_n)$. За тотальністю f та s така φ_k^{n+1} тотальна. Тому при $u = k$ для всіх $x_1,..., x_n$ маємо

$$f(s(u, x_1,..., x_n), x_1,..., x_n) = \varphi_k^{n+1}(k, x_1,..., x_n). \qquad (2)$$

З умови (1) при $u = k$ та з умови (2) для всіх $x_1,..., x_n$ маємо

$$\varphi_{f(s(x_1,...,x_n),x_1,...,x_n)} = \varphi_{\varphi_k^{n+1}(k,x_1,...,x_n)} = \varphi_{s(k,x_1,...,x_n)}.$$

Звідси $g(x_1,..., x_n) = s(k, x_1,..., x_n)$ – це шукана РФ.

Для випадку $n = 0$ теорему 3.3.1 переформулюємо:

Теорема 3.3.2. Нехай $f(x)$ – РФ. Тоді існує $n \in N$ таке: $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$.

Наслідок 3.3.1. Нехай $f(x)$ – РФ. Тоді існує $n \in N$ таке: $D_n = D_{f(n)}$ та $E_n = E_{f(n)}$.

Згідно з теоремою 3.3.2, візьмемо $n \in N$ таке, що $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$.

Наслідок 3.3.2 (первинне формулювання С. Кліні теореми про псевдонерухому точку). Нехай $h(z,x)$ – ЧРФ. Тоді існує $n\in N$ таке, що для всіх x маємо $h(n,x) = \varphi_n(x)$.

За s-m-n-теоремою існує РФ $s(z)$ така, що $h(z, x) = \varphi_{s(z)}(x)$ для всіх z, x. За теоремою 3.3.2 існує таке n, що $\varphi_n = \varphi_{s(n)}$, тобто для всіх x маємо $h(n, x) = \varphi_{s(n)}(x) = \varphi_n(x)$.

Приклад 3.3.1. Виведемо теорему 3.3.2 з наслідку 3.3.2.

Нехай $f(x)$ – РФ. За тезою Чорча функція $h(z, x) = \varphi_{g(z)}(x)$ є ЧРФ. За наслідком 3.3.2 існує $n\in N$ таке, що $h(n, x) = \varphi_n(x)$ для всіх x, тобто для всіх x маємо $h(n, x) = \varphi_{g(n)}(x) = \varphi_n(x)$.

Отже, наслідок 3.3.2 і теорема 3.3.2 еквівалентні.

Теорема Кліні про нерухому точку для індексних рекурсивних функцій – це фактично теорема про *псевдонерухому* точку.

Справді, умова $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$ не означає, що $n = f(n)$, а свідчить тільки про те, що n і $f(n)$ – індекси однієї й тієї самої ЧРФ.

Теорему про нерухому точку для індексних функцій називають також теоремою про рекурсію, тому що вона виражає рекурсивне визначення найзагальнішого вигляду.

Наприклад, визначимо функцію φ_n через задану РФ f як $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$. Тоді φ_n ефективно визначена через n – код МНР-програми для її обчислення, тому що таке n існує згідно з теоремою 3.3.2.

МНР-програму P назвемо *самотвірною*, якщо для довільного $x\in N$ маємо $P(x)\downarrow\tau(P)$, де $\tau(P)$ – код програми P.

На перший погляд, таких програм бути не може, тому що для побудови P треба знати $\tau(P)$, тобто саму програму P. Проте самотвірні програми таки існують!

Приклад 3.3.2. Існує МНР-програма P така, що $P(x)\downarrow\tau(P)$ для всіх $x\in N$.

Візьмемо функцію $h(z, x) = z$. За наслідком 3.3.2 існує таке n, що для всіх x маємо $h(n, x) = \varphi_n(x)$. Отже, $\varphi_n(x) = h(n, x) = n$ для всіх x. Тому програма P із кодом n є шуканою.

Нерухому точку кожної РФ φ_z можна *ефективно* визначити за індексом z цієї РФ. Це посилює теорему 3.3.2.

Теорема 3.3.3. Існує РФ $\alpha(x)$ така:

для кожного $n \in N$, якщо φ_n є РФ, то $\varphi_{\alpha(n)} = \varphi_{\varphi_n(\alpha(n))}$.

Для кожної РФ можна ефективно знайти монотонно зростаючу послідовність її нерухомих точок.

Теорема 3.3.4. Для кожної РФ $f(x)$ існує строго монотонна РФ $\alpha(x)$ така, що для кожного $n \in N$ маємо $\varphi_{\alpha(n)} = \varphi_{f(\alpha(n))}$.

Наслідок 3.3.3. Для кожної РФ $f(x)$ і кожного $k \in N$ існує $n \in N$ таке, що $n > k$ та $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$.

Отже, множина нерухомих точок кожної РФ *нескінченна*.

Приклад 3.3.3. Однозначна нумерація $\xi : N \to$ ЧРФ^1 на основі стандартної нумерації $\varphi : N \to$ ЧРФ^1. Задамо тотальну функцію $f(x)$:

$f(0) = 0$;

$f(x+1) = \mu_z(\varphi_z \neq \varphi_{f(0)}, \varphi_z \neq \varphi_{f(1)}, \ldots, \varphi_z \neq \varphi_{f(x)})$.

Нумерація ξ, задана умовою $\xi_n = \varphi_{f(n)}$, – шукана однозначна.

Проте така нумерація неефективна: $f(x)$ не є РФ і не є ЧРФ.

Розглянуті нами ефективні нумерації ЧРФ неоднозначні. Однозначні ефективні нумерації ЧРФ існують, але немає в певному сенсі "природних" однозначних ефективних нумерацій ЧРФ.

Теорема 3.3.5. Нехай $f(x)$ – строго монотонна тотальна функція така:

– якщо $m \neq n$, то $\varphi_{f(m)} \neq \varphi_{f(n)}$;

– $f(n)$ – найменший індекс функції $\varphi_{f(n)}$.

Тоді функція f не є ЧРФ.

Приклад 3.3.4. Спільної нерухомої точки для двох довільних РФ може не бути.

Нехай u та v – різні РФ. Нехай k та m – індекси функцій u та v, тобто $u = \varphi_k$, $v = \varphi_m$. Візьмемо функції-константи $f(x) = k$ та $g(x) = m$. Нехай n – спільна нерухома точка для f та $g \Rightarrow \varphi_n = \varphi_{f(n)}$ та $\varphi_n = \varphi_{g(n)}$. Звідси $u = \varphi_k = \varphi_{f(n)} = \varphi_n = \varphi_{g(n)} = \varphi_m = v$, що суперечить $u \neq v$.

Водночас можна знайти пару ефективно зв'язаних нерухомих точок для пари заданих РФ.

Теорема 3.3.6 (про парну рекурсію). Для кожної пари РФ $f(x)$ та $g(x)$ існують m, $n \in N$ такі, що $\varphi_m = \varphi_{f(C(m,n))}$ та $\varphi_n = \varphi_{g(C(m,n))}$.

Розглянемо приклади застосування теореми Кліні про нерухому точку для індексних РФ.

Приклад 3.3.5. Існує $n \in N$ таке: для всіх x маємо $\varphi_n(x) = 2n + x^{3n}$.

Візьмемо функцію $h(z, x) = 2z + x^{3z}$. За наслідком 3.3.2 існує таке n, що для всіх x маємо $h(n, x) = \varphi_n(x)$.

Отже, для всіх x отримуємо $\varphi_n(x) = h(n, x) = 2n + x^{3n}$.

Приклад 3.3.6. Існує $n \in N$ таке, що $D_n = E_n = \{n\}$.

Візьмемо функцію $h(z, x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x = z, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$

Така h є ЧРФ. За наслідком 3.3.2 існує таке n, що для всіх x маємо $h(n, x) = \varphi_n(x)$. Тоді $\varphi_n(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x = n, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$

Звідси отримуємо $D_n = E_n = \{n\}$.

Приклад 3.3.7. Існує $n \in N$ таке, що $D_n = E_n = N \setminus \{n, 2n, 3n\}$.

Задамо $h(z, x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \neq z, \ x \neq 2z \text{ та } x \neq 3z, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$

Така h є ЧРФ. За наслідком 3.3.2 існує n таке: $h(n, x) = \varphi_n(x)$ для всіх x. Тоді $\varphi_n(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \neq n, \ x \neq 2n \text{ та } x \neq 3n, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$

Звідси отримуємо $D_n = E_n = N \setminus \{n, 2n, 3n\}$.

Приклад 3.3.8. Існує $n \in N$ таке, що
$D_n = E_n = \{x \mid x \text{ непарне}\} \cup \{0, 2, 4, ..., 2n\}$.

Функція $h(z, x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \text{ непарне або } x \in \{0, 2, 4, ..., 2z\}, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$

є ЧРФ за тезою Чорча. За наслідком 3.3.2 існує таке n, що $h(n, x) = \varphi_n(x)$ для всіх x. Тоді

$\varphi_n(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \text{ непарне або } x \in \{0, 2, 4, ..., 2n\}, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$

Звідси $D_n = E_n = \{x \mid x \text{ непарне}\} \cup \{0, 2, 4, ..., 2n\}$.

Приклад 3.3.9. Існує $n \in N$ таке, що

$D_n = E_n = \{x \mid \varphi_n(5x+2)\downarrow\} \cap \{x \mid x \text{ парне}\}$.

Функція $h(z, x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } \phi_z(5x+2)\downarrow \text{ та } x \text{ парне,} \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$

є ЧРФ за тезою Чорча. За наслідком 3.3.2 існує таке n, що для всіх x отримуємо

$$h(n, x) = \varphi_n(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } \phi_n(5x+2)\downarrow \text{ та } x \text{ парне,} \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$$

тому $D_n = E_n = \{x \mid \varphi_n(5x+2)\downarrow\} \cap \{x \mid x \text{ парне}\}$.

Приклад 3.3.10. Існує РФ $g(x)$ така: $D_{g(x)} = E_{g(x)} = \{3g(x) + 4^x\}$ для кожного $x \in N$.

Функція $h(t, x, y) = \begin{cases} y, \text{ якщо } y = 3t + 4^x, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ.

За s-m-n-теоремою існує РФ $s(t, x)$ така: $h(t, x, y) = \varphi_{s(t,x)}(y)$ для всіх $t, x, y \in N$. За теоремою 3.3.1 існує РФ g така, що для всіх $x \in N$ маємо $\varphi_{g(x)} = \varphi_{s(g(x),x)}$. Тоді $\varphi_{g(x)}(y) = \varphi_{s(g(x),x)}(y) = h(g(x), x, y) =$ $= \begin{cases} y, \text{ якщо } y = 3g(x) + 4^x, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$ тому $D_{g(x)} = E_{g(x)} = \{3g(x) + 4^x\}$ для всіх $x \in N$.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте теорему Кліні про нерухому точку для індексних РФ.
2. Сформулюйте теорему Кліні про нерухому точку для 1-арних індексних РФ.
3. Наведіть первинне формулювання С. Кліні теореми про нерухому точку.
4. Поясніть, що таке самотвірна МНР-програма.
5. Поясніть, чи існують РФ зі скінченними множинами нерухомих точок.
6. Поясніть, чи існують "природні" однозначні ефективні нумерації ЧРФ і уточніть, що таке "природність".

7. Поясніть, чи завжди існують спільні нерухомі точки для двох РФ.

8. Сформулюйте теорему про парну рекурсію.

Вправи

1. Доведіть, що існує $n \in N$ таке:

1) $D_n = \{x \mid \varphi_n(x)\downarrow\} \cap \{x \mid x$ є простим числом$\}$;
2) $D_n = E_n = N \setminus \{1, 2, 3, \ldots, n\}$;
3) $D_n = E_n = \{n, 2n, 3n, \ldots, n^2\}$;
4) $E_n = \{x \mid \varphi_n(2x+1)\downarrow\} \cup \{x \mid x$ є парним числом$\}$;
5) $D_n = E_n = \{x \mid \varphi_n(2x)\downarrow\} \cap \{x \mid x$ є непарним числом$\}$;
6) $D_n = E_n = \{x \mid x$ є парним числом$\} \setminus \{2n, 4n, 6n\}$;
7) $E_n = \{x \mid x$ є простим числом$\} \cup \{2n, 3n, 5n\}$;
8) $D_n = \{x \mid x$ не є простим числом$\} \setminus \{n, 3n, 5n\}$.

2. Доведіть, що існує РФ $g(x)$ така, що для всіх $x \in N$ маємо:

1) $D_{g(x)} = E_{g(x)} = \{2x \cdot g(x) + 3x^3\}$;
2) $E_{g(x)} = \{6x + (3 + 2x) \cdot g(x)\}$;
3) $D_{g(x)} = \{5x + 4g(x) + 3^{g(x)}\}$;
4) $D_{g(x)} = E_{g(x)} = \{x^2 \cdot g(x) + 4^x + 1\}$.

3. Доведіть, що для кожних РФ $g(x)$ та $m \in N$ існує $n \in N$ таке, що справджується $D_n = D_m \cup \{g(n)\}$.

*4. З'ясуйте, чи існують $m, n \in N$ такі, що $m \neq n$, $D_m = \{n\}$ та $D_n = \{m\}$.

*5. Побудуйте нескінченну послідовність попарно різних натуральних чисел $n_0, n_1, \ldots$ таку, що для всіх $i \in N$ маємо $D_{n_i} = \{n_{i+1}\}$.

*6. Спробуйте побудувати самотвірну МНР-програму.

4. РОЗВ'ЯЗНІСТЬ, ЧАСТКОВА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ, НЕРОЗВ'ЯЗНІСТЬ

Поняття примітивної рекурсивності, рекурсивності та часткової рекурсивності для функцій переносяться на випадок класичних предикатів; їм відповідають поняття примітивної рекурсивності, рекурсивності й рекурсивної перелічності для множин.

4.1. Примітивно-рекурсивні, рекурсивні, рекурсивно-перелічні множини

Множину $M \subseteq N^n$ називають *рекурсивною* (РМ), якщо її характеристична функція χ_M рекурсивна.

Множину $M \subseteq N^n$ називають *примітивно-рекурсивною* (ПРМ), якщо її характеристична функція χ_M примітивно-рекурсивна.

Множину $M \subseteq N$ називають *рекурсивно-перелічною* (РПМ), якщо $M = \varnothing$ або $M = E_f$ для деякої рекурсивної функції f.

Множина $M \subseteq N^n$ є *РПМ*, якщо $M = \varnothing$ або існують 1-арні РФ $g_1, \ldots, g_n$ такі, що $M = \{(g_1(x), \ldots, g_n(x)) \mid x \in N\}$.

Як наслідки тези Чорча дістаємо такі твердження:

– клас РМ збігається із класом алгоритмічно розв'язних множин натуральних чисел;

– клас РПМ збігається із класом алгоритмічно перелічних множин натуральних чисел.

Для кожної $L \subseteq N^n$ визначимо множину-згортку:

$$C^n(L) = \{C^n(x_1, \ldots, x_n) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in L\}.$$

Нехай $L \subseteq N^n$ та $M \subseteq N^n$.

Тоді

$$C^n(L \cup M) = C^n(L) \cup C^n(M),$$
$$C^n(L \cap M) = C^n(L) \cap C^n(M),$$
$$C^n(N^n \setminus L) = N \setminus C^n(L).$$

Теорема 4.1.1. Множина $L \subseteq N^n$ є РМ (ПРМ, РПМ) $\Leftrightarrow$ множина $C^n(L)$ є РМ (ПРМ, РПМ).

Отже, можна обмежитися розглядом РМ, ПРМ та РПМ, заданих на N.

Теорема 4.1.2. Класи ПРМ та РМ замкнені щодо операцій $\cup$, $\cap$ та доповнення.

Нехай χ_A та χ_B є РФ (ПРФ). Маємо $\chi_{\overline{A}}(x) = nsg(\chi_A(x))$, $\chi_{A\cup B}(x) = sg(\chi_A(x) + \chi_B(x))$, $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

Таким чином, $\chi_{\overline{A}}$, $\chi_{A\cup B}$, $\chi_{A\cap B}$ є РФ (ПРФ).

Кожна ПРФ є РФ, тому кожна ПРМ є РМ. Водночас:

Приклад 4.1.1. Існують РМ, які не є ПРМ.

Нехай $u(t,x)$ – рекурсивна універсальна функція для ПРФ[1]. Тоді $f(x) = nsg(u(x,x))$ – характеристична функція деякої РМ L. Якщо $f(x)$ є ПРФ, то за універсальністю $u(t,x)$ існує $k\in N$ таке: $f(x) = u(k, x)$ для всіх x. Тоді $f(k) = u(k, k) = nsg(u(k, k))$. Маємо суперечність, тому $f(x)$ не є ПРФ, звідки L не є ПРМ.

Отже, клас ПРМ строго включається у клас РМ.

Приклад 4.1.2. Кожна скінченна множина є ПРМ.

Нехай $L = \{a_1,\ldots, a_n\}$. Тоді $\chi_L(x) = nsg((\prod_{i=0}^{n} | x - a_i |))$ – ПРФ.

Приклад 4.1.3. Кожна РМ є РПМ.

Нехай $L \subseteq N$ є РМ. Якщо $L = \varnothing$, то L за визначенням є РПМ.

Якщо $L \neq \varnothing$, то візьмемо якийсь $b\in L$. Функція χ_L рекурсивна, тому $f(x) = x\cdot\chi_L(x) + b\cdot nsg(\chi_L(x))$ теж рекурсивна, причому за побудовою $L = E_f$. Отже, L є РПМ.

Як наслідок із цих прикладів отримуємо такі включення для класів множин (тут СкМ позначає клас скінченних множин):

$$\text{СкМ} \subset \text{ПРМ} \subset \text{РМ} \subseteq \text{РПМ}.$$

Фундаментальною властивістю РМ та РПМ є

Теорема 4.1.3 (Поста). L та $\overline{L}$ є РПМ $\Rightarrow$ L та $\overline{L}$ є РМ.

Вважаємо $L\neq\varnothing$ та $\overline{L} \neq \varnothing$, інакше твердження теореми тривіальне. Нехай f та g – такі РФ: $L = E_f$ та $\overline{L} = E_g$. Задамо функцію $h(x)$: $h(2\cdot x) = f(x)$, $h(2\cdot x + 1) = g(x)$. Така h є РФ, причому $E_h = E_f \cup E_g = N$. Візьмемо довільне $b\in N$. Поступово обчислюємо $h(0)$, $h(1)$, … Згідно з $E_h = N$ маємо $b = h(n)$ для деякого n.

Якщо n парне, то $b = h(n) = f(n/2) \Rightarrow b\in L$.

Якщо n непарне, то $b = h(n) = g((n-1)/2) \Rightarrow b \in \overline{L} \Rightarrow b \notin L$.

Отже, L алгоритмічно розв'язна, тому L є РМ за ТЧ.

Аналогічно доводимо рекурсивність множини $\overline{L}$.

Елементарні властивості РМ та РПМ встановлює

Теорема 4.1.4. 1) Множина L є нескінченною РМ $\Leftrightarrow L = E_f$ для деякої строго монотонної РФ f;

2) якщо L – нескінченна РПМ, то існує нескінченна РМ M: $M \subseteq L$;

3) якщо L – нескінченна РПМ, то існує ін'єктивна РФ f: $L = E_f$.

Приклад 4.1.4. Нехай A та B – РПМ, C – РМ, причому $A \cap B = \varnothing$ та $A \subseteq C \subseteq A \cup B$. Тоді A є РМ.

Нехай РФ f та g такі: $A = E_f$ та $B = E_g$. Наведемо алгоритм розв'язання для A, звідки заТЧ A є РМ. Візьмемо довільне $x \in N$:

– $x \notin C \Rightarrow$ згідно з $A \subseteq C$ маємо $x \notin A$;

– $x \in C \Rightarrow$ згідно із $C \subseteq A \cup B$ маємо $x \in A \cup B$.

Задамо перелік $A \cup B$: $f(0)$, $g(0)$, …, $f(n)$, $g(n)$, …; тоді існує k таке: $x = f(k)$ або $x = g(k)$, тобто $x \in A$ або $x \in B$; згідно з $A \cap B = \varnothing$ із $x \in B$ маємо $x \notin A$.

Приклад 4.1.5. Нехай f – РФ, g – ін'єктивна РФ така, що E_g є РМ, причому $f(x) \geq g(x)$ для всіх x. Тоді E_f є РМ.

Беремо довільне $y \in N$; g – ін'єктивна РФ $\Rightarrow$ існує t таке, що всі значення $g(x) \leq y$ будуть від аргументів $x \leq t$, тобто для всіх $x > t$ маємо $g(x) > y$. Звідси $t = \mu_z(\{g(0),\ldots, g(z)\} \supseteq E_g \cap \{0,\ldots,y\})$. Для всіх $x > t$ маємо $f(x) \geq g(x) > y$, тому $y \in E_f \Leftrightarrow y \in \{f(0),\ldots,f(t)\}$. Таким чином, E_f розв'язна $\Rightarrow$ за ТЧ E_f є РМ.

Теорема 4.1.5. Такі визначення РПМ є еквівалентними:

*df*1) $L = \varnothing$ або L є областю значень деякої РФ;

*df*2) L є областю значень деякої ЧРФ;

*df*3) L є областю визначення деякої ЧРФ;

*df*4) часткова характеристична функція множини L є ЧРФ.

*df*3 та *df*4 можна використовувати для РПМ, заданих на N^n.

Доведення теореми 4.1.5 опирається на приклад 3.2.5 і таке твердження:

Теорема 4.1.6. Існує РФ α така: $E_{\alpha(x)} = D_x$ для кожного $x \in N$ та $\varphi_{\alpha(x)}$ є РФ при $D_x \neq \varnothing$.

Ефективну нумерацію РПМ уведемо на основі нумерацій n-арних ЧРФ згідно із *df*3. Назвемо її *стандартною нумерацією РПМ*.

Номером (індексом) РПМ $L \subseteq N^n$ є номер n-арної ЧРФ f такої:

$$L = D_f.$$

РПМ $L \subseteq N^n$ із номером m позначаємо D_m^n, або D_m при $n = 1$.

Множину $\{L \subseteq N^n \mid L \text{ є РПМ}\}$ позначаємо РПМ^n.

Аналогічно вводимо позначення РМ^n та ПРМ^n.

Згідно із прикладом 3.2.4 існують РФ u та s такі, що для всіх $x, y \in N$ маємо $D_{u(x,y)} = D_x \cup D_y$ та $D_{s(x,y)} = D_x \cap D_y$.

Отже, клас РПМ *замкнений* щодо операцій $\cup$ та $\cap$.

Крім того, згідно із прикладом 3.2.4 можна *ефективно* знайти індекси РПМ $A \cup B$ та $A \cap B$ за індексами РПМ A та B.

Для множин на N задамо операції сполучення $\oplus$ і добутку $\otimes$:

$$A \oplus B = \{2x | x \in A\} \cup \{2x + 1 | x \in B\};$$

$$A \otimes B = \{C(x, y) | \ x \in A, y \in B\}.$$

Теорема 4.1.7. 1) A та B є РМ $\Leftrightarrow$ $A \oplus B$ є РМ;

2) A та B є РПМ $\Leftrightarrow$ $A \oplus B$ є РПМ;

3) $(A \neq \varnothing$ та $B \neq \varnothing) \Rightarrow (A$ та B є РМ $\Leftrightarrow$ $A \otimes B$ є РМ);

4) $(A \neq \varnothing$ та $B \neq \varnothing) \Rightarrow (A$ та B є РПМ $\Leftrightarrow$ $A \otimes B$ є РПМ).

Доведемо для РПМ. Для РМ доведення аналогічне, але замість

Доводимо п. 2. Маємо $x \in A \Leftrightarrow 2x \in A \oplus B$ та $x \in B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x + 1 \in A \oplus B$. Звідси $\chi_A^ч(x) = \chi_{A \oplus B}^ч(2x)$, $\chi_B^ч(x) = \chi_{A \oplus B}^ч(2x+1)$.

Тому $\chi_{A \oplus B}^ч$ є ЧРФ $\Rightarrow$ $\chi_A^ч$ є ЧРФ та $\chi_B^ч$ є ЧРФ.

Маємо $x \in A \oplus B \Leftrightarrow (x$ парне & $x/2 \in A) \vee (x$ непарне & $(x-1)/2 \in B)$.

За ТЧ маємо: $\chi_A^ч$ є ЧРФ та є $\chi_B^ч$ ЧРФ $\Rightarrow$ $\chi_{A \oplus B}^ч$ є ЧРФ.

Таким чином, $A \oplus B$ є РПМ $\Leftrightarrow$ A є РПМ та B є РПМ.

Доводимо п. 4. Нехай $A \neq \varnothing$ та $B \neq \varnothing$. Зафіксуємо $a \in A$ та $b \in B$.

Маємо $x \in A \Leftrightarrow C(x, b) \in A \otimes B$ та $x \in B \Leftrightarrow C(a, x) \in A \otimes B$.

Тому $\chi_A^ч(x) = \chi_{A \otimes B}^ч(C(x,b))$, $\chi_B^ч(x) = \chi_{A \otimes B}^ч(C(a,x))$.

Тепер маємо:

$$x \in A \otimes B \Leftrightarrow l(x) \in A \ \& \ r(x) \in B \Rightarrow \chi_{A \otimes B}^ч(x) = \chi_A^ч(l(x)) \cdot \chi_B^ч(r(x)).$$

Звідси при $A, B \neq \varnothing$ маємо:

$$A \otimes B \text{ є РПМ} \Leftrightarrow A \text{ є РПМ та } B \text{ є РПМ}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення РМ, ПРМ, РПМ.
2. Сформулюйте наслідки тези Чорча для РМ і РПМ.
3. Дайте визначення, що таке множина-згортка.
4. Укажіть співвідношення між класами ПРМ, РМ і РПМ.
5. Укажіть, відносно яких теоретико-множинних операцій замкнені класи ПРМ і РМ.
6. Укажіть, відносно яких теоретико-множинних операцій замкнений клас РПМ.
7. Сформулюйте властивості РМ і РПМ.
8. Сформулюйте еквівалентні визначення РПМ.
9. Сформулюйте теорему Поста для множин.
10. Укажіть, як задається стандартна нумерація РПМ.
11. Дайте визначення операцій $\oplus$ та $\otimes$.
12. Укажіть, чи замкнені щодо операцій $\oplus$ та $\otimes$ класи ПРМ, РМ, РПМ.

Вправи

1. Доведіть, що множина $L \neq \varnothing$ рекурсивна $\Leftrightarrow$ існує нестрого монотонно зростаюча РФ g така, що $L = E_g$.
2. Нехай A – РМ, f – сюр'єктивна РФ така, що $f(A) \cap f(N \backslash A) = \varnothing$. Доведіть, що тоді множина $f(A)$ рекурсивна.
3. Нехай f є РФ, A є РМ. Доведіть, що тоді $f^{-1}(A)$ є РМ.
4. Доведіть теорему 4.1.4.
5. Дайте повне доведення теореми 4.1.7.
6. Доведіть принцип редукції: для довільних РПМ A та B існують РПМ L та M такі, що $L \subseteq A$, $M \subseteq B$, $L \cap M = \varnothing$ та $L \cup M = A \cup B$.

*7. Нехай f – РФ така, що множина $\{n \mid \varphi_n = \varphi_{f(n)}\}$ є РМ. Доведіть, що $\{\varphi_n \mid \varphi_n = \varphi_{f(n)}\}$ збігається із множиною всіх 1-арних ЧРФ.

4.2. Примітивно-рекурсивні, рекурсивні, частково рекурсивні предикати

n-арний предикат на N називають *рекурсивним* (РП), якщо його характеристична функція рекурсивна.

n-арний предикат на N називають *примітивно-рекурсивним* (ПРП), якщо його характеристична функція є ПРФ.

n-арний предикат на N називають *частково рекурсивним* (ЧРП), якщо його часткова характеристична функція є ЧРФ.

Замість "$P(x_1,..., x_n) = T$" будемо писати "$P(x_1,..., x_n)$".

Теорема 4.2.1. 1) Предикат P є ЧРП (РП, ПРП) $\Leftrightarrow$ $T(P)$ є РПМ (РМ, ПРМ);

2) класи ПРП та РП замкнені щодо операцій $\vee$, &, $\neg$;

3) клас ЧРП замкнений щодо операцій $\vee$ та &;

4) клас ПРП строго включається у клас РП;

5) кожний рекурсивний предикат є ЧРП;

6) якщо P та $\neg P$ – ЧРП, то P та $\neg P$ – РП (теорема Поста).

Приклад 4.2.1. Множина L і предикат "$x\in L$" мають однакові характеристичні й частково характеристичні функції. Тому:

L є РМ $\Leftrightarrow$ "$x\in L$" є РП; L є РПМ $\Leftrightarrow$ "$x\in L$" є ЧРП.

Теорема 4.2.2. $Q(x_1,..., x_n)$ є ЧРП $\Leftrightarrow$ існує РП $R(x_1,..., x_n, y)$:

$$Q(x_1,..., x_n) \Leftrightarrow \exists y R(x_1,..., x_n, y).$$

Теорема 4.2.3. 1) $Q(x_1,..., x_n, y)$ є ЧРП $\Rightarrow$ $\exists y Q(x_1,..., x_n, y)$ є ЧРП;

2) $Q(x_1,..., x_n, y)$ є ЧРП $\Rightarrow$ $\exists y_1...\exists y_k Q(x_1,..., x_n, y_1,..., y_k)$ є ЧРП.

Приклад 4.2.2. Предикат "x є числом Ферма" є ЧРП:

"x є числом Ферма" $\Leftrightarrow \exists u \exists v \exists w\, (u > 0 \,\&\, v > 0 \,\&\, w > 0 \,\&\, u^x + v^x = w^x)$.

Предикат у дужках є РП $\Rightarrow$ за теоремою 4.2.2 наш предикат є ЧРП.

Приклад 4.2.3. Предикат "$y\in E_x$" є ЧРП.

Маємо $y\in E_x \Leftrightarrow \exists z \exists k$ ($P_x(z){\downarrow}y$ за k кроків). Предикат у дужках є РП, тому за теоремою 4.2.2 наш предикат є ЧРП.

Приклад 4.2.4. Предикат "$D_x \neq \varnothing$" є ЧРП.

Маємо $D_x \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists z \exists k$ ($P_x(z){\downarrow}$ за k кроків). Предикат у дужках є РП, тому за теоремою 4.2.2 наш предикат є ЧРП.

Приклад 4.2.5. Предикат "φ_x неін'єктивна" є ЧРП:

φ_x неін'єктивна $\Leftrightarrow$ $\exists a\exists b\exists c$ $(a\neq b$ & $\varphi_x(a)=c$ & $\varphi_x(b)=c)$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\exists a\exists b\exists c\exists k\exists l$ $(a\neq b$ & $(P_x(a){\downarrow}c$ за k кроків) & $(P_x(b){\downarrow}c$ за l кроків)).

Приклад 4.2.6. Предикат "$\{x, y\}\subseteq D_{5z}$" є ЧРП.

Маємо $\{x, y\}\subseteq D_{5z} \Leftrightarrow x\in D_{5z}$ & $y\in D_{5z} \Leftrightarrow \exists k$ $(P_{5z}(x){\downarrow}$ за k кроків) & $\exists k$ $(P_{5z}(y){\downarrow}$ за k кроків). У дужках РП, тому наш предикат – ЧРП.

Приклад 4.2.7. Предикат "$0\in E^2_{3x+1}$" є ЧРП.

Маємо $0\in E^2_{3x+1} \Leftrightarrow \exists z\exists u\exists k$ $(P_{3x+1}(z, u){\downarrow}0$ за k кроків). Предикат у дужках є РП, тому за теоремою 4.2.2 наш предикат є ЧРП.

Приклад 4.2.8. Існує РФ $s(x, y)$ така: $E_{s(x,y)} = (D_{3x}\cap E_{2y})\cup\{x, y\}$ для всіх $x, y\in N$.

Множину $(D_{3x}\cap E_{2y})\cup\{x, y\}$ позначимо L. Предикат "$z\in L$" є ЧРП: $z\in L \Leftrightarrow z=x \vee z=y \vee (z\in D_{3x}$ & $z\in E_{2y})$ $\Leftrightarrow$ $z=x \vee z=y \vee$ $\vee$ $(\exists k(P_{3x}(z){\downarrow}$ за k кроків) & $\exists u\exists k(P_{3y}(u){\downarrow}z$ за k кроків)). Тому $f(x, y, z)=\begin{cases} z, \text{ якщо } z\in L, \\ \text{невизначене інакше} \end{cases}$ є ЧРФ. За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x, y)$: $f(x, y, z) = \varphi_{s(x,y)}(z)$ для всіх x, y, z. Зафіксуємо x та y. За побудовою f маємо $D_{s(x,y)} = E_{s(x,y)}$. Тепер $z\in E_{s(x,y)} \Leftrightarrow z\in D_{s(x,y)} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \varphi_{s(x,y)}(z){\downarrow} \Leftrightarrow f(x, y, z){\downarrow} \Leftrightarrow z\in L$. Звідси $E_{s(x,y)} = L = (D_{3x}\cap E_{2y})\cup\{x, y\}$.

Приклад 4.2.9. Предикат "$\varphi_{5x}(4y)$ парне" є ЧРП.

$\varphi_{5x}(4y)$ парне $\Leftrightarrow \exists u\exists k$ $(P_{5x}(4y){\downarrow}u$ за k кроків та u парне). Предикат у дужках є РП $\Rightarrow$ за теоремою 4.2.2 наш предикат є ЧРП.

Приклад 4.2.10. Предикат "$y\in C(D^2_{3x})$" є ЧРП.

Маємо $y\in C(D^2_{3x}) \Leftrightarrow \exists u\exists v$ $(y = C(u, v)$ & $(u, v)\in D^2_{3x})$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists u\exists v\exists k$ $(y = C(u, v)$ & $P_{3x}(u, v){\downarrow}$ за k кроків). Предикат у дужках є РП $\Rightarrow$ за теоремою 4.2.2 наш предикат є ЧРП.

Приклад 4.2.11. Множина $L = \{C(x, y) \mid x\in D_y\}$ є РПМ.

Предикат "$z\in L$" є ЧРП: $z\in L \Leftrightarrow \exists x\exists y$ $(z = C(x, y)$ & $x\in D_y)$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists x\exists y(z = C(x, y)$ & $\exists k(P_y(x){\downarrow}$ за k кроків)). Звідси L є РПМ.

Приклад 4.2.12. Корисні співвідношення для подальших конкретних прикладів:

– $z\in \varphi_x^{-1}(L) \Leftrightarrow \varphi_x(z)\in L \Leftrightarrow \exists t(t=\varphi_x(z)$ & $t\in L)$;

$-\ z\in\varphi_x(L) \Leftrightarrow \exists t(z=\varphi_x(t)\ \&\ t\in L)$.

Приклад 4.2.13. Предикат "$z\in\varphi_{3x}(E_y)$" є ЧРП:
$z\in\varphi_{3x}(E_y) \Leftrightarrow \exists t(z=\varphi_{3x}(t)\ \&\ t\in E_y) \Leftrightarrow \exists t(\exists m(P_{3x}(t){\downarrow}z$ за m кроків) $\&$ $\&\ \exists s\exists n\ (P_y(s){\downarrow}t$ за n кроків)). Далі використовуємо рекурсивність предикатів під кванторами й теорему 4.2.2.

Приклад 4.2.14. Предикат "$5y\in\varphi_x^{-1}(E_{2x}\cup D_{3y})$" є ЧРП:
$5y\in\varphi_x^{-1}(E_{2x}\cup D_{3y}) \Leftrightarrow \varphi_x(5y)\in E_{2x}\cup D_{3y} \Leftrightarrow \exists t(t=\varphi_x(5y)\ \&\ t\in E_{2x}\cup D_{3y}) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists t(t=\varphi_x(5y)\ \&\ (\exists s\exists n(P_{2x}(s){\downarrow}t$ за n кроків) $\vee\ \exists k(P_{3y}(t){\downarrow}$ за k кроків))) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ \exists t\,(\exists m(P_x(5y){\downarrow}t$ за m кроків) $\&$ $(\exists s\exists n\,(P_{2x}(s){\downarrow}t$ за n кроків) $\vee$ $\vee\ \exists k(P_{3y}(t){\downarrow}$ за k кроків))). Далі використовуємо рекурсивність предикатів під кванторами й теорему 4.2.2.

Приклад 4.2.15. Предикат "$z\in\overline{\bar{D}_x\otimes\bar{D}_y}$" є ЧРП:

$$z\in\overline{\bar{D}_x\otimes\bar{D}_y} \Leftrightarrow \neg(z\in\bar{D}_x\otimes\bar{D}_y) \Leftrightarrow \neg(l(z)\in\bar{D}_x\ \&\ r(z)\in\bar{D}_y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg l(z)\in D_x\ \&\ \neg r(z)\in D_y) \Leftrightarrow l(z)\in D_x \vee r(z)\in D_y\,.$$

Функції $l(z)$ та $r(z)$ є ПРФ, тому наш предикат є ЧРП.

Приклад 4.2.16. Існує РФ s така: $E_{s(x,\,y,\,z)}=(D_{5x}\cap E_{x+y})\cup E_{y+3z}$ для всіх x, y, $z\in N$.

Множину $(D_{5x}\cap E_{x+y})\cup E_{y+3z}$ позначимо L. Предикат "$u\in L$" є ЧРП: $u\in L \Leftrightarrow (u\in D_{5x}\ \&\ u\in E_{x+y}) \vee u\in E_{y+3z} \Leftrightarrow (\exists k(P_{5x}(u){\downarrow}$ за k кроків) $\&$ $\&\ \exists v\exists k(P_{x+y}(v){\downarrow}u$ за k кроків)) $\vee\ \exists v\exists k(P_{y+3z}(v){\downarrow}u$ за k кроків)). Тому функція $f(x,y,z,u)=\begin{cases}u, & \text{якщо } u\in L,\\ \text{невизначене} & \text{інакше,}\end{cases}$ є ЧРФ.

За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x,y,z)$: $f(x,y,z,u)=\varphi_{s(x,y,z)}(u)$ $\forall\ x,y,z,u$. Зафіксуємо x,y,z. За побудовою f тоді $D_{s(x,y,z)}=E_{s(x,y,z)}$. Маємо $u\in E_{s(x,y,z)} \Leftrightarrow u\in D_{s(x,y,z)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x,y,z)}(u){\downarrow} \Leftrightarrow f(x,y,z,u){\downarrow} \Leftrightarrow u\in L$.

Теорема 4.2.4. $f(x_1,\ldots,x_n)$ є ЧРФ $\Leftrightarrow$ "$y=f(x_1,\ldots,x_n)$" є ЧРП.

Теорема 4.2.5 (Кліні про нормальну форму, посилене формулювання). Для кожної n-арної ЧРФ f існує $(n+1)$-арна ПРФ g: для всіх $x_1,\ldots,x_n\in N$ маємо $f(x_1,\ldots,x_n)=l\,(\mu_t\,(g(x_1,\ldots,x_n,t)=0))$.

Подання $l\,(\mu_t\,(g(x_1,\ldots,x_n,t)=0))$ називають *нормальною формою* функції $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення РП, ПРП, ЧРП.
2. Укажіть, який зв'язок існує між ПРП, РП, ЧРП та ПРМ, РМП, РПМ.
3. Укажіть, відносно яких логічних зв'язок замкнені класи ПРП і РП.
4. Укажіть, відносно яких логічних операцій замкнений клас ЧРП.
5. Укажіть співвідношення між класами ПРП, РП і ЧРП.
6. Сформулюйте теорему Поста для предикатів.
7. Укажіть зв'язок між РП і ЧРП.
8. Укажіть зв'язок між ЧРП і ЧРФ.
9. Сформулюйте теорему Кліні про нормальну форму.

Вправи

1. Доведіть: якщо A є РПМ, то $\bigcup_{x\in A} D_x$ та $\bigcup_{x\in A} E_x$ теж РПМ.
2. Нехай f є ЧРФ, A є РПМ. Доведіть, що $f^{-1}(A)$ та $f(A)$ є РПМ.
3. Доведіть: для кожного $k\in N$ множина ${}^kD_n = \{x \mid \varphi_n(x) = k\}$ є РПМ. Доведіть далі, що за фіксованого k послідовність ${}^kD_0, {}^kD_1,..., {}^kD_n,...$ є переліком усіх РПМ.
4. Доведіть, що РПМ будуть такі множини:
   1) $\{x \mid x\in E_{2x}\}$;
   2) $\{x \mid 2x\in D_{3x}\}$;
   3) $\{C(x, y) \mid x\in D_y\}$.
5. Доведіть, що ЧРП будуть такі предикати:
   1) "$\varphi_{2x}(3y)$ є повним квадратом";
   1) "$\varphi_{2x}(3y+1) + \varphi_{4y}(2x+3)$ непарне";
   2) "$\varphi_{3x+5}(4y+2) + z^3$ є простим числом";
   3) "$\{x, y, z+y\} \subseteq D_{x+4y+3}$";
   4) "$\{3, y+z^2\} \subseteq (E_{3x+2y} \cup D_{5x+3z}) \cap E_{x+4y}$";
   5) "$\{x, y\} \subseteq E^2_{3x+2y}$";
   6) "$3y\in \varphi_{2x}^{-1}(D_{2x+4}\cup E_{5y})$";
   7) "$\{2x, y\} \subseteq \varphi_{3z}(D_{x+7}\cap D_{2y+5x})$";
   8) "$z \in \overline{\bar{D}_{2x} \otimes \bar{E}_{3y}}$".

6. З'ясуйте, чи існує РФ s така:

1) для всіх $x, y \in N$ маємо $D_{s(x,\, y)} = (E_{2x+5} \cup D_{x+2y}) \cap D_{3y}$;

2) для всіх $x, y \in N$ маємо $E_{s(x,\, y)} = (D_{3x} \cap E_{2y}) \cup \{3y,\, x+y\}$;

3) для всіх $x \in N$ маємо $D_{s(x)} = C\,(D_x^2)$;

4) для всіх $x \in N$ маємо $D^2_{s(x)} = C^{-1}(D_x)$;

5) для всіх $x, y, z \in N$ маємо $E_{s(x,y,z)} = \varphi_{4z}^{-1}(D_{2x} \cup E_{3y+5})$;

6) для всіх $x, y \in N$ маємо $D_{s(x,y)} = \varphi_{3x}(D_{x+1} \cap E_{2y})$.

4.3. Алгоритмічна нерозв'язність проблем зупинки та самозастосовності. Наслідки нерозв'язності

Масова проблема *алгоритмічно розв'язна*, або просто *розв'язна*, якщо відповідний предикат рекурсивний, інакше проблему називають *алгоритмічно нерозв'язною*, або *нерозв'язною*.

Масова проблема *частково алгоритмічно розв'язна (частково розв'язна*, *напіврозв'язна)*, якщо відповідний предикат є ЧРП.

Прикладами алгоритмічно нерозв'язних проблем є проблеми зупинки й самозастосовності.

Проблема зупинки:

за x та y встановити, $\varphi_x(y){\downarrow}$ чи $\varphi_x(y){\uparrow}$.

Проблема самозастосовності:

за x встановити, $\varphi_x(x){\downarrow}$ чи $\varphi_x(x){\uparrow}$.

Неформально проблема зупинки означає: з'ясувати за x та y, чи зупиниться МНР-програма з кодом x при роботі над y.

Проблема самозастосовності означає: з'ясувати за x, чи зупиниться МНР-програма з кодом x при роботі над власним кодом.

Предикат "$\varphi_x(y){\downarrow}$", тобто "$\varphi_x(y)$ визначене", позначимо $Q(x, y)$.

Предикат "$\varphi_x(x){\downarrow}$", тобто "$\varphi_x(x)$ визначене", позначимо $S(x)$.

Зрозуміло, що $S(x) \Leftrightarrow Q(x, x)$.

Приклад 4.3.1. Предикати $Q(x, y)$ та $S(x)$ є ЧРП.

Маємо $\varphi_x(y){\downarrow} \Leftrightarrow (\exists k(P_x(y){\downarrow}$ за k кроків);

$\varphi_x(x){\downarrow} \Leftrightarrow (\exists k(P_x(x){\downarrow}$ за k кроків).

Отже, проблеми зупинки й самозастосовності частково розв'язні.

Теорема 4.3.1. Предикат $S(x)$ нерекурсивний, тобто проблема самозастосовності алгоритмічно нерозв'язна.

Припустимо супротивне: предикат $S(x)$ рекурсивний.

Тоді $\chi_S(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \varphi_x(x) \text{ визначене,} \\ 0, \text{ якщо } \varphi_x(x) \text{ невизначене,} \end{cases}$ є РФ.

Задамо

$$f(x) = 0 - \chi_S(x) = \begin{cases} \text{невизначене, якщо } \varphi_x(x) \text{ визначене,} \\ 0, \text{ якщо } \varphi_x(x) \text{ невизначене.} \end{cases}$$

За ТЧ f є ЧРФ. Нехай n – індекс f у нумерації ЧРФ[1], тобто $f(x) = \varphi_n(x)$. Тоді

$$\varphi_n(n) = \begin{cases} \text{невизначене, якщо } \varphi_n(n) \text{ визначене,} \\ 0, \text{ якщо } \varphi_n(n) \text{ невизначене,} \end{cases} \text{ – суперечність.}$$

Наслідок 4.3.1. Предикат $Q(x, y)$ нерекурсивний, тобто проблема зупинки алгоритмічно нерозв'язна.

$Q(x, y)$ є РП $\Rightarrow S(x) = Q(x, x)$ є РП суперечить теоремі 4.3.1.

Наслідок 4.3.2. Предикат $\neg S(x)$ не є ЧРП.

$S(x)$ є ЧРП. Якщо $\neg S(x)$ є ЧРП, то за теоремою Поста $S(x)$ і $\neg S(x)$ є РП, що суперечить теоремі 4.3.1.

Приклад 4.3.2. Множина $D = \{x \mid \varphi_x(x) \text{ визначене}\}$ – нерекурсивна РПМ; множина $\overline{D} = \{x \mid \varphi_x(x) \text{ невизначене}\}$ не є РПМ.

Множина D і предикат $S(x)$ мають однакові частково характеристичні функції, які є ЧРФ, і однакові характеристичні функції, які не є РФ.

Множина $\overline{D}$ та $\neg S(x)$ мають однакові частково характеристичні функції, які не є ЧРФ.

Наслідок 4.3.3. 1) Клас ЧРП незамкнений відносно $\neg$.

2) Клас РПМ незамкнений відносно операції доповнення.

Маємо такі співвідношення для відповідних класів функцій, множин і предикатів (СкМ позначає клас скінченних множин):

$$\text{ПРФ} \subset \text{РФ} \subset \text{ЧРФ};$$
$$\text{СкМ} \subset \text{ПРМ} \subset \text{РМ} \subset \text{РПМ};$$
$$\text{ПРП} \subset \text{РП} \subset \text{ЧРП}.$$

Приклад 4.3.3. Існує РП $R(x, y)$: предикат $\forall xR(x, y)$ не є РП і не є ЧРП.

Нехай $R(x, y)$ – це РП $\neg(P_x(x)\downarrow$ за y кроків). Тоді $\forall yR(x, y) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall y\neg(P_x(x)\downarrow$ за y кроків) $\Leftrightarrow \varphi_x(x)\uparrow$. Однак $\varphi_x(x)\uparrow$ не є ЧРП, тому не є РП.

Отже, класи РП та ЧРП незамкнені щодо операції $\forall x$.

Приклад 4.3.4. Існує РФ s така: $E_{s(x,y,z)} = (D_{3x} \setminus \{2x, y+1\}) \cup E_{y+5z}$ для всіх $x, y, z \in N$.

Множину $(D_{3x} \setminus \{2x,\ y+1\}) \cup E_{y+5z}$ позначимо L. Тоді "$u \in L$" є ЧРП: $u \in L \Leftrightarrow (u \in D_{3x} \,\&\, u \neq 2x \,\&\, u \neq y+1) \vee u \in E_{y+5z} \Leftrightarrow (\exists k(P_{3x}(u)\downarrow$ за k кроків) $\&\, u \neq 2x \,\&\, u \neq y+1) \vee \exists v \exists k\, (P_{y+5z}(v)\downarrow u$ за k кроків)).

Тому функція $f(x, y, z, u) = \begin{cases} u, & \text{якщо } u \in L, \\ \text{невизначене} & \text{інакше,} \end{cases}$ є ЧРФ.

За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x, y, z)$: $f(x, y, z, u) = \varphi_{s(x,y,z)}(u)$ $\forall\, x, y, z, u$. Зафіксуємо x, y, z. За побудовою $f\ D_{s(x,y,z)} = E_{s(x,y,z)}$. Тоді $u \in E_{s(x,y,z)} \Leftrightarrow u \in D_{s(x,y,z)} \Leftrightarrow \varphi_{s(x,y,z)}(u)\downarrow \Leftrightarrow f(x, y, z, u)\downarrow \Leftrightarrow u \in L$.

Приклад 4.3.5. Не існує РФ $s(x, y)$: $D_{s(x,y)} = E_x \setminus D_y$ для всіх $x, y \in N$.

Нехай така РФ $s(x, y)$ існує. Візьмемо значення x та y такі, що $E_x = N$ та $D_y = D$. Тоді $E_x \setminus D_y = N \setminus D = \overline{D}$ – не РПМ, але $D_{s(x,y)}$ є РПМ для всіх x, y. Отримали суперечність.

Приклад 4.3.6. Не існує РФ $s(x, y, z)$: $D_{s(x,y,z)} = (E_x \cap \overline{D}_y) \setminus D_z$ для всіх $x, y, z \in N$.

Нехай така РФ $s(x, y, z)$ існує. Візьмемо x, y, z такі, що $E_x = N$, $D_y = D$, $D_z = \varnothing$. Тоді $(E_x \cap \overline{D}_y) \setminus D_z = (N \cap \overline{D}) \setminus \varnothing = \overline{D}$ не є РПМ. Водночас $D_{s(x,y,z)}$ є РПМ для всіх x, y, z. Отримали суперечність.

Функція g називається *розширенням* функції f, якщо $D_f \subseteq D_g$ і для всіх $x \in D_f$ маємо $f(x) = g(x)$. Цей факт позначатимемо $f \subseteq g$.

Функцію f тоді називають звуженням функції g.

Зрозуміло, що $f \subseteq g \Leftrightarrow \Gamma_f \subseteq \Gamma_g$.

Тотальне розширення функції називається її *довизначенням*.

Не кожну ЧРФ можна довизначити до РФ.

Приклад 4.3.7. Функція $\varphi_x(x)$ не має рекурсивних довизначень.

Припустимо супротивне: $\varphi_x(x)$ має рекурсивне довизначення $f(x)$. Тоді функція $nsg(\varphi_x(x))$ має рекурсивне довизначення $g(x)$.

Нехай k – індекс g у нумерації 1-арних ЧРФ, тобто g – це φ_k. Значення $\varphi_k(k) = g(k)$ визначене, адже g є РФ, тому $nsg(\varphi_k(k))$ визначене. Маємо $nsg(\varphi_k(k)) = g(k) = \varphi_k(k)$ – суперечність.

Покажемо, що операція мінімізації μ_y істотно відрізняється від неконструктивної, узагалі кажучи, операції $\min_y$ для знаходження найменшого значення y, яке задовольняє певну умову.

Функція $f(x_1,..., x_n)$ виникає з функції $g(x_1,..., x_n, y)$ за допомогою операції $\min_y$, якщо для всіх значень $x_1,..., x_n$ маємо:

$$f(x_1,...,x_n)=\begin{cases}\text{найменше } y \text{ таке, що } g(x_1,...,x_n,y)=0,\\ \text{якщо таке } y \text{ існує,}\\ \text{невизначене, якщо таке } y \text{ не існує.}\end{cases}$$

Приклад 4.3.8. Існує ЧРФ h: $f(x) = \min_y(h(x, y) = 0)$ не є ЧРФ.

Функція $h(x,y)=\begin{cases}0, \text{ якщо } y=1 \text{ або } (y=0 \text{ та } x\in D),\\ \text{невизначене інакше,}\end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ. Функція $f(x) = \min_y (h(x, y) = 0)$ тотальна, тому що для всіх $x\in N$ маємо $f(x) = 1$ або $f(x) = 0$.

Якщо $x\in D$, то $h(x, 0) = 0$, тому $f(x) = 0$.

Якщо $x\notin D$, то $h(x, 0)$ невизначене, але $h(x,1) = 1$, тому $f(x) = 1$.

Отже, $f(x) = nsg(\chi_D(x))$, звідки $f(x)$ не є РФ і не є ЧРФ.

Розглянемо співвідношення між класами функцій та їхніх графіків.

Приклад 4.3.9. Якщо f є ПРФ /РФ, то Γ_f є ПРМ /РМ.

Справді, $\chi_{\Gamma_f}(x_1,..., x_n, y) = nsg(|y-f(x_1,..., x_n)|)$.

Приклад 4.3.10. Існують РФ f такі, що Γ_f не є ПРМ.

Розглянемо $f(x) = nsg(u(x, x))$, де $u(t, x)$ – універсальна РФ для 1-арних ПРФ. Якщо $\chi_{\Gamma_f}(x, y) = nsg(|y - f(x)|)$ є ПРФ, то функція $\chi_{\Gamma_f}(x, 1) = nsg(|1 - nsg(u(x, x))|) = nsg(u(x, x)) = f(x)$ теж ПРФ. Однак $u(t, x)$ не є ПРФ, тому χ_{Γ_f} не ПРФ, звідки Γ_f не є ПРМ.

Теорема 4.3.2 (про графік). $f(x_1,..., x_n)$ є ЧРФ $\Leftrightarrow$ Γ_f є РПМ.

Теорема 4.3.3 (Сколема). Γ_f є РМ/ПРМ $\Leftrightarrow$ існує РФ/ПРФ g така: для всіх $x_1,..., x_n\in N$ маємо $f(x_1,..., x_n) = \mu_t(g(x_1,..., x_n, t) = 0)$.

Приклад 4.3.11. Існують РФ f, які не можна подати у вигляді $f(x_1,..., x_n) = \mu_t(g(x_1,..., x_n, t) = 0)$ для деякої ПРФ g.

Справді, візьмемо РФ f таку, що Γ_f не є ПРМ.

Приклад 4.3.12. Існують ЧРФ f такі, які не можна подати у вигляді $f(x_1,..., x_n) = \mu_t(g(x_1,..., x_n, t) = 0)$ для деякої РФ g.

Візьмемо функцію $\chi_L^ч$ для нерекурсивної РПМ L. Тоді $\Gamma_{\chi_L^ч}$ нерекурсивна, а за теоремою Сколема таке подання неможливе.

Приклад 4.3.13. Існують РФ h, які не є ПРФ, але Γ_h є ПРМ.

Функція $f(x) = nsg(u(x, x))$, де $u(t, x)$ – універсальна РФ для 1-арних ПРФ, не є ПРФ. За теоремою Кліні про нормальну форму існує ПРФ g: $f(x) = l(\mu_t(g(x, t) = 0))$. За теоремою Сколема графік Γ_h функції $h(x) = \mu_t(g(x, t) = 0)$ є ПРМ. Однак, якщо h є ПРФ, то функція $f(x) = l(h(x))$ теж є ПРФ. Дістали суперечність, тому h не є ПРФ.

Приклад 4.3.14. Скінченні функції є ЧРФ, проте вони не є РФ, тому існують нерекурсивні ЧРФ зі скінченним графіком.

Приклад 4.3.15. Існують ЧРФ із нерекурсивним графіком.

Такими є, зокрема, функції $\chi_L^ч$ для нерекурсивних РПМ L.

Справді, якщо $\chi_L^ч = \{(x, 1) \mid x \in L\}$ рекурсивна, то за ТЧ множина $L = pr_1(\Gamma_{\chi_L^ч})$ рекурсивна, що суперечить нерекурсивності L.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте, що таке алгоритмічно розв'язна масова проблема.
2. Сформулюйте, що таке частково алгоритмічно розв'язна масова проблема.
3. Сформулюйте проблему зупинки.
4. Сформулюйте проблему самозастосовності.
5. Сформулюйте наслідки алгоритмічної нерозв'язності проблеми самозастосовності.
6. Наведіть приклади нерекурсивних РПМ і множин, які не є РПМ.
7. Наведіть приклади нерекурсивних ЧРП і предикатів, які не є ЧРП.
8. Наведіть приклад ЧРФ, яка не має рекурсивних довизначень.

9. Укажіть замкненість і незамкненість РПМ щодо теоретико-множинних операцій.

10. Укажіть замкненість і незамкненість РП щодо логічних операцій.

11. Укажіть замкненість і незамкненість ЧРП щодо логічних операцій.

12. Поясніть принципову різницю між операцією мінімізації μ_y та неконструктивною операцією $\min_y$.

13. Сформулюйте теорему про графік.

14. Сформулюйте теорему Сколема.

15. Укажіть співвідношення між класами функцій та їхніх графіків.

Вправи

1. З'ясуйте, чи правильно, що для довільних РФ f та РМ A множина $f(A)$ завжди є РМ.

2. З'ясуйте, чи існує РФ $f(x, y)$ така: якщо $P_x(y)\downarrow$, то це відбувається за $\leq f(x, y)$ кроків.

3. З'ясуйте, чи має рекурсивні довизначення функція $\varphi_x(y) + \varphi_y(x)$.

4. Нехай усі множини R_m, де $m \in N$, рекурсивні. З'ясуйте:

1) чи правильно, що множина $\bigcap\limits_{m \in N} R_m$ завжди є РМ;

2) чи правильно, що множина $\bigcap\limits_{m \in N} R_m$ завжди є РПМ.

5. З'ясуйте, чи існує РФ $s(x)$ така, що для всіх $x, y \in N$ маємо:

$$\varphi_{s(x)}(y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \varphi_x(y) = 1, \\ 0 \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

6. З'ясуйте, чи існує РФ s така:

1) для всіх $x, y \in N$ маємо $E_{s(x, y)} = (D_{2+x} \cap E_{4y}) \cup \{3y, x+y\}$;

2) для всіх $x, y \in N$ маємо $D_{s(x, y)} = (E_{4x} \cup D_{3y+x}) \setminus \{x, 2y\}$;

3) для всіх $x, y, z \in N$ маємо $E_{s(x,y,z)} = E_x \setminus (D_y \cup E_z)$;

4) для всіх $x, y, z \in N$ маємо $D_{s(x,y)} = D_x \cup (E_y \setminus D_x)$;

5) для всіх $x, y, z \in N$ маємо $E_{s(x,y,z)} = \overline{E}_x \setminus (E_y \cup D_z)$;

6) для всіх $x, y, z \in N$ маємо $D_{s(x,y,z)} = E_x \cup (D_y \setminus E_z)$;

7) для всіх $x, y, z \in N$ маємо $E_{s(x,y,z)} = \overline{D}_x \cup (D_y \setminus \overline{E}_z)$.

4.4. Індексні множини. Теореми Райса й Райса – Шапіро

Нехай $\varphi : N \to \mathfrak{I}$ – ефективна нумерація множини об'єктів $\mathfrak{I}$.

Для довільної $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{I}$ визначимо множину номерів усіх об'єктів із $\mathfrak{R}$: $N(\mathfrak{R}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{R})$. Множини вигляду $N(\mathfrak{R})$, де $\mathfrak{R} \subseteq$ ЧРФ^n (зокрема, $\mathfrak{R} \subseteq$ ЧРФ^1), назвемо *індексними*.

Теорема 4.4.1 (Райса). Нехай $\mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n та $\mathfrak{R} \neq \varnothing$. Тоді множина $N(\mathfrak{R})$ нерекурсивна.

Наслідок 4.4.1. Нехай $\mathfrak{R} \subset$ РПМ та $\mathfrak{R} \neq \varnothing$. Тоді $N(\mathfrak{R})$ не є РМ.

Теорема Райса стверджує: жодна нетривіальна властивість у класах усіх n-арних ЧРФ і всіх РПМ не може бути ефективно розпізнана!

Приклад 4.4.1. Множина $\{x \mid D_x \neq \varnothing\}$ – нерекурсивна РПМ.

Предикат "$D_x \neq \varnothing$" є ЧРП, тому що $D_x \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists y \exists k\, (P_x(y){\downarrow}$ за k кроків), а предикат "$P_x(y){\downarrow}$ за k кроків" є РП. Тому $\{x \mid D_x \neq \varnothing\}$ є РПМ. Однак за теоремою Райса $\{x \mid D_x \neq \varnothing\}$ не є РМ.

Додавши у формулювання теореми Райса умову $f_\varnothing \in \mathfrak{R}$, отримаємо певною мірою доповнювальне до цієї теореми твердження.

Теорема 4.4.2. Нехай $\mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n та $f_\varnothing \in \mathfrak{R}$. Тоді $N(\mathfrak{R})$ не є РПМ.

Приклад 4.4.2. Множина $\{x \mid D_x$ є РМ$\}$ не є РПМ.

Множина $\varnothing$ скінченна й рекурсивна, тому $f_\varnothing \in \{x \mid D_x$ є РМ$\}$, звідки за теоремою 4.4.2 множина $\{x \mid D_x$ є РМ$\}$ не є РПМ.

Приклад 4.4.3. Множина $\{x \mid D_x$ скінченна$\}$ не є РПМ.

Маємо $f_\varnothing \in \{\varphi_x \mid D_x$ скінченна$\}$, далі використовуємо теорему 4.4.2.

Приклад 4.4.4. Множина $\{x \mid \varphi_x$ не є РФ$\}$ не є РПМ.

Маємо $f_\varnothing \in \{\varphi_x \mid \varphi_x$ не є РФ$\}$, далі використовуємо теорему 4.4.2.

Приклад 4.4.5. Множина $\{x \mid \varphi_x$ несюр'єктивна$\}$ не є РПМ.

Маємо $f_\varnothing \in \{\varphi_x \mid \varphi_x$ несюр'єктивна$\}$, далі використовуємо теорему 4.4.2.

Приклад 4.4.6. Співвідношення, які далі будуть корисні:

$D_x = N \Leftrightarrow \varphi_x$ є РФ;

$D_x \neq N \Leftrightarrow \varphi_x$ не є РФ;

$E_x = N \Leftrightarrow \varphi_x$ сюр'єктивна;

$E_x \neq N \Leftrightarrow \varphi_x$ несюр'єктивна.

Тоді приклади 4.4.4 і 4.4.5 можна подати так:

Приклад 4.4.7. Предикат "$D_x \neq N$" не є ЧРП.

Приклад 4.4.8. Предикат "$E_x \neq N$" не є ЧРП.

Для скінченних множин на N уведемо **канонічну нумерацію**.

Нехай $L = \{x_1,..., x_n\}$, де $x_1< ...<x_n$.

Число $2^{x_1} + 2^{x_2} + ... + 2^{x_n}$ назвемо *канонічним кодом*, або *канонічним індексом,* множини L.

При цьому число 0 вважаємо кодом множини $\varnothing$.

Скінченну множину з канонічним індексом m позначаємо F_m.

Уведемо канонічну нумерацію для скінченних множин на N^n.

Канонічним номером, або канонічним індексом, скінченної множини $L \subset N^n$, вважаємо канонічний індекс множини $C^n(L)$.

Скінченну $L \subset N^n$ із канонічним індексом m позначаємо F_m^n .

Можливим є ефективний перехід від канонічного індексу скінченної множини до її стандартного індексу як РПМ, водночас зворотний ефективний перехід неможливий.

Теорема 4.4.3. 1) Існує РФ g така, що $F_x = D_{g(x)}$ для всіх $x \in N$.

2) Не існує ЧРФ f такої, що для всіх $x \in N$ маємо:

$$f(x) = \begin{cases} \text{канонічний індекс множини } D_x, \text{ якщо } D_x \text{ скінченна,} \\ \text{невизначене, якщо } D_x \text{ нескінченна.} \end{cases}$$

Сформулюємо критерій належності функції до конструктивної індексної множини, тобто до множини ЧРФ із рекурсивно-перелічною множиною індексів. Виявляється, що для цього достатньо скінченної інформації про функцію.

Теорема 4.4.4 (Райса – Шапіро). Нехай $\mathfrak{R} \subseteq$ ЧРФ^n така, що $N(\mathfrak{R})$ є РПМ. Тоді для довільної функції $f \in$ ЧРФ^n маємо:

$f \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow$ існує скінченна функція θ така, що $\theta \subseteq f$ та $\theta \in \mathfrak{R}$.

Приклад 4.4.9. Множина $\{x \mid D_x$ нескінченна$\}$ не є РПМ.

Припустимо, що $\{x \mid D_x$ нескінченна$\}$ є РПМ. За теоремою 4.4.4 для кожної нескінченної φ_x існує скінченна функція θ така, що $\theta \in \{\varphi_x \mid D_x$ нескінченна$\}$ та $\theta \subseteq \varphi_x$. Однак тоді θ нескінченна. Отримали суперечність.

Приклад 4.4.10. Множина $\{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$ не є РПМ.

Припустимо, що $\{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$ є РПМ. За теоремою Райса – Шапіро тоді для кожної РФ f існує скінченна функція θ: $\theta \subseteq f$ та θ є РФ. Однак скінченні функції не можуть бути РФ! Маємо суперечність.

Приклад 4.4.11. Множина $\{x \mid \varphi_x$ сюр'єктивна$\}$ не є РПМ.

Припустимо, що $\{x \mid \varphi_x$ сюр'єктивна$\}$ є РПМ. За теоремою Райса – Шапіро для кожної сюр'єктивної φ_x існує скінченна функція θ така, що $\theta \in \{\varphi_x \mid \varphi_x$ сюр'єктивна$\}$ та $\theta \subseteq \varphi_x$. Однак сюр'єктивні функції нескінченні. Отримали суперечність.

Ураховуючи приклад 4.4.6, приклади 4.4.10 та 4.4.11 можна подати так:

Приклад 4.4.12. Предикат "$D_x = N$" не є ЧРП.

Приклад 4.4.13. Предикат "$E_x = N$" не є ЧРП.

Приклад 4.4.14. З'ясуємо належність предиката "$D_x \neq D_y$" до класів РП та ЧРП.

Предикат "$D_x \neq D_y$" позначимо $Q(x, y)$.

Нехай m – індекс деякої РФ. Предикат $Q(x, m)$ позначимо $P(x)$. Тоді $P(x)$ означає "$D_x \neq N$". Маємо $T(P) = \{x \mid D_x \neq N\} = N(\mathfrak{R})$, де $\mathfrak{R} = \{\varphi_x \mid D_x \neq N\}$. Проте $f_{\varnothing} \in \mathfrak{R} \Rightarrow$ за теоремою 4.4.2 $N(\mathfrak{R}) = T(P)$ не є РПМ $\Rightarrow P(x)$ не ЧРП $\Rightarrow Q(x, y)$ не ЧРП, тому й не РП.

Завдання для самоконтролю

1. Укажіть, які множини називають індексними.
2. Поясніть, чи є індексною діагональна множина D.
3. Сформулюйте теорему Райса.
4. Поясніть, у чому полягає значення теореми Райса.
5. Сформулюйте теорему, дуальну до теореми Райса.

6. Поясніть, як визначається канонічна нумерація скінченних множин.

7. Укажіть співвідношення між канонічними та стандартними індексами скінченних множин.

8. Сформулюйте теорему Райса – Шапіро.

9. Наведіть приклади використання теорем про індексні множини.

Вправи

1. З'ясуйте належність до класів РМ та РПМ таких множин:

1) $\{x \mid 1 \in E_x^2\}$;

2) $\{x \mid (0,1) \in D_x^2\}$;

3) $\{x \mid \varphi_x$ є ПРФ$\}$;

4) $\{x \mid \varphi_x$ ін'єктивна$\}$;

5) $\{x \mid E_x$ не є РМ$\}$;

6) $\{x \mid E_x$ скінченна$\}$;

7) $\{x \mid \varphi_x$ бієктивна$\}$;

8) $\{x \mid \varphi_x$ не є ПРФ$\}$.

9) $\{x \mid \varphi_x$ не є константою$\}$;

10) $\{x \mid \varphi_x = \mathbf{o}\}$.

2. З'ясуйте належність до класів РП та ЧРП таких предикатів:

1) "$\{0, 1\} \subseteq D_x$";

2) "$\{0, 1\} \neq D_x$";

3) "φ_x є константою";

4) "φ_x не є ПРФ";

5) "D_x є ПРМ";

6) "$D_x = D$";

7) "$D_x \neq D$";

8) "$D_x = E_y$".

*3. Доведіть теорему Райса на основі теореми Кліні про псевдонерухому точку.

*4. Нехай f – РФ така, що множина $\{n \mid \varphi_n = \varphi_{f(n)}\}$ є РМ. Доведіть, що тоді $\{\varphi_n \mid \varphi_n = \varphi_{f(n)}\}$ збігається із множиною всіх 1-арних ЧРФ.

*5. Доведіть: існує РФ f така, що $\{n \mid \varphi_n = \varphi_{f(n)}\}$ не є РПМ.

5. *m*-ЗВІДНІСТЬ. ПРОДУКТИВНІ ТА КРЕАТИВНІ МНОЖИНИ

Для доведення розв'язності чи нерозв'язності масових проблем часто використовують метод звідності одних проблем до інших.

Проблема α *зводиться* до проблеми β, якщо з розв'язності β випливає розв'язність α.

Отже, якщо нерозв'язна проблема α зводиться до проблеми β, то β теж нерозв'язна.

Метод нумерацій дозволяє масові проблеми подавати за допомогою числових множин, тому далі розглядатимемо звідність множин.

5.1. *m*-звідність

Різні уточнення поняття звідності множини A до множини B (див., напр., [13, 19]) відрізняються за способом застосування та обсягом інформації про B, яку можна використати для розв'язання питання про A. Спочатку розглянемо *сильні* звідності: m-звідність та 1-звідність.

Множина A *m-зводиться* до множини B, якщо існує РФ g така, що для всіх $x \in N$ маємо $x \in A \Leftrightarrow g(x) \in B$.

Цей факт записуємо як $A \leq_m B$, або $g : A \leq_m B$, якщо треба вказати, що саме РФ g m-зводить A до B.

Неформально m-звідність множини A до множини B означає, що для розв'язання питання "$x \in A$" треба поставити єдине питання до B, причому заздалегідь указаним ефективним способом, який можна уточнити як певну РФ g, тобто ставимо питання "$g(x) \in B$".

Окремим випадком m-звідності є 1-звідність.

Множина A *1-зводиться* до множини B, якщо існує ін'єктивна РФ g така, що для всіх $x \in N$ маємо $x \in A \Leftrightarrow g(x) \in B$.

Цей факт будемо записувати як $A \leq_1 B$.

Властивості *m*-звідності та 1-звідності

$r1$) Якщо $A \le_1 B$, то $A \le_m B$.

$r2$) Відношення $\le_1$ та $\le_m$ рефлексивні й транзитивні.

$r3$) $A \le_m B \Leftrightarrow \overline{A} \le_m \overline{B}$; те саме правильно для $\le_1$.

$r4$) Якщо $A \le_m B$ та B є РМ, то A є РМ; те саме для $\le_1$.

$r5$) Якщо $A \le_m B$ та B є РПМ, то A є РПМ; те саме для $\le_1$.

$r6$) A є нерекурсивна РПМ $\Rightarrow$ неправильно $A \le_m \overline{A}$ та неправильно $\overline{A} \le_m A$; те саме для $\le_1$.

$r7$) $A \le_m N \Leftrightarrow A = N$; те саме для $\le_1$.

$r8$) $A \le_m \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$; те саме для $\le_1$.

$r9$) $N \le_m A \Leftrightarrow A \ne \varnothing$.

$r10$) $\varnothing \le_m A \Leftrightarrow A \ne N$.

$r11$) $N \le_1 A \Leftrightarrow A$ містить нескінченну РПМ.

$r12$) Якщо A рекурсивна і $B \ne \varnothing$ та $B \ne N$, то $A \le_m B$.

$r13$) Для довільної множини B маємо $A \le_m A \oplus B$ та $A \le_m B \oplus A$.

$r14$) Для довільної $B \ne \varnothing$ маємо: $A \le_m A \otimes B$ та $A \le_m B \otimes A$.

$r15$) A є РПМ $\Rightarrow A \le_m D$.

Твердження 5.1.1. Для кожної $B \subseteq N$ існує не більше ніж зліченна кількість множин $A \subseteq N$ таких, що $A \le_m B$.

$A \le_m B$, якщо існує РФ g така: $\forall x \in N$ маємо $x \in A \Leftrightarrow g(x) \in B$. Водночас множина всіх РФ зліченна.

На булеані множини N задамо відношення *m-еквівалентності*:

$$A \equiv_m B \Leftrightarrow A \le_m B \text{ та } B \le_m A.$$

Уведемо класи еквівалентності відносно $\equiv_m$:

$$d_m(A) = \{B \mid A \equiv_m B\}.$$

Такі класи еквівалентності будемо називати *m-степенями*.

Будемо писати $A <_m B$, якщо $A \le_m B$ і неправильно $B \le_m A$.

Писатимемо $A \mid_m B$, якщо неправильно $A \le_m B$ і неправильно $B \le_m A$.

Приклад 5.1.1. $\{x \mid \varphi_x = \mathbf{o}\} \equiv_m \{x \mid \varphi_x$ є константою $C\}$.

Позначимо $A = \{x \mid \varphi_x = \mathbf{o}\}$ та $B = \{x \mid \varphi_x$ є константою $C\}$.

Розглянемо ЧРФ $f(x, y) = \varphi_x(y) + C$. За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$ така: $f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ для всіх x, y. Зафіксуємо x. Тоді для всіх y маємо: $\varphi_x(y) = 0 \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(y) = C$. Звідси $\varphi_x = \mathbf{o} \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}$ – константа C. Отже, $x \in A \Leftrightarrow s(x) \in B$. Тому РФ $s(x)$: $A \leq_m B$.

Розглянемо ЧРФ $g(x, y) = \varphi_x(y) - C$. За s-m-n-теоремою існує РФ $t(x)$ така: $g(x, y) = \varphi_{t(x)}(y)$ для всіх x, y. Зафіксуємо x. Тоді для всіх y маємо: $\varphi_x(y) = C \Leftrightarrow \varphi_{t(x)}(y) = 0$. Звідси φ_x – константа $C \Leftrightarrow \varphi_{t(x)} = \mathbf{o}$. Отже, $x \in B \Leftrightarrow t(x) \in A$. Тому РФ $t(x)$: $B \leq_m A$.

Маємо $A \leq_m B$ та $B \leq_m A$. Звідси $A \equiv_m B$.

Приклад 5.1.2. $\{x \mid \varphi_x = \mathbf{o}\} \equiv_m \{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$.

Позначимо $A = \{x \mid \varphi_x = \mathbf{o}\}$ та $B = \{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$.

Розглянемо ЧРФ $f(x, y) = 0 - \varphi_x(y)$. За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$ така, що $f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ для всіх x, y. Зафіксуємо x. Тоді для всіх y маємо: $\varphi_x(y) = 0 \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(y)\downarrow$. Звідси $\varphi_x = \mathbf{o} \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}$ є РФ. Таким чином, $x \in A \Leftrightarrow s(x) \in B$. Тому РФ $s(x) : A \leq_m B$.

Розглянемо ЧРФ $g(x, y) = \mathbf{o}(\varphi_x(y))$. За s-m-n-теоремою існує РФ $t(x)$ така, що для всіх x, y $g(x, y) = \varphi_{t(x)}(y)$. Зафіксуємо x. Тоді для всіх y маємо: $\varphi_x(y)\downarrow \Leftrightarrow \varphi_{t(x)}(y) = 0$. Звідси φ_x є РФ $\Leftrightarrow \varphi_{t(x)} = \mathbf{o}$.

Отже, $x \in B \Leftrightarrow t(x) \in A$. Тому РФ $t(x) : B \leq_m A$.

Маємо $A \leq_m B$ та $B \leq_m A$. Звідси $A \equiv_m B$.

Приклад 5.1.3. $\{x \mid \varphi_x$ є РФ$\} \equiv_m \{x \mid D_x$ нескінченна$\}$.

Позначимо $A = \{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$ та $B = \{x \mid D_x$ нескінченна$\}$.

Функція $f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \phi_x(z)\downarrow \text{ для всіх } z \leq y, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$

є ЧРФ за тезою Чорча. За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$ така, що $f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ для всіх x, y. Зафіксуємо x. Нехай $x \in A$, тобто φ_x є РФ. Тоді $\varphi_x(z)\downarrow$ для всіх z, звідки $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y) = 0$ для всіх y. Таким чином, $\varphi_{s(x)} = \mathbf{o}$, тому $D_{s(x)} = N$, звідки $s(x) \in B$. Нехай $x \notin A$, тобто φ_x не є РФ. Тоді існує $m \in N$: $\varphi_x(m)\uparrow \Rightarrow f(x, y)\uparrow$ для всіх $y \geq m \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y)\uparrow$. Отже, $D_{s(x)}$ скінченна, тому $s(x) \notin B$.

Маємо $x \in A \Leftrightarrow s(x) \in B$, тому РФ $s(x)$: $A \leq_m B$.

Задамо функцію $g(x, y)$ схемою примітивної рекурсії:

$g(x, 0) = \mu_z(\varphi_x(z)\downarrow)$;

$g(x, y+1) = \mu_z(\varphi_x(z)\downarrow \;\&\; z \neq g(x, 0) \;\&\; z \neq g(x, 1) \;\&\; \ldots \;\&\; z \neq g(x, y))$.

За тезою Чорча $g(x, y)$ є ЧРФ, тому за s-m-n-теоремою існує РФ $t(x)$ така, що $g(x, y) = \varphi_{t(x)}(y)$ для всіх x, y. Зафіксуємо x.

Нехай $x \in B$, тобто D_x нескінченна. Тоді $g(x, y)\downarrow$ для всіх $y \in N$, тому $\varphi_{t(x)}(y)\downarrow$ для всіх $y \in N$. Отже, $\varphi_{t(x)}$ є РФ, звідки $t(x) \in A$.

Нехай $x \notin B$, тобто D_x скінченна. Звідси функція $\varphi_{t(x)}$ скінченна, тому не є РФ. Отже, $x \notin A$.

Таким чином, $x \in B \Leftrightarrow t(x) \in A$. Тому РФ $t(x)$: $B \leq_m A$.

Маємо $A \leq_m B$ та $B \leq_m A$. Звідси $A \equiv_m B$.

Приклад 5.1.4. $\{x \mid D_x$ нескінченна$\} \equiv_m \{x \mid E_x$ нескінченна$\}$.

Позначимо $A = \{x \mid D_x$ нескінченна$\}$, $B = \{x \mid E_x$ нескінченна$\}$.

За s-m-n-теоремою існують РФ $s(x)$ та $t(x)$ такі: для всіх $x \in N$ $E_{s(x)} = D_x$ та $D_{t(x)} = E_x$ (прикл. 3.3.4, 3.3.5). Тому $x \in A \Leftrightarrow s(x) \in B$ та $x \in B \Leftrightarrow t(x) \in A$. Отже, $s(x)$: $A \leq_m B$ та $t(x)$: $B \leq_m A$. Звідси $A \equiv_m B$.

Із прикладів 5.1.1–5.1.4 отримуємо:

$\{x \mid \varphi_x = \mathbf{o}\} \equiv_m \{x \mid \varphi_x$ є константа $C\} \equiv_m \{x \mid \varphi_x$ є РФ$\} \equiv_m$
$\equiv_m \{x \mid D_x$ нескінченна$\} \equiv_m \{x \mid E_x$ нескінченна$\}$.

Приклад 5.1.5. $D \leq_m \{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$.

Позначимо $A = \{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$. Нехай g – довільна РФ.

Тоді $f(x, y) = \begin{cases} g(y), \text{ якщо } x \in D, \\ \text{невизначене, якщо } x \notin D, \end{cases}$ є ЧРФ за ТЧ.

За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$: $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y)$ для всіх x, y.

При $x \in D$ маємо $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y) = g(y)$ для всіх $y \Rightarrow$ функція $\varphi_{s(x)} = g$ є РФ $\Rightarrow s(x) \in A$. При $x \notin D$ маємо $\varphi_{s(x)}(y)\uparrow$ для всіх $y \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi_{s(x)} = f_{\varnothing}$ не є РФ $\Rightarrow s(x) \notin A$.

Отже, $x \in D \Leftrightarrow s(x) \in A$, тому РФ $s(x)$: $D \leq_m A$.

Приклад 5.1.6. $D \leq_m \{x \mid D_x$ є РМ$\}$.

Нехай $A = \{x \mid D_x$ є РМ$\}$. Нехай g – така ЧРФ, що D_g не є РМ. Функція

$$f(x, y) = \begin{cases} g(y), \text{ якщо } P_x(x) \text{ не зупиниться за } \leq y \text{ кроків}, \\ \text{невизначене, якщо } P_x(x)\downarrow \text{ за } \leq y \text{ кроків}, \end{cases}$$

за ТЧ є ЧРФ. За s-m-n-теоремою існує РФ $s(x)$: $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y)$ для всіх x та y. При $x \in D$ маємо $P_x(x)\downarrow$, тому існує t таке, що $P_x(x)\downarrow$ за t кроків. Для кожного $y \geq t$ $P_x(x)\downarrow$ за $\leq y$ кроків, звідки $f(x, y)\uparrow$ для всіх $y \geq t$. Звідси $\varphi_{s(x)}(y)\uparrow$ для всіх $y \geq t$, тому $\varphi_{s(x)}$ скінченна. Отже, $D_{s(x)}$ є РМ. Звідси при $x \in D$ маємо $s(x) \in A$.

Нехай тепер $x \notin D$. Звідси $P_x(x)\uparrow$, тому для кожного $y \in N$ $P_x(x)$ не зупиниться за $\leq y$ кроків. Отже, маємо $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y) = g(y)$ для всіх $y \in N$. Звідси $D_{s(x)} = D_g$ не є РМ, тому $s(x) \notin A$.

Маємо $x \in D \Leftrightarrow s(x) \in A$, тому РФ $s(x) : D \leq_m A$.

Відношення $\equiv_m$ згідно із $r2$ є дійсно відношенням еквівалентності. Тому введемо класи еквівалентності щодо $\equiv_m$:

$$d_m(A) = \{B \mid A \equiv_m B\}.$$

Такі класи еквівалентності будемо називати *m-степенями*.

Твердження 5.1.2. Кожний m-степінь скінченний або зліченний.

Згідно із твердженням 5.1.1 для кожної $B \subseteq N$ існує не більше ніж зліченна кількість множин $A \subseteq N$ таких, що $A \leq_m B$. Тому для кожної $B \subseteq N$ існує не більше ніж зліченна кількість $A \subseteq N$ таких, що $A \equiv_m B$.

Ураховуючи, що булеан множини N має потужність континууму, як наслідок отримуємо

Твердження 5.1.3. Множина усіх m-степенів має потужність континууму.

Відношення $\leq_m$ індукує на множині m-степенів відповідне відношення $\boldsymbol{\leq_m}$: $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{b}$, якщо $A \leq_m B$ для деяких $A \in \boldsymbol{a}$, $B \in \boldsymbol{b}$.

Маємо $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{b} \Leftrightarrow A \leq_m B$ для всіх $A \in \boldsymbol{a}$, $B \in \boldsymbol{b}$.

Звідси отримуємо: $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{b} \Leftrightarrow A \leq_m B$ для всіх $A \in \boldsymbol{a}$, $B \in \boldsymbol{b}$.

Твердження 5.1.4. Для кожного m-степеня $\boldsymbol{b}$ існує не більше ніж зліченна множина m-степенів $\boldsymbol{a}$ таких, що $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{b}$.

Справді, згідно із твердженням 5.1.1 для кожної $B \subseteq N$ існує не більше ніж зліченна кількість $A \subseteq N$ таких, що $A \leq_m B$.

Приклад 5.1.7. Відношення $\boldsymbol{\leq_m}$ антисиметричне.

Маємо $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{b} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{a} \Leftrightarrow A \leq_m B$ та $B \leq_m A$ для деяких $A \in \boldsymbol{a}$ та $B \in \boldsymbol{b} \Leftrightarrow A \equiv_m B$ для деяких $A \in \boldsymbol{a}$ та $B \in \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Згідно із $r1$ маємо рефлексивність і транзитивність $\boldsymbol{\leq_m}$. Отже, $\boldsymbol{\leq_m}$ є відношенням *часткового порядку* на множині m-степенів.

Будемо писати $\boldsymbol{a} \boldsymbol{<_m} \boldsymbol{b}$, якщо $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$.

Писатимемо $\boldsymbol{a} \boldsymbol{|_m} \boldsymbol{b}$, якщо неправильно $\boldsymbol{a} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{b}$ і неправильно $\boldsymbol{b} \boldsymbol{\leq_m} \boldsymbol{a}$.

Аналогічно вводяться відношення 1-*еквівалентності* $\equiv_1$, відношення $\leq_1$ на множині 1-степенів, визначаються 1-степені.

Кожний m-степінь складається із 1-степенів.

m-степінь *рекурсивний*, якщо він містить РМ.

m-степінь *рекурсивно-перелічний* (РП), якщо він містить РПМ.

Аналогічно визначаємо рекурсивні та РП 1-степені:

– кожний РП m-степінь складається тільки із РПМ;

– кожний рекурсивний m-степінь складається тільки із РМ.

Те саме правильно для 1-степенів.

Існують два сингулярні рекурсивні m-степені, які складаються з єдиної множини:

$$\mathbf{0} = d_m(\varnothing) = \{\varnothing\} \text{ та } \boldsymbol{n} = d_m(N) = \{N\}.$$

Усі інші РМ утворюють рекурсивний m-степінь $\mathbf{0}_{\boldsymbol{m}}$.

Маємо рекурсивно-перелічний m-степінь $\mathbf{0}'_{\boldsymbol{m}} = d_m(D)$.

Властивості m-степенів:

d1) $\mathbf{0}_m \leq_m \boldsymbol{a}$ для всіх m-степенів $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, $\neq \boldsymbol{n}$;

d2) $\boldsymbol{n} \leq_m \boldsymbol{a}$ для всіх m-степенів $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$;

d3) $\mathbf{0} \leq_m \boldsymbol{a}$ для всіх m-степенів $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{n}$;

d4) якщо $\boldsymbol{a} \leq_m \boldsymbol{b}$ і m-степінь $\boldsymbol{b}$ рекурсивно-перелічний, то $\boldsymbol{a}$ – рекурсивно-перелічний m-степінь;

d5) існує найбільший РП m-степінь $\mathbf{0}'_m$ такий, що для кожного РП m-степеня $\boldsymbol{b}$ маємо $\boldsymbol{b} \leq_m \mathbf{0}'_m$.

Точною верхньою гранню, або *супремумом,* m-степенів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ (позначаємо $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b}$) назвемо m-степінь $\boldsymbol{c}$ такий:

– $\boldsymbol{a} \leq_m \boldsymbol{c}$ та $\boldsymbol{b} \leq_m \boldsymbol{c}$;

– $\boldsymbol{c} \leq_m \boldsymbol{d}$ для кожного m-степеня $\boldsymbol{d}$ такого, що $\boldsymbol{a} \leq_m \boldsymbol{d}$ та $\boldsymbol{b} \leq_m \boldsymbol{d}$.

Теорема 5.1.1 (про супремум). Для кожної пари m-степенів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ існує єдина точна верхня грань.

Приклад 5.1.8. Покажемо, що $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{a}$.

Доводимо $A \oplus B \equiv_m B \oplus A$. Укажемо РФ f: $A \oplus B \leq_m B \oplus A$.

Задамо $f(2x) = 2x+1$, $f(2x+1) = 2x$; тоді $x \in A \oplus B \Leftrightarrow f(x) \in B \oplus A$.

Аналогічно доводимо $B \oplus A \leq_m A \oplus B$.

Приклад 5.1.9. Покажемо: якщо $\boldsymbol{a} \leq_m \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$.

Нехай $\boldsymbol{a} \le_m \boldsymbol{b}$. Тоді існує РФ f: $A \le_m B$ для деяких $A \in \boldsymbol{a}$ та $B \in \boldsymbol{b}$.

Задамо РФ $g(x) = \begin{cases} f(x/2), \text{ якщо } x \text{ парне,} \\ (x-1)/2, \text{ якщо } x \text{ непарне.} \end{cases}$

Тоді g : $A \oplus B \le_m B$. Однак $B \le_m A \oplus B$, звідки $A \oplus B \equiv_m B$. Отже, $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$.

Завдання для самоконтролю

1. Укажіть, як можна уточнити поняття звідності множини A до множини B.
2. Дайте визначення m-звідності.
3. Дайте визначення 1-звідності.
4. Наведіть елементарні властивості m-звідності.
5. Наведіть елементарні властивості 1-звідності.
6. Дайте визначення відношень m- та 1-еквівалентності.
7. Поясніть, що таке m- та 1-степінь.
8. Укажіть елементарні властивості m-степенів.
9. Поясніть, що таке рекурсивний m-степінь.
10. Поясніть, що таке рекурсивно-перелічний m-степінь.
11. Укажіть, які ви знаєте рекурсивні m-степені.
12. Дайте визначення супремуму (точної верхньої грані) m-степенів.
13. Сформулюйте теорему про супремум.

Вправи

1. Порівняйте потужності множин усіх m-степенів і всіх рекурсивно-перелічних m-степенів.

2. З'ясуйте, чи справджуються $A \le_m D$ та $A \le_m \overline{D}$, якщо:
   1) $A = \{x \mid \varphi_x$ є поліномом$\}$;
   2) $A = \{x \mid E_x$ є ПРМ$\}$;
   3) $A = \{x \mid \varphi_x$ не сюр'єктивна$\}$;
   4) $A = \{x \mid D_x = N\}$.

3. Доведіть: якщо $\Re \ne \varnothing$ та $\Re \subset$ ЧРФ^n, то $D \le_m N(\Re)$.

4. Доведіть, що $D \le_m A$, якщо:
   1) $A = \{x \mid \varphi_x$ сюр'єктивна$\}$;

2) $A = \{x \mid D_x$ не є ПРМ$\}$;

3) $A = \{x \mid \varphi_x$ не є ПРФ$\}$;

4) $A = \{x \mid E_x$ скінченна$\}$.

*5. Доведіть: якщо A та B – такі РПМ, що $A \cap B \neq \varnothing$ та $A \cup B = N$, то $A \leq_m A \cap B$ та $B \leq_m A \cap B$.

6. Доведіть, що $A \oplus \overline{A} \equiv_1 \overline{A \oplus \overline{A}}$.

7. Установіть, у якому відношенні щодо m-звідності перебувають множини $A, \overline{A}, D, \overline{D}$, якщо:

1) $A = \{x \mid \varphi_x$ ін'єктивна$\}$;

2) $A = \{x \mid 3 \notin E_x\}$;

3) $A = \{x \mid \varphi_x(x) = 2\}$;

4) $A = \{x \mid$ неправильно, що $\{0, 1\} \subseteq D_x\}$;

5) $A = \{x \mid 3 \in E_x\} \oplus N$.

8. Доведіть:

1) $A = \{x \mid 1 \notin E_x\} <_m \{x \mid D_x$ є ПРМ$\}$;

2) $A = \{x \mid \varphi_x$ неін'єктивна$\} <_m \{x \mid \varphi_x$ є ПРФ$\}$.

5.2. Продуктивні та креативні множини. Імунні та прості множини

Нехай A – довільна неРПМ. Тоді для кожної $D_x \subseteq A$ існує елемент $y \in A \setminus D_x$ (множина таких y нескінченна). Якщо таке y ефективно обчислюється за x, то множину A називають продуктивною.

Отже, множина A *продуктивна*, якщо існує РФ g така:

$$D_x \subseteq A \Rightarrow g(x) \in A \setminus D_x.$$

Функцію g називають *продуктивною функцією* множини A.

Множина A *креативна*, якщо A є РПМ та $\overline{A}$ продуктивна.

Приклад 5.2.1. Множина $\overline{D}$ продуктивна із продуктивною функцією $g(x) = x$.

Нехай $D_x \subseteq \overline{D}$. Якщо $x \in D_x$, то $\varphi_x(x)\downarrow$, тому $x \notin \overline{D}$, що суперечить $D_x \subseteq \overline{D}$. Отже, $x \notin D_x$, тому $x \in \overline{D}$. Звідси $x \in \overline{D} \setminus D_x$.

Приклад 5.2.2. Множина D креативна, тому що D є РПМ і $\overline{D}$ продуктивна.

Властивість продуктивності успадковується за m-звідністю.

Теорема 5.2.1. Нехай A – продуктивна множина й $A \le_m B$. Тоді множина B продуктивна.

Наслідок 5.2.1. Нехай A креативна, B – РПМ та $A \le_m B$. Тоді множина B креативна.

Приклад 5.2.3. Множина $C_a = \{x \mid \varphi_x(x) = a\}$ креативна для кожного $a \in N$.

Функція $f(x, y) = \begin{cases} a, \text{ якщо } z \in D, \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases} = a \cdot \chi_D^ч(z) + 0 \cdot x$ є ЧРФ. За s-m-n-теоремою існує РФ s така: $f(z, x) = \varphi_{s(z)}(x)$ для всіх z, x. Звідси $z \in D \Leftrightarrow \varphi_{s(z)}(s(z))\downarrow = a \Leftrightarrow s(z) \in C_a$, тому РФ $s : D \le_m C_a$.

Однак "$x \in C_a$" є ЧРП: $x \in C_a \Leftrightarrow P_x(x)\downarrow a$. Отже, C_a є РПМ і за наслідком 5.2.1 множина C_a креативна.

Укажемо достатні умови продуктивності для індексних множин.

Теорема 5.2.2. Для продуктивності множини $N(\mathfrak{R})$ достатньою є одна з таких умов:

Пр1) $\mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n та $f_\varnothing \in \mathfrak{R}$;

Пр2) існує $f \in \mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n: $\theta \notin \mathfrak{R}$ для кожної скінченної $\theta \subseteq f$;

Пр3) існують $f \in \mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n та $g \in$ ЧРФ^n такі, що $g \notin \mathfrak{R}$ та $f \subseteq g$.

Приклад 5.2.4. Множина $A = \{x \mid \varphi_x$ є заданою ЧРФ $g\}$ продуктивна.

Якщо g – нескінченна функція, то A продуктивна за Пр2.

Якщо функція g скінченна, то A продуктивна за Пр3.

Теорема 5.2.3. 1) Нехай $\mathfrak{R} \subseteq$ ЧРФ^n. Тоді

$N(\mathfrak{R})$ рекурсивна $\Leftrightarrow \mathfrak{R} = \varnothing$ або $\mathfrak{R}$ = ЧРФ^n.

2) Нехай $\mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n та $\mathfrak{R} \neq \varnothing$. Тоді

$N(\mathfrak{R})$ є нерекурсивна РПМ $\Leftrightarrow N(\mathfrak{R})$ креативна.

Приклад 5.2.5. Множина $A = \{x \mid \varphi_x$ не є заданою ЧРФ $g\}$ продуктивна при $g \neq f_\varnothing$ і креативна при $g = f_\varnothing$.

Якщо $g \neq f_\varnothing$, то $f_\varnothing \in \{\varphi_x \mid \varphi_x$ не є заданою ЧРФ $g\}$, тому A продуктивна за Пр1.

Якщо $g = f_{\varnothing}$, то $A = \{x \mid \varphi_x \neq f_{\varnothing}\} = \{x \mid D_x \neq \varnothing\}$ є РПМ, тому креативна згідно із п. 2 теореми 5.2.3.

Приклад 5.2.6. Клас продуктивних множин незамкнений відносно операцій $\cup$, $\cap$ і доповнення.

Маємо $f_{\varnothing} \in \{\varphi_x \mid \varphi_x$ не є РФ$\}$, тому $A = \{x \mid \varphi_x$ не є РФ$\}$ продуктивна за Пр1. Множина $B = \{x \mid \varphi_x$ є РФ$\}$ продуктивна за Пр2, адже для кожної РФ g кожна скінченна функція $\theta \subseteq g$ не є РФ. Тому $A \cup B = N$ не продуктивна; $A \cap B = \varnothing$ не продуктивна.

Якщо L креативна, то $M = \overline{L}$ продуктивна, водночас $L = \overline{M}$ не продуктивна.

Теорема 5.2.4. 1) A продуктивна $\Rightarrow$ $A \oplus B$ та $B \oplus A$ продуктивні.

2) A креативна та B є РПМ $\Rightarrow$ $A \oplus B$ та $B \oplus A$ креативні.

3) A продуктивна та $B \neq \varnothing$ $\Rightarrow$ $A \otimes B$ та $B \otimes A$ продуктивні.

4) A креативна, $B \neq \varnothing$ та B є РПМ $\Rightarrow$ $A \otimes B$ та $B \otimes A$ креативні.

Приклад 5.2.7. Клас креативних множин незамкнений відносно операцій $\cup$, $\cap$ і доповнення.

Якщо A креативна, то $A \oplus N$ та $N \oplus A$ креативні за теоремою 5.2.4. Однак $(A \oplus N) \cup (N \oplus A) = N$ не креативна, тому що рекурсивна.

$C_0 = \{x \mid \varphi_x(x) = 0\}$ та $C_1 = \{x \mid \varphi_x(x) = 1\}$ креативні за прикладом 5.2.3. Однак $C_0 \cap C_1 = \varnothing$ рекурсивна, тому не креативна.

Якщо A креативна, то $\overline{A}$ продуктивна, тому не креативна.

Приклад 5.2.8. Предикат "$E_x \neq D_y$" не є ЧРП.

Предикат "$E_x \neq D_y$" позначимо $Q(x, y)$. Нехай m – індекс деякої рекурсивної функції, наприклад тотожної, тоді $D_m = N$. Предикат $Q(x, m)$ позначимо $P(x)$, він означає "$E_x \neq N$". Множина $T(P) = \{x \mid E_x \neq N\}$ продуктивна за Пр1, адже $T(P) = N(\mathfrak{R})$, де $\mathfrak{R} = \{\varphi_x \mid E_x \neq N\}$ та $f_{\varnothing} \in \mathfrak{R}$. Звідси предикат $P(x)$ не є ЧРП, тому й $Q(x, y)$ не є ЧРП.

Приклад 5.2.9. Предикат "$D_x = D_y$" не є ЧРП.

Предикат "$D_x = D_y$" позначимо $Q(x, y)$. Нехай m – індекс деякої РФ. Предикат $Q(x, m)$ позначимо $P(x)$, він означає "$D_x = N$". Множина $T(P) = \{x \mid D_x = N\}$ продуктивна за Пр2, адже $T(P) = N(\mathfrak{R})$, де $\mathfrak{R} = \{\varphi_x \mid D_x = N\}$, а ця $\mathfrak{R}$ складається лише з нескінченних функцій. Звідси предикат $P(x)$ не є ЧРП, тому й $Q(x, y)$ не є ЧРП.

Приклад 5.2.10. Множина $A = \{x \mid E_x = \{0\}\}$ продуктивна.

Нехай $\mathfrak{R} = \{\varphi_x \mid E_x = \{0\}\}$. Нехай g – тотожна функція, f – функція із $\Gamma_f = \{(0, 0)\}$, тобто $f(x) = 0 - x$. Маємо $f \subset g$, $f \in \mathfrak{R}$ та $g \notin \mathfrak{R}$. Отже, $A = N(\mathfrak{R})$ є продуктивною за Пр3.

Приклад 5.2.11. Поширені умови $\mathfrak{R}$, які гарантують продуктивність індексних множин вигляду $\{x \mid \mathfrak{R}\}$ згідно з умовами Пр1–Пр3:

1) згідно із **Пр1**: $\mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n та $f_{\varnothing} \in \mathfrak{R}$. Зокрема, умови:

– D_x є РМ; D_x є ПРМ; D_x не креативна; D_x не проста; $D_x \neq N$;

– те саме для E_x;

– φ_x не є РФ; φ_x не є ПРФ; φ_x не є поліномом; φ_x не константа; φ_x ін'єктивна; φ_x не сюр'єктивна; φ_x не бієктивна;

2) згідно із **Пр2**: існує $f \in \mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n така, що $\theta \notin \mathfrak{R}$ для кожної скінченної $\theta \subseteq f$. Зокрема, умови:

– D_x не РМ; D_x не ПРМ; D_x креативна; D_x проста; $D_x = N$;

– те саме для E_x;

– φ_x є РФ; φ_x є ПРФ; φ_x є поліномом; φ_x є константою; φ_x сюр'єктивна;

φ_x бієктивна; $\varphi_x = \mathbf{0}$; $\varphi_x(z) = z$ для всіх z (φ_x тотожна);

3) згідно із **Пр3**: існують $f \in \mathfrak{R} \subset$ ЧРФ^n та $g \in$ ЧРФ^n: $g \notin \mathfrak{R}$ та $f \subseteq g$. Зокрема, умови:

– $D_x = \{1\}$; $D_x = \{2, 3, 4\}$; $D_x \neq \varnothing$ і скінченна;

– те саме для E_x.

Приклад 5.2.12. $A = \{2x+3 \mid \varphi_x$ сюр'єктивна$\}$ є продуктивною.

Множина $B = \{x \mid \varphi_x$ сюр'єктивна$\}$ є продуктивною за Пр2. Ін'єктивна РФ $2x + 3$: $B \leq_1 A$, тому A продуктивна.

Приклад 5.2.13. Множина $A = \{3x+1 \mid 2 \in D_x\}$ креативна.

Множина $B = \{x \mid 2 \in D_x\}$ креативна, оскільки це індексна нерекурсивна РПМ. Ін'єктивна РФ $3x + 1$: $B \leq_1 A$, тому A креативна.

Приклад 5.2.14. $A = \{x \mid \{0, 1\} \subseteq D_x\} \oplus \{x \mid x$ парне$\}$ креативна.

Множина $B = \{x \mid \{0, 1\} \subseteq D_x\}$ креативна як індексна нерекурсивна РПМ (теорема 5.2.3). Множина $C = \{x \mid x$ парне$\}$ є РМ. Тому множина $A = B \oplus C$ креативна.

Приклад 5.2.15. $A = \{x \mid \varphi_x$ не є ПРФ$\}\otimes D$ продуктивна.

Множина $B = \{x \mid \varphi_x$ не є ПРФ$\}$ продуктивна за Пр1, $D \neq \varnothing$. Тому множина $A = B\otimes D$ продуктивна.

Приклад 5.2.16. З'ясуємо, у якому відношенні щодо m-звідності перебувають множини D, $\overline{D}$, $D\oplus\overline{D}$, $D\otimes\overline{D}$.

Згідно із $r13$ та $r14$ маємо $D \le_m D\oplus\overline{D}$, $\overline{D} \le_m D\oplus\overline{D}$, $D \le_m D\otimes\overline{D}$, $\overline{D} \le_m D\otimes\overline{D}$. Унаслідок теореми 5.1.1 звідси $D\oplus\overline{D} \le_m D\otimes\overline{D}$.

За $r6$ маємо $\overline{D}\,|_m\, D$. Неможливо $\overline{D} \le_m D$, $D\oplus\overline{D} \le_m D$, $D\otimes\overline{D} \le_m D$, адже D є РПМ, а $\overline{D}$, $D\oplus\overline{D}$, $\overline{D} \le_m D\otimes\overline{D}$ продуктивні.

Якщо $D\oplus\overline{D} \le_m \overline{D}$, то внаслідок $D \le_m D\oplus\overline{D}$ маємо $D \le_m \overline{D}$, що неможливо; якщо $D\otimes\overline{D} \le_m \overline{D}$, то внаслідок $D \le_m D\otimes\overline{D}$ маємо $D \le_m \overline{D}$, що неможливо. Також [19] неможливо $D\otimes\overline{D} \le_m D\oplus\overline{D}$.

Отже, $\overline{D}\,|_m\, D$, $D <_m D\oplus\overline{D}$, $\overline{D} <_m D\oplus\overline{D}$, $D\oplus\overline{D} <_m D\otimes\overline{D}$.

Теорема 5.2.5. Кожна продуктивна множина містить нескінченну рекурсивно-перелічну підмножину.

Імунні та прості множини. Нескінченна множина *імунна,* якщо вона не містить нескінченних РПМ.

Отже, імунна множина не може бути РПМ і не може бути продуктивною.

Множина *проста,* якщо вона є РПМ і має імунне доповнення.

Зрозуміло, що A проста $\Leftrightarrow$ A є РПМ, $\overline{A}$ нескінченна та для кожної нескінченної РПМ R маємо $A\cap R \neq \varnothing$.

Проста множина не може бути ні рекурсивною, ні креативною.

Приклад 5.2.17. Нехай $f(x) = \varphi_x(\mu_z(\varphi_x(z) > 4x))$. Тоді f є ЧРФ, $\overline{E}_f$ імунна та E_f проста.

Маємо $f(x) > 4x$ для всіх $x\in D_f$. Для довільного $n\in N$ множина $\{0,\dots, 4n\}$ містить $\le n$ елементів E_f, оскільки $f(n) > 4n$ і елементи E_f можна брати тільки із $f(0),\dots, f(n-1)$. Тому для кожного $n\in N$ така $\{0,\dots, 4n\}$ містить $> 3n$ елементів $\overline{E}_f \Rightarrow \overline{E}_f$ нескінченна.

Нехай B – довільна нескінченна РПМ. Тоді $B = E_g$ для деякої РФ g. Нехай k – індекс функції g, тобто g – це φ_k. Значення $f(x) = \varphi_x(\mu_z(\varphi_x(z) > 4x))$ визначене, тому що φ_k є РФ із нескінченною множиною значень. Отже, $f(k) \in E_k \cap E_f = E_g \cap E_f = B \cap E_f$, тому $B \cap E_f \neq \varnothing$, звідки неможливо $B \subseteq E_f$.

E_f містить принаймні по одному елементу кожної нескінченної РПМ, тому жодна нескінченна РПМ повністю в E_f не вміщається; при цьому $\overline{E}_f$ нескінченна. Отже, $\overline{E}_f$ імунна та E_f проста.

Теорема 5.2.6. Множина A проста $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ нескінченна й $A \cap R$ є нескінченною РПМ для кожної нескінченної РПМ R.

Теорема 5.2.7. Якщо множини A та B прості, то $A \cap B$ проста.

Приклад 5.2.18. Існують прості множини A та B: $A \cup B = N$.

Задамо $f(x) = \varphi_x(\mu_z(\varphi_x(z) > 4x))$. Згідно із прикладом 5.2.17 множина E_f проста. Задамо $A = E_f \cup N_{2x}$ та $B = E_f \cup N_{2x+1}$. Зрозуміло, що $A \cup B = N$. Покажемо, що множини A та B прості.

Для кожного $n \in N$ множина $\{0,..., 4n\}$ містить $\leq n$ елементів E_f. Крім того, $\{0,..., 4n\}$ містить $2n+1$ парних і $2n$ непарних чисел. Отже, множина $\{0,..., 4n\}$ містить $\leq 3n+1$ елементів A та $\leq 3n$ елементів B. Тому для кожного $n \in N$ множина $\{0, ..., 4n\}$ містить $\geq n$ елементів $\overline{A}$ та $>n$ елементів $\overline{B}$, звідки $\overline{A}$ та $\overline{B}$ нескінченні.

Нехай R – довільна нескінченна РПМ. Тоді $R = E_k$, де k – індекс деякої РФ φ_k. Значення $f(x) = \varphi_x(\mu_z(\varphi_x(z) > 4x))$ визначене, адже φ_k є РФ та E_k нескінченна. Отже, $f(k) \in E_k \cap E_f = R \cap E_f$, тому $R \cap E_f \neq \varnothing$.

Звідси $R \cap (E_f \cup N_{2x}) = R \cap A \neq \varnothing$ та $R \cap (E_f \cup N_{2x+1}) = R \cap B \neq \varnothing$.

Таким чином, A та B – прості множини, для яких $A \cup B = N$.

Наслідок 5.2.2. Клас простих множин незамкнений відносно $\cup$ і доповнення.

Це випливає з визначення простої множини (доповнення до простої – множина імунна, яка не є РПМ) і прикладу 5.2.18 (множина N рекурсивна, тому не проста).

Теорема 5.2.8. Якщо множини A та B прості, то $A \oplus B$ проста.

Приклад 5.2.19. Якщо множина A проста, то $A \otimes B$ та $B \otimes A$ не є простими.

Візьмемо довільний $d \in \overline{A}$. Тоді $L = \{d\}\otimes N$ та $M = N\otimes\{d\}$ – нескінченні РПМ. Однак $L\cap(A\otimes B) = \varnothing$ та $M\cap(B\otimes A) = \varnothing$, тому $A\otimes B$ та $B\otimes A$ не прості.

Наслідок 5.2.3. Якщо A та B прості, то $A\otimes B$ не проста.

Приклад 5.2.20. Потужність множини всіх імунних множин – континуум.

Нехай $A = \{z_0 < z_1 < \ldots < z_n < \ldots\}$ імунна, тоді вона не містить нескінченних РПМ. Диз'юнктні множини $B = \{z_0, z_2, z_4, \ldots, z_{2n}, \ldots\}$ та $C = \{z_1, z_3, z_5, \ldots, z_{2n+1}, \ldots\}$ теж імунні, адже вони нескінченні й не містять нескінченних РПМ. Для кожної $L \subseteq C$ множина $B \cup L$ теж імунна, адже $B \subseteq B \cup L \subseteq A$, тому всі такі $B \cup L$ нескінченні й не містять нескінченних РПМ. Маємо континуум різних $L \subseteq C$, а тому й континуум різних імунних $B \cup L$.

Подальше посилення властивостей імунності та простоти веде до понять гіперімунної і гіперпростої множин.

Нехай $A = \{z_0 < z_1 < \ldots < z_n < \ldots\}$.

Функція f *мажорує* A, якщо $f(n) > z_n$ для всіх n.

Множина A *гіперімунна*, якщо A нескінченна й не існує рекурсивної функції, яка мажорує A.

Множина A *гіперпроста*, якщо A є РПМ та $\overline{A}$ гіперімунна.

Приклад 5.2.21. Гіперімунні множини існують.

Нехай $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ – деяка послідовність тотальних функцій на N, яка включає всі РФ[1]. Задамо функцію g:

$$g(0) = f_0(0);$$

$$g(n+1) = \mu_z(z > g(n) \text{ та } z > f_{n+1}(n+1)).$$

Звідси E_g не мажорується жодною РФ, тому E_g гіперімунна.

Теорема 5.2.9. Якщо A гіперімунна, то A імунна.

Наслідок 5.2.4. Якщо A гіперпроста, то A проста.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення продуктивної множини.
2. Дайте визначення креативної множини.
3. Укажіть достатні умови продуктивності для індексних множин.
4. Наведіть властивості продуктивних і креативних множин.

5. Опишіть замкненість продуктивних і креативних множин відносно теоретико-множинних операцій.

6. Дайте визначення імунної множини.

7. Дайте визначення простої множини.

8. Укажіть властивості імунних і простих множин.

9. Опишіть замкненість імунних і простих множин відносно теоретико-множинних операцій.

10. Дайте визначення гіперімунної множини.

11. Дайте визначення гіперпростої множини.

12. Укажіть, як співвідносяться гіперімунні та імунні множини.

Вправи

1. Доведіть: якщо B є РПМ, $A\cap B$ продуктивна, то A продуктивна.

2. Доведіть: якщо B є РПМ, A креативна та $A\cap B = \varnothing$, то $A\cup B$ креативна.

3. З'ясуйте, чи будуть ЧРП такі предикати:

1) "$E_x = D$";
2) "$D \neq E_y$";
3) "$E_x = E_y$";
4) "$E_x \neq E_y$";
5) "$\{0, 1\} = D_x$";
6) "φ_x не є поліномом";
7) "$4\in D_x$";
8) "D_x скінченна та $\neq \varnothing$".

4. Установіть, до якого класу належать множини:

1) $\{x \mid \varphi_x$ не є ін'єктивною$\}$;
2) $\{x \mid E_x = \{1, 2\}\}$;
3) $\{x \mid \{1, 2\} \subseteq E_x\}$;
4) $\{x \mid E_x$ не проста$\}$;
5) $\{2x \mid D_x$ креативна$\}$;
6) $\{3x \mid x\in D_x\}$;
7) $\{x \mid 3x\in E_x\}$;
8) $\{5x+2 \mid \varphi_x$ є поліномом$\}$;
9) $\{4x+1 \mid \varphi_x$ ін'єктивна$\}$;
10) $\{5x^2+4 \mid \varphi_x$ – константа$\}$;

11) $\{C(x, y) \mid x \in E_y\}$;
12) $\{7x+3 \mid E_x$ є ПРМ$\} \oplus N$;
13) $\{3x+5 \mid x \in E_x\} \otimes D$;
14) $\{x \mid x$ парне$\} \otimes \{x \mid D_x \neq \varnothing\}$;
15) $\{x \mid x$ непарне$\} \oplus \{x \mid \varphi_x = \mathbf{o}\}$;
16) $\{7x+4 \mid E_x$ скінченна та $\neq \varnothing\}$;
17) $\{x \mid \{0, 2\} \subseteq D_x\} \oplus \{x \mid x$ просте$\}$;
18) $\{x \mid \varphi_x$ неін'єктивна$\} \otimes \{x \mid x \in E_x\}$;
19) $D \otimes \{2x \mid E_x$ не є креативною$\}$;
20) $\{x^3 \mid D_x$ проста$\} \otimes \{3x \mid x$ не просте$\}$.

5. Доведіть:
1) B є РПМ та $A \cap B$ продуктивна $\Rightarrow A$ продуктивна;
2) B є РПМ, A продуктивна й $A \subset B \Rightarrow A \setminus B$ продуктивна;
3) B є РПМ, A креативна й $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cup B$ креативна;
4) B є РПМ, A продуктивна й $A \subset B \Rightarrow A \cup \overline{B}$ продуктивна.

6. Доведіть: якщо A та B прості, то $\overline{\overline{A} \otimes \overline{B}}$ теж проста.

*7. Визначте потужність множини всіх продуктивних множин.

5.3. *m*-повнота і креативність. Співвідношення між 1-звідністю та *m*-звідністю

РПМ L *m-повна*, якщо $A \leq_m L$ для кожної РПМ A.
РПМ L *1-повна*, якщо $A \leq_1 L$ для кожної РПМ A.

Приклад 5.3.1. Множина D *m*-повна.
Це випливає з такого твердження.

Теорема 5.3.1. A є РПМ $\Leftrightarrow A \leq_m D$.
Множина D є РПМ, тому з $A \leq_m D$ випливає, що A є РПМ.

Якщо A є РПМ, то $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A, \\ \text{невизначене,} & \text{якщо } x \notin A, \end{cases}$ є ЧРФ

за ТЧ. За *s-m-n*-теоремою існує РФ $s(x)$ така: $f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ для всіх значень x, y. Маємо: $x \in A \Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(y) = 1$ для всіх y $\Leftrightarrow \varphi_{s(x)}(s(x))\downarrow \Leftrightarrow s(x) \in D$. Тому $s : A \leq_m D$.

Наслідок 5.3.1. Множина L m-повна $\Leftrightarrow L \equiv_m D$.

Наслідок 5.3.2. m-степінь $\mathbf{0'}_m$ складається із m-повних множин.

Розглянемо зв'язок m-повноти із креативністю.

Твердження 5.3.1. Кожна m-повна множина креативна.

Якщо РПМ L m-повна, то $D \le_m L$. За наслідком 5.2.1 із креативності множини D випливає, що L теж креативна.

Теорема 5.3.2 (Майхілла). Якщо L креативна, то L m-повна.

Наслідок 5.3.3. Множина L креативна $\Leftrightarrow L$ є m-повною.

Наслідок 5.3.4. Нехай $\boldsymbol{b}$ – m-степінь простої множини. Тоді $\mathbf{0}_m <_m \boldsymbol{b} <_m \mathbf{0'}_m$.

Справді, проста множина не рекурсивна й не креативна.

Ефективна нероздільність. Множини A і B *ефективно нероздільні*, якщо $A \cap B = \varnothing$ та існує РФ $f(x, y)$ така, що з умови $D_a \supseteq A$, $D_b \supseteq B$ та $D_a \cap D_b = \varnothing$ випливає $f(a, b) \notin D_a \cup D_b$.

Таку функцію f називають *продуктивною функцією* пари нероздільних множин A та B.

Множини A і B *рекурсивно-нероздільні,* якщо $A \cap B = \varnothing$ і не існує РМ R такої, що $R \supseteq A$ та $R \cap B = \varnothing$.

Теорема 5.3.3. Якщо множини A та B ефективно нероздільні, то A та B рекурсивно-нероздільні.

Приклад 5.3.2. $C_0 = \{x \mid \varphi_x(x) = 0\}$ та $C_1 = \{x \mid \varphi_x(x) = 1\}$ є ефективно нероздільними РПМ.

Зрозуміло, що множини C_0 та C_1 рекурсивно-перелічні.

Задамо функцію h у такий спосіб. Для всіх $x, y, z \in N$ визначимо:

$$h(x, y, z) = \begin{cases} 1, \text{якщо } z \in D_x \cup D_y \text{ і в переліку } D_x \cup D_y \\ \text{вперше встановлено } z \in D_x, \\ 0, \text{якщо } z \in D_x \cup D_y \text{ і в переліку } D_x \cup D_y \\ \text{вперше встановлено } z \in D_y, \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$$

Функція h алгоритмічно обчислювана, тому за тезою Чорча h є ЧРФ. За s-m-n-теоремою існує РФ u така: $h(x, y, z) = \varphi_{u(x,y)}(z)$ для всіх x, y, z.

Покажемо, що u – продуктивна функція для пари нероздільних C_0 та C_1. Нехай a і b такі, що $D_a \supseteq C_0$, $D_b \supseteq C_1$ та $D_a \cap D_b = \varnothing$.

Якщо $u(a, b) \in D_a$, то $\varphi_{u(a,b)}(u(a, b)) = h(a, b, u(a, b)) = 1$, тому $u(a, b) \in C_1 \subseteq D_b$ – суперечність.

Якщо $u(a, b) \in D_b$, то $\varphi_{u(a,b)}(u(a, b)) = h(a, b, u(a, b)) = 0$, звідки $u(a, b) \in C_0 \subseteq D_a$ – суперечність.

Отже, $u(a, b) \notin D_a \cup D_b$, тому u – продуктивна функція для пари ефективно нероздільних C_0 і C_1 .

Теорема 5.3.4. Нехай A та B – ефективно нероздільні РПМ. Тоді A та B креативні.

Співвідношення між 1-звідністю та *m*-звідністю. Розглянемо співвідношення між 1-звідністю та m-звідністю.

Теорема 5.3.5. Якщо A проста, то $A <_1 A \otimes N$.

Теорема 5.3.6. $A \leq_m B \Leftrightarrow A \otimes N \leq_1 B \otimes N$.

Приклад 5.3.3. 1) $A \leq_1 A \otimes N$ для довільної $A \subseteq N$.

2) $A \otimes N \equiv_m A$ для довільної $A \subseteq N$.

Справді, ін'єктивна РФ $f(x) = C(x, 0)$ 1-зводить A до $A \otimes N$.

РФ $l(x)$ m-зводить $A \otimes N$ до A, тому $A \otimes N \leq_m A$. Згідно із $r14$ маємо $A \leq_m A \otimes N$. Таким чином, $A \otimes N \equiv_m A$.

Приклад 5.3.4. Нехай множина A проста. Тоді $A \otimes N$ є РПМ, яка не проста, не креативна й не рекурсивна.

Якщо A проста, то A є РПМ, звідки $A \otimes N$ є РПМ.

Якщо $A \otimes N$ креативна, то внаслідок $A \equiv_m A \otimes N$ та $r14$ A креативна. Якщо $A \otimes N$ є РМ, то внаслідок $A \equiv_m A \otimes N$ та $r4$ A є РМ. В обох випадках це суперечить умові, що A проста.

Згідно із прикладом 5.2.17, якщо A проста, то $A \otimes N$ не проста.

Приклад 5.3.5. 1) Відношення $\leq_m$ та $\leq_1$ не збігаються.

2) Відношення $\equiv_m$ та $\equiv_1$ не збігаються.

Нехай A проста. Маємо $A \otimes N \leq_m A$ та $A \equiv_m A \otimes N$ (приклад 5.3.3).

Неможливо $A \otimes N \leq_1 A$, адже внаслідок $A \leq_1 A \otimes N$ (приклад 5.3.3) тоді $A \equiv_1 A \otimes N$. Проте (теорема 5.3.5) якщо A проста, то $A <_1 A \otimes N$.

Розглянемо співвідношення між 1-степенями та m-степенями.

Маємо $A \equiv_1 B \Rightarrow A \equiv_m B$, тому кожний m-степінь розпадається на 1-степені.

Кожний m-степінь $\boldsymbol{b}$ містить максимальний 1-степінь, який можна отримати (теорема 5.3.6) з довільної $B \in \boldsymbol{b}$ як степінь $d_1(B \otimes N)$.

Приклад 5.3.6. Існують РП m-степені, які складаються з кількох 1-степенів. Такими є, зокрема, m-степені простих множин.

Справді, нехай A проста. Тоді $d_m(A) = d_m(A \otimes N)$ згідно з $A \equiv_m A \otimes N$, але згідно з теоремою 5.3.5 маємо $d_1(A) <_1 d_1(A \otimes N)$.

Теорема 5.3.7. Множина L m-повна $\Leftrightarrow$ множина L 1-повна.

Наслідок 5.3.5. Класи 1-повних, m-повних, креативних множин збігаються.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення m-повної РПМ.
2. Сформулюйте теорему Майхілла.
3. Укажіть, як співвідносяться класи m-повних і креативних множин.
4. Дайте визначення ефективно нероздільних множин.
5. Дайте визначення рекурсивно-нероздільних множин.
6. Наведіть приклад ефективно нероздільних РПМ.
7. Укажіть властивість пари ефективно нероздільних РПМ.
8. Наведіть приклад РПМ, яка не проста, не креативна й не є рекурсивною.
9. Укажіть, чи збігаються відношення $\leq_m$ та $\leq_1$; $\equiv_m$ та $\equiv_1$.
10. Укажіть співвідношення між класами 1-повних, m-повних і креативних множин.

Вправи

1. Доведіть ефективну нероздільність РПМ:
   1) $A = \{x \mid \varphi_x(x) < 2\}$ та $B = \{x \mid \varphi_x(x) > 2\}$;
   2) $A = \{x \mid \varphi_x(x) = 3\}$ та $B = \{x \mid \varphi_x(x) \geq 7\}$.
2. Доведіть: якщо A проста, то $A <_1 A \otimes N$ (теорема 5.3.5).
3. Доведіть: $A \leq_m B \Leftrightarrow A \otimes N \leq_1 B \otimes N$ (теорема 5.3.6).

*4. Дослідіть структуру рекурсивних 1-степенів.

6. ВІДНОСНА ОБЧИСЛЮВАНІСТЬ. *T*-ЗВІДНІСТЬ

Опишемо відносну обчислюваність для класу n-арних функцій на N. Поняття відносної обчислюваності лежить в основі визначення тьюрінгової звідності, або *T-з*відності, яка найбільш адекватно уточнює інтуїтивне поняття звідності.

6.1. Формалізація відносної обчислюваності. Релятивізація теорем

Обмежимося розглядом обчислюваності відносно тотальних функцій, їх трактуватимо як оракули. Функція f обчислювана відносно тотальної функції-оракула α, якщо існує алгоритм для обчислення f, який може, за необхідності, брати потрібні значення функції α.

Таке поняття відносної обчислюваності формально уточнимо через поняття *МНР з оракулом* (МНРО). Порівняно із МНР, МНРО використовують новий тип команд $O(n)$ – звернення до оракула. Для виконання таких команд МНРО має з'єднатися з певним оракулом α.

Виконання команди $O(n)$ означає, що $'R_n := \alpha('R_n)$, тобто вміст n-го регістра засилається в оракул α, який повертає в n-й регістр значення функції α від цього вмісту.

Після виконання $O(n)$ виконується чергова за списком команда програми МНРО.

Програма МНРО – це скінченна послідовність команд МНРО.

Смисл МНРО-програми залежить від конкретного оракула.

Тому МНРО-програму P, яка виконується МНРО з оракулом α, будемо позначати P^α.

МНРО-програма P *обчислює* функцію $f: N^n \to N$ *відносно оракула* α, або α-*обчислює* функцію f, якщо

$$f(a_1, a_2,..., a_n) = b \Leftrightarrow P^\alpha(a_1, a_2,..., a_n)\downarrow b.$$

Функція f *МНРО-обчислювана відносно* α, або α-*обчислювана*, якщо існує МНРО-програма P, яка обчислює f відносно α.

Розглянемо інший підхід до відносної обчислюваності.

Функцію назвемо *частково рекурсивною відносно* α, або α-*ЧРФ*, якщо її отримано з функцій **o**, s, I_m^n та α за допомогою скінченної кількості застосувань операцій S^{n+1}, R та M.

Тотальну α-ЧРФ назвемо α-РФ.

Визначення α-ЧРФ можна узагальнити до визначення $\Im$-ЧРФ, де $\Im$ – певна система n-арних функцій на N (див., напр., [3]). У нашому випадку $\Im = \{\alpha\}$, причому α тотальна.

Про інші, технічно складніші уточнення відносної обчислюваності, зокрема запропоновані А. Тьюрінгом МТ з оракулом, можна прочитати в [19, 21]).

Формальні поняття α-обчислюваності й часткової рекурсивності відносно α еквівалентні.

Теорема 6.1.1. f є α-ЧРФ $\Leftrightarrow f$ МНРО-обчислювана відносно α.

Клас усіх α-ЧРФ позначимо ЧРФ$^{\alpha}$.

Укажемо важливі властивості α-ЧРФ:

о1) $\alpha \in$ ЧРФ$^{\alpha}$;

о2) для довільного оракула α маємо ЧРФ $\subseteq$ ЧРФ$^{\alpha}$;

о3) якщо тотальна функція φ є α-ЧРФ, то ЧРФ$^{\varphi} \subseteq$ ЧРФ$^{\alpha}$;

о4) якщо α рекурсивна, то ЧРФ$^{\alpha}$ = ЧРФ.

Для відносно обчислюваних функцій сформулюємо релятивний аналог тези Чорча, який називають **тезою Тьюрінга** (*ТТ*):

Клас α-ЧРФ збігається із класом *n*-арних функцій на *N*, алгоритмічно обчислюваних відносно α

Ефективну нумерацію n-арних α-ЧРФ уведемо на основі кодування МНРО-програм аналогічно відповідній нумерації n-арних ЧРФ.

Приклад 6.1.1. Кодування команд МНРО можна задати так:

$\theta(Z(n)) = 5 \cdot n$;

$\theta(S(n)) = 5 \cdot n + 1$;

$\theta(T(m, n)) = 5 \cdot C(m, n) + 2$;

$\theta(J(m, n, q+1)) = 5 \cdot C(C(m, n), q) + 3$;

$\theta(O(n)) = 5 \cdot n + 4$.

Уживаємо позначення $\varphi_m^{\alpha,n}$ для n-арної α-ЧРФ з індексом m, позначення $D_m^{\alpha,n}$ – для області визначення $\varphi_m^{\alpha,n}$, $E_m^{\alpha,n}$ – для області значень $\varphi_m^{\alpha,n}$.

Якщо $n = 1$, то, відповідно, уживаємо позначення φ_m^{α}, D_m^{α}, E_m^{α}.

Множину L назвемо α-*РМ*, якщо χ_L є α-РФ.

Множину L назвемо α-*РПМ*, якщо $L = \varnothing$ або $L = E_f$ для деякої α-рекурсивної функції f.

Предикат P назвемо α-*РП*, якщо χ_P є α-РФ.

Предикат P назвемо α-*ЧРП*, якщо $\chi_P^{ч}$ є α-ЧРФ.

Приклад 6.1.2. Наведемо релятивні варіанти теорем із попередніх розділів.

R1) Релятивна s-m-n-теорема. Для довільних $m, n > 1$ існує $(m+1)$-арна РФ $s_n^m(z, x_1,..., x_m)$ така: для всіх $z, x_1,..., x_m, y_1,..., y_n$ маємо $\varphi_z^{\alpha,m+n}(x_1,..., x_m, y_1,..., y_n) = \varphi_{s_n^m(z,x_1,...,x_m)}^{\alpha,n}(y_1,..., y_n)$.

R2) Релятивна s-m-n-теорема (спрощена форма). Для кожної α-ЧРФ $f(x, y)$ існує РФ $s(x)$ така, що $f(x, y) = \varphi_{s(x)}^{\alpha}(y)$ для всіх x, y.

R3) Функція, універсальна для класу n-арних α-РФ, не є α-ЧРФ.

R4) Існує α-ЧРФ, універсальна для класу n-арних α-ЧРФ.

R5) Релятивна теорема Кліні про НТ.

Нехай f – $(n+1)$-арна РФ. Тоді існує n-арна РФ g така: для всіх $x_1,..., x_n$ маємо $\varphi_{g(x_1,...,x_n)}^{\alpha} = \varphi_{f(g(x_1,...,x_n),x_1,...x_n)}^{\alpha}$.

R6) Релятивна теорема Поста.

L та $\overline{L}$ є α-РПМ $\Rightarrow$ L та $\overline{L}$ є α-РМ.

R7) Такі визначення α-РПМ еквівалентні:

*df*1) $L = \varnothing$ або L є областю значень деякої α-РФ;

*df*2) L є областю значень деякої α-ЧРФ;

*df*3) L є областю визначення деякої α-ЧРФ;

*df*4) часткова характеристична функція множини L є α-ЧРФ.

R8) Предикат $Q(x_1,..., x_n)$ є α-ЧРП тоді й тільки тоді, коли існує α-РП $R(x_1,..., x_n, y)$ такий: $Q(x_1,..., x_n) \Leftrightarrow \exists y R(x_1,..., x_n, y)$.

$R9)$ $Q(x_1,..., x_n, y)$ є α-ЧРП $\Rightarrow \exists y Q(x_1,..., x_n, y)$ теж є α-ЧРП.

$R10)$ $D^\alpha = \{x \mid \varphi_x^\alpha(x)$ визначене$\}$ є α-РПМ і не є α-РМ.

$R11)$ $D^\alpha = \{x \mid \varphi_x^\alpha(x)$ невизначене$\}$ не є α-РПМ.

Обчислюваність відносно довільної множини B визначають як обчислюваність відносно її характеристичної функції χ_B.

Функцію називають *B-рекурсивною*, якщо вона χ_B-рекурсивна.

Функцію називають *B-ЧРФ*, якщо вона χ_B-ЧРФ.

Множину A називають *B-рекурсивною*, якщо χ_A є χ_B-РФ.

Множину A називають *B-РПМ*, якщо $\chi_A^ч$ є χ_B-ЧРФ.

Предикат P називають *B-рекурсивним*, якщо χ_P є χ_B-РФ.

Предикат P називають *B-ЧРП*, якщо $\chi_P^ч$ є χ_B-ЧРФ.

Функцію $\varphi_m^{\chi_B,n}$ і множину $D_m^{\chi_B,n}$ позначаємо $\varphi_m^{B,n}$ та $D_m^{B,n}$.

Якщо $n = 1$, то вживаємо позначення φ_m^B та D_m^B.

Класи функцій $ЧРФ^{\chi_B}$ та $РФ^{\chi_B}$ позначатимемо $ЧРФ^B$ та $РФ^B$.

Теорема 6.1.2. 1) Множина A є $\overline{A}$-РМ.

2) Якщо A є B-РМ і B є C-РМ, то A є C-РМ.

3) Якщо A є B-РПМ і B є C-РМ, то A є C-РПМ.

Приклад 6.1.3. Якщо A є B-РМ та B є C-РПМ, то не завжди A є C-РПМ.

Візьмемо $A = \overline{D^C}$ і $B = D^C$. Тоді $\overline{D^C}$ є D^C-РМ згідно з п. 1 теореми 6.1.3, а D^C є C-РПМ за $R10$, але за $R11$ $\overline{D^C}$ не є C-РПМ.

Завдання для самоконтролю

1. Укажіть, як можна уточнити поняття відносної обчислюваності.
2. Дайте визначення МНРО.
3. Дайте визначення МНРО-програми.
4. Дайте визначення α-обчислюваної функції.
5. Дайте визначення α-ЧРФ.
6. Укажіть елементарні властивості α-ЧРФ.
7. Сформулюйте тезу Тьюрінга.
8. Укажіть, як задається кодування команд МНРО-програм.

9. Уведіть ефективну нумерацію n-арних α-ЧРФ.

10. Дайте визначення α-РФ, α-ЧРФ, α-РМ, α-РПМ, α-РП, α-ЧРП.

11. Сформулюйте релятивні варіанти відомих вам теорем теорії алгоритмів.

12. Укажіть, як визначається обчислюваність відносно множини.

13. Укажіть властивості обчислюваності відносно множини.

Вправи

1. Доведіть релятивні варіанти теорем $R1$–$R11$.

2. Доведіть, що існують РФ g та h такі:

якщо $L = D^{\alpha}_{n}$ та $\overline{L} = D^{\alpha}_{m}$, то $\chi_L = \varphi^{\alpha}_{g(n,m)}$ та $\chi_{\overline{L}} = \varphi^{\alpha}_{h(n,m)}$.

Це ефективний варіант релятивної теореми Поста (за індексами α-РПМ L та $\overline{L}$ ефективно знаходимо індекси χ_L та $\chi_{\overline{L}}$).

3. З'ясуйте, чи існує РФ s така:

1) для всіх $x, y \in N$ $D^{\alpha}_{s(x,y)} = (D^{\alpha}_{x+y} \cap E^{\alpha}_{y}) \setminus \{3x, y+2\}$;

2) для всіх $x, y \in \in N$ $E^{\alpha}_{s(x,y)} = E^{\alpha}_{2x} \cup (D^{\alpha}_{y} \setminus E^{\alpha}_{2x})$;

3) для всіх $x, y, z \in N$ $D^{\alpha}_{s(x,y,z)} = E^{\alpha}_{y} \cup (E^{\alpha}_{z} \setminus D^{\alpha}_{x})$;

4) для всіх $x, y, z \in N$ $E^{\alpha}_{s(x,y,z)} = E^{\alpha}_{3y} \cup (E^{\alpha}_{2z+x} \cap D^{\alpha}_{x+5y}) \setminus \{x, 2y, z^3\}$.

*4. Дайте визначення A-продуктивної, A-креативної, A-імунної та A-простої множин. Дослідіть їхні властивості.

*5. Доведіть:

1) кожна A-продуктивна множина є продуктивною;

2) кожна A-імунна множина є імунною;

3) співвідношення між A-креативними та креативними множинами залежить від A;

4) співвідношення між A-простими та простими множинами залежить від A;

5) множини A-креативних і m-повних A-РПМ збігаються.

*6. Нехай B – A-продуктивна множина із продуктивною функцією $g(x)$. Укажіть продуктивну функцію для B як продуктивної множини.

*7. Укажіть продуктивну функцію для $\overline{D^A}$ як:
1) продуктивної множини;
2) A-продуктивної множини.

6.2. *T*-звідність

Інтуїтивне поняття звідності найадекватніше відображує поняття тьюрінгової звідності, або T-звідності.

Неформально кажучи, множина A T-зводиться до множини B, що позначаємо $A \leq_T B$, якщо для розв'язання питання "$x \in A$" необхідно відповісти на скінченну кількість запитань про B, але їхні кількість і природа заздалегідь не відомі. Отже, приходимо до такого визначення.

Множина A *T-зводиться* до множини B, якщо множина A є B-рекурсивною. Цей факт позначаємо $A \leq_T B$.

Уведемо відношення *T-еквівалентності* $\equiv_T$:

$$A \equiv_T B, \text{ якщо } A \leq_T B \text{ та } B \leq_T A.$$

Писатимемо $A <_T B$, якщо $A \leq_T B$ і неправильно, що $B \leq_T A$.

Писатимемо $A \,|_T\, B$, якщо неправильно $A \leq_T B$ і неправильно $B \leq_T A$.

Укажемо **властивості *T*-звідності.**

t1) $A \leq_T A$.

t2) Якщо $A \leq_T B$ та $B \leq_T C$, то $A \leq_T C$.

t3) Для кожної множини A маємо $A \leq_T \overline{A}$ та $\overline{A} \leq_T A$.

t4) $A \equiv_T \overline{A}$ для кожної множини A.

t5) Якщо $A \leq_m B$, то $A \leq_T B$.

Нехай РФ $g : A \leq_m B$. Тоді $\chi_A(x) = \chi_B(g(x))$, звідки χ_A є χ_B-РФ.

t6) Якщо B є РМ і $A \leq_T B$, то A є РМ.

χ_B є РФ, тому РФ^B = РФ. Якщо $A \leq_T B$, то $\chi_A \in$ РФ^B = РФ.

t7) Якщо A є РМ, то $A \leq_T B$ для кожної множини B.

Для довільної множини B маємо $\chi_A \in$ РФ $\subseteq$ ЧРФ $\subseteq$ РФ^B, звідки χ_A є χ_B-РФ.

t8) Якщо A є РПМ, то $A \leq_T D$.

За r15) $A \leq_m D$ для кожної РПМ А, звідки за t5) маємо $A \leq_T D$.

Твердження 6.2.1. Для кожної $B \subseteq N$ існує зліченна кількість множин $A \subseteq N$ таких, що $A \leq_T B$.

$A \leq_T B$, якщо A рекурсивна відносно B, тобто χ_A рекурсивна відносно χ_B. При зафіксованій χ_B множина таких χ_A зліченна.

Приклад 6.2.1. ″Ефективний″ варіант властивості t5.

Існує РФ $k(z)$ така: $\varphi_z : A \leq_m B \Rightarrow \chi_A = \varphi^B_{k(z)}$.

$\chi_A(x) = \chi_B(\varphi_z(x))$ є B-ЧРФ $\Rightarrow$ за релятивною s-m-n-теоремою існує РФ k така: $\chi_B(\varphi_z(x)) = \varphi^B_{k(z)}(x)$ для всіх z, x. Отже, $\chi_A = \varphi^B_{k(z)}$.

Теорема 6.2.1. Множина B є A-РПМ $\Leftrightarrow B \leq_m D^A$.

Нехай B є A-РПМ. Функція $f(x, y) = \chi^ч_B(x) + \mathbf{o}(y)$ є A-ЧРФ, тому що $\chi^ч_B$ є A-ЧРФ. За релятивною s-m-n-теоремою існує РФ s така: $f(x,y) = \varphi^A_{s(x)}(y)$ для всіх x, y. При $x \in B$ маємо $\varphi^A_{s(x)}(y) = 1$ для всіх y, звідки $\varphi^A_{s(x)}(s(x))\downarrow$, тому $s(x) \in D^A$. При $x \notin B$ $\varphi^A_{s(x)}(y)\uparrow$ для всіх y, тому $\varphi^A_{s(x)}(s(x))\uparrow$, звідки $s(x) \notin D^A$.

Наслідок 6.2.1. Якщо B є A-РПМ, то $B \leq_T D^A$.

Наслідок 6.2.2. $A <_T D^A$ для кожної множини A.

Маємо $A \leq_T D^A$, тому що A є A-РПМ. За R10 D^A не є A-РМ, тому неправильно $D^A \leq_T A$.

Приклад 6.2.2. Існують множини A, B: $A \otimes B <_T A$ та $A \oplus B \equiv_T A$.

Як приклад візьмемо $A = D$ та $B = \varnothing$.

Це також приклад множин A, B: $A \otimes B <_m A$ та $A \oplus B \equiv_T A$.

Приклад 6.2.3. Існують множини A, B: $A <_m A \oplus B$ та $A \equiv_T A \otimes B$.

Як приклад візьмемо $A = N$ та $B = \varnothing$.

Приклад 6.2.4. Існують множини A, B: $A <_T A \otimes B$ та $B \equiv_m A \otimes B$.

Як приклад візьмемо $A = N$ та $B = D$.

Приклад 6.2.5. Існують A, B: $A \otimes B <_m A \oplus B$ та $A \oplus B \equiv_T A \otimes B$.

Як приклад візьмемо $A = N$ та $B = \varnothing$.

Приклад 6.2.6. Існують A, B: $A \otimes B <_T A \oplus B$ та $A \otimes B \equiv_m B$.

Як приклад візьмемо $A = D$ та $B = \varnothing$.

Приклад 6.2.7. Існують множини A, B: $B \equiv_T A\oplus B$ та $B <_m A\otimes B$. Як приклад візьмемо $A = N_{2x}$ та $B = N$. Тоді $N <_m N_{2x}\otimes N$.

Приклад 6.2.8. Не існує множин A, B: $A\oplus B <_T A$ та $A\otimes B \equiv_m A\oplus B$. За r13) $A \le_m A\oplus B$, тому $A \le_T A\oplus B$. Отже, неможливо $A\oplus B <_T A$.

Приклад 6.2.9. Не існує множин A, B: $A\oplus B <_m B$ та $A\otimes B \equiv_T A$. Згідно із r13) $B \le_m A\oplus B$, тому неможливо $A\oplus B <_T B$.

Приклад 6.2.10. Маємо $A\cup B \le_T A\oplus B$.

Маємо $x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B \Leftrightarrow 2x\in A\oplus B \vee 2x+1\in A\oplus B$. Звідси $\chi_{A\cup B}(x) = sg(\chi_{A\oplus B}(2x) + \chi_{A\oplus B}(2x+1))$. Отже, $\chi_{A\cup B}$ є $\chi_{A\oplus B}$-РФ.

Приклад 6.2.11. Маємо $A\cap B \le_T A\oplus B$.

Маємо $x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \,\&\, x\in B \Leftrightarrow 2x\in A\oplus B \,\&\, 2x+1\in A\oplus B$. Звідси $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_{A\oplus B}(2x)\cdot\chi_{A\oplus B}(2x+1)$. Отже, $\chi_{A\cap B}$ є $\chi_{A\oplus B}$-РФ.

Приклад 6.2.12. За умови $A, B \ne \varnothing$ маємо $A\cup B \le_T A\otimes B$.

Візьмемо довільні $a\in A$ та $b\in B$. Маємо $x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B \Leftrightarrow C(x,b)\in A\otimes B \vee C(a,x)\in A\otimes B$. Звідси отримуємо, що $\chi_{A\cup B}$ є $\chi_{A\otimes B}$-РФ: $\chi_{A\cup B}(x) = sg(\chi_{A\otimes B}(C(x,b)) + \chi_{A\otimes B}(C(a,x)))$.

Приклад 6.2.13. За умови $B \ne \varnothing$ маємо $A\setminus B \le_T B\otimes A$.

Якщо $A = \varnothing$, то $A\setminus B = \varnothing \Rightarrow A\setminus B$ є РМ $\Rightarrow A\setminus B \le_T B\otimes A$ за t7.

Якщо $A \ne \varnothing$, то, ураховуючи $B \ne \varnothing$, візьмемо $a\in A$ та $b\in B$. Тоді $x\in A\setminus B \Leftrightarrow x\in A \,\&\, x\notin B \Leftrightarrow C(b,x)\in B\otimes A \,\&\, C(x,a)\notin B\otimes A$. Звідси $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_{B\otimes A}(C(b,x))\cdot nsg(\chi_{B\otimes A}(C(x,a)))$. Отже, $\chi_{A\setminus B}$ є $\chi_{B\otimes A}$-РФ.

Приклад 6.2.14. Маємо $A\otimes B \le_T A\oplus B$.

$x\in A\otimes B \Leftrightarrow l(x)\in A \,\&\, r(x)\in B \Leftrightarrow 2l(x)\in A\oplus B \,\&\, 2r(x)+1\in A\oplus B$. Отже, $\chi_{A\otimes B}(x) = \chi_{A\oplus B}(2l(x))\cdot\chi_{A\oplus B}(2r(x)+1)$. Тому $\chi_{A\otimes B}$ є $\chi_{A\oplus B}$-РФ.

Приклад 6.2.15. Маємо $D \equiv_T \bar{D} \equiv_T D\oplus\bar{D} \equiv_T D\otimes\bar{D}$.

За t4) $D \equiv_T \bar{D}$. За r13) $D \le_m D\oplus\bar{D}$, за r14) $D \le_m D\otimes\bar{D}$, тому за t5) $D \le_T D\oplus\bar{D}$ та $D \le_T D\otimes\bar{D}$. За теоремою 5.1.1 $D\oplus\bar{D} \le_m D\otimes\bar{D}$, тому $D\oplus\bar{D} \le_T D\otimes\bar{D}$. Згідно із t2) достатньо показати $D\otimes\bar{D} \le_T D$.

"$x \in D \otimes \bar{D}$" є D-РП: $x \in D \otimes \bar{D} \Leftrightarrow l(x) \in D \,\&\, r(x) \notin D$. Отже, $\chi_{D\otimes\bar{D}}(x) = \chi_D(l(x)) \cdot nsg(\chi_D(r(x)))$, тому $\chi_{D\otimes\bar{D}}$ є χ_D-РФ.

Зауваження. "$x \in D \oplus \bar{D}$" також є D-РП: $x \in D \oplus \bar{D} \Leftrightarrow$ (x парне та $x/2 \in D$) $\vee$ (x непарне та $(x-1)/2 \notin D$); звідси $\chi_{D\oplus\bar{D}}$ є χ_D-РФ.

Відношення $\equiv_T$ є відношенням еквівалентності, тому вводимо класи еквівалентності $d_T(A) = \{B \mid A \equiv_T B\}$ відносно $\equiv_T$

Такі класи називають *T-степенями*, або *степенями нерозв'язності* [13, 19–21].

T-степінь *рекурсивний*, якщо він містить РМ.

T-степінь *рекурсивно-перелічний* (РП), якщо він містить РПМ.

Твердження 6.2.2. Кожний T-степінь – злічення множина.

Згідно із твердженням 6.2.1 для кожної $B \subseteq N$ існує злічення кількість множин $A \subseteq N$ таких, що $A \leq_T B$. Тому для кожної $B \subseteq N$ існує злічення кількість $A \subseteq N$ таких, що $A \equiv_T B$.

Булеан множини N має потужність континууму, тому:

Твердження 6.2.3. Множина всіх T-степенів має потужність континууму.

На множині T-степенів уведемо відношення часткового порядку, яке також будемо позначати $\leq$:

$\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$, якщо $A \leq_T B$ для деяких $A \in \boldsymbol{a}$, $B \in \boldsymbol{b}$.

Зрозуміло, що $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b} \Leftrightarrow A \leq_T B$ для всіх $A \in \boldsymbol{a}$, $B \in \boldsymbol{b}$.

Будемо писати $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, якщо $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$.

Будемо писати $\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}$, якщо неправильно $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ і неправильно $\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{a}$.

Твердження 6.2.4. Для кожного T-степеня $\boldsymbol{b}$ існує не більше ніж злічення множина T-степенів $\boldsymbol{a}$ таких, що $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$.

Справді, згідно із твердженням 6.2.1 для кожної $B \subseteq N$ існує злічення кількість $A \subseteq N$ таких, що $A \leq_T B$.

Укажемо **властивості *T*-степенів.**

s1) Існує єдиний рекурсивний T-степінь $\mathbf{0}$, який складається з усіх РМ. Він є найменшим T-степенем:

$0 < \boldsymbol{b}$ для кожного T-степеня $\boldsymbol{b} \neq 0$.

s2) РП T-степінь $\mathbf{0}' = d_T(D)$ є найбільшим РП T-степенем:

$\boldsymbol{b} \leq \mathbf{0}'$ для кожного РП T-степеня $\boldsymbol{b}$.

s3) Кожний нерекурсивний РП T-степінь містить множини, які не є РПМ.

s4) Якщо $d_m(A) \le_m d_m(B)$, то $d_T(A) \le_T d_T(B)$.

s5) $d_m(A) \subseteq d_T(A)$ для довільної множини A.

Теорема 6.2.2. Для кожної пари T-степенів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ існує єдина точна верхня грань $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = d_T(A \oplus B)$, де $A \in \boldsymbol{a}$, $B \in \boldsymbol{b}$.

A-РПМ B *T-повна*, якщо $L \le_T B$ для кожної A-РПМ L.

Приклад 6.2.16. Множина $D^A = \{x \mid \varphi_x^A(x)\downarrow\}$ є T-повною A-РПМ для кожної $A \subset N$.

Згідно з теоремою 6.2.1 маємо: B є A-РПМ $\Leftrightarrow B \le_m D^A$. Тому якщо B є A-РПМ, то $B \le_T D^A$. Зокрема, D є T-повною РПМ.

″Ефективним″ варіантом теореми 6.2.1 є

Теорема 6.2.3. 1) Існує РФ h така: $\varphi_{h(z)} : D_z^A \le_m D^A$ для всіх A, z.

2) Існує РФ u така: для всіх A, B, z якщо $\varphi_z : B \le_m D^A$, то $B = D_{u(z)}^A$.

Приклад 6.2.17. Існують k, $l \in N$ такі, що для всіх $A \subseteq N$ маємо $\varphi_k : A \le_m D^A$ та $\varphi_l : \bar{A} \le_m D^A$.

Справді, A-ЧРФ $\chi_A^ч(x)$ обчислюється МНРО-програмою:

1) $O(0)$
2) $J(0,1,2)$

Її код $p = 2^4 + 2^{23} - 1$. Маємо $A = D_z^A$. Тепер візьмемо $k = h(p)$, де h – РФ з умови теореми 6.2.3. Аналогічно візьмемо $l = h(q)$, де q – код МНРО-програми, яка обчислює A-ЧРФ $\chi_{\bar{A}}^ч(x)$.

За наслідком 6.2.2 $A <_T D^A$ для кожної множини A. Неформально це означає: при переході від A до D^A складність стрибкоподібно зростає, тому D^A називають *стрибком* множини A.

Операцію, яка кожній множині $A \subseteq N$ зіставляє множину D^A, називають *операцією стрибка* (*jump*).

Теорема 6.2.4. $A \le_T B \Leftrightarrow D^A \le_m D^B$.

Наслідок 6.2.3. $A \equiv_T B \Leftrightarrow D^A \equiv_m D^B$.

Наслідок 6.2.4. Якщо $A \equiv_T B$, то $D^A \equiv_T D^B$.

Зворотне до наслідку 6.2.4 твердження неправильне. Можливі випадки $A <_T B$ та $A \mid_T B$, для яких теж маємо $D^A \equiv_T D^B$.

Приклад 6.2.18. Маємо $A \leq_T B \Leftrightarrow A \leq_m D^B$ та $\overline{A} \leq_m D^B$.

Маємо $A \leq_T B \Rightarrow A$ є B-РМ; проте $\overline{A}$ є A-РМ $\Rightarrow$ $\overline{A}$ є B-РМ; отже, A та $\overline{A}$ є B-РМ $\Rightarrow$ A та $\overline{A}$ є B-РПМ $\Rightarrow$ (теорема 6.2.1) $A \leq_m D^B$ та $\overline{A} \leq_m D^B$.

Маємо $A \leq_m D^B$ та $\overline{A} \leq_m D^B$ $\Rightarrow$ (теорема 6.2.1) A та $\overline{A}$ є B-РПМ $\Rightarrow$ (релятивна теорема Поста) A та $\overline{A}$ є B-РМ $\Rightarrow A \leq_T B$.

″Ефективним″ варіантом теореми 6.2.4 є теорема 6.2.5.

Теорема 6.2.5. 1) Існує РФ f така: для всіх A, B, z

$$\chi_A = \varphi_z^B \Rightarrow \varphi_{f(z)} : D^A \leq_m D^B.$$

2) Існує РФ h така: для всіх A, B, z

$$\varphi_z : D^A \leq_m D^B \Rightarrow \chi_A = \varphi_{h(z)}^B.$$

Операцію стрибка поширимо на множину T-степенів.

Стрибком T-степеня $\boldsymbol{b}$ називають степінь $\boldsymbol{b}' = d_T(D^B)$, де $B \in \boldsymbol{b}$.

Таке визначення коректне, тому що за наслідком 6.2.4 $\boldsymbol{b}'$ не залежить від вибору конкретного представника $B \in \boldsymbol{b}$.

Укажемо властивості операції стрибка.

*jm*1) $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{b}'$ для довільного T-степеня $\boldsymbol{b}$.

*jm*2) Якщо $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a}' \leq \boldsymbol{b}'$.

*jm*3) $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{b}'$ для довільного T-степеня $\boldsymbol{b}$.

*jm*4) Якщо $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}'$.

*jm*5) Якщо $A \in \boldsymbol{a}$, $B \in \boldsymbol{b}$ та B є A-РПМ, то $\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{a}'$.

T-степінь $\boldsymbol{b}$ *повний*, якщо $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}'$ для деякого T-степеня $\boldsymbol{a}$.

Повний T-степінь складається тільки з T-повних множин.

Множина всіх повних T-степенів є множиною значень операції стрибка.

Уведемо операцію *n-кратного стрибка*, або *n-стрибка.*

Для довільної $A \subseteq N$ покладемо $A^{(0)} = A,\ A^{(k+1)} = D^{A^{(k)}}$.

Для довільного T-степеня $\boldsymbol{a}$ покладемо $\boldsymbol{a}^{(0)} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}^{(k+1)} = (\boldsymbol{a}^{(k)})'$.

Укажемо деякі властивості операції n-кратного стрибка.

Ураховуючи $A <_T D^A$ та $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{a}'$, дістаємо:

*jn*1) $A^{(0)} <_T A^{(1)} <_T \ldots <_T A^{(k)} <_T A^{(k+1)} <_T \ldots$ для довільної $A \subseteq N$;

*jn*2) $\boldsymbol{a}^{(0)} < \boldsymbol{a}^{(1)} < \ldots < \boldsymbol{a}^{(k)} < \boldsymbol{a}^{(k+1)} < \ldots$ для довільного *T*-степеня $\boldsymbol{a}$;

*jn*3) якщо $A \le_T B$, то $A^{(n)} \le_m B^{(n)}$ для всіх $n \ge 1$.

Уведемо тепер операцію ω-*стрибка* на множинах і степенях.

ω-*стрибком множини* $A \subseteq N$ назвемо множину

$$A^{(\omega)} = \{C(x, y) \mid x \in A^{(y)}\}.$$

ω-*стрибком T-степеня* $\boldsymbol{a}$ назвемо *T*-степінь

$$\boldsymbol{a}^{(\omega)} = d_T(A^{(\omega)}), \text{ де } A \in \boldsymbol{a}.$$

Теорема 6.2.6. $A^{(n)} <_T A^{(\omega)}$ для всіх A, n.

Теорема 6.2.7. Якщо $A \le_T B$, то $A^{(\omega)} \le_m B^{(\omega)}$.

Приклад 6.2.19. Існує РФ *f* така: для кожних *A* та *B* якщо для всіх *y* маємо $\chi_{A^{(y)}} = \varphi^B_{f(y)}$, то $A^{(\omega)} \le_T B$.

Маємо $\chi_{A^{(\omega)}}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A^{(\omega)} \Leftrightarrow \boldsymbol{l}(x) \in A^{(\boldsymbol{r}(x))} \Leftrightarrow \chi_{A^{(r(x))}}(l(x)) = 1$ $\Leftrightarrow$ (згідно з умовою) $\varphi^B_{f(r(x))}(l(x)) = 1$ – а це *B*-РП.

Отже, $\chi_{A^{(\omega)}}$ є *B*-РФ.

Приклад 6.2.20. Існує РФ *f* така: $\chi_{A^{(y)}} = \varphi^{A^{(\omega)}}_{f(y)}$ для всіх *A* та *y*.

Функція

$$\chi_{A(y)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A^{(y)}, \\ 0, & \text{якщо } x \in A^{(y)}, \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } C(x,y) \in A^{(\omega)}, \\ 0, & \text{якщо } C(x,y) \notin A^{(\omega)}, \end{cases}$$

є $A^{(\omega)}$-РФ, тому за релятивною *s-m-n*-теоремою існує РФ *f* така: для всіх *x*, *y* маємо $\chi_{A^{(y)}}(x) = \varphi^{A^{(\omega)}}_{f(y)}(x)$. Отже, $\chi_{A^{(y)}} = \varphi^{A^{(\omega)}}_{f(y)}$.

Приклад 6.2.21. Існують множини *A* та *B* такі: $A^{(\omega)} \le_m B^{(\omega)}$ та $B <_T A$.

Для довільних $B \subseteq N$ та $n > 0$ візьмемо $A = B^{(n)}$. Тоді для всіх *x* маємо $A^{(x)} = B^{(x+n)}$. Звідси $u \in A^{(\omega)} \Leftrightarrow l(u) \in A^{(r(u))} \Leftrightarrow l(u) \in B^{(r(u)+n)} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow C(l(u), r(u) + n) \in B^{(\omega)}$. Отже, $A^{(\omega)} \le_m B^{(\omega)}$. Водночас згідно із *jn*1 маємо $B <_T B^{(n)}$, тобто $B <_T A$.

Зауважимо, що за теоремою 6.2.7 із $B <_T A$ отримуємо $B^{(\omega)} \le_m A^{(\omega)}$, тому для цих *A* та *B* маємо $A^{(\omega)} \equiv_m B^{(\omega)}$.

Отже, зворотне до теореми 6.2.7 твердження неправильне.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення T-звідності.

2. Поясніть, чому T-звідність адекватно відображує інтуїтивне поняття звідності.

3. Наведіть елементарні властивості T-звідності.

4. Дайте визначення відношення T-еквівалентності.

5. Поясніть, що таке T-степінь.

6. Укажіть елементарні властивості T-степенів.

7. Поясніть, що таке рекурсивний T-степінь.

8. Опишіть рекурсивні T-степені.

9. Поясніть, що таке рекурсивно-перелічний T-степінь.

10. Поясніть, що таке супремум (точна верхня грань) T-степенів.

11. Сформулюйте теорему про супремум.

12. Дайте визначення T-повної A-РПМ.

13. Дайте визначення операції стрибка на множинах.

14. Дайте визначення операції стрибка на степенях.

15. Укажіть властивості операції стрибка.

16. Поясніть, що таке n-кратний стрибок.

17. Наведіть властивості операції n-кратного стрибка.

18. Поясніть, що таке ω-стрибок.

19. Поясніть, як співвідносяться операції n-кратного та ω-стрибка.

20. Наведіть властивості операції ω-стрибка.

Вправи

1. Порівняйте потужності множини всіх T-степенів і множини всіх рекурсивно-перелічних T-степенів.

2. Доведіть: якщо $A \neq \varnothing$ та $B \neq \varnothing$, то $A\otimes B \equiv_T A\oplus B$.

3. Доведіть:

1) $A \setminus B \leq_T A\oplus B$;

2) $A\cap B \leq_T A\otimes B$;

3) $A \setminus B \leq_T B\oplus A$;

4) $A \cup \overline{B} \leq_T A\otimes B$, якщо $A \neq \varnothing$;

5) $\overline{A} \cap B \leq_T A\oplus B$.

4. З'ясуйте, чи існують множини A та B такі:

1) $A \otimes B <_T A$ та $A \otimes B \equiv_m A \oplus B$;
2) $A <_m A \oplus B$ та $A \equiv_T A \oplus B$;
3) $A <_T A \otimes B$ та $A \otimes B \equiv_m A \oplus B$;
4) $A <_m A \otimes B$ та $A \equiv_T A \oplus B$;
5) $A <_T A \oplus B$ та $A \equiv_m A \otimes B$;
6) $B <_T A \oplus B$ та $A \otimes B \equiv_m A \oplus B$;
7) $A \otimes B <_m A \oplus B$ та $A \equiv_T A \otimes B$;
8) $A \otimes B <_T A \oplus B$ та $A \equiv_m A \oplus B$;
9) $B <_T A \otimes B$ та $B \equiv_m A \oplus B$;
10) $A <_m A \otimes B$ та $A \otimes B \equiv_T A \oplus B$.

5. З'ясуйте, чи правильні такі твердження:

1) якщо $A <_m B$, то $A <_T B$;
2) якщо $A \,|_m\, B$, то $A \,|_T\, B$;
3) якщо $A \,|_T\, B$, то $A \,|_m\, B$.

6. Доведіть:

1) $\overline{D} \leq_T \{x \mid D_x$ не є ПРМ$\}$;
2) $D \leq_T \{x \mid E_x$ є РМ$\}$.

7. З'ясуйте, у якому відношенні щодо m- і T-звідностей перебувають множини A, $\overline{A}$ та $D \oplus \overline{D}$, якщо:

1) $A = \{x \mid \varphi_x$ неін'єктивна$\}$;
2) $A = \{x \mid 2 \notin D_x\}$;
3) $A = \{x \mid \varphi_x(x) = 1\} \otimes N$;
4) $A = \{x \mid 5 \notin E_x\} \oplus N$;
5) $A = \{x \mid 4 \in D_x\} \oplus \{x \mid \varphi_x(x) = 4\}$;
6) $A = \{x \mid x \notin E_x\} \otimes N$;
7) $A = \{x \mid$ неправильно, що $\{1, 3\} \subseteq E_x\}$.

8. Нехай B є РМ. Доведіть, що тоді $D \equiv_T D^B$.

9. Доведіть, що для РПМ A та B таких, що $A \cap B = \varnothing$, маємо:

1) $A \oplus B \leq_T A \cup B$;
2) $d_T(A \cup B) = a \cup b$, де $a = d_T(A)$ та $b = d_T(B)$.

*10. Доведіть, що існує РФ g така: для всіх A, B, z, x
якщо $\varphi_z : A \leq_m B$, то $\varphi_{g(z,x)} : A^{(x)} \leq_m B^{(x)}$.

*11. Доведіть, що існує РФ f така: для всіх A, x, y
якщо $x \leq y$, то $\varphi_{f(x,y)} : A^{(x)} \leq_m A^{(y)}$.

7. АРИФМЕТИЧНІСТЬ. АРИФМЕТИЧНА ІЄРАРХІЯ

У цьому розділі вивчатимемо найбільш фундаментальну математичну структуру – множину натуральних чисел. Для її дослідження використовують ідеї і методи як математичної логіки, так і теорії алгоритмів. Розглянемо зв'язки між арифметичними предикатами і ЧРП, арифметичними функціями і ЧРФ, арифметичними множинами і РПМ, а також арифметичну ієрархію – класифікацію арифметичних множин і предикатів, що пов'язує теорію рекурсивних функцій із математичною логікою.

7.1. Арифметичність частково рекурсивних функцій і рекурсивно-перелічних множин. Теорема Тарського

При інтерпретації арифметичних формул на стандартній моделі $\boldsymbol{N}=(N, \sigma_{ar})$ іменами натуральних чисел можуть бути замкнені терми 0, 1, 1+1,..., 1+...+1,... Таке ім'я числа n позначимо як $\overline{n}$. Ці імена визначатимемо так:

$$\overline{0}=0,\quad \overline{1}=1,\quad \overline{n+1}=\overline{n}+1 \text{ для } n\geq 1.$$

Застосовуючи введені імена, можна визначити виразність на N предикатів, множин і функцій, використовуючи тільки замкнені арифметичні формули.

Предикат $P: N^k \to \{T,F\}$ *арифметичний*, якщо існує арифметична формула $\Phi(x_1,..., x_k)$ з вільними змінними $x_1,..., x_k$:

$$P(n_1,\ldots, n_k) = T \Leftrightarrow N \models \Phi_{x_1,\ldots,x_k}[\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_k].$$

Така формула Ф *виражає* предикат P.

Множина $L\subseteq N^k$ *арифметична*, якщо існує арифметична формула $\Phi(x_1,..., x_k)$ з вільними змінними $x_1,..., x_k$:

$$(n_1,\ldots, n_k)\in L \Leftrightarrow N \models \Phi_{x_1,\ldots,x_k}[\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_k].$$

Ця формула Ф *виражає* множину L.

Класи арифметичних множин і арифметичних предикатів позначатимемо *АМ* і *АП*.

Функція $f: N^k \to N$ арифметична, якщо її графік Γ_f – арифметична множина. Проте доцільно дати безпосереднє визначення.

Функція $f: N^k \to N$ *арифметична*, якщо існує арифметична формула $\Phi(x_1,..., x_k, z)$ з вільними змінними $x_1,..., x_k, z$:

$$f(n_1,\ldots, n_k) = m \Leftrightarrow N \models \Phi_{x_1,...,x_k,z}[\overline{n}_1,...,\overline{n}_k,\overline{m}].$$

Така формула Φ *виражає* функцію f.

Приклад 7.1.1. Наведені нижче функції є арифметичними, вони виражаються відповідними арифметичними формулами:

1) функція $x+y$ – формулою $z = x+y$;
2) функція $x\times y$ – формулою $z = x\times y$;
3) функція $\mathbf{o}(x)=0$ – формулою $z = 0 \,\&\, x = x$;
4) функція $\mathrm{s}(x)=x+1$ – формулою $z = x+1$;
5) функція $\mathrm{I}^n_m(x_1,..., x_n)$ – формулою $z=x_m \,\&\, x_1=x_1 \,\&...\&\, x_n=x_n$;
6) функція $x \dot{-} y$ – арифметичною формулою

$$(\exists v(x+v=y) \to (z=0) \,\&\, (\exists v(y+v=x) \to y+z=x).$$

Приклад 7.1.2. Операції суперпозиції S^{n+1} і мінімізації M зберігають арифметичність функцій.

Нехай $f = \mathrm{S}^{n+1}(g, g_1,..., g_n)$ і функції $g(x_1,..., x_n)$, $g_1(x_1,..., x_m)$,..., $g_n(x_1,..., x_m)$ виражені формулами $\mathrm{G}(x_1,..., x_n, z)$, $\mathrm{G}_1(x_1,..., x_m, z)$,..., $\mathrm{G}_n(x_1,..., x_m, z)$. Тоді функцію $z = f(x_1,..., x_m)$ виражає формула

$$\exists z_1\ldots\exists z_n(\mathrm{G}_{x_1,...,x_n}[z_1,..., z_n] \& (\mathrm{G}_1)_z[z_1] \&...\& (\mathrm{G}_n)_z[z_n]).$$

Нехай функція $g(x_1,..., x_n, y)$ виражена арифметичною формулою $\mathrm{G}(x_1,..., x_n, y, z)$. Тоді маємо $z = \mu_y(g(x_1,\ldots, x_n, y) = 0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (g(x_1,\ldots, x_n, z) = 0) \,\&\, (\forall u(u<z \to g(x_1,\ldots, x_n, u)\neq 0)$. Отже, функція $z = \mu_y(g(x_1,\ldots, x_n, y) = 0)$ виражається формулою

$$\mathrm{G}_{y,z}[z, 0] \& \forall u(u<z \to \exists t(\mathrm{G}_{y,z}[u, t] \,\&\, (t\neq 0))).$$

Теорема 7.1.1. Кожна ЧРФ арифметична.

Справді, кожну ЧРФ отримують із $\mathbf{o}$, s, I^n_m, +, ×, $\dot{-}$ за допомогою S^{n+1} та M.

Теорема 7.1.2. Кожна РПМ арифметична.

Нехай $L \subseteq N^k$ є РПМ. Тоді $L = D_f$ для деякої ЧРФ f. Однак кожна ЧРФ арифметична, тому f арифметична. Нехай f виражається арифметичною формулою $\Phi(x_1,\ldots, x_n, z)$. Тоді множина D_f виражається арифметичною формулою $\exists z\Phi$.

Приклад 7.1.3. Кожна РПМ *діофантова*, тобто є множиною невід'ємних значень деякого полінома над Z (див. [4]). Звідси, зокрема, отримуємо нерозв'язність 10-ї проблеми Гільберта. Із самого їхнього визначення випливає, що діофантові множини можна виразити формулами вигляду $\exists x_1 \ldots \exists x_n$ A, де A – атомарна арифметична формула. Це ще раз засвідчує арифметичність РПМ.

Теорема 7.1.3. Клас арифметичних множин замкнений відносно операцій $\cup$, $\cap$ і доповнення.

Нехай множини A та B виражаються арифметичними формулами **Ф** та **Ψ**. Тоді $A \cup B$, $A \cap B$ та $\overline{A}$ виражаються, відповідно, арифметичними формулами **Ф∨Ψ**, **Ф&Ψ** та **¬Ф**.

Приклад 7.1.4. $D = \{x | \varphi_x(x)\downarrow\}$ є РПМ, тому за теоремою 7.1.2 D арифметична, отже, $\overline{D}$ арифметична, але $\overline{D}$ не є РПМ.

Наслідок 7.1.1. Для класів РПМ і АМ маємо: РПМ $\subset$ АМ.

Нехай на основі певного кодування κ задано ефективну нумерацію множини арифметичних формул.

Множину номерів усіх ІАФ позначимо **T**.

Приклад 7.1.5. Множина **T** продуктивна.

Множина $\overline{D}$ арифметична, нехай $\Phi(x)$ – арифметична формула, яка виражає $\overline{D}$. Тоді маємо $n \in \overline{D} \Leftrightarrow \Phi_x[\overline{n}]$ є ІАФ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\kappa(\Phi_x[\overline{n}]) \in \mathbf{T}$. Функція $\kappa(\Phi_x[\overline{n}])$ алгоритмічно обчислювана, тому це певна РФ $g(n)$. Ця РФ g m-зводить продуктивну множину $\overline{D}$ до множини **T**. Звідси **T** – продуктивна множина

Множина **T** продуктивна, тому вона не є РПМ. Понад те:

Теорема 7.1.4 (Тарського). Множина **T** неарифметична.

Фундаментальне значення теореми Тарського полягає в тому, що вона доводить неможливість повної формалізації поняття істини в достатньо багатих мовах, які включають або можуть моделювати мову арифметики.

Приклад 7.1.6. Із теореми Тарського можна отримати першу теорему Ґьоделя про неповноту формальної арифметики Ar.

Справді, множина її теорем $\mathrm{Th}(Ar)$ є перелічною, тому множина $\kappa(\mathrm{Th}(Ar))$ є РПМ. Кожна теорема Ar є ІАФ, тому $\mathrm{Th}(Ar) \subseteq$ ІАФ, звідки $\kappa(\mathrm{Th}(Ar)) \subseteq \mathbf{T}$. Проте **T** не є РПМ, звідки $\kappa(\mathrm{Th}(Ar)) \subset \mathbf{T}$ та $\mathrm{Th}(Ar) \subset$ ІАФ. Нехай $\mathrm{Sp}(Ar) = \{\Psi \mid Ar \vdash \neg\Psi\}$ –

множина спростовних в Ar формул. Через несуперечливість Ar маємо $\mathrm{Sp}(Ar) \cap \mathrm{Th}(Ar) = \varnothing$. Повнота Ar означає: для кожної замкненої арифметичної формули Ψ маємо $\Psi \in \mathrm{Th}(Ar)$ або $\Psi \in \mathrm{Sp}(Ar)$. Нехай замкнена $\vartheta \in \mathrm{IA\Phi} \setminus \mathrm{Th}(Ar)$, тоді $\vartheta \notin \mathrm{Th}(Ar)$ і $\vartheta \in \mathrm{IA\Phi}$. Якщо $\vartheta \in \mathrm{Sp}(Ar)$, то $Ar \vdash \neg\vartheta$, звідки $\neg\vartheta \in \mathrm{IA\Phi}$, що суперечить $\vartheta \in \mathrm{IA\Phi}$. Тому $\vartheta \notin \mathrm{Sp}(Ar) \Rightarrow Ar$ неповна.

Це доведення має семантичний характер, воно виконується у стандартній моделі арифметики, використовуючи, крім несуперечливості Ar, істинність її теорем на $\boldsymbol{N}$. Доведення Ґьоделя не застосовує подібні семантичні міркування, воно спирається *лише на несуперечливість Ar*.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення арифметичного предиката, арифметичної множини, арифметичної функції.

2. Покажіть арифметичність функцій $\mathbf{o}$, s, I_m^n, $+$, $\times$, $\dot{-}$.

3. Покажіть, що операції S^{n+1} та M зберігають арифметичність функцій.

4. Укажіть, відносно яких теоретико-множинних операцій замкнений клас арифметичних множин.

5. Укажіть співвідношення між класами РПМ і *АМ*.

6. Сформулюйте теорему Тарського й поясніть, що вона засвідчує.

7. Поясніть, у чому полягає значення теореми Тарського.

Вправи

1. Доведіть арифметичність таких множин і предикатів:
   1) $\{x \mid E_x$ скінченна$\}$;
   2) $\{x \mid E_x$ є РМ$\}$;
   3) "$E_x = N$";
   4) "$E_x \neq D$";
   5) $\{x \mid \varphi_x$ неін'єктивна$\}$;
   6) $\{x \mid E_x$ креативна$\}$;
   7) $\{C(x, y) \mid x \in D_y\}$;
   8) "$D_x \leq_m D_y$".

2. 1) Чи існують неарифметичні креативні множини?

2) Чи існують неарифметичні продуктивні множини?

3*. Доведіть, що множина $\mathrm{Th}(Ar) = \{\Phi \mid Ar \vdash \Phi\}$ і множина $\mathrm{Sp}(Ar) = \{\Phi \mid Ar \vdash \neg\Phi\}$ рекурсивно-нероздільні.

7.2. Арифметична ієрархія

Розглянемо арифметичну ієрархію – класифікацію арифметичних множин і предикатів (див. [4, 13, 19, 20]).

σ_n-*префіксом* назвемо послідовність кванторних префіксів із $n-1$ зміною однотипних кванторів, яка починається квантором $\exists$.

π_n-*префіксом* назвемо послідовність кванторних префіксів із $n-1$ зміною однотипних кванторів, яка починається квантором $\forall$.

Наприклад, $\exists x\exists y\exists u$ – σ_1-префікс; $\exists x\exists y\forall u\forall v$ – σ_2-префікс; $\forall x\exists y\exists z\forall u$ –π_3-префікс; $\forall s\exists x\exists y\forall u\forall v\forall w\exists t\exists z$ – π_4-префікс.

Нехай $\mathfrak{R}$ – множина арифметичних формул, значеннями яких є РП. Для кожного $n \geq 0$ введемо класи предикатів Σ_n, Π_n та Δ_n.

Задамо $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$ = множина всіх РП.

Для всіх $n \geq 1$ далі визначаємо:

– Σ_n складається з усіх предикатів, виразних формулами вигляду $\omega\Phi$, де ω – σ_n-префікс та $\Phi \in \mathfrak{R}$;

– Π_n складається з усіх предикатів, виразних формулами вигляду $\omega\Phi$, де ω – π_n-префікс та $\Phi \in \mathfrak{R}$;

– $\Delta_n = \Sigma_n \cap \Pi_n$.

Згідно із прикладом 7.1.3 кожну РПМ, а тому й кожний ЧРП, можна виразити арифметичною формулою вигляду $\exists x_1 \ldots \exists x_n$ A, де A – атомарна формула. Звідси для кожного $n \geq 1$ маємо:

– $P \in \Sigma_n \Leftrightarrow P = (\omega\Psi)_N$ для деяких $\omega \in \sigma_n$ і атомарної формули Ψ;

– $P \in \Pi_n \Leftrightarrow P = (\omega\Psi)_N$ для деяких $\omega \in \pi_n$ і атомарної формули Ψ.

Уведені класи предикатів Σ_n, Π_n та Δ_n індукують відповідні класи множин $\varSigma_n = \{T_P \mid P \in \Sigma_n\}$, $\varPi_n = \{T_P \mid P \in \Pi_n\}$, $\varDelta_n = \varSigma_n \cap \varPi_n$.

Зрозуміло, що $\varSigma_0 = \varPi_0 = \varDelta_0$ = множина всіх РМ, $\varSigma_1$ – множина всіх РПМ, $\varPi_1$ – множина всіх доповнень до РПМ. Згідно з теоремою Поста, $\varDelta_1 = \varSigma_1 \cap \varPi_1$ – це множина всіх РМ. Отже, $\varDelta_1 = \varDelta_0$.

Теорема 7.2.1. $P \in \Sigma_n \Leftrightarrow \neg P \in \Pi_n$.

Теорема 7.2.2. $\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Delta_{n+1}$.

Теорема 7.2.3. $\bigcup\limits_{n\geq 0} \Sigma_n = \bigcup\limits_{n\geq 0} \Pi_n = А\Pi$.

Теорема 7.2.4 (Кліні про ієрархію). Для кожного $n > 0$ існує арифметичний предикат ϑ такий, що $\vartheta \in \Sigma_n \setminus \Pi_n$ та $\neg\vartheta \in \Pi \setminus \Sigma_n$.

Зобразимо графічно ієрархію арифметичних предикатів (рис. 7.1).

Тут $\Xi \rightarrow \Omega$ означає строге включення класу Ξ у клас Ω.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \boldsymbol{\Sigma_1} \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dr] & & \boldsymbol{\Sigma_n} \arrow[dr] & & \boldsymbol{\Sigma_{n+1}} \arrow[dr] & \\
\mathbf{РП} = \boldsymbol{\Delta_0} = \boldsymbol{\Sigma_0} = \boldsymbol{\Pi_0} = \boldsymbol{\Delta_1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boldsymbol{\Delta_2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boldsymbol{\Delta_n} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boldsymbol{\Delta_{n+1}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
 & \boldsymbol{\Pi_1} \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ur] & & \boldsymbol{\Pi_n} \arrow[ur] & & \boldsymbol{\Pi_{n+1}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 7.1. Ієрархія арифметичних предикатів

Твердження 7.2.1–7.2.4 повністю переносяться на відповідні класи арифметичних множин. Крім того, справджується

Теорема 7.2.5 (сильна Кліні про ієрархію). Для кожного $n \geq 0$ маємо:

$$M \in \mathit{\Sigma}_{n+1} \Leftrightarrow M \text{ є } \varnothing^{(n)}\text{-РПМ та } M \in \mathit{\Delta}_{n+1} \Leftrightarrow \text{M є } \varnothing^{(n)}\text{-РМ}.$$

Наслідок 7.2.1. $M \in \mathit{\Sigma}_n \Leftrightarrow M \leq_1 \varnothing^{(n)}$ та $M \in \mathit{\Pi}_n \Leftrightarrow \bar{M} \leq_1 \varnothing^{(n)}$.

Позначимо ${}^{\Sigma}\mathrm{T}_n$ і ${}^{\Pi}\mathrm{T}_n$ множини номерів тих ІАФ, що мають пренексну форму із σ_n-префіксом і π_n-префіксом, відповідно.

Теорема 7.2.6. ${}^{\Sigma}\mathrm{T}_n \equiv_1 \varnothing^{(n)}$.

Для T-степенів звідси дістаємо

Наслідок 7.2.2. ${}^{\Sigma}\mathrm{T}_n \in 0^{(n)}$ та ${}^{\Pi}\mathrm{T}_n \in 0^{(n)}$.

Установлення належності предиката до класів Σ_n чи Π_n (множини до класів $\mathit{\Sigma}_n$ чи $\mathit{\Pi}_n$), тобто визначення їхнього місця в арифметичній ієрархії, можна здійснити за допомогою відомого *алгоритму Тарського – Куратовського*.

Суть алгоритму: використовуючи пренексні операції, подаємо предикат у вигляді $(\omega\Phi)_N$, де $\omega\Phi$ – пренексна формула, після чого встановлюємо: $\omega \in \sigma_n$ чи $\omega \in \pi_n$ для деякого $n > 0$.

Для встановлення місця в арифметичній ієрархії множини M треба застосувати алгоритм Тарського – Куратовського до предиката "$x \in M$".

Приклад 7.2.1. Предикат "$D_x = \varnothing$" $\in \Pi_1$.

Маємо $D_x = \varnothing \Leftrightarrow \forall y(\varphi_x(y)\uparrow) \Leftrightarrow \forall y\neg\exists k(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall y\forall k\neg(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$. Предикат $\neg(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$ є РП.

Звідси множина $\{x \mid D_x = \varnothing\} \in \Pi_1$.

Приклад 7.2.2. Предикат "D_x нескінченна" $\in \Pi_2$.

D_x нескінченна $\Leftrightarrow \forall z\exists y(y > z \,\&\, y \in D_x) \Leftrightarrow \forall z\exists y(y > z \,\&\, \exists k(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$) \Leftrightarrow \forall z\exists y\exists k(y > z \,\&\, P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$.

Предикати $y > z$ та $(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$ є РП.

Звідси множина $\{x \mid D_x$ нескінченна$\} \in \Pi_2$.

Приклад 7.2.3. $M = \{x \mid \varphi_x$ не є РФ$\} \in \Sigma_2$.

$x \in M \Leftrightarrow \varphi_x$ не є РФ $\Leftrightarrow \exists y(\varphi_x(y)\uparrow) \Leftrightarrow \exists y\neg\exists k(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists y\forall k\neg(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$.

Предикат $\neg(P_x(y)\downarrow$ за k кроків$)$ є РП.

Для множин будемо використовувати такі співвідношення:

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \forall y(y \in \mathrm{A} \leftrightarrow y \in \mathrm{B}) \Leftrightarrow$$
$$\forall y((\neg y \in \mathrm{A} \vee y \in \mathrm{B}) \,\&\, (y \in \mathrm{A} \vee \neg y \in \mathrm{B}));$$
$$\mathrm{A} \neq \mathrm{B} \Leftrightarrow \exists y(\neg y \in \mathrm{A} \,\&\, y \in \mathrm{B} \vee y \in \mathrm{A} \,\&\, \neg y \in \mathrm{B}).$$

Предикат "$P_u(v)\downarrow$ за w кроків" позначатимемо $P(u, v, w)$.

Предикат "$P_u(v)\downarrow r$ за k кроків" позначатимемо $P(u, v, k)\downarrow r$.

Приклад 7.2.4. $M = \{x \mid D_x$ є РМ$\} \in \Sigma_3$.

Маємо D_x є РМ $\Leftrightarrow \exists z\,(D_x = \overline{D_z}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists z\forall y(y \in D_x \leftrightarrow \neg(y \in D_z)) \Leftrightarrow \exists z\forall y(\exists kP(x, y, k) \leftrightarrow \neg\exists nP(z, y, n)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\forall y((\neg\exists kP(x, y, k) \vee \neg\exists nP(z, y, n)) \,\&\, (\exists kP(x, y, k) \vee \exists nP(z, y, n)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\forall y(\forall k\forall n(\neg P(x, y, k) \vee \neg P(z, y, n)) \,\&\, \exists k\exists n(P(x, y, k) \vee P(z, y, n))) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\forall y\forall k\forall n\exists l\exists m((\neg P(x, y, k) \vee \neg P(z, y, n)) \,\&\, (P(x, y, l) \vee P(z, y, m)))$.

Предикат у дужках після кванторного префікса є РП.

Приклад 7.2.5. Предикат "$D_x \neq D$" $\in \Sigma_2$.

Маємо $D_x \neq D \Leftrightarrow \exists y(\neg y \in D_x \,\&\, y \in D \vee y \in D_x \,\&\, \neg y \in D) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists y(\neg\exists kP(x, y, k) \,\&\, \exists nP(y, y, n) \vee \exists l\,P(x, y, l) \,\&\, \neg\exists mP(y, y, m)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists y(\forall k\neg P(x, y, k) \,\&\, \exists nP(y, y, n) \vee \exists l\,P(x, y, l) \,\&\, \forall m\neg P(y, y, m)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists y\exists n\exists l\,\forall k\forall m\,(\neg P(x, y, k) \,\&\, P(y, y, n) \vee P(x, y, l) \,\&\, \neg P(y, y, m))$.

Предикат у дужках після кванторного префікса є РП.

Приклад 7.2.6. Із прикладів 7.2.2–7.2.5 і теореми 7.2.1 отримуємо:

– предикат "D_x скінченна" $\in \Sigma_2$;

– предикат "φ_x є РФ" $\in \Pi_2$;

– предикат "$D_x = N$" $\in \Pi_2$ (зауважимо, що φ_x є РФ $\Leftrightarrow D_x = N$);

– предикат "D_x не є РМ" $\in \Pi_3$;

– предикат "$D_x = D$" $\in \Pi_2$.

Приклад 7.2.7. Предикат "$D_x \le_m D_y$" $\in \Sigma_3$.

Маємо $D_x \le_m D_y \Leftrightarrow \exists z(\varphi_z$ є РФ & $\forall u(u\in D_x \leftrightarrow \varphi_z(u)\in D_y)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z(\varphi_z$ є РФ & $\forall u((u\in D_x \vee \neg\varphi_z(u)\in D_y)$ & $(\neg u\in D_x \vee \varphi_z(u)\in D_y))) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\forall u(\forall t\exists k(P_z(t)\downarrow$ за k кр.) &
$(\exists n(P_x(u)\downarrow$ за n кр.) $\vee \neg\exists a\exists l\exists m(P_z(u)\downarrow a$ за l кр. & $P_y(a)\downarrow$ за m кр.)) &
$(\forall p\neg(P_x(u)\downarrow$ за p кр.)$\vee\exists b\exists q\exists r(P_z(u)\downarrow b$ за q кр. & $P_y(b)\downarrow$ за r кр.))) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\forall u(\forall t\exists k\,P(z,t,k)$ &
$(\exists nP(x,u,n)\vee\forall a\forall l\forall m(\neg P(z,u,l)\downarrow a\vee\neg P(y,a,m))$ &
$(\forall p\neg P(x,u,p)\vee\exists b\exists q\exists r(P(z,u,q)\downarrow b$ & $P(y,b,r))) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\forall u\forall t\forall a\forall l\forall m\forall p\exists k\exists n\exists b\exists q\exists r\,(\mathrm{R})$, де R є РП.

Приклад 7.2.8. Для встановлення місця в арифметичній ієрархії предикатів "D_x креативна" і "D_x проста" можна використати такі співвідношення:

– D_x креативна $\Leftrightarrow D \le_m D_x \Leftrightarrow \exists z(\varphi_z$ є РФ & $\forall y(y\in D\leftrightarrow\varphi_z(y)\in D_x))$;

– D_x проста $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{D_x}$ нескінченна & $\forall y(D_y$ нескінченна $\to\exists z(z\in D_x$ & $z\in D_y))$.

Далі розписуємо, використовуючи приклади 7.2.2 та 7.2.7.

Завдання для самоконтролю

1. Поясніть, що таке σ_n-префікс.
2. Поясніть, що таке π_n-префікс.
3. Дайте визначення класів предикатів Σ_n, Π_n та Δ_n.
4. Дайте визначення класів множин $\mathit{\Sigma}_n$, $\mathit{\Pi}_n$ та $\mathit{\Delta}_n$.
5. Укажіть елементарні властивості класів Σ_n, Π_n та Δ_n.
6. Зобразіть арифметичну ієрархію класів арифметичних предикатів і арифметичних множин.
7. Сформулюйте теорему Кліні про ієрархію.
8. Сформулюйте сильну теорему про ієрархію.

9. Поясніть, який зв'язок існує між класами арифметичних множин і T-степенями.

10. Опишіть алгоритм Тарського – Куратовського.

11. Наведіть приклади використання алгоритму Тарського – Куратовського.

Вправи

1. Установіть місце в арифметичній ієрархії таких множин і предикатів:

1) "φ_x ін'єктивна";
2) $\{x \mid E_x = \varnothing\}$;
3) $\{x \mid D_x \neq \varnothing\}$;
4) $\{x \mid E_x$ нескінченна$\}$;
5) "$E_x \neq N$";
6) "φ_x сюр'єктивна";
7) $\{x \mid \varphi_x$ бієктивна$\}$;
8) $\{x \mid E_x = D\}$;
9) "$D_x \neq E_y$";
10) "$E_x = E_y$";
11) $\{x \mid E_x$ не проста$\}$;
12) $\{x \mid D_x$ креативна$\}$;
13) "E_x не креативна";
14) "D_x проста";
15) "$D_x \equiv_m E_y$";
*16) "φ_x є ПРФ";
*17) $\{x \mid E_x$ є ПРМ$\}$;
*18) "$D_x \equiv_T D_y$".

2*. Сформулюйте й доведіть релятивний варіант теореми 7.2.5.

3*. Доведіть, що $\mathbf{T} \in \mathbf{0}^{(\omega)}$.

8. ЕФЕКТИВНІ ОПЕРАТОРИ НА ФУНКЦІЯХ І МНОЖИНАХ

Розглянемо ефективні операції, задані на функціях і множинах (див. [5, 7, 13, 19]). Функції і множини, на відміну від натуральних чисел, зазвичай є нескінченними об'єктами. Ефективність таких операцій полягає у збереженні обчислюваності функцій і перелічності множин.

Множину всіх n-арних функцій на N, тобто функцій із N^n у N, позначимо $\boldsymbol{F}^n$.

Об'єднання множин $\boldsymbol{F}^n$ для всіх $n \geq 1$ позначимо $\boldsymbol{F}$.

Множину всіх тотальних функцій із $\boldsymbol{F}^n$ і множину всіх тотальних функцій із $\boldsymbol{F}$, відповідно, позначимо $\boldsymbol{T}^n$ і $\boldsymbol{T}$.

Скінченну множину позначимо F, скінченну функцію – θ.

Довільну функцію вигляду $\Phi : (2^N)^m \to 2^N$ назвемо *m-арним множинним оператором* (МнО).

Довільну функцію вигляду $\Psi : (\boldsymbol{F})^m \to \boldsymbol{F}$ назвемо *m-арним функціональним оператором* (ФО).

Функціональні оператори називають також операціями на функціях, або композиціями.

Прикладами ФО є операції суперпозиції $\mathrm{S}^{n+1} : (\boldsymbol{F})^{n+1} \to \boldsymbol{F}$, мінімізації $\mathrm{M} : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$, примітивної рекурсії $\mathrm{R} : \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$.

8.1. Монотонні та неперервні оператори. Оператори переліку. Частково рекурсивні й рекурсивні оператори

Множинний оператор $\Phi : (2^N)^m \to 2^N$ називається *монотонним*, якщо з умови $A_1 \subseteq B_1, A_2 \subseteq B_2,..., A_m \subseteq B_m$ випливає

$$\Phi(A_1,..., A_m) \subseteq \Phi(B_1,..., B_m).$$

Функціональний оператор $\Psi : (\boldsymbol{F})^m \to \boldsymbol{F}$ називається *монотонним*, якщо з умови $f_1 \subseteq g_1, f_2 \subseteq g_2,..., f_m \subseteq g_m$ випливає

$$\Phi(f_1,..., f_m) \subseteq \Psi(g_1,..., g_m).$$

Множинний оператор $\Phi : (2^N)^m \to 2^N$ називається *неперервним*, якщо для всіх $x \in N$, $A \in (2^N)^m$ маємо

$$x \in \Phi(A) \Leftrightarrow \exists\, F \subseteq A{:}\ x \in \Phi(F).$$

ФО $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ називається *неперервним*, якщо для всіх $\overline{x} \in N^n$, $y \in N$ та $f \in \boldsymbol{F}^m$ маємо

$$y = \Psi(f)(\overline{x}) \ \Leftrightarrow\ (\overline{x}, y) \in \Psi(f) \Leftrightarrow \exists\, \theta \subseteq f{:}\ (\overline{x}, y) \in \Psi(\theta).$$

Аналогічно дається визначення неперервного ФО вигляду

$$\Psi : \boldsymbol{F}^{n_1} \times \ldots \times \boldsymbol{F}^{n_m} \to \boldsymbol{F}^n.$$

Теорема 8.1.1. Кожний неперервний оператор є монотонним.

Оператори переліку. Уточнимо поняття ефективного, або обчислюваного, множинного оператора.

Ефективність МнО $\Phi : 2^N \to 2^N$ означає можливість ефективно задати множину $\Phi(A)$, якщо ефективно задається множина A. Інакше кажучи, ефективний оператор Φ забезпечує породження $\Phi(A)$, якщо задано процес породження множини A.

Таким чином, якщо Φ ефективний, то на основі інформації про A можна ефективно встановити той факт, що $x \in \Phi(A)$. Зрозуміло, що це робиться за скінченну кількість кроків, із використанням лише скінченної інформації про A.

Ефективні множинні оператори називають *операторами переліку* (ОП). Наведемо визначення ОП.

Задамо для кожного $z \in N$ оператор $\Phi_z : 2^N \to 2^N$ у такий спосіб:

$$\Phi_z(A) = \{x \mid \exists u(F_u \subseteq A \ \&\ C(x, u) \in D_z)\}.$$

Інакше кажучи, $x \in \Phi_z(A) \Leftrightarrow \exists u(F_u \subseteq A \ \&\ C(x, u) \in D_z)$.

Оператор переліку Φ_z задає перелік множини $\Phi_z(A)$, якщо задано перелік множини A, у такий спосіб: паралельно виконуємо перелік множин A та D_z. Якщо до списку вже перелічених елементів D_z потрапило $C(x, u)$ таке, що F_u є підмножиною множини вже перелічених елементів A, то додаємо x до списку елементів множини $\Phi_z(A)$.

Поняття n-арного ОП $\Phi_z^n : (2^N)^m \to 2^N$ уводимо так:

$$\Phi_z^n(A_1, \ldots, A_n) =$$
$$= \{x \mid \exists u_1 \ldots \exists u_n (F_{u_1} \subseteq A_1 \ \& \ldots \&\ F_{u_n} \subseteq A_n \ \&\ C^{n+1}(x, u_1, \ldots, u_n) \in D_z)\}.$$

Теорема 8.1.2. 1) $\Phi_z(A) \subseteq l(D_z)$.

2) Φ_z монотонний: якщо $A \subseteq B$, то $\Phi_z(A) \subseteq \Phi_z(B)$.

Теорема 8.1.3. Кожний ОП неперервний.

Множина $A \subseteq N$ *однозначна*, якщо $C^{-1}(A) = \{(l(x), r(x))\}$ – функціональне відношення.

Зрозуміло, що A однозначна $\Leftrightarrow$ $(C^{m+1})^{-1}(A)$ – функціональне відношення для кожного $m \geq 1$.

Отже, A однозначна $\Leftrightarrow \forall m \geq 1 \ \exists f \in F^m : A = C^{m+1}(f)$.

Це дає підставу ввести позначення CF для множини всіх однозначних множин: $CF = \{C(f) \mid f \in F^1\} = \{C^{m+1}(f) \mid f \in F^m\}$.

Кожний функціональний оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ задає множинний оператор $\Phi : CF \to CF$, і навпаки, згідно зі схемою (рис. 8.1):

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{\Psi : F^m} & \to & \boldsymbol{F^n} \\
C^{m+1}\downarrow\uparrow(C^{m+1})^{-1} & & C^{n+1}\downarrow\uparrow(C^{n+1})^{-1} \\
\boldsymbol{\Phi : CF} & \to & \boldsymbol{CF}
\end{array}$$

Рис. 8.1. Зв'язок функціональних і множинних операторів

Звідси $\Psi(f) = (C^{n+1})^{-1}(\Phi(C^{m+1}(f)))$ та $\Phi(A) = C^{n+1}(\Psi((C^{m+1})^{-1}(A)))$.

ФО $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ назвемо *частково рекурсивним оператором* (ЧРО), якщо існує $z \in N$ таке, що для всіх $f \in F^m$ маємо:

$$\Psi(f) = \begin{cases} (C^{n+1})^{-1}(\Phi_z(C^{m+1}(f))), & \text{якщо } \Phi_z(C^{m+1}(f)) \text{ однозначна,} \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$$

У цьому випадку кажуть, що ОП Φ_z визначає ЧРО Ψ.

Тотальний ЧРО назвемо *рекурсивним оператором* (РО).

Інакше кажучи, оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ рекурсивний, якщо існує $z \in N$ таке: для всіх $f \in \boldsymbol{F}^m$ маємо

$$\Psi(f) = (C^{n+1})^{-1}(\Phi_z(C^{m+1}(f))). \qquad (df1)$$

Дамо безпосереднє визначення РО, не використовуючи ОП.

Функціональний оператор $\Psi : F^m \to F^n$ – РО, якщо існує $z \in N$ таке, що для всіх $f \in \boldsymbol{F}^m$, $(\bar{x}, y) \in N^{n+1}$ маємо

$$(\bar{x}, y) \in \Psi(f) \Leftrightarrow \exists u\,(\theta_u^m \subseteq f \ \&\ y = \varphi_z^{n+1}(u, \bar{x})). \qquad (df2)$$

Зрозуміло, що це визначення РО еквівалентне такому:

існує ЧРФ φ така: для всіх $f \in \boldsymbol{F}^m$, $(\overline{x}, y) \in N^{n+1}$ маємо

$$y = \Psi(f)(\overline{x}) \Leftrightarrow (\overline{x}, y) \in \Psi(f) \Leftrightarrow \exists u\,(\theta_u^m \subseteq f \;\&\; y = \varphi(u, \overline{x})). \quad (df3)$$

Отже, для формалізації поняття ефективної операції (оператора) виявляється достатнім поняття алгоритму, ніяких нових понять уводити не потрібно. Це ще раз підкреслює універсальність і глибину поняття алгоритму.

Теорема 8.1.4. Визначення $df1$ та $df2$ еквівалентні.

Надалі використовуємо $df3$ рекурсивного оператора.

Теорема 8.1.5. Кожний РО є неперервним.

Приклад 8.1.1. Нехай оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ задається умовою

$$\Psi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } g \text{ скінченна,} \\ f_{\varnothing} \text{ інакше.} \end{cases}$$

Візьмемо скінченну $\theta \neq f_{\varnothing}$ і нескінченну $f \supset \theta$. Тоді $\Psi(\theta) = \theta \neq f_{\varnothing}$ та $\Psi(f) = f_{\varnothing}$. Маємо $f \supset \theta$ та $\Psi(f) \subset \Psi(\theta)$.

Отже, Ψ немонотонний, тому Ψ не є РО.

Приклад 8.1.2. Нехай оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ задається умовою

$$\Psi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } E_g \text{ нескінченна,} \\ f_{\varnothing} \text{ інакше.} \end{cases}$$

Візьмемо функцію f із нескінченною E_f (напр., f – тотожна функція). Тоді $\Psi(f) = f \neq f_{\varnothing}$. Водночас $\Psi(\theta) = f_{\varnothing}$ для кожної скінченної $\theta \subset f$. Тому, якщо $(x, y) \in \Psi(f)$, то не існує скінченної функції $\theta \subset f$ такої, що $(x, y) \in \Psi(\theta)$, адже $\Psi(\theta) = f_{\varnothing} = \varnothing$.

Отже, Ψ не є неперервним, тому Ψ не є РО.

Приклад 8.1.3. Нехай оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ задається умовою

$$\Psi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } D_g \cap E_g \text{ скінченна,} \\ f_{\varnothing} \text{ інакше.} \end{cases}$$

Візьмемо f як тотожну функцію, тоді $D_f \cap E_f$ нескінченна, звідки $\Psi(f) = f_{\varnothing}$. Візьмемо скінченну $\theta \neq f_{\varnothing}$ таку: $\theta \subset f$; тоді $\Psi(\theta) = \theta \neq f_{\varnothing}$. Маємо $f \supset \theta$ та $\Psi(f) \subset \Psi(\theta)$. Отже, Ψ немонотонний, тому Ψ не є РО.

Приклад 8.1.4. Нехай оператор $\Phi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ задається умовою

$$\Phi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } E_g \setminus D_g \text{ нескінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше.} \end{cases}$$

Візьмемо за f таку функцію: $f(x) = x/2$ для всіх $x \in N$; тоді $E_f \setminus D_f$ нескінченна,звідки $\Psi(f) = f \neq f_\varnothing$. Водночас для кожної скінченної $\theta \subset f$ маємо $\Psi(\theta) = f_\varnothing$, адже $E_\theta \setminus D_\theta$ скінченна. Звідси, якщо $(x, y) \in \Psi(f)$, то не існує скінченної $\theta \subset f$ такої, що $(x, y) \in \Psi(\theta)$, адже $\Psi(\theta) = f_\varnothing$. Отже, Ψ не є неперервним, тому Ψ не є РО.

Приклад 8.1.5. Нехай оператор $\Phi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ задається умовою

$$\Phi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } D_g \setminus E_g \text{ скінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше.} \end{cases}$$

Візьмемо за f таку функцію: $f(x) = 2x$ для всіх $x \in N$; тоді $D_f \setminus E_f$ нескінченна, звідки $\Psi(f) = f_\varnothing$. Візьмемо скінченну $\theta \neq f_\varnothing$ таку: $\theta \subset f$; тоді $D_\theta \setminus E_\theta$ скінченна, звідки $\Psi(\theta) = \theta \neq f_\varnothing$. Маємо $f \supset \theta$ та $\Psi(f) \subset \Psi(\theta)$. Отже, Ψ немонотонний, тому Ψ не є РО.

Опишемо РО за допомогою поняття неперервності, що дає змогу полегшити перевірку рекурсивності різних операторів.

Теорема 8.1.6. Оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ є РО $\Leftrightarrow$ Ψ неперервний і частково рекурсивною є функція

$$\gamma(u, \bar{x}) = \begin{cases} \Psi(\theta_u^m)(\bar{x}), \text{ якщо } u - \text{код деякої скінченної функції,} \\ \text{невизначене інакше.} \end{cases}$$

Приклад 8.1.6. Оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$, що задається умовою $\Psi(f) = g$ для всіх $f \in \boldsymbol{F}^m$, де g – фіксована ЧРФ.

Оператор Ψ неперервний: згідно із $\Psi(f) = \Psi(\theta) = g$, маємо $(\bar{x}, y) \in \Psi(f) \Leftrightarrow (\bar{x}, y) \in \Psi(\theta)$ для довільної скінченної $\theta \subseteq f$.

Функція

$$\gamma(u, x) = \begin{cases} g(\bar{x}), \text{ якщо } u - \text{код деякої скінченної функції,} \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$$

є ЧРФ за ТЧ. Отже, згідно з теоремою 8.1.6, оператор Ψ є РО.

Приклад 8.1.7. Нехай оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ задано умовою

$$\Psi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } D_g \cup \bar{E}_g \text{ скінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше.} \end{cases}$$

Множина $D_g \cup \bar{E}_g$ нескінченна для кожної $g\in \boldsymbol{F}^1$. Справді, якщо g нескінченна, то D_g нескінченна $\Rightarrow$ $D_g \cup \bar{E}_g$ нескінченна; якщо g скінченна, то E_g теж скінченна $\Rightarrow$ $\bar{E}_g$ нескінченна $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $D_g \cup \bar{E}_g$ нескінченна. Звідси випливає, що $\Psi(g) = f_\varnothing$ для кожної $g\in \boldsymbol{F}^1$. Згідно із прикладом 8.1.6 оператор Ψ є РО.

Приклад 8.1.8. Задамо оператор $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ співвідношенням $\Psi(f)(x) = f(f(x+2)) + 5x$ для всіх $f\in \boldsymbol{F}^1$. Тоді Ψ є РО.

Оператор Ψ неперервний: умова $(x, y)\in \Psi(f) \Leftrightarrow (x, y)\in \Psi(\theta)$ виконується для кожної скінченної $\theta \subseteq f$ такої, що $x+2\in D_\theta$ та $f(x+2)\in D_\theta$.

Функція $\gamma(u, x) = \begin{cases} \theta_u(\theta_u(x+2)) + 5x, \\ \text{якщо } u \text{ − код деякої скінченної функції,} \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$

є ЧРФ за ТЧ. Звідси Ψ є РО.

Приклад 8.1.9. Оператор мінімізації M : $\boldsymbol{F}^{n+1} \to \boldsymbol{F}^n$ є РО.

Оператор мінімізації M задається так: для всіх $f\in \boldsymbol{F}^{n+1}$ маємо $\mathrm{M}(f)(\bar{x}) = \mu_y(f(\bar{x}, y) = 0)$.

M неперервний: умова $y = \mu_z(f(\bar{x}, z) = 0) \Leftrightarrow y = \mu_z(\theta(\bar{x}, z) = 0)$ виконується для кожної $\theta \subseteq f$ такої, що $(\bar{x}, 0), (\bar{x}, 1), \ldots, (\bar{x}, y) \in D_\theta$, тому для кожної такої $\theta \subseteq f$ маємо $y = \mathrm{M}(f)(\bar{x}) \Leftrightarrow y = \mathrm{M}(\theta)(\bar{x})$, тобто $y = \mu_z(f(\bar{x}, z) = 0) \Leftrightarrow y = \mu_z(\theta(\bar{x}, z) = 0)$.

Функція $\gamma(u, \bar{x}) = \begin{cases} \mu_Z(\theta_u^{n+1})(\bar{x}, z), \\ \text{якщо } u \text{ − код деякої скінченної функції,} \\ \text{невизначене інакше,} \end{cases}$

є ЧРФ за тезою Чорча. Звідси оператор мінімізації M є РО.

ЧРО $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ – *загальнорекурсивний* (ЗРО), якщо

$\boldsymbol{T}^m \subseteq D_\Psi$ та $\Psi(\boldsymbol{T}^m) \subseteq \boldsymbol{F}^n$.

Отже, ЧРО Ψ є ЗРО, якщо Ψ визначений на всіх тотальних функціях і тотальні функції переводить у тотальні.

Теорема 8.1.7. Нехай ЧРО $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ такий: $\boldsymbol{T}^m \subseteq D_\Psi$. Тоді Ψ є РО.

Наслідок 8.1.1. Для класів ЗРО та РО маємо: ЗРО $\subset$ РО.

Справді, за теоремою 8.1.7 ЗРО $\subseteq$ РО. Однак РО із прикладу 8.1.6 не є ЗРО, якщо ЧРФ g узяти нетотальною, тобто не РФ.

Приклад 8.1.10. Нехай оператор $\Psi_0 : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ задається умовою $\Psi_0(\{(0,0)\}) = \{(0,0)\}$ та $\Psi_0(\{(1,0)\}) = \{(0,1)\}$; при цьому для інших $f \in \boldsymbol{F}^1$ значення $\Psi_0(f)$ невизначене.

Тоді оператор Ψ_0 розширюється до ЧРО й не розширюється до жодного РО.

Позаяк $\{C(0,0)\} = \{0\} = F_1$ та $\{C(1,0)\} = \{2\} = F_4$, то беремо z таке, що $D_z = \{C(0,2^0),\ C(1,2^2)\}$. Нехай оператор переліку Φ_z задається таким D_z, тобто $x \in \Phi_z(A) \Leftrightarrow \exists u(F_u \subseteq A\ \&\ C(x, u) \in D_z)$.

Для кожних $A \in 2^N$ маємо $\Phi_z(A) \subseteq l(D_z) = \{0,1\}$. Звідси:

– якщо $0 \in A$ та $2 \in A$, то $\Phi_z(A) = \{0,1\}$;

– якщо $0 \in A$ та $2 \notin A$, то $\Phi_z(A) = \{0\}$;

– якщо $0 \notin A$ та $2 \in$ А, то $\Phi_z(A) = \{1\}$;

– якщо $0 \notin A$ та $2 \notin$ А, то $\Phi_z(A) = \varnothing$.

Оператор Φ_z визначає ЧРО Ψ. Для такого Ψ маємо:

1) якщо $(0,0) \in f$ та $(1,0) \in f$, то $0 \in C(f)$ і $2 \in C(f)$, звідки $\Phi_z(C(f)) = \{0,1\}$ – неоднозначна множина. Отже, для таких f значення $\Psi(f)$ невизначене, тому Ψ не РО;

2) якщо $(0,0) \in f$ та $(1,0) \notin f$, то $0 \in C(f)$ і $2 \notin C(f)$, звідки маємо $\Phi_z(C(f)) = \{0\} = C(0,0)$. Отже, для таких f маємо $\Psi(f) = \{(0,0)\}$;

3) якщо $(0,0) \notin f$ та $(1,0) \in f$, то $0 \notin C(f)$ та $2 \in C(f)$, звідки маємо $\Phi_z(C(f)) = \{1\} = C(0,1)$. Отже, для таких f маємо $\Psi(f) = \{(0,1)\}$;

4) якщо $(0,0) \notin f$ та $(1,0) \notin f$, то $0 \notin C(f)$ і $2 \notin C(f)$, звідки $\Phi_z(C(f)) = \varnothing$. Отже, для таких f маємо $\Psi(f) = f_\varnothing$.

Із 2) і 3) випливає, що ЧРО Ψ є розширенням оператора Ψ_0.

Покажемо тепер, що Ψ_0 не можна розширити до РО.

Нехай $\theta = \{(0,0), (1,0)\}$. Тоді для довільного ЧРО Φ, що є розширенням Ψ_0, маємо: якщо $\Phi(\theta)\downarrow$, то $\Phi(\theta) \supseteq \Phi(\{(0,0)\}) = \Psi_0(\{(0,0)\}) = \{(0,0)\}$ та $\Phi(\theta) \supseteq \Phi(\{(1,0)\}) = \Psi_0(\{(1,0)\}) = \{(0,1)\}$.

Однак тоді $\Phi(\theta)$ як множина не є функцією, тобто $\Phi(\theta)\uparrow$. Отже, кожний такий ЧРО Φ нетотальний, тобто не РО.

Наслідок 8.1.2. Для класів операторів маємо:

ЗРО $\subset$ РО $\subset$ ЧРО.

Наслідок 8.1.3. Існують немонотонні ЧРО.

Візьмемо ЧРО Ψ із прикладу 8.1.10. Для $\theta = \{(0,0),\ (1,0)\}$ маємо $\Phi(\theta)\uparrow$, але $\Psi(\{(0,0)\}) = \{(0,0)\}$. Тому з умови $\{(0,0)\} \subseteq \theta$ не випливає $\Psi(\{(0,0)\} \subseteq \Psi(\theta)$.

Завдання для самоконтролю

1. Дайте визначення функціонального оператора.
2. Дайте визначення множинного оператора.
3. Дайте визначення монотонного оператора.
4. Дайте визначення неперервного оператора.
5. Поясніть термін "неперервний" для випадку оператора.
6. Дайте визначення оператора переліку.
7. Дайте визначення однозначної множини.
8. Поясніть зв'язок між функціональними й множинними операторами.
9. Дайте визначення ЧРО.
10. Дайте визначення РО.
11. Наведіть еквівалентні визначення РО.
12. Сформулюйте критерій рекурсивності оператора.
13. Дайте визначення ЗРО.
14. Укажіть співвідношення між класами ЧРО, РО, ЗРО.

Вправи

1. Нехай Φ_z – оператор переліку. Дослідіть співвідношення:
   1) між множинами $\Phi_z(A \cup B)$ та $\Phi_z(A) \cup \Phi_z(B)$;
   2) між множинами $\Phi_z(A \cap B)$ та $\Phi_z(A) \cap \Phi_z(B)$.

2. Нехай Φ та Ψ – монотонні оператори. Доведіть, що оператор $\Phi \circ \Psi$ теж монотонний (тут Φ та Ψ – 1-арні множинний оператор вигляду $\Phi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^k$ і функціональний оператор вигляду $\Psi : \boldsymbol{F}^k \to \boldsymbol{F}^n$).

3. Нехай Φ та Ψ – неперервні оператори. Доведіть, що оператор $\Phi \circ \Psi$ теж неперервний (тут Φ та Ψ – 1-арні множинний оператор вигляду $\Phi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^k$ і функціональний оператор вигляду $\Psi : \boldsymbol{F}^k \to \boldsymbol{F}^n$).

4. Нехай Φ та Ψ – РО вигляду $\Phi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^k$ та $\Psi : \boldsymbol{F}^k \to \boldsymbol{F}^n$. Доведіть, що оператор $\Phi \circ \Psi$ теж рекурсивний.

5. З'ясуйте, чи буде РО оператор $\Phi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$, заданий умовою:

1) $\Phi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } D_g \cap E_g \text{ нескінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше;} \end{cases}$

2) $\Phi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } \overline{D}_g \cap E_g \text{ скінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше;} \end{cases}$

3) $\Phi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } D_g \setminus E_g \text{ нескінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше;} \end{cases}$

4) $\Phi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } D_g \cup \overline{E}_g \text{ нескінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше;} \end{cases}$

5) $\Phi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } \overline{D}_g \cup E_g \text{ скінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше;} \end{cases}$

6) $\Phi(g) = \begin{cases} g, \text{ якщо } \overline{D}_g \cup E_g \text{ нескінченна,} \\ f_\varnothing \text{ інакше.} \end{cases}$

6. Доведіть рекурсивність оператора $\Phi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$, заданого умовою:

1) $\Phi(f)(x) = \sum\limits_{t \le x} f(2t)$;

2) $\Phi(f)(x) = \prod\limits_{t \le 2x} f(t)$;

3) $\Phi(f)(x) = f(f(f(x+1))) + x$;

4) $\Phi(f)(x) = f(f(x^2+3)) + 2x$;

5) $\Phi(f)(x) = (f(f(2x+1)))^2 + 3x$;

6) $\Phi(f)(x) = f(f(7x+5)) + f(f(f(x)))$.

7. Доведіть рекурсивність оператора $\Phi : \boldsymbol{F}^2 \to \boldsymbol{F}^1$, заданого умовою:

1) $\Phi(f)(x) = f(x, x)$;

2) $\Phi(f)(x) = f(f(2x, x), f(x, 3x))$;

3) $\Phi(f)(x) = f(f(x, x) + 1, f(3x, x) + 2) + 3$;

4) $\Phi(f)(x) = f(f^2(x, 3x), 7x + f(x^3, 5 + x))$.

8. Сформулюйте визначення m-арного неперервного функціонального оператора вигляду $\Psi : \boldsymbol{F}^{n_1} \times \ldots \times \boldsymbol{F}^{n_m} \to \boldsymbol{F}^n$.

9. Сформулюйте визначення n-арного частково рекурсивного та n-арного рекурсивного оператора.

10. Доведіть рекурсивність операторів примітивної рекурсії R і суперпозиції S^{n+1}.

*11. Сформулюйте й доведіть для випадку n-арних операторів відповідні узагальнення теорем 8.1.4–8.1.6.

8.2. Теорема Майхілла – Шепердсона. Теореми Кліні про нерухому точку

Кожний РО при обмеженні на ЧРФ задає на їхніх індексах ефективну операцію, тобто рекурсивну функцію.

Теорема 8.2.1. Для кожного РО $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ існує РФ h така: для кожного $k \in N$ маємо $\Psi(\varphi_k^m) = \varphi_{h(k)}^n$.

РФ h із теореми 8.2.1 має властивість:

$$\varphi_k^m = \varphi_l^m \Rightarrow \varphi_{h(k)}^n = \varphi_{h(l)}^n.$$

Справді, з умови $\varphi_k^m = \varphi_l^m$ маємо $\varphi_{h(k)}^n = \Psi(\varphi_k^m) = \Psi(\varphi_l^m) = \varphi_{h(l)}^n$.

РФ із такою властивістю називають *m-n-екстенсійними.*

1-1-екстенсійні функції називатимемо просто е*кстенсійними*.

Твердження, подібне до теореми 8.2.1, має місце для ОП.

Теорема 8.2.2. Існує РФ s: $\Phi_z(D_y) = D_{s(z,y)}$ для всіх z, $y \in N$.

Наслідок 8.2.1. 1) Нехай Ψ є РО, f є ЧРФ. Тоді $\Psi(f)$ є ЧРФ.

2) Нехай A є РПМ. Тоді $\Phi_z(A)$ є РПМ.

Має місце твердження, обернене до теореми 8.2.1.

Теорема 8.2.3 (Майхілла – Шепердсона). Для кожної m-n-екстенсійної РФ h існує єдиний РО $\Psi : \boldsymbol{F}^m \to \boldsymbol{F}^n$ такий:

для кожного $k \in N$ маємо $\Psi(\varphi_k^m) = \varphi_{h(k)}^n$.

Принцип нерухомої точки зустрічається в багатьох розділах математики. Метод нерухомої точки плідно використовують, зокрема у програмуванні для визначення семантики рекурсивних програм. Розглянемо теореми Кліні про нерухому точку (НТ) для випадків множинних і функціональних операторів.

Теорема 8.2.4. Для кожного ОП Φ існує множина A така:

1) $\Phi(A) = A$, тобто A – нерухома точка оператора Φ;

2) якщо $\Phi(B) = B$, то $A \subseteq B$; це означає, що A – *найменша* нерухома точка (ННТ) оператора Φ;

3) А є РПМ.

Теорема 8.2.5. Для кожного РО $\Psi : \boldsymbol{F}^n \to \boldsymbol{F}^n$ існує функція f:

1) $\Psi(f) = f$, тобто f – нерухома точка оператора Ψ;

2) якщо $\Psi(g) = g$, то $f \subseteq g$; тобто f – ННТ оператора Ψ;

3) f є ЧРФ.

Доводимо теорему 8.2.5 для випадку $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$.

Діємо *методом послідовних наближень*.

Задамо послідовність функцій $\{f_n\}_{n \in N}$:

$f_0 = f_\varnothing$;

$f_{n+1} = \Psi(f_n)$ для $n \geq 0$.

Задамо $f = \bigcup\limits_{n \geq 0} f_n$. Це означає, що $(x, y) \in f \Leftrightarrow \exists n\,((x, y) \in f_n)$.

1) Покажемо, що $\Psi(f) = f$. За побудовою f маємо $f_n \subseteq f$ для всіх $n \geq 0$, звідки за монотонністю Ψ маємо $\Psi(f_n) \subseteq \Psi(f)$ для всіх $n \geq 0$, тобто $f_{n+1} \subseteq \Psi(f)$ для всіх $n \geq 0$. Звідси $f = \bigcup\limits_{n \geq 0} f_n \subseteq \Psi(f)$.

Нехай $(x, y) \in \Psi(f)$. За неперервністю Ψ $\exists \theta \subseteq f$: $(x, y) \in \Psi(\theta)$. Однак $\theta \subseteq f \Leftrightarrow \exists n : \theta \subseteq f_n$. Тому $\exists n\, \exists \theta\, (\theta \subseteq f_n \,\&\, (x, y) \in \Psi(\theta))$, звідки за неперервністю Ψ отримуємо $\exists n\,((x, y) \in \Psi(f_n))$. Звідси за $f_{n+1} = \Psi(f_n)$ маємо $\exists n((x, y) \in f_{n+1})$, тому $(x, y) \in f$. Отже, $\Psi(f) \subseteq f$.

Таким чином, $\Psi(f) = f$.

2) Нехай g така, що $\Psi(g) = g$. Маємо $f_\varnothing = f_0 \subseteq g$. За індукцією маємо: якщо $f_n \subseteq g$, то $\Psi(f_n) \subseteq \Psi(g)$ за монотонністю Ψ, тобто $f_{n+1} \subseteq \Psi(g) = g$. Отже, $f_n \subseteq g$ для всіх $n \geq 0$, звідки $f = \bigcup\limits_{n \geq 0} f_n \subseteq g$.

3) Згідно з теоремою 8.2.1 візьмемо РФ h таку: $\Psi(\varphi_x) = \varphi_{h(x)}$ для всіх $x \in N$. Нехай k – деякий індекс $f_\varnothing$.

Задамо функцію β: $\begin{cases} \beta(0) = k, \\ \beta(n+1) = h(\beta(n)) \text{ при } n \geq 0; \end{cases}$ β є РФ за ТЧ.

Маємо $f_0 = f_\varnothing = \varphi_k = \varphi_{\beta(0)}$, $f_{n+1} = \Psi(\varphi_{\beta(n)}) = \varphi_{h(\beta(n))} = \varphi_{\beta(n+1)}$ для $n \geq 0$. Звідси $(x, y) \in f \Leftrightarrow \exists n((x, y) \in f_n) \Leftrightarrow \exists n((x, y) \in \varphi_{\beta(n)})$, тому "$(x, y) \in f$" є ЧРП, звідки f є ЧРФ.

Для неперервних операторів маємо загальніші, але дещо слабші результати.

Теорема 8.2.6. Кожний неперервний МнО $\Phi : 2^N \to 2^N$ має ННТ.

Теорема 8.2.7. Кожний неперервний ФО $\Psi : \boldsymbol{F}^n \to \boldsymbol{F}^n$ має ННТ.

Приклад 8.2.1. ННТ оператора $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$, заданого умовою

$$\Psi(f)(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = 0 \ , \\ f(x+1), & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Оператор Ψ неперервний: $(x, y) \in \Psi(f) \Leftrightarrow (x, y) \in \Psi(\theta)$ виконується при $x = 0$ для довільної скінченної $\theta \subseteq f$; при $x > 0$ ця умова виконується для кожної скінченної $\theta \subseteq f$ такої, що $x + 1 \in D_\theta$.

Отже, Ψ має ННТ $f_\text{Н}$, яку знайдемо методом послідовних наближень. Маємо $f_0 = f_\varnothing$. Тепер знаходимо f_1 та f_2:

$$f_1(x) = \Psi(f_0)(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = 0, \\ f_0(x+1), & \text{якщо } x > 0, \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = 0, \\ \text{невизначене}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \Psi(f_1)(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = 0, \\ f_1(x+1), & \text{якщо } x > 0, \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = 0, \\ \text{невизначене}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Отже, $f_2 = f_1$. Маємо стабілізацію, тому $f_n = f_1$ для всіх $n > 0$.

Звідси ННТ $f_\text{Н} = \bigcup\limits_{n \geq 0} f_n = f_1$.

Зауважимо, що всі інші нерухомі точки нашого оператора мають вигляд $f_\text{Т}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = 0 \ , \\ a, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

Приклад 8.2.2. ННТ оператора $\Psi : \boldsymbol{F}^2 \to \boldsymbol{F}^2$, заданого умовою

$$\Psi(f)(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = 0, \\ f(x-1, f(x, y)), & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Оператор Ψ неперервний.

Справді, умова $(x, y, z) \in \Psi(f) \Leftrightarrow (x, y, z) \in \Psi(\theta)$ виконується:

– при $x = 0$ для довільної скінченної $\theta \subseteq f$;

– при $x > 0$ для кожної скінченної $\theta \subseteq f$ такої, що $(x, y) \in D_\theta$ та $(x-1, f(x, y)) \in D_\theta$.

Таким чином, Ψ має ННТ $f_{\text{Н}}$, яку знайдемо методом послідовних наближень. Маємо $f_0 = f_\varnothing$.

Тепер $f_1(x, y) = \Psi(f_0)(x, y)) =$

$$= \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0\ , \\ f_0(x-1, f_0(x, y)), \text{ якщо } x > 0, \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0, \\ \text{невизначене, якщо } x > 0; \end{cases}$$

$$f_2(x, y) = \Psi(f_1)(x, y)) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0, \\ f_1(x-1, f_1(x, y)), \text{ якщо } x > 0, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0, \\ \text{невизначене, якщо } x > 0, \end{cases}$$

оскільки $f_1(x, y)$ невизначене при $x > 0$.

Отже, $f_2 = f_1$. Маємо стабілізацію, тому $f_n = f_1$ для всіх $n > 0$.

Звідси ННТ $f_{\text{Н}} = \bigcup\limits_{n \geq 0} f_n = f_1$.

Зауважимо, що Ψ є РО. Справді, функція

$$\gamma(u, x, y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0 \text{ та } u - \text{код деякої скінченної функції}, \\ \theta_u^2(x-1, \theta_u^2(x, y)), \\ \text{якщо } x > 0 \text{ та } u\ - \text{ код деякої скінченної функції}, \\ \text{невизначене інакше}, \end{cases}$$

є ЧРФ за тезою Чорча.

Приклад 8.2.3. ННТ оператора $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$, заданого умовою

$$\Psi(f)(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x = 0, \\ 2x - 1 + f(x-1), \text{ якщо } x > 0. \end{cases}$$

Ψ неперервний: умова $(x, y) \in \Psi(f) \Leftrightarrow (x, y) \in \Psi(\theta)$ виконується:

– при $x = 0$ для довільної скінченної $\theta \subseteq f$;

– при $x > 0$ для кожної скінченної $\theta \subseteq f$ такої, що $x-1 \in D_\theta$.

Отже, Ψ має ННТ.

Метод послідовних наближень вимагає нескінченної кількості кроків, оскільки $f_{n+1} \supset f_n$ для всіх $n \geq 0$. Тому діємо таким шляхом: нехай $f_{\text{Н}}$ – це ННТ нашого оператора. Тоді для кожного $x \in N$ маємо:

$f_{\text{Н}}(x) = \Psi(f_{\text{Н}})(x) = 2x - 1 + f_{\text{Н}}(x-1) = 2x - 1 + \Psi(f_{\text{Н}})(x-1) =$
$= 2x - 1 + 2x - 3 + f_{\text{Н}}(x-2) = \ldots = 2x - 1 + 2x - 3 + \ldots + 1 + f_{\text{Н}}(0) =$
$= 2x - 1 + 2x - + \ldots + 1 + 0 = x^2.$

Отже, для всіх $x \in N$ маємо $f_{\text{Н}}(x) = x^2$. Тому така функція $f_{\text{Н}}$ – єдина нерухома точка нашого Ψ.

Зауважимо, що Ψ є РО. Справді, функція

$$\gamma(u,x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x = 0 \text{ та } u \ - \text{ код деякої скінченної функції}, \\ 2x - 1 + \theta_u(x-1), \\ \text{якщо } x > 0 \text{ та } u \ - \text{ код деякої скінченної функції}, \\ \text{невизначене інакше}, \end{cases}$$

є ЧРФ за тезою Чорча.

Приклад 8.2.4. ННТ оператора $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$, заданого умовою

$$\Psi(f)(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0, \\ 8x + 3 + f(x-1), \text{ якщо } x > 0. \end{cases}$$

Ψ неперервний: умова $(x, y) \in \Psi(f) \Leftrightarrow (x, y) \in \Psi(\theta)$ виконується:

– при $x = 0$ для довільної скінченної $\theta \subseteq f$;

– при $x > 0$ для кожної скінченної $\theta \subseteq f$ такої, що $x-1 \in D_\theta$.

Отже, Ψ має ННТ, нехай це функція $f_{\text{Н}}$. Для кожного $x \in N$ маємо $f_{\text{Н}}(x) = \Psi(f_{\text{Н}})(x) = 8x + 3 + f_{\text{Н}}(x-1) = 8x + 3 + \Psi(f_{\text{Н}})(x-1) =$
$= 8x + 3 + 8(x-1) + 3 + f_{\text{Н}}(x-2) = \ldots$

$$\ldots = \sum_{k=1}^{x} (8k+3) + 1 = 4x(x+1) + 3x + 1 = 4x^2 + 7x + 1.$$

Таким чином, для всіх $x \in N$ маємо $f_{\text{Н}}(x) = 4x^2 + 7x + 1$. Тому така функція $f_{\text{Н}}$ – єдина ННТ нашого Ψ.

Приклад 8.2.5. ННТ оператора $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$, заданого умовою

$$\Phi(f)(x) = \begin{cases} x - 6, \text{ якщо } x > 55, \\ f(f(x+7)) \text{ при } x \le 55. \end{cases}$$

Ψ неперервний: умова $(x, y) \in \Psi(f) \Leftrightarrow (x, y) \in \Psi(\theta)$ виконується:

– при $x > 55$ для довільної скінченної $\theta \subseteq f$;

– при $x \le 55$ для кожної скінченної $\theta \subseteq f$: $x+7 \in D_\theta$ та $f(x+7) \in D_\theta$.

Отже, Ψ має ННТ, нехай це функція $f_{\text{Н}}$.

Для кожного $x > 55$ маємо $f_{\text{Н}}(x) = \Psi(f_{\text{Н}})(x) = x - 6$. Тепер

$f_{\text{Н}}(55) = \Psi(f_{\text{Н}})(55) = f_{\text{Н}}(f_{\text{Н}}(62)) = f_{\text{Н}}(56) = 50;$

$f_H(54) = \Psi(f_H)(54) = f_H(f_H(61)) = f_H(55) = 50.$

Продовжуючи далі, маємо:

$f_H(53) = f_H(54) = 50,\ \ldots,\ f_H(0) = f_H(1) = 50.$

Отже, f_H – єдина нерухома точка оператора Ψ, причому

$$f_H(x) = \begin{cases} x-6, & \text{якщо } x > 55, \\ 50, & \text{якщо } x \le 55. \end{cases}$$

Оператор Ψ є РО. Справді, функція

$$\gamma(u,x) = \begin{cases} x-6, \text{ якщо } x > 55 \text{ та } u - \text{код деякої скінченної функції}, \\ \theta_u(\theta_u(x+7)), \text{ якщо } x \le 55 \\ \text{та } u \ - \text{ код деякої скінченної функції}, \\ \text{невизначене інакше}, \end{cases}$$

є ЧРФ за тезою Чорча.

Зауважимо, що коли ННТ f неперервного оператора Ψ є тотальною функцією, така функція f – єдина нерухома точка Ψ.

Для ЗРО ННТ може бути нетотальною функцією, тобто не РФ. Наприклад, тотожний оператор є ЗРО, але його ННТ – це $f_\varnothing$.

Нехай РО $\Psi: \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ визначений оператором переліку Φ_z. Тоді маємо $\Psi(f) = C^{-1}(\Phi_z(C(f)))$ для всіх $f \in \boldsymbol{F}$. Нехай A – нерухома точка оператора Φ_z: $A = \Phi_z(A)$. Тоді $f = C^{-1}(A)$ є нерухомою точкою РО Ψ: $\Psi(f) = C^{-1}(\Phi_z(C(f))) = C^{-1}(\Phi_z(A)) = C^{-1}(A) = f$.

З іншого боку, нехай f – нерухома точка РО Ψ: $\Psi(f) = f$. Тоді $A = C(f)$ – нерухома точка ОП Φ_z: $\Phi_z(C(f)) = C(\Psi(f)) = C(f)$.

Для ЧРО Ψ, який не є РО, найменшої нерухомої точки може не існувати. Це буває тоді, коли множина A – ННТ відповідного ОП Φ_z – неоднозначна. Зрозуміло, що тоді кожна $B \supseteq A$ неоднозначна, тому такий Ψ узагалі не має нерухомих точок.

Розглянемо зв'язок між теоремою 8.2.5 і теоремою Кліні про нерухому точку для індексних РФ ($Kl_{РФ}$).

Нехай $\Psi: \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$ – РО. За теоремою $Kl_{РФ}$ існує РФ h: $\Psi(\varphi_k) = \varphi_k$ для всіх $k \in N$. За $Kl_{РФ}$ для РФ h існує $m \in N$: $\varphi_m = \varphi_{h(m)}$.

Маємо $\Psi(\varphi_m) = \varphi_{h(m)} = \varphi_m$, тому φ_m – це НТ оператора Ψ.

$Kl_{РФ}$ стверджує існування НТ, яка є ЧРФ, для кожного РО. Проте із $Kl_{РФ}$ не випливає, що РО має *частково рекурсивну* ННТ.

Таким чином, $Kl_{РФ}$ – загальніша теорема, теорема 8.2.5 частково випливає з неї. $Kl_{РФ}$ можна застосувати й до неекстенсійних

РФ, які не отримують за допомогою РО. Водночас теорема 8.2.5 дає більше інформації.

Отже, обидві теореми про нерухому точку взаємно доповнюють одна одну.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте теорему Майхілла – Шепердсона.
2. Поясніть, що таке екстенсійна функція.
3. Опишіть побудову нерухомої точки методом послідовних наближень.
4. Сформулюйте теорему Кліні про нерухому точку для операторів переліку.
5. Сформулюйте теорему Кліні про нерухому точку для рекурсивних операторів.
6. Поясніть, чи завжди існує нерухома точка для ЧРО.
7. Укажіть зв'язок між теоремами Кліні про нерухому точку для РО та індексних РФ.

Вправи

1. Доведіть рекурсивність і знайдіть ННТ оператора $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$, заданого умовою:

1) $\Psi(f)(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = 0, \\ 3x + f(x-1) \text{ при } x > 0; \end{cases}$

2) $\Psi(f)(x) = \begin{cases} 2, \text{ якщо } x = 0, \\ 2x + 5 + f(x-1) \text{ при } x > 0; \end{cases}$

3) $\Psi(f)(x) = \begin{cases} 3, \text{ якщо } x = 0, \\ 4x + 1 + f(x-1) \text{ при } x > 0; \end{cases}$

4) $\Psi(f)(x) = \begin{cases} 4, \text{ якщо } x = 0, \\ 7x + 2 + f(x-1) \text{ при } x > 0; \end{cases}$

5) $\Psi(f)(x) = \begin{cases} 5, \text{ якщо } x = 0, \\ 3f(x-1) \text{ при } x > 0; \end{cases}$

6) $\Psi(f)(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x = 0, \\ 1, \text{ якщо } x = 1, \\ f(x-1) + f(x-2), \text{ якщо } x > 1; \end{cases}$

*7) $\Psi(f)(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x=0,\\ 1, \text{ якщо } x=1,\\ 2f(x-1)+3f(x-2), \text{ якщо } x>1.\end{cases}$

2. Доведіть рекурсивність і знайдіть ННТ оператора $\Psi : \boldsymbol{F}^2 \to \boldsymbol{F}^2$, заданого умовою:

1) $\Psi(f)(x,y)=\begin{cases}5, \text{ якщо } x=0,\\ f(x+2, f(x-1, y+3)) \text{ при } x>0;\end{cases}$

2) $\Psi(f)(x,y)=\begin{cases}3, \text{ якщо } x=0,\\ f(x-1, f(x+3, y+2)) \text{ при } x>0;\end{cases}$

3) $\Psi(f)(x,y)=\begin{cases}2, \text{ якщо } x=0,\\ f(x+3, f(x-1,\ 2y+1)) \text{ при } x>0.\end{cases}$

3. Доведіть рекурсивність і знайдіть ННТ оператора $\Psi : \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$, заданого умовою:

1) $\Psi(f)(x)=\begin{cases}x-8, \text{ якщо } x\ge 60,\\ f(f(x+9)) \text{ при } x<60;\end{cases}$

2) $\Psi(f)(x)=\begin{cases}x-10, \text{ якщо } x>100,\\ f(f(x+11)) \text{ при } x\le 100.\end{cases}$

*4. Нехай Φ та Ψ – рекурсивні оператори вигляду $\boldsymbol{F}^1 \times \boldsymbol{F}^1 \to \boldsymbol{F}^1$. Доведіть, що існує найменша пара функцій f, g така, що $f = \Phi(f, g)$ та $g = \Psi(f, g)$, причому функції f та g є ЧРФ.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Глушков В. М.** Алгебра, языки, программирование / В. М. Глушков, Г. Е. Цейтлин, Е. Л. Ющенко. – К. : Наукова думка, 1974.

2. **Лісовик Л. П.** Теорія алгоритмів / Л. П. Лісовик, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2003.

3. **Мальцев А. И.** Алгоритмы и рекурсивные функции / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1986.

4. **Манин Ю. И.** Вычислимое и невычислимое / Ю. И. Манин. – М. : Сов. Радио, 1980.

5. **Нікітченко М. С.** Математична логіка та теорія алгоритмів : підручник / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2008.

6. **Нікітченко М. С.** Прикладна логіка / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2013.

7. **Нікітченко М. С.** Теорія алгоритмів / М. С. Нікітченко, О. С. Шкільняк, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2015.

8. **Нікітченко М. С.** Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів / М. С. Нікітченко, О. С. Шкільняк, С. С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2016. – № 2–3 – С. 73–86.

9. **Основи дискретної математики** / Ю. В. Капітонова, С. Л. Кривий, О. А. Летичевський та ін. – К. : Наукова думка, 2002.

10. **Шкільняк С. С.** Математична логіка. Приклади й задачі / С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2022.

11. **Шкільняк С. С.** Теорія алгоритмів. Приклади й задачі / С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2012.

12. **Aho A.** The Design and Analysis of Computer Algorithms / A. Aho, J. Hopcroftand, J. Ullman. – Addison-Wesley Publishing company, 1976.

13. **Cutland N.** Computability. An Introduction to Recursive Function Theory / N. Cutland. – Cambridge University Press, 1980.

14. **Gross M.** Notions sur les grammaires formelles / M. Gross et A. Lentin. – Gauthier-Villars, Paris, 1967.

15. **Hopcroft J.** Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation / J. Hopcroft, R. Motwani and J. Ullman. – 3rd Ed. – Pearson, 2006.

16. **Kleene S. C.** Mathematical Logic / S. C. Kleene. – Dower Publications, 2013.

17. **Martin-Löf Per.** Notes on Constructive Mathematics / Per Martin-Löf. – Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1970.

18. **Mendelson E.** Introduction to Mathematical Logic / E. Mendelson. – 6th Ed. – London ; N.Y. : CRC Press ; Taylor & Francis Group, 2015.

19. **Rogers H.** Theory of Recursive Functions and Effective Computability / H. Rogers. – McGraw-Hill Book Company, 1967.

20. **Shoenfield J.** Mathematical Logic / J. Shoenfield. – Addison-Wesley Publishing company, 1967.

21. **Shoenfield J.** Degrees of unsolvability / J. Shoenfield. – American Elsevier Publishing company, 1971.

З М І С Т

Навчальне видання

ШКІЛЬНЯК Степан Степанович

ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ

ПРИКЛАДИ ТА ЗАДАЧІ

Навчальний посібник

Редактор *Н. М. Земляна*
Технічний редактор *Ю. О. Куценко*

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"

Формат 60x84$^{1/16}$. Ум. друк. арк. 11,2. Наклад 100. Зам. № 223-10737.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № К2.
Підписано до друку 07.10.23

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"
Б-р Тараса Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28
e-mail: vpc@knu.ua; vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
http: vpc.knu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02