

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ
ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Ю.М. ШЕВЧУК

Популяційні моделі в задачах аналізу соціальних мереж

Навчальний посібник

Київ — 2024

УДК 517.9

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, проф. О.Г. Наконечний,
доктор фізико-математичних наук, проф. А.О. Пашко

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол №12 від 19 квітня 2024 року)

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол №12 від 18 квітня 2024 року)

к.ф.-м.н., ас. Шевчук Юлія Михайлівна

Популяційні моделі в задачах аналізу соціальних мереж. Навчальний посібник/ Ю.М. Шевчук — Київ: 2024. — 67 с.

Викладено матеріали з дисципліни «Прикладні методи аналізу та моделювання процесів з нелінійною динамікою», що є вибірковою для студентів, що навчаються за освітньо-професійною програмою другого (магістерського) рівня вищої освіти «Системи і методи прийняття рішень» спеціальності 124 «Системний аналіз». У посібнику наведено огляд можливих підходів до моделювання процесів в соціальних мережах, також приділено увагу саме популяційним моделям у вигляді нелінійних диференціальних рівнянь. Окремим розділом представлено основні відомості про обчислювальні методи аналізу таких моделей (також наведені приклади комп'ютерного моделювання використання деяких з них).

Для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які навчаються за освітньо-професійною програмою «Системи і методи прийняття рішень» спеціальності 124 «Системний аналіз».

© Шевчук Ю.М., 2024

ЗМІСТ

ВСТУП	5
Розділ 1. СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ СОЦІАЛЬНИХ МЕРЕЖ ТА ЇЇ МЕТОДИ НА ОСНОВІ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПОПУЛЯЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ	6
1.1. Опис соціальних мереж в термінах системного аналізу	6
1.2. Основні задачі аналізу соціальних мереж	8
1.3. Математичні підходи для аналізу соціальних мереж	10
1.4. Імітаційні моделі процесу поширення інформації в соціумі	12
1.4.1. Імітаційні моделі процесу поширення інформації в соціумі на основі багатоагентних систем	12
1.4.2. Імітаційні моделі процесу поширення інформації в соціумі на основі систем звичайних диференціальних рівнянь	14
1.4.2.1. Моделі на основі систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь	14
1.4.2.2. Моделі на основі систем звичайних нелінійних диференціальних рівнянь	15
1.4.3. Імітаційні моделі процесу поширення інформації в соціумі на основі моделей поширення інфекційних захворювань	17
1.4.4. Імітаційні моделі процесу поширення інформації в соціумі на основі гібридних моделей	19
1.5. Переваги та недоліки використання моделей популяційної динаміки	20
Розділ 2. ОЦІНЮВАННЯ В ПОПУЛЯЦІЙНИХ МОДЕЛЯХ ПОШИРЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ	22
2.1. Оптимальні та гарантовані оцінки нестационарних параметрів диференціальних рівнянь	22
2.1.1. Випадок неперервних спостережень	22
2.1.2. Випадок дискретних спостережень	26
2.2. Гарантовані оцінки нестационарних параметрів різницевого рівняння в умовах невизначеності	31
2.2.1. Постановка задачі	31
2.2.2. Знаходження гарантованих оцінок параметрів різницевого рівняння	34
2.2.3. Інтерполяція параметрів різницевого рівняння	35
2.2.4. Мінімаксні оцінки параметрів різницевого рівняння	36
2.3. Оцінки впливів в моделях поширення інформації із нестационарними параметрами	38
2.3.1. Припущення та позначення	39

2.3.2.	Оцінки впливів для випадку спостереження за кількістю прихильників одного інформаційного потоку та відомими параметрами системи	40
2.3.3.	Оцінки впливів для випадку спостереження за кількістю прихильників обох інформаційних потоків та відомими параметрами системи для одного рівняння	42
2.3.4.	Оцінки впливів для випадку спостереження за кількістю прихильників обох інформаційних потоків та відомими параметрами системи	44
2.4.	Прогнозні оцінки в математичних моделях поширення інформації зі стаціонарними параметрами	47
2.4.1.	Припущення та позначення	47
2.4.2.	Побудова усереднених оптимальних середнє квадратичних прогнозних оцінок	48
2.4.2.1.	Побудова усереднених оптимальних середнє квадратичних прогнозних оцінок для базової моделі	48
2.4.2.2.	Побудова усереднених оптимальних прогнозних оцінок для моделі поширення інформації, що містить механізми забування, двокрокового охоплення інформацією та поділ соціуму на дві однорідні підгрупи	50
2.4.3.	Побудова гарантованих прогнозних оцінок	53
ВИСНОВКИ		58
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ		59

ВСТУП

Соціальні мережі є складними системами, які відображають взаємодії та зв'язки між людьми, організаціями та іншими сутностями в сучасному суспільстві. Аналіз цих мереж вимагає використання різних методів та інструментів, зокрема методику системного аналізу, серед яких особливе місце займають популяційні моделі.

Посібник "Популяційні моделі в задачах аналізу соціальних мереж" призначений допомогти вам зрозуміти сутність цих моделей, їхню застосовність у вивченні та аналізі соціальних мереж, а також вміння використовувати їх для розв'язання практичних завдань.

На перший погляд популяційні моделі можуть здатися важкими або абстрактними, проте вони надають нам потужний інструментарій для розуміння динаміки соціальних мереж та прогнозування їх розвитку. Тому в цьому посібнику запропоновано результати огляду системного підходу для до аналізу соціальних мереж та теоретичні аспекти популяційних моделей, та методи аналізу та прогнозування на основі таких моделей.

Даний посібник сформовано на основі матеріалів, які викладались в рамках дисципліни "Прикладні методи аналізу та моделювання процесів з нелінійною динамікою" для студентів-магістрів спеціальності "Системний аналіз" факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, та включає в себе частину теоретичних результати монографії Наконечного О.Г., Шевчук Ю.М. "Нелінійні задачі популяційної динаміки та їх застосування" (2020). Але варто відмітити, що даний посібник містить оригінальні матеріали по огляду системного підходу та методів системного аналізу до задач аналізу процесів в соціальних мережах.

Також наведені результати є складовою частиною наукових робіт, що ведуться на кафедрі системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Дослідження виконувались в рамках науково-дослідної теми № 16БФ015-02 «Розробка нових математичних методів системного і теорії оптимальних рішень та їх застосування» (державний номер реєстрації 0116U002529, термін виконання 2016-2018 рр.) та науково-дослідної теми №19БФ015-02 «Розробка нових математичних методів аналізу та оптимізації систем в умовах невизначеності» (державний номер реєстрації 0119U100338, термін виконання 2019-2021 рр.).

Розділ 1. СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ СОЦІАЛЬНИХ МЕРЕЖ ТА ЇЇ МЕТОДИ НА ОСНОВІ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПОПУЛЯЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ

Складно заперечувати роль соціальних мереж в сучасному світі, і окремий інтерес представляють собі месенджери типу Viber та Телеграм, які дозволяють комунікувати не тільки на рівні користувач-користувач, але й користувач-користувачі, що зазвичай характерно для групових чатів та для публічних новинних каналів.

Варто також відмітити популярність Телеграму, якій він завдячує зокрема своїй політиці конфіденційності та певній толерантності у порівнянні з іншими соціальними медіа.

Тому для Телеграму закономірно виникають задачі інтелектуального аналізу повідомлень, яким сприяє можливість використання чат-ботів в цій мережі ([1] - [3]). Також для неї є можливим зручне тестування алгоритмів аналізу тональності текстів повідомлень та аналізу поведінки користувачів (наприклад, [4] - [5]).

Також відзначимо, що для інших медіа, наприклад, Facebook і Twitter, дослідження контенту користувачів є задачами, які активно розв'язуються ([6] - [10]).

1.1 Опис соціальних мереж в термінах системного аналізу

Зважаючи на складність соціальних мереж та постійні зміни у їх структурі та динаміці, системний підхід до аналізу цих мереж виявляється найбільш ефективним та обґрунтованим. Цей підхід дозволяє розглядати соціальні мережі як системи, в яких кожен учасник та їхні взаємодії впливають на загальну динаміку та функціонування мережі в цілому ([11] - [14]).

Системний підхід — це методологічний підхід, що застосовується в науці для дослідження складних систем, розуміння їх структури, взаємодії та динаміки. Основна ідея полягає в тому, щоб розглядати об'єкт дослідження як інтегровану систему, що складається з взаємопов'язаних елементів, та вивчати взаємодії між цими елементами з урахуванням їх взаємозалежності та впливу зовнішніх факторів.

Основні принципи наукового системного підходу включають:

Глобальний підхід до аналізу: Системний підхід враховує всі аспекти та елементи системи, зосереджуючись на їх взаємодії та впливі на систему в цілому.

Інтеграція: Він прагне інтегрувати різні аспекти дослідження, такі як соціальні, економічні, технічні, культурні тощо, в єдину систему розуміння.

Взаємозалежність: Розглядаючи систему, враховується взаємозалежність її елементів, а також їх взаємодія та вплив на систему в цілому.

Аналіз динаміки: Системний підхід включає в себе аналіз динаміки системи, що дозволяє розуміти її зміни та еволюцію з часом.

Моделювання: Використання математичних моделей та імітаційних досліджень для розуміння та прогнозування поведінки системи.

Системний підхід застосовується в різних галузях науки, включаючи біологію, екологію, соціологію, економіку, технічні науки тощо. Він дозволяє отримати більш повне та глибше розуміння різноманітних явищ та процесів у природі та суспільстві.

Підходячи до аналізу соціальних мереж з системної перспективи, слід враховувати не лише самі зв'язки між учасниками, але й їхню природу, напрямок та інтенсивність. Окрім того, важливо враховувати вплив зовнішніх факторів, таких як культурні, соціальні та економічні чинники, на структуру та динаміку соціальної мережі.

Системний підхід допомагає виявляти ключові вузли та групи в мережі, а також передбачати можливі наслідки змін у її структурі чи взаємодіях між учасниками. Це дає можливість розробляти стратегії управління та впливу на соціальні мережі з метою досягнення певних цілей, будь то підвищення впливу, мобілізація ресурсів чи зміна певних поведінкових патернів.

Залучаючи системний підхід до аналізу соціальних мереж, важливо визначити основні елементи та зв'язки, що складають ці мережі. Основні елементи можуть включати індивідів, групи, спільноти або організації, які взаємодіють між собою. Зв'язки між цими елементами можуть бути різноманітними, від дружби та співпраці до конкуренції та взаємодії на різних рівнях.

Зовнішні фактори, такі як культурні, соціальні, економічні та політичні чинники, також мають суттєвий вплив на функціонування соціальних мереж. Наприклад, культурні норми та цінності можуть впливати на типи зв'язків, що формуються у мережі, тоді як економічні умови можуть впливати на розподіл ресурсів між учасниками мережі. Політичні чинники можуть впливати на правовий контекст, у якому функціонує мережа, і визначати обмеження або можливості для її розвитку.

Розглядаючи соціальні мережі як складні системи, необхідно враховувати взаємодію між цими елементами та зовнішніми факторами. Це допомагає краще зрозуміти динаміку та поведінку мережі, а також розробляти ефективні стратегії управління та впливу на неї з метою досягнення певних цілей або розв'язання проблем.

Найчастіше в наукових дослідженнях системний підхід реалізують методами системного аналізу.

Сучасний системний аналіз — прикладна наука, яка орієнтована на виявлення причин реальних складностей, які виникають перед "власником проблеми" (звичайно — це конкретна організація, установа, підприємство, колектив) та на формування варіантів їх усунення ([15]).

Системний аналіз є методологічним підходом до дослідження та аналізу складних систем, що включають в себе взаємодію різноманітних елементів. Цей підхід використовується в різних галузях науки та прикладних дисциплінах для розуміння структури, функціонування та динаміки систем.

Системний аналіз передбачає вивчення системи як цілісності, ураховуючи взаємозв'язки між її складовими елементами. Основними етапами системного аналізу є:

Ідентифікація системи: Це перший етап, на якому визначається об'єкт аналізу та обмеження системи. Це включає в себе визначення складових елементів системи та їхніх взаємозв'язків.

Моделювання системи: На цьому етапі розробляються математичні або концептуальні моделі системи, які відображають її структуру та функціонування. Моделі можуть бути використані для аналізу різних аспектів системи та передбачення її поведінки в різних умовах.

Аналіз системи: На даному етапі проводяться різні аналітичні методи для вивчення системи, включаючи аналіз структури, взаємозв'язків між елементами, потенційних проблем та можливих шляхів вдосконалення.

Прогнозування та управління: Інформація, отримана в результаті аналізу, може бути використана для прогнозування поведінки системи в майбутньому та розробки стратегій управління для досягнення певних цілей.

1.2 Основні задачі аналізу соціальних мереж

До ключових завдань, які вирішуються при аналізі соціальних мереж, таких як ідентифікація впливових учасників, вивчення поширення інформації та формування груп ([16]).

Ідентифікація ключових учасників, груп та взаємозв'язків, які формують структуру мережі є важливою задачею, оскільки вона дозволяє розуміти роль та вплив кожного учасника на мережу в цілому, а також виявляти ключові вузли та групи, які можуть мати великий вплив на поширення інформації, вплив чи потенційні зміни в мережі .

Ідентифікація ключових учасників та груп в соціальних мережах може включати такі завдання, як:

Визначення центральних вузлів: Аналіз центральності допомагає виявити учасників, які займають центральне положення в мережі. Це можуть бути особи або групи з великою кількістю зв'язків, які впливають на передачу інформації та взаємодію в мережі.

Виявлення впливових груп: Дослідження групової структури мережі дозволяє ідентифікувати кліки або спільноти, які мають значний вплив на формування думок, прийняття рішень чи поширення інформації.

Аналіз взаємодій: Вивчення взаємодій між учасниками допомагає виявити ключові відносини та патерни поведінки, що можуть вказувати на потенційні можливості чи проблеми в мережі.

Виявлення вузлів-перехрестів: Ідентифікація вузлів, які з'єднують різні групи або підмережі, допомагає зрозуміти структуру мережі та потенційні шляхи поширення інформації або впливу.

Ідентифікація ключових учасників та взаємозв'язків у соціальних мережах є важливою складовою для розуміння та управління мережею, а також для розв'язання різноманітних завдань у сферах маркетингу, соціології, політики тощо.

Вивчення поширення інформації в соціальних мережах є ключовим завданням аналізу, яке має велике значення в різних сферах, від маркетингу та реклами до соціології та психології. Це завдання дозволяє розуміти, як інформація передається через мережу, які учасники мають найбільший вплив на цей процес та як це може впливати на різні аспекти суспільства та індивідуальну поведінку.

При аналізі поширення інформації в соціальних мережах важливо враховувати наступні аспекти:

Визначення впливових учасників: Ідентифікація осіб або груп, які мають найбільший вплив на поширення інформації в мережі. Це можуть бути особи з великою кількістю підписників або прихильників, які активно діляться контентом або впливають на думки та переконання інших учасників.

Аналіз властивостей інформаційного потоку: Дослідження шляхів, по яких інформація поширюється в мережі, та виявлення ключових маршрутів та вузлів, через які вона проходить. Це допомагає розуміти механізми поширення інформації та прогнозувати її шляхи розповсюдження.

Вивчення реакції аудиторії: Аналіз реакції користувачів на інформацію, що поширюється в мережі, включаючи обговорення, коментарі, лайки, ретвіти тощо. Це дозволяє розуміти вплив контенту на аудиторію та виявляти популярні теми або погляди.

Виявлення вірусних явищ: Вивчення процесів, які сприяють виникненню вірусних тенденцій та поширенню інформаційних "епідемій". Це допомагає розуміти механізми, за якими інформація може швидко поширюватися та набирати популярність у мережі.

Аналіз поширення інформації в соціальних мережах дозволяє розуміти, як інформація поширюється через мережу та як це може впливати на поведінку та переконання учасників мережі. Це важлива інформація для розвитку маркетингових стратегій, комунікаційної політики та рішень у сферах соціальної та політичної діяльності.

Також важливим є розуміння процесів формування груп та вивчення їх структури, взаємодій та впливу на поведінку учасників мережі. Формування груп відображає складні соціальні взаємозв'язки та відображає внутрішню динаміку мережі, що має значення для розуміння соціальних процесів, виникаючих у мережі.

Основні аспекти формування груп у соціальних мережах включають:

Визначення структури груп: Ідентифікація груп та підгруп у мережі, а також вивчення їхньої організаційної структури та внутрішніх взаємозв'язків.

Аналіз взаємодій в групах: Вивчення взаємодій та комунікації між учасниками групи, їх вплив на формування думок, прийняття рішень та спільні дії.

Вивчення впливу груп на поведінку учасників: Аналіз впливу групових норм, цінностей та стереотипів на поведінку індивідів в мережі, а також їхніх дій та реакцій.

Виявлення ключових фігур: Ідентифікація лідерів, впливових осіб та осередків в групах, які можуть визначати тенденції та розвиток групи.

Дослідження динаміки груп: Аналіз змін у структурі, взаємодіях та впливі груп з часом, а також виявлення факторів, що впливають на їх розвиток та дестабілізацію.

Розуміння формування груп у соціальних мережах дозволяє краще зрозуміти соціальні процеси та взаємодію учасників мережі, що є важливим для розробки стратегій комунікації, управління та впливу в мережі, а також для розвитку соціальних програм та ініціатив.

Прогнозування та управління є ключовим завданням при аналізі соціальних мереж, оскільки дозволяє передбачати їхню поведінку, розвиток та вплив, а також розробляти стратегії для ефективного управління цими мережами з метою досягнення певних цілей. Це завдання є критичним для багатьох сфер, включаючи маркетинг, політику, соціальні дослідження та управління великими організаціями.

Основні аспекти прогнозування та управління в соціальних мережах включають:

Прогнозування поведінки: Аналіз попередньої діяльності та динаміки мережі допомагає прогнозувати майбутні тенденції та зміни у взаємодіях між учасниками. На основі цих прогнозів можна розробляти стратегії впливу та розвитку мережі.

Виявлення ключових впливових осіб: Ідентифікація осіб, які мають найбільший вплив в мережі, дозволяє зосередити зусилля на спілкуванні та співпраці з ними для досягнення певних цілей.

Управління інформаційним потоком: Аналіз розповсюдження інформації в мережі допомагає керувати потоком інформації та впливом на учасників мережі з метою досягнення конкретних цілей.

Вплив на мережу: Розробка стратегій та дій для впливу на думки, поведінку та реакції учасників мережі з метою досягнення певних результатів, таких як збільшення свідомості про бренд, мобілізація груп для підтримки певних ініціатив тощо.

Оптимізація взаємодії: Виявлення оптимальних шляхів взаємодії та співпраці між учасниками мережі для досягнення синергетичних ефектів та підвищення продуктивності мережі в цілому.

Прогнозування та управління в соціальних мережах допомагають розуміти, впливати та адаптуватися до змін у мережі, що є важливим для ефективної роботи у різних сферах діяльності.

1.3 Математичні підходи для аналізу соціальних мереж

Сучасні методи математичного моделювання та аналізу соціальних мереж визначаються не лише їхньою складністю та різноманітністю, але й високою ступеню динамічності. Передові дослідження у цій галузі розкривають не лише структуру соціальних мереж, а й їхню еволюцію в часі, взаємозв'язки між учасниками, поширення інформації та впливовість окремих агентів.

Також розвиток комп'ютерних технологій та методів обробки даних відкриває нові перспективи для аналізу великих обсягів інформації, які є характерними для соціальних мереж. Використання штучного інтелекту та машинного навчання дозволяє автоматизувати процес

аналізу та виявлення закономірностей у поведінці учасників мережі, що сприяє більш точному прогнозуванню та розробці ефективних стратегій управління соціальними мережами.

Таким чином, огляд сучасних методів математичного моделювання та аналізу соціальних мереж відображає не лише розмаїття підходів, а й постійний пошук нових інноваційних методик, спрямованих на більш глибоке розуміння та краще управління цими складними системами.

Успішність розв'язання конкретної прикладної задачі аналізу процесу поширення інформації в соціальній мережі залежить від вибору моделі й апарату, який би відповідав особливостям досліджуваної проблеми.

Точні науки мають цілу низку підходів до моделювання процесів в інформаційно-комунікативному просторі, кожен з яких має свої сильні та слабкі сторони.

Математичні моделі процесу поширення інформації в соціальних мережах в залежності від функцій моделювання умовно можна розділити на чотири загальні класи ([17]):

- описові моделі;
- імітаційні моделі;
- оптимізаційні моделі;
- моделі прийняття рішень.

Описові моделі відіграють важливу роль у аналізі соціальних мереж, надаючи можливість систематичного опису їхньої структури, взаємозв'язків та властивостей. Призначення описових моделей для аналізу соціальних мереж полягає в розумінні та інтерпретації складних соціальних взаємодій, що відбуваються в цих мережах, а також відображенні їхніх ключових аспектів.

Описові моделі характеризуються наявністю емпіричних даних, містять невелику кількість елементів. Вони базуються на методах теорії ймовірності та статистичної теорії рішень (прийняття рішень в умовах "природної" невизначеності), теорії надійності та теорії масового обслуговування, теорії експертних оцінок ([18] - [20]).

Оптимізаційні моделі в контексті аналізу соціальних мереж відіграють ключову роль у вирішенні різноманітних завдань, спрямованих на максимізацію ефективності, впливу та досягнення стратегічних цілей в мережі, дозволяють ефективно аналізувати, прогнозувати та управляти взаємодіями між учасниками, що в свою чергу сприяє досягненню стратегічних цілей та покращенню результатів в різних сферах діяльності ([21] - [25]).

Оптимізаційні моделі крім рівнянь та нерівностей, що задають предметну область, містять критерій оцінки стану складної динамічної системи, використовують апарат лінійного та динамічного програмування, теорії оптимальних керувань, дискретної оптимізації, включаючи теорію графів ([26] - [30]).

Моделі прийняття рішень в контексті аналізу соціальних мереж відіграють ключову роль у вирішенні різноманітних завдань, пов'язаних з оптимізацією та керуванням взаємодіями між учасниками, дозволяють ефективно аналізувати, прогнозувати та управляти взаємодіями між учасниками, що в свою чергу сприяє досягненню стратегічних цілей та покращенню результатів в різних сферах діяльності.

Моделі прийняття рішень умовно поділяються на моделі індивідуального (багато-критеріальне прийняття рішень) та колективного прийняття рішень, коли теорія ігор використовується при прийнятті рішень в умовах ігрової невизначеності ([31] - [34]).

Окрему, важливу роль при розробці та аналізі моделей поширення інформації в соціумі мають імітаційні моделі. Вони дозволяють проводити чисельне моделювання з метою аналізу процесу поширення інформації, базуються на апараті марківських ланцюгів, скінченних автоматів або методах розподіленого штучного інтелекту, так звані багатоагентні системи ([22], [35] - [44]), диференціальних рівнянь та різницевих рівнянь ([45] - [77]).

Саме такі моделі розглянемо детальніше далі.

1.4 Імітаційні моделі процесу поширення інформації в соціумі

Розглянемо далі детальніше імітаційні моделі процесу поширення інформації в соціумі.

1.4.1 Імітаційні моделі процесу поширення інформації в соціумі на основі багатоагентних систем

За [22] агент — це деяка абстрактна сутність, що володіє активністю, автономною поведінкою, може приймати рішення відповідно до деякого набору правил, може взаємодіяти з оточенням та іншими агентами, а також може сама еволюціонувати. Багатоагентні моделі застосовуються з метою отримання уявлення щодо загальної поведінки таких систем, виявити правила функціонування систем з урахуванням припущень про індивідуальну поведінку її окремих агентів. Вони базуються на принципах:

- модель складається з популяції простих агентів;
- не існує єдиного агента (центру), що направляє інших агентів;
- не існує єдиного правила в системі, яке б описувало глобальну поведінку.

Як приклад багатоагентної системи розглянемо нейроподібну модель процесу розповсюдження інформації в соціумі, розробка і аналіз яких проводився в роботах [40] - [44].

Аналізується соціальна мережа S , що складається з заданої N кількості осіб, які потенційно спроможні засвоїти інформаційне повідомлення. Вважається, що кожній людині в цій моделі відповідає вузол в нейронній мережі, що обмінюються між собою повідомленнями.

Кожна особа знайома або має можливість спілкуватись з n_i , $i = \overline{1, N}$ іншими людьми в соціумі. Без обмеження загальності вважається можливим, що існують такі номери $k \in \overline{1, N}$ учасників процесу поширення інформації, для яких $n_k = N - 1$, $k \in \overline{1, N}$. Очевидно, що якщо i -ий член соціуму ($i \in \overline{1, N}$) спілкується з j -им членом соціуму ($j \in \overline{1, N}$), то й j -ий член соціуму ($j \in \overline{1, N}$) спілкується з i -им членом соціуму ($i \in \overline{1, N}$). Таку структуру можна

представити у вигляді графу, де кожна вершина графа представляє собою члена соціуму, а ребро між двома вершинами означає те, що особи знайомі або спілкуються між собою. Цей граф задається симетричною матрицею інцидентності $R = \{r_{ij}\}_{i,j=1}^N$, що складається з 0 та 1, де 0 у позиції (i,j) , $i,j \in \overline{1,N}$ означає, що людина i не спілкується з людиною j , а 1 — людина i знайома з людиною j .

Кожну людину з соціуму характеризує також набір додаткових параметрів. По-перше, кожен неоднаково ставиться до отриманої інформації: в даній моделі кожна людина має свій коефіцієнт I_i , $I_i \in [0,1]$, $i \in \overline{1,N}$, що відображає її сприйнятливості до інформації. По-друге, кожен по різному сприймає вплив з боку свого мережевого оточення. Це формалізується за допомогою вектора, що задає рівень довіри i , $i \in \overline{1,N}$ члена соціуму до кожного, хто з нею спілкується, у вигляді $T_i = (t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{iN})$, $i \in \overline{1,N}$, де $t_{ij} \in [0,1]$, $t_{ii} = 1$, $i,j \in \overline{1,N}$, причому $t_{ij} = 0$, $i,j \in \overline{1,N}$, якщо відповідний йому елемент матриці $r_{i,j} = 0$, $i,j \in \overline{1,N}$.

Припускається, що протягом часового проміжку $t \in (0,T)$ відбувається інформаційний вплив на соціум.

Через $L \in [0,1]$ позначається певний поріг сприйнятливості інформаційного повідомлення. При цьому вважається, що інформаційне повідомлення ефективно подіяло на i -го члена соціуму ($i \in \overline{1,N}$), якщо його ставлення $i_i > L$, $i \in \overline{1,N}$.

Також вводиться до розгляду вектор $H_0 = (h_1, h_2, \dots, h_N)$, що характеризує тих членів соціуму, які є прихильниками інформаційного повідомлення ще до того, як воно починає поширюватись.

Вважається, що в мережі відбувається міжособистісні комунікації. Сприятливості до інформаційного повідомлення кожного з членів соціуму може з часом змінитись в залежності від його оточення. Зміна сприйнятливості з часом описується моделю нейроподібного елемента вигляду:

$$\dot{I}_i(t) = \frac{1}{n_i + 1} \sum_{j=1}^N t_{ij} I_j(t) - I_i(t), i \in \overline{1,N}, t \in (0,T).$$

Зміна ставлення кожного члена соціуму спостерігається дискретно. Поклавши без обмеження загальності інтервал дискретизації $\Delta t = t_{j+1} - t_j = 1$, $j \in \overline{1,N-1}$, отримується рівняння у наступній формі:

$$I_i(t+1) = \frac{1}{n_i + 1} \sum_{j=1}^N t_{ij} I_j(t), i \in \overline{1,N}, t \in (0, T-1). \quad (1.1)$$

Таким чином, на кожному послідовному кроці дискретизації переобчислюються коефіцієнти сприйнятливості до інформаційного повідомлення кожного члена соціуму на основі середнього значення думки оточення цього члена соціуму з врахуванням рівня довіри до кожної людини з цього оточення.

На кожному кроці також на основі обчислених значень I_i , $i \in \overline{1,N}$ обчислюються значення компонент вектора H_0 відповідно до порогу L .

Якщо на деякому кроці виконується співвідношення $H(t) = H(t-1)$, $t \in (1, T)$, тобто інформаційне повідомлення більше не впливає на жодного члена з соціуму, або, якщо

$H(t) = (1, 1, \dots, 1)$, тобто усі особи вже знаходяться під впливом інформаційного повідомлення, алгоритм зупиняється.

1.4.2 Імітаційні моделі процесу поширення інформації в соціумі на основі систем звичайних диференціальних рівнянь

Оскільки процес поширення інформації має певну динаміку в часі, то доцільною є побудова математичних моделей у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь. Для систем лінійних диференціальних рівнянь вже напрацьований потужний апарат в теорії диференціальних рівнянь, в силу лінійності вони є зручними для аналізу, але такі моделі претендують лише на наближене відображення процесу обміну інформацією в соціальних групах. Більш адекватними по відношенню до предметної області є математичні моделі, представлені у вигляді систем нелінійних диференціальних рівнянь. Але робота з даними моделями є складнішою, наприклад, в загальному випадку такі системи нелінійних диференціальних рівнянь є нерозв'язними аналітично, і тому виникає потреба користуватись чисельними методами, які дають лише наближені результати. Попри все, навіть такі результати дають нову інформацію, яка дає можливість більш глибоко аналізувати і досліджувати процеси в соціо-комунікативній сфері, що, в свою чергу, дозволяє збільшити загальну кількість знань про них.

Розглянемо далі детальніше деякі математичні моделі процесу поширення інформації в соціумі, представлених у вигляді системи диференціальних рівнянь.

1.4.2.1 Моделі на основі систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь

Розглянемо модель поширення інформації, запропоновану в роботі [45]. Її особливістю є те, що розглядається три учасника процесу поширення інформації в соціумі: дві протидіючі (ворогуючі) одна одній сторони, які за свою ціль ставлять збільшити кількість своїх прихильників, і третя сторона — миротворці, що своїми інформаційними діями зменшують кількість активних учасників конфлікту.

Позначимо через $x_1(t)$, $t \in (0, T)$ кількість прихильників однієї з ворогуючих сторін, $x_2(t)$, $t \in (0, T)$ — кількість прихильників іншої ворогуючої сторони. Кількість миротворців в момент часу $t \in (0, T)$ моделюватимемо за допомогою функції $x_3(t)$. Тоді модель поширення інформації в соціумі, що характеризується двома протидіючими сторонами та миротворцями,

набуде вигляду задачі Коші:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a(t)x_1(t) - b(t)x_3(t), x_1(0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2(t) = a(t)x_2(t) - b(t)x_3(t), x_2(0) = x_2^0, \\ \dot{x}_3(t) = c(t)x_1(t) + c(t)x_2(t), x_3(0) = x_3^0, \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (1.2)$$

де $a(t)$, $t \in (0, T)$ — інтенсивність міжособистісного спілкування серед членів ворогуючих сторін, функція $b(t)$, $t \in (0, T)$ — характеризує процес відмови від "ворожнечі" представників протидіючих сторін, $c(t)$, $j = 1, 2$, $t \in (0, T)$ — інтенсивність, з якою представники ворогуючих сторін відмовляються від ворожнечі і починають поширювати ідеї миротворців.

Також в роботі [45] наведено вигляд аналітичних розв'язків для окремих випадків системи (1.2), а також сформульовані результати дослідження стійкості системи (1.2) в околах особливих точок.

Аналіз моделей типу (1.2) проводився також в роботах [47] - [52].

1.4.2.2 Моделі на основі систем звичайних нелінійних диференціальних рівнянь

Розглянемо математичну модель процесу поширення інформації на основі системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь, що побудована на тих же принципах, що і модель (1.2). Її аналіз наведено в роботі [53].

Увівши позначення $x_1(t)$, $t \in (0, T)$ для кількості прихильників однієї з ворогуючих сторін, $x_2(t)$, $t \in (0, T)$ — кількість прихильників іншої ворогуючої сторони, $x_3(t)$, $t \in (0, T)$ — кількості миротворців, отримаємо модель такого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = b_1(t)x_1(t) + b_2(t)x_1(t)x_2(t) - \\ - b_3(t)x_3(t) - \gamma_1(t), x_1(0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2(t) = b_4(t)x_2(t) + b_5(t)x_1(t)x_2(t) - \\ - b_6(t)x_3(t) - \gamma_2(t), x_2(0) = x_2^0, \\ \dot{x}_3(t) = \alpha_1(t)x_1(t) + \alpha_2(t)x_2(t) + \\ + \alpha_3(t)x_3(t), x_3(0) = x_3^0, \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (1.3)$$

де $b_i(t)$, $i = \overline{1, 6}$, $\alpha_j(t)$, $j = 1, 2$, $t \in (0, T)$ — параметри інтенсивності спілкування між різними сторонами-учасниками процесу поширення інформації, а функції $\gamma_j(t)$, $j = 1, 2$, $t \in (0, T)$ — характеризують механізм забування інформації представниками ворогуючих сторін.

Ще один вид математичних моделей представлених у формі системи нелінійних диференціальних рівнянь наведено в роботі [54] - [55].

Наведемо далі основні припущення, на основі яких будується модель.

В найпростішому випадку є соціальна спільнота, кількість членів якої L осіб, що потенційно можуть піддатися впливу N не співпадаючих між собою по змісту інформаційних

повідомлень типу 1 (I_1), типу 2 (I_2), ..., типу N (I_N). Нехай в момент часу $t = 0$ всі джерела інформації одночасно починають її транслювати, в результаті чого N інформаційних повідомлень розповсюджуються в середовищі спільноти. Тоді кількість осіб, що засвоїли i -е інформаційне повідомлення ($i = \overline{1, N}$), позначимо як $x_i(t)$, $t \in (0, T)$.

Припускаємо, що:

1. кожен з потоків I_i , $i = \overline{1, N}$ розповсюджується серед спільноти по двом інформаційним каналам:
 - «зовнішній» по відношенню до спільноти. Інтенсивність розповсюдження інформації по цьому каналу для I_i , $i = \overline{1, N}$ характеризується параметром $a_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, $t \in (0, T)$;
 - «внутрішній» канал — міжособистісне спілкування членів соціальної спільноти (його інтенсивність для I_i , $i = \overline{1, N}$ характеризується параметром $b_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, $t \in (0, T)$). В результаті такого спілкування люди, що сприйняли повідомлення I_i -типу, $i = \overline{1, N}$ (їх число рівне величині $x_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, $t \in (0, T)$), впливаючи на ще не охоплених членів соціуму (їх чисельність рівна величині $(L - \sum_{k=1}^N x_k(t))$, $t \in (0, T)$), вносять свій «особистий» вклад в процес поширення інформаційного повідомлення;
2. швидкості зміни числа людей, що сприйняли повідомлення I_i -типу, $i = \overline{1, N}$ (тобто число осіб, що сприйняли повідомлення I_i -типу, $i = \overline{1, N}$ в момент часу $t \in (0, T)$) складаються з:
 - швидкість зміни числа людей, що сприйняли повідомлення I_i -типу ($i = \overline{1, N}$) через зовнішній канал, ЗМІ (вона пропорційні добутку інтенсивності зовнішнього впливу $a_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, $t \in (0, T)$ та числа ще не охоплених членів спільноти $(L - \sum_{k=1}^N x_k(t))$, $t \in (0, T)$), задається функцією $a_i(t) (L - \sum_{k=1}^N x_k(t))$, $i = \overline{1, N}$, $t \in (0, T)$;
 - швидкість зміни числа людей, що сприйняли повідомлення I_i -типу ($i = \overline{1, N}$) через внутрішній канал, міжособистісне спілкування (вона пропорційні добутку інтенсивності міжособистісного спілкування $b_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, $t \in (0, T)$, числа осіб, що вже засвоїли інформаційне повідомлення I_i -типу ($i = \overline{1, N}$) та числа ще не охоплених членів спільноти $(L - \sum_{k=1}^N x_k(t))$, $t \in (0, T)$), задається функцією $b_i(t)x_i(t) (L - \sum_{k=1}^N x_k(t))$, $t \in (0, T)$.

Параметри $a_i(t)$, $b_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, $t \in (0, T)$ характеризують не тільки інтенсивності інформаційного впливу, але й схильність до його сприйняття. Таким чином, частина спільноти, що на момент часу $t \in (0, T)$ ще не засвоїла жодне з повідомлень (її гіпотетичний «середній» представник, який з самого початку був нейтральним по відношенню до будь-якого з інформаційних повідомлень I_i -о типу ($i = \overline{1, N}$) засвоює інформацію тим швидше, чим більші величини $a_i(t)$, $b_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, $t \in (0, T)$). При цьому, навіть якщо, наприклад, вплив інформаційного повідомлення I_1 -о типу свідомо більше за вплив будь-якого з повідомлень I_i -о типу ($i = \overline{2, N}$) (тобто $a_1(t) > a_i(t)$, $b_1(t) > b_i(t)$, $i = \overline{2, N}$, $t \in (0, T)$), частина членів спільноти все

одно засвоїть інформаційне повідомлення I_i -о типу ($i = \overline{1, N}$) (тобто не має повної монополії одного виду інформації по відношенню до іншої).

На основі вищенаведених припущень отримаємо таку задачу Коші:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= (a_i(t) + b_i(t)x_i(t)) \times \\ &\times \left(L - \sum_{k=1}^N x_k(t) \right), x_i(0) = x_i^0, i = \overline{1, N}, t \in (0, T). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Позначивши через $x_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, $t \in (0, T)$ кількість осіб, що засвоїли i -е інформаційне повідомлення ($i = \overline{1, N}$), отримаємо таку модель:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \left[(A(t)e^i + \sum_{k=1}^N (B(t)e^i, e^k) \ln x_i(t, f(\cdot))) \right] x_i(t, f(\cdot)), \\ x_i(0) &= x_i^0 > 0, i = \overline{1, n}, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (1.5)$$

де $A(t) \in R^N$, $t \in (0, T)$ — матриця інтенсивності зовнішнього впливу, $B(t) \in R^{N \times N}$ — матриця інтенсивності міжособистісного спілкування; вектор e^i — i -ий орт, $i = \overline{1, N}$.

1.4.3 Імітаційні моделі процесу поширення інформації в соціумі на основі моделей поширення інфекційних захворювань

Останні претендують на адекватне представлення процесів в соціо-комунікативному просторі в силу подібності процесу отримання та передачі інформації з перебігом вірусного захворювання, при якому інфікована людина передає збудник хвороби здоровим представникам популяції.

Однією із базових моделей поширення інфекційних захворювань в групі осіб є модель SIR (модель Кермака-МакКендріка [74]) — система із трьох диференціальних рівнянь, які відображають динаміку кількості сприйнятливих до захворювання ($S(t)$, $t \in (0, T)$), кількості інфікованих ($I(t)$, $t \in (0, T)$) та кількості одужавших осіб ($R(t)$, $t \in (0, T)$):

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\alpha(t)S(t)I(t), \\ \dot{I}(t) = \alpha(t)S(t)I(t) - \beta(t)I(t), \\ \dot{R}(t) = \beta(t)I(t) \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (1.6)$$

тут $\alpha(t)$, $t \in (0, T)$ — параметр інтенсивності інфікування; $\beta(t)$, $t \in (0, T)$ — параметр інтенсивності одужання.

Ця модель стала базовою для багатьох подальших досліджень задач моделювання процесів поширення інфекційних захворювань, наприклад, [75]-[77]. У ній передбачається, що швидкості зараження і одужання суттєво перевищують темпи народжуваності і смертності, тому ці останні фактори в моделі ігноруються.

У випадку деяких захворювань важливо брати до уваги збільшення групи сприйнятливих до захворювання. Тому постає необхідність у включенні народжених та померлих.

Отримуємо модель SIR з включення народжуваності та смертності (наприклад, [78]):

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\alpha(t)S(t)I(t) - \mu(N - S(t)), \\ \dot{I}(t) = \alpha(t)S(t)I(t) - \beta(t)I(t) - \mu, \\ \dot{R}(t) = \beta(t)I(t) - \mu R(t), \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (1.7)$$

де μ — постійний коефіцієнт, що описує темпи народжуваності та смертності, які вважаються однаковими для всіх груп, а N — кількість населення.

Можна отримати модель SIS із SIR, якщо брати до уваги, що особи, які одужали, не отримують ніякого імунітету до захворювання, тому переходять до групи сприйнятливих:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\alpha(t)S(t)I(t) - \mu(N - S(t)) + \beta(t)I(t), \\ \dot{I}(t) = \alpha(t)S(t)I(t) - \beta(t)I(t) - \mu, \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (1.8)$$

У цій моделі залишаємо лише два рівняння для сприйнятливих та інфікованих, причому порівняно із попередньою моделлю, додаємо тих, хто видужав, до групи сприятливих (наприклад, [79]).

Наступна модель SIRS (наприклад, [80]) передбачена для ситуації короткострокового імунітету. Тобто одужалі згодом повертаються до групи сприйнятливих. Тоді модель має вигляд системи нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\alpha(t)S(t)I(t) - \mu(N - S(t)) + \sigma R(t), \\ \dot{I}(t) = \alpha(t)S(t)I(t) - \beta(t)I(t) - \mu, \\ \dot{R}(t) = \beta(t)I(t) - \mu R(t) - \sigma R(t), \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (1.9)$$

де σ — середня швидкість втрати імунітету.

Якщо до базової моделі (1.6) додати компоненти, які відповідають за процеси народжуваності та смертності, то одержимо систему нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\alpha(t)S(t)I(t) - \mu_1(t)S(t) + \gamma(t), \\ \dot{I}(t) = \alpha(t)S(t)I(t) - \beta(t)I(t) - \mu_2(t)I(t), \\ \dot{R}(t) = \beta(t)I(t) - \mu_3(t)R(t), \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (1.10)$$

яка є SIR моделлю з врахуванням життєвого циклу населення, де $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\mu_3(t)$, $t \in (0, T)$ — параметри рівня смертності у відповідних групах; $\gamma(t)$, $t \in (0, T)$ — параметр народжуваності.

Це система нелінійних диференціальних рівнянь й немає узагальненого аналітичного розв'язку. Але коли виконується умова:

$$\dot{S}(t) + \dot{I}(t) + \dot{R}(t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (1.11)$$

то аналітичними методами можна отримати точний розв'язок для системи (1.6) та (1.10) з стаціонарними параметрами, що продемонстровано, наприклад, в роботах [56] та [71].

Також цікавими є стохастичні SIR моделі, наприклад, вигляду:

$$\begin{cases} dS(t) = (-\alpha(t)S(t)I(t) - \mu_1(t)S(t) + \gamma(t))dt - \\ \quad - \varphi S(t)I(t)dW(t), \\ dI(t) = (\alpha(t)S(t)I(t) - \beta(t)I(t) - \mu_2(t)I(t))dt + \\ \quad + \varphi S(t)I(t)dW(t), \\ dR(t) = (\beta(t)I(t) - \mu_3(t)R(t))dt, \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (1.12)$$

де $\varphi(t) > 0$, $t \in (0, T)$ — додатна функція; $W(t)$, $t \in (0, T)$ — вінерівський процес; $dW(t)$, $t \in (0, T)$ — стохастичний диференціал процесу $W(t)$, $t \in (0, T)$ в розумінні Іто.

Для стохастичних SIR моделей є низка робіт, в яких наведено аналіз стохастичної стійкості таких моделей та результати комп'ютерного статистичного моделювання ([60]-[63]).

Для дослідження процесу поширення інформації в соціумі доцільно також використовувати напрацювання теорії різницевих рівнянь. Найчастіше для даної задачі використовують системи різницевих рівнянь, отриманих з систем звичайних диференціальних рівнянь, або епідеміологічні моделі.

Одними з найбільш досліджуваними епідеміологічними моделями на основі різницевих рівнянь є SI та SIR, опис яких, наприклад, наведено в роботах [64]-[77].

На основі припущень, які формулюються для епідеміологічних моделей, запропонуємо модель поширення довільної кількості інформаційних повідомлень.

Позначимо через $S(k)$, $k = \overline{0, M}$ — кількість людей, що ще не засвоїли жодного інформаційного повідомлення, в момент часу k , $I_j(k)$, $j = \overline{1, N}$, $k = \overline{0, M}$ — кількість людей, що засвоїли j -е інформаційне повідомлення ($j = \overline{1, N}$) і поширюють його серед ще не охопленої частини соціуму, в момент часу k , $H(k)$, $k = \overline{0, M}$ — кількість осіб, що засвоїли повідомлення, але вже не поширюють його (перехворіли), в момент часу k . Тоді отримуємо таку систему різницевих рівнянь.

$$\begin{cases} S(k+1) = (1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j(k))S(k), \\ I_j(k+1) = \alpha_j(k)S(k) + \\ + (1 - \beta_j(k))I_j(k) + \gamma_1(k)H(k), \\ H(k+1) = \sum_{j=1}^N \beta_j(k)I_j(k) + \\ + (1 - \sum_{j=1}^N \gamma_j)H(k), \\ S(0) = S^0, I_j(0) = I_j^0, H(0) = H^0, j = \overline{1, N}, \end{cases} \quad k = \overline{0, M-1},$$

де $\alpha_j(k)$, $k = \overline{0, M}$ — інтенсивність, з якою відбувається зараження збудником хвороби в момент $k = \overline{0, M}$, $\beta_j(k)$, $k = \overline{0, M}$ — інтенсивність, з якою відбувається одужання в момент $k = \overline{0, M}$.

1.4.4 Імітаційні моделі процесу поширення інформації в соціумі на основі гібридних моделей

Дані моделі включають в себе поєднання декількох з вищенаведених підходів.

Розглянемо гібридну математичну модель, представлену в роботі [44].

Через $u(x, t) : (x, t) \rightarrow [0, 1]$, $t \in [0, T]$ позначається функція рівня розповсюдження інформаційного повідомлення в межах заданого соціуму обсягом x осіб, що не перевищує наперед визначеної величини A , $0 \leq x \leq A$.

Зміна впливу (концентрації) інформаційного повідомлення моделюється за допомогою рівняння дифузії. Цей процес аналогічний розповсюдженню деякої речовини протягом конкретного часового інтервалу $t \in [0, T]$ і може бути описаний рівнянням:

$$\frac{du(x,t)}{dt} = -k(t) \frac{d^2u(x,t)}{dx^2}, t \in [0, T],$$

з початковою умовою $u(x,0) = 0$ та крайовою умовою $u(A,t) = 1$, де $k(t)$, $t \in [0, T]$ — коефіцієнт, що характеризує вплив інформаційного повідомлення (аналог коефіцієнта дифузії) і є пропорційним швидкості зміни частини соціуму, що сприйняла інформаційне повідомлення.

Соціум розбивається на три підгрупи: на чутливих до інформаційного повідомлення $y_1(t)$, $t \in [0, T]$; тих, що вже сприйняли інформаційне повідомлення $y_2(t)$, $t \in [0, T]$; і байдужих до нього $y_3(t)$, $t \in [0, T]$. На основі моделі Кермана-Маккендріка записується система диференціальних рівнянь, що описує процес розповсюдження інформаційного повідомлення. Її розв'язки, відповідно, визначають кількість осіб в кожній з окремих підгруп:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 y_2, \\ \dot{y}_2 = y_1 - 1 y_2 - y_2, \\ \dot{y}_3 = y_2, \end{cases} t \in [0, T].$$

У силу такої постановки задачі величина A залежатиме від часу, при чому $A = A(t) = y_1(t) + y_2(t)$, $t \in [0, T]$. Крім цього припускається, що $k(t) = \mu = const$, $t \in [0, T]$.

Функція $u(x,t)$, $t \in [0, T]$ знаходиться у вигляді $u(x,t) = X(x(t))$, $t \in [0, T]$. Тоді для будь-якого моменту часу $t \in [0, T]$ величина рівня впливу інформаційного повідомлення обчислюється за формулами:

$$u(x,t) = \mu \left(1 - \exp \left\{ -\frac{x(t)}{\mu} \right\} \right),$$

$$0 \leq x(t) \leq y_1(t) + y_2(t), t \in [0, T].$$

Цей розв'язок може бути узагальнений за умов припущення, що частина групи, яка не сприйнятлива до інформаційного повідомлення, може через деякий час знову сприйняти його, збільшуючи кількість осіб в групі $y_1(t)$, $t \in [0, T]$. Цей процес періодично повторюється.

Аналіз подібних моделей наводився також в роботах [81]—[83]

1.5 Переваги та недоліки використання моделей популяційної динаміки

Визначення сильних сторін та обмежень підходу, що базується на моделях популяційної динаміки для аналізу соціальних мереж, виявляється критичним для розуміння придатності та ефективності цього методу. Моделі популяційної динаміки дозволяють розглядати взаємодії між учасниками мережі як процеси, що змінюються з часом, а також враховувати

динаміку зміни кількості та властивостей учасників. Проте, важливо врахувати як сильні сторони, так і обмеження такого підходу.

Сильні сторони: *Моделювання динаміки популяції:* Моделі популяційної динаміки дозволяють розглядати еволюцію мережі в часі, що є критичним для розуміння її структури та функціонування.

Врахування впливу зовнішніх факторів: Ці моделі можуть враховувати зовнішні впливи, такі як зміни в середовищі, технологічні інновації або соціально-економічні тенденції, що дозволяє прогнозувати реакцію мережі на такі зміни.

Аналіз стійкості та резистентності: Моделі популяційної динаміки дозволяють оцінити стійкість мережі до різних видів впливів та виявити ключові фактори, що впливають на її функціонування.

Обмеження:

Спрощена представлення реальності: Моделі популяційної динаміки часто ґрунтуються на спрощених припущеннях про поведінку учасників мережі, що може призвести до втрати важливих деталей та нюансів реальних соціальних процесів.

Потреба у великій кількості даних: Для ефективного застосування моделей популяційної динаміки потрібні обширні дані про учасників мережі, їхні взаємодії та характеристики, що може бути складним для збирання та аналізу.

Чутливість до параметрів: Деякі моделі можуть бути дуже чутливими до вибору параметрів, що може ускладнити їхнє використання та інтерпретацію результатів.

Розуміння сильних сторін та обмежень підходу, що базується на моделях популяційної динаміки, дозволяє ефективно використовувати цей метод для аналізу соціальних мереж та враховувати його обмеження при інтерпретації результатів.

Розділ 2. ОЦІНЮВАННЯ В ПОПУЛЯЦІЙНИХ МОДЕЛЯХ ПОШИРЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ

Однією із задач, яка виникає при розробці математичних моделей динамічних процесів, є побудова алгоритмів оцінювання параметрів моделі за умови наявності спостережень за досліджуваною системою.

Не менш важливою задачею, розв'язок якої дозволяє ефективно працювати з математичною моделлю поширення інформації у соціумі, є задача знаходження прогнозних оцінок. Цій проблематиці приділяється увага в роботах [88] - [92].

Постановки задач, що розглядаються в цьому розділі, були сформульовані в [93] - [97]. Основні результати розв'язку цих задач були опубліковані в роботах [98] - [103].

2.1 Оптимальні та гарантовані оцінки нестационарних параметрів диференціальних рівнянь

2.1.1 Випадок неперервних спостережень

Нехай на інтервалі $t \in (0, T)$ відстежується вектор-функція $x(t) \in R^N$, яка є узагальненим розв'язком рівняння:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t))\varphi(t) + f(t, x(t)) + \eta(t), t \in (0, T), \quad (2.1)$$

де $F(t, x(t))$, $t \in (0, T)$ — задана матрична функція розмірності $N \times M$, $f(t, x(t)) \in R^N$, $t \in (0, T)$ — задана вектор-функція, $\varphi(t) \in R^M$, $\eta(t) \in R^N$, $t \in (0, T)$ — невідомі вектор-функції.

Позначимо через $L_{2,M}(0, T)$ та $L_{2,N}(0, T)$ — простори вимірних інтегрованих з квадратом на $(0, T)$ функцій із просторів R^M та R^N відповідно. Припустимо, що $F(t, x(t))$ і $f(t, x(t))$, $t \in (0, T)$ — обмежені та неперервні на $(0, T)$ функції своїх аргументів, функція $\varphi(t) \in Q$, $t \in (0, T)$, де Q — клас $k - 1$ ($k > 1$) разів неперервно диференційованих вектор-функцій, для яких існує узагальнена похідна k -го порядку; також припустимо, що $\varphi(t)$, $t \in (0, T)$ належить простору $L_{2,M}(0, T)$, а функція $\eta(t)$, $t \in (0, T)$ — простору $L_{2,N}(0, T)$.

Означення 1. Під *узагальненим розв'язком* рівняння (2.1) з початковою умовою $x(0) = x^0$ розуміємо вектор-функцію $x(t)$, $t \in (0, T)$, яка є розв'язком інтегрального рівняння:

$$\begin{aligned} x(t) = x^0 + \int_0^t F(\tau, x(\tau))\varphi(\tau)d\tau + \\ + \int_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau + \tilde{\eta}(t), t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.2)$$

де

$$\tilde{\eta}(t) = \int_0^t \eta(\tau) d\tau, t \in (0, T).$$

Припускаємо, що розв'язок рівняння (2.2) існує та єдиний.

Задача полягає в знаходженні оптимальної в певному сенсі оцінки функції $\varphi(t) \in Q$, $t \in (0, T)$ із заданими спостереженнями $x(t)$, $t \in (0, T)$ та відомими обмеженнями на функції $\varphi(t)$ та $\eta_1(t)$, $t \in (0, T)$.

Припускаємо, що $(\varphi, \tilde{\eta}) \in G$, причому множина G задається у вигляді:

$$G = \{(\varphi, \tilde{\eta}) : \Phi(\varphi, \tilde{\eta}) \leq \gamma^2(T)\},$$

$$\Phi(\varphi, \tilde{\eta}) = \int_0^T q_1^2(\tau) |\varphi^{(k)}(\tau)|^2 d\tau + \int_0^T q_2^2(\tau) |\tilde{\eta}(\tau)|^2 d\tau,$$

де $q_i(t)$, $i = 1, 2$, $t \in (0, T)$ — неперервні на $(0, T)$ функції, такі що для деякого числового параметра $v > 0$ виконуються нерівності $q_i^2(t) \geq v$, $i = 1, 2$, $t \in (0, T)$; $\gamma^2(T)$ — відоме значення.

Теорема 1. У просторі $L_{2,M}(0, T)$ множина G є обмеженою.

Зауваження 1. Норма функції $\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2$ у просторі $L_{2,M}(0, T)$ може бути необмеженою, оскільки $\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 \in G$, і за рахунок довільних векторів c_s , $s = \overline{1, k-1}$.

Теорема 2. Має місце представлення:

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi^{(k)}(\tau) d\tau + \sum_{s=0}^{k-1} c_s t^s, t \in (0, T), \quad (2.3)$$

де $c_s = \varphi^{(s)}(0)$, $s = \overline{1, k-1}$.

Позначимо через $y(t)$, $t \in (0, T)$ та $\psi(t)$, $t \in (0, T)$ функції:

$$y(t) = x(t) - x(0) - \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, t \in (0, T),$$

$$\psi(t) = \int_0^t F(\tau, x(\tau)) \varphi(\tau) d\tau, t \in (0, T),$$

а через G_1 — множину вигляду:

$$G_1 = \{\varphi : \Phi(\varphi, y - \psi) \leq \gamma^2(T)\}.$$

Зауваження 2. Очевидно, що всі можливі функції $\varphi(t)$, $t \in (0, T)$ для спостережень за функціями $x(t)$, $t \in (0, T)$ належать множині G_1 .

Означення 2. Функцію $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0, T)$, яка знаходиться з умови $\hat{\varphi} \in \text{Arg} \min_{\varphi \in G_1} \Phi(\varphi, y - \psi)$, назовемо *оптимальною за функціоналом*.

Зауваження 3. Якщо функція $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0, T)$ існує, то $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0, T)$ належить множині G_1 .

Означення 3. Функцію $\hat{\varphi}_1(t)$, $t \in (0, T)$, що знаходиться з умови:

$$\inf_{\varphi_1 \in G_1} \sup_{\varphi_2 \in G_1} \|\varphi_1 - \varphi_2\| = \sup_{\varphi_2 \in G_1} \|\hat{\varphi}_1 - \varphi_2\| = \sigma,$$

де

$$\|\varphi\| = \left\{ \int_0^T |\varphi(\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2},$$

назвемо *гарантованою L_2 -оцінкою* функції $\varphi(t)$, $t \in (0, T)$, а величину σ — *гарантованою L_2 -похибкою* функції $\hat{\varphi}_1(t)$, $t \in (0, T)$.

Знайдемо спочатку оптимальну за функціоналом функцію $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0, T)$.

Лема 1. *Має місце рівність:*

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi, y - \psi) &= \int_0^T q_1^2(t) |u(t)|^2 dt + \\ &+ \int_0^T q_2^2(t) \left| y(t) - \int_0^T F_2(t, \tau) u(\tau) d\tau - \sum_{p=0}^{k-1} c_p g_p(t) \right|^2 dt, \end{aligned}$$

де

$$F_2(t, s) = \int_0^T \chi_{(0, \tau)}(s) \frac{(\tau - s)^{k-1}}{(k-1)!} F_1(t, \tau) d\tau, t, s \in (0, T),$$

$$F_1(t, \tau) = \chi_{(0, t)}(\tau) F(\tau, x(\tau)), t, \tau \in (0, T),$$

$$\chi_{(0, t)}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in (0, t), \\ 0, & \tau \notin (0, t), \end{cases} t, \tau \in (0, T),$$

$$g_p(t) = \int_0^T F_1(t, \tau) \tau^p d\tau, p = \overline{1, k-1}, t \in (0, T).$$

Позначимо далі $I(u, c)$ функціонал вигляду $I(u, c) = \Phi(\varphi, y - \psi)$, де $c = (c_0, \dots, c_{k-1})^*$.

Теорема 3. *Функція \hat{u}_c , $t \in (0, T)$ є єдиним розв'язком інтегрального рівняння:*

$$\begin{aligned} &q_1^2(t) \hat{u}_c(t) + \int_0^T \bar{F}_2(t, \tau) \hat{u}_c(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^T q_2^2(\tau) F_2^*(t, \tau) y(\tau) d\tau - \sum_{p=0}^{k-1} c_p g_{1p}(t), t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.4)$$

де

$$g_{1p}(t) = \int_0^T q_2^2(\tau) F_2^*(t, \tau) g_p(\tau) d\tau, p = \overline{0, k-1}, t \in (0, T),$$

$$\bar{F}_2(t, \tau) = \int_0^T q_2^2(s) F_2^*(t, s) F_2(t, \tau) ds, t, \tau \in (0, T).$$

Лема 2. *Існує єдина функція $\hat{u}_c(t)$, $t \in (0, T)$, така що $\hat{u}_c \in \text{Arg min}_u I(u, c)$, $\forall c$.*

Позначимо $\bar{u}_1(t)$, $t \in (0, T)$ розв'язок інтегрального рівняння вигляду:

$$\begin{aligned} q_1^2(t)\bar{u}_1(t) + \int_0^T \bar{F}_2(t, \tau)\bar{u}_1(\tau)d\tau = \\ = \int_0^T q_2^2(\tau)F_2^*(t, \tau)y(\tau)d\tau, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.5)$$

а через $U_p(t)$, $p = \overline{0, k-1}$, $t \in (0, T)$ — розв'язок системи інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} q_1^2(t)U_p(t) + \int_0^T \bar{F}_2(t, \tau)U_p(\tau)d\tau = \\ = -g_{1p}(t), p = \overline{0, k-1}, t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Лема 3. *Має місце рівність:*

$$\hat{u}(t) = \bar{u}_1(t) + \sum_{p=0}^{k-1} U_p(t)c_p, t \in (0, T). \quad (2.7)$$

Теорема 4. *Існує єдиний вектор з мінімальною нормою, такий що:*

$$\min_c I(\hat{u}_c, c) = I(\hat{u}_{\hat{c}}, \hat{c}).$$

Теорема 5. *Нехай $\bar{u}_1(t)$, $U_p(t)$, $p = \overline{0, k-1}$, $t \in (0, T)$ та вектор $\hat{c} = (\hat{c}_0, \dots, \hat{c}_{k-1})^*$ задовольняють системам рівнянь (2.5), (2.6). Тоді має місце рівність:*

$$\min_{u, c} I(u, c) = I(\hat{u}_{\hat{c}}, \hat{c}),$$

де

$$\hat{u}_{\hat{c}}(t) = \bar{u}_1(t) + \sum_{p=0}^{k-1} U_p(t)\hat{c}_p.$$

Наслідок 1. Оптимальна за функціоналом оцінка $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0, T)$ має вигляд:

$$\hat{\varphi}(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \hat{u}(s)ds + \sum_{p=0}^{k-1} \hat{c}_p t^p, t \in (0, T),$$

де

$$\hat{u}(s) = \bar{u}_1(s) + \sum_{p=0}^{k-1} U_p(s)\hat{c}_p, s \in (0, T).$$

Знайдемо далі умови обмеженості множини G_1 .

Лема 4. *Функціонал*

$$I(\varphi) = \int_0^T q_1^2(t)|\varphi^{(k)}|^2 dt + \int_0^T q_2^2(t)|y(t) - \Psi(t, \varphi)|^2 dt,$$

де

$$\Psi(t, \varphi) = \int_0^t F(\tau, x(\tau))\varphi(\tau)d\tau, t \in (0, T),$$

можна представити у вигляді:

$$I(\varphi) = I(\hat{\varphi}) + \int_0^T q_1^2(t)|(\varphi(t) - \hat{\varphi}(t))^{(k)}|^2 dt + \\ + \int_0^T q_2^2(t)|\Psi(t, \varphi - \hat{\varphi})|^2 dt = I(\hat{\varphi}) + I_1(\varphi - \hat{\varphi}),$$

де

$$I_1(\varphi) = \int_0^T q_1^2(t)|\varphi^{(k)}(t)|^2 dt + \int_0^T q_2^2(t)|\Psi(t, \varphi)|^2 dt.$$

Наслідок 2. Множина G_1 має вигляд:

$$G_1 = \{\varphi : I_1(\varphi - \hat{\varphi}) \leq \gamma^2(T) - I(\hat{\varphi})\}.$$

Теорема 6. Нехай існує число $\beta \neq 0$ таке, що виконується нерівність:

$$\int_0^T \int_0^T (K(t,s)\varphi(s), \varphi(s)) dt ds \geq \\ \geq \beta^2 \int_0^T |\varphi(t)|^2 dt, \forall \varphi(\cdot) \in L_{2,M}(0,T), \quad (2.8)$$

де

$$K(t,s) = \int_0^T q_2^2(\tau) F_1^*(t,\tau) F_1(t,s) d\tau, t,s \in (0,T).$$

Тоді множина G_1 обмежена.

Наслідок 3. Нехай виконується нерівність (2.8), тоді L_2 -похибка функції $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$, для якої проводиться спостереження, задовольняє нерівність:

$$\left\{ \int_0^T |\varphi(t) - \hat{\varphi}(t)|^2 dt \right\}^2 \leq \{\beta^{-2}(\gamma^2(T) - I(\hat{\varphi}))\}^2.$$

Теорема 7. Нехай множина G_1 — обмежена, тоді функція $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$ є гарантованою L_2 -оцінкою функції $\varphi(t)$, $t \in (0,T)$, і при цьому гарантована L_2 -похибка функції $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$ обчислюється за формулою:

$$\sigma = \sup_{\varphi \in G_2} \|\varphi\|(\gamma^2(T) - I(\hat{\varphi}))^2,$$

де

$$G_2 = \{\varphi : I_1(\varphi) \leq 1\}.$$

2.1.2 Випадок дискретних спостережень

Нехай в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_{m+1}$, $t_i \in (0,T)$, $i = \overline{1, m+1}$ спостерігаються вектори $x(t_j)$, $t_j \in (0,T)$, $j = \overline{1, m+1}$, для деяких значень $\varphi(t)$, $t \in (0,T)$ та η_j , $j = \overline{1, m+1}$, де $x(t_j)$, $t_j \in (0,T)$, $j = \overline{1, m+1}$ — розв'язок системи рівнянь:

$$x(t_j) = x^0 + \sum_{s=1}^m \chi_{(0,t_j)}(t_s) F(t_s, x(t_s)) \Delta t_s \varphi(t_s) +$$

$$+ \sum_{s=1}^m \chi_{(0,t_j)}(t_s) f(t_s, x(t_s)) \Delta t_s + \eta_j, t_j \in (0, T), j = \overline{1, m},$$

де $F_s = F(t_s, x(t_s)) \Delta t_s$, $t_s \in (0, T)$, $s = \overline{1, m}$ — відомі матриці розмірності $N \times M$, $f_s = f(t_s, x(t_s)) \Delta t_s$, $t_s \in (0, T)$, $s = \overline{1, m}$ — відомі вектор-функції з простору R^M .

Припустимо, що у функції $\varphi(t)$, $t \in (0, T)$ існує узагальнена похідна, яка належить простору $L_{2, M}(0, T)$, причому $\varphi(t)$, $t \in (0, T)$ належить множині G_1 , де

$$G_1 = \{\varphi : \Phi_1(\varphi) \leq \gamma_1^2(T)\},$$

$$\Phi_1(\varphi) = \int_0^T q_1^2(t) \left| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|^2 dt,$$

а $q_1^2(t)$ — відома функція, $\gamma_1(T)$ — відоме значення.

Нехай вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)^*$ належить множині G_2 , де

$$G_2 = \{\eta : \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 |\eta_j|^2 \leq \gamma_2^2(m)\},$$

де $\gamma_2(m)$, q_{2j}^2 , $j = \overline{1, m}$ — відомі значення.

Позначимо через G_3 множину вигляду:

$$G_3 = \{\varphi : \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 |y_j - \psi_j|^2 \leq \gamma_2^2(m)\} \cap G_1,$$

де

$$y_j = x(t_j) - x^0 - \sum_{s=1}^m \chi_{(0,t_j)}(t_s) f_s, j = \overline{1, m},$$

$$\psi_j = \sum_{s=1}^m \chi_{(0,t_j)}(t_s) F_s \varphi(t_s), j = \overline{1, m}.$$

Знайдемо оцінку оптимальну за функціоналом:

$$\Phi_2(\varphi) = \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 |y_j - \psi_j|^2.$$

Позначимо $u(t)$, $t \in (0, T)$ загальну похідну $\frac{d\varphi(t)}{dt}$, тоді

$$\varphi(t_j) = \int_0^{t_j} u(\tau) d\tau + c, t_j \in (0, T), j = \overline{1, m},$$

де c — довільний вектор.

Позначимо $I(u, c)$ функціонал $\Phi_2(\varphi)$.

Теорема 8. *Існує єдиний вектор з мінімальною нормою такий, що $\min_c I(u, c) = I(u, \hat{c})$, причому \hat{c} обчислюються за формулою:*

$$\hat{c} = A^+ b, \tag{2.9}$$

де

$$A = \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 L_j^* L_j, b = \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 L_j^* \bar{y}_j,$$

$$L_j = \sum_{s=1}^m \chi_{(0,t_j)}(t_s) F_s, \bar{y}_j = y_j - \int_0^T F_j(\tau) u(\tau) d\tau, j = \overline{1, m},$$

$$F_j(\tau) = \sum_{s=1}^m \chi_{(0,t_j)}(t_s) \chi_{(0,t_s)}(\tau) F_s, j = \overline{1, m}.$$

Уведемо позначення $I_1(u) = I(u, \hat{c})$.

Лема 5. Функціонал $I_1(u)$ має вигляд:

$$I_1(u) = \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 \left| y_{1j} - \int_0^T C_j(\tau) u(\tau) d\tau \right|^2,$$

де

$$y_{1j} = y_j - \sum_{s=1}^m q_{2s}^2 L_j A^+ L_s^* y_s, j = \overline{1, m},$$

$$C_j(\tau) = F_j(\tau) - \sum_{s=1}^m q_{2s}^2 L_j A^+ L_s^* F_s(\tau), j = \overline{1, m}, \tau \in (0, T).$$

Уведемо функціонал:

$$I_\alpha(u) = I_1(u) + \alpha^2 \int_0^T q_1^2(t) |u(t)|^2 dt.$$

Теорема 9. Існує число $\hat{\alpha}$ таке, що

$$\min_{u \in U} I_1(u) = \min_{u \in U} I_{\hat{\alpha}}(u) = I_{\hat{\alpha}}(\hat{u}_{\hat{\alpha}}),$$

де

$$U = \left\{ u : \int_0^T q_1^2(t) |u(t)|^2 dt \leq \gamma_1^2(T) \right\},$$

причому $\hat{\alpha} \equiv 0$, якщо задовольняється вираз:

$$\int_0^T q_1^2(t) |\hat{u}_0(t)|^2 dt \leq \gamma_1^2(T);$$

в протилежному разі $\hat{\alpha}$ можна знайти з умови

$$\int_0^T q_1^2(t) |\hat{u}_{\hat{\alpha}}(t)|^2 dt = \gamma_1^2(T).$$

Теорема 10. Існує єдина функція $\bar{u}(t)$, $t \in (0, T)$ така, що $\min_{u \in U} I_\alpha(u) = I_\alpha(\bar{u})$ для $\alpha > 0$, причому ця функція може бути знайдена як розв'язок інтегрального рівняння:

$$\alpha^2 q_1^2(t) \bar{u}(t) + \int_0^T \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 C_j^*(t) C_j(\tau) \bar{u}(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 C_j^*(t) y_{1j}, t \in (0, T). \quad (2.10)$$

Теорема 11. Нехай $\bar{u}(t)$, $t \in (0, T)$ — розв'язок інтегрального рівняння (2.10), тоді він має вигляд:

$$\alpha^2 q_1^2(t) \bar{u}(t) = - \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 C_j^*(t) \beta_j + \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 C_j^*(t) y_{1j}, t \in (0, T), \quad (2.11)$$

де вектори β_j , $j = \overline{1, m}$ є розв'язками систем лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\alpha^2 \beta_j + \sum_{s=1}^m D_{js} \beta_s = d_j, j = \overline{1, m}.$$

Тут

$$D_{js} = \int_0^T q_{2s}^2 q_1^{-2}(\tau) C_j(\tau) C_s^*(\tau) d\tau, j, s = \overline{1, m},$$

$$d_j = \sum_{s=1}^m D_{js} y_{1s}, j = \overline{1, m}.$$

Наслідок 4. Має місце рівність:

$$\hat{\varphi}(t) = \int_0^t \bar{u}(\tau) d\tau + \hat{c}, t \in (0, T),$$

де вектор \hat{c} знаходиться з систем рівнянь (2.9) для $u(t) = \bar{u}(t)$, $t \in (0, T)$, а функція $\bar{u}(t)$, $t \in (0, T)$ має вигляд (2.11).

Нехай функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$, $t \in (0, T)$ — вектор-функції з простору $L_{2, M}(0, T)$. Позначимо $I(\varphi)$, $I_1(\varphi)$ та $\sigma(\varphi)$ функціонали:

$$I(\varphi) = \gamma_1^{-2}(T) \Phi_1(\varphi) + \gamma_2^{-2}(m) \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 |y_j - \psi_j|^2,$$

$$I_1(\varphi) = \gamma_1^{-2}(T) \Phi_1(\varphi) + \gamma_2^{-2}(m) \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 |\psi_j|^2,$$

$$\sigma(\varphi) = \sup_{\psi \in \bar{G}} \|\varphi - \psi\|,$$

де

$$\bar{G} = \{\varphi : I_1(\varphi) \leq 1\},$$

а через G_- , G_+ — множини вигляду:

$$G_- = \{\varphi : I(\varphi) \leq 1\}, G_+ = \{\varphi : I(\varphi) \leq 2\}.$$

Лема 6. Припускається, що існує таке додатне число γ , що для нього виконується умова:

$$\sum_{j=1}^m q_{2j}^2 |\bar{\Psi}_j(c)|^2 \geq \gamma |c|^2, \forall c \in R^M,$$

де

$$\bar{\Psi}_j(c) = \sum_{s=1}^m \chi_{(0, t_j)}(t_s) F_s c, j = \overline{1, m}.$$

Тоді існує єдина функція $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0, T)$ така, що $\inf_{\varphi \in G_1} I(\varphi) = I(\hat{\varphi})$.

Наслідок 5. Має місце рівність

$$\hat{\varphi}(t) = \int_0^T \hat{u}(\tau) d\tau + \hat{c}, t \in (0, T),$$

де \hat{c} знаходимо із систем рівнянь (2.9) для $u(t) = \hat{u}(t)$, $t \in (0, T)$, а функцію $\hat{u}(t)$, $t \in (0, T)$ можна знайти з рівності:

$$\begin{aligned} (\gamma_2(m)/\gamma_1(T))^2 \hat{u}(t) = & - \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 C_j^*(t) \beta_j + \\ & + \sum_{j=1}^m q_{2j}^2 C_j^*(t) y_{1j}, t \in (0, T). \end{aligned}$$

Тут вектори β_j , $j = \overline{1, m}$ є розв'язками системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$(\gamma_2(m)/\gamma_1(T))^2 \beta_j + \sum_{s=1}^m D_{js} \beta_s = d_j, j = \overline{1, m}.$$

Лема 7. Множини G_- та G_+ можна представити також у вигляді:

$$G_- = \{\varphi : I_1(\varphi) \leq 1 - I(\hat{\varphi})\},$$

$$G_+ = \{\varphi : I(\varphi) \leq 2 - I(\hat{\varphi})\}.$$

Теорема 12. Мають місце нерівності:

$$\tilde{\sigma}(1 - I(\hat{\varphi}))^{1/2} \leq \inf_{\varphi \in \tilde{G}} \sigma(\varphi) \leq \tilde{\sigma}(2 - I(\hat{\varphi}))^{1/2},$$

де $\tilde{\sigma} = \sup_{\varphi \in \tilde{G}} \|\varphi\|$.

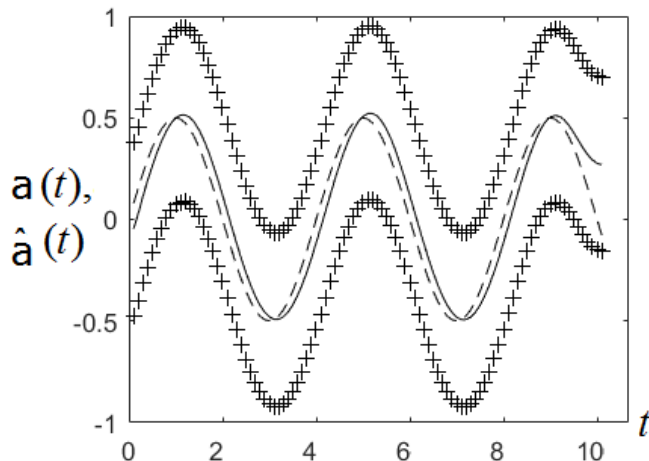
Зауваження 4. Оцінка $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0, T)$, що задовольняє умову $\hat{\varphi} \in \text{Arg min}_{\varphi \in \tilde{G}} I(\varphi)$, є наближеною до гарантованої оцінки функції $\varphi(t)$, $t \in (0, T)$.

Приклад 1. Як приклад наведемо результати оцінювання параметрів для системи диференціальних рівнянь поширення одного виду інформаційних повідомлень. Процес розповсюдження одного виду інформації в соціумі можна представити за допомогою рівняння

$$\dot{x}(t) = (a(t) + b(t)x(t))(L - x(t)), x(0) = x^0, t \in (0, T).$$

Нехай в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_{99} < 10$ спостерігаються вектори $x(t_j)$, $j = \overline{1, 99}$ — розв'язки системи рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_j) = & 20 + \sum_{s=1}^{98} \chi_{(0, t_j)}(t_s) (100 - x(t_s)) a(t_s) \Delta t + \\ & + 0.003 \sum_{s=1}^{98} \chi_{(0, t_j)}(t_s) (100 - x(t_s)) \Delta t + \eta_j, j = \overline{1, 98}, \end{aligned} \quad (2.12)$$



Малюнок 2.1 — Графік оцінки параметру зовнішнього спілкування математичної моделі (2.12) з відомими параметрами $q_1(t) = 1, t \in (0,10)$, $q_{2j} = 1, j = \overline{1,98}$, $\gamma_1(10) = 1.3$, $\gamma_2(98) = 1.5$ (штриховою лінією позначено $a(t)$, суцільною — $\hat{a}(t)$, $t \in (0,10)$, а позначками + — коридор похибки гарантованої L_2 -оцінки.

де $\Delta t = t_{i+1} - t_i, i = \overline{1,98}$, тобто на часовому проміжку $t \in (0,10)$ спостерігається система поширення одного виду інформації у спільноті чисельністю $L = 100$ осіб з відомим параметром інтенсивності спілкування $b(t) = 0.003, t \in (0,10)$, невідомим параметром зовнішнього впливу $a(t), t \in (0,10)$, та початковою умовою $x(0) = 20$. Результати побудови оптимальної оцінки $\hat{a}(t), t \in (0,10)$, з відомими параметрами $q_1(t) = 1, t \in (0,10)$, $q_{2j} = 1, j = \overline{1,98}$, $\gamma_1(10) = 1.3, \gamma_2(98) = 1.5$ для математичної моделі (2.12) за допомогою чисельних методів наведено на Мал. 2.1.

2.2 Гарантовані оцінки нестационарних параметрів різницевого рівняння в умовах невизначеності

2.2.1 Постановка задачі

Нехай спостерігаються вектори $x(k) \in R^N, N \geq 1, k = \overline{1, m+1}$ при невідомих параметрах $a_k \in R^M, M \geq 1, k = \overline{1, m}$, які є розв'язками різницевого рівняння:

$$x(k+1) = f(k, x(k))a_k + g(k, x(k)) + \eta_k, k = \overline{1, m},$$

де $f(k, x(k)), k = \overline{1, m}$ — задані матриці розмірності $N \times M$, $g(k, x(k)) \in R^N, k = \overline{1, m}$ — відомі вектори, $\eta_k, k = \overline{1, m}$ — невідомі вектори завад. Відомо, що $\Delta_+ a_k \in U_k \subseteq R^M, k = \overline{1, m-1}$, $\Delta_+ a_k = a_{k+1} - a_k, k = \overline{1, m-1}$. Припускаємо, що $\eta_k \in V_k \subseteq R^N, k = \overline{1, m}$.

Апостеріорна множина має вигляд:

$$G_a = \{a : (x(k+1) - f(k, x(k))a_k - g(k, x(k))) \in V_k, k = \overline{1, m},$$

$$\Delta_+ a_j = a_{j+1} - a_j, j = \overline{1, m-1}\},$$

де $a = (a_1, \dots, a_m)$.

Означення 4. Матриці $\bar{a} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) \in G_a$ назвемо *апостеріорними оцінками* матриці a .

Нехай G_a^- та G_a^+ множини, для яких виконуються умови $G_a^- \subseteq G_a \subseteq G_a^+$.

Означення 5. Матриці $a^- = (a_1^-, \dots, a_m^-) \in G_a^-$ та $a^+ = (a_1^+, \dots, a_m^+) \in G_a^+$ називаються *нижніми та верхніми апостеріорними оцінками* матриці a .

Нехай множини $U_j, j = \overline{1, m-1}$ та $V_k, k = \overline{1, m}$ — обмежені, тоді існують послідовності додатних скалярних величин $q_{1j}^- > 0, q_{1j}^+ > 0, j = \overline{1, m-1}, q_{2k}^- > 0, q_{2k}^+ > 0, k = \overline{1, m}$ та додатні числа $\gamma_1(m) > 0, \gamma_2(m) > 0$ такі, що :

$$G_a^- = \left\{ a : \sum_{k=1}^m q_{2k}^- |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}^- |\Delta_+ a_k|^2 \leq \gamma_1(m) \right\},$$

$$G_a^+ = \left\{ a : \sum_{k=1}^m q_{2k}^+ |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}^+ |\Delta_+ a_k|^2 \leq \gamma_2(m) \right\},$$

де

$$y(k) = x(k+1) - g(k, x(k)), f_k = f(k, x(k)), k = \overline{1, m}.$$

Для множин G_a^- та G_a^+ також справедливі представлення:

$$G_a^- = G_{a_1}^- \times \dots \times G_{a_m}^-, a_k^- \in G_{a_k}^-, k = \overline{1, m},$$

$$G_a^+ = G_{a_1}^+ \times \dots \times G_{a_m}^+, a_k^+ \in G_{a_k}^+, k = \overline{1, m}.$$

Уведемо функції:

$$\Phi^-(a) = \sum_{k=1}^m q_{2k}^- |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}^- |\Delta_+ a_k|^2, a \in G_a^-,$$

$$\Phi^+(a) = \sum_{k=1}^m q_{2k}^+ |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}^+ |\Delta_+ a_k|^2, a \in G_a^+.$$

Означення 6. *Верхні та нижні гарантовані оцінки* $\bar{a}^- = (\bar{a}_1^-, \dots, \bar{a}_m^-)$ та $\bar{a}^+ = (\bar{a}_1^+, \dots, \bar{a}_m^+)$ матриці a визначаються з умови:

$$\max_{\bar{a}_k^- \in G_{a_k}^-} \|\bar{a}_k^- - a_k^-\| = \min_{a_k \in G_{a_k}^-} \max_{\bar{a}_k^- \in G_{a_k}^-} \|a_k - \bar{a}_k^-\| = \sigma_k^-, k = \overline{1, m},$$

$$\max_{\bar{a}_k^+ \in G_{a_k}^+} \|\bar{a}_k^+ - a_k^+\| = \min_{a_k \in G_{a_k}^+} \max_{\bar{a}_k^+ \in G_{a_k}^+} \|a_k - \bar{a}_k^+\| = \sigma_k^+, k = \overline{1, m},$$

а величини σ_k^- та $\sigma_k^+, k = \overline{1, m}$ називаються *верхніми та нижніми похибками оцінювання*.

Лема 8. *Має місце представлення:*

$$G_a^- = \{a : (A^-(a - \bar{a}^-), a - \bar{a}^-) \leq \gamma_1(m) - \Phi^-(\bar{a}^-)\},$$

$$G_a^+ = \{a : (A^+(a - \bar{a}^+), a - \bar{a}^+) \leq \gamma_2(m) - \Phi^+(\bar{a}^+)\},$$

де матриці $A^- = \{A_{ij}^-\}_{i,j=1}^m$ та $A^+ = \{A_{ij}^+\}_{i,j=1}^m$ є трьохдіагональними, причому:

$$A_{11}^- = q_{11}^- + q_{21}^- f_1^* f_1, A_{12}^- = -q_{11}^-,$$

$$A_{11}^+ = q_{11}^+ + q_{21}^+ f_1^* f_1, A_{12}^+ = -q_{11}^+,$$

$$A_{k,k-1}^- = -q_{1,k-1}^-, A_{kk}^- = q_{1,k-1}^- + q_{1k}^- + q_{2k}^- f_k^* f_k, k = \overline{2, m-1},$$

$$A_{k,k-1}^+ = -q_{1,k-1}^+, A_{k,k-1}^+ = -q_{1,k-1}^+, k = \overline{2, m-1},$$

$$A_{kk}^+ = q_{1,k-1}^+ + q_{1k}^+ + q_{2k}^+ f_k^* f_k, A_{k,k-1}^+ = -q_{1,k-1}^+, k = \overline{2, m-1},$$

$$A_{m,m-1}^- = -q_{1,m-1}^-, A_{mm}^- = q_{1,m-1}^- + q_{2m}^- f_m^* f_m,$$

$$A_{m,m-1}^+ = -q_{1,m-1}^+, A_{mm}^+ = q_{1,m-1}^+ + q_{2m}^+ f_m^* f_m.$$

Теорема 13. *Справедливі рівності:*

$$\sigma_k^- = \lambda_{max}^{1/2}(H_k(A^-)^{-1} H_k^*)(\gamma_1(m) - \Phi^-(\bar{a}^-))^{1/2}, k = \overline{1, m},$$

$$\sigma_k^+ = \lambda_{max}^{1/2}(H_k(A^+)^{-1} H_k^*)(\gamma_2(m) - \Phi^+(\bar{a}^+))^{1/2}, k = \overline{1, m},$$

де $\lambda_{max}(H_k(A^\pm)^{-1} H_k^*)$ – максимальні власні числа матриць $H_k(A^\pm)^{-1} H_k^*$, $k = \overline{1, m}$, а H_k , $k = \overline{1, m}$ – оператори проектування, для яких виконуються умови:

$$H_k a = a_k, k = \overline{1, m}.$$

При обмежених множинах U_j , $j = \overline{1, m-1}$ та V_k , $k = \overline{1, m}$, множину G_a можна представити у вигляді:

$$G_a = \left\{ a : \sum_{k=1}^m q_{2k} |x(k+1) - f(k, x(k)) a_k - g(k, x(k))|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k} |a_{k+1} - a_k|^2 \leq \beta \right\}, \quad (2.13)$$

де q_{1j} , $j = \overline{1, m-1}$ та q_{2k} , $k = \overline{1, m}$, β – відомі скалярні величини.

Для множини G_a також справедливе представлення:

$$G_a = G_{a_1} \times \cdots \times G_{a_m}, a_k \in G_{a_k} \subseteq R^M, k = \overline{1, m}.$$

Уведемо функцію вигляду:

$$\Phi(a) = \sum_{k=1}^m q_{2k} |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k} |a_{k+1} - a_k|^2. \quad (2.14)$$

Означення 7. Матрицю $\hat{a} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m)$, яка знаходиться з умови $\hat{a} \in \text{Arg} \min_{a \in G_a} \Phi(a)$, назвемо *оптимальною оцінкою* за функцією $\Phi(a)$.

Означення 8. Назвемо *гарантованою оцінкою* параметрів a_k , $k = \overline{1, m}$ матрицю $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$, яка знаходиться з умови:

$$\max_{a'' \in G_a} \|\tilde{a} - a''\| = \min_{a' \in G_a} \max_{a'' \in G_a} \|a' - a''\| = \sigma,$$

а σ назвемо *похибкою гарантованої оцінки* \tilde{a} (тут $\|A\| = \{SpAA^*\}^{1/2}$).

Уведемо матрицю $u = (u_1, \dots, u_{m-1})$, $u_j = a_{j+1} - a_j$, $j = \overline{1, m-1}$, $a_1 \in G_{a_1}$ і позначимо через G_1 множину:

$$G_1 = \left\{ (u, a_1) : \sum_{k=1}^m q_{2k} |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k} |u_k|^2 \leq \beta \right\}.$$

Множину G_1 можна також представити у вигляді:

$$G_1 = U_{(1)} \times \dots \times U_{(m-1)} \times G_{a_1},$$

$$u_i \in U_{(i)} \subseteq R^M, i = \overline{1, m-1}.$$

Задача знаходження оптимальної за функцією $\Phi(a)$ оцінки \hat{a} еквівалентна задачі знаходження $(\hat{u}, \hat{a}_1) \in \text{Arg} \min_{(u, a_1) \in G_1} I(u, a_1)$, де

$$I(u, a_1) = \sum_{k=1}^m q_{2k} |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k} |u_k|^2. \quad (2.15)$$

2.2.2 Знаходження гарантованих оцінок параметрів різницевого рівнянь

Спочатку знайдемо оптимальну за функцією $\Phi(a)$ оцінку \hat{a} .

Теорема 14. *Оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка \hat{a} обчислюється за формулою:*

$$\hat{a} = A^{-1}b, \quad (2.16)$$

де $A = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^m$ — *трьохдіагональна матриця з елементами:*

$$A_{k,k-1} = -q_{1,k-1}, A_{k,k} = q_{1,k-1} + q_{1,k} + q_{2k} f_k^* f_k, k = \overline{2, m-1},$$

$$A_{k,k+1} = -q_{1k}, k = \overline{2, m-1},$$

$$A_{11} = q_{11} + q_{21} f_1^* f_1, A_{12} = -q_{11},$$

$$A_{m,m-1} = -q_{m,m-1}, A_{m,m} = q_{m,m-1} + q_{2m} f_m^* f_m;$$

$$b = (q_{21} f_1^* y(1) \dots q_{2k} f_k^* y(k) \dots q_{2m} f_m^* y(m))^*.$$

Лема 9. Множину G_a можна записати також у вигляді:

$$G_a = \{a : (A(a - \hat{a}), a - \hat{a}) \leq \beta - \Phi(\hat{a})\}.$$

Теорема 15. Оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка \hat{a} є гарантованою оцінкою для матриці a , і при цьому для похибки гарантованої оцінки справедлива рівність:

$$\sigma = \lambda_{\max}^{1/2}(A^{-1})(\beta - \Phi(\hat{a}))^{1/2},$$

де $\lambda_{\max}(A^{-1})$ найбільше власне число матриці A^{-1} .

2.2.3 Інтерполяція параметрів різницевих рівнянь

В цьому розділі задачу знаходження гарантованої оцінки \bar{a} на основі спостережень $x(k)$, $k = \overline{1, m+1}$ розв'яжемо за допомогою функцій Беллмана.

Теорема 16. Оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка \hat{a} знаходиться за формулами:

$$\hat{a}_{j+1} = \hat{a}_j + \hat{u}_j, j = \overline{1, m-1}; \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 = & [q_{22}(E + A_2^* D_2^*) f_2^* f_2 (E + D_2 A_2) + q_{21} f_1^* f_1 + \\ & + \sum_{k=3}^m q_{2k} W_{k2}^* f_k^* f_k W_{k2} + \sum_{k=3}^{m-1} q_{1k} W_{k2}^* A_{k+1}^* D_{k+1}^* D_{k+1} A_{k+1} W_{k2} + \\ & + q_{11} A_2^* D_2^* D_2 A_2 + q_{12} (E + A_2^* D_2^*) A_3^* D_3^* D_3 A_3 (E + D_2 A_2)]^{-1} \times \\ & \times [q_{21} f_1^* y(1) + q_{22} (E + A_2^* D_2^*) f_2^* (y(2) - f_2 D_2 \varphi_2) + \\ & + \sum_{k=3}^m q_{2k} W_{k2}^* f_k^* (y(k) - f_k D_k \varphi_k - f_k \sum_{j=k}^3 W_{kj} D_{j-1} \varphi_{j-1}) - \\ & - \sum_{k=3}^{m-1} q_{1k} W_{k2}^* A_{k+1}^* D_{k+1}^* Z_{k+1} - q_{11} A_2^* D_2^* D_2 \varphi_2 - \\ & - q_{12} (E + A_2^* D_2^*) A_3^* D_3^* (D_3 \varphi_3 + D_3 A_3 D_2 \varphi_2)]; \\ \hat{u}_k = & D_{k+1} (\varphi_{k+1} + A_{k+1} \hat{a}_k), k = \overline{1, m-1}; \\ \varphi_k = & -2q_{2k} f_k^* y(k) + 2q_{1k} A_{k+1}^* D_{k+1}^* Q_{k+1} + \\ & + S_{k+1}^* A_{k+1} Q_{k+1} + S_{k+1}^* \varphi_{k+1}, k = \overline{m-1, 1}; \\ P_k = & q_{2k} f_k^* f_k + q_{1k} A_{k+1}^* D_{k+1}^* D_{k+1} A_{k+1} + \\ & + S_{k+1}^* P_{k+1} S_{k+1}, k = \overline{m-1, 1}, \\ P_m = & q_{2m} f_m^* f_m, \varphi_m = -2q_{2m} f_m^* y(m); \\ A_{k+1} = & P_{k+1}^* + P_{k+1}, k = \overline{m-1, 1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{k+1} &= -(2q_{1k}E + A_{k+1})^{-1}, k = \overline{m-1, 1}; \\
S_{k+1} &= E + D_{k+1}A_{k+1}, k = \overline{m-1, 1}; \\
Q_{k+1} &= D_{k+1}\varphi_{k+1}, k = \overline{m-1, 1}; \\
W_{ki} &= \prod_{j=i}^k E + D_j A_j, k, i = \overline{3, m-1}; \\
Z_{k+1} &= D_{k+1}(\varphi_{k+1} + A_{k+1}D_k\varphi_k + \\
&+ A_{k+1} \sum_{j=k}^3 W_{kj} D_{j-1} \varphi_{j-1}), k = \overline{3, m-1};
\end{aligned}$$

де E – одинична матриця розмірності $M \times M$.

2.2.4 Мінімаксні оцінки параметрів різницевих рівнянь

В цьому розділі задачу знаходження гарантованої оцінки \hat{a} на основі спостережень $x(k)$, $k = \overline{1, m-1}$ розв'яжемо шляхом реалізації наступної багатокрокової процедури. На j -у кроці ($j = \overline{1, m-1}$) відбувається пошук оцінки \hat{a}_{j+1} на основі оцінки \hat{a}_j та спостережень $x(j)$ та $x(j+1)$ з використанням фільтра Каллмана Бюсі.

Для спрощення, припускаємо $a_1 = 0$. Покладемо $\hat{a}_1 = 0$ та позначимо $I(u, \hat{a}_1) = I(u)$.

Знайдемо $\hat{u} \in \text{Arg} \min_{u \in U_{(1)} \times \dots \times U_{(m-1)}} I(u)$ із співвідношення:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} I(\hat{u} + v\tau)|_{\tau=0} &= - \sum_{k=1}^m q_{2k}(y(k) - f_k \hat{a}_k, f_k \bar{a}_k) + \\
&+ \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}(\hat{u}_k, v_k) = 0,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

де $\bar{a}_{k+1} = \bar{a}_k + v_k$, $k = \overline{1, m-1}$, $\bar{a}_1 = 0$; $v \in R^{M \times (m-1)}$.

Визначимо оператори Δ_+ та Δ_- за правилами:

$$\Delta_+ u_j = u_{j+1} - u_j, j = \overline{1, m-2},$$

$$\Delta_- u_j = u_j - u_{j-1}, j = \overline{2, m-1},$$

та позначимо:

$$\Delta_- \hat{p}_k = q_{2k} f_k^*(y(k) - f_k \hat{a}_k), k = \overline{1, m-1}, \hat{p}_m = 0.$$

Тоді вираз (2.18) набуде вигляду:

$$- \sum_{k=1}^m q_{2k}(y(k) - f_k \hat{a}_k, f_k \bar{a}_k) + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}(\hat{u}_k, v_k) =$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{k=1}^m (\Delta_- \hat{p}_k, \bar{a}_k) + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}(\hat{u}_k, v_k) = \\
&= - \left[-\hat{p}_0 \bar{a}_1 + \hat{p}_m \bar{a}_m - \sum_{k=1}^{m-1} (\hat{p}_k, \Delta_+ \bar{a}_k) \right] + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}(\hat{u}_k, v_k) = \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} (\hat{p}_k, v_k) + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}(\hat{u}_k, v_k) = 0.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

З (2.19) отримаємо рівності:

$$\hat{u}_k = -(q_{1k})^{-1} \hat{p}_k, k = \overline{1, m-1}.$$

Отже, оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка $\hat{a} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m)$ знаходиться за формулами:

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k - (q_{1k})^{-1} \hat{p}_k, k = \overline{1, m-1}, \hat{a}_1 = 0.$$

Спряжена система для (2.19) має вигляд:

$$\begin{cases} \hat{p}_{k-1} = \hat{p}_k - q_{2k} f_k^*(y(k) - f_k \hat{a}_k), k = \overline{m, 1}, \hat{p}_m = 0, \\ \hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k - (q_{1k})^{-1} \hat{p}_k, k = \overline{1, n-1}, \hat{a}_1 = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Уведемо функцію

$$I_1(w) = \sum_{k=1}^m (q_{2k})^{-1} |w_k|^2 + \sum_{k=1}^m (q_{1k})^{-1} |z_k|^2, \tag{2.21}$$

(тут $z_{k-1} = z_k + f_k^* w_k$, $k = \overline{m, 1}$, $z_m = \alpha$, $\alpha \in R^M$; $w = (w_1, \dots, w_m)$, $w_k \in R^N$, $k = \overline{1, m}$).

Для того щоб знайти $\hat{w} \in \text{Arg} \min_{w \in R^N \times \dots \times R^N} I_1(w)$, де $\hat{w} = (\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_m)$, обчислимо похідну та прирівняємо її до нуля:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} I_1(\hat{w} + \tau v) |_{\tau=0} &= \sum_{k=1}^m (q_{2k})^{-1} (\hat{w}_k, v_k) + \\
&+ \sum_{k=1}^m (q_{1k})^{-1} (\hat{z}_k, \tilde{z}_k) = 0,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

де $\tilde{z}_{k-1} = \tilde{z}_k + f_k^* v_k$, $k = \overline{m, 2}$, $\tilde{z}_m = 0$; $v = (v_1, \dots, v_m)$, $v_k \in R^N$, $k = \overline{1, m}$.

Позначимо

$$\Delta_+ \tilde{p}_k = (q_{1k})^{-1} \hat{z}_k, k = \overline{1, N}, \tilde{p}_1 = 0.$$

Отже, (2.22) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^m (q_{2k})^{-1} (\hat{w}_k, v_k) + \sum_{k=1}^m (q_{1k})^{-1} (\hat{z}_k, \tilde{z}_k) = \\
&= \sum_{k=1}^m (q_{2k})^{-1} (\hat{w}_k, v_k) + \sum_{k=1}^m (\Delta_+ \tilde{p}_k, \tilde{z}_k) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^m (q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k, v_k) + \left[-\tilde{p}_1 \tilde{z}_1 + \tilde{p}_{m+1} \tilde{z}_m - \sum_{k=2}^m (\tilde{p}_k, \Delta_- \tilde{z}_k) \right] = \\
&= \sum_{k=1}^m (q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k, v_k) - \sum_{k=2}^m (\tilde{p}_k, \Delta_- \tilde{z}_k) - \tilde{p}_1(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_0) = \\
&= \sum_{k=1}^m (q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k, v_k) - \sum_{k=1}^m (\tilde{p}_k, \Delta_- \tilde{z}_k) = \\
&= \sum_{k=1}^m (q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k, v_k) + \sum_{k=1}^m (\tilde{p}_k, f_k^* v_k) = \\
&= \sum_{k=1}^m (q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k, v_k) + \sum_{k=1}^m (f_k \tilde{p}_k, v_k) = 0.
\end{aligned}$$

З останньої рівності отримуємо:

$$\hat{w}_k = -q_{2k} f_k \tilde{p}_k, k = \overline{1, m}. \quad (2.23)$$

Мінімізуючи функції (2.21), одержимо систему вигляду:

$$\begin{cases} \hat{z}_{k-1} = \hat{z}_k + f_k^* w_k, k = \overline{m, 1}, \hat{z}_m = \alpha, \\ \tilde{p}_{k+1} = \tilde{p}_k + (q_{1k})^{-1} \hat{z}_k, k = \overline{1, m}, \tilde{p}_1 = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Теорема 17. *Оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка \hat{a} знаходиться за формулами:*

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k + F_k(y(k) - f_k \hat{a}_k), \hat{a}_1 = 0, k = \overline{1, m-1}, \quad (2.25)$$

де

$$\begin{aligned}
F_k &= P_k f_k^* (f_k p_k f_k^* + (q_{2k})^{-1} E)^{-1}, k = \overline{1, m-1}, \\
P_{k+1} &= (E - F_k f_k) P_k (E - F_k f_k)^* + (q_{1k})^{-1} E + \\
&\quad + (q_{2k})^{-1} F_k F_k^*, P_1 = 0, k = \overline{1, m-2}.
\end{aligned}$$

2.3 Оцінки впливів в моделях поширення інформації із нестационарними параметрами

Розглядається деяка соціальна група чисельністю L осіб, на яку провадиться інформаційна дія протягом часового проміжку $(0, T)$ з одного з двох інформаційних джерел, причому число суб'єктів, що сприйняли інформацію i -го типу ($i = 1, 2$) залежить як від зовнішнього впливу, так і від спілкування суб'єктів між собою. Позначимо через $x_i(t) \in R^1, t \in (0, T)$, $i = 1, 2$ число суб'єктів, що сприйняли інформацію i -го типу в момент $t \in (0, T)$, через $a_i(t), t \in (0, T)$ — інтенсивність спілкування, $u_i(t), t \in (0, T)$ — зовнішні впливи, $c_i(t), t \in (0, T)$ — інтенсивність зовнішнього i -го впливу. Тоді зміну з часом величин $x_i(t), t \in (0, T), i = 1, 2$ можливо описати системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i(t) &= a_i(t)x_i(t)(L - x_1(t) - x_2(t)) + \\
&\quad + c_i(t)u_i(t), x_i(0) = x_i^0, i = 1, 2.
\end{aligned} \quad (2.26)$$

2.3.1 Припущення та позначення

Розглянемо випадок, коли для системи (2.26) відомі функції $a_i(t)$, $c_i(t)$, $i = 1, 2$, $u_2(t)$, $t \in (0, T)$, які є неперервними на $(0, T)$; $u_1(t)$, $t \in (0, T)$ — невідома функція зовнішнього впливу, що задовольняє умову $u_1(t) \geq 0$ на часовому проміжку $(0, T)$.

Нехай в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, $t_k \in (0, T)$, $k = \overline{1, m}$ спостерігаються функції $x_1(t)$ та $x_2(t)$, $t \in (0, T)$ при певній $u_1(t)$, $t \in (0, T)$:

$$y_{ik} = x_i(t_k) + \eta_{ik}, k = \overline{1, m}, i = 1, 2,$$

де η_{ik} , $k = \overline{1, m}$, $i = 1, 2$ — похибки вимірювань.

Уведемо позначення $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{im})^*$, $x_i = (x_i(t_1), \dots, x_i(t_m))^*$, $\eta_i = (\eta_{i1}, \dots, \eta_{im})^*$, $i = 1, 2$.

Відомо, що $u_1(t)$, $t \in (0, T)$ та η_{ik} , $k = \overline{1, m}$, $i = 1, 2$ належать множині:

$$G = \{(\eta_1, \eta_2, u_1) : F_1(\eta_1) + F_2(\eta_2) + F_3(u_1(\cdot)) \leq \gamma^2(T), u_1(t) \geq 0\},$$

де

$$F_i(\eta_i) = \sum_{k=1}^m q_{1ik}^2 \eta_{ik}^2, i = 1, 2,$$

$$F_3(u_1(\cdot)) = \int_0^T q_2^2(t) u_1(t) dt,$$

і q_{1ik}^2 , $i = 1, 2$, $\gamma^2(T)$, — відомі скалярні величини, а $q_2^2(t)$, $t \in (0, T)$ — відома функція.

Апостеріорна множина G_y має вигляд:

$$G_y = \{u_1 : F_1(y_1 - x_1(\cdot)) + F_2(y_2 - x_2(\cdot)) + F_3(u_1(\cdot)) \leq \gamma^2(T), u_1(t) \geq 0\},$$

де

$$F_i(y_i - x_i) = \sum_{k=1}^m q_{1ik}^2 (y_{ik} - x_i(t_k))^2, i = 1, 2,$$

Означення 9. Функцію $u_1(t) \in G_y$, $t \in (0, T)$ назовемо *апостеріорною оцінкою* функції $u_1(t)$, $t \in (0, T)$.

Означення 10. Функцію $\tilde{u}_1(t) \in G_y$, $t \in (0, T)$, що знаходиться з умови:

$$\inf_{u_1 \in G_y} \sup_{v_1 \in G_y} \|u_1 - v_1\| = \sup_{v_1 \in G_y} \|\tilde{u}_1 - v_1\| = \sigma,$$

де

$$\|v\| = \left\{ \int_0^T (v(\tau))^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}},$$

назовемо *гарантованою оцінкою* функції $u_1(t)$, $t \in (0, T)$, а величину σ — *гарантованою похибкою оцінки* $\tilde{u}_1(t)$, $t \in (0, T)$.

Позначимо

$$I(u_1(\cdot)) = F_1(y_1 - x_1) + F_2(y_2 - x_2) + F_3(u_1(\cdot)).$$

Означення 11. Апостеріорну оцінку $\hat{u}_1(t) \in G_y$, $t \in (0, T)$ назвемо *оптимальною оцінкою* за функціоналом $I(u_1(\cdot))$, якщо вона задовольняє умову:

$$\inf_{u_1 \in G_y} I(u_1(\cdot)) = I(\hat{u}_1(\cdot)).$$

2.3.2 Оцінки впливів для випадку спостереження за кількістю прихильників одного інформаційного потоку та відомими параметрами системи

Припустимо, що для системи (2.26) параметри $a_1(t)$, $c_1(t)$ — відомі, неперервні на $(0, T)$ функції; $u_1(t)$, $t \in (0, T)$ — невідома функція зовнішнього впливу; а $x_2(t)$, $t \in (0, T)$ відома функція.

Дослідимо проблему знаходження оптимальної за деяким функціоналом апостеріорної оцінки функції $u_1(t)$, $t \in (0, T)$ при відомій функції $x_2(t)$, $t \in (0, T)$ та спостереженнях за $x_1(t, u_1(\cdot))$, в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_m, t_k \in (0, T)$, $k = \overline{1, m}$:

$$y_{1k} = x_1(t_k, u_1(\cdot)) + \eta_{1k}, k = \overline{1, m},$$

де $\eta_{1k} \in R^1$ — похибки спостережень.

Тоді $x_1(t, u_1(\cdot))$ задовольняє рівняння з початковою умовою:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t, u_1(\cdot)) &= \tilde{a}_1(t)x_1(t, u_1(\cdot)) - a_1(t)x_1^2(t, u_1(\cdot)) + \\ &+ c_1(t)u_1(t), x_1(0) = x_1^0, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.27)$$

де

$$\tilde{a}_1(t) = a_1(t)(L - x_2(t)), t \in (0, T).$$

Апостеріорна множина у цьому випадку:

$$G_{y_1} = \{u_1(\cdot) : I_{y_1}(u_1(\cdot)) \leq \gamma_{y_1}^2(T)\},$$

де

$$\begin{aligned} I_{y_1}(u_1(\cdot)) &= F_1(y_1 - x_1) + F_3(u_1(\cdot)) = \\ &= \sum_{k=1}^m q_{11k}^2 (y_{1k} - x_1(t_k, u_1(\cdot)))^2 + \int_0^T q_{21}^2(t) u_1^2(t) dt \end{aligned} \quad (2.28)$$

і q_{11k}^2 , $\gamma_{y_1}^2(T)$ — відомі скалярні величини, а $q_{21}^2(t)$, $t \in (0, T)$ — відома функція.

Тоді $x_1(t, u_1(\cdot))$, $t \in (0, T)$ є розв'язком задачі Коші:

$$\dot{x}_1(t, u_1(\cdot)) = a_1(t)x_1(t, u_1(\cdot))(L_1(t) - x_1(t, u_1(\cdot))) +$$

$$+c_1(t)u_1(t), x_1(0) = x_1^0, t \in (0, T), \quad (2.29)$$

де

$$L_1(t) = L - x_2(t), t \in (0, T).$$

Теорема 18. На множині G_{y_1} існує оптимальна за функціоналом $I_{y_1}(u_1(\cdot))$ функція $\hat{u}_1(t)$, $t \in (0, T)$, яка є розв'язком варіаційної нерівності:

$$I'_{y_1}(\hat{u}_1(\cdot))(v(\cdot) - \hat{u}_1(\cdot)) \geq 0, \text{ майже скрізь для } \forall v(\cdot) \in L_2^+(0, T),$$

де

$$\begin{aligned} I'_{y_1}(\hat{u}_1(\cdot)) &= \sum_{k=1}^m q_{11k}^2 (y_{1k} - x_1(t_k, \hat{u}_1(\cdot))) \times \\ &\quad \times \chi_{(0, t_k)}(t) c_1(t) \beta(t, t_k) + q_{21}^2(t) \hat{u}_1(t), \\ \chi_{(0, t)}(\tau) &= \begin{cases} 1, & \tau \in (0, t), \\ 0, & \tau \notin (0, t), \end{cases} \quad x_0(t) = x_1(t, \hat{u}_1(\cdot)), t \in (0, T), \\ \beta(\tau, t) &= \exp \left\{ \int_0^T \chi_{(\tau, t)}(s) a_1(s) (L_1(s) - 2x_0(s)) ds \right\}, \tau, t \in (0, T). \end{aligned}$$

Зауваження 5. Нехай $\hat{u}_1(\cdot) \in \text{Arg} \min_{u_1 \in L_2[0, T]} I(u_1(\cdot))$, і припустимо, що $\hat{u}_1(t) > 0$, $t \in (0, T)$. Тоді виконується рівність:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\sum_{k=1}^m q_{11k}^2 (y_{1k} - x_1(t_k, \hat{u}_1(\cdot))) \chi_{(0, t_k)}(t) c_1(t) \beta(t, t_k) \right) dt + \\ &\quad + \int_0^T q_{21}^2(t) \hat{u}_1(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Зауваження 6. Для апостеріорної оцінки $\hat{u}_1(\cdot) \in G_{y_1}$ функції $u_1(t)$, $t \in (0, T)$, яка є оптимальною за функціоналом $I_{y_1}(u_1(\cdot))$, гарантована похибка обчислюється за формулою:

$$\sigma = \left\{ \sup_{v \in G_y} \int_0^T (\hat{u}_1(t) - v(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

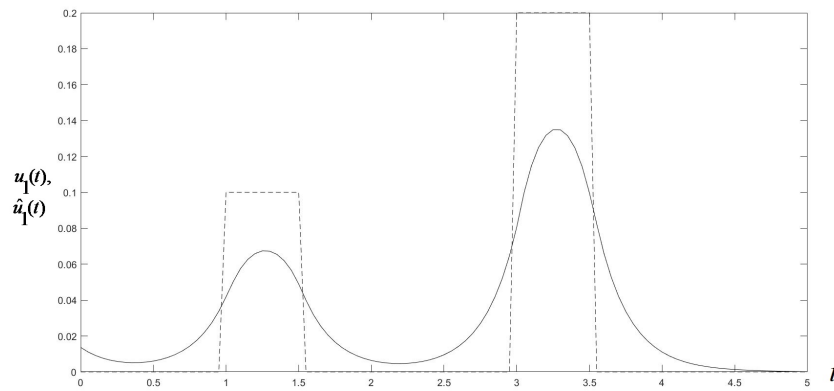
Приклад 2. Розглянемо окремий випадок системи (2.27):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0.8x_1(t)(1 - x_1(t) - x_2(t)) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = 0.4x_2(t)(1 - x_1(t) - x_2(t)) + 0.05 \sin(0.5t), \\ x_1(0) = 0.4, x_2(0) = 0.3, t \in (0; 5), \end{cases} \quad (2.30)$$

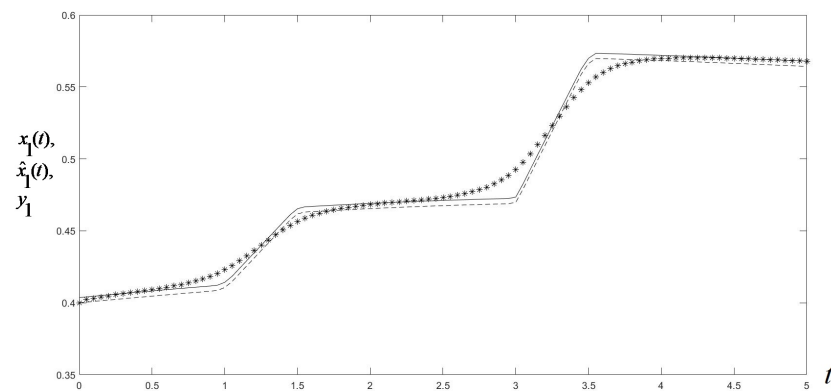
де

$$u_1(t) = \begin{cases} 0.1, & t \in [1; 1.5], \\ 0.2, & t \in [3; 3.5], \\ 0, & t \notin [3; 3.5] \cap [3; 3.5], \end{cases}$$

Покладемо $N = 101$, $t_{i+1} - t_i = 0.05$, $i = \overline{1, 100}$, $q_{11k}^2 = 1$, $k = \overline{1, 101}$, $q_{21}^2(t) = 1$, $t \in (0; 5)$, $\gamma_{y_1}^2(5) = 0.01$, тоді результати побудови $\hat{u}_1(t)$ та $x_1(t)$, $t \in (0; 5)$ для математичної моделі (2.33), отримані на основі зауваження 5, показані на Мал. 2.2 та Мал. 2.3, відповідно.



Малюнок 2.2 — Оцінка впливів для моделі (2.33), де пунктирною лінією зображено $u_1(t)$, $t \in (0; 5)$, а суцільною — $\hat{u}_1(t)$, $t \in (0; 5)$.



Малюнок 2.3 — Оцінка динаміки моделі (2.33), де пунктирною лінією зображено $x_1(t)$, $t \in (0; 5)$, суцільною лінією — $\hat{x}_1(t)$, $t \in (0; 5)$, позначками * - спостереження y_1 .

2.3.3 Оцінки впливів для випадку спостереження за кількістю прихильників обох інформаційних потоків та відомими параметрами системи для одного рівняння

У цьому розділі розглянемо випадок, коли

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= a_i(t)x_i(t)(L - x_1(t) - x_2(t)) + \\ &+ c_i(t)u_i(t), x_i(0) = x_i^0, i = 1, 2, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.31)$$

де $a_1(t)$, $c_1(t)$ — відомі, неперервні на $(0, T)$ функції; $u_1(t)$, $t \in (0, T)$ — невідома функція зовнішнього впливу; $a_2(t)$, $c_2(t)$, $u_2(t)$ — невідомі, неперервні на $(0, T)$ функції.

Припускається, що:

$$\dot{x}_2(t) = \varphi(t), t \in (0, T),$$

де $\varphi(t)$ — невідома неперервна на $(0, T)$ функція.

Нехай в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, $t_k \in (0, T)$, $k = \overline{1, m}$ спостерігаються величини:

$$y_{ik} = x_i(t_k) + \eta_{ik}, k = \overline{1, m}, i = 1, 2,$$

де $\eta_{ik} \in R^1$, $k = \overline{1, m}$, $i = 1, 2$ — похибки спостережень.

Апостеріорна множина має вигляд:

$$G_{x_2} = \{ \varphi(\cdot) : I_{y_2}(\varphi(\cdot)) \leq \gamma_{y_2}^2(T) \},$$

де

$$I_{y_2}(\varphi(\cdot)) = \sum_{k=1}^m q_{12k}^2 (y_{2k} - x_2(t_k))^2 + \int_0^T q_{22}^2(t) \varphi^2(t) dt$$

і q_{12k}^2 , $k = \overline{1, m}$, $\gamma_{y_2}^2(T)$ — відомі скалярні величини, а $q_{22}^2(t)$, $t \in (0, T)$ — відома функція.

Теорема 19. Функція $\hat{\varphi} \in G_{x_2}$, що знаходиться за формулою:

$$\hat{\varphi}(t) = q_{22}^{-2}(t) \sum_{k=1}^m q_{12k} (y_{2k} - \hat{x}_2(t_k)) \chi_{(0, t_k)}(t), t \in (0, T),$$

є оптимальною оцінкою $\varphi(t)$, $t \in (0, T)$, тобто $\hat{\varphi} \in \text{Arg} \min_{\varphi \in G_{x_2}} I_{y_2}(\varphi(\cdot))$, де величини $\hat{x}_2(t_j)$, $j = \overline{1, m}$, $t_j \in (0, T)$ знаходяться з системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\hat{x}_2(t_j) + \sum_{k=1}^m q_{12k}^2 \hat{x}_2(t_k) h_{kj} = x_2^0 + \sum_{k=1}^m q_{12k}^2(t_j) y_{2k} h_{kj}, k = \overline{1, m},$$

$$h_{kj} = \int_0^T q_{22}^{-2}(t) \chi_{(0, t_k)}(t) \chi_{(0, t_j)}(t) dt, k, j = \overline{1, m}.$$

Зауваження 7. Диференціальне рівняння для $x_1(t)$, $t \in (0, T)$ у формулі (2.31) можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1(t)x_1(t)(L - x_1(t) - \hat{x}_2(t)) - \\ &- a_1(t)x_1(t)(x_2(t) - \hat{x}_2(t)) + c_1(t)u_1(t), t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.32)$$

де $\hat{x}_2(t)$, $t \in (0, T)$ знаходиться з Теорема 40.

Уважатимемо, що виконується нерівність:

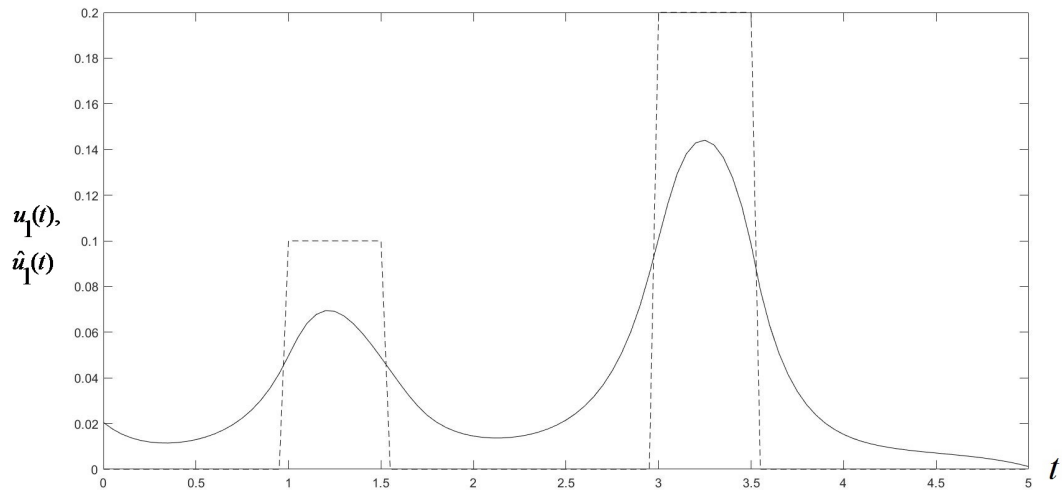
$$\|x_2 - \hat{x}_2\| \leq \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ — достатньо мала величина.

Тоді в рівнянні (2.32) можна знехтувати другим доданком і задачу пошуку оцінки $u_1(t)$, $t \in (0, T)$ для системи (2.31) зводимо до попереднього випадку оцінки впливів при спостереженнях за кількістю прихильників одного інформаційного потоку.

Приклад 3. Розглянемо окремий випадок системи (2.31):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0.8x_1(t)(1 - x_1(t) - x_2(t)) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = 0.4x_2(t)(1 - x_1(t) - x_2(t)) + 0.05\sin(0.5t), \\ x_1(0) = 0.4, x_2(0) = 0.3, t \in (0; 5), \end{cases} \quad (2.33)$$



Малюнок 2.4 — Оцінка впливів для моделі (2.33), де пунктирною лінією зображено $u_1(t)$, $t \in (0; 5)$, а суцільною — $\hat{u}_1(t)$, $t \in (0; 5)$.

де

$$u_1(t) = \begin{cases} 0.1, & t \in [1; 1.5], \\ 0.2, & t \in [3; 3.5], \\ 0, & t \notin [3; 3.5] \cap [3; 3.5], \end{cases}$$

Нехай $N = 101$, $t_{i+1} - t_i = 0.05$, $i = \overline{1, 100}$, $q_{11k}^2 = 1$, $q_{12k}^2 = 1$, $k = \overline{1, 101}$, $q_{21}^2(t) = 1$, $q_{22}^2(t) = 1$, $t \in (0; 5)$, $\gamma_{y_1}^2(5) = 0.01$, $\gamma_{y_2}^2(5) = 0.005$, тоді результати побудови $\hat{u}_1(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $t \in (0; 5)$ для математичної моделі (2.33), отримані на основі теореми 40, зауваження 7 та зауваження 5, показані на Мал. 2.4 та Мал. 2.5, відповідно.

2.3.4 Оцінки впливів для випадку спостереження за кількістю прихильників обох інформаційних потоків та відомими параметрами системи

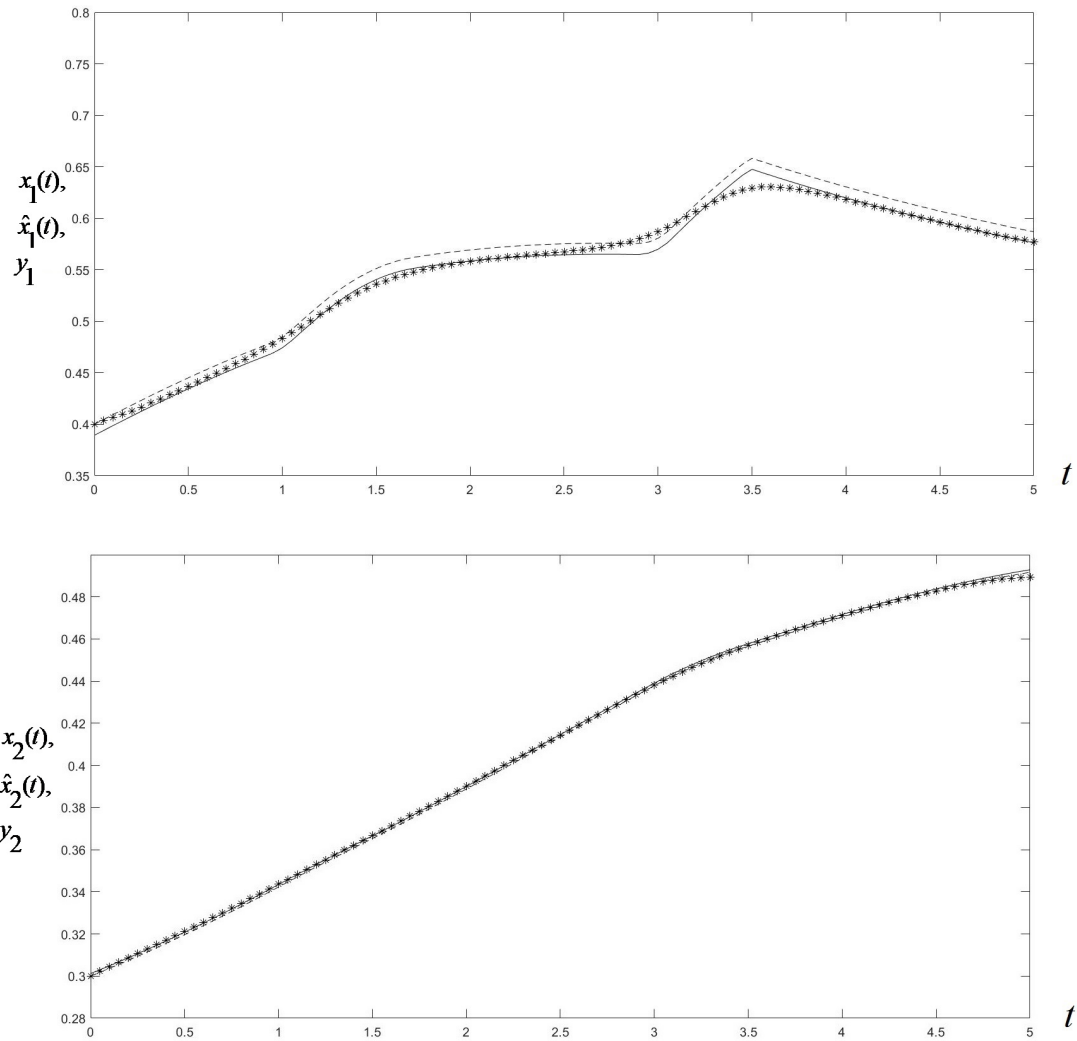
Розглянемо окремий випадок (2.26), коли

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= a_i(t)x_i(t)(L - x_1(t) - x_2(t)) + \\ &+ c_i(t)u_i(t), x_i(0) = x_i^0, i = 1, 2, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.34)$$

де $a_i(t)$, $c_i(t)$, $u_2(t)$, $t \in (0, T)$ — відомі, неперервні на $(0, T)$ функції; $u_1(t)$, $t \in (0, T)$ — невідома функція зовнішнього впливу, причому $u_1(t) > 0$, $t \in (0, T)$.

Припускається, що в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, $t_k \in (0, T)$, $k = \overline{1, m}$ спостерігаються величини:

$$y_{ik} = x_i(t_k) + \eta_{ik}, k = \overline{1, m}, i = 1, 2,$$



Малюнок 2.5 — Оцінка динаміки моделі (2.33), де пунктирною лінією зображено $x_i(t)$, $i = 1, 2$, $t \in (0; 5)$, суцільною лінією — $\hat{x}_i(t)$, $i = 1, 2$, $t \in (0; 5)$, позначками * — спостереження y_i , $i = 1, 2$.

де $\eta_{ik} \in R^1$, $k = \overline{1, m}$, $i = 1, 2$ — похибки вимірювань.

Лінеаризуємо систему (2.34) в околі $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_2(t)$, $t \in (0, T)$, які є наближеними розв'язками $x_1(t)$ та $x_2(t)$, $t \in (0, T)$, відповідно:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &\approx a_1(t)\bar{x}_1(t)(L - \bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)) + c_1(t)u_1(t) + \\ &\quad + [a_1(t)(L - \bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)) - a_1(t)\bar{x}_1(t)] \times \\ &\quad \times (x_1(t) - \bar{x}_1(t)) - a_1(t)\bar{x}_1(t)(x_2(t) - \bar{x}_2(t)), t \in (0, T), \\ \dot{x}_2(t) &\approx a_2(t)\bar{x}_1(t)(L - \bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)) + c_2(t)u_2(t) - \\ &\quad - a_2(t)\bar{x}_2(t)(x_1(t) - \bar{x}_1(t)) + \\ &\quad + [a_2(t)(L - \bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)) - a_2(t)\bar{x}_2(t)](x_2(t) - \bar{x}_2(t)), t \in (0, T). \end{aligned}$$

Звідси отримаємо систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1(t) + \\ \quad + c_1(t)u_1(t), x_1(0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \\ \quad + b_2(t), x_2(0) = x_2^0, \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (2.35)$$

де

$$a_{11}(t) = a_1(t) (L - 2\bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)), a_{12} = -a_1(t)\bar{x}_1(t), t \in (0, T),$$

$$a_{21}(t) = -a_2(t)\bar{x}_2(t), a_{22} = a_2(t) (L - \bar{x}_1(t) - 2\bar{x}_2(t)), t \in (0, T),$$

$$b_1(t) = a_1(t)\bar{x}_1(t)(\bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t)), t \in (0, T),$$

$$b_2(t) = a_2(t)\bar{x}_2(t)(\bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t)) + c_2(t)u_2(t), t \in (0, T).$$

Апостеріорна множина має вигляд:

$$G_{y_1y_2} = \{u_1(\cdot) : I_{y_1y_2}(u_1(\cdot)) \leq \gamma_{y_1y_2}^2(T)\},$$

де

$$\begin{aligned} I_{y_1y_2}(u_1(\cdot)) &= \sum_{k=1}^m q_{11k}^2 (y_{1k} - x_1(t_k))^2 + \\ &+ \sum_{k=1}^m q_{12k}^2 (y_{2k} - x_2(t_k))^2 + \int_0^T q_2^2(t) u_1^2(t) dt, \end{aligned}$$

і $q_{11k}^2, q_{12k}^2, k = \overline{1, m}, \gamma_{y_1y_2}^2(T)$ — відомі скалярні величини, а $q_2^2(t), t \in (0, T)$ — відома функція.

Теорема 20. Оптимальна оцінка $\hat{u}_1(\cdot) \in \text{Arg} \min_{u_1 \in G_{y_1y_2}} I_{y_1y_2}(u_1(\cdot))$ впливів $u_1(t), t \in (0, T)$ системи (2.35) знаходиться за формулою:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(t) &= q_2^{-2}(t) \sum_{k=1}^m q_{11k}^2 (y_{1k} - \bar{x}_1(t_k) - d_{1k}) \tilde{g}_{1k}(t) + \\ &+ q_2^{-2}(t) \sum_{k=1}^m q_{12k}^2 (y_{2k} - \bar{x}_2(t_k) - d_{2k}) \tilde{g}_{2k}(t), t \in (0, T). \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d_{1k} \\ d_{2k} \end{pmatrix} &= \int_0^T \chi_{(0, t_k)}(\tau) \Phi(t_k, \tau) \begin{pmatrix} b_1(\tau) \\ b_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau + \\ &+ \Phi(t_k, 0) \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}, k = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{1k}(t) \\ \tilde{g}_{2k}(t) \end{pmatrix} = \chi_{(0, t_k)}(t) \Phi(t_k, t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, k = \overline{1, m}, t \in (0, T),$$

а $\Phi(t_k, \tau)$, $k = \overline{1, m}$ – фундаментальна матриця системи (2.35), нормована в точці τ ; величини $\bar{x}_i(t_j)$, $j = \overline{1, m}$, $i = 1, 2$ знаходяться з системи алгебраїчних лінійних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_1(t_j) + \sum_{k=1}^m q_{11k}^2 \bar{x}_1(t_k) r_{kj}^{(1)} + \\ \quad + \sum_{k=1}^m q_{12k}^2 \bar{x}_2(t_k) r_{kj}^{(2)} = \\ = \sum_{k=1}^m q_{11k}^2 (y_{1k} - d_{1k}) r_{kj}^{(1)} - \\ \quad - \sum_{k=1}^m q_{12k}^2 (y_{2k} - d_{2k}) r_{kj}^{(2)}, \\ \bar{x}_2(t_j) + \sum_{k=1}^m q_{11k}^2 \bar{x}_1(t_k) r_{kj}^{(3)} + \\ \quad + \sum_{k=1}^m q_{12k}^2 \bar{x}_2(t_k) r_{kj}^{(4)} = \\ = \sum_{k=1}^m q_{11k}^2 (y_{1k} - d_{1k}) r_{kj}^{(3)} - \\ \quad - \sum_{k=1}^m q_{12k}^2 (y_{2k} - d_{2k}) r_{kj}^{(4)}, \end{array} \right. \quad j = \overline{1, m}.$$

де

$$\begin{aligned} r_{kj}^{(1)} &= \int_0^T q_2^{-2}(t) \tilde{g}_{1j}(t) \tilde{g}_{1k}(t) dt, r_{kj}^{(2)} = \\ &= \int_0^T q_2^{-2}(t) \tilde{g}_{1j}(t) \tilde{g}_{2k}(t) dt, k, j = \overline{1, m}, \\ r_{kj}^{(3)} &= \int_0^T q_2^{-2}(t) \tilde{g}_{2j}(t) \tilde{g}_{1k}(t) dt, r_{kj}^{(4)} = \\ &= \int_0^T q_2^{-2}(t) \tilde{g}_{2j}(t) \tilde{g}_{2k}(t) dt, k, j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

2.4 Прогнозні оцінки в математичних моделях поширення інформації зі стаціонарними параметрами

2.4.1 Припущення та позначення

Досліджуватимемо систему вигляду:

$$\dot{x}_k(t) = (a_k + b_k x_k(t)) \left(L - \sum_{i=1}^N x_i(t) \right), k = \overline{1, N}, t \in (0, T), \quad (2.36)$$

з початковими умовами:

$$x_k(0) = x_k^0 \geq 0, k = \overline{1, N}.$$

Нехай в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, $t_i \in (0, T)$, $i = \overline{1, m}$ спостерігаються при невідомих параметрах $\theta_k = (a_k, b_k)$, $k = \overline{1, N}$ величини $x_k(t)$, $k = \overline{1, N}$, $t \in (0, T)$, що є розв'язками системи (2.36):

$$y_{kj} = x_k(t_j) + v_{kj}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, N},$$

де v_{kj} , $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, N}$ — похибки спостережень.

Уведемо позначення

$$\begin{aligned} y &= (y_1, \dots, y_N), y_k = (y_{k1}, \dots, y_{km})^*, k = \overline{1, N}, \\ x &= (x_1, \dots, x_N), x_k = (x_k(t_1), \dots, x_k(t_m))^*, k = \overline{1, N}, \\ v_k &= (v_{k1}, \dots, v_{km})^*, k = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Припускається, що

$$v_k \in V_k \subset R^m, \theta_k \in \Theta_k, k = \overline{1, N},$$

де V_k , Θ_k , $k = \overline{1, N}$ — відомі множини.

Означення 12. Прогнозними оцінками величин $x_k(t_{m+1})$, $k = \overline{1, N}$, де $t_{m+1} > t_m$, $t_{m+1} \in (0, T)$, назвемо:

$$\hat{x}_k(t_{m+1}) = g_k(y, x), k = \overline{1, N},$$

де $g_k(y, x)$, $k = \overline{1, N}$ — деякі функції векторних аргументів.

Позначимо через $G_k(x, y)$, $k = \overline{1, N}$ множини:

$$G_k(x, y) = \{\theta_k : (y_k - f_k(\theta_k)) \in V_k\} \cap \Theta_k, k = \overline{1, N},$$

де

$$\begin{aligned} f_k(\theta_k) &= (f_{k1}(\theta_k), \dots, f_{km}(\theta_k)), \\ f_{kj}(\theta_k) &= a_k \varphi_j + b_k \psi_{kj}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, N}, \\ \varphi_k &= L - \sum_{i=1}^N x_i(t_j), \psi_{kj} = x_k(t_j) \varphi_k, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Теорема 21. Нехай множини V_k , $k = \overline{1, N}$ — обмежені, а вектори $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ та $\psi(k) = (\psi_{k1}, \dots, \psi_{km})$ є лінійно незалежними при кожному k , $k = \overline{1, N}$. Тоді множини $G_k(x, y)$, $k = \overline{1, N}$ обмежені в R^2 .

2.4.2 Побудова усереднених оптимальних середнє квадратичних прогнозних оцінок

2.4.2.1 Побудова усереднених оптимальних середнє квадратичних прогнозних оцінок для базової моделі

Позначимо вектори параметрів:

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N), \theta_k \in G_k(x, y), k = \overline{1, N}$$

і множину прогнозних оцінок вектора

$$x(t_{m+1}, \theta) = (x_1(t_{m+1}, \theta), \dots, x_N(t_{m+1}, \theta)),$$

яка визначається наступним чином:

$$X = \{x(t_{m+1}, \theta)\}.$$

Уведемо також на вимірних підмножинах множин $G_k(x, y)$, $k = \overline{1, N}$ ймовірнісні міри $\mu_k(\cdot)$, $k = \overline{1, N}$, такі, що $\mu_k(G_k(x, y)) = 1$, $k = \overline{1, N}$.

Якщо $\hat{x}(\theta) = \hat{x}(t_{m+1}, \theta)$ — деяка прогнозна оцінка, то визначимо середнє квадратичну похибку такої оцінки у вигляді:

$$\sigma(\hat{x}) = \left\{ \int_{G(x, y)} |\hat{x}(\theta) - x(\theta)|^2 \mu(d\theta) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

де

$$G(x, y) = \prod_{k=1}^N G_k(x, y), \mu(d\theta) = \prod_{k=1}^N \mu_k(d\theta).$$

Означення 13. Величину \tilde{x} , що визначається з умови:

$$\tilde{x} \in \mathop{\text{Arg min}}_{\hat{x} \in X} \sigma(\hat{x}),$$

назвемо *усередненою оптимальною середнє квадратичною прогнозною оцінкою* величини $x(t_{m+1}, \theta)$, (далі УОСКП-оцінка), а величину $\sigma(\tilde{x})$ — *середнє квадратичною похибкою* такої оцінки.

Теорема 22. УОСКП-оцінка має вигляд:

$$\tilde{x} = \int_{G(x, y)} x(t_{m+1}, \theta) \mu(d\theta), \quad (2.37)$$

де рівність виконується майже скрізь по мірі $\mu(\cdot)$; при цьому

$$\sigma^2(\tilde{x}) = \int_{G(x, y)} |x(t_{m+1}, \theta)|^2 \mu(d\theta) - |\tilde{x}|^2.$$

Нехай далі вектори v_k , $k = \overline{1, N}$ належать відповідним множинам V_k , $k = \overline{1, N}$ вигляду:

$$V_k = \{v_k : (Q_k v_k, v_k) \leq 1\},$$

де Q_k , $k = \overline{1, N}$ — відомі додатно визначені матриці; а для векторів θ_k , $k = \overline{1, N}$ відомо, що $\theta_k \in R^2$, $k = \overline{1, N}$.

Теорема 23. Нехай вектори φ , $\psi(k)$, $k = \overline{1, N}$ — лінійно незалежні. Тоді множини $G_k(x, y)$, $k = \overline{1, N}$ мають також вигляд:

$$G_k(x, y) = \left\{ \theta_k : (\bar{P}_k(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k) \leq \gamma^2 \right\}, k = \overline{1, N},$$

де $\bar{P}(k)$, $k = \overline{1, N}$ – матриці з елементами \bar{P}_{ij} , $i, j = 1, 2$, $k = \overline{1, N}$, що обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{11}(k) &= (Q_k \varphi, \varphi), \bar{P}_{22}(k) = (Q_k \psi(k), \psi(k)), k = \overline{1, N}, \\ \bar{P}_{12}(k) &= \bar{P}_{21}(k) = (Q_k \varphi, \psi(k)), k = \overline{1, N}.\end{aligned}$$

Тут вектори $\hat{\theta} = (\hat{a}_k, \hat{b}_k)$, $k = \overline{1, N}$ є розв'язками систем рівнянь:

$$\begin{cases} \bar{P}_{11}(k)a_k + \bar{P}_{12}(k)b_k = (Q_k y_k, \varphi), \\ \bar{P}_{21}(k)a_k + \bar{P}_{22}(k)b_k = (Q_k y_k, \psi(k)), \end{cases} \quad (2.38)$$

а параметри γ_k , $k = \overline{1, N}$ наступні:

$$\gamma_k = 1 - \bar{\Phi}_k(\bar{\theta}_k),$$

де

$$\bar{\Phi}_k(\theta_k) = (Q_k(y_k - a_k \varphi - b_k \psi(k)), y_k - a_k \varphi - b_k \psi(k)), k = \overline{1, N}.$$

Наслідок 6. Візьмемо міри $\mu_k(\cdot)$, $k = \overline{1, N}$ у вигляді:

$$\mu_k(d\theta) = d\theta / S(G_k(x, y)), k = \overline{1, N},$$

де $S(G_k(x, y))$ – площа еліпсу $G_k(x, y)$, $k = \overline{1, N}$.

Тоді справедлива рівність:

$$\tilde{x} = \pi^{-N} \prod_{k=1}^N \left(\frac{\lambda_1(k) \lambda_2(k)}{\gamma_k} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\bar{G}(x, y)} x(t_{m+1}, \theta + \hat{\theta}) d\theta,$$

де $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_N)$, а $\lambda_1(k)$ та $\lambda_2(k)$ – власні числа матриць \bar{P}_k , $k = \overline{1, N}$.

Тут множина $\bar{G}(x, y)$ має вигляд:

$$\bar{G}(x, y) = \prod_{k=1}^N \bar{G}_k(x, y),$$

де

$$\bar{G}_k(x, y) = \{ \theta_k : (\bar{P}_k \theta_k, \theta_k) \leq \gamma_k \}, k = \overline{1, N}.$$

2.4.2.2 Побудова усереднених оптимальних прогнозних оцінок для моделі поширення інформації, що містить механізми забування, двокрокового охоплення інформацією та поділ соціуму на дві однорідні підгрупи

Розглянемо окремий випадок системи (2.36), коли соціум піддається впливу інформаційних повідомлень з одного джерела.

Вважатимемо, що спільнота складається з двох однорідних підгруп, чисельністю L_1 та L_2 ($L_1 + L_2 = L$, $L_i > 0$, $i = 1,2$): перша підгрупа може сприймати інформацію, що розповсюджується як через ЗМІ, так і через міжособистіне спілкування; друга підгрупа за своює лише інформацію, що надходить у процесі міжособистісного спілкування. Переходи індивідів з однієї підгрупи в іншу відсутні.

Також припускається, що індивід, потрапивши вперше під вплив інформаційної дії, стає пасивним прихильником, а потрапивши вдруге — активним прихильником, який поширює інформаційне повідомлення серед ще не охопленої частки соціуму.

Позначимо кількість активних та пасивних прихильників в момент часу $t \in (0, T)$ в першій підгрупі, відповідно, $x_1(t)$, $t \in (0, T)$ та $x_3(t)$, $t \in (0, T)$, в другій — $x_2(t)$, $t \in (0, T)$ та $x_4(t)$, $t \in (0, T)$.

Додамо припущення, що індивіди забувають трансльовану інформацію: активні прихильники забувають з інтенсивністю $c > 0$ і стають пасивними прихильниками; пасивні прихильники забувають з інтенсивністю $r > 0$ й повертаються до неохоплених членів відповідних їм підгруп.

Нехай члени спільноти не можуть розпізнати, до якої підгрупи відноситься конкретний індивід. Тоді, позначивши через a — інтенсивність повідомлень у ЗМІ, через b — інтенсивність міжособистісного спілкування, отримаємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (a + b[x_1(t) + x_2(t)])x_3(t) - cx_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = b[x_1(t) + x_2(t)]x_4(t) - cx_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = (a + b[x_1(t) + x_2(t)]) \times \\ \quad \times (L_1 - x_1(t) - x_3(t)) - rx_3(t) + cx_1(t), \\ \dot{x}_4(t) = b[x_1(t) + x_2(t)] \times \\ \quad \times (L_2 - x_2(t) - x_4(t)) - rx_4(t) + cx_2(t), \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (2.39)$$

і початковими умовами:

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0. \quad (2.40)$$

Позначимо через $\theta = (a, b, c, r)^*$, $\theta \in \Theta \subseteq R^4$, де Θ — задана множина параметрів моделі (2.39). Тоді розв'язок задачі Коші (2.39), (2.40) залежить від значення параметру θ і позначатимемо $x_k(t, \theta)$, $k = \overline{1, 4}$, $t \in (0, T)$.

Нехай в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, $t_i \in (0, T)$, $i = \overline{1, m}$ спостерігаються при конкретних невідомих параметрах $\theta_0 = (a, b, c, r)^*$, $\theta_0 \in \Theta$ функції $x_k(t)$, $k = \overline{1, 4}$, $t \in (0, T)$, що є розв'язками задачі Коші (2.39), (2.40):

$$y_{kj} = \dot{x}_k(t_j) + v_{kj}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, 4},$$

де v_{kj} , $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, 4}$ — похибки спостережень.

Уведемо позначення $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{4j})^*$, $v_j = (v_{1j}, \dots, v_{4j})^*$, $j = \overline{1, m}$.

Відомо також, що невідомі вектори похибок спостережень v_j , $j = \overline{1, m}$ задовольняють нерівність:

$$\sum_{j=1}^m (Q_j v_j, v_j) \leq 1,$$

де $Q_j, j = \overline{1, m}$ — додатно визначені матриці.

Уведемо векторну функцію $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^*, t \in (0, T)$ та матрицю $F(t, x(t)), t \in (0, T)$ вигляду:

$$F(t, x(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \psi_1(t) & -x_1(t) & 0 \\ 0 & \psi_2(t) & -x_2(t) & 0 \\ \varphi_3(t) & \psi_3(t) & x_1(t) & -x_3(t) \\ 0 & \psi_4(t) & x_2(t) & -x_4(t) \end{pmatrix}, t \in (0, T),$$

де

$$\varphi_1(t) = x_3(t), t \in (0, T),$$

$$\psi_1(t) = (x_1(t) + x_2(t))\varphi_1(t), t \in (0, T),$$

$$\psi_2(t) = (x_1(t) + x_2(t))x_4(t), t \in (0, T),$$

$$\varphi_3(t) = L_1 - x_1(t) - x_3(t), t \in (0, T),$$

$$\psi_3(t) = (x_1(t) + x_2(t))\varphi_3(t), t \in (0, T),$$

$$\psi_4(t) = (x_1(t) + x_2(t))(L_2 - x_2(t) - x_4(t)), t \in (0, T).$$

Тоді систему рівнянь (2.39) можна представити у векторно-матричній формі:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t))\theta, t \in (0, T).$$

Із нерівності

$$\sum_{j=1}^m (Q_j v_j, v_j) \leq 1,$$

отримаємо представлення:

$$\tilde{\Phi}(\theta) = \sum_{j=1}^m (Q_j (y_j - F(t_j, x(t_j)))\theta, y_j - F(t_j, x(t_j))\theta) \leq 1. \quad (2.41)$$

Нехай $\hat{\theta}_m \in \mathop{\text{Arg min}}_{\theta \in \Theta} \tilde{\Phi}(\theta)$ — точка мінімуму функції $\tilde{\Phi}(\theta)$, $\theta \in \Theta$, тобто з необхідних умов оптимальності має виконуватись рівність:

$$\tilde{\Phi}'(\hat{\theta}_m) = 0.$$

Розкладемо функцію $\tilde{\Phi}(\theta)$, $\theta \in \Theta$ в ряд Тейлора в околі точки $\hat{\theta}_m$:

$$\tilde{\Phi} \cong \tilde{\Phi}(\hat{\theta}_m) + (\tilde{H}_m(\theta - \hat{\theta}_m), \theta - \hat{\theta}_m), \quad (2.42)$$

де

$$\tilde{H}_m = \sum_{j=1}^m F^*(t_j, x(t_j))Q_j F(t_j, x(t_j)).$$

Із формул (2.41), (2.42) випливає нерівність:

$$(\tilde{H}_m(\theta - \hat{\theta}_m), \theta - \hat{\theta}_m) \leq 1 - \tilde{\Phi}(\hat{\theta}_m). \quad (2.43)$$

Теорема 24. Якщо $\lambda_{m,\min}$ є мінімальним власним числом матриці \tilde{H}_m та $\lambda_{m,\min} \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, то $\hat{\theta}_m \rightarrow \theta_0$ при $m \rightarrow \infty$.

Позначимо далі через $\tilde{G}(x,y)$ множину вигляду:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x,y) &= \\ &= \left\{ \theta : \sum_{j=1}^m (Q_j(y_j - F(t_j, x(t_j)))\theta, y_j - F(t_j, x(t_j)))\theta \leq 1 \right\} \cap \Theta. \end{aligned}$$

Візьмемо міру $\mu(\cdot)$ у вигляді:

$$\mu(d\theta) = d\theta / V(\tilde{G}(x,y)),$$

де

$$\begin{aligned} V(\tilde{G}(x,y)) &= \int_{\tilde{G}(x,y)} d\theta, \\ \tilde{G}(x,y) &= \left\{ \theta : (\tilde{H}_m \theta, \theta) \leq 1 - \tilde{\Phi}(\hat{\theta}_m) \right\} \cap \Theta, \Theta = R^4. \end{aligned}$$

Покладемо $\bar{\theta} = \theta - \hat{\theta}_m$, $d\bar{\theta} = d(\theta - \hat{\theta}_m) = d\theta$. Оскільки $\tilde{G}(x,y)$ — 4-х вимірний еліпсоїд, то:

$$\int_{\tilde{G}(x,y)} d\theta = \frac{1}{2} \pi^2 \prod_{k=1}^4 \left(\frac{\lambda_k}{1 - \tilde{\Phi}(\hat{\theta}_m)} \right)^{-1/2}, \quad (2.44)$$

де λ_k , $k = \overline{1,4}$ — власні числа матриці \tilde{H}_m .

Із формули для УОСКП-оцінки (2.37) отримаємо:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \int_{G(x,y)} x(t_{m+1}, \theta) \mu(d\theta) = \\ &= \left(\int_{\tilde{G}(x,y)} ds \right)^{-1} \int_{\tilde{G}(x,y)} x(t_{m+1}, \theta + \hat{\theta}_m) d\theta. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Підставивши (2.44) в (2.45), одержимо вираз:

$$\tilde{x} = 2\pi^{-2} \prod_{k=1}^4 \left(\frac{\lambda_k}{1 - \tilde{\Phi}(\hat{\theta}_m)} \right)^{1/2} \int_{\tilde{G}(x,y)} x(t_{m+1}, \theta + \hat{\theta}_m) d\theta.$$

2.4.3 Побудова гарантованих прогнозних оцінок

Розглянемо далі гарантовані прогнозні оцінки величин $x_k(t_{m+1}, \theta)$, $k = \overline{1, N}$. Припустимо, що вектори θ_k , $k = \overline{1, N}$ належать заданим множинам $\Theta_k \subset R^2$, $k = \overline{1, N}$.

Означення 14. Гарантованими прогнозними оцінками величин $x_k(t_{m+1}, \theta)$, $k = \overline{1, N}$ назовемо вектори z_k , $k = \overline{1, N}$, які визначаються із умов:

$$\min_{\eta_i, i=\overline{1, N}} \max_{\theta_i, i=\overline{1, N}} |x_k(t_{m+1}, \eta_1, \dots, \eta_N) - x_k(t_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_N)| =$$

$$= \max_{\theta_i, i=\overline{1, N}} |z_k - x_k(t_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_N)| = \sigma_{1k}, k = \overline{1, N},$$

(тут $\eta_i \in G_k(x, y)$, $\theta_i \in G_k(x, y)$, $i = \overline{1, N}$); а величини σ_{1k} , $i = \overline{1, N}$ назовемо *гарантованими похибками* оцінок z_k , $k = \overline{1, N}$.

Теорема 25. *Нехай множини $G_k(x, y)$, $k = \overline{1, N}$ — обмежені та замкнені. Гарантовані прогнози оцінки z_k , $k = \overline{1, N}$ мають вигляд:*

$$z_k = \frac{1}{2} \left(\max_{\theta_i, i=\overline{1, N}} x_k(t_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_N) + \min_{\theta_i, i=\overline{1, N}} x_k(t_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_N) \right),$$

$$\theta_i \in G_k(x, y), i = \overline{1, N},$$

при цьому

$$\sigma_{1k} = \frac{1}{2} \left(\max_{\theta_i, i=\overline{1, N}} x_k(t_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_N) - \min_{\theta_i, i=\overline{1, N}} x_k(t_{m+1}, \theta_1, \dots, \theta_N) \right),$$

$$\theta_i \in G_k(x, y), i = \overline{1, N}.$$

Розглянемо тепер випадок, коли в точках $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, $t_i \in (0, T)$, $i = \overline{1, m}$ спостерігаються вектори $x(t_j, \theta) = (x_1(t_j, \theta), \dots, x_N(t_j, \theta))^*$, $j = \overline{1, m}$, що є розв'язками системи (2.36) при деяких значеннях параметрів $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$:

$$\bar{y}_j = H_j x(t_j, \theta) + \bar{v}_j, j = \overline{1, m},$$

де H_j , $j = \overline{1, m}$ — матриці розмірності $m \times N$, \bar{v}_j , $j = \overline{1, m}$ — невідомі завади.

Будемо припускати що, вектор $\bar{v} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$ та вектор параметрів θ належать, відповідно, множинам \bar{V} та Θ .

Позначимо

$$\Theta_y = \{\theta : (y_1 - H_1 x(t_1, \theta), \dots, y_m - H_m x(t_m, \theta)) \in V\} \cap \Theta.$$

Припустимо, що множина Θ_y — обмежена. Через $co\Theta_y$ позначимо найменшу замкнену опуклу множину, що містить в собі множину Θ_y . На множині Θ_y розглянемо гарантовані прогнози оцінки величин $x_k(t_{m+1}, \theta)$, $k = \overline{1, N}$, які знаходяться з умов:

$$\min_{\hat{\theta} \in co\Theta_y} \max_{\theta \in co\Theta_y} |x_k(t_{m+1}, \hat{\theta}) - x_k(t_{m+1}, \theta)| =$$

$$= \max_{\theta \in co\Theta_y} |\hat{x}_k - x_k(t_{m+1}, \theta)| = \sigma_{2k}, k = \overline{1, N}.$$

Теорема 26. *Гарантовані прогнози оцінки \hat{x}_k , $k = \overline{1, N}$ обчислюються за формулами:*

$$\hat{x}_k = \frac{1}{2} (\hat{x}_k^+ + \hat{x}_k^-), k = \overline{1, N},$$

де

$$\hat{x}_k^+ = \max_{\theta \in \text{co}\Theta_u} x_k(t_{m+1}, \theta), \hat{x}_k^- = \min_{\theta \in \text{co}\Theta_u} x_k(t_{m+1}, \theta), k = \overline{1, N};$$

а для похибки $\sigma_{2k}, k = \overline{1, N}$ справедлива рівність:

$$\sigma_{2k} = \frac{1}{2}(\hat{x}_k^+ - \hat{x}_k^-), k = \overline{1, N}.$$

Розглянемо випадок, коли множина $\Theta = R^{2N}$, а множину \bar{V} можна представити також у вигляді:

$$\bar{V} = \left\{ \bar{v} : \sum_{j=1}^m (Q_j \bar{v}_j, \bar{v}_j) \leq 1 \right\},$$

де $Q_j, j = \overline{1, m}$ — додатно визначені матриці.

Тоді для множини Θ_y справедливе представлення:

$$\Theta_y = \left\{ \theta : \sum_{j=1}^m (Q_j (y_j - H_j x(t_j, \theta)), y_j - H_j x(t_j, \theta)) \leq 1 \right\},$$

і задачі знаходження гарантованих оцінок і похибок прогнозних оцінок зведуться до проблеми знаходження значень $\min_{\theta \in \Theta_y} x_k(t_{m+1}, \theta)$ та $\max_{\theta \in \Theta_y} x_k(t_{m+1}, \theta)$ на множині Θ_y .

Приклад 4. Приклад знаходження УОСКП-оцінки Розглянемо окремий випадок системи (2.36) при $N = 1$ і зовнішній вплив відсутній, тобто $a_1 = 0$, а параметр інтенсивності між-особистісного спілкування $b_1 \in R, k = \overline{1, N}$ невідомий.

При таких припущеннях система (2.36) набуде представлення:

$$\dot{x}_1(t) = b_1 x_1(t)(L - x_1(t)), x_1(0) = x_1^0, t \in (0, T). \quad (2.46)$$

Спостереження за функціями $x_k(t), k = \overline{1, N}$ мають вигляд:

$$\bar{y}_j = \dot{x}_1(t_j) + \bar{v}_j, j = \overline{1, m},$$

причому

$$\sum_{j=1}^m \bar{v}_j^2 \leq \delta_m^2.$$

Отримаємо вираз:

$$G(x, y) = \left\{ b_1 : \sum_{j=1}^m (\bar{y}_j - b_1 x_1(t_j)(L - x_1(t_j)))^2 \leq \delta_m^2 \right\}.$$

Із нерівності

$$\sum_{j=1}^m (\bar{y}_j - b_1 x_1(t_j)(L - x_1(t_j)))^2 \leq \delta_m^2,$$

маємо формулу:

$$b_1^2 \sum_{j=1}^m [x_1(t_j)(L - x_1(t_j))]^2 - 2b_1 \sum_{j=1}^m \bar{y}_j x_1(t_j)(L - x_1(t_j)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^m y_j^2 - \delta_m^2 \leq 0.$$

Звідси одержимо нерівність:

$$(b_1 - \underline{b}_1)(b_1 - \bar{b}_1) \leq 0, \quad (2.47)$$

де

$$\begin{aligned} \underline{b}_1 &= \frac{2 \sum_{j=1}^m \bar{y}_j x_1(t_j)(L - x_1(t_j)) - \sqrt{D}}{2 \sum_{j=1}^m [x_1(t_j)(L - x_1(t_j))]^2}, \\ \bar{b}_1 &= \frac{2 \sum_{j=1}^m \bar{y}_j x_1(t_j)(L - x_1(t_j)) + \sqrt{D}}{2 \sum_{j=1}^m [x_1(t_j)(L - x_1(t_j))]^2}, \\ D &= 4 \left[\sum_{j=1}^m \bar{y}_j x_1(t_j)(L - x_1(t_j)) \right]^2 + \\ &+ 4(\delta_m^2 - \sum_{j=1}^m y_j^2) \sum_{j=1}^m [x_1(t_j)(L - x_1(t_j))]^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Тоді, в силу розв'язку нерівності (2.47), буде справджуватись представлення:

$$G(x, y) = [\underline{b}_1, \bar{b}_1].$$

Для того, щоб знайти УОСКП-оцінку (μ -усереднену оптимальну прогнозну оцінку, де $\mu(\cdot)$ — міра Лебега), розв'яжемо рівняння Ріккати:

$$\dot{x}_1(t) = b_1 L x_1(t) - b_1 x_1^2(t), x_1(0) = x_1^0, t \in (0, T).$$

Зробимо заміну:

$$h(t) = 1/x_1(t), t \in (0, T),$$

і одержимо диференціальне рівняння з початковою умовою:

$$\dot{h}_t = b_1 - b_1 L h(t), h(0) = 1/x_1^0. \quad (2.48)$$

Застосувавши до (2.48) формулу Коші, матимемо вираз:

$$\begin{aligned} h(t) &= 1/x_1^0 \exp \left\{ - \int_0^t b_1 L ds \right\} + \\ &+ \int_0^t \exp \left\{ - \int_\tau^t b_1 L ds \right\} b_1 d\tau = \\ &= \frac{x_1^0 + (L - x_1^0) e^{-b_1 L t}}{x_1^0 L}, t \in (0, T). \end{aligned}$$

Звідси розв'язок диференціального рівняння (2.46) обчислюється за формулою:

$$x_1(t) = \frac{x_1^0 L}{x_1^0 + (L - x_1^0) e^{-b_1 L t}}, t \in (0, T).$$

Тоді для \tilde{x}_1 будуть справедливі перетворення:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= \int_{G(x,y)} x_1(t_{m+1}, b_1) \mu(db_1) = \\ &= \frac{1}{\bar{b}_1 - \underline{b}_1} \int_{\underline{b}_1}^{\bar{b}_1} x_1(t_{m+1}, b_1) db_1 = \\ &= \frac{1}{\bar{b}_1 - \underline{b}_1} \int_{\underline{b}_1}^{\bar{b}_1} \frac{x_1^0 L db_1}{x_1^0 + (L - x_1^0) e^{-b_1 L t_{m+1}}}.\end{aligned}$$

Увівши позначення $p(b_1) = e^{-b_1 L t_{m+1}}$, отримаємо $dp = -L t_{m+1} e^{-b_1 L t_{m+1}} db_1$ і знайдемо УОСКП-оцінку \tilde{x}_1 :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= \frac{-x_1^0}{(\bar{b}_1 - \underline{b}_1) t_{m+1}} \int_{e^{-\bar{b}_1 L t_{m+1}}}^{e^{-\underline{b}_1 L t_{m+1}}} \frac{dp}{p(x_1^0 + (L - x_1^0) p)} = \\ &= L - \frac{1}{(\bar{b}_1 - \underline{b}_1) t_{m+1}} \ln \left| \frac{x_1^0 + (L - x_1^0) e^{-\underline{b}_1 L t_{m+1}}}{x_1^0 + (L - x_1^0) e^{-\bar{b}_1 L t_{m+1}}} \right|.\end{aligned}$$

ВИСНОВКИ

У посібнику представлено огляд використання основних популяційних моделей для аналізу процесів поширення інформації в соціальних мережах, а також використання цих моделей для прогнозування динаміки. Ці методи є невід'ємною частиною сучасного дослідження соціальних мереж та мають важливе значення для розуміння їхньої природи та впливу на суспільство.

Метод системного аналізу найбільш вдало підходять для аналізу соціальних мереж, адже останні є складними системами, аналіз якими іншими методами поскладнюється нелінійною природою поширення інформації, а також відносно невеликі напрацювання в цьому напрямку. Це пояснюється тим, що соціальні мережі як феномен соціо-комунікативної сфери є відносно молодим, при цьому не так багато соціальних мереж надають можливість для аналізу для науковців та організацій "ззовні".

Важливим завданням є оцінювання динаміки процесів в популяційних моделях, які можуть використовуватись для аналізу соціальних мереж, адже методи розв'язування таких задач дозволяє нам визначити адекватність моделей, їхню спроможність відтворювати реальні процеси та забезпечити надійні прогнози. Цей аспект дослідження виявляється важливим для розвитку наукових та практичних досліджень у сфері аналізу соціальних мереж та сприяє подальшому удосконаленню методів та моделей.

Поширення інформації у соціальних мережах є ключовим фактором впливу на різноманітні аспекти суспільного життя, від реклами та маркетингу до політичних процесів та соціальної мобілізації. Дослідження цього аспекту дозволяє нам краще розуміти механізми поширення інформації в мережі, виявляти ключові фактори та залежності, а також розробляти ефективні стратегії впливу та комунікації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Mondal A., Dey M., Das D., Nagpal S., Garda K. Chatbot: An automated conversation system for the educational domain. *2018 International Joint Symposium on Artificial Intelligence and Natural Language Processing (iSAI-NLP)*. 2018. P. 1–5.
- [2] Gunawan T. S., Babiker A. B. F., Ismail N., Effendi M. R. *Development of Intelligent Telegram Chatbot Using Natural Language Processing*. In *2021 7th International Conference on Wireless and Telematics (ICWT)*. 2021. P. 1–5
- [3] Karimpour D., Chahooki M. A. Z., Hashemi A. User recommendation based on Hybrid filtering in Telegram messenger. *26th International Computer Conference, Computer Society of Iran (CSICC)*. 2021. P. 1–7.
- [4] Hashemi A., Zare Chahooki M. A. Telegram group quality measurement by user behavior analysis. *Social Network Analysis and Mining*. 2019. 9(1). P. 1–12.
- [5] Karimpour D., Zare Chahooki M. A., Hashemi, A. User recommendation in Telegram messenger by graph analysis and mathematical modeling of users' behavior. *Journal of Information and Communication Technology*. 2021. 49(49). 151.
- [6] Eichstaedt J. C., Smith R. J., Merchant R. M., Ungar L. H., Crutchley P., Preo?iuc-Pietro D., Schwartz H. A. Facebook language predicts depression in medical records. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2018. 115(44). P. 11203–11208.
- [7] Kachamas P., Akkaradamrongrat S., Sinthupinyo S., Chandrachai A. Application of artificial intelligent in the prediction of consumer behavior from Facebook posts analysis. *International Journal of Machine Learning and Computing*. 2019. 9(1). P. 91–97.
- [8] Han B., Cook P., Baldwin T. Text-based twitter user geolocation prediction. *Journal of Artificial Intelligence Research*. 2014. 49. P. 451–500.
- [9] Jordan S. E., Hovet S. E., Fung I. C. H., Liang H., Fu K. W., Tse Z. T. H. Using Twitter for public health surveillance from monitoring and prediction to public response. *Data*. 2018. 4(1). P. 6.
- [10] Essien A., Petrounias I., Sampaio P., Sampaio S. A deep-learning model for urban traffic flow prediction with traffic events mined from twitter. *World Wide Web*. 2021. 24(4). P. 1345–1368.
- [11] Шафорост О.В. Соціальні мережі як інформаційні ресурси підприємства. *Вісник студентського наукового товариства ДонНУ імені Василя Стуса*. 2019. 1(11). С. 150 –153.
- [12] Леміш К. М., Межуєва Ю. О. Соціальні мережі як новий інструмент рекламної діяльності. *Сталий розвиток економіки*. 2016. 4 (33). С. 141–146.

- [13] Leppink J., Pérez-Fuster P. . Social networks as an approach to systematic review. *Health Professions Education*. 2019. 5(3). P. 218–224
- [14] Abkenar S. B., Kashani M. H., Mahdipour E., Jameii S. M. Big data analytics meets social media: A systematic review of techniques, open issues, and future directions. *Telematics and informatics*. 2021. 57: 101517.
- [15] Ладанюк А. П. Основи системного аналізу. Вінниця. 2004. 176 с.
- [16] Варенко В. М., Братусь І. В., Дорошенко В. С., Смольніков Ю. Б., Юрченко В. О. Системний аналіз інформаційних процесів. 2013. К.: Університет «Україна». 203 с.
- [17] Наконечного О. Г., Шевчук Ю. М. "Нелінійні задачі популяційної динаміки та їх застосування". 2020. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". 187 с.
- [18] Deichman S. A Lanchester Model of Guerrilla Warfare. *Operational Research*. 1962. №10. P. 818—827.
- [19] Саати Т. Л. Математические модели конфликтных ситуаций. Москва: Советское радио, 1977. 300 с.
- [20] Takahashi Y., Yue W., Phung-Duc T. Queueing Theory and Network Applications. 2019. Springer.
- [21] Фурашев В. Н., Ланде Д. В., Браичевский С. М. Моделирование информационно-электоральных процессов. Киев.: ЦПИ АроН Украины, 2007. 182 с.
- [22] Горбулін В. П., Додонов О. Г., Ланде Д. В. Інформаційні операції та безпека суспільства: загрози, протидія, моделювання. Київ: Інтертехнологія, 2009. 164 с.
- [23] Почепцов Г. Г. Сучасні інформаційні війни. Київ: Видавничий дім "Києво-Могилянська академія 2015. 497 с.
- [24] Яворська Г. М. Гібридна війна як дискурсивний конструкт. *Стратегічні пріоритети. Серія: Політика*. 2016. №4. С. 41—48.
- [25] Світова гібридна війна український фронт/ за заг. ред. В. П. Горбуліна. Харків : Фоліо, 2017. 496 с.
- [26] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. Москва: Мир, 1972. 416 с.
- [27] Экланд Н., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. Москва: Мир, 1979. 400 с.
- [28] Острем К. Введение в стохастическую теорию управления. Москва: Мир, 1973. 324 с.
- [29] Gunasekara R. C., Mehrotra K., Mohan C. K. Multi-objective optimization to identify key players in large social networks. *Social Network Analysis and Mining* 201. 5. P. 1—20.

- [30] Fu W., Liu S., Srivastava G. Optimization of big data scheduling in social networks. *Entropy*. 2019. 21(9). P. 902.
- [31] Chen X., Jiang N., Jing Y., Stojanovski G., Dimirovski G. Differential Game Model and Its Solutions for Force Resource Complementary via Lanchester Square Law Equation. *International Federation of Automatic Control : preprints of XVIII world congress, Milano, Italy, August 28 — September 2 2011. Milano, 2011. P. 14229—14223.*
- [32] Власенко Л.А., Чикрий А.А. Об одной дифференциальной игре в системе с распределенными параметрами. *Труды института математики и механики УрО РАН*. 2014. №4. С. 71—80.
- [33] Чикрий А.А. Верхняя и нижняя разрешающие функции в игровых задачах динамики. *Труды института математики и механики УрО РАН*. 2017. №1. С. 293—305.
- [34] Reiffers-Masson A., Hayel Y., Altman E. Game theory approach for modeling competition over visibility on social networks. In 2014 Sixth International Conference on Communication Systems and Networks. 2014. P. 1–6.
- [35] Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов. Москва: Мир, 1971. 382 с.
- [36] Wolfram S. Theory and Applications of Cellular Automats. Singapore: World Scientific, 1986. 363 p.
- [37] Cederman L.E. Agent-Based Modeling in Political Science. *Political Methodologist*. 2001. №10. P. 16—22.
- [38] Tsvetovat M., Carley K. M. Modeling Complex Socio-technical Systems using Multi-Agent Simulation Method. *Künstliche Intelligenz*. 2004. №2. P. 23—28.
- [39] Frantz T., Carley K.M. A formal characterization of cellular networks. *CMU-ISRI-05-109: Technical Report, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA, September 2005. Pittsburgh, 2005. 14 p.*
- [40] Івохін Є.В., Апанасенко Д.В., Науменко Ю.О. Моделювання процесі розповсюдження інформації з урахуванням соціального впливу. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2017): abstracts of XXIX International conference, Mukachevo, Ukraine, May 10-13, 2017. Kyiv, 2017. P.157.*
- [41] Ivohin E.V., Apanasenko D.V., Naumenko Yu.O. Mathematical models of information spreading process with regards to social influence. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2017): abstracts of XXX International conference, Vilnius, Lithuania, August 14-19, 2017. Kyiv, 2017. P. 65.*
- [42] Івохін Є.В., Апанасенко Д.В., Науменко Ю.О. Про підходи до моделювання розповсюдження реклами як агрегації, обмеженої дифузиею. *Обчислювальний інтелект*

- (результати, проблеми, перспективи): тези міжнародної науково-практичної конференції, Київ, Україна, 16-18 травня 2017. Київ, 2017. С. 116—117.
- [43] Івохін Є.В., Апанасенко Д.В., Науменко Ю.О. Про один підхід до моделювання розповсюдження рекламної інформації як дифузійного процесу. *Інформаційні технології в освіті, науці і виробництві*: тези міжнародної науково-практичної конференції, Луцьк, Україна, 25-27 травня 2017. Луцьк, 2017. С. 161—164.
- [44] Івохін Є.В., Науменко Ю.О. Про окремі математичні моделі процесу розповсюдження реклами в соціумі. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки*. 2017. №1 С. 39—43.
- [45] Mishra B. K., Prajapati A. Modelling and simulation: cyber war. *Procedia Technology*. 2013. № 10. P. 987–997.
- [46] Chilachava T., Kereselidze N. Non-preventive continuous linear mathematical model of information warfare. *Sokhumi State University, Proceedings, Mathematics and Computer Sciences series*. 2009. №7. P. 91—112.
- [47] Chilachava T., Kereselidze N. Continuous linear mathematical model of preventive information warfare. *Sokhumi State University, Proceedings, Mathematics and Computer Sciences series*. 2009. №7. P. 113—141.
- [48] Kereselidze N. About relations of levels of information technology sides in one of the mathematical model information warfare. *Conferece of Georgian Mathematical Union: abstracts of IV International conference, Tbilisi-Batumi, Georgia, September 9-15, 2013. Tbilisi, 2010. №1 (24)*. P. 168—169.
- [49] Chilachava T. About new mathematical model "beast-predator-victim". *Conference of the Georgian Mathematical Union : abstracts of III International conference, Batumi, Georgia, September 2-9, 2012. Batumi, 2012*. P.158.
- [50] Chilachava T., Kereselidze N. Optimizing problem of mathematical model of preventive information warfare. *Informational and Communication Technologies (ICTMC-2012): abstracts of International Scientific conference, Sukhumi, Georgia, October 30, 2012. Sukhumi, 2012*. P.525-529.
- [51] Chilachava T., Chakhvadze A. Continuous nonlinear mathematical and computer model of information warfare with participation of authoritative interstate institutes. *Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications*. 2014. № 4(44). P. 53—74.
- [52] Kereselidze N. G. An optimal control problem in mathematical and computer models of the information warfare. *Differential and Difference Equations with Applications: ICDDEA, Amadora, Portugal, May 2015, Selected Contributions. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 164, Springer International Publishing Switzerland*. 2016. P. 303—311.

- [53] Наконечний О.Г., Шевчук Ю.М. Математичні моделі розповсюдження інформації з нестационарними параметрами. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. 2016. №3. С.98 — 105.
- [54] Наконечний О.Г., Зінько П.М., Шевчук Ю.М. Усередненні прогностні оцінки в моделях поширення інформації при невизначеностях. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. 2017. №2. С.122 — 127.
- [55] Наконечний О.Г., Зінько П.М., Шевчук Ю.М. Прогностні оцінки в математичних моделях поширення інформації при невизначеностях. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2017. №4. С.56 — 65.
- [56] Kröger M., Schlickeiser R. Analytical solution of the SIR-model for the temporal evolution of epidemics. Part A: time-independent reproduction factor. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2020. Vol. 53(50). 505601.
- [57] Harko T., Lobo F.S.N., Mak M.K. Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates. *Applied Mathematics and Computation*. 2014. №236. P. 184—194.
- [58] Kaddar A. Stability analysis in a delayed SIR epidemic model with a saturated incidence rate. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. 2010. Vol. 15(3). P. 299—306.
- [59] Adamu H. A., Muhammad M. M., Jingi A., Usman M. Mathematical modelling using improved SIR model with more realistic assumptions. *Int. J. Eng. Appl. Sci.* 2019. Vol. 6. P. 64—69.
- [60] Allen L. J., Burgin A. M. Comparison of deterministic and stochastic SIS and SIR models in discrete time. *Mathematical biosciences*. 2000. Vol. 163(1). P. 1—33.
- [61] Tornatore E., Buccellato S.M., Vetro P., Stability of a stochastic SIR system. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2005. Volume 354. P. 111—126.
- [62] Artalejo J. R., Economou A., Lopez-Herrero M. J. On the number of recovered individuals in the SIS and SIR stochastic epidemic models. *Mathematical biosciences*. 2010. Vol. 228(1). P. 45—55.
- [63] Jiang D., Yu J., Ji C., Shi N. Asymptotic behavior of global positive solution to a stochastic SIR model. *Mathematical and Computer Modelling*. 2011. Vol. 54(1-2). P. 221—232.
- [64] Michel Y., Smith H., Wang L. Global dynamics of SEIR epidemic model with vertical transmission. *SIAM Journal Applied Mathematics*. 2001. №1 (62). P. 58—69.
- [65] Pastor-Satorras R., Vespignani A. Epidemic spreading in scale-free networks. *Physics Review Letters, april 2001*. 2001. Vol. 86. №14. P. 3200—3203.

- [66] Liu Y., Zhang L., Gao . An improved method to an impulsive and delayed discretized model. *Applied Mathematics*. 2006. № 7. P. 108—123.
- [67] Mishra B. K., Saini D.K. SEIRS epidemic model with delay for transmission of malicious objects in cumputer network. *Applies Mathematics and Computation*. 2007. № 188. P. 1476—1482.
- [68] Mishra B. K., Singh A.K. SIjRS epidemic model with multiple groups of infection in cumputer network. *International Journal of Nonlinear Science*. 2012. № 3. P. 357—362.
- [69] Vynnycky E., White R.G. An Introduction to Infectious Disease Modelling. Oxford: Oxford University Press, 2010. 368 p.
- [70] Хусаїнов Д.Я. Аналіз моделі розповсюдження захворювання. *Problems of Dicismon Making under Uncertainties (PDMU-2013)*: тези XXII міжнародної конференції, Ялта-Форос, Україна, 23-27 вересня 2013. Київ, 2013. С. 138.
- [71] Harko T., Lobo F.S.N., Mak M.K. Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates. *Applied Mathematics and Computation*. 2014. №236. P. 184—194.
- [72] Хусаїнов Д.Я., Шатирко А.В. Аналіз однієї епідеміологічної моделі з післядією. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Кібернетика*. 2017. В. 1. С. 36—44.
- [73] Miller J.C. Mathematical models of SIR disease spread with combined non-sexual and sexual transmission routes. *Infectious Disease Modelling*. 2017. №2. P. 35—55.
- [74] Kermack W.O., McKendrick A.G. A Contribution to the Mathematical Theory Of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London*. 1927. Series A, vol. 115, no. 772.
- [75] Хусаїнов Д.Я. Аналіз моделі розповсюдження захворювання. *Problems of Dicismon Making under Uncertainties (PDMU-2013)*: тези XXII міжнародної конференції, Ялта-Форос, Україна, 23-27 вересня 2013. Київ, 2013. С. 138.
- [76] Хусаїнов Д.Я., Шатирко А.В. Аналіз однієї епідеміологічної моделі з післядією. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Кібернетика*. 2017. В. 1. С. 36—44.
- [77] Miller J.C. Mathematical models of SIR disease spread with combined non-sexual and sexual transmission routes. *Infectious Disease Modelling*. 2017. №2. P. 35—55.
- [78] Adda P., Bichara D. Global stability for SIR and SIRS models with differential mortality. *arXiv preprint arXiv: 1112.2662*. 2011. Режим доступу <https://arxiv.org/pdf/1112.2662.pdf>

- [79] Allen L. J. Some discrete-time SI, SIR, and SIS epidemic models. *Mathematical biosciences*. 1994. Vol. 124(1). P. 83–105.
- [80] Hu H., Yuan X., Huang L., Huang C. Global dynamics of an SIRS model with demographics and transfer from infectious to susceptible on heterogeneous networks. *Math. Biosci. Eng.* 2019. Vol. 16(5). P. 5729–5749.
- [81] Аджубей Л.А., Івохін Є.В. Про деякі математичні моделі формалізації соціоінформаційних потоків. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки*. 2017. №2 С. 70–73.
- [82] Івохін Є.В. Математичні моделі процесу розповсюдження реклами в соціальній групі. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. 2017. №6 С. 122–127.
- [83] Ivokhin E.V., Naumenko Yu.O. On an Approach to Construction of Structured Fuzzy Sets and their Application for Description of Fuzzy Time Response. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. №7 P. 79–86.
- [84] Nakonechnyi O.G., Shevchuk I.M. Stability under stochastic perturbation of solutions of mathematical models of information spreading process with external control. *Mathematical modeling and computing*. 2018. No1. P.67 – 73.
- [85] Наконечний О.Г., Шевчук Ю.М., Чикрій В.К. Оцінка нестационарних параметрів диференціальних рівнянь в умовах невизначеності. *Кібернетика і системний аналіз*. 2018. No4. С.109 – 121
- [86] Бакан Г.М. Эллипсоидальные алгоритмы гарантированного оценивания и рекуррентный метод наименьших квадратов в задачах фильтрации состояний динамических систем. *Проблемы управления и информатики*. 1997. №3. С. 34–48.
- [87] Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наукова думка, 2006. 264 с.
- [88] Gubarev V.F. Method of iterative identification of multidimensional systems by uncertain data. Part I. Theoretical aspects. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2006. Vol. 38, №9. P. 12–28.
- [89] Gubarev V.F., Shevchenko V.N., Gummel A.V. State estimation for systems subjected to bounded uncertainty using moving horizon approach. *IFAC Proceedings Volumes*. 2009. Vol. 42, №10. P. 910–915.
- [90] Губарев В.Ф., Дарьин А.Н., Лысюченко И.А. Нелинейный оценщик состояния по заданным на скользящем интервале и возможность его применения в задаче ориентации космического аппарата. *Проблемы управления и информатики*. 2011. №1. С. 118–132.

- [91] Nakonechnyi O.G. Beast-mean estimates in model of information confrontation. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES*: abstracts of XXIV International Conference, Cesky Rudolec, Czech Republic, September 1-5 2014. Kyiv, 2014. P.114—115.
- [92] Martynyuk A.A., Khusainov D. Ya., Chernienko V.A. Integral estimates of solutions to nonlinear systems and their applications. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. 2016. №1. P.1—11.
- [93] Наконечний О.Г. Задачі гарантованого оцінювання параметрів в динаміці. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES* : тези XVII міжнародної конференції, Східниця, Україна, 23-27 травня 2011. Київ, 2011. P.141.
- [94] Наконечний О.Г. Оцінювання параметрів в умовах невизначеності. *Наукові записки Київського національного університету, факультет кібернетики*. 2004. Т.VII. С. 102—111.
- [95] Ramsay J. O. Hooker G., Campbell D., Cao J. Parameter estimation for differential equations: a generalized smoothing approach. *Royal Statistic Society*. 2007. Vol. 69, №5. P. 741—796.
- [96] Aster R.C., Borchers B., Thurber C.H. Parameter estimation and inverse problems: eBook. Academic Press, 2013. P. 376.
- [97] Nakonechnyi O.G., Zinko P.M. Estimation of unsteady parameters in model of information confrontation. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES*: abstracts of XXVIII International Conference , Brno, Czech Republic, August 25-30 2016. Kyiv, 2016. P.82—83.
- [98] Nakonechnyi O.G., Zinko P.M., Shevchuk I.M. Guaranteed predictive estimation in models of information confrontation. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2017)*: abstracts of XXX International Conference, Vilnius, Lithuania, August 14-19 2017. Kyiv, 2017. P.91 — 92.
- [99] Nakonechnyi O.G., Zinko P.M., Shevchuk I.M. Estimate of parameters of difference equations under uncertainty. *Ukrainian conference on applied mathematics*: abstracts of conference, Lviv, Ukraine , September 28-30 2017. Lviv, 2017. P.86.
- [100] Наконечний О.Г., Зінко П.М., Шевчук Ю.М. Аналіз нестационарних математичних моделей поширення інформації в умовах невизначеності. *Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій*: тези міжнародної наукової конференції, м. Рівне, Україна, 2-4 березня 2018. Рівне, 2018. С.182 — 184.
- [101] Nakonechnyi O.G., Zinko P.M., Shevchuk I.M. Optimal estimation of non-stationary parameters of difference equations. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER*

- UNCERTAINTIES (PDMU-2018)*: abstracts of XXXI International Conference, Lankaran-Baru, Republic of Azerbaijan, July 3-8 2018. Kyiv, 2018. P.96 — 97.
- [102] Nakonechnyi O.G., Zinko P.M., Shevchuk I.M. Estimation of influence for models of information spreading process under uncertainty. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2017)*: abstracts of XXXII International Conference, Prague, Czech Republic, August 27-31 2018. Kyiv, 2018. P.93 — 94.
- [103] Наконечний О.Г., Зінко П.М., Шевчук Ю.М. Керування процесами протидії в моделях поширення інформації. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: тези XXIV Всеукраїнської наукової конференції*, м. Львів, Україна, 26-28 вересня 2018. Львів, 2018. С.109.