ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

А. В. Кузьмін, О. Ф. Кашпур, В. С. Вовк

# Навчальний посібник : практикум з дисципліни "Рівняння математичної фізики"

Київ 2025

**УДК 530.145**

**Рецензенти:** д-р фіз.-мат. наук, проф. І.К. Рисцов,
д-р фіз.-мат. наук, проф. В.В. Семенов

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол № 10 від 19 лютого 2025 року)

Ухвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол № 6 від 17 лютого 2025 року)

к. ф.-м. наук, доцент Кузьмін Анатолій Володимирович

д. ф.-м. наук, доцент Кашпур Олена Федорівна

асистент Вовк Віталій Сергійович

Навчальний посібник: практикум з дисципліни «Рівняння математичної фізики» / А.В. Кузьмін, О.Ф. Кашпур, В.С. Вовк – Київ: 2025

В навчальному посібнику викладені методи розв'язання типових задач з дисципліни Рівняння математичної фізики, яку студенти опановують протягом двох навчальних семестрів. Наведені задачі для самостійного розв'язання під час практичних занять, та домашнього виконання.

Рекомендовано для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики спеціальності прикладна математика за освітнім рівнем бакалавр.

Теоретичні основи методів розв'язання задач та усі необхідні формули, що використовуються при їх розв'язанні, студенти можуть знайти в лекційному курсі, який вони слухають в рамках вивчення дисципліни "Рівняння математичної фізики", яка викладається для здобувачів освітньо-професійної програми "Прикладна математика".

© Кузьмін А.В., Кашпур О.Ф., Вовк В.С., 2025

# ЗМІСТ

Практичне заняття №1.....6

Тема: Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтера

Практичне заняття №2.....11

Тема: Знаходження розв'язку інтегральних рівнянь другого роду з виродженим ядром

Практичне заняття №3.....18

Тема: Інтегральні рівняння, використання теорем Фредгольма

Практичне заняття №4.....25

Тема: Інтегральні рівняння з виродженим ядром застосування теорем Фредгольма

Практичне заняття №5.....30

Тема: Використання формули Шмідта для знаходження розв'язків інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

Практичне заняття №6.....36

Тема: Побудова функції Гріна

Практичне заняття №7.....42

Тема: Постановка граничних задач, які описують процеси розповсюдження тепла

Практичне заняття №8.....48

Тема: Постановка граничних задач для процесів дифузії речовини в розчинах та розплавах.

Практичне заняття №9.....51

Тема: Постановка граничних задач для рівняння коливання струни

Практичне заняття №10.....54

Тема: Математична модель повздовжніх коливань стрижня

Практичне заняття №11.....59

Тема: Математичні моделі руху ідеальної речовини

Практичне заняття №12.....63

Тема: Класифікація рівнянь в частинних похідних другого порядку з двома незалежними змінними

Практичне заняття №13.....67

Тема: Класифікація лінійних рівнянь та приведення до канонічного вигляду запису з n>2 незалежними змінними

Практичне заняття №14.....72

Тема: Метод відокремлення змінних для рівнянь параболічного та гіперболічного типів

Практичне заняття №15.....78

Тема: Метод Фур'є знаходження розв'язків граничної задачі для одновимірного параболічного рівняння

Практичне заняття №16.....82

Тема: Метод відокремлення змінних (Фур'є) для рівняння Лапласа та Пуассона в кругових областях

Практичне заняття №17.....87

Тема: Рівняння Пуассона в кругових областях

Практичне заняття №18.....92

Тема: Граничні задачі для рівняння Лапласа і Пуассона в прямокутнику

Практичне заняття №19.....100

Тема: Задача Коші для рівняння коливання струни. Формула Даламбера.

Практичне заняття №20.....105

Тема: Розв'язання граничних задач для рівняння коливання струни для півпрямої з однорідними граничними умовами.

Практичне заняття №21.....111
Тема: Метод відокремлення змінних для рівняння Лапласа та Пуассона в циліндричних координатах
Практичне заняття №22.....115
Тема: Метод відокремлення змінних розв'язання граничних задач рівняння Лапласа і Пуассона в циліндричних областях
Практичне заняття №23.....119
Тема: Задачі на власні значення для оператора Лапласа в прямокутних та кругових областях
Практичне заняття №24.....123
Тема: Метод Фур'є для граничних задач параболічного та гіперболічного типу в канонічних областях на площині.
Практичне заняття №25.....128
Тема: Побудова функції Гріна та знаходження розв'язку граничних задач для рівняння Лапласа та Пуассона
Практичне заняття №26.....133
Тема: Побудова функції Гріна та знаходження розв'язку граничних задач для рівняння Лапласа та Пуассона
Практичне заняття №27.....139
Тема: Потенціали та їх використання для розв'язання граничних задач
Практичне заняття №28.....143
Тема: Потенціали та їх використання для розв'язання граничних задач
Теми модульних контрольних робіт.....148
Література.....149

## Практичне заняття №1

## *Тема:* Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтера

*Задача 1.* Методом послідовних наближень знайти розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма другого роду $\varphi = \lambda K\varphi + f$.

*Розв'язання.* Запишемо послідовні наближення розв'язку рівняння

$$\varphi_0 = f,\ \varphi_1 = \lambda K\varphi_0 + f,\ \varphi_2 = \lambda K\varphi_1 + f, ...,\ \varphi_{n+1} = \lambda K\varphi_n + f$$

та підставимо початкове наближення:

$$\varphi_1 = \lambda Kf + f,\ \varphi_2 = \lambda K \cdot (\lambda Kf + f) + f = \lambda^2 K^2 f + \lambda Kf + f;$$

Припустимо, що

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i K^i f. \tag{1}$$

Методом математичної індукції покажемо справедливість цієї формули:

$$\varphi_{n+1} = \lambda K\varphi_n + f = \lambda K \left( \sum_{i=0}^{n} \lambda^i K^i f \right) + f.$$

Таким чином розв'язок рівняння Фредгольма за методом послідовних наближень можна записати у вигляді ряду Неймана

$$\varphi = \lim_{i\to\infty} \varphi_n = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i K^i f.$$

*Задача 2.* Показати справедливість оцінки

$$||K\varphi||_{C(G)} \le MV||\varphi||_{C(G)}, \tag{2}$$

де $M = \max\limits_{x,y\in(G\times G)} |K(x,y)|,\ \ V = \int\limits_G dy.$

*Розв'язання.* Покажемо неперервність функції $(K\varphi)(x)$. Розглянемо

$$|(K\varphi)(x') - (K\varphi)(x'')| = \left| \int\limits_G (K(x', y) - K(x'', y))\, \varphi(y) dy \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_G |(K(x', y) - K(x'', y)||\varphi(y)|dy \leq \varepsilon \int\limits_G |\varphi(y)|dy \leq \varepsilon \max_{x\in\bar{G}} |\varphi(y)| \int\limits_G dy =$$

$$= \varepsilon ||\varphi||_{C(\bar{G})} V.$$

Доведемо нерівність (2):

$$||K\varphi||_{C(G)} = \max_{x\in\bar{G}} |\int\limits_G K(x, y)\varphi(y)dy| \leq \max_{x\in\bar{G}} \int\limits_G |K(x, y)||\varphi(y)|dy \leq$$

$$\leq M \max_{y\in\bar{G}} |\varphi(y)| \int\limits_G dy = MV||\varphi||_{C(G)}.$$

*Задача 3.* Довести оцінку

$$||K\varphi||_{L_2(G)} \leq MV||\varphi||_{L_2(G)}. \tag{3}$$

*Розв'язання.* Для доведення (3) застосуємо нерівність Коші-Буняківського

$$||K\varphi||^2_{L_2(\bar{G})} = \int\limits_G |(K\varphi)(x)|^2 dx = \int\limits_G \left| \int\limits_G K(x, y)\varphi(y)dy \right|^2 dx \leq$$

$$\leq \left( \max_{(x,y)\in G\times G} |K(x, y)|^2 \right) \int\limits_G \left| \int\limits_G \varphi(y)dy \right|^2 dx \leq$$

$$\leq M^2 \int\limits_G \left( \int\limits_G |\varphi(y)|^2 dy \int\limits_G dy \right) dx =$$

$$= M^2 ||\varphi||^2_{L_2(G)} V \int\limits_G dx = M^2 V^2 ||\varphi||^2_{L_2(G)}$$

*Задача 4. (Повторні ядра)* Нехай $K_i$ - інтегральний оператор з ядром $K_i(x,y), i=1,2$. Необхідно визначити результат $K_2K_1\varphi$.

*Розв'язання.*

$$(K_3\varphi)(x) = (K_2K_1\varphi)(x) = \int\limits_G K_2(x,z)\left(\int\limits_G K_1(z,y)\varphi(y)dy\right)dz =$$

$$= \int\limits_G \left(\int\limits_G K_2(x,z)K_1(z,y)dz\right)\varphi(y)dy = \int\limits_G K_3(x,y)\varphi(y)dy.$$

Таким чином, інтегральному оператору $K_3 = K_2K_1$ відповідає інтегральний оператор

$$K_3(x,y) = \int\limits_G K_2(x,z)K_1(z,y)dz.$$

Обчислимо тепер ядро для цілої степені інтегрального оператора $K$:

$$K^2 = KK \to K_{(2)}(x,y) = \int\limits_G K(x,z)K(z,y)dz,$$

$$K^3 = KK^2 \to K_{(3)}(x,y) = \int\limits_G K(x,z)K_{(2)}(z,y)dz,$$

$$K^{n+1} = KK^n \to K_{(n+1)}(x,y) = \int\limits_G K(x,z)K_{(n)}(z,y)dz.$$

*Задача 5. (Резольвента)* Записати резольвенту інтегрального оператора.

*Розв'язання.* Запишемо ряд Неймана

$$\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i k^i f = f + \lambda\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i-1}k^i f.$$

Використовуючи повторні ядра остання формула набуде вигляду

$$f(x) + \lambda\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}\int\limits_G K_{(i)}(x,y)f(y)dy =$$

$$= f(x) + \lambda \int\limits_G \left( \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) \right) f(y) dy.$$

Таким чином резольвента визначається за формулою

$$R(x,y;\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y). \tag{4}$$

В операторному вигляді розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма другого роду матиме вигляд

$$\varphi = f + \lambda R f, \;\; \varphi = (E + \lambda R) f.$$

*Задача 6.* Довести рівномірну збіжність резольвенти.

*Задача 7.* Дослідити метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь Вольтера.

*Розв'язання.* Інтегральне рівняння Вольтера для одновимірного випадку має вигляд:

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^x K(x,y)\varphi(y)dy + f(x); a \le x \le b, \tag{5}$$

в просторі розмірності $n$ відповідно:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda \int\limits_{a_1}^{x_1} \int\limits_{a_2}^{x_2} \ldots, \int\limits_{a_n}^{x_n} K(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) \times \tag{6}$$

$$\times \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n + f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Розглянемо метод послідовних наближень для рівняння Вольтера (5). В операторному вигляді маємо: $\varphi = f + \lambda K f$.

$$\varphi_0 = f; \;\; \varphi_1 = \lambda K \varphi_0 + f; \ldots; \varphi_{n+1} = \lambda K \varphi_n + f;$$

$$\varphi_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i K^i f. \tag{7}$$

Дослідимо збіжність ряду (7). Для цього побудуємо мажорантний рівномірно збіжний ряд та оцінимо загальний член ряду:

$$|Kf| = \left| \int_a^x K(x,y)f(y)dy \right| \leq \int_a^x |K(x,y)|f(y)|dy \leq$$

$$\leq M||f||_{C([a,b])} \int_a^x dy = M||f||_{C([a,b])}(x-a),$$

де $M = M = \max\limits_{x,y\in(G\times G)} |K(x,y)|$,

$$|K^2 f| = \left| \int_a^x K(x,y)(Kf)(y)dy \right| \leq M^2||f||_{C([a,b])} \int_a^x (y-a)dy =$$

$$= M^2||f||_{C([a,b])} \int_0^{x-a} zdz = \frac{(x-a)^2}{2} M^2||f||_{C([a,b])}.$$

Припустимо, що

$$|K^n f| \leq M^n||f||_{C([a,b])} \frac{(x-a)^n}{n!},$$

тоді по індукції маємо

$$|K^n f| \leq M^{n+1}||f||_{C([a,b])} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Запишемо мажорантний ряд

$$||f|| \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda|^i M^i \frac{(x-a)^i}{i!} = ||f||_{C([a,b])} e^{|\lambda|M(x-a)}.$$

Тобто ряд Неймана для рівняння Вольтера збігається абсолютно і рівномірно для довільних значень параметру $\lambda$.

*Домашнє завдання:*

*Задача 1.* Нехай $K$ — інтегральний оператор з неперервним ядром, оператори $K^p = K(K^{p-1}), p = 2, 3, \ldots$ є інтегральними операторами з неперервними ядрами

$$K_p(x, y) = \int\limits_G K(x, \xi) K_{p-1}(\xi, y) d\xi.$$

Показати, що ядра $K_p(x, y)$ (вони називаються повторними або ітерованими) ядрами ядра $K(x, y)$), задовольняють нерівностям: $|K_p(x, y)| \leq M^p V^{p-1}$, $p = 1, 2, \ldots$.

*Задача 2,3.* Показати, що резольвента $R(x, y; \lambda)$ неперервного ядра $K(x, y)$, $|\lambda| < \dfrac{1}{MV}$ задовольняє кожне з рівнянь:

а) $R(x, y; \lambda) = \lambda \int\limits_G K(x, \xi) R(\xi, y; \lambda) d\xi + K(x, y)$,

б) $\dfrac{\partial R(\xi, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \int\limits_G R(x, \xi; \lambda) R(\xi, y; \lambda) d\xi$.

*Задача 4,5.* Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi = \lambda \int\limits_{-1}^{1} K(x, y) \varphi(y) dy + f(x)$$

1) $K(x, y) = x - 1, f(x) = x$;

2) $K(x, y) = 2e^{x+y}, f(x) = e^x$.

## Практичне заняття №2

### *Тема:* Знаходження розв'язку інтегральних рівнянь другого роду з виродженим ядром

*Задача 1.* Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (xy + x^2 y^2) \varphi(y) dy + x^2 + x^4$$

*Розв'язання.* Рівняння має вироджене ядро, тому зведемо інтегральне рівняння до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).

$$\varphi(x) = \lambda x \int\limits_{-1}^{1} y\varphi(y)dy + \lambda x^2 \int\limits_{-1}^{1} y^2\varphi(y)dy + x^2 + x^4 =$$

$$= \lambda x C_1 + \lambda x^2 C_2 + x^2 + x^4,$$

де

$$C_1 = \int\limits_{-1}^{1} y\varphi(y)dy = \int\limits_{-1}^{1} y(\lambda y C_1 + \lambda y^2 C_2 + y^2 + y^4)dy,$$

$$C_2 = \int\limits_{-1}^{1} y^2\varphi(y)dy = \int\limits_{-1}^{1} y^2(\lambda y C_1 + \lambda y^2 C_2 + y^2 + y^4)dy.$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} C_1 = \lambda C_1 \dfrac{2}{3} + \lambda C_2 \cdot 0 + 0 + 0 \\ C_2 = \lambda C_1 \cdot 0 + \lambda C_2 \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{7} \end{cases},$$

$$\begin{cases} (1 - \dfrac{2}{3}\lambda)C_1 + 0\lambda C_2 = 0 \\ 0 \cdot \lambda C_1 + (1 - \dfrac{2}{5}\lambda)C_2 = \dfrac{24}{35} \end{cases}.$$

Запишемо визначник цієї системи та знайдемо значення параметра $\lambda$, при яких він дорівнює нулю:

$$D(\lambda) = \begin{Vmatrix} 1 - \dfrac{2}{3}\lambda & 0 \\ 0 & 1 - \dfrac{2}{5}\lambda \end{Vmatrix} = (1 - \frac{2}{3}\lambda)(1 - \frac{2}{5}\lambda) = 0,$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}, \;\; \lambda_1 = \frac{5}{2}.$$

Розглянемо випадки:

1) $\lambda \neq \lambda_1, \lambda \neq \lambda_2$. Тоді $D(\lambda) \neq 0$ і розв'язок СЛАР існує для довільного вільного члена $C_1 = 0, C_2 = \dfrac{24}{7(5-2\lambda)}$. Розв'язок рівняння має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{24x^2}{7(5-2\lambda)} + x^2 + x^4.$$

2) $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{3}{2}$. У цьому випадку СЛАР набуває вигляду

$$\begin{cases} 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 = 0 \\ 0 \cdot C_1 + \dfrac{2}{5} C_2 = \dfrac{24}{35} \end{cases}.$$

Згідно з теоремою Кронекера-Капелі, ранги основної і розширеної матриць співпадають, а тому розв'язок існує, але є неєдиним

$$C_2 = \frac{12}{7}, \;\; C_1 = C_1 - \forall, \;\; \varphi(x) = \frac{3}{2} C_1 x + \frac{3}{2}\frac{12}{7} x^2 + x^2 + x^4.$$

3) Нехай $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{5}{2}$. Тоді

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{3} C_1 + 0 \cdot C_2 = 0 \\ 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 = \dfrac{24}{35} \end{cases}$$

СЛАР немає розв'язку, а тому не має розв'язку і інтегральне рівняння.

*Задача 2.* Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (2xy^3 + 5x^2y^2)\varphi(y)dy + 7x^4 + 3.$$

*Розв'язання.* Маємо

$$\varphi(x) = \lambda 2x \int_{-1}^{1} y^3 \varphi(y)dy + \lambda 5x^2 \int_{-1}^{1} y^2 \varphi(y)dy + 7x^4 + 3 =$$

$$= \lambda 2xC_1 + \lambda 5x^2C_2 + 7x^4 + 3,$$

де

$$C_1 = \int\limits_{-1}^{1} y^3\varphi(y)dy = \int\limits_{-1}^{1} y^3(2\lambda yC_1 + 5\lambda y^2C_2 + 7y^4 + 3)dy,$$

$$C_2 = \int\limits_{-1}^{1} y^2\varphi(y)dy = \int\limits_{-1}^{1} y^2(2\lambda yC_1 + 5\lambda y^2C_2 + 7y^4 + 3)dy.$$

Система для визначення сталих $C_1$ та $C_2$ набуває вигляду

$$\begin{cases} C_1 = 2\lambda C_1\dfrac{2}{5} + 5\lambda C_2 \cdot 0 + 0 + 0 \\ C_2 = 2\lambda C_1 \cdot 0 + 5\lambda C_2\dfrac{2}{5} + \dfrac{14}{7} + \dfrac{6}{3} \end{cases}.$$

Знайдемо значення параметрів $\lambda$ при яких $D(\lambda) = 0$

$$\begin{cases} C_1(1 - \dfrac{4\lambda}{5}) + 0 \cdot C_2 = 0 \\ 0 \cdot C_1 + (1 - 2\lambda)C_2 = 2 \end{cases}, \quad D(\lambda) = \begin{Vmatrix} 1 - \dfrac{4\lambda}{5} & 0 \\ 0 & 1 - 2\lambda \end{Vmatrix} = 0,$$

$$(1 - \frac{4\lambda}{5})(1 - 2\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \frac{5}{4}, \;\; \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Розглянемо випадки

1) Якщо $\lambda \neq \lambda_1, \lambda \neq \lambda_2$, тоді $C_1 = 0, C_2 = \dfrac{2}{1 - 2\lambda}$. Розв'язок існує та єдиний

$$\varphi(x) = \frac{10\lambda x^2}{1 - 2\lambda} + 7x^4 + 3.$$

2) Нехай $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{5}{4}$, тоді

$$\begin{cases} 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 = 0 \\ 0 \cdot C_1 - \dfrac{3}{2}C_2 = 2 \end{cases}, C_2 = -\frac{4}{3}, C_1 = C_1 - \forall.$$

Розв'язок існує і не єдиний. $\varphi(x) = C_1x + \dfrac{25}{4}(-\dfrac{4}{3})x^2 + 7x^4 + 3.$

3) У випадку $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ маємо

$$\begin{cases} \dfrac{3}{5}C_1 + 0 \cdot C_2 = 0 \\ 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 = 2 \end{cases}.$$

Система розв'язків немає, тому немає роз'язків інтегрального рівняння.

*Задача 3.* Знайти характеристичні числа та власні функції інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^{2\pi} \left[\sin(x+y) + \frac{1}{2}\right] \varphi(y)dy.$$

*Розв'язання.*

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^{2\pi} (\sin x \cos y + \sin y \cos x + \frac{1}{2})\varphi(y)dy.$$

Маємо рівняння з виродженим ядром

$$\varphi(x) = \lambda \sin x \int\limits_0^{2\pi} \cos y\varphi(y)dy + \lambda \cos x \int\limits_0^{2\pi} \sin y\varphi(y)dy + \frac{1}{2}\lambda \int\limits_0^{2\pi} \varphi(y)dy =$$

$$= \lambda \sin xC_1 + \lambda \cos xC_2 + \frac{1}{2}\lambda C_3,$$

де

$$C_1 = \int\limits_0^{2\pi} \cos y\varphi(y)dy = \int\limits_0^{2\pi} \cos y(\lambda \sin yC_1 + \lambda \cos yC_2 + \frac{1}{2}\lambda C_3)dy,$$

$$C_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sin y\varphi(y)dy = \int\limits_0^{2\pi} \sin y(\lambda \sin yC_1 + \lambda \cos yC_2 + \frac{1}{2}\lambda C_3)dy,$$

$$C_3 = \int\limits_0^{2\pi} \varphi(y)dy = \int\limits_0^{2\pi} (\lambda \sin y C_1 + \lambda \cos y C_2 + \frac{1}{2}\lambda C_3)dy.$$

Після обчислень отримаємо

$$C_1 = 0 \cdot \lambda C_1 + \pi\lambda C_2 + \frac{1}{2}\lambda C_3 \cdot 0,$$

$$C_2 = \pi\lambda C_1 + 0 \cdot \lambda C_2 + \frac{1}{2}\lambda C_3 \cdot 0,$$

$$C_3 = 0 \cdot \lambda C_1 + 0 \cdot \lambda C_2 + \frac{1}{2}\lambda C_3 2.\pi$$

Запишемо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь та знайдемо характеристичні числа: $\begin{cases} C_1 - \lambda\pi C_2 = 0 \\ -\lambda\pi C_1 + C_2 = 0 \\ C_3(1 - \lambda\pi) = 0 \end{cases}$. Запишемо визначник та прирівняємо до нуля:

$$D(\lambda) = \begin{Vmatrix} 1 & -\lambda\pi & 0 \\ -\lambda\pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda\pi \end{Vmatrix} = 0,$$

$$(1 - \lambda\pi)(1 - \lambda^2\pi^2) = (1 - \lambda\pi)(1 - \lambda\pi)(1 + \lambda\pi) = 0.$$

Отримали, що $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}; \lambda_2 = \frac{1}{\pi}; \lambda_3 = -\frac{1}{\pi}$ — характеристичні числа інтегрального рівняння.

Шукаємо власні функції для $\lambda = \lambda_3 = -\frac{1}{\pi}$. Для цього в СЛАР підставимо значення $\lambda = \lambda_3$. Маємо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_3 = 0 \end{cases} .$$

Ранг матриці дорівнює 2, таким чином існує $3-2=1$ розв'язок системи

$$C_1 = -C_2 = 1, \;\; C_3 = 0,$$

$$\varphi^{(3)}(x) = -\frac{1}{\pi}\sin x + \frac{1}{\pi}\, cosx$$

є власною функцією характеристичного числа $\lambda_3 = -\frac{1}{\pi}$. Або враховуючи, що функція визначається з точністю до множника

$$\varphi^{(3)}(x) = \sin x - \cos x.$$

Розглянемо випадок $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{\pi}$. Система набуває вигляду:

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = 0 \\ 0 \cdot C_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матриці дорівнює 1, тобто існує 3-1=2 лінійно незалежних розв'язків $C_1 = C_2 + 0 \cdot C_3$. Нехай

$$C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 0, \overrightarrow{C}^{(1)} = (1, 1, 0),$$

$$C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 1, \overrightarrow{C}^{(2)} = (0, 0, 1).$$

Тоді можна записати

$$\varphi^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\sin x + \frac{1}{\pi}\cos x;$$

або

$$\varphi^{(1)}(x) = \sin x + \cos x$$

$$\varphi_2(x) = 1$$

*Домашнє завдання:*

*Задача 1-3.* Розв'язати інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} K(x,y)\varphi(y)dy + f(x)$$

У таких випадках:

1) $K(x,y) = x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}, f(x) = 1 - 6x^2$

2) $K(x,y) = x^2 + xy, f(x) = x^2 + x$

3) $K(x,y) = 5 + 4xy - 3x^2 - 3y^2 + 9x^2y^2, f(x) = x$

*Задача 4.* Знайти усі характеристичні числа і відповідні власні функції інтегрального рівняння:

$$\varphi(x) = \lambda \int_{0}^{2\pi} \left[\cos^2(x+y) + \frac{1}{2}\right] \varphi(y)dy$$

## Практичне заняття №3

### *Тема:* Інтегральні рівняння, використання теорем Фредгольма

*Задача 1.* Знайти усі значення параметрів $a, b$ при яких інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (1 + x^2 + y^3)\varphi(y)dy + ax + bx^3$$

має розв'язок для всіх $\lambda$.

*Розв'язання.* Використаємо третю теорему Фредгольма. Запишемо спряжене однорідне рівняння та знайдемо його характеристичні числа та власні функції:

$$\psi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (1 + y^2 + x^3)\psi(y)dy,$$

$$\psi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (1+y^2)\psi(y)dy + \lambda x^3 \int_{-1}^{1} \psi(y)dy = \lambda C_1 + \lambda x^3 C_2,$$

де

$$C_1 = \int_{-1}^{1} (1+y^2)(\lambda C_1 + \lambda y^3 C_2)dy,$$

$$C_2 = \int_{-1}^{1} \psi(y)dy = \int_{-1}^{1} (\lambda C_1 + \lambda y^3 C_2)dy.$$

Система набуває вигляду

$$\begin{cases} C_1 = \lambda C_1 \left(2 + \frac{2}{3}\right) + \lambda C_2 \cdot 0 \\ C_2 = \lambda C_1 2 + \lambda C_2 \cdot 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} C_1 \left(1 - \frac{8}{3}\lambda\right) + 0 \cdot C_2 = 0 \\ -2\lambda C_1 + C_2 = 0 \end{cases}.$$

Визначник системи:

$$D(\lambda) = \begin{Vmatrix} 1 - \frac{8}{3}\lambda & 0 \\ -2\lambda & 1 \end{Vmatrix} = (1 - \frac{8}{3}\lambda) = 0.$$

Таким чином інтегральний оператор має одне характеристичне число $\lambda_1 = \frac{3}{8}$. Знайдемо власну функцію, що відповідає $\lambda_1$:

$$\begin{cases} 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 = 0 \\ -\frac{3}{4}C_1 + C_2 = 0 \end{cases}, \quad C_2 = \frac{3}{4}C_1,$$

$$\psi_1(x) = C_1(1 + \frac{3}{4}x^3)$$

або

$$\psi_1(x) = 4 + 3x^3$$

Запишемо умову ортогональності вільного члена $ax + bx^3$ та власної функції $\varphi_1(x)$:

$$\int_{-1}^{1}(ax + bx^3)(4 + 3x^3)dx = \int_{-1}^{1}(4ax + 4bx^3 + 3ax^4 + 3bx^6)dx =$$

$$= 3a\frac{2}{5} + 3b\frac{2}{7} = 0, 7a + 5b = 0. \qquad (*)$$

При виконанні умови (*) інтегральне рівняння має розв'язок для $\forall$ значень параметра $\lambda$.

*Задача 2.* Знайти усі значення параметрів $a, b$ при яких інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left(xy - \frac{1}{3}\right)\varphi(y)dy + ax^2 - bx + 1$$

має розв'язок для всіх $\lambda$.

*Розв'язання.* Знайдемо характеристичні числа та власні функції ядра інтегрального рівняння. Оскільки рівняння має симетричне ядро, то однорідне рівняння співпадає із спряженим однорідним:

$$\varphi(x) = \lambda x \int_0^1 y\varphi(y)dy - \frac{1}{3}\lambda \int_0^1 \varphi(y)dy = \lambda x C_1 - \frac{1}{3}\lambda C_2,$$

де

$$C_1 = \int_0^1 y\varphi(y)dy = \int_0^1 y\left(\lambda x C_1 - \frac{1}{3}\lambda C_2\right)dy = \lambda C_1\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda C_2\frac{1}{2},$$

$$C_2 = \int_0^1 \varphi(y)dy = \int_0^1 \left(\lambda x C_1 - \frac{1}{3}\lambda C_2\right)dy = \lambda C_1\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\lambda C_2.$$

Одержимо СЛАР

$$\begin{cases} C_1(1 - \frac{\lambda}{3}) + \lambda C_2\frac{1}{6} = 0 \\ -\lambda C_1\frac{1}{2} + (1 + \frac{\lambda}{3})C_2 = 0. \end{cases}$$

Запишемо визначник системи та прирівняємо його нуля

$$D(\lambda) = \begin{Vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{3} & \frac{\lambda}{6} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \frac{\lambda}{3} \end{Vmatrix} = (1 - \frac{\lambda}{6})(1 + \frac{\lambda}{6}) = 0.$$

Звідки отримаємо: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -6$ є характеристичними числами.

Знайдемо власні функції, які відповідають $\lambda_1, \lambda_2$.

1) Нехай $\lambda = \lambda_1$, тоді

$$\begin{cases} C_1(1-2) + C_2 = 0 \\ -C_1 + C_2 = 0 \end{cases}, \quad C_1 = C_2,$$

а функція $\varphi_1(x) = 3x - 1$ є власною функцією, що відповідає характеристичному числу $\lambda_1$.

2) Якщо $\lambda = \lambda_2$, то

$$3C_1 - C_2 = 0, \;\; C_2 = 3C_1, \;\; \varphi_2(x) = C_1(x-1),$$

або $\varphi_2(x) = x - 1$ — власна функція для $\lambda_2$

Використаємо третю теорему Фредгольма. Для цього перевіримо умови ортогональності

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 (ax^2 - bx + 1)(3x - 1)dx = 0 \\ \int\limits_0^1 (ax^2 - bx + 1)(x - 1)dx = 0 \end{cases}, \begin{cases} 5a - 6b = -6 \\ a - 2b = -6 \end{cases}.$$

Отже $a = 6, \; b = 6$. При цих значеннях параметрів інтегральне рівняння має розв'язки при будь-яких значеннях параметра $\lambda$.

*Задача 3.* Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (1 + xy)\varphi(y)dy + ax^2 + bx + c$$

при всіх значеннях параметрів $\lambda, a, b, c$.

*Розв'язання.* Інтегральне рівняння має вироджене ядро:

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \varphi(y)dy + \lambda x \int_{-1}^{1} y\varphi(y)dy + ax^2 + bx + c =$$

$$= \lambda C_1 + \lambda x C_2 + ax^2 + bx + c,$$

де

$$C_1 = \int_{-1}^{1} \varphi(y)dy = \int_{-1}^{1} (\lambda C_1 + \lambda y C_2 + ay^2 + by + c)dy,$$

$$C_2 = \int_{-1}^{1} y\varphi(y)dy = \int_{-1}^{1} y(\lambda C_1 + \lambda y C_2 + ay^2 + by + c)dy.$$

Отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 = \lambda C_1 \cdot 2 + \lambda C_2 \cdot 0 + a\dfrac{2}{3} + 0 \cdot b + 2c \\ C_2 = \lambda C_1 \cdot 0 + \lambda C_2 \dfrac{2}{3} + 0 \cdot a + \dfrac{2}{3}b \end{cases},$$

$$\begin{cases} C_1(1 - 2\lambda) + \lambda C_2 \cdot 0 = a\dfrac{2}{3} + 2c \\ -\lambda C_1 \cdot 0 + (1 - \dfrac{2}{3}\lambda)C_2 = \dfrac{2}{3}b \end{cases}.$$

Запишемо визначник системи та знайдемо значення параметрів $\lambda$ при яких він дорівнює нулю

$$D(\lambda) = \begin{Vmatrix} 1 - 2\lambda & 0 \\ 0 & 1 - \dfrac{2}{3}\lambda \end{Vmatrix} = (1 - 2\lambda)(1 - \frac{2}{3}\lambda) = 0.$$

Одержимо $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{3}{2}$.

Розглянемо окремі випадки згідно до теорем Фредгольма.

1. Нехай параметр $\lambda$ не співпадає з жодним характеристичним числом $\lambda \neq \lambda_1,\ \lambda \neq \lambda_2,\ a, b, c$ - довільні. а сталі $C_1$ та $C_2$ знайдемо із системи рівнянь. Отримаємо

$$C_1 = \frac{2a + 6c}{3(1 - 2\lambda)},\ \ C_2 = \frac{2b}{3 - 2\lambda}.$$

Розв'язок інтегрального рівняння запишеться у вигляді

$$\varphi(x) = \lambda\frac{2a + 6c}{3(1 - 2\lambda)} + \lambda\frac{2b}{3 - 2\lambda} + ax^2 + bx + c.$$

2. Нехай $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$, тоді

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = a\frac{2}{3} + 2c \\ -C_1 \cdot 0 + \frac{2}{3}C_2 = \frac{2}{3}b \end{cases}.$$

Розширена матриця має вигляд

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \frac{2}{3}a + 2c \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}b \end{array}\right).$$

Ранг основної матриці дорівнює одиниці, ранг розширеної матриці буде співпадати з рангом основної при виконання умові

$$\left|\begin{array}{cc} 0 & \frac{2}{3}a + 2c \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3}b \end{array}\right| = \frac{2}{3}a + 2c = 0 \ \ \Rightarrow \ \ a + 3c = 0.$$

Якщо $a + 3c = 0$ тоді розв'язок системи

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ \frac{2}{3}C_2 = \frac{2}{3}b \end{cases}$$

існує: $C_1 = C_1$ — довільна стала, $C_2 = b$ та має вигляд

$$\varphi(x) = C_1 + \frac{1}{2}xb + c + bx - 3cx^2.$$

Якщо $a + 3c \neq 0$ розв'язків немає.

3. Нехай $\lambda = \lambda_2 = \frac{3}{2}$, тоді

$$\begin{cases} C_1(1-3) + C_2 \cdot 0 = \frac{2}{3}a + 2c \\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = \frac{2}{3}b \end{cases}.$$

Отже, розв'язок системи існує лише при $b = 0$:

$$\begin{cases} -2C_1 = \frac{2}{3}a + 2c \\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_2 - \forall,\ C_1 = -\frac{1}{3}a + c$$

та має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{3}{2}(c - \frac{1}{3}a) + C_2x + ax^2 + c.$$

При $b \neq 0$ розв'язків не існує.

*Домашнє завдання:*

*Задача 1.* Знайти розв'язок інтегральних рівнянь при всіх $\lambda$ і при всіх значеннях параметрів $a, b, c$ які входять у вільний член цих рівнянь.

1. $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2}(xy + x^2y^2)\varphi(y)dy + ax + b$
2. $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} \frac{1+xy}{1+y^2}\varphi(y)dy + a + x + bx^2$

*Задача 2.* Знайти усі значення параметрів $a, b, c$ при яких наступні інтегральні рівняння мають розв'язок при будь-яких $\lambda$

1. $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} \frac{1+xy}{\sqrt{1+y^2}}\varphi(y)dy + x^2 + ax + b$
2. $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{0}^{2\pi} \cos(2x + 4y)\varphi(y)dy + e^{ax+b}$

## Практичне заняття №4

## *Тема:* Інтегральні рівняння з симетричним ядром. Теореми Фредгольма

*Задача 1.* Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (xy + x^2 + y^2 - 3x^2y^2)\varphi(y)dy + ax + b$$

при усіх $\lambda$ і при усіх значеннях параметрів $a, b$, які входять у вільний член рівняння.

*Розв'язання.* Це рівняння із виродженим ядром:

$$\varphi(x) = \lambda x \int_{-1}^{1} y\varphi(y)dy + \lambda x^2 \int_{-1}^{1} \varphi(y)dy + \lambda(1 - 3x^2) \int_{-1}^{1} y^2\varphi(y)dy + ax + b =$$

$$= \lambda x C_1 + \lambda x^2 C_2 + \lambda(1 - 3x^2)C_3 + ax + b,$$

де

$$C_1 = \int_{-1}^{1} y\varphi(y)dy = \int_{-1}^{1} y(\lambda y C_1 + \lambda y^2 C_2 + \lambda(1 - 3y^2)C_3 + ay + b)dy,$$

$$C_2 = \int_{-1}^{1} \varphi(y)dy = \int_{-1}^{1} (\lambda y C_1 + \lambda y^2 C_2 + \lambda(1 - 3y^2)C_3 + ay + b)dy,$$

$$C_3 = \int_{-1}^{1} y^2\varphi(y)dy = \int_{-1}^{1} y^2(\lambda y C_1 + \lambda y^2 C_2 + \lambda(1 - 3y^2)C_3 + ay + b)dy.$$

Обчислимо інтеграли та отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 = \lambda C_1 \frac{2}{3} + \lambda C_2 0 + \lambda C_3 0 + \frac{2}{3}a \\ C_2 = \lambda C_1 0 + \frac{2}{3}\lambda C_2 + \lambda C_3(2 - 3\frac{2}{3}) + 2b \\ C_3 = \lambda C_1 0 + \frac{2}{5}\lambda C_2 + \lambda C_3(\frac{2}{3} - 3\frac{2}{5}) + \frac{2}{3}b \end{cases},$$

$$\begin{cases} C_1(1-\frac{2}{3}\lambda) = \frac{2}{3}a \\ C_1 0 + (1-\frac{2}{3}\lambda)C_2 + C_3 0 = 2b \\ -\frac{2}{5}\lambda C_2 + C_3(1+\frac{8}{15}\lambda) = \frac{2}{3}b \end{cases}.$$

Знайдемо характеристичні числа ядра інтегрального рівняння:

$$D(\lambda) = \begin{Vmatrix} 1-\frac{2}{3}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{2}{3}\lambda & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\lambda & 1+\frac{8}{15}\lambda \end{Vmatrix} = (1-\frac{2}{3}\lambda)^2(1+\frac{8}{15}\lambda) = 0.$$

Одержимо: $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, $\lambda_3 = -\frac{15}{8}$.

Розглянемо усі можливі значення параметру $\lambda$.

1) $\lambda \neq \frac{3}{2}$, $\lambda \neq -\frac{15}{8}$, тоді визначник системи не дорівнює нулю, а її розв'язок існує для довільного вільного члена і може бути записаний у вигляді:

$$C_1 = \frac{2a}{3-2\lambda}, \;\; C_2 = \frac{6b}{3-2\lambda}, \;\; C_3 = \frac{\frac{2}{3}b + \frac{2}{5}\lambda\frac{6b}{3-2\lambda}}{1+\frac{8}{15}\lambda} = \frac{30+16\lambda}{15+8\lambda} = 2.$$

Розв'язок інтегрального рівняння матиме наступний вигляд для довільних значень параметрів $a, b$

$$\varphi(x) = \lambda x\frac{2a}{3-2\lambda} + \lambda x^2\frac{6b}{3-2\lambda} + \lambda(1-3x^2)2 + ax + b.$$

2) Нехай $\lambda = \frac{3}{2}$. Тоді система лінійних алгебраїчних рівнянь набуває вигляду: $\begin{cases} C_1 \cdot 0 = \frac{2}{3}a \\ C_2 \cdot 0 = 2b \\ -\frac{3}{5}C_2 + C_3(1+\frac{4}{5}) = \frac{2}{3}b \end{cases}$, а її розв'язок існує тоді і лише тоді,

коли $a = 0, b = 0$. В цьому випадку $C_1 = \forall, C_2 = \forall, 3C_3 = C_2 => C_3 = \frac{1}{3}C_2$. Розв'язок інтегрального рівняння набуває вигляд:

$$\varphi(x) = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{3}(1 - 3x^2)C_2 = C_1 x + C_2.$$

При $a \neq 0$ або $b \neq 0$ рівняння розв'язків немає.

3) Якщо $\lambda = \frac{15}{8}$, тоді система має такий розв'язок

$$C_1 = \frac{8}{27}a, \;\; C_2 = \frac{8}{9}b, \;\; C_3 = \forall,$$

$$\varphi(x) = -\frac{15}{8}(\frac{8}{27}ax + \frac{8}{9}bx^2 + C_3(1 - 3x^2)) + ax + b.$$

*Задача 2.* Знайти характеристичні числа та власні функції інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy, \; K(x,y) = \begin{cases} x(1-y), 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1-x), 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*Розв'язання.* Інтегральне рівняння із симетричним ядром. Підставимо значення $K(x,y)$. Отримаємо

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 y(1-x)\varphi(y)dy + \lambda \int\limits_x^1 x(1-y)\varphi(y)dy$$

Двічі продиференціюємо обидві частини даного виразу, для цього використаємо формулу:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = f(x,\psi(x))\psi'(x) - f(x,\varphi(x))\varphi'(x) + \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy.$$

Маємо:

$$\varphi'(x) = \lambda x(1-x)\varphi(x) - 0 + 0 \cdot \lambda x(1-x)\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^x y\varphi(y)dy + \lambda \int\limits_x^1 (1-y)\varphi(y)dy,$$

$$\varphi'(x) = -\lambda \int_0^x y\varphi(y)dy + \lambda \int_x^1 (1-y)\varphi(y)dy,$$

$$\varphi''(x) = -\lambda x\varphi(x) - \lambda(1-x)\varphi(x),$$

$$\varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0.$$

Додамо граничні умови в точці $x = 0$ та $x = 1$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$.

В результаті одержимо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0 \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi(1) = 0 \end{cases} .$$

Характеристичне рівняння для диференційного має вигляд $r^2 + \lambda = 0$, його корені $r_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$.

1) Нехай $\lambda > 0$, тоді $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$. В цьому випадку розв'язок диференційного рівняння запишеться у вигляді

$$\varphi(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x.$$

Для визначення сталих $C_1$ та $C_2$ скористаємося граничними умовами:

$$\varphi(0) = C_2 \cdot 1 = 0 \ => \ \varphi(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x,$$

$$\varphi(1) = C_1 \sin\sqrt{\lambda} = 0 => \sin\sqrt{\lambda} = 0, \sqrt{\lambda} = k\pi; \lambda_k = (k\pi)^2, k = 1, 2, 3 \ldots,$$

$\varphi_k(x) = \sin k\pi x, \lambda_k = (k\pi)^2$ - власні функції та власні числа задачі Штурма-Ліувілля.

2) Нехай $\lambda < 0$, тоді $r^2 + \lambda = 0, r^2 = -\lambda, r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$, а розв'язок рівняння запишеться у вигляді

$$\varphi_k(x) = C_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}x + C_2 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}x.$$

Підставимо розв'язок в граничні умови. Отримаємо

$$\varphi_k(0) = C_2 \cdot 1 = 0 \ => \ C_2 = 0,$$

$$\varphi_k(x) = C_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} x \ => \ \varphi_k(1) = C_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} = 0,$$

$$\operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} = 0 => \lambda = 0.$$

Тобто $\lambda < 0$ не є власним числом

3) Нехай $\lambda = 0$. Тоді розв'язок диференційного рівняння

$$\varphi(x) = C_1 x + C_2.$$

Після підстановки його в граничні умови будемо мати

$$\varphi(0) = C_2 = 0, \ \ \varphi(1) = C_1 = 0.$$

Тобто $\lambda = 0$ не є власним числом.

*Домашнє завдання:*

*Задача 1.* Знайти характеристичні числа і власні функції ядра $K(x, y)$ і розв'язати інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} K(x, y)\varphi(y)dy + f(x), K(x, y) = 3x + xy - 5x^2y^2, f(x) = ax$$

при всіх $\lambda, a, b$.

*Задача 2.* Знайти характеристичні числа і власні функції ядра $K(x, y)$ і розв'язати інтегральне рівняння при всіх $\lambda, a, b$

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(x, y)\varphi(y)dy + f(x),$$

де $K(x, y) = x \cos y + \sin x \sin y, f(x) = a + b \cos x$.

*Задача 3.* Знайти характеристичні числа і власні функції інтегрального рівняння з ядром $K(x,y)$ у таких випадках:

2) $K(x,y) = \begin{cases} \cos x \sin y, 0 \le x \le y \le \pi \\ \cos y \sin x, 0 \le y \le x \le \pi \end{cases}$

3) $K(x,y) = \begin{cases} \sin x \cos y, 0 \le x \le y \le \pi \\ \sin y \cos x, 0 \le y \le x \le \pi \end{cases}$

## Практичне заняття №5

## *Тема:* Використання формули Шмідта для знаходження розв'язків інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

*Задача 1.* Знайти характеристичні числа і відповідні власні функції інтегрального рівняння та записати його розв'язок за формулою Шмідта:

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} K(x,y)\varphi(y)dy + x,$$

де $K(x,y) = \begin{cases} (1+x)(1-y), -1 \le x \le y \le 1 \\ (y+1)(1-x), -1 \le y \le x \le 1 \end{cases}$

*Розв'язання.* Формула Шмідта має вигляд

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f_k, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x),$$

де $\lambda_k$ характеристичні числа ядра інтегрального рівняння яким відповідають власні функції $\varphi_k(x)$. Отже потрібно їх знайти для заданого рівняння. Для цього запишемо однорідне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{x} (1+y)(1-x)\varphi(y)dy + \lambda \int_{x}^{1} (1+x)(1-y)\varphi(y)dy.$$

Двічи продиференціюємо та одержимо

$$\varphi'(x) = \lambda(1+x)(1-x)\varphi(x) - \lambda\int\limits_{-1}^{x}(1+y)\varphi(y)dy -$$

$$-\lambda(1+x)(1-x)\varphi(x) + \lambda\int\limits_{x}^{1}(1-y)\varphi(y)dy,$$

$$\varphi''(x) = -\lambda(1+x)\varphi(x) - \lambda(1-x)\varphi(x).$$

Обчислимо $\varphi(-1) = 0$ та $\varphi(1) = 0$ та отримаємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} \varphi''(x) + 2\lambda\varphi(x) = 0 \\ \varphi(-1) = 0 \\ \varphi(1) = 0 \end{cases}.$$

Характеристичне рівняння для диференційного має вигляд $r^2 = -2\lambda$.

Нехай $\lambda > 0$, тоді $r = \pm i\sqrt{2\lambda}$, а розв'язок диференційного набуває вигляду

$$\varphi(x) = C_1 \sin\sqrt{2\lambda}x + C_2\cos\sqrt{2\lambda}x.$$

Для знаходження сталих $C_1$ та $C_2$ використаємо граничні умови

$$\begin{cases} \varphi(-1) = -C_1\sin\sqrt{2\lambda} + C_2\cos\sqrt{2\lambda} = 0 \\ \varphi(1) = C_1\sin\sqrt{2\lambda} + C_2\cos\sqrt{2\lambda} = 0 \end{cases}.$$

Позначимо $\sqrt{2\lambda} = \mu$, запишемо визначник системи та прирівняємо його до нуля:

$$D(\lambda) = \begin{Vmatrix} -\sin\mu & \cos\mu \\ \sin\mu & \cos\mu \end{Vmatrix} = -2\sin\mu\cos\mu = 0,$$

$$\sin 2\mu = 0; \quad 2\mu = k\pi; \quad \mu_k = k\frac{\pi}{2}.$$

Обчислимо власні функції:

1) Нехай $k = 2m+1, \mu_{2m+1} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$, тоді на підставі граничних умов

$$-C_1 \sin(2m+1)\frac{\pi}{2} + C_2 \cos(2m+1)\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$C_1 \sin(2m+1)\frac{\pi}{2} = 0 \ => \ C_1 = 0, \ \ C_2 = C_2 - \forall.$$

Маємо множину власних функцій $\varphi_{2m+1}(x) = \cos((2m+1)\frac{\pi}{2}x)$, та власних чисел $\lambda_{2m+1} = \frac{1}{2}((2m+1)\frac{\pi}{2})^2, m = 0, 1, \ldots$.

1) Нехай $k = 2m, \mu_{2m} = 2m\frac{\pi}{2}$, тоді скориставшись граничними умовами одержимо

$$-C_1 \sin(2m\frac{\pi}{2}) + C_2 \cos(2m\frac{\pi}{2}) = 0,$$

$$\sin(2m\frac{\pi}{2}) = 0, \ \ C_2 \cos(2m\frac{\pi}{2}) = 0 \ => \ C_2 = 0, \ C_1 = C_1 - \forall.$$

Маємо множину власних функцій $\varphi_{2m}(x) = \sin(2m\frac{\pi}{2}x)$ та власних чисел $\lambda_{2m} = \frac{1}{2}(2m\frac{\pi}{2})^2, m = 1, 2, \ldots$.

Легко перевірити, що

$$\int_{-1}^{1} \varphi_{2m+1}^2(x)dx = 1, \ \ \int_{-1}^{1} \varphi_{2m}^2(x)dx = 1.$$

Отже система функцій $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2m}, \varphi_{2m+1}, \ldots$ є ортонормованою.

Знайдемо розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} K(x,y)\varphi(y)dy + x.$$

Застосуємо формулу Шмідта. Для цього знайдемо коефіцієнти Фур'є $a_{2m+1}$ та $a_{2m}$. Маємо

$$a_{2m+1} = (f, \varphi_{2m+1}) = \int_{-1}^{1} x \cos((2m+1)\frac{\pi}{2}x)dx = 0, \qquad (*)$$

$$a_{2m} = (f, \varphi_{2m}) = \int\limits_{-1}^{1} x \sin(2m\frac{\pi}{2}x)dx = \frac{2(-1)^{m+1}}{m\pi}. \qquad (**)$$

Запишемо розв'язок задачі за формулою Шмідта.

1) Нехай $\lambda \neq \lambda_m$, $m = 1, 2, \ldots$, тоді розв'язок існує єдиний та має вигляд:

$$\varphi(x) = x + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{\lambda_{2k} - \lambda} \sin(2k\frac{\pi}{2}x).$$

2) Нехай $\lambda = \lambda_{2k_0}$ — фіксоване характеристичне число з парним номером, тоді $a_{2k_0} \neq 0$, див. $(**)$. Таким чином умова ортогональності вільного члена і власної функції невиконана і розв'язок для таких значень параметра не існує.

3) Нехай $\lambda = \lambda_{2k_0+1}$, тоді $a_{2k_0+1} = 0$ дивись $(*)$.

Таким чином розв'язок існує, він неєдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки однієї власної функцій числа $\lambda_{2k_0+1}$. Та має вигляд:

$$\varphi(x) = x + \lambda_{2k_0+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{\lambda_{2k} - \lambda_{2k_0+1}} \sin\left(2k\frac{\pi}{2}x\right) + C_{2k_0+1} \cos\left((2k_0+1)\frac{\pi}{2}x\right),$$

де $C_{2k_0+1}$ - довільна константа.

*Задача 2.* Знайти характеристичні числа та власні функції інтегрального рівняння Фредгольма

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{0}^{1} K(x, y)\varphi(y)dy,$$

де $K(x, y) = \begin{cases} (x+1)(y-2), 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ (y+1)(x-2), 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$.

*Розв'язання.* Підставимо в рівняння ядро $K(x, y)$:

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{0}^{x} (y+1)(x-2)\varphi(y)dy + \lambda \int\limits_{x}^{1} (x+1)(y-2)\varphi(y)dy.$$

Двічі диференціюємо рівняння

$$\varphi'(x) = \lambda(x+1)(x-2)\varphi(x) + \lambda\int\limits_0^x (y+1)\varphi(y)dy - \lambda(x+1)(x-2)\varphi(x)+$$

$$+\lambda\int\limits_x^1 (y-2)\varphi(y)dy.\varphi'(x) = \lambda\int\limits_0^x (y+1)\varphi(y)dy + \lambda\int\limits_x^1 (y-2)\varphi(y)dy.$$

та одержимо диференційне рівняння

$$\varphi''(x) = \lambda(x+1)\varphi(x) - \lambda(x-2)\varphi(x),$$

$$\varphi''(x) - 3\lambda\varphi(x) = 0.$$

Знайдемо граничні умови. Для цього обчислимо

$$\varphi(0) = \lambda\int\limits_0^1 (y-2)\varphi(y)dy, \quad \varphi'(0) = \lambda\int\limits_0^1 (y-2)\varphi(y)dy,$$

$$\varphi(1) = -\lambda\int\limits_0^1 (y+1)\varphi(y)dy, \quad \varphi'(1) = \lambda\int\limits_0^1 (y+1)\varphi(y)dy.$$

Тоді $\varphi(0) - \varphi'(0) = 0, \varphi(1) + \varphi'(1) = 0.$

Маємо задачу Штурма-Ліувілля: $\begin{cases} \varphi''(x) - 3\lambda\varphi(x) = 0 \\ \varphi(0) - \varphi'(0) = 0 \\ \varphi(1) + \varphi'(1) = 0 \end{cases}$

Характеристичне рівняння має вигляд $r^2 - 3\lambda = 0$. Нехай $\lambda < 0$, тоді $r_{1,2} = \pm i\sqrt{-3\lambda}$. Розв'язок диференційного набуває вигляду

$$\varphi(x) = C_1\cos\sqrt{-3\lambda}x + C_2\sin\sqrt{-3\lambda}x,$$

$$\varphi'(x) = \sqrt{-3\lambda}(-C_1\sin\sqrt{-3\lambda}x + C_2\cos\sqrt{-3\lambda}x).$$

Позначимо $\sqrt{-3\lambda} = \mu$. Підставимо $\varphi(x)$ та $\varphi'(x)$ в граничні умови:

$$\begin{cases} c_1 - \mu c_2 = 0 \\ c_1 \cos\mu + c_2 \sin\mu(-c_1 \sin\mu + c_2 \cos\mu) = 0 \end{cases}.$$

Запишемо визначник системи лінійних алгебраїчних рівнянь та прирівняємо його нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu \\ \cos\mu - \mu\sin\mu & \sin\mu + \mu\cos\mu \end{vmatrix} = 0$$

$$\sin\mu + \mu\cos\mu + \mu\cos\mu - \mu^2\sin\mu = 0,$$

$$\sin\mu(1-\mu^2) + 2\mu\cos\mu = 0$$

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{2\mu}{1-\mu^2}, \quad \operatorname{tg}\mu = \frac{2\mu}{\mu^2-1}.$$

Останнє рівняння має зліченну кількість додатних коренів $\mu_k, k = 1, 2, \ldots$ (рисунок 1).

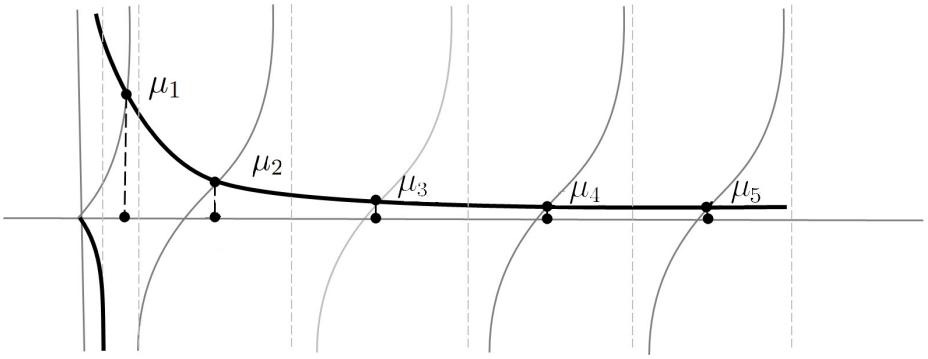


Рисунок 1

Запишемо власні функції. З першого рівняння отримаємо $c_1 = \mu_k c_2$. Таким чином, з точністю до множника власні функції мають вигляд:

$$\varphi_k(x) = \mu_k \cos\mu_k x + \sin\mu_k x, \quad ||\varphi_k|| = \left(\int_{-1}^{1} (\varphi_k(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нормуємо систему функцій: $\bar{\varphi_k}(x) = \dfrac{\varphi_k(x)}{||\varphi_k||}$

*Домашнє завдання.*

*Задача 1.* Розглянути задачу 2 для неоднорідного рівняння додавши вільний член рівняння для $f(x) = ax + b$; Знайти розв'язок рівняння для всіх $\lambda, a, b$.

*Задача 2.* Знайти характеристичні числа і відповідні власні функції інтегрального рівняння та записати його розв'язок за формулою Шмідта

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi K(x,y)\varphi(y)dy + 1,$$

де $K(x,y) = \begin{cases} \cos x \sin y, 0 \le x \le y \le \pi \\ \cos y \sin x, 0 \le y \le x \le \pi \end{cases}$.

*Задача 3.* Знайти характеристичні числа і відповідні власні функції інтегрального рівняння та записати його розв'язок за формулою Шмідта

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi K(x,y)\varphi(y)dy + ax + b,$$

де $K(x,y) = \begin{cases} \sin x \cos y, 0 \le x \le y \le \pi \\ \sin y \cos x, 0 \le y \le x \le \pi \end{cases}$ для всіх значень параметрів $\lambda, a, b$.

## Практичне заняття №6

## *Тема:* Побудова функції Гріна

Для побудови функції Гріна диференціального оператора $L$

$$Lu = (-p(x)u')' + q(x)u, \quad 0 < x < l \tag{1}$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} l_1(u)|_{x=0} &= h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0 \\ l_2(u)|_{x=l} &= H_1 u(l) + H_2 u'(l) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Необхідно знайти розв'язок двох задач Коші:

$$\begin{cases} (-p(x)\nu_1'(x))' + q(x)\nu_1(x) = 0, \\ l_1\nu_1|_{x=0} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} (-p(x)\nu_2'(x))' + q(x)\nu_2(x) = 0, \\ l_2\nu_2|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Записати визначник Вронського

$$W(x) = \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ \nu_1' & \nu_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

та перевірити тотожність Ліувілля $W(x)p(x) = W(0)p(0) = const$.

Тоді функція Гріна визначається за формулою:

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \begin{cases} \nu_1(\xi)\nu_2(x), & 0 \le \xi \le x \le l \\ \nu_1(x)\nu_2(\xi), & 0 \le x \le \xi \le l \end{cases} \tag{5}$$

*Задача 1.* Знайти функцію Гріна оператора $L$ на інтервалі $(0,1)$

$$Ly = -y'' - y, \;\; y(0) - y'(0) = 0, \;\; y(1) - y'(1) = 0.$$

*Розв'язання.* Для побудови функції Гріна потрібно визначити функції $y_1$ та $y_2$, що відповідають однорідному диференціальному рівнянню $y_1'' + y_1 = 0$ та задовольняють: функція $y_1$ умові на правому кінці, а функція $y_2$ — на лівому кінці. Отримаємо задачі Коші:

$$\begin{cases} y_1'' + y_1 = 0 \\ y_1(0) - y_1'(0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_2'' + y_2 = 0 \\ y_2(1) - y_2'(1) = 0 \end{cases}.$$

Характеристичне рівняння для диференціального має вигляд $r^2+1=0$, його розв'зок $r_{1,2}=\pm i$. Тоді загальний розв'язок рівняння $y''+y=0$ набуває вигляду

$$y(x)=C_1\sin x+C_2\cos x,\quad y'(x)=C_1\cos x-C_1\sin x.$$

Знайдемо $y_1(x)$. Покладемо $y_1(x)=y(x)$ та підставимо в граничну умову на лівому кінці. Маємо:

$$y_1'(x)=C_1\cos x-C_2\sin x,\ \ y_1'(0)-y_1'(0)=C_2-C_1=0\ \Rightarrow\ C_1=C_2.$$

Отримаємо $y_1(x)=C_1(\sin x+\cos x)$.

Аналогічним чином знайдемо $y_2(x)$, для цього розв'язок підкоряємо граничній умові на правому кінці:

$$C_1\sin 1+C_2\cos 1-C_1\cos 1+C_2\sin 1=0,$$

$$C_2(\cos 1+\sin 1)=C_1(\cos 1-\sin 1),$$
$$C_2(1+\operatorname{tg}1)=C_1(1-\operatorname{tg}1),\ \ C_1=\frac{1+\operatorname{tg}1}{1-\operatorname{tg}1}C_2.$$

Остаточно маємо

$$y_2(x)=C_2\left(\frac{1+\operatorname{tg}1}{1-\operatorname{tg}1}\sin x+\cos x\right).$$

Визначимо $p(x)$ та визначник Вронського

$$p(x)=1,\ \ W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=$$

$$=C_1C_2\begin{vmatrix} \sin x+\cos x & \dfrac{1+\operatorname{tg}1}{1-\operatorname{tg}1}\sin x+\cos x\\ \cos x-\sin x & \dfrac{1+\operatorname{tg}1}{1-\operatorname{tg}1}\cos x+\sin x\end{vmatrix}=\frac{2\operatorname{tg}1}{1-\operatorname{tg}1}C_1C_2,$$

$$p(x)W(x) = \frac{2\operatorname{tg}1}{1-\operatorname{tg}1}C_1C_2.$$

Запишемо функцію Гріна $G(x,\xi) =$

$$= -\frac{1-\operatorname{tg}1}{2\operatorname{tg}1}\begin{cases}(\sin x+\cos x)\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}1}{1-\operatorname{tg}1}\sin\xi+\cos\xi\right), & 0\le x\le\xi\le 1\\ (\sin\xi+\cos\xi)\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}1}{1-\operatorname{tg}1}\sin x+\cos x\right), & 0\le\xi\le x\le 1\end{cases}$$

*Задача 2.* Знайти функцію Гріна оператора $L$ на інтервалі $(1,2)$:

$$\begin{cases}Ly = -x^4y'' - 4x^3y' - 2x^2y\\ y(1)+y'(1)=0\\ y(2)+3y'(2)=0\end{cases}$$

*Розв'язання.* Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння

$$-x^4y'' - 4x^3y' - 2x^2y = 0.$$

Це рівняння Ейлера, а отже розв'язок будемо шукати у вигляді $y(x) = x^\mu$. Маємо

$$x^2\mu(\mu-1)x^{\mu-2} + 4\mu x^{\mu-1} + 2x^\mu = 0,\ \ \mu^2-\mu+4\mu+2=0,$$

$$\mu^2+3\mu+2=0,\ \ \mu_{1,2} = \frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2} = -\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2},\ \ \mu_1=-1,\ \ \mu_2=-2.$$

Загальний розв'язок набуває вигляду $y(x) = \dfrac{C_1}{x} + \dfrac{C_2}{x^2}$.

Знаходимо розв'язки двох задач Коші $y_1(x)$, $y_2(x)$ з лівою та правою початковою умовою:

$$y'(x) = -\frac{C_1}{x^2} - 2\frac{C_2}{x^3},$$

1) $y(1)+y'(1) = C_1+C_2-C_1-2C_2 = 0 \Rightarrow C_2=0,\ y_1(x) = \dfrac{C_1}{x}$;

$$2)\ y(2)+3y'(2)=\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{4}+3(-\frac{C_1}{4}+2\frac{C_2}{8})=0,\ \frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{4}-\frac{3}{4}C_1-\frac{3}{4}C_2=0,$$

$$C_1=-2C_2,\ y_2(x)=-\frac{2C_2}{x}+\frac{C_2}{x^2}.$$

Обчислимо визначник Вронського

$$W(x)=C_1C_2\begin{vmatrix}\frac{1}{x} & -\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\\ -\frac{1}{x^2} & \frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\end{vmatrix}=-\frac{C_1C_2}{x^4},$$

$$p(x)=x^4,\quad p(x)\cdot W(x)=x^4(\frac{-1}{x^4})=-1.$$

Функція Гріна має вигляд

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\xi^2}-\frac{2}{\xi}\right), & 1\le x\le\xi\le 2\\ \frac{1}{\xi}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{\xi}\right), & 1\le\xi\le x\le 2\end{cases}.$$

*Задача 2.* Звести задачу Штурма Ліувілля

$$Ly=-\cos^4 xy''+4\sin x\cos^3 xy'=\lambda xy,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$2y(0)-y'(0)=0,\quad |y(\frac{\pi}{2})|<\infty$$

до інтегрального рівняння з симетричним ядром.

*Розв'язання.* Побудуємо функцію Гріна. Для цього знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$-\cos^4 xy''+4\sin x\cos^3 xy'=\ 0.$$

Це рівняння в повних диференціалах

$$-(\cos^4 xy')'=0,\quad \cos^4 xy''=C_1, y'=\frac{C_1}{\cos^4 x},$$

$$y(x) = \left(\frac{2}{3}\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\right) C_1 + C_2.$$

Як і в попередніх прикладах знаходимо лінійно-незалежні функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$. Для цього знайдемо розв'язки задач Коші:

$$2y_1(0) - y_1'(0) = 2C_2 - \frac{C_1}{1} = 0 \Rightarrow C_1 = 2C_2; \qquad C_2 = \frac{1}{2}C_1$$

$$y_1(x) = \left(\frac{2}{3}\operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\right) C_1$$

$|y_2(\frac{\pi}{2})| < \infty \quad => \quad y_2(x) = C_2.$

Запишемо визначник Вронського:

$$W(x) = C_1C_2 \begin{vmatrix} \frac{2}{3}\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{\cos^4 x} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\cos^4 x},$$

$$p(x) = \cos^4 x, \quad p(x)W(x) = -1.$$

Таким чином функція Гріна має вигляд:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{2}{3}\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}, & 0 \le x \le \xi \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{3}\operatorname{tg} \xi + \frac{1}{3}\frac{\operatorname{tg} \xi}{\cos^2 \xi} + \frac{1}{2}, & 0 \le \xi \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Запишемо інтегральне рівняння:

$$y(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,\xi)\xi y(\xi) d\xi.$$

Проведемо симетризацію:

$$\sqrt{x}y(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x}G(x,\xi)\sqrt{\xi}\sqrt{\xi}y(\xi) d\xi.$$

Позначимо

$$\nu(x) = \sqrt{x}y(x),$$

тоді

$$\nu(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} G_1(x,\xi)\nu(\xi)d\xi,$$

де $G_1(x,\xi) = \sqrt{x}G(x,\xi)\sqrt{\xi}$.

*Домашнє завдання:*

*Задача 1.* Знайти характеристичні числа і відповідні власні функції інтегрального рівняння та записати його розв'язок за формулою Шмідта

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} K(x,y)\varphi(y)dy + ax + b,$$

де $K(x,y) = \begin{cases} (1+x)(y-2) & 0 \le x \le y \le 1 \\ (y+1)(x-2) & 0 \le y \le x \le 1 \end{cases}$ для всіх значень параметрів $\lambda, a, b$.

*Задача 2.* Знайти функцію Гріна оператора $L$ на інтервалі $(1,2)$ в таких випадках:

1. $Ly = -x^2y'' - 2xy', \quad y'(1) = 0, \quad y(2) = 0$
2. $Ly = -xy'' - y', \quad y'(1) = 0, \quad y(2) = 0$

## Практичне заняття №7

## *Тема:* Постановка граничних задач, які описують процеси розповсюдження тепла

*Задача 1.* Сформулювати крайову задачу про визначення температури однорідного циліндричного стрижня $0 \le x \le l$, якщо на поверхні стержня відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з середовищем, температура якого є заданою функцією часу. Початкова температура

стрижня є заданою фунцією аргументу $x$. На кінця стрижня може виконуватися один з можливих теплових режимів:

a) на кінцях стрижня підтримується задана температура;

b) на кінцях стрижня подається ззовні заданий тепловий потік;

c) на кінцях стрижня відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з середовищем, температура якого задана.

*Розв'язання.* Введемо позначення, відповідно з якими запишемо математичну модель. Нехай

– $u(x,t)$ — температура в точці $x$ в момент часу $t$;

– $\rho(x)$ — щільність матеріалу стержня;

– $k$ — теплопровідність;

– $c$ — теплоємність;

– $\alpha$ — коефіцієнт теплообміну;

– $S$ — площа поперечного перерізу стержня;

– $p$ — периметр перерізу;

– $u_0(x)$ — розподіл початкової температури;

– $\nu_0(t)$ — температура оточуючого середовища.

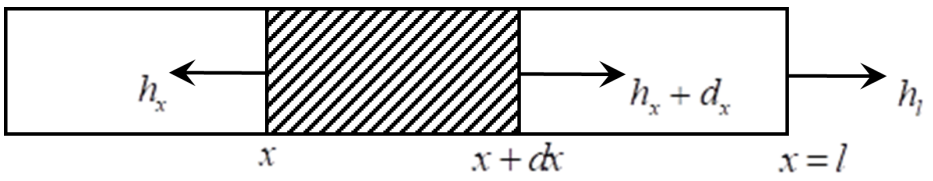


Рисунок 1

Запишемо закон збереження теплової енергії для елементарного об'єму стрижня, якій лежить між перерізами $x$, $x + dx$ на проміжку часу від $t$ до $t + dt$ (рисунок 1).

1. Кількість тепла, яка міститься всередині елементарного об'єму в мо-

менті часу $t$ дорівнює

$$Q_1(t) = dxS\rho cu(x,t),$$

а в момент часу $t + dt$

$$Q_1(t+dt) = dxS\rho cu(x,t+dt).$$

Кількість тепла, яка витрачається на зміну температури в елементарному об'ємі

$$\Delta Q_1(t,t+dt) = mc\Delta u, \;\; \Delta u = (u(\xi,t+dt) - u(\xi,t)), \;\; m = dxS\rho,$$

де $\xi \in [x, x+dx]$ — середня точка. Маємо

$$\Delta Q_1(t,t+dt) = dxS\rho c(u(\xi,t+dt) - u(\xi,t)).$$

2. Температура змінюється за рахунок теплових потоків через бокові перерізи $x$ та $x+dx$. Кількість тепла, яка потупає всередину елементарного об'єму через переріз $x+dx$ за час $dt$ згідно закону Фур'є можна записати у вигляді:

$$Q_2|_{x+dx} = k\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial n}Sdt = k\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x}Sdt.$$

Через поверхню $x$ : $Q_2|_x = k\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial n}Sdt = -\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}Sdt.$

3. Температура також змінюється за рахунок теплообміну бічної поверхні з оточуючим середовищем. Площа бічної поверхні елементарного об'єму складає $p \cdot dx$, $p$ — периметр перерізу стержня. Згідно закону Ньютона кількість тепла, яка поступає всередину елементарного об'єму через бічну поверхню за час $dt$ обчислюється за формулою

$$Q_3 = \alpha p dx(\nu_0(t) - u(x,t))dt.$$

Запишемо закон збереження теплової енергії

$$\Delta Q_1(t, t+dt) = Q_2|_{x+dx} + Q_2|_x + Q_3$$

або в розгорнутому вигляді:

$$dxS\rho c \cdot (u(\xi, t+dt) - u(\xi, t)) =$$

$$= k(\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x})Sdt + \alpha p dx(\nu_0(t) - u(x,t))dt.$$

Поділимо обидві частини на $Sdxdt$:

$$c\rho\frac{u(\xi,t+dt)-u(\xi,t)}{dt} = k\frac{\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{dx} + \alpha\frac{p}{S}(\nu_0(t) - u(x,t))$$

та спрямуємо $dx$ і $dt$ до нуля. Отримаємо рівняння теплопровідності

$$c\rho\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\alpha p}{S}(\nu_0(t) - u(x,t)),\ 0 < x < l,\ t > 0$$

Запишемо початкову температуру. Нехай $t = 0$ - початковий момент часу, тоді $u(x,0) = \nu_0(x)$, $\nu_0(x)$ — задана функція.

Запишемо граничні умови для правого кінця $x = l$:

а) на правому кінці задана температура $u(l,t) = \varphi_2(t)$ - відома функція;

б) на правому кінці заданий тепловий потік $k\frac{\partial u(l,t)}{\partial n} = q_2(t)$ або

$$k\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = q_2(t).$$

в) На правому кінці відбувається конвективний теплообмін з оточуючим середовищем заданої температури:

$$k\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \alpha(\nu_0(t) - u(l,t)).$$

Умови на лівому краю записати самостійно.

*Задача 2.* Необмежений стержень з постійним поперечним перерізом отриманий з'єднанням двох напівобмежених однорідних стержнів з різними коефіцієнтами теплопровідності, щільності і теплоємності. Поставити граничну задачу про визначення температури в цьому стержні, розглянув випадки, коли:

a) кінці стержня з'єднані безпосередньо (приварені торцями);

b) кінці стержня з'єднані масивною муфтою з теплоємністю $C_0$ причому матеріал муфти має дуже велику теплопровідність;

c) поверхня муфти та стержнів теплоізольовані.

*Розв'язання.*

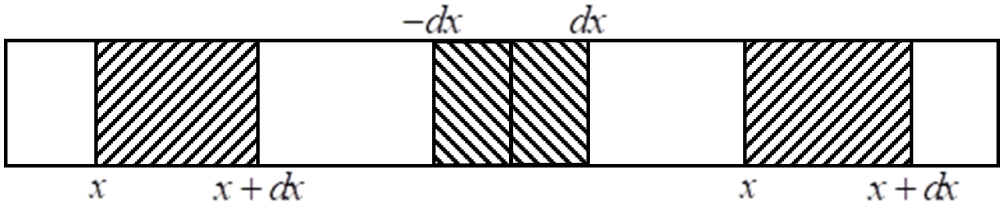


Рисунок 2

Нехай ліва частина стрижня $-\infty < x < 0$ має параметри $c_1, \rho_1, k_1$, а права $0 < x < \infty$ відповідно $c_2, \rho_2, k_2, S$ - площа перерізу.

Для розв'язання задачі потрібно скласти рівняння теплового балансу для інтервілів $[x, x + dx]$ правого і лівого півстержнів та окремо рівняння теплового балансу для інтервалу $[-dx, dx]$ для двох випадків безпосереднього з'єднання, та з'єднання за допомогою масивної муфти (рисунок 2). Використати властивість неперервності температури при переході через границю розділу середовищ з різними властивостями.

*Задача 3.* Поставити граничну задачу про охолодження рівномірно нагрітого стержня, який має форму усіченого конуса, нехтуючи викривленням ізотермічних поверхонь, якщо кінці стержня теплоізольовані, а на біч-

ній поверхні відбувається теплообмін з середовищем, температура якого дорівнює нулю (рисунок 3).

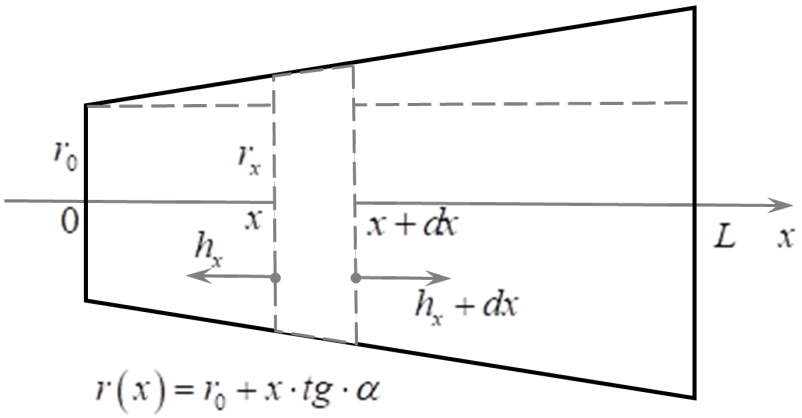


Рисунок 3

*Вказівка.* При складанні рівняння теплового балансу для елементарного об'єму усіченого конусу врахувати зміну площі поперечного перерізу лівого та правого торця.

*Домашнє завдання:*

*Задача 1.* Вивести рівняння для температури тонокого дроту, що нагрівається постійним струмом, якщо на його поверхні відбувається конвективний теплообмін по закону Ньютона з навколишнім середовищем, що має відому температуру. Сформулювати крайову задачу для визначення температури в цьому дроті, якщо його кінці зажаті в масивні клеми із заданою теплоємністю і дуже великою теплопровідністю.

*Задача 2.* Початкова температура необмеженої пластини товщиною в $2h$ дорівнює нулю. Сформулювати крайову задачу про розподіл температури при $t > 0$ по товщі пластини, якщо:

a) пластина з обох боків нагрівається рівними постійними тепловими потоками $q$;

b) в пластині починаючи з моменту часу $t = 0$ діє джерело тепла з

постійною густиною $Q$, а її поверхні підтримуються за температури, рівній нулю.

*Задача 3.* Сформулювати крайову задачу про стаціонарне розподілення температури в тонкій прямокутній пластині $OABC$ зі сторонами $OA = a$, $OB = b$, якщо:

– на бічних сторонах пластини підтримуються задані температури;

– на сторонах $OB$ та $OA$ задані теплові потоки, а сторони $BC$ та $AC$ теплоізольовані.

## Практичне заняття №8

## *Тема:* Постановка граничних задач для процесів дифузії речовини в розчинах та розплавах

*Задача 1.* Вивести рівняння дифузії в середовищі, що рухається з постійною швидкістю в напрямку вісі $x$, якщо поверхнями рівної концентрації в кожний момент часу $t$ є площини перпендикулярні до осі $x$.

*Розв'язання.* Введемо величини для запису математичної моделі. Нехай

– $l$ — довжина трубки в якій відбувається дифузія;

– $S$ — площа поперечного перерізу;

– $u(x,t)$ — концентрація речовини в перерізі $x$ в момент часу $t$;

– $C$ — коефіцієнт пористості;

– $D$ — коефіцієнт дифузії;

– $\nu_0$ — швидкість руху середовища в напрямку вісі $x$.

Запишемо закон збереження маси для елементарного об'єму між перерізами $x$ та $x + dx$ на проміжку часу $[t, t + dt]$ (рисунок 1).

1. Підрахуємо кількість речовини, яка міститься в елементарному об'ємі в моменти часу $t$ та $t + dt$:

$$Q_1(t) = SdxCu(x,t); \quad Q_1(t+dt) = SdxCu(x,t+dt).$$

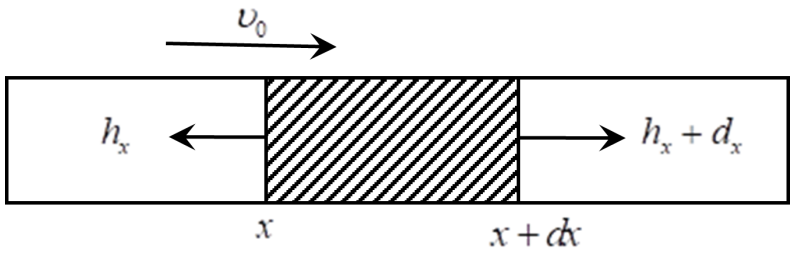


Рисунок 1

Тоді кількість речовини, яка потрібна для зміни концентрації можна обчислити за формулою:

$$\Delta Q_1(t, t+dt) = S \cdot dx \cdot C(u(x, t+dt) - u(x, t)).$$

2. Підрахуємо масу речовини, яка поступає в середину елементарного об'єму через перерізи $x$ та $x+dx$ за час $dt$. Згідно закону Нерста:

$$Q_2|_x = D\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}Sdt = -D\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}Sdt,$$

$$Q_2|_{x+dx} = D\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial n}Sdt = D\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x}Sdt.$$

3. Підрахуємо масу речовини, яка поступає в середину елементарного об'єму через перерізи $x$ та $x+dx$ за рахунок руху середовища.

Враховуючи, що середовище рухається в напрямку вісі $x$:

$$Q_3|_x = Sdt\nu_0 u(x,t), \;\; Q_3|_{x+dx} = -Sdt\nu_0 u(x+dx,t).$$

Інших чинників, які впливають на зміну маси в елементарному об'ємі немає. Запишемо закон збереження маси:

$$\Delta Q_1(t, t+dt) = Q_2|_x + Q_2|_{x+dx} + Q_3|_x + Q_3|_{x+dx}$$

або

$$SdxC(u(x, t+dt) - u(x,t)) = DSdt\left(\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) -$$

$$-Sdt\nu_0(u(x+dx,t)-u(x,t)).$$

Скорочуємо на $S$ та ділимо на $dx\cdot dt$ та спрямовуємо їх до нуля:

$$C\frac{u(x,t+dt)-u(x,t)}{dt}=D\frac{\dfrac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x}-\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{dx}-$$

$$-\nu_0\frac{u(x+dx,t)-u(x,t)}{dx}.$$

Після граничного переходу $dx\to 0,\ dt\to 0$ отримаємо рівняння дифузії рухомої речовини

$$C\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\nu_0\frac{\partial u}{\partial x},\quad 0<x<l\quad t>0.$$

*Задача 2.* Вивести рівняння дифузії речовини в нерухомому середовищі, якщо:

a. речовина розпадається (наприклад нестійкий газ) причому швидкість розпаду в кожній точці простору пропорційна концентрації;

b. речовина розмножується (наприклад дифузія нейтронів), причому швидкість розмноження речовини в кожній точці пропорційна концентрації.

*Домашнє завдання*:

*Задача 1.* Вивести рівняння дифузії зважених частинок з врахуванням осідання, припускаючи, що швидкість осідання частинок, викликана силою тяжіння, стала, а концентрація частинок залежить тільки від однієї геометричної координати $z$ (висоти) та часу $t$. Написати граничну умову, що відповідає непроникній перегородці.

*Задача 2.* Розчинена речовина з початковою концентрацією $c_0=const$ дифундує з розчину, розташованого між площинами $x=0$ та $x=h$, в розчинник, обмежений площинами $x=h,\ x=l$. Встановити крайову за-

дачу для процесу вирівнювання концентрації, припускаючи, що границі $x = 0,\ x = l$ непроникні для речовини.

## Практичне заняття №9

## *Тема:* Постановка граничних задач для рівняння коливання струни

*Задача 1.* Поставити крайову задачу про малі поперечні коливання струни в середовищі з опором пропорційним швидкості, при наявності прикладеної сили. Будемо вважати кінці струни закріпленими нерухомо, початкові відхилення і початкові швидкості точок струни задані.

*Розв'язання.* Введемо параметри для запису математичної моделі. Нехай:

– $l$ — довжина струни;

– $T_0$ — сила натягу;

– $\rho$ — лінійна щільність струни;

– $u(x,t)$ — відхилення точки $x$ в момент часу $t$ від положення рівноваги;

– $f(x,t)$ — щільність зовнішніх сил;

– $\beta$ — коефіцієнт пропорційності опору;

– $u_0(x)$ — початкові відхилення точок струни;

– $\nu_0(x)$ — початкові швидкості точок струни.

Для запису математичної моделі будемо використовувати другий закон Ньютона:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t),$$

де $m$ — маса тіла; $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ — друга похідна від переміщення і є прискорення; $F(t)$ — рівнодіюча зовнішніх сил.

Запишемо закон Ньютона для елементарного фрагменту струни $[x, x + dx]$ (рисунок 1). Вважатимемо відхилення точок струни малими, тоді дов-

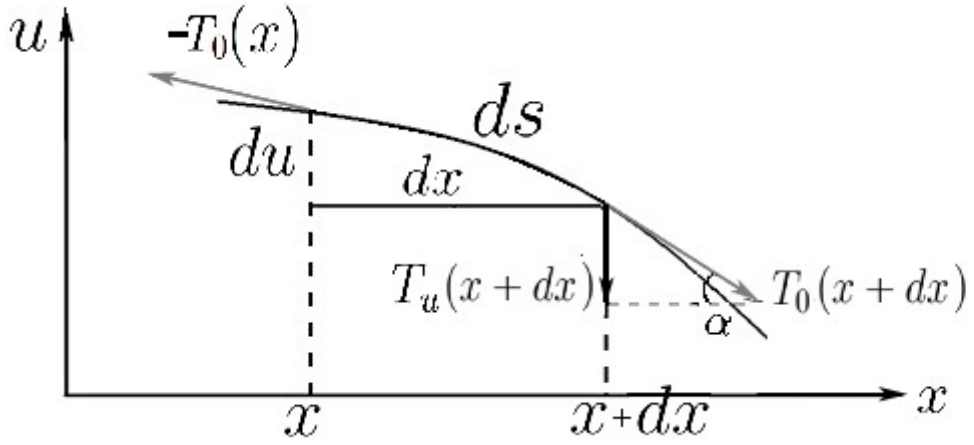


Рисунок 1

жину дуги можна обчислити за формулою

$$ds = \sqrt{dx^2 + du^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx dx.$$

Нехтуємо величинами другого порядку малості. Оскільки $ds = dx$ в межах точності моделювання, то згідно до закону Гука при відсутності відносного подовження струни не виникає і додаткових напружень. Тобто сила натягу $T(x,t) = const = T_0$.

Вважаємо, що струна є абсолютно гнучка і не протидіє згинанню. Тому сила натягу завжди направлена по дотичній до миттєвого профілю струни (рисунок 1).

1. Запишемо силу інерції фрагменту струни від $[x, x+dx]$. Маса дорівнює $\rho \cdot dx$. Прискорення обчислюється як $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$. Таким чином маємо

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx.$$

2. Обчислимо проекції сил натягу на вісь руху $T_u$ (рисунок 1) для перерізу $x + dx$.

$$T_u(x+dx,t) = T_0 \cdot \sin\alpha(x+dx,t) = T_0 \operatorname{tg}\alpha(x+dx,t) = T_0 \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x}.$$

Ця сила береться зі знаком (+) оскільки це сила з якою ліва частина струни діє на елементарний фрагмент $[x, x+dx]$. Сила $T_u$ в перерізі $x$ обчислюється за формулою

$$T_u(x,t) = -T_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Знак мінус оскільки сила діє зліва.

3. Визначимо зовнішню силу, яка діє на фрагмент $[x, x+dx]$. Отже, $F_3(t) = f(x,t) \cdot dx$.

4. Розглянемо силу опору пропорційну швидкості на фрагмент $[x, x+dx]$. Таким чином,

$$F_0(t) = -\beta \frac{\partial u}{\partial t} dx.$$

На підставі закону Ньютона отримаємо

$$dx\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \left( \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) - \beta \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx + f(x,t)dx.$$

Обидві частини поділимо на $dx$ та спрямуємо $dx \to 0$. Маємо:

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx + f(x,t);\ 0 < x < l,\ t > 0.$$

Запишемо початкові та граничні умови:

$u(x,0) = u_0(x)$ — задані початкові відхилення;
$\dfrac{\partial u(x,0)}{dt} = v_0(x)$ — задані початкові швидкості.
$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0$ — кінці закріплені, тобто не зміщуються.

*Задача 2.* Нехай в точці $x = 0$ нескінченної однорідної струни знаходиться кулька маси $m_0$. Початкові швидкості і початкові відхилення точок струни дорівнюють нулю. Поставити крайову задачу для визначення відхилення точок струни від їх положення рівноваги в наступних випадках:

1. починаючи з моменту часу $t = 0$ на кульку діє сила $F = F_0 \sin \Omega t$;

2. в початковий момент часу $t = 0$ кулька отримує імпульс $p_0$ в поперечному напрямку;

3. кулька в другому випадку закріплена пружно з ефективною жорсткістю $k^2$.

*Задача 3.* Поставити крайову задачу про поперечні коливання важкої струни відносно вертикального положення рівноваги, якщо її верхній кінець жорстко закріплений, а нижній вільний.

*Домашнє завдання*:

*Задача 1.* Поставити крайову задачу про поперечні коливання важкої струни відносно вертикального положення рівноваги якщо вона обертається з кутовою швидкістю $\omega$, її верхній кінець жорстко закріплений, а нижній вільний.

*Задача 2.* Невагома струна при обертанні навколо вертикальної вісі з постійною кутовою швидкістю знаходиться в горизонтальній площині, один кінець струни закріплений в деякій точці осі обертанні, а другий вільний. В початковий момент часу точкам струни надають малі відхилення та швидкості. Поставити граничну задачу для визначення відхилень точок струни від площини рівноважного руху.

## Практичне заняття №10

### *Тема:* Математична модель повздовжніх коливань стержня

*Задача 1.* Пружний прямолінійний стержень виведений з стану спокою тим, що його поперечним перерізам в момент часу $t = 0$ надані малі поздовжні зміщення і швидкості. Вважаючи, що поперечні перерізи весь час залишаються плоскими, поставити крайову задачу для визначення зміщень поперечних перерізів стержня при $t > 0$. Розглянути випадок, коли кінці стержня

а) закріплені жорстко;

а′) рухаються в поздовжньому напрямку по заданому закону;

б) вільні;

в) закріплені пружно, на кожний із його кінців діє сила зі сторони закріплення, пропорційна зміщенню і направлена в протилежну зміщенню сторону.

*Розв'язання.* Введемо величини для запису математичної моделі. Нехай:

– $l$ — довжина стержня;

– $S$ — площа поперечного перерізу;

– $\rho$ — щільність матеріалу стержня;

– $E$ — модуль пружності (модуль Юнга);

– $u(x,t)$ — зміщення поперечного перерізу $x$ в момент часу $t$ в напрямку вісі $x$.

Для запису математичної моделі будемо використовувати закон Гука:

$$F|_{x+dx} = \sigma_x|_{x+dx} \cdot S = E \cdot S \cdot \varepsilon_x|_{x+dx},\ \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E},$$

де $\varepsilon_x$ — деформація (відносне подовження в напрямку вісі $x$), $F|_{x+dx}$ — сила, яка діє в перерізі $x+dx$, $\sigma_x|_{x+dx}$ — напруження в перерізі $x+dx$ в напрямку вісі $x$.

Також будемо використовувати другий закон Ньютона $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F(t)$.

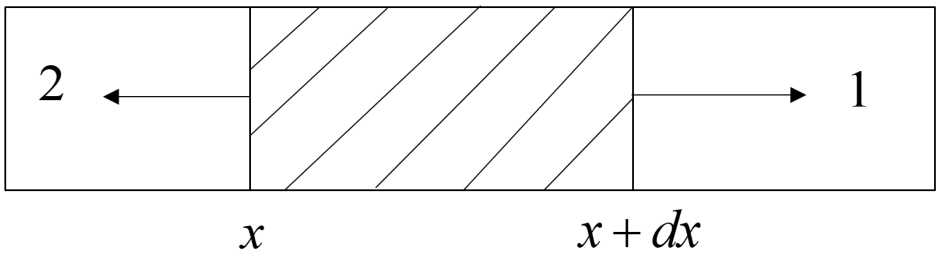


Рисунок 1

Запишемо закон Ньютона для елементарного фрагмента нашого стрижня: $\rho \cdot S \cdot dx$ — маса фрагмента, тоді $\rho \cdot S \cdot dx \cdot \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ — сила інерції (рисунок 1).

Запишемо пружні сили, які діють на виділений фрагмент стержня в перерізі $x$ та $x + dx$ з боку частин стрижня. Пружні сили обчислимо за законом Гука

$$F_{x+dx} = \sigma_x|_{x+dx} S = ES\varepsilon_x|_{x+dx}, \quad F|_x = -\sigma_x|_x S = -ES\varepsilon_x|_x,$$

де $\varepsilon_x$ — відносне подовження.

Запишемо відносне подовження через зміщення $u(x,t)$ (рисунок 2):

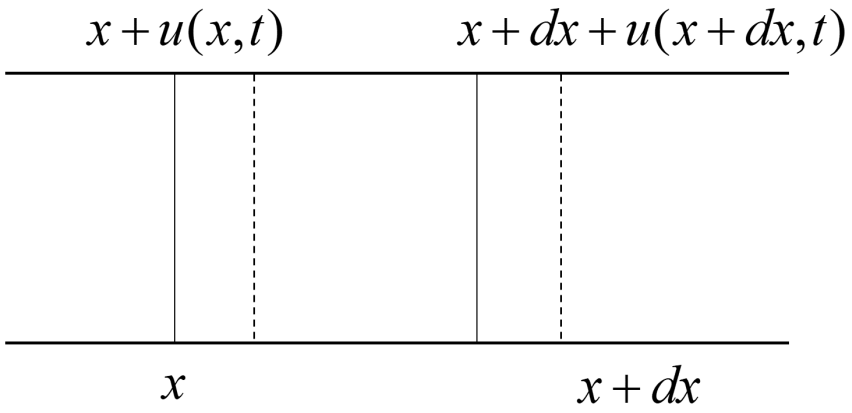


Рисунок 2

$$\varepsilon_x = \frac{x + dx + u(x + dx, t) - x - u(x,t) - dx}{dx} =$$

$$= \frac{u(x + dx, t) - u(x,t)}{dx} \xrightarrow{dx \to 0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x};$$

Таким чином пружна сила, яка діє на виділений фрагмент в перерізі $x + dx$ дорівнює

$$F|_{x+dx} = ES\frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial x},$$

, в перерізі $x$

$$F|_x = -E \cdot S \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Інших сил, що діють на виділений фрагмент немає тому закон руху (другий закон Ньютона) запишемо у вигляді:

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = ES(\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}).$$

Обидві частини поділимо на $dx$ і спрямуємо $dx \to 0$. Отримаємо рівняння:

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \;\; 0 < x < l, \;\; t > 0.$$

Запишемо початкові умови:

$u(x,0) = u_0(x)$ — задані початкові відхилення поперечних перерізів від положення рівноваги;

$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = v_0(x)$ — задані початкові швидкості поперечних перерізів.

Запишемо граничні умови:

а′) Кінці рухаються за заданим законом

$$u(0,t) = \varphi_1(t), \quad u(l,t) = \varphi_2(t).$$

а) Кінці закріплені, тоді $\varphi_1(t) \equiv 0$ та $\varphi_2(t) \equiv 0$.

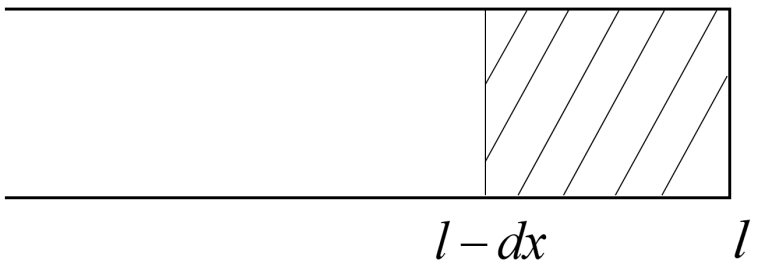


Рисунок 3

б) Кінці вільні. Вільні кінці означають, що на кінці не діють зовнішні сили. Запишемо умову для правого кінця (рисунок 3): рівняння руху для

фрагмента $[l-dx, l]$ має вигляд

$$\rho dx S \frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2} = -ES \frac{\partial u(l-dx,t)}{\partial x};$$

Спрямуємо $dx \to 0$ і отримаємо

$$ES \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0.$$

в) Лівий кінець закріплений пружно. Рівняння руху має вигляд

$$\rho dx S \frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2} = -ES \frac{\partial u(l-dx,t)}{\partial x} - ku(l,t).$$

Спрямуємо $dx \to 0$, та отримаємо

$$ES \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + ku(l,t) = 0.$$

*Задача 1.* Поставити крайову задачу про здійснення продольних коливань пружного стержня $0 \leq x \leq l$ змінного поперечного перерізу $S(x)$ якщо кінці стержня закріплені нерухомо, щільність маси дорівнює $\rho(x)$, модуль пружності $E(x)$, а коливання викликані початковими продовжними зміщеннями та швидкостями.

*Розв'язати задачу під час практичного заняття.*

*Задача 2.* Два напівобмежених однорідних пружних стержня з однаковим поперечним перерізом з'єднані торцями и складають один необмежений стержень. Нехай $\rho_1, E_1$ - щільність та модуль пружності одного з них, а $\rho_2, E_2$ - другого.

Поставити крайову задачу для визначення відхилень поперечних перерізів необмеженого стержня від положень рівноваги, якщо в початковий момент часу поперечним перерізам надані деякі зміщення та швидкості.

*Розв'язати задачу під час практичного заняття.*

*Домашнє завдання*:

*Задача 1.* Два напівобмежених однорідних стержня з однаковим прямокутним поперечним перерізом з'єднані торцем таким чином, що утворюють один необмежений стержень з постійним поперечним перерізом, при цьому торці з'єднані не прямо, а між ними знаходиться жорстка прокладка малої товщини з масою $M$. Поставити крайову задачу про коливання поперечних перерізів стержня від положення рівноваги.

*Задача 2.* Поставити крайову задачу про поздовжні коливання однорідного пружного вертикального стержня, нехтуючи дією поля сили тяжіння на частини стержня, якщо верхній кінець стержня закріплений жорстко, а до нижнього закріплений вантаж масою $Q$, причому за положення рівноваги приймається ненавантажений стан стержня (наприклад, в початковий момент часу з під вантажу прибирається підставка і вантаж починає розтягувати стержень).

## Практичне заняття №11

### *Тема:* Математичні моделі руху ідеальної речовини

*Задача 1.* Вивести рівняння розповсюдження малих збурень в газі, що рухається з постійною швидкістю відносно обраної системи координат.

*Розв'язання.* За основу візьмемо закони збереження маси та імпульсу для ідеальної рідини. Також врахуємо, що рух можна вважати ізоентропічним.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathrm{V}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho \nu_i}{\partial t} + div(\rho \mathrm{V} \nu_i) + grad_i p = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2}$$

$$S(p, \rho) = S(p_0, \rho_0) \tag{3}$$

В системі (1) – (3): $\rho$ — щільність середовища, $p$ — тиск, $V = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор швидкості.

Вважаємо, що малі збурення відбуваються відносно деяких постійних значень параметрів, а саме:

$$\rho = \rho_0 + \widetilde{\rho}; \quad p = p_0 + \widetilde{p_0}; \quad \mathrm{V} = \mathrm{V}_0 + \tilde{\mathrm{V}}, \tag{4}$$

де $\dfrac{\widetilde{\rho}}{\rho_0} \ll 1, \quad \dfrac{\widetilde{p}}{p_0} \ll 1, \quad \dfrac{|\tilde{\mathrm{V}}|}{|\mathrm{V}_0|} \ll 1$, а система координат обрана так, що $\vec{\mathrm{V}}_0 = (v_1, 0, 0)$.

Проведемо лінеаризацію системи (1)-(3) в околі розв'язку $\rho_0, p_0, \vec{\mathrm{V}}_0$.

Будемо використовувати формулу:

$$div(f\vec{\mathrm{A}}) = f div\vec{\mathrm{A}} + (\vec{\mathrm{A}}, grad\vec{f}). \tag{$*$}$$

Лінеаризуємо (1). З формули (*) отримаємо:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho div\mathrm{V} + (\mathrm{V}, grad\ \rho) = 0.$$

Підставимо (4) та збережемо величини першого порядку малості:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \widetilde{\rho}) + (\rho_0 + \widetilde{\rho}) div(\vec{V_0} + \widetilde{\vec{\mathrm{V}}}) + (\vec{\mathrm{V}}_0 + \widetilde{\vec{\mathrm{V}}}, grad(\rho_0 + \widetilde{\rho})) = 0$$

$$\rho_0 = const; \quad \mathrm{V}_0 = const; \quad p_0 = const.$$

Таким чином отримаємо лінеаризоване рівняння:

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 div\widetilde{\vec{\mathrm{V}}} + (\vec{\mathrm{V}}_0, grad\widetilde{\rho}) = 0. \tag{$1'$}$$

Застосуємо формулу (*) до рівняння (2) і отримаємо його недивергентну форму:

$$\rho\frac{\partial \nu_i}{\partial t} + (\rho\mathrm{V}, grad\nu_i) + grad_i\ p = 0.$$

Підставимо (4) та збережемо члени першого порядку малості:

$$(\rho_0+\widetilde{\rho})\frac{\partial}{\partial t}(v_{0,i}+\widetilde{\nu}_i)+((\vec{\mathrm{V}}_0+\mathrm{V})\cdot(\rho_0+\widetilde{\rho}),grad(v_{0,i}+\widetilde{\nu}_i))+$$

$$+grad_i(p_0+\widetilde{p})=0,$$

$$\rho_0\frac{\partial\widetilde{\nu}_i}{\partial t}+(\vec{\mathbf{V}}_0\cdot\rho_0,\mathbf{grad}\widetilde{v}_i)+grad_i\widetilde{p}=0,\quad i=1,2,3. \tag{2'}$$

Для лінеаризації рівняння (3) застосуємо формулу Тейлора та збережемо члени першого порядку малості:

$$S(p_0,\rho_0)=S(p_0+\widetilde{p},\rho_0+\widetilde{\rho})=S(p_0,\rho)+\frac{\partial S(p_0,\rho_0)}{\partial p}\widetilde{p}+\frac{\partial S(p_0,\rho_0)}{\partial\rho}\widetilde{\rho}.$$

Отримаємо лінійне рівняння стану

$$\widetilde{p}=-\frac{S'_\rho(p_0,\rho_0)}{S'_p(p_0,\rho_0)}\widetilde{\rho}.$$

Врахуємо, що $-\dfrac{S'_\rho(p_0,\rho_0)}{S'_p(p_0,\rho_0)}=\dfrac{dp}{d\rho}|_{\rho=\rho_0}=C_0^2$ - квадрат швидкості звуку.

Таким чином

$$\widetilde{p}=C_0^2\widetilde{\rho} \tag{3'}$$

Для запису системи рівнянь $(1')$ – $(3')$ використаємо скорочене позначення похідної вздовж траєкторії

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\vec{\mathbf{V}}_0,\mathbf{grad}\varphi).$$

Тоді отримаємо

$$\frac{d\widetilde{p}}{dt}+\rho_0 div\widetilde{\vec{\mathbf{V}}}=0, \tag{1''}$$

$$\frac{d\widetilde{v}_i}{dt}+\frac{1}{\rho_0}grad_i\widetilde{p}=0,\quad i=1,2,3, \tag{2''}$$

$$\widetilde{p}=C_0^2\widetilde{\rho}. \tag{3''}$$

Рівняння $(2'')$ в векторному вигляді можна записати у вигляді:

$$\frac{d\widetilde{\vec{\mathbf{V}}}}{dt} + \frac{1}{\rho_0}\mathbf{grad}\widetilde{p} = 0$$

або з врахуванням $(3')$

$$\rho_0\frac{d\widetilde{\vec{\mathbf{V}}}}{dt} + C_0^2\mathbf{grad}\widetilde{\rho} = 0.$$

Нарешті, діємо на рівняння $(1'')$ оператором $\dfrac{d}{dt}$, а на останнє рівняння оператором $div$ отримаємо рівняння відносно щільності $\widetilde{\rho}$

$$\frac{d^2\widetilde{\rho}}{dt^2} + \rho_0 div\frac{d\widetilde{\vec{\mathbf{V}}}}{dt} = 0,$$

$$\rho_0 div\frac{d\widetilde{\vec{\mathbf{V}}}}{dt} + C_0^2 div\mathbf{grad}\widetilde{\rho} = 0.$$

Надалі, для спрощення запису в лінеаризованих рівняннях хвильку над величинами будемо опускати.

Віднявши від першого рівняння друге отримаємо:

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = C_0^2\Delta\rho. \tag{5}$$

Запишемо рівняння (5) в розгорнутому вигляді. При цьому врахуємо, що

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_{0,1}\frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{dt} + v_{0,1}\frac{\partial p}{\partial x_1},$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial\rho}{\partial t} + v_{0,1}\frac{\partial\rho}{\partial x_1}) = \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + v_{0,1}\frac{\partial^2\rho}{\partial t\partial x_1} + v_{0,1}\frac{\partial^2\rho}{\partial t\partial x_1} + v_{0,1}^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2} =$$

$$= \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + 2v_{0,1}\frac{\partial^2\rho}{\partial t\partial x_1} + v_{0,1}^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2}.$$

Таким чином рівняння (5) набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\rho}}{\partial t^2} + 2v_{0,1}\frac{\partial^2 \widetilde{\rho}}{\partial t \partial x} + v_{0,1}^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} = C_0^2 \left( \frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial x_3^2} \right).$$

Це рівняння описує процес розповсюдження малих збурень в середовищі, що рухається з постійною швидкістю.

*Задача 2.* Поставити крайову задачу про надзвукове стаціонарне обтікання нерухомого клину малого кута розхилу симетричним плоскопаралельним потоком ідеального газу.

*Домашнє завдання*:

*Задача 1.* Поставити крайову задачу про малі поздовжні коливання однорідного пружного стрижня, який знаходиться в середовищі без опору, якщо один його кінець закріплений жорстко, а інший знаходиться під опором, який пропорційний швидкості.

*Задача 2.* Невагома струна при обертанні навколо вертикальної вісі з постійною кутовою швидкістю знаходиться в горизонтальній площині, причому один кінець струни закріплений до деякої точки вісі, а інший вільний. В початковий момент часу $t = 0$ точкам струни надаються малі відхилення і швидкості по нормалям до цієї площини. Поставити крайову задачу для визначення відхилень точок струни від площини рівномірного руху.

## Практичне заняття №12

## *Тема:* Класифікація рівнянь в частинних похідних другого порядку з двома незалежними змінними

*Задача 1.* Привести рівняння $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ до канонічного вигляду та визначити його тип.

*Розв'язання.* Запишемо коефіцієнти рівняння $A = 1, \quad B = 0, \quad C = x$

та складемо характеристичне рівняння яке має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm \sqrt{-x}}{1}.$$

Нехай $x > 0$, тоді

$$\frac{dy}{dx} = \pm i\sqrt{x}, \quad dy = \pm i x^{1/2} dx; \quad y = \pm i \frac{2x^{1/2}}{3} + C.$$

Знайдемо загальні інтеграли: $y \pm i\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}dx = C.$

Враховуючи, що характеристичне рівняння має комплексні характеристики, рівняння має еліптичний тип. Введемо нові змінні як дійсну і уявну частину загального інтеграла $\xi = y; \ \eta = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Обчислимо частинні похідні:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \cdot 0 + x^{\frac{1}{2}} u_\eta,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} =$$

$$0 \cdot u_{\xi\xi} + 0 \cdot u_{\xi\eta} + x u_{\eta\eta} + 0 \cdot u_\xi + u_\eta \frac{1}{x^{1/2}},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} =$$

$$= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} \cdot 0 + u_{\eta\eta} \cdot 0 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0.$$

Підставимо знайдені похідні в рівняння

$$x u_{\eta\eta} + u_\eta \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + x u_{\xi\xi} = \ 0, u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{u_\eta}{2x^{\frac{3}{2}}} = 0; 2x^{\frac{3}{2}} = 3\eta.$$

Остаточно одержимо канонічний вигляд рівняння

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{u_\eta}{3\eta} = 0.$$

Розглянемо випадок $x < 0$, тоді $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-x}$. Враховуючи знак підкореневого виразу, одержимо, що рівняння має гіперболічний тип. Знайдемо його характеристики

$$dy = \pm\sqrt{-x}dx;\ y = \pm\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Загальний інтеграл має вигляд: $y \pm \dfrac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} = C$.

Для отримання другої канонічної форми гіперболічного рівняння введемо нові змінні $\xi = y;\ \eta = \dfrac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}$.

Обчислимо другі похідні

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot 0 + 2u_{\xi\eta} \cdot 0 + u_{\eta\eta}(-x) + u_\xi \cdot 0 + u_\xi \cdot \frac{1}{2(-x)^{\frac{1}{2}}},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot 1 + 2u_{\xi\eta} \cdot 0 + u_{\eta\eta} \cdot 0 + u_\xi \cdot 0 + u_\eta 0.$$

Підставимо похідні в рівняння

$$-xu_{\eta\eta} + u_\eta \frac{1}{2(-x)^{\frac{1}{2}}} + x \cdot u_{\xi\xi} = 0,$$

поділимо на $x$ та отримаємо

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_\eta \frac{1}{2(-x)^{\frac{3}{2}}} = 0,\ 2(-x)^{\frac{3}{2}} = 3\eta.$$

Канонічна форма рівняння в нових змінних має вигляд

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0.$$

*Задача 2.* Привести рівняння $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^3u_x = 0$ до канонічного вигляду та визначити його тип.

*Розв'язання.* Рівняння має такі коефіцієнти $A = 4y^2,\ B = 0,\ C = -e^{2x}$. Запишемо характеристичне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \pm\frac{\sqrt{4y^2e^{2x}}}{4y^2} = \pm\frac{2ye^x}{4y^2} = \pm\frac{e^x}{2y},$$

$$2ydy = \pm e^x dx.$$

Підкореневий вираз приймає додатні значення для $y \neq 0$, тому рівняння має гіперболічний тип. Введемо заміну змінних для отримання першої канонічної форми: $y^2 = \pm e^x + C$, $\xi = y^2 + e^x$, $\eta = y^2 - e^x$. В результаті заміни змінних отримаємо канонічну форму рівняння:

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{8(\xi+\eta)^2}(u_\xi + u_\eta).$$

*Задача 3.* Привести рівняння

$$(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$$

до канонічного вигляду та визначити його тип.

*Розв'язання.* Рівняння має коефіцієнти $A = (1+x^2)$, $B = 0$, $C = (1+y^2)$. Складемо характеристичне рівняння та визначимо характеристики

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{0 \pm \sqrt{-(1+x^2)(1+y^2)}}{(1+x^2)}.$$

Оскільки підкореневий вираз приймає від'ємні значення, тип рівняння еліптичний

$$\frac{dy}{dx} = \pm i\frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}};\ \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \pm i\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\ln(y + \sqrt{1+y^2}) \pm i\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = const.$$

Тоді нові змінні мають вигляд: $\xi = \ln(x + \sqrt{1+x^2});\ \eta = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$. Після заміни змінних отримаємо канонічний вигляд рівняння еліптичного типу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

*Домашнє завдання*:

*Задача 1.* В кожній точці, де зберігається тип рівняння, привести до канонічного вигляду $xu_{xx} - yu_{yy} = 0$.

*Задача 2.* В кожній точці, де зберігається тип рівняння, привести до канонічного вигляду: $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$.

*Задача 3.* В кожній точці, де зберігається тип рівняння, привести до канонічного вигляду: $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} + (2 - \cos^2 x)u_{yy} = 0$.

## Практичне заняття №13

## *Тема:* Класифікація лінійних рівнянь в частинних похідних з n>2 незалежними змінними та приведення до канонічного вигляду

*Задача 1.* Привести до канонічного вигляду і визначити тип рівняння:

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} - 2u_z = 0.$$

*Розв'язання.* Головній частині рівняння ставимо у відповідність квадратичну форму: $x \to \lambda_1,\ y \to \lambda_2,\ z \to \lambda_3$, яка має вигляд:

$$Q_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_2^2 + 6\lambda_3^2.$$

Методом виділення повних квадратів приведемо квадратичну форму до канонічного вигляду. Беремо перший квадрат і всі його подвоєні добутки та утворюємо з цих доданків повний квадрат, потім наступний та всі його подвоєні добутки, доки не будуть вичерпані змішані добутки:

$$(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2 + 5\lambda_3^2 + 2\lambda_2\lambda_3 = (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)^2 + (2\lambda_3)^2.$$

Канонічний вигляд містить три квадрати, що відповідає кількості змінних і всі квадрати входять у суму із однаковим знаком (+).

Таким чином тип рівняння є еліптичним.

Введемо нові змінні для квадратичної форми:

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ \mu_2 = \lambda_2 + \lambda_3 \\ \mu_3 = 3\lambda_3 \end{cases} .$$

Або ж в векторному вигляді: $\vec{\mu} = B\vec{\lambda}$, де $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Тепер квадратична форма записана в канонічному вигляді:

$$Q_3(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 \qquad (*)$$

Знайдемо обернене перетворення: $\vec{\lambda} = B^{-1}\vec{\mu}$, де

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Запишемо транспоновану матрицю:

$$(B^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Застосуємо лінійну заміну змінних, що призведе рівняння до канонічного вигляду.

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (B^{-1})^T. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = y - x \\ \zeta = x - \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Запишемо канонічну форму рівняння: головна його частина записується автоматично по канонічному вигляду квадратичної форми (*), а перші похідні необхідно обчислити за правилом диференціювання складної функції:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x + u_\zeta \zeta_x = u_\xi x_x + u_\eta (y-x)_x + u_\zeta (x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z)_x = u_\xi - u_\eta + u_\zeta,$$

$$u_z = u_\xi \xi_z + u_\eta \eta_z + u_\zeta \zeta_z = u_\xi \cdot 0 + u_\eta \cdot 0 + u_\zeta \cdot \frac{1}{2},$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_\xi - u_\eta + u_\zeta - 2(u_\zeta \cdot \frac{1}{2}) = 0.$$

Остаточно отримаємо: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_\xi - u_\eta = 0$.

*Задача 2.* Привести до канонічного вигляду і визначити тип рівняння $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$.

*Розв'язання.* Запишемо квадратичну форму, яка відповідає головній частині рівняння та виділимо повні квадрати:

$$Q_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 4\lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2\lambda_3 =$$

$$= (2\lambda_1 - \lambda_2)^2 - \lambda_2^2 - 2\lambda_2\lambda_3 = (2\lambda_1 - \lambda_2)^2 - (\lambda_2 + \lambda_3)^2 + \lambda_3^2$$

Отже, тип рівняння – гіперболічний, оскільки присутні усі квадрати, які входять з різними знаками. Заміна змінних для квадратичної форми матиме вигляд:

$$\begin{cases} \mu_1 = 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ \mu_2 = \lambda_2 + \lambda_3 \\ \mu_3 = \lambda_3 \end{cases},$$

а її канонічний вигляд: $\mu_1^2 - \mu_2^2 + \mu_3^2$.

Запишемо обернене перетворення : $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2 - \mu_3) \\ \lambda_2 = \mu_2 - \mu_3 \\ \lambda_3 = \mu_3 \end{cases}$.

В векторному вигляді воно буде мати вигляд $\lambda = \mathbf{B^{-1}}\mu$, де

$$\mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{B}^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином заміна змінних має вигляд: $\begin{cases} \xi = \frac{1}{2}x \\ \eta = \frac{1}{2}x + y \\ \zeta = -\frac{1}{2}x - y + z \end{cases}$, а канонічний вигляд рівняння

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_\eta = 0.$$

*Задача 3.* Привести до канонічного вигляду і визначити тип рівняння:

$$u_{xy} - u_{xy} + u_x + u_y - u_z = 0.$$

*Розв'язання.* Квадратична форма, яка відповідає головній частині має вигляд:

$$Q_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3.$$

Введемо проміжні змінні для отримання квадратів: $\begin{cases} \lambda_1 = \nu_1 + \nu_2 \\ \lambda_2 = \nu_1 - \nu_2 \\ \lambda_3 = \nu_3 \end{cases}$. Тоді квадратична форма набуде вигляду: $\nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_1\nu_3 - \nu_2\nu_3$. Приведемо її до

канонічного вигляду:

$$(\nu_1 - \frac{1}{2}\nu_3)^2 - \frac{1}{4}\nu_3 - \nu_2^2 - \nu_2\nu_3 = (\nu_1 - \frac{1}{2}\nu_3)^2 - (\nu_2 + \frac{1}{2}\nu_3)^2$$

Повернемося до початкових змінних: $\nu_1 = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$, $\nu_2 = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$, $\nu_3 = \lambda_3$, отримаємо

$$\left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{2}\right)^2$$

Тип квадратичної форми – параболічний, оскільки кількість квадратів менша за кількість змінних

$$\begin{cases} \mu_1 = \dfrac{\lambda_1}{2} + \dfrac{\lambda_2}{2} - \dfrac{\lambda_3}{2} \\ \mu_2 = \dfrac{\lambda_1}{2} - \dfrac{\lambda_2}{2} + \dfrac{\lambda_3}{2} \\ \mu_3 = \lambda_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 + \mu_2 \\ \lambda_2 = \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 \\ \lambda_3 = \mu_3 \end{cases}$$

Канонічний вигляд квадратичної форми: $\mu_1^2 - \mu_2^2$.

Самостійно записати лінійне перетворення незалежних координат, та канонічний вигляд рівняння.

*Домашнє завдання*:

*Задача 1.* Привести до канонічного вигляду рівняння та визначити його тип:

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0.$$

*Задача 2.*

Привести до канонічного вигляду рівняння та визначити його тип:

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} = 0.$$

*Задача 3.* Привести до канонічного вигляду рівняння та визначити його тип:

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} = 0.$$

## Практичне заняття №14

## *Тема:* Метод відокремлення змінних для рівнянь параболічного та гіперболічного типів

Метод відокремлення змінних (метод Фур'є) може бути застосований для лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних з лінійними граничними умовами в канонічних областях (відрізок, паралелепіпед, круг, циліндр, куля і канонічні частини цих областей).

Метод базується на представлені розв'язку граничної задачі у вигляді ряду Фур'є по деякій повній, ортогональній системі лінійно незалежних функцій. Для випадку двовимірних задач в якості такої системи функцій виступає система власних функцій задачі Штурма-Ліувілля, а теоретичним результатом на який спирається метод є теорема Стєклова про розвинення функцій в ряд Фур'є по системі власних функцій задачі Штурма-Ліувілля.

*Задача 1.* Знайти розв'язок початково-граничної задачі

$$u_{tt} + 2u_t = u_x x + 8u + 2x(1-4t) + \cos 3x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$$

$$u_x|_{x=0} = t, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi t}{2}, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 2x.$$

*Розв'язання.*

1) Зведемо граничні умови до однорідних. Знайдемо функцію $w(x,t)$ таку, що

$$w_x|_{x=0} = t, \quad w|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi t}{2}.$$

Будемо шукати її у вигляді:

$$w(x,t) = A(t)x + B(t), \quad w_x(x,t) = A(t).$$

Підставимо $w(x,t)$ в граничні умови. Отримаємо

$$w_x(0,t) = A(t) = t, \quad w(\frac{\pi}{2},t) = t\frac{\pi}{2} + B(t) = \frac{\pi t}{2} \Rightarrow B(t) = 0.$$

Тобто $w(x,t) = tx$.

Шукаємо розв'язок задачі у вигляді $u = w + v$. Підставимо $u = w + v$ в задачу для функції $u$ і отримаємо граничну задачу відносно функції $v(x,t)$

$$v_{tt} + 2v_t + 2x = v_{xx} + 8v + 8tx + 2x(1-4t) + \cos 3x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$$

$$v_x|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad u|_{t=0} = w|_{t=0} + v|_{t=0} \Rightarrow v|_{t=0} = 0,$$

$$u_t|_{t=0} = w_t|t = 0 + v_t|_{t=0} = x + v_t|_{t=0} = 2x \Rightarrow v_t|_{t=0} = x.$$

2) Розглянемо однорідне рівняння $v_{tt} + 2v_t = v_{xx} + 8v$. Будемо шукати частинні розв'язки рівняння у вигляді $v(x,t) = X(x)T(t)$, тоді

$$T''X + 2T'X = TX'' + 8XT.$$

Розділимо змінні

$$\frac{T''X + 2T'X}{XT} = \frac{TX'' + 8XT}{XT} = -\lambda.$$

Отже $\dfrac{X'' + 8X}{X} = -\lambda$, $\lambda$ — довільна стала. Звідки одержимо рівняння для функції $X(x)$

$$X''(x) + (\lambda + 8)X(x) = 0.$$

Для отримання граничних умов для функції $X(x)$ підставимо $v(x,t) = X(x)T(t)$ в граничні умови. Маємо:

$$T(t)X'(0) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0, T(t)X(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow X(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Одержали задачу Штурма-Ліувілля: $\begin{cases} X'' + (\lambda + 8)X = 0 \\ X'(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

Знайдемо власні числа та власні функції. Характеристичне рівняння для диференціального має вигляд $r^2 = \lambda + 8$. Нехай $\lambda + 8 > 0$, тоді розв'язок

рівняння запишеться у вигляді

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda + 8}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda + 8}x).$$

Для визначення сталих $C_1$ та $C_2$ скористаємося граничними умовами. Маємо

$$X'(x) = \sqrt{\lambda + 8}(-C_1 \sin(\sqrt{\lambda + 8}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda + 8}x)),$$

$$\begin{cases} X'(0) = \sqrt{\lambda + 8} \cdot C_2 = 0 \\ X(\frac{\pi}{2}) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda + 8} \cdot \frac{\pi}{2}) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda + 8} \cdot \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}.$$

Позначимо $\sqrt{\lambda + 8} = \mu$. Тоді

$$C_2 = 0, \quad C_1 \cos \mu \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \cos \mu \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \mu \frac{\pi}{2} = (2k + 1)\frac{\pi}{2},$$

$$\mu_k = 2k + 1 \quad k = 0, 1, ..., \ \lambda_k = (2k + 1)^2 - 8.$$

Підставимо знайдені сталі у розв'язок $X(x)$ та отримаємо власні функції

$$X_k(x) = \cos(2k + 1)x.$$

3) Розв'язок граничної задачі будемо шукати у вигляді ряду Фур'є

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x).$$

Підставимо його в рівняння та початкові умови. Маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} (T_k'' + 2T_k')X_k - T_k(X_k'' + 8X_k) = \cos 3x.$$

Оскільки $X_k'' = -(\lambda_k + 8)X_k$, то рівняння набуває вигляду

$$\sum_{k=0}^{\infty} (T_k'' + 2T_k' + \lambda_k T_k)X_k = \cos 3x.$$

Праву частину розкладемо в ряд Фур'є за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля.

$$\cos 3x = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) X_k(x).$$

Тоді

$$\sum_{k=0}^{\infty} (T_k'' + 2T_k') X_k - T_k(X_k'' + 8X_k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) X_k(x).$$

Прирівняємо коефіцієнти при відповідних $X_k(x)$ та отримаємо

$$T_k'' + 2T_k' + \lambda_k T_k = f_k(t).$$

З початкових умов маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = 0 \Rightarrow T_k(0) = 0; \ \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0) X_k(x) = x = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k X_k(x),$$

де

$$f_k(t) = \frac{(\cos 3x, X_k(x))}{(X_k(x), X_k(x))} = \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cdot \cos(2k+1)x dx}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2k+1)x dx} = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases},$$

$$\varphi_k = \frac{(x, X_k(x))}{(X_k(x), X_k(x))} = \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(2k+1)x dx}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2k+1)x dx}.$$

Таким чином маємо серію задач Коші

$$\begin{cases} T_k'' + 2T_k' + \lambda_k T_k = f_k \\ T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = \varphi_k \end{cases}.$$

Якщо $k = 1$, то $\begin{cases} T_1'' + 2T_1' + T_1 = 1 \\ T_1(0) = 0, \quad T_1'(0) = \varphi_1 \end{cases}$.

Розв'яжемо однорідне рівняння $T_1'' + 2T_1' + T_1 = 0$. Характеристичне рівняння має вигляд $\mu^2 + 2\mu + 1 = 0$, а його розв'язок $\mu_{1,2} = -1$. Тоді

$$T_1(t) = (a_1 t + b_1)e^{-t} + 1, \;\; T_1(0) = b_1 + 1 = 0 \Rightarrow b_1 = -1,$$

$$T_1'(t) = (a_1 e^{-t} - (a_1 t + b_1)e^{-t})|_{t=0} = a_1 - b_1 = \varphi_1 \Rightarrow a_1 = \varphi_1 - 1,$$

$$T_1(t) = ((\varphi_1 - 1)t - 1)e^{-t} + 1.$$

Якщо $k = 0$, то для функції $T_0(t)$ маємо таку задачу Коші

$$\begin{cases} T_0'' + 2T_0' - 7T_0 = 0 \\ T_0(0) = 0, \;\; T_0'(0) = \varphi_0 \end{cases}.$$

Характеристичне рівняння запишеться у вигляді $\mu^2 + 2\mu - 7 = 0$, а його розв'язок — $\mu_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+7} = -1 \pm 2\sqrt{2}$. Тоді

$$T_0(t) = a_0 e^{(-1-2\sqrt{2})t} + b_0 e^{(-1+2\sqrt{2})t}, \; T_0(0) = a_0 + b_0 = 0$$

Знайдемо сталі $a_0, b_0$. Підставимо розв'язок в початкові умови. Отримаємо

$$T_0'(t) = a_0(-1 - 2\sqrt{2})e^{(-1-2\sqrt{2})t} + b_0(-1 + 2\sqrt{2})e^{(-1+2\sqrt{2})t},$$

$$T'(0) = a_0(-1 - 2\sqrt{2}) + b_0(-1 + 2\sqrt{2}) = \varphi_0, \;\; a_0 = -b_0,$$

$$b_0(-\cancel{1} + 2\sqrt{2} + \cancel{1} + 2\sqrt{2}) = \varphi_0; \;\; 4\sqrt{2}b_0 = \varphi_0, \;\; b_0 = \frac{\varphi_0}{4\sqrt{2}}; \;\; a_0 = -\frac{\varphi_0}{4\sqrt{2}}.$$

Отже

$$T_0(t) = \frac{\varphi_0}{4\sqrt{2}}(e^{(-1+2\sqrt{2})t} - e^{(-1-2\sqrt{2})t})$$

Нехай $k > 1$. Тоді

$$\begin{cases} T_k'' + 2T_k' + \lambda_k T_k = 0 \\ T_k(0) = 0, \;\; T_k'(0) = \varphi_k \end{cases},$$

де $\lambda_k = (2k+1)^2 - 8 > 0$. В цьому випадку характеристичне рівняння набуває вигляду

$$\mu_k^2 + 2\mu_k + \lambda_k = 0 \quad \mu_k^{(1,2)} = -1 \pm \sqrt{1-\lambda_k} = -1 \pm i\sqrt{\lambda_k - 1}.$$

Розв'язок диференціального рівняння запишеться у вигляді

$$T_k(t) = (a_k \cos\sqrt{\lambda_k - 1}t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k - 1}t)e^{-t},$$

$$T_k'(t) = -(a_k \cos\sqrt{\lambda_k - 1}t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k - 1}t)e^{-t} +$$
$$+\sqrt{\lambda_k - 1}(-a_k \sin\sqrt{\lambda_k - 1}t + b_k \cos\sqrt{\lambda_k - 1}t)e^{-t}.$$

Для визначення сталих $a_k, b_k$ скористаємося початковими умовами. Отримаємо

$$T_k(0) = a_k = 0 \Rightarrow a_k = 0$$
$$T_k'(0) = \sqrt{\lambda_k - 1}b_k = \varphi_k \Rightarrow b_k = \frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k - 1}}.$$

Функція $T_k(t)$ буде мати вигляд:

$$T_k(t) = \frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k - 1}} \sin\sqrt{\lambda_k - 1}t \cdot e^{-t}.$$

Таким чином можемо записати розв'язок задачі

$$u(x,t) = x \cdot t + T_0(t) \cdot \cos x + T_1(t)\cos 3x + \sum_{k=2}^{\infty} T_k(t)\cos(2k+1)x.$$

*Задача 2.* Знайти розв'язок граничної задачі

$$u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x - e^{-x}\sin 3x, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x.$$

Розв'язати під час пари.

*Домашнє завдання*:

*Задача 1.* Знайти розв'язок початково-граничної задачі

$$u_{tt} = u_{xx} + u,\ 0 < x < l,\ \ t > 0,$$

$$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = t,\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = \frac{x}{l}.$$

*Задача 2.* Знайти розв'язок початково-граничної задачі

$$u_{tt} + u_t = u_{xx} + 1,\ \ 0 < x < 1,\ \ t > 0,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,\ \ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0.$$

## Практичне заняття №15

## *Тема:* Метод Фур'є знаходження розв'язків граничної задачі для одновимірного параболічного рівняння

*Задача 1.* Знайти розв'язок початково-граничної задачі:

$$u_t = u_{xx} + 4u_x + x - 4t + 1 + e^{-2x}\cos^2 \pi x,\ \ 0 < x < 1,\ \ t > 0,$$

$$u|_{x=0} = t,\ u|_{x=1} = 2t,\ u|_{t=0} = 0.$$

*Розв'язання.* Зведемо задачу до однорідних граничних умов шляхом підбору відповідної функції $w(x,t) = t(x+1)$. Будемо шукати розв'язок у вигляді $u(x,t) = t(x+1) + v(x,t)$. Підставимо $u(x,t)$ в рівняння, граничні та початкову умови. Отримаємо

$$(x+ \not{1}) + v_t = v_{xx} + 4v_x + 4t + x - 4t + \not{1} + e^{-2x}\cos^2 \pi x,$$

$$v|_{x=0} = 0.\ \ v|_{x=1} = 0,\ \ u|_{t=0} = 0,\ \ v|_{t=0}.$$

Одержимо граничну задачу відносно функції $v(x,t)$ з однорідними граничними умовами:

$$v_t = v_{xx} + 4v_x + e^{-2x}\cos^2 \pi x,\ \ v|_{x=0} = 0,\ \ v|_{x=1} = 0,\ \ v|_{t=0} = 0.$$

Застосуємо метод відокремлення змінних. Будемо шукати розв'язок однорідного рівняння у вигляді: $v(x,t) = X(x)T(t)$, підставимо його в рівняння. Отримаємо

$$T'X = X''T + 4TX'; \;\; \frac{T'X}{TX} = \frac{X''T + 4TX'}{XT} = -\lambda,$$

$$\frac{X'' + 4X'}{X} = -\lambda.$$

Для функції $X(x)$ маємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + 4X' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

Запишемо характеристичне рівняння та знайдем його корені

$$\mu^2 + 4\mu + \lambda = 0 \;\; => \;\; \mu_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - \lambda}.$$

Якщо $\lambda > 4$, то $\mu_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{\lambda - 4}$, корені комплексні і загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$X(x) = e^{-2x}(C_1 \cos\sqrt{\lambda - 4}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda - 4}x).$$

З граничних умов отримаємо

$$X(0) = C_1 = 0, \;\; X(1) = C_2 e^{-2} \sin\sqrt{\lambda - 4} = \; 0.$$

Отже $C_2 \neq 0$. Таким чином

$$\sin\sqrt{\lambda - 4} = 0, \sqrt{4 - \lambda} = k\pi, \;\; \lambda_k = (k\pi)^2 + 4.$$

Підстави знайдені сталі в $X(x)$. Отримаємо

$$X_k(x) = e^{-2x} \sin k\pi x, k = 1, 2, \ldots.$$

Шукаємо розв'язок задачі $v(x,t)$ у вигляді ряду Фур'є

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x).$$

Підставимо цей ряд в неоднорідне рівняння

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k' X_k - X_k'' T_k - 4X_k' T_k = e^{-2x} \cos^2 \pi x.$$

Перетворимо ліву частину та подамо праву частину у вигляді ряду Фур'є

$$e^{-2x} \cos^2 \pi x = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2x} \sin k\pi x \cdot f_k,$$

де

$$f_k = \frac{\int\limits_0^1 \cos^2 \pi x \sin k\pi x dx}{\int\limits_0^1 \sin^2 k\pi x dx} = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ f_{2n+1}, & k = 2n+1, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases},$$

$$f_{2n+1} = \frac{16n^2 + 16n - 4}{\pi(8n^3 + 12n^2 - 2n - 3)}.$$

Отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} (T_k' + \lambda_k T_k) X_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k.$$

Прирівняємо коефіцієнти Фур'є при відповідних $X_k(x)$. Отримаємо рівняння для функцій $T_k(t)$

$$T_k' + \lambda_k T_k = f_k$$

Підставимо функцію $v(x,t)$ у вигляді ряду Фур'є в початкові умови та одержимо

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = 0 \quad => \quad T_k(0) = 0.$$

Запишемо розв'язок задачі Коші. Для $k = 2n$ задача Коші однорідна і тому має лише тривіальний розв'язок, тобто $T_{2k}(t) = 0$.

Для $k = 2n+1$ задача Коші має вигляд: $\begin{cases} T'_{2n+1} + \lambda_{2n+1} T_{2n+1} = f_{2n+1} \\ T_{2n+1}(0) = 0 \end{cases}$,

а її розв'язок

$$T_{2n+1}(t) = a_{2n+1} e^{-\lambda_{2n+1} t} + \frac{f_{2n+1}}{\lambda_{2n+1}}, \quad a_{2n+1} = -\frac{f_{2n+1}}{\lambda_{2n+1}},$$

$$T_{2n+1}(t) = \frac{f_{2n+1}}{\lambda_{2n+1}} (1 - e^{-\lambda_{2n+1} t}).$$

Таким чином розв'язок початково-граничної задачі можна записати у вигляді:

$$u(x,t) = t(x+1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{2n+1}}{\lambda_{2n+1}} (1 - e^{-\lambda_{2n+1} t}) \cdot e^{-2x} \sin(2+1)\pi x.$$

*Задача 2.* Знайти розв'язок початково-граничної задачі

$$u_t - u_{xx} - u = xt(2-t) + 2\cos t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u_x|_{x=0} = t^2, \quad u_x|_{x=\pi} = t^2, \quad u|_{t=0} = \cos 2x.$$

Задачу розв'язати під час пари.

*Домашнє завдання*:

*Задача 1.* Знайти розв'язок початково-граничної задачі

$$u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1-6t) - 2(t+3x) + \sin 2x, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$u_x|_{x=0} = 1, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi t + 1, \quad u|_{t=0} = x.$$

*Задача 2.* Знайти розв'язок початково-граничної задачі

$$u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi t, \quad u|_{t=0} = 0.$$

## Практичне заняття №16

## *Тема:* Метод відокремлення змінних (Фур'є) для рівняння Лапласа та Пуассона в кругових областях

*Задача 1.* Знайти функцію гармонічну в кільці $1 < \rho < 2,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ і таку, що $u|_{\rho=1} = 1 + \cos^2\varphi,\ u|_{\rho=2} = \sin^2\varphi$.

*Розв'язання.* Оператор Лапласа в полярній системі координат має вигляд

$$\Delta_{\rho,\varphi} u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \quad u = u(\rho,\varphi).$$

Відповідно до визначення гармонічної функції задача зводиться до пошуку розв'язку граничної задачі

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0, \qquad 1 < \rho < 2, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$u(1,\varphi) = 1 + \cos^2\varphi, \quad u(2,\varphi) = \sin^2\varphi,$$

Оскільки маємо кругову область, то функція $u(\rho,\varphi)$ повинна задовольняти умові періодичності $u(\rho,\varphi) = u(\rho,\varphi + 2\pi)$.

Розв'язок рівняння Лапласа будемо шукати у вигляді: $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$. Підставимо даний добуток в рівняння. Маємо

$$\Phi\frac{1}{\rho}(\rho R')' + \Phi''\frac{1}{\rho^2}R = 0$$

Можемо розділити змінні

$$\frac{\Phi'' R}{R\Phi} = -\frac{\Phi\rho(\rho R')'}{R\Phi} = -\lambda,$$

де $\lambda$ — довільна константа. Для функції $\Phi(\varphi)$ отримаємо рівняння

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0.$$

З умови періодичності одержимо:

$$R(\rho)\Phi(\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi + 2\pi).$$

Маємо задачу Штурма-Ліувілля для функції $\Phi(\varphi)$ з умовами періодичності:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \end{cases}$$

Характеристичне рівняння запишеться у вигляді $r^2 = -\lambda$, його корені $r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$.

Нехай $\lambda > 0$, тоді розв'язок диференціального рівняння набуває вигляду

$$\Phi(\varphi) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}\varphi + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\varphi.$$

Для знаходження $\lambda_k$ та відповідних власних функцій $\Phi_k(\varphi)$ скористаємося умовами періодичності:

$$C_1(\sin\sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi) - \sin\sqrt{\lambda}\varphi) + C_2(\cos\sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi) - \cos\sqrt{\lambda}\varphi) = 0,$$

$$2C_1 \cdot \sin\sqrt{\lambda}\pi \cdot \cos\sqrt{\lambda}(\varphi + \pi) - 2C_2 \cdot \sin\sqrt{\lambda}\pi \cdot \sin\sqrt{\lambda}(\varphi + \pi) = 0,$$

$$2\sin\sqrt{\lambda}\pi(C_1 \cos\sqrt{\lambda}(\varphi + \pi) - C_2 \sin\sqrt{\lambda}(\varphi + \pi)) = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\lambda}\pi = k\pi, \quad \lambda_k = k^2, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

а власні функції визначаються таким чином

$$\Phi_k(\varphi) = C_1 \sin k\varphi + C_2 \cos k\varphi.$$

Оскільки $\sin k\varphi$ і $\cos k\varphi$ — лінійно-незалежні функції, то існує дві власні функції для кожного $\lambda_k$.

$$\Phi_k^{(1)}(\varphi) = \cos k\varphi, \quad \Phi_k^{(2)}(\varphi) = \sin k\varphi, \quad \lambda_k = k^2, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Нехай $\lambda = 0$, тоді

$$\Phi''(\varphi) = 0, \quad \Phi(\varphi) = C_1\varphi + C_2.$$

З умов періодичності отримаємо

$$C_1(\varphi + 2\pi) + C_2 = C_1\varphi + C_2 \;\Rightarrow\; C_1 = 0,$$

тобто $\lambda_0 = 0$ - власне число, а $\Phi_0^{(1)} = 1$ - відповідна власна функція.

Якщо $\lambda < 0$, то не існує періодичних розв'язків задачі Штурма-Ліувілля.

Будемо шукати розв'язок граничної задачі у вигляді ряду Фур'є за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля:

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^{(1)}(\rho)\Phi_k^{(1)}(\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)}(\rho)\Phi_k^{(2)}(\varphi)$$

Для пошуку невідомих коефіцієнтів Фур'є $R_k^{(1)}, R_k^{(2)}$ підставимо ряд в рівняння та помножимо його на $\rho^2$. Маємо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^2}{\rho}(\rho R'^{(1)}_k)'\Phi_k^{(1)} + R_k^{(1)}\Phi''^{(1)}_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^2}{\rho}(\rho R'^{(2)}_k)'\Phi_k^{(2)} + R_k^{(2)}\Phi''^{(2)}_k = 0$$

Врахуємо, що $\Phi''^{(i)}_k = -\lambda_k \Phi_k^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\rho(\rho R'^{(1)}_k)' - \lambda_k R_k^{(1)})\Phi_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty}(\rho(\rho R'^{(2)}_k)' - \lambda_k R_k^{(2)})\Phi_k^{(2)} = 0$$

Таким чином для знаходження $R_k^{(i)}, i = 1, 2, k = 0, 1, 2, \ldots$ одержали рівняння

$$\rho(\rho R'^{(i)}_k)' - k^2 R_k^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Праві частини граничних умов розкладемо в ряд Фур'є за знайденими власними функціями використовуючи тригонометричні перетворення. Підставимо функцію $u(\rho, \varphi)$ в граничні умови:

$$u(1, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^{(1)}(1) \cdot \cos k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)}(1) \cdot \sin k\varphi =$$

$$= 1 + \cos^2\varphi = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi,$$

$$u(2,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^{(1)}(2)\cdot\cos k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)}(2)\cdot\sin k\varphi =$$

$$= \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}.$$

З двох останніх рівностей можна отримати граничні умова для $R_k^{(i)}(\rho)$ при $\rho = 1$ і $\rho = 2$. Для цього прирівняємо коефіцієнти Фур'є. А саме:

$$R_0^{(1)}(1) = \frac{3}{2}, \quad R_0^{(1)}(2) = \frac{1}{2},$$

$$R_2^{(1)}(1) = \frac{1}{2}, \quad R_2^{(1)}(2) = -\frac{1}{2},$$

$$R_k^{(2)}(1) = 0, \quad R_k^{(2)}(2) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$R_k^{(1)}(1) = 0, \quad R_k^{(1)}(2) = 0, \quad k \neq 0, \quad k \neq 2,$$

Розглянемо граничну задачу у випадку однорідних граничних умов

$$\begin{cases} \rho(\rho R'(\rho))' - k^2 R(\rho) = 0 \\ R(1) = 0,\ R(2) = 0 \end{cases}.$$

Розв'язком такої задачі є $R(\rho) \equiv 0$. Таким чином, отримали

$$R_k^{(2)}(\rho) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad R_k^{(1)}(\rho) \equiv 0, \quad k \in \{1, 3, 4, ...\}.$$

Неоднорідні граничні задачі виникають для таких випадків:

$$k = 0, \quad i = 1 : \begin{cases} \rho(\rho R_0'^{(1)})' = 0 \\ R_0^{(1)}(1) = \frac{3}{2}, \quad R_0^{(1)}(2) = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$k = 2, \quad i = 1 : \begin{cases} \rho(\rho R_2'^{(1)})' - 4R_2^{(1)} = 0 \\ R_2^{(1)}(1) = \frac{1}{2}, \quad R_2^{(1)}(2) = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Знайдемо загальний розв'язок першого рівняння

$$\rho R'^{(1)}_0 = a^{(1)}_0 \;\Rightarrow\; R'^{(1)}_0(\rho) = \frac{a^{(1)}_0}{\rho} \;\Rightarrow\; R'^{(1)}_0(\rho) = a^{(1)}_0 \ln(\rho) + b^{(1)}_0.$$

Визначимо сталі $a^{(1)}_0$ і $b^{(1)}_0$ з граничних умов

$$\begin{cases} b^{(1)}_0 = \dfrac{3}{2} \\ a^{(1)}_0 \ln(2) + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}, \; a^{(1)}_0 = -\frac{1}{\ln(2)}.$$

Отже

$$R^{(1)}_0(\rho) = \frac{3}{2} - \frac{\ln(\rho)}{\ln(2)}.$$

Знайдемо загальний розв'язок другого рівняння

$$\rho^2 R''^{(1)}_2 + \rho R'^{(1)}_2 - 4R^{(1)}_2 = 0.$$

Це рівняння Ейлера, його розв'язок будемо шукати у вигляді $R(\rho) = \rho^\mu$. Отримаємо

$$\mu(\mu-1) + \mu - 4 = 0 \;\Rightarrow\; \mu_{1,2} = \pm 2.$$

Розв'язок набуває вигляду $R^{(1)}_2(\rho) = a^{(1)}_2 \cdot \rho^{-2} + b^{(1)}_2 \cdot \rho^2$. Для знаходження невідомих сталих $a^{(1)}_2$, $b^{(1)}_2$ використаємо відповідні граничні умови. Маємо

$$\begin{cases} a^{(1)}_2 + b^{(1)}_2 = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a^{(1)}_2}{4} + 4b^{(1)}_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}, \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 4 \end{vmatrix} = \frac{15}{4},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{vmatrix} = \frac{5}{2}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{5}{8},$$

$$a^{(1)}_2 = \frac{5}{2} \div \frac{15}{4} = \frac{2}{3}, \quad b^{(1)}_2 = -\frac{5}{8} \div \frac{15}{4} = -\frac{1}{6}.$$

Отже,

$$R^{(1)}_2(\rho) = \frac{2}{3}\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{6}\rho^2,$$

а шуканий розв'язок задачі має вигляд

$$u(\rho,\varphi)=\frac{3}{2}-\frac{\ln(\rho)}{\ln(2)}+\left(\frac{2}{3}\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{6}\rho^2\right)\cos 2\varphi.$$

*Задача 2.* Знайти функцію гармонічну всередині одиничного кола і таку, що $u|_{\rho=1}=\cos^4\varphi$.

Розв'язати на парі.

*Домашнє завдання:*

*Задача 1.* Знайти функцію гармонічну всередині кола, радіусу $r_0$ з центром в початку координат і таку, що

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=r_0}=A\cos 2\varphi.$$

*Задача 2.* Знайти розв'язок граничної задачі

$$\Delta_{\rho,\varphi}u=0,\quad r_0<\rho<r_1,$$

$$u(r_0,\varphi)=2\sin\varphi\cos 2\varphi,\quad \frac{\partial u(r_1,\varphi)}{\partial\rho}=2\cos\varphi\sin 2\varphi.$$

## Практичне заняття №17

## *Тема:* Рівняння Пуассона в кругових областях

*Задача 1.* Знайти розв'язок граничної задачі

$$\Delta_{\rho,\varphi}u=\rho\cos 2\varphi\qquad a<\rho<b,\quad 0\le\varphi<2\pi,$$

$$u(a,\varphi)=2\sin\varphi,\quad u_\rho(b,\varphi)=1,$$

$$u(\rho,\varphi)=u(\rho,\varphi+2\pi)$$

*Розв'язання.* Рівняння Пуассона в полярній системі координат має вигляд

$$\Delta_{\rho,\varphi}u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi^2}=\rho\cos 2\varphi.\qquad(*)$$

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду Фур'є за системою власних функцій $\Phi_k^{(1)}(\varphi) = \cos k\varphi$ та $\Phi_k^{(2)}(\varphi) = \sin k\varphi$ періодичної задачі Штурма-Ліувілля.

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^{(1)}(\rho)\Phi_k^{(1)}(\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)}(\rho)\Phi_k^{(2)}(\varphi);$$

Рівняння (*) помножимо на $\rho^2$ і підставимо в нього функцію $u(\rho, \varphi)$ у вигляді ряду Фур'є:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\rho\left(\rho R_k'^{(1)}\right)'\Phi_k^{(1)} + R_k^{(1)}\Phi_k''^{(1)}\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\rho\left(\rho R_k'^{(2)}\right)'\Phi_k^{(1)} + R_k^{(2)}\Phi_k''^{(2)}\right] =$$

$$= \rho^3\cos 2\varphi.$$

Врахуємо вигляд власних функцій та отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\rho(\rho R_k'^{(1)})' - k^2 R_k^{(1)}\right)\cos k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\rho(\rho R_k'^{(2)})' - k^2 R_k^{(2)}\right)\sin k\varphi =$$

$$= \rho^3\cos 2\varphi.$$

Вільний член рівняння розкладемо по системі власних функцій $\Phi_k^{(1)}(\varphi) = \cos k\varphi$, $\Phi_k^{(2)}(\varphi) = \sin k\varphi$. Коефіцієнти Фур'є матимуть вигляд:

$$F_k^{(1)}(\rho) = \begin{cases} \rho^3, & k = 2 \\ 0, & k \neq 2 \end{cases} \qquad F_k^{(2)}(\rho) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Таким чином отримаємо рівняння для знаходження коефіцієнтів Фур'є:

$$\rho^2 R_k''^{(1)} + \rho R_k'^{(1)} - k^2 R_k^{(1)} = \begin{cases} \rho^3, & k = 2 \\ 0, & k \neq 2 \end{cases}$$

$$\rho^2 R_k''^{(2)} + \rho R_k'^{(2)} - k^2 R_k^{(2)} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Підставимо ряд Фур'є в граничні умови, праву частину яких також представимо у вигляді ряду Фур'є:

$$u(a,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}R_k^{(1)}(a)\cos k\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}R_k^{(2)}(a)\sin k\varphi=2\sin\varphi$$

$$\frac{\partial u(b,\varphi)}{\partial\rho}=\sum_{k=0}^{\infty}R'^{(1)}_k(b)\cos k\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}R'^{(2)}_k(b)\sin k\varphi=1$$

З двох останніх рівностей отримаємо граничні умови для коефіцієнтів Фур'є $R_k^{(1)}(\rho)$

$$k=0,\qquad R_0^{(1)}(a)=0,\quad \frac{dR_0^{(1)}(b)}{d\rho}=1,$$

$$k=1,\quad i=2\quad R_1^{(2)}(a)=2,\quad \frac{dR_1^{(2)}(b)}{d\rho}=0,$$

$$R_k^{(1)}(a)=0,\quad \frac{dR_k^{(1)}(b)}{d\rho}=0,\quad k>0,\quad R_k^{(2)}(a)=0,\quad \frac{dR_k^{(2)}(b)}{d\rho}=0,k>1.$$

Таким чином можемо записати граничні задачі з неоднорідними умовами або неоднорідним вільним членом:

$$\begin{cases}\rho^2R''^{(1)}_0+\rho R'^{(1)}_0=0\\ R_0^{(1)}(a)=0,\quad R'^{(1)}_0(b)=1\end{cases},\tag{1}$$

$$\begin{cases}\rho^2R''^{(2)}_1+\rho R'^{(2)}_1-R_1^{(2)}=0\\ R_1^{(2)}(a)=2,\quad R'^{(2)}_1(b)=0\end{cases},\tag{2}$$

$$\begin{cases}\rho^2R''^{(1)}_2+\rho R'^{(1)}_2-4R_2^{(1)}=\rho^3\\ R_2^{(1)}(a)=0,R'^{(1)}_2(b)=0\end{cases}.\tag{3}$$

Усі інші задачі мають однорідні рівняння та однорідні граничні умови і тому розв'язки цих задач тривіальні $R_k^{(i)}(p)\equiv 0$;

Розглянемо (1). Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд: $R_0^{(1)}(\rho) = a_0^{(1)} + b_0^{(1)} \ln(\rho)$. З граничних умов отримаємо систему рівностей:

$$\begin{cases} R_0^{(1)}(a) = a_0^{(1)} + b_0^{(1)} \ln(a) = 0 \\ R'^{(1)}_0(b) = b_0^{(1)} \frac{1}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} b_0^{(1)} = b \\ a_0^{(1)} = -b \ln(a) \end{array}.$$

Отже,

$$R_0^{(1)}(\rho) = b \ln\left(\frac{\rho}{a}\right).$$

Розглянемо задачу (2). Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд: $R_1^{(2)}(\rho) = a_1^{(2)}\rho + b_1^{(2)}\dfrac{1}{\rho}$. З граничних умов отримаємо систему рівностей

$$\begin{cases} a_1^{(2)} \cdot a + b_1^{(2)} \cdot \dfrac{1}{a} = 2 \\ a_1^{(2)} - \dfrac{b_1^{(2)}}{b^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1^{(2)} = \dfrac{2a}{a^2+b^2} \\ b_1^{(2)} = \dfrac{2ab^2}{a^2+b^2} \end{array}$$

Тоді розв'язок набуває вигляду

$$R_1^{(2)}(\rho) = \frac{2a\rho}{a^2+b^2} + \frac{2ab^2}{\rho(a^2+b^2)} = \frac{2a}{a^2+b^2}\left(\rho + \frac{b^2}{\rho}\right).$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (3) запишемо таким чином: $R_2^{(1)}(\rho) = a_2^{(1)}\rho^2 + b_2^{(1)}\rho^{-2} + R_{неод.}(\rho)$.

Знайдемо розв'язок неоднорідного рівняння як суму загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного. Функцію $R_{неод.}(\rho)$ будемо шукати у вигляді $a\rho^3$. Підставимо у рівняння та отримаємо

$$a \cdot 3 \cdot 2\rho^3 + a \cdot 3\rho^3 - 4a\rho^3 = \rho^3$$

або

$$5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}.$$

Таким чином

$$R_2^{(1)}(\rho) = a_2^{(1)}\rho^2 + b_2^{(1)}\rho^{-2} + \frac{\rho^3}{5}.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів підставимо $R_2^{(1)}(\rho)$ в граничні умови. Одержимо

$$\begin{cases} a_2^{(1)}a^2 + b_2^{(1)}a^{-2} + \dfrac{a^3}{5} = 0 \\ 2a_2^{(1)}b - 2b_2^{(1)}b^{-3} + \dfrac{3}{5}b^2 = 0 \end{cases}.$$

Розв'яжемо систему. Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & \dfrac{1}{a^2} \\ 2b & -2b^{-3} \end{vmatrix} = -2a^2b^{-3} - 2ba^{-2},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\dfrac{a^3}{5} & \dfrac{1}{a^2} \\ -\dfrac{3}{5}b^2 & -2b^{-3} \end{vmatrix} = -\frac{2a^3b^{-3}}{5} + \frac{3}{5}a^{-2}b^2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a^2 & -\dfrac{a^3}{5} \\ 2b & -\dfrac{3}{5}b^2 \end{vmatrix} = -\frac{3}{5}a^2b^2 + \frac{2}{5}ba^3.$$

Отримали розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$a_2^{(1)} = -\frac{1}{10}\frac{3a^5 - 2b^5}{a^4 + b^4}, b_2^{(1)} = -\frac{1}{10}\frac{a^4b^4(2a - 3b)}{a^4 + b^4}.$$

Отже, розв'язок задачі має вигляд:

$$u(\rho, \varphi) = b\ln(\frac{\rho}{a}) + \frac{2a}{a^2 + b^2}\left(\rho + \frac{b^2}{\rho}\right)\sin\varphi +$$

$$+\frac{1}{10(a^4 + b^4)}\left((2b^5 - 3a^5)\cdot\rho^2 + \frac{(3b - 2a)a^4b^4}{\rho^2} + \frac{1}{5}\rho^3\right)\cdot\cos 2\varphi.$$

*Задача 1.* Знайти розв'язок граничної задачі

$$\begin{cases} \Delta_{\rho,\varphi} u = 5\rho \sin^2 \varphi \\ u(1,\varphi) = \sin^4 \varphi \end{cases}.$$

Розв'язати на практичному занятті.

*Домашнє завдання*:

*Задача 1.* Знайти розв'язок граничної задачі

$$\begin{cases} \Delta_{\rho,\varphi} u = \rho^{-1} \sin^2 \varphi \\ u(1,\varphi) = \cos^2 \varphi \end{cases}.$$

*Задача 2.* Знайти розв'язок граничної задачі

$$\begin{cases} \Delta_{\rho,\varphi} u = \rho^{-2} \sin \ln(\rho) \cdot \sin \varphi \\ u(\frac{1}{2},\varphi) = \sin \varphi \cos 2\varphi \\ u(2,\varphi) = \cos \varphi \sin 2\varphi \end{cases}.$$

## Практичне заняття №18

## *Тема:* Граничні задачі для рівняння Лапласа і Пуассона в прямокутнику

*Задача 1.* Знайти розв'язок граничної задачі для рівняння Пуассона в прямокутнику:

$$\Delta u = \cos y \cdot \cos \frac{\pi x}{2a} + \sin \frac{\pi y}{b}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

$$u_x(0,y) = 2 \cdot \sin \frac{2\pi y}{b} \cos \frac{\pi y}{b}, \quad u(a,y) = 0,$$

$$u(x,0) = \cos \frac{3\pi x}{2a}, \quad u(x,b) = 0.$$

*Розв'язання.* Оскільки граничні умови на жодній парі протилежних сторін не є однорідними, то задачу треба розбити на дві так, щоб досягти однорідності граничних умов на парі протилежних сторін. Для цього представимо розв'язок у вигляді $u = u_1 + u_2$ та підставимо в умови задачі. В результаті одержимо дві граничні задачі:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = \cos y \cdot \cos \dfrac{\pi x}{2a} \\ u_{1,x}(0, y) = 0, \quad u_1(a, y) = 0 \\ u_1(x, 0) = \cos \dfrac{3\pi x}{2a}, \quad u_1(x, b) = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \Delta u_2 = \sin \dfrac{\pi y}{b} \\ u_{2,x}(0, y) = \sin \dfrac{\pi y}{b} + \sin \dfrac{3\pi y}{b} = 2 \sin \dfrac{2\pi y}{b} \cdot \cos \dfrac{\pi y}{b} \\ u_2(a, y) = 0, \quad u_2(x, 0) = 0, u_2(x, b) = 0 \end{cases} . \tag{2}$$

Знайдемо розв'язок задачі (1) методом Фур'є. Для отримання відповідної задачі Штурма-Ліувілля розглянемо рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0.$$

Його розв'язок будемо шукати у вигляді $u_1(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$. Підставимо даний добуток в однорідне рівняння та отримаємо

$$X''Y + Y''X = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

Виберемо рівняння для функції $X(x)$, оскільки за напрямком змінної $x$ маємо однорідні граничні умови

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

З граничних умов дістанемо

$$X'(0)Y(y) = 0 \ \Rightarrow \ X'(0) = 0,$$

$$X'(a)Y(y) = 0 \;\Rightarrow\; X'(a) = 0.$$

Запишемо задачу Штурма-Ліувілля $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0, \quad X(a) = 0 \end{cases}$. Розв'язками цієї задачі будуть такі власні функції та числа:

$$X_k(x) = \cos(2k+1) \cdot \frac{\pi x}{2a}; \quad \lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a}\right)^2, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Будемо шукати розв'язок задачі (1) у вигляді ряду Фур'є за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля

$$u_1(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y) X_k(x).$$

Підставимо ряд в неоднорідне рівняння задачі (1). Маємо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k''(x) Y_k(y) + X_k(x) Y_k''(y) = F(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(y) X_k(x).$$

В правій частині записаний ряд Фур'є для функції $F(x, y)$. Враховуючи, що $X_k''(x) = -\lambda_k X_k(x)$, будемо мати

$$\sum_{k=0}^{\infty} (Y_k''(y) - \lambda_k Y_k(y)) X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(y) X_k.$$

Прирівняємо коефіцієнти при відповідних $X_k(x)$ та отримаємо

$$Y_k''(y) - \lambda_k Y_k(y) = F_k(y). \tag{3}$$

Права частина рівняння із задачі (1) це функція $F(x, y) = \cos y \cdot \cos \dfrac{\pi x}{2a}$. Легко бачити, що ця функція є відрізком ряду Фур'є, де

$$F_k(y) = \begin{cases} \cos y, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases}.$$

Знайдемо граничні умови для рівняння (3). Маємо

$$u_1(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(0)X_k(x) = \cos\frac{3\pi x}{2a} = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k X_k(x).$$

Прирівняємо відповідні коефіцієнти та отримаємо $Y_k(0) = \varphi_k$, де

$$\varphi_k = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases}.$$

З граничної умови на правому кінці будемо мати:

$$u_1(x,b) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(b)X_k(x) = 0 \ \Rightarrow Y_k(b) = 0.$$

Запишемо граничні задачі для функцій $Y_k(y)$:

$$\begin{cases} Y_0'' - \lambda_0 Y_0 = \cos y \\ Y_0(0) = 0, \quad Y_0(b) = 0 \end{cases}, \begin{cases} Y_1'' - \lambda_1 Y_1 = 0 \\ Y_1(0) = 1, \quad Y_1(b) = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} Y_k'' - \lambda_k Y_k = 0 \\ Y_k(0) = 0, \quad Y_k(b) = 0 \end{cases}, \quad k > 1.$$

Таким чином, $Y_k(y) \equiv 0$, якщо $k > 1$.

Розв'яжемо першу задачу. Розв'язок будемо шукати у вигляді

$$Y_0(y) = a_0 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_0}y + b_0 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_0}(b-y) + Y_{неодн.}(y).$$

Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння $Y_{неодн.}(y)$:

$$Y_{неодн.}(y) = c \cdot \cos y.$$

Підставимо цей вираз в рівняння:

$$-c \cdot \cos y - \lambda_0 \cdot c \cdot \cos y = \cos y,$$

тоді $c = -\dfrac{1}{1+\lambda_0}$ і загальний розв'язок матиме вигляд:

$$Y_0(y) = a_0 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_0} y + b_0 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_0}(b-y) - \frac{\cos y}{1+\lambda_0}.$$

Знайдемо сталі $a_0$ і $b_0$, скориставшись граничними умовами:

$$Y_0(0) = b_0 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_0} b - \frac{1}{1+\lambda_0} = 0 \;=>\; b_0 = \frac{1}{(1+\lambda_0)\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_0} b},$$

$$Y_0(b) = a_0 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_0} b - \frac{\cos b}{1+\lambda_0} = 0; \;=>\; a_0 = \frac{\cos b}{(1+\lambda_0)\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_0} b}.$$

Підставимо знайдені сталі в $Y_0(y)$. Отримаємо

$$Y_0(y) = \frac{\cos b \cdot \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_0} y}{(1+\lambda_0)\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_0} b} + \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_0}(b-y)}{(1+\lambda_0)\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_0} b} - \frac{\cos y}{1+\lambda_0}.$$

Знайдемо $Y_1(y)$. Загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$Y_1(y) = a_1 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_1} y + b_1 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_1}(b-y)$$

На підставі граничних умов знайдемо $a_1$ та $b_1$:

$$Y_1(0) = b_1 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_1}(b-y) = 1 \Rightarrow \;\Rightarrow b_1 = \frac{1}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_1} b},$$

$$Y_1(b) = a_1 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_1} b = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$$

Отже

$$Y_1(y) = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_1}(b-y)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_1} b},$$

а

$$u_1(x,y) = Y_0(y) \cdot \cos \frac{\pi x}{2a} + Y_1(y) \cdot \cos \frac{3\pi x}{2a}.$$

Знайдемо розв'язок задачі (2). Запишемо однорідне рівняння (Лапласа):

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0.$$

Його розв'язок будемо шукати у вигляді $u_2(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$. Підставимо цей добуток в рівняння Лапласа. Одержимо

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Оберемо рівняння для функції $Y(y)$:

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0.$$

Знайдемо граничні умови

$$u_2(x,0) = X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0,$$

$$u_2(x,b) = X(x)Y(b) = 0 \Rightarrow Y(b) = 0.$$

Таким чином одержали задачу Штурма - Ліувілля.

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \\ Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0 \end{cases}.$$

Задача має такі власні функції та відповідні числа

$$Y_k(y) = \sin\frac{k\pi y}{b}, \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Запишемо розв'язок граничної задачі у вигляді ряду Фур'є за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля:

$$u_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)Y_k(y).$$

Підставимо цей ряд в неоднорідне рівняння та неоднорідні граничні умови. Маємо:

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k''(x)Y_k(y) + X_k(x)Y_k''(y) = \sin\frac{\pi y}{b},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(X_k''(x)-\lambda_k X_k(x))Y_k(y)=\sin\frac{\pi y}{b}=\sum_{k=1}^{\infty}F_k(x)Y_k(y),$$

де

$$F_k(x)=\begin{cases}1, & k=1\\ 0, & k\geq 2\end{cases},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}X_k'(0)Y_k(y)=\sin\frac{\pi y}{b}+\sin\frac{3\pi y}{b}=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k Y_k(y),$$

$$\varphi_k=\begin{cases}1, & k=1,3\\ 0, & k=2,4,5,\dots\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_k'(0)=\varphi_k,\ \sum_{k=1}^{\infty}X_k(a)Y_k(y)=0\Rightarrow X_k(a)=0.$$

Запишемо граничні задачі для функцій $X_k(x)$:

$$k=1:\begin{cases}X_1''-\lambda_1 X_1=1\\ X_1'(0)=1,\quad X_1(a)=0\end{cases},\ k=3:\begin{cases}X_3''-\lambda_3 X_3=0\\ X_3'(0)=1,\quad X_3(a)=0\end{cases};$$

$$k=2,4,5\dots:\begin{cases}X_k''-\lambda_k X_k=0\\ X_k'(0)=0,\quad X_k(a)=0\end{cases}$$ — однорідні граничні задачі мають тривіальні розв'язки: $X_k(x)\equiv 0,\quad k=2,4,5,\dots$.

Знайдемо $X_1(x)$ :

$$X_1(x)=a_1\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}x+b_1\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_1}(a-x)-\frac{1}{\lambda_1},$$

$$X_1'(x)=\sqrt{\lambda_1}a_1\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_1}x-\sqrt{\lambda_1}b_1\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}(a-x).$$

Використаємо граничні умови

$$X_1'(0)=-\sqrt{\lambda_1}b_1\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}a=1\Rightarrow b_1=-\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}a},$$

$$X_1(a) = a_1 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}a - \frac{1}{\lambda_1} = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\lambda_1 \cdot \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}a},$$

А отже

$$X_1(x) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}x}{\lambda_1 \cdot \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}a} - \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_1}(a-x)}{\sqrt{\lambda_1}\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_1}a} - \frac{1}{\lambda_1}.$$

Функцію $X_3(x)$ будемо шукати у вигляді

$$X_3(x) = a_3 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_3}x + b_3 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_3}(a-x).$$

Знайдемо сталі $a_3$ та $b_3$:

$$X_3'(x) = \sqrt{\lambda_3}a_3 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda_3}x - \sqrt{\lambda_3}b_3 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_3}(a-x),$$

$$X_3'(0) = -\sqrt{\lambda_3}b_3 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_3}a = 1 \Rightarrow b_3 = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_3}a},$$

$$X_3(a) = a_3 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda_3}a = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

А отже

$$X_3(x) = -\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_3}(a-x)}{\sqrt{\lambda_3}\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_3}a},$$

функція $u_2(x,y)$ запишеться у вигляді:

$$u_2(x,y) = X_1(x) \cdot \sin\frac{\pi y}{b} + X_3(x) \cdot \sin\frac{3\pi y}{b}.$$

Остаточно маємо: $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$.

*Домашнє завдання*:

*Задача 3*

$$\begin{cases} \Delta u = x \cdot \cos y \\ u(0,y) = 0, \\ u_x(a,y) = 4 \cdot \cos^3 y \\ u_y(x,0) = 0, \quad u(x,\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

*Задача 4*

$$\begin{cases} \Delta u = -3x \cdot \cos y \\ u_x(0,y) - u(0,y) = 1 \\ u(0,y) = 4a\cos^3 y \\ u_y(x,0) = 0, \quad u(x,\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

## Практичне заняття №19

## *Тема:* Задача Коші для рівняння коливання струни. Формула Даламбера

*Задача 1.* Необмежена струна збуджена локальним початковим відхиленням зображеним на рисунку 1. Знайти відхилення точок струни від положення рівноваги для $-\infty < x < \infty, \quad t > 0$.

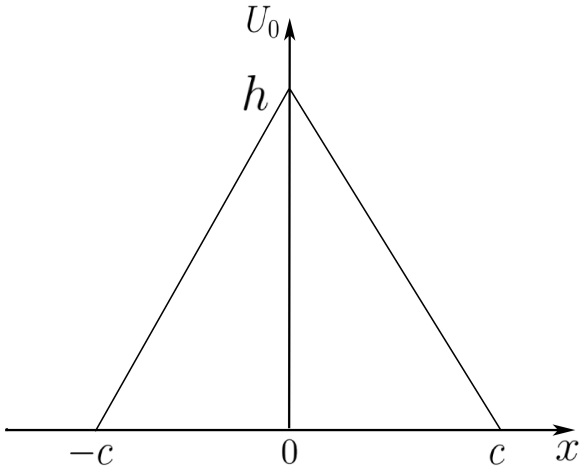


Рисунок 1

*Розв'язання.* Запишемо постановку задачі Коші.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = U_0(x), & \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Функцію $U_0(x)$, що зображена на рисунку 1, запишемо в аналітичному вигляді:

$$U_0(x) = \begin{cases} 0, & x < -c \\ h(1 + x/c), & -c \le x \le 0 \\ h(1 - x/c), & 0 \le x \le c \\ 0, & x > c \end{cases}.$$

Розв'язок сформульованої задачі Коші можна записати за формулою Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{U_0(x+at) + U_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} V_0(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t+\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

В задачі, яку ми розглядаємо $V_0(x) \equiv 0, \quad f(x,t) \equiv 0$.Таким чином формула Даламбера набуває більш простого вигляду:

$$u(x,t) = \frac{U_0(x+at) + U_0(x-at)}{2}.$$

Розглянемо залежність розв'язку задачі Коші від аргументів $x, t$.

Лінії $x - at = const, \quad x + at = const$ називаються характеристиками рівняння коливання струни. Неважко бачити, що аргументи $x, t$ входять в формулу Даламбера саме в такий комбінації.

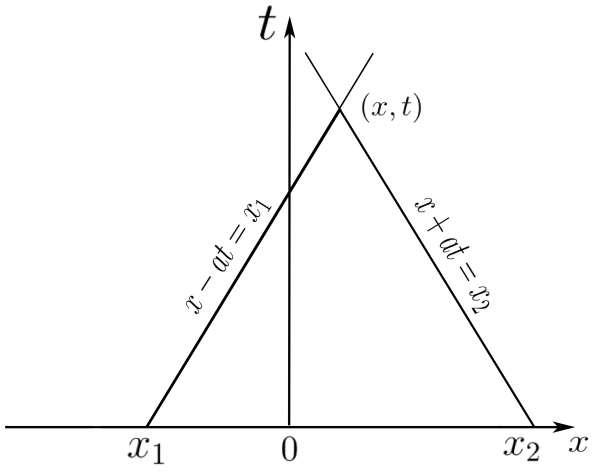


Рисунок 2

Таким чином, для знаходження розв'язку задачі для довільних значень аргументів $x, t$ необхідно через цю точку провести обидві характеристики

та знайти їх точки перетину з віссю $x$. Нехай це будуть точки $x_1$ та $x_2$ відповідно (рисунок 2).

Таким чином розв'язок задачі 1 набуває вигляду

$$u(x,t) = \frac{U_0(x_1) + U_0(x_2)}{2}.$$

Для знаходження розв'язку задачі проведемо характеристики через точки на вісі $x$, де початкова функція змінює свій аналітичний вигляд (рисунок 3).

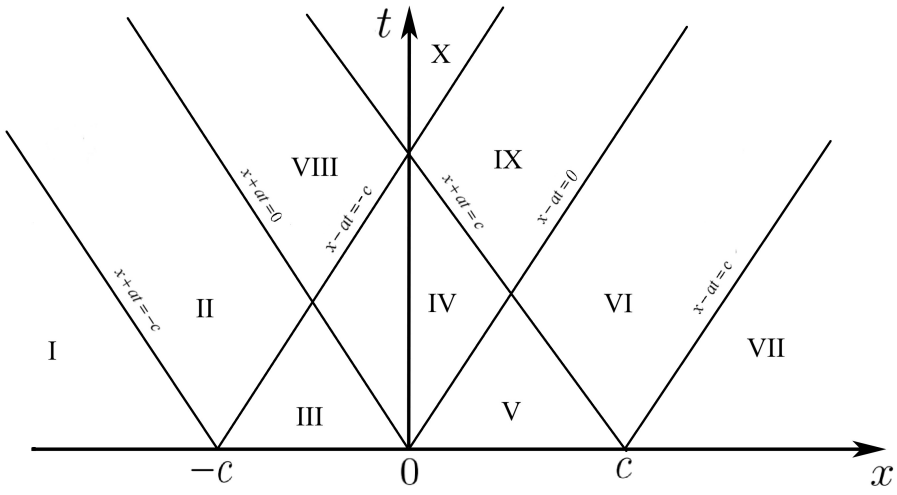


Рисунок 3

Відповідно ці характеристики поділяють область пошуку розв'язку на ряд підобластей (рисунок 3), які ми пронумеруємо від I до X. Запишемо розв'язок задачі Коші для деяких з цих підобластей:

$I: \quad x + at \le -c, \quad u(x,t) = 0;$

$$II: \begin{cases} -c \le x + at < 0 \\ x - at < -c \end{cases}, \qquad u(x,t) = \frac{h}{2}\left(1 + \frac{x+at}{c}\right);$$

$$III: \begin{cases} -c < x - at < 0 \\ -c < x + at < 0 \end{cases},$$

$$u(x,t) = \frac{h}{2}\left(\left(1+\frac{x-at}{c}\right)+\left(1+\frac{x+at}{c}\right)\right) = h\left(1+\frac{x}{c}\right);$$

$$IV: \begin{cases} -c < x-at < 0 \\ 0 < x+at < c \end{cases},$$

$$u(x,t) = \frac{h}{2}\left(\left(1+\frac{x-at}{c}\right)+\left(1-\frac{x+at}{c}\right)\right) = h\left(1-\frac{at}{c}\right);$$

$$VIII: \begin{cases} 0 < x+at < c \\ x-at < -c \end{cases}, \quad u(x,t) = \frac{h}{2}\left(1-\frac{x+at}{c}\right);$$

$$V: \begin{cases} 0 < x-at < c \\ 0 < x+at < c \end{cases},$$

$$u(x,t) = \frac{h}{2}\left(\left(1-\frac{x+at}{c}\right)+\left(1-\frac{x-at}{c}\right)\right) = h\left(1-\frac{x}{c}\right).$$

*Задача 2.* Необмеженій струні на відрізку $-c \le x \le c$ надана початкова швидкість $V_0 = const$, поза цим відрізком початкова швидкість дорівнює нулю. Знайти формули, які представляють відхилення точок струни від положення рівноваги для $t > 0$.

*Розв'язання.* Розглянемо постановку задачі Коші:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = V(x),$$

де $V(x) = \begin{cases} 0, & x < -c \\ V_0, & -c \le x \le c. \\ 0, & x > c \end{cases}$

Розв'язок запишемо за формулою Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} V(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{x+at} V(\xi)d\xi - \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{x-at} V(\xi)d\xi = w(x+at) - w(x-at),$$

де $w(z) = \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{z} V(\xi)d\xi$. Обчислимо $w(x)$:

$$w(x) = \begin{cases} 0, & x \le -c \\ \dfrac{V_0}{2a}(x+c), & -c < x \le c. \\ \dfrac{V_0 c}{a}, & x > c \end{cases}$$

Функція $w(z)$ змінює свій аналітичний вигляд в точках $-c,\ c$. Зобразимо графічно підобласті на які характеристики розбивають область пошуку розв'язку (рисунок 4).

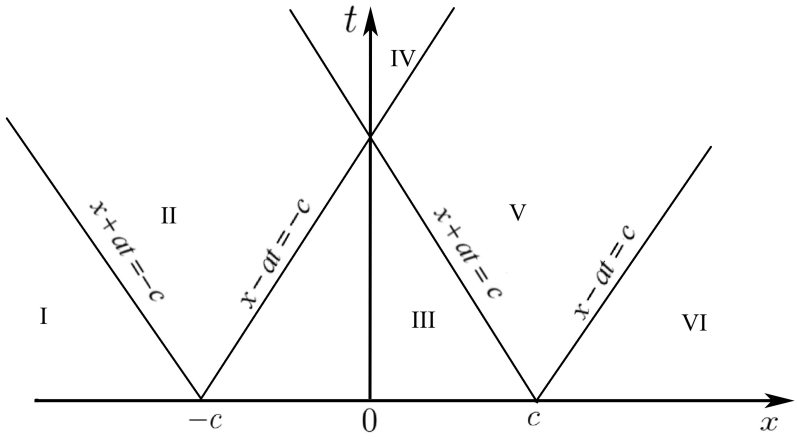


Рисунок 4

Запишемо розв'язок задачі для декількох областей:

II: $\begin{cases} -c < x + at + c \\ x - at < -c \end{cases}$, $u(x,t) = \dfrac{V_0}{2a}(x + at + c)$;

III: $\begin{cases} -c < x - at < c \\ -c < x + at < c \end{cases}$, $u(x,t) = \dfrac{V_0}{2a}((x + at + c) - (x - at + c)) = V_0 t$

Самостійно записати розв'язки для решти областей.

*Домашнє завдання*:

*Задача 1.* Необмежена струна збуджена початковим локальним відхиленням, що має форму квадратичної параболи, зображеної на рисунку 5. Знайти відхилення точок струни від положення рівноваги для довільних значень $-\infty < x < \infty,\ t > 0$.

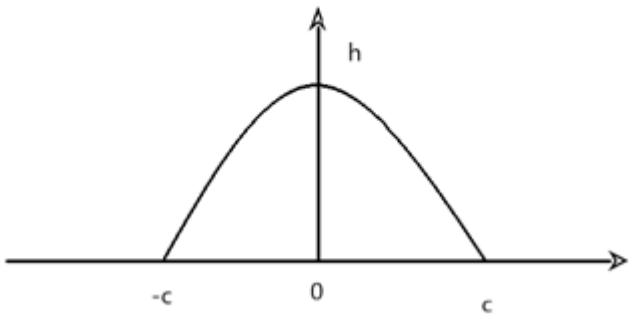


Рисунок 5

*Задача 2.* В початковий момент $t = 0$ необмежена струна отримує поперечний удар в точці $x = x_0$, який передає їй імпульс I. Знайти відхилення точок струни від положення рівноваги.

## Практичне заняття №20

### *Тема:* Розв'язання граничних задач для рівняння коливання струни для півпрямої з однорідними граничними умовами.

Розглянемо дві граничні задачі для рівняння коливання струни з однорідним граничними умовами першого та другого роду: $u(0,t) = 0$ — лівий

кінець закріплений або $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$ — лівий кінець вільний.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Для знаходження розв'язків цих задач використовується метод парного або непарного продовження початкових функцій $\psi(x)$ та $\varphi(x)$ на від'ємну піввісь і таким чином граничні задачі зводяться до задачі Коші з подальшим використанням формули Даламбера.

*Парне продовження:*

Визначимо функції $\Psi(x)$ та $\Phi(x)$ наступним чином

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ \varphi(-x), & x < 0 \end{cases}, \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \\ \psi(-x), & x < 0 \end{cases}.$$

*Непарне продовження:*

Визначимо функції $\Psi(x)$ та $\Phi(x)$ наступним чином

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}, \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}.$$

Розглянемо задачу Коші:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = \Phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \Psi(x). \tag{3}$$

a) Показати, що коли $\Psi(x)$ та $\Phi(x)$ є непарним функціями, то виконана умова $u(0,t) = 0 \ \ \forall t > 0$ для задачі (3).

b) Показати, що коли $\Psi(x)$ та $\Phi(x)$ є парними функціями, то виконується умова $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 \ \ \forall t > 0$.

*Вказівки:*

1. В залежності від граничної умов виконати парне або непарне продовження початкових функцій на від'ємну піввісь, отримавши задачу Коші.

2. Для знаходження розв'язку задачі Коші використати формулу Даламбера.

3. Записати розв'язок задачі Коші для всіх $x > 0$ і $t > 0$ враховуючи вплив лівої частини струни, тобто для $x < 0$.

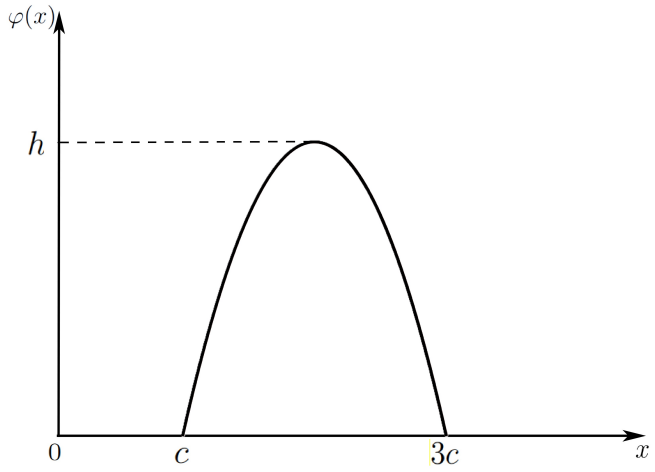


Рисунок 1

*Задача 1.* Напівобмежена струна, закріплена на кінці $x = 0$, збуджена початковим відхиленням, що має форму квадратичної параболи, зображене

на рисунку 1 для $x > 0$. Знайти відхилення точок струни від початкового положення рівноваги для $x > 0$.

*Розв'язання.* Запишемо постановку початково-граничної задачі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Враховуючи граничну умову в точці $x = 0$ функцію $\varphi(x)$ при $x > 0$ треба продовжити непарним чином на від'ємну піввісь. Запишемо вигляд функції $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ h\left(\frac{x}{c} - 1\right)\left(3 - \frac{x}{c}\right), & c \le x \le 3c \\ 0, & 3c < x \le \infty \end{cases} .$$

Запишемо непарне продовження початкової функції:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 3c \\ h\left(\frac{x}{c} - 1\right)\left(3 + \frac{x}{c}\right), & -3c \le x \le -c \\ 0, & -c < x < c \\ h\left(\frac{x}{c} - 1\right)\left(3 - \frac{x}{c}\right), & c \le x \le 3c \\ 0, & 3c < x < \infty \end{cases}$$

Розв'язок задачі Коші можна записати за формулою Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x + at) + \Phi(x - at)}{2}$$

для усіх $x > 0,\ t > 0$.

Проведемо характеристики рівняння через точки в яких початкова функція змінює свій аналітичний вигляд (рисунок 2). Характеристики поділя-

ють область знаходження розв'язку на деяку кількість підобластей позначених римскими цифрами.

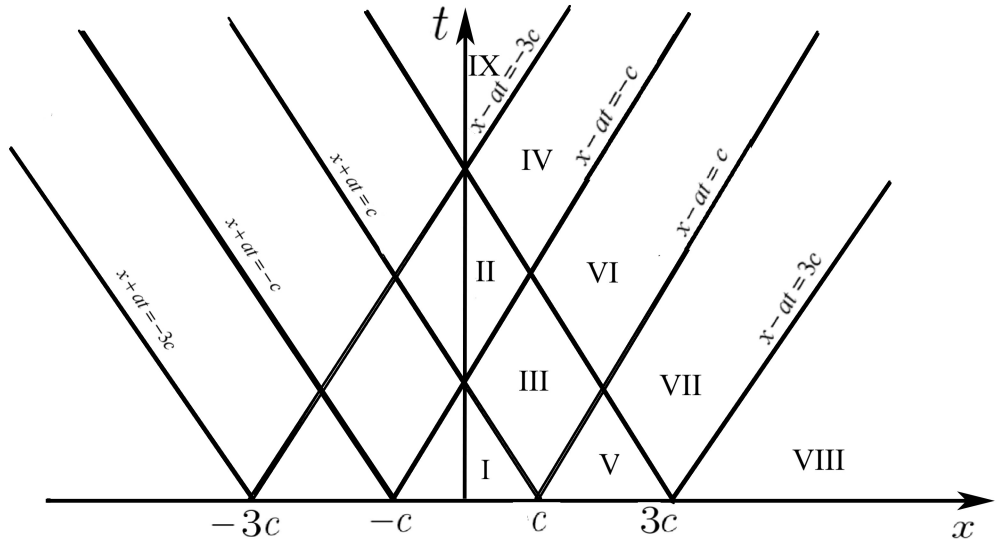


Рисунок 2

Запишемо розв'язок для деяких областей.

$$\text{II:}\begin{cases} x+at<3c \\ x-at<-c \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}h\left(\left(1+\frac{x-at}{c}\right)\left(3+\frac{x-at}{c}\right)+\left(\frac{x+at}{c}-1\right)\left(3-\frac{x+at}{c}\right)\right),$$

$$\text{III:}\begin{cases} c<x+at<3c \\ -c<x-at<c \end{cases} \Rightarrow \quad u(x,t)=\frac{1}{2}h\left(\frac{x+at}{c}-1\right)\left(3-\frac{x+at}{c}\right),$$

$$\text{V:}\begin{cases} c<x+at<3c \\ c<x-at<3c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2}h\left(\left(\frac{x+at}{c}-1\right)\left(3-\frac{x+at}{c}\right)+\left(\frac{x-at}{c}-1\right)\left(3-\frac{x-at}{c}\right)\right).$$

Для інших областей записати розв'язок самостійно.

*Задача 2.* Напівобмеженому пружному стрижню $0 \leq x < \infty$ з вільним кінцем $x = 0$ передана початкова осьова швидкість, що дорівнює $v_0$ на відрізку $[c, 2c]$; поза цим відрізком швидкість дорівнює нулю. Побудувати продольні відхилення поперечних перерізів від положення рівноваги для $x > 0,\ t > 0$.

Задачу розв'язати під час практичного заняття.

*Домашнє завдання:*

*Задача 1.*

Напівобмежена струна з закріпленим лівим кінцем збуджена локальним початковим відхиленням, що зображене на рисунку 3 $x > 0,\ t > 0$.

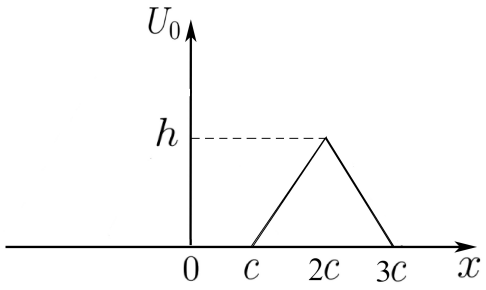


Рисунок 3

Накреслити положення струни для моментів часу

$$t = \frac{c}{a},\ t = \frac{3c}{2a}, t = \frac{2c}{a},\ t = \frac{7c}{2a}.$$

*Задача 2.* Напівобмежена струна $0 \leq x < +\infty$ із закріпленим кінцем $x = 0$ отримує в момент $t = 0$ поперечний удар, що передає струні імпульс $I$ на ділянці $0 \leq x \leq 2l$, причому профіль розподілу швидкості, що отримує при ударі, має в момент $t = 0$ форму півхвилі синусоїди з основою $0 \leq x \leq 2l$. Знайти формули, які показують закон руху точок струни з різними абсцисами $x$ при $t > 0$.

## Практичне заняття №21

## *Тема:* Метод відокремлення змінних для рівняння Лапласа та Пуассона в циліндричних координатах.

*Задача 1.* Знайти стаціонарну температуру $u(r,z)$ внутрішніх точок циліндра з радіусом основи $r_0$ і висотою $h$ якщо температура нижньої основи і бічної поверхні циліндра дорівнює нулю, а температура верхньої основи залежить тільки від $r$.

*Розв'язання.*

Стаціонарний розподіл температури (температура не залежить від часу) визначається рівнянням Лапласа, яке в циліндричній системі координатах має вигляд:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\ 0\le r<r_0,\ 0\le\varphi<2\pi,\ 0<z<h. \quad (1)$$

Процеси, що відбуваються на поверхні циліндру запишемо у вигляді граничних умов:

$$\begin{aligned} &u|_{r=r_0}=0 \text{ (бічна поверхня)}\\ &u|_{z=0}=0 \text{ (нижня основа)}\\ &u|_{z=h}=f(r) \text{ (верхня основа)}\\ &|u|_{r=0}|<\infty \text{ (обмеженість на осі циліндра)} \end{aligned} \quad (2)$$

Враховуючи, що граничні умови задачі не залежать явно від кута $\varphi$, від $\varphi$ не буде залежати і розв'язок задачі, тобто рівняння (1) спрощується:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\ 0\le r<r_0,\ 0<z<h. \quad (3)$$

Важливо, що на бічній поверхні умови однорідні і це дозволяє відразу застосовувати метод відокремлення змінних. Будемо шукати розв'язок у вигляді

$$u(r,z)=R(r)Z(z).$$

Підставимо його в рівняння (3). Отримаємо

$$Z(z)\frac{1}{r}(rR'(r))' + Z''(z)R(r) = 0,$$

$$\frac{Z(z)\frac{1}{r}(rR'(r))'}{R(r)Z(z)} = -\frac{Z''(z)R(r)}{R(r)Z(z)} = -\lambda.$$

Запишемо рівняння для функції $R(r)$ :

$$\frac{1}{r}(rR')' + \lambda R = 0. \tag{4}$$

Додамо до рівняння (4) граничні умови:

$$R(r_0) = 0,\ |R(0)| < \infty. \tag{5}$$

Маємо задачу Штурма-Ліувілля (4), (5). Розв'яжемо цю задачу. Запишемо рівняння (4) в еквівалентній формі:

$$r^2R''(r) + rR'(r) + \lambda r^2R(r) = 0. \tag{4'}$$

Нехай $\lambda > 0$. Зробимо заміну незалежної змінної: $\rho = \sqrt{\lambda}r$. Перейдемо в рівнянні (4') до нової змінної $\rho$:

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{d\rho}\frac{d\rho}{dr} = \sqrt{\lambda}\frac{dR}{d\rho},$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{d}{dr}(\sqrt{\lambda}\cdot\frac{dR}{d\rho}) = \sqrt{\lambda}\cdot\frac{d}{dr}(\frac{dR}{d\rho}) = \sqrt{\lambda}\frac{d}{d\rho}(\frac{dR}{d\rho})\frac{d\rho}{dr} = \lambda\frac{d^2R}{d\rho^2}.$$

Після підстановки в рівняння знайдених похідних будемо мати задачу:

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho} - \rho^2R = 0 \tag{4*}$$

Це рівняння Бесселя нульового порядку, тож його розв'язок можна записати таким чином:

$$R(\rho) = c_1J_0(\rho) + c_2N_0(\rho).$$

Тоді розв'язок рівняння $(4')$ має вигляд:

$$R(r) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda} r) + c_2 N_0(\sqrt{\lambda} r).$$

Врахуємо граничні умови (5). З умови обмеженості функції $R(r)$ при $r = 0$ потрібно покласти, що $c_2 = 0$, оскільки $N_0(0)$ є необмеженою. З умови $R(r_0) = 0$ отримаємо:

$$c_1 J_0(\sqrt{\lambda} r_0) = 0. \tag{6}$$

Рівняння $J_0(\mu) = 0, \quad \mu > 0$ має зліченну кількість розв'язків (рисунок 1, нулі функції Бесселя).

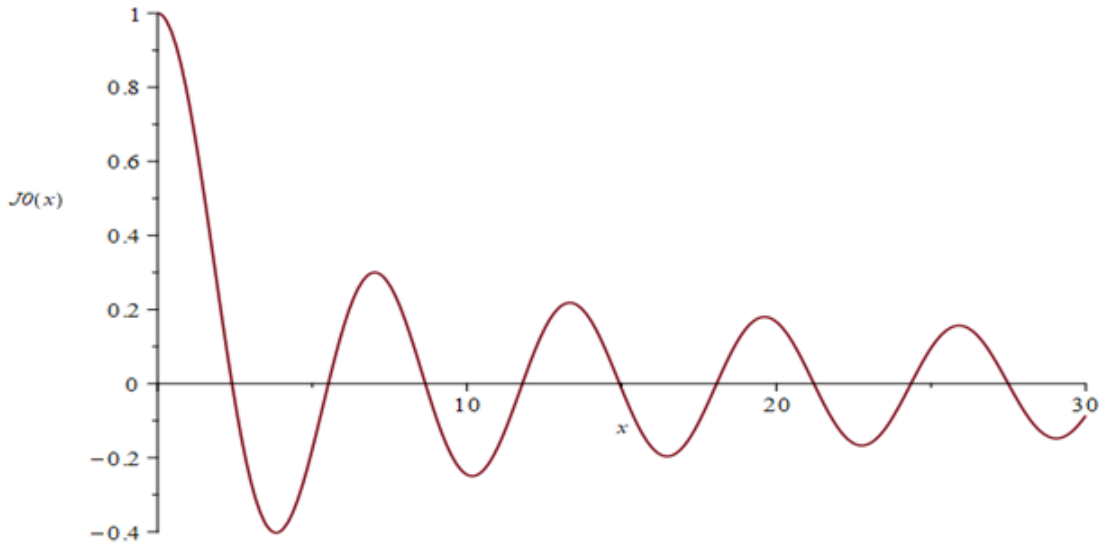


Рисунок 1

Пронумеруємо додатні нулі функції Бесселя $J_0 : \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тоді

$$\sqrt{\lambda_k} r_0 = \mu_k \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2.$$

Таким чином

$$R_k(r) = J_0\left(\mu_k \frac{r}{r_0}\right), \ k = 1, 2, \ldots.$$

Будемо шукати розв'язок задачі у вигляді ряду Фур'є:

$$u(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(z) R_k(r). \tag{7}$$

Підставимо (7) у рівняння (3). Для функції $Z_k(z)$ отримаємо рівняння:

$$Z_k'' - \lambda_k Z_k = 0.$$

Підставимо (7) в граничні умови, що задані на ніжній та верхній основі циліндра. Одержимо граничні умови для $Z_k$:

$$u(r,0) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(0) R_k(r) = 0 \Rightarrow Z_k(0) = 0 \tag{8}$$

$$u(r,h) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(h) R_k(r) = f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k R_k(r).$$

Таким чином

$$Z_k(h) = f_k, \tag{9}$$

де $f_k$ — коефіцієнти Фур'є для функції $f(r)$ у розвиненні за системою власних функцій $R_k(r)$. Формула для знаходження $f_k$ має вигляд:

$$f_k = \frac{(f, R_k)_r}{(R_k, R_k)_r} = \frac{\int\limits_0^{r_0} f(r) R_k(r) r dr}{\int\limits_0^{r_0} R_k^2(r) r dr}$$

Загальний розв'язок рівняння (7) визначається так:

$$Z_k(z) = a_k \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_k} z) + b_k \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_k}(h - z)).$$

Врахуємо граничні умови (8), (9):

$$Z_k(0) = b_k \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_k} h) = 0 \;\Rightarrow\; b_k = 0,$$

$$Z_k(h) = a_k \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_k} h) = f_k \;\Rightarrow\; a_k = \frac{f_k}{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_k} h)}.$$

Підставимо знайдені функції $R_k(r)$, $Z_k(z)$ в (7) і отримаємо шуканий розв'язок задачі:

$$u(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_k} h} \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_k} z) J_0(\mu_k \frac{r}{r_0}).$$

*Задача 2.* Знайти стаціонарну температуру $u(r,z)$ внутрішніх точок циліндра з радіусом основи $r_0$ і висотою $h$ якщо температура нижньої основи дорівнює нулю, бічна поверхня циліндра покрита непроникним для тепла чохлом, а температура верхньої основи залежить тільки від $r$.

Розв'язати на практичному занятті.

*Домашнє завдання:*

*Задача 1.* Знайти стаціонарну температуру $u(r,z)$ внутрішніх точок циліндра з радіусом основи $R$ і висотою $h$ , якщо: температура нижньої основи дорівнює нулю, бічна поверхня циліндра вільно охолоджується у повітрі нульової температури, а температура верхньої основи це функція від $r$.

*Задача 2.* Знайти стаціонарний розподіл температури всередині твердого тіла, що має форму циліндра з радіусом основи $r_0$ і висотою $h$, якщо: до нижньої основи $z = 0$ підводиться постійний тепловий потік $q$, а бічна поверхня $r = r_0$ і верхня основа $z = h$ підтримуються при нульовій температурі.

## Практичне заняття №22

## *Тема:* Метод відокремлення змінних розв'язання граничних задач рівняння Лапласа і Пуассона в циліндричних областях

*Задача 1.* Знайти стаціонарну температуру $u(r,z)$ внутрішніх точок циліндра з радіусом основи $r_0$ і висотою $h$ якщо температура верхньої і ниж-

ньої основи дорівнює нулю, а температура в кожній точці бічної поверхні залежить лише від відстані цієї точки до нижньої основи (тобто від $z$).

*Розв'язанняю*

Постановка задачі має вигляд:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \le r \le r_0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 < z < h, \tag{1}$$

$$u(r,0) = 0, \quad u(r,h) = 0,$$

$$u(r_0,z) = f(z), \quad |u(0,z)| < \infty.$$

На верхній та нижній основі циліндра умови однорідні і це дозволяє безпосередньо застосувати метод Фур'є. Шукаємо розв'язок у вигляді добутку функцій: $u(r,z) = R(r)Z(z)$. Підставимо в рівняння та отримаємо

$$Z(z)\frac{1}{r}(rR'(r))' + Z''(z)R(r) = 0.$$

Відокремимо змінні. Маємо

$$\frac{Z\frac{1}{r}(rR')'}{RZ} = -\frac{Z''R}{RZ} = \lambda.$$

З граничних умов отримаємо

$$u(r,0) = R(r)Z(0) = 0, \;\; => \;\; Z(0) = 0,$$

$$u(r,h) = R(r)Z(h) = 0, \;\; => \;\; Z(h) = 0.$$

Обираємо рівняння для функції $Z(z)$, оскільки для $Z(z)$ маємо однорідні граничні умови.

$$\begin{cases} Z''(z) + \lambda Z(z) = 0 \\ Z(0) = 0 \\ Z(h) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Отримали задачу Штурма-Ліувілля (2). Запишемо її розв'язок:

$$Z_k(z) = \sin(\frac{k\pi z}{h}), \quad \lambda_k = (\frac{k\pi}{h}), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Шукаємо розв'язок задачі (1) у вигляді ряду Фур'є:

$$u(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r) Z_k(z) \tag{3}$$

Підставимо (3) у рівняння Лапласа (1) і одержимо рівняння для функції $R_k(r)$:

$$\frac{1}{r}(rR_k'(r))' - \lambda_k R_k(r) = 0 \tag{4}$$

З граничних умов на осі циліндра і на його бічній поверхні:

$$|u(0, z)| = |\sum_{k=1}^{\infty} R_k(0) Z_k(z)| < \infty \Rightarrow |R_k(0)| < \infty,$$

$$u(r_0, z) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r_0) Z_k(z) = f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k Z_k(z) \Rightarrow R_k(r_0) = f_k,$$

де $f_k$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(z)$ за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля $Z_k(z)$.

Одержали граничну задачу для $R_k(r)$:

$$\frac{1}{r}(rR_k'(r))' - \lambda_k R_k(r) = 0, \tag{5}$$

$$|R_k(0)| < \infty, \quad R_k(r_0) = f_k.$$

Запишемо рівняння задачі (5) у вигляді:

$$r^2 R_k''(r) + rR_k'(r) - \lambda_k r^2 R_k(r) = 0 \tag{6}$$

Якщо зробимо заміну незалежної змінної $\rho = \sqrt{\lambda_k} r$, тоді отримаємо рівняння:

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} - \rho^2 R = 0. \tag{7}$$

Це рівняння Бесселя уявного аргументу нульового порядку.

Розв'язок (7) має вигляд:

$$R(\rho) = a_k I_0(\rho) + b_k K_0(\rho).$$

Тоді розв'язок (6) можна записати у вигляді:

$$R_k(r) = a_k I_0(\sqrt{\lambda_k} r) + b_k K_0(\sqrt{\lambda_k} r).$$

Враховуючи умову обмеженості розв'язку при $r = 0$ і поведінку функції $K_0$, маємо, що $b_k = 0$. З другої граничної умови одержимо:

$$R_k(r) = a_k I_0(\sqrt{\lambda_k} r) = f_k \Rightarrow a_k = \frac{f_k}{I_0(\sqrt{\lambda_k} r_0)}.$$

Підставимо знайдені функції $R_k(r)$ та $Z_k(z)$ в (3) і отримаємо шуканий розв'язок задачі:

$$u(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{I_0(\lambda_k) r_0} I_0(\sqrt{\lambda_k} r) \sin(\frac{k\pi}{h} z),$$

де коефіцієнти Фур'є знаходимо за формулою:

$$f_k = \frac{(f, Z_k)}{(Z_k, Z_k)} = \frac{\int\limits_0^h f(z) \sin(\frac{k\pi z}{h}) dz}{\int\limits_0^h \sin^2(\frac{k\pi z}{h}) dz}.$$

*Задача 2.* Знайти розв'язок граничної задачі:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad r_0 < r < r_1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 < z < h,$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u'_z(r, h) = 0,$$

$$u'_r(r_0, z) = f_1(z), \quad u(r_1, z) = f_2(z).$$

Задачу розв'язати на практичному занятті.

*Домашнє завдання*:

*Задача 1.* Знайти стаціонарну температуру $u(r, z)$ внутрішніх точок циліндра з радіусом основи $R$ і висотою $h$, якщо основи циліндра теплоізольовані, а температура бічної поверхні є задана функція від $z$.

*Задача 2.* Знайти стаціонарний розподіл температури всередині твердого тіла, що має форму циліндра з радіусом основи $R$ і висотою $h$, якщо до нижньої основи $z = 0$ підводиться постійний тепловий потік $q$, верхня основа підтримується при нульовій температурі, а на бічній поверхні відбувається теплообмін із середовищем нульової температури.

## Практичне заняття №23

## *Тема:* Задачі на власні значення для оператора Лапласа в прямокутних та кругових областях

*Задача 1.* Знайти розв'язок задачі на власні значення для оператора Лапласа у прямокутнику $0 < x < a,\ 0 < y < b$ :

$$\Delta u + \lambda u = 0,$$

$$u(0, y) = u'_x(a, y) = 0,$$

$$u'_y(x, 0) = u(x, b) = 0.$$

*Розв'язання.* Розв'язок будемо шукати методом відокремлення змінних. Функцію $u(x, y)$ подамо у вигляді $u(x, y) = X(x)Y(y)$ та підставимо у рівняння. Отримаємо

$$X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) + \lambda X(x)Y(y) = 0,$$

$$\frac{X''Y}{XY} = \frac{-Y''X - \lambda XY}{XY} = -\mu.$$

В результаті отримаємо дві задачі Штурма-Ліувілля для функцій $X(x)$ та $Y(y)$. Запишемо їх розв'язки:

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0 \\ X(0) = X'(a) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2a}\right),$$

$$\mu_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\begin{cases} Y'' + (\lambda - \mu_k)Y = 0, \\ Y'(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$$

Позначимо $\lambda - \mu = \nu > 0$. Тоді

$$Y_n(y) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2b}\right), \ \nu_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2b}\right)^2, \ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Запишемо власні числа та власні функції оператора Лапласа

$$u_{k,n}(x, y) = X_k(x)Y_n(y) = \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2a}\right)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2b}\right)$$

$$\lambda_{k,n} = \mu_k + \nu_n = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2b}\right)^2, \quad k, n = 0, 1, \ldots.$$

*Задача 2.* Розв'язати спектральну задачу (задачу на власні значення) для оператора Лапласа в крузі радіусу $a$.

$$\begin{cases} \Delta_{\rho,\varphi} u + \lambda u = 0, \\ u(a, \varphi) = 0, \end{cases} \quad 0 \le \rho < a, \ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

*Розв'язання.* Запишемо постановку задачі:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \lambda u = 0 \\ u(a, \varphi) = 0, \ 0 \le \rho < a, \ 0 \le \varphi < 2\pi \\ u(\rho, \varphi) = u(\rho, \varphi + 2\pi), \\ |u(0, \varphi)| < \infty, \end{cases}$$

Застосуємо метод Фур'є. Функцію $u(\rho, \varphi)$ будемо шукати у вигляді

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi).$$

Підставимо цей добуток в рівняння:

$$\rho\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho})\Phi(\varphi) + R(\rho)\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi} + \lambda R(\rho)\Phi(\varphi)\rho^2 = 0,$$

$$\frac{R\Phi''}{R\Phi} = \frac{-\Phi\rho(\rho R')' - \lambda\rho^2 R\Phi}{R\Phi} = -\mu.$$

З останнього співвідношення отримаємо задачу Штурма-Ліувілля з умовами періодичності для функції $\Phi(\varphi)$:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{cases}$$

Розв'язок цієї задачі нам добре відомий:

$$\Phi_k^{(1)}(\varphi) = \cos(k\varphi), k = \overline{0, \infty},\ \Phi_k^{(2)}(\varphi) = \sin(k\varphi),\ \mu_k = k^2,\ k = 0, 1, \ldots$$

Розглянемо рівняння для функції $R(\rho)$ та граничні умови:

$$\begin{cases} \rho^2 R(r) + \rho R'(r) + (\lambda\rho^2 - k^2)R(r) = 0, \\ |R(0)| < \infty,\ R(a) = 0. \end{cases}$$

Маємо ще одну задачу Штурма-Ліувілля. При $\lambda > 0$ маємо рівняння Бесселя $k$-того порядку, загальний розв'язок якого можна записати у вигляді:

$$R(\rho) = a_k J_k(\sqrt{\lambda}\rho) + b_k N_k(\sqrt{\lambda}\rho).$$

Враховуючи умову обмеженості в нулі, покладемо $b_k = 0$. Тоді маємо умову:

$$a_k J_k(\sqrt{\lambda}a) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_k(\sqrt{\lambda}a) = 0.$$

Для кожного $k \geq 0$ це рівняння має зліченну множину коренів $\mu_n^{(k)}$, $n = 1, 2, \ldots,$ $k = 0, 1, \ldots$. Тоді

$$\sqrt{\lambda}a = \mu_n^{(k)} \Rightarrow \lambda_{k,n} = \left(\frac{\mu_n^{(k)}}{a}\right)^2.$$

Відповідно

$$R_{k,n}(\rho) = J_k\left(\frac{\mu_n^{(k)}}{a}\rho\right).$$

Нарешті запишемо власні функції:

$$u_{k,n}^{(1)}(\rho, \varphi) = R_{k,n}(\rho)\cos(k\varphi) = J_k(\frac{\mu_n^{(k)}}{a}\rho)\cos(k\varphi)),$$
$$u_{k,n}^{(2)}(\rho, \varphi) = R_{k,n}(\rho)\sin(k\varphi) = J_k(\frac{\mu_n^{(k)}}{a}\rho)\sin(k\varphi),$$
$$k = 0, 1, \ldots, \ n = 1, 2, \ldots.$$

*Домашнє завдання:*

*Задача 1.* Знайти розв'язок задачі на власні значення для оператора Лапласа в прямокутній області $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$:

$$\Delta u + \lambda u = 0,$$

$$u(0, y) = u(a, y) = 0,$$
$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, b)}{\partial y} = 0.$$

*Задача 2.* Знайти розв'язок задачі на власні значення для оператора Лапласа в кільці:

$$\Delta_{\rho,\varphi} u + \lambda u = 0, \ r_0 < \rho < r_1, \ 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$u(r_0, \varphi) = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial \rho}(r_1, 0) = 0.$$

## Практичне заняття №24

## *Тема:* Метод Фур'є для граничних задач параболічного та гіперболічного типу в канонічних областях на площині.

*Задача 1.* Знайти розв'язок граничної задачі про поперечні коливання прямокутної мембрани $0 < x < a,\ 0 < y < b$, якщо сторони $x = 0$ та $x = a$ жорстко закріплені, а сторони $y = 0$ та $y = b$ вільні. Початкові відхилення точок мембрани та початкові швидкості задані. Врахувати вплив неперервно розподіленої зовнішньої сили, що діє перпендикулярно її поверхні з густиною $F(x, y, t) = A(x, y) \sin \omega t$

*Розв'язання.* Запишемо постановку задачі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + A(x, y) \sin \omega t,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ t > 0. \quad (1)$$

Граничні умови: сторони $x = 0$ та $x = a$ жорстко закріплені

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0, \quad (2)$$

сторони $y = 0$ та $y = b$ — вільні

$$\frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, b, t)}{\partial y} = 0 \quad (3).$$

Початкові відхилення точок мембрани

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \quad (4)$$

та початкові швидкості

$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \varphi(x, y), \quad (5)$$

функції $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ — задані.

Будемо шукати розв'язок однорідного рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

у вигляді

$$u(x, y, t) = V(x, y) \cdot T(t),$$

тоді

$$\frac{V(x,y)T''(t)}{a^2 V(x,y)T(t)} = \frac{a^2 \Delta V(x,y)T(t)}{a^2 V(x,y)T(t)} = -\lambda.$$

Для $V(x, y)$ маємо задачу на власні значення для оператора Лапласа:

$$\Delta V + \lambda V = 0,$$

$$V(0, y) = V(a, y) = 0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial V}{\partial y}(x, b) = 0.$$

Запишемо власні функції та власні числа цієї задачі, які легко знайти методом Фур'є

$$\lambda_{k,n} = (\frac{k\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2, \ k = 1, 2 \ldots, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$V_{k,n}(x, y) = \sin(\frac{k\pi}{a}x) \cos(\frac{n\pi}{b}x), \ k = 1, 2 \ldots, \ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду Фур'є за системою власних функцій

$$V_{k,n}(x, y), \ u(x, y, t) = \sum_{k,n=(1,0)}^{\infty} T_{k,n}(t) V_{k,n}(x, y).$$

Підставимо ряд у рівняння (1). Отримаємо:

$$\sum_{k,n=(1,0)}^{\infty} T''_{k,n}(t) V_{k,n}(x, y) - a^2 T_{k,n}(t) \Delta V_{k,n}(x, y) = A(x, y) \sin \omega t$$

Використаємо, що

$$\Delta V_{k,n} = -\lambda_{k,n} V_{k,n},$$

функцію $A(x,y)$ розкладемо в ряд Фур'є за власними функціями $V_{k,n}(x,y)$:

$$\sum_{k,n=(1,0)}^{\infty} (T''_{k,n}(t) + \lambda_{k,n} a^2 T_{k,n}(t)) V_{k,n}(x,y) = \sin \omega t \sum_{k,n=(1,0)}^{\infty} A_{k,n} V_{k,n}(x,y),$$

Прирівнявши коефіцієнти Фур'є, отримаємо

$$T''_{k,n} + \lambda_{k,n} a^2 T_{k,n} = A_{k,n} \sin \omega t.$$

Використаємо початкові умови (4) та (5), функції $f(x,y)$ та $\varphi(x,y)$ розкладемо в ряд Фур'є

$$\sum_{k,n=(1,0)}^{\infty} T_{k,n}(0) V_{k,n}(x,y) = \sum_{k,n=(1,0)}^{\infty} f_{k,n} V_{k,n}(x,y),$$

$$\sum_{k,n=(1,0)}^{\infty} T'_{k,n}(0) V_{k,n}(x,y) = \sum_{k,n=(1,0)}^{\infty} \varphi_{k,n} V_{k,n}(x,y)$$

де $A_{k,n}$, $f_{k,n}$, $\varphi_{k,n}$ - коефіцієнти Фур'є функцій $A(x,y)$, $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ відповідно. З останніх рівностей отримаємо:

$$T_{k,n}(0) = f_{k,n}, \;\; T'_{k,n}(0) = \varphi_{k,n}.$$

Таким чином для $T_{k,n}(t)$ маємо задачу Коші. Запишемо розв'язок однорідного рівняння

$$T''_{k,n}(t) + a^2 \lambda_{k,n} T_{k,n}(t) = 0,$$

$$T^{(0)}_{k,n} = c_{k,n} \sin a\sqrt{\lambda_{k,n}} t + d_{k,n} \cos a\sqrt{\lambda_{k,n}} t.$$

Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$T^{(ч)}(t) = M \sin \omega t. \;\; - \omega^2 M \sin \omega t + M a^2 \lambda_{k,n} \sin \omega t = A_{k,n} \sin \omega t,$$

$$M(a^2\lambda_{k,n} - \omega^2) = A_{k,n} \Rightarrow M_{k,n} = \frac{A_{k,n}}{a^2\lambda_{k,n} - \omega^2}.$$

Припустимо, що $a\sqrt{\lambda_{k,n}} - \omega \neq 0$ для $\forall k, n$, тобто не наступає явище резонансу. Тоді

$$T_{k,n}(t) = c_{k,n} \sin a\sqrt{\lambda_{k,n}}t + d_{k,n} \cos a\sqrt{\lambda_{k,n}}t + M_{k,n} \sin \omega t.$$

Знайдемо константи $c_{k,n}$ та $d_{k,n}$:

$$T_{k,n}(0) = d_{k,n} = f_{k,n},$$

$$T'_{k,n}(t) = c_{k,n}a\sqrt{\lambda_{k,n}} \cos a\sqrt{\lambda_{k,n}}t - d_{k,n}a\sqrt{\lambda_{k,n}} \sin a\sqrt{\lambda_{k,n}}t + \omega M_{k,n} \cos \omega t,$$

$$T'_{k,n}(0) = c_{k,n}a\sqrt{\lambda_{k,n}} + \omega M_{k,n} = \varphi_{k,n} \Rightarrow c_{k,n} = \frac{\varphi_{k,n} - \omega M_{k,n}}{a\sqrt{\lambda_{k,n}}}.$$

Таким чином:

$$T_{k,n}(t) = \frac{\varphi_{k,n} - \omega M_{k,n}}{a\sqrt{\lambda_{k,n}}} \sin a\sqrt{\lambda_{k,n}}t + f_{k,n} \cos a\sqrt{\lambda_{k,n}}t + M_{k,n} \sin \omega t.$$

Остаточно отримаємо:

$$u(x, y) = \sum_{k,n=(1,0)}^{\infty} T_{k,n}(t)V_{k,n}(x, y),$$

де $T_{k,n}(t)$ та $V_{k,n}(x, y)$ визначено вище.

Коефіцієнти Фур'є для $f(x, y)$ визначаємо за формулою

$$f_{k,n} = \frac{\int_0^a \int_0^b V_{k,n}(x, y)f(x, y)dydx}{\int_0^a \int_0^b V^2_{k,n}(x, y)dydx},$$

для $A(x, y)$ та $\varphi(x, y)$ формули мають аналогічний вигляд.

*Задача 2.* Знайти температуру необмеженої круглої циліндричної труби $r_0 \leq \rho \leq r_1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ -\infty < z < \infty$, якщо її початкова температура

дорівнює $f(\rho,\varphi),\ r_0 \le \rho \le r_1,\ 0 \le \varphi < 2\pi$, внутрішня поверхня підтримується при нульовій температурі, а зовнішня поверхня теплоізольована.

*Розв'язання.* Запишемо постановку задачі: Врахуємо, що в напрямку $z$ труба нескінченна, а початкова температура від $z$ не залежить, розв'язок рівняння теплопровідності буде функцією змінних $\rho, \varphi, t$, тобто $u(\rho,\varphi,t)$. Тоді задача має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right),$$

$$r_0 < \rho < r_1,\ 0 \le \varphi < 2\pi, -\infty < z < \infty,\ t > 0$$

$$u(r_0,\varphi,t) = 0,\ \frac{\partial u(r_1,\varphi,t)}{\partial\rho} = 0,\ u(\rho,\varphi,0) = f(\rho,\varphi).$$

Задачу розв'язати на парі.

*Домашнє завдання:*

*Задача 1.* Температура нескінченної круглої циліндричної труби дорівнює нулю при $t < 0$. З моменту $t = 0$ через її зовнішню поверхню подається зовні постійний тепловий потік густиною $q$, а внутрішня поверхня труби підтримується при температурі, що дорівнює нулю. Знайти температуру труби при $t > 0$.

*Вказівка:*

Розв'язок задачі $u(\rho,t)$ подати у вигляді $u(\rho,t) = V(\rho,t) + W(\rho)$. Функцію $W(\rho)$ підібрати так, щоб на поверхні крайові умови стали однорідними.

*Задача 2.* Знайти коливання круглої мембрани, що встановилися, із закріпленим краєм у середовищі з опором, пропорційним швидкості, під дією рівномірно розподіленого (прикладеного до однієї сторони мембрани) тиску $\rho = \rho_0 \sin\omega t,\ 0 < t < +\infty,\ \rho_0 = const.$

*Вказівка:*

Розв'язок задачі не залежить від змінної $\varphi$, $u(\rho, t)$ відповідає рівнянню:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - b^2 \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_0 \sin \omega t, \ 0 \leq \rho < r_0, \ t > 0.$$

Край закріплений, тобто $u(r_0, t) = 0$. Початкові відхилення та швидкості дорівнюють нулю, тобто

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

## Практичне заняття №25

## *Тема:* Побудова функції Гріна та знаходження розв'язку граничних задач для рівняння Лапласа та Пуассона

*Задача 1.* Побудувати функцію Гріна та розв'язати граничну задачу для рівняння Пуасона для двогранного кута $x > 0, \ y > 0, \ -\infty < z < \infty$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -F(x, y, z),$$
$$0 < x < \infty, 0 < y < \infty, -\infty < z < \infty,$$
$$u(x, 0, z) = f_1(x, z), \ \ -\frac{\partial u(0, y, z)}{\partial x} = f_2(y, z).$$

*Розв'язання.* Гранична задача має змішані граничні умови першого та другого роду. Для її розв'язання побудуємо функцію Гріна з такими граничними умовами. Будемо позначати її $G_{1,2}(P, P_0)$. Для побудови функції Гріна використаємо метод відображення електростатичних зарядів. Для цього в довільній точці області $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $0 < x_0 < \infty$, $0 < y_0 < \infty$, $-\infty < z_0 < \infty$ розташуємо одиничний позитивний заряд, за межами області пошуку розв'язку розмістимо компенсуючі заряди, таким чином, щоб на відповідних площинах виконувались однорідні граничні умови першого

та другого роду відповідно. Для цього достатньо розмістити три додаткових заряди в точках симетричних точці $P_0$ відносно відповідної площини та підібрати знак кожного заряду.

Розташування та знаки зарядів представлені на рисунку 1. Запишемо потенціал електростатичного поля від суми чотирьох зарядів в довільній точці області $P(x, y, z)$.

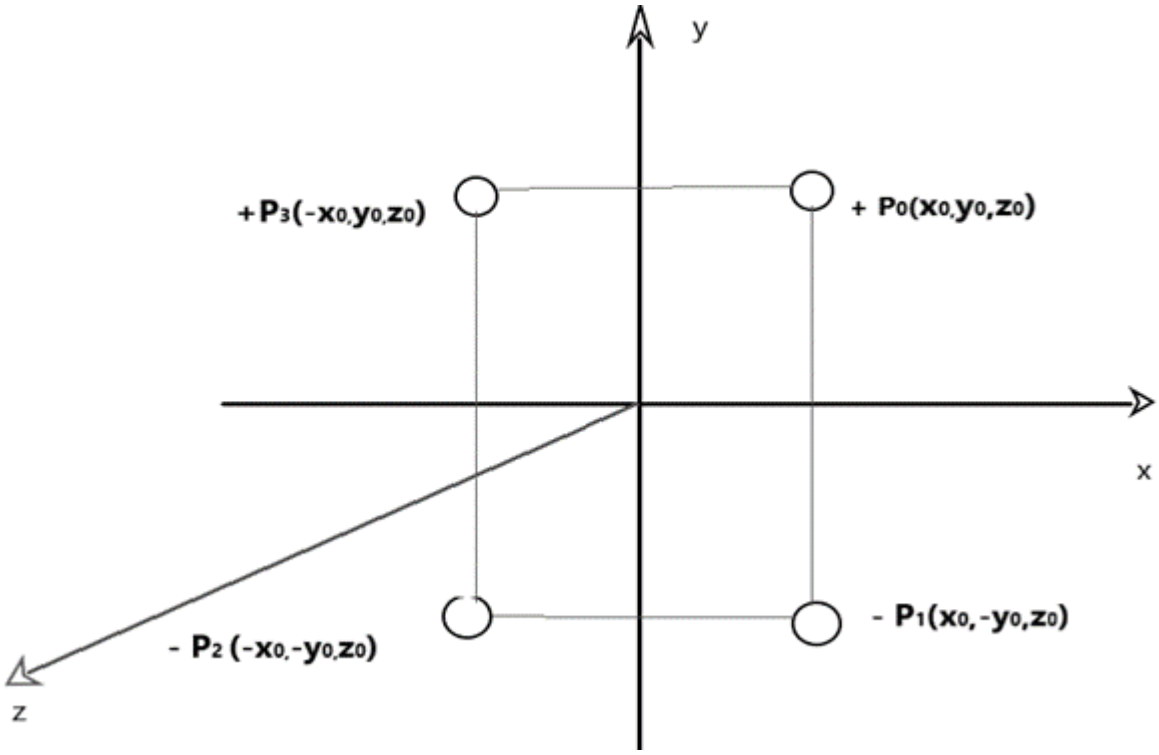


Рисунок 1

$$G_{1,2}(P, P_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|P-P_0|} - \frac{1}{|P-P_1|} - \frac{1}{|P-P_2|} + \frac{1}{|P-P_3|}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \right.$$

$$- \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} -$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right),$$

де $G_{1,2}(P, P_0)$ — гармонічна функція аргументу $P$. Покажемо, що вона задовольняє необхідним граничним умовам.

a. Нехай $P = (x, 0, z)$, тоді

$$|P - P_0| = |P - P_1|, \quad |P - P_2| = |P - P_3|.$$

Таким чином $G_{1,2}(P, P_0) = 0$ при $P = (x, 0, z)$.

b. Нехай $P = (0, y, z)$. Обчислимо похідну

$$\frac{\partial G_{1,2}(P, P_0)}{\partial n} = -\left.\frac{\partial G_{1,2}(P, P_0)}{\partial x}\right|_{x=0} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{-x_0}{|P - P_0|^3} - \frac{-x_0}{|P - P_1|^3} - \frac{x_0}{|P - P_2|^3} + \frac{x_0}{|P - P_3|^3}\right)\Bigg|_{x=0} = 0.$$

Вище враховано, що при $x = 0$

$$|P - P_0| = |P - P_3|, \ |P - P_2| = |P - P_1|.$$

Таким чином $G_{1,2}(P, P_0)$ дійсно є функцією Гріна для двогранного кута $\pi/2$ зі змішаними граничними умовами першого та другого роду.

Запишемо формулу інтегрального представлення граничної задачі для рівняння Пуассона зі змішаними граничними умовами. Для цього скористаємося загальною формулою інтегрального представлення розв'язку рівняння Пуассона:

$$u(P_0) = \iiint\limits_{\Omega} G(P, P_0)F(P)dP + \iint\limits_{S}\left(G(P, P_0)\frac{\partial u(P)}{\partial n} - u(P)\frac{\partial G(P, P_0)}{\partial n_P}dS_p\right).$$

Нехай $S = S_1 \cup S_2$, де

$$S_1 = \{x = 0, \ y > 0, -\infty < z < \infty\},$$

$$S_2 = \{y = 0, \ x > 0, \ -\infty < z < \infty\}.$$

Враховуючи властивості функції Гріна $G_{1,2}(P,P_0)=0$, формула інтегрального представлення розв'язку задачі матиме вигляд:

$$u(P_0)=\iiint\limits_{\Omega} G_{1,2}(P,P_0)F(P)dP+\iint\limits_{S_2} G_{1,2}(P,P_0)f_2(P)dS_P-$$

$$-\iint\limits_{S_1}\frac{\partial G_{1.2}(P,P_0)}{\partial n_P}f_1(P)dS_P.$$

Обчислимо

$$G_{1,2}(P,P_0)|_{P\in S_2(x=0)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}+\frac{1}{\sqrt{x_0^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right).$$

Знайдемо

$$\left.\frac{\partial G_{1,2}(P,P_0)}{\partial n_P}\right|_{P\in S_1(y=0)}=\left.\frac{\partial G_{1,2}(P,P_0)}{\partial y_P}\right|_{y=0}=$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{y_0}{((x-x_0)^2+y_0^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{y_0}{((x+x_0)^2+y_0^2+(z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Остаточно запишемо розв'язок задачі:

$$u(P_0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}G_{1,2}(P,P_0)F(P)dxdydz+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}G_{1,2}(P,P_0)|_{y=0}f_2(x,z)dxdz-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\left.\frac{\partial G_{1,2}(P,P_0)}{\partial n_P}\right|_{x=0}f_1(y,z)dydz.$$

*Задача 2.* Побудувати функцію Гріна першої граничної задачі для двогранного кута величиною $\frac{\pi}{3}$ обмеженого площинами $y=0,\ y-\sqrt{3}x=0$ оператора Лапласа.

*Розв'язання.*

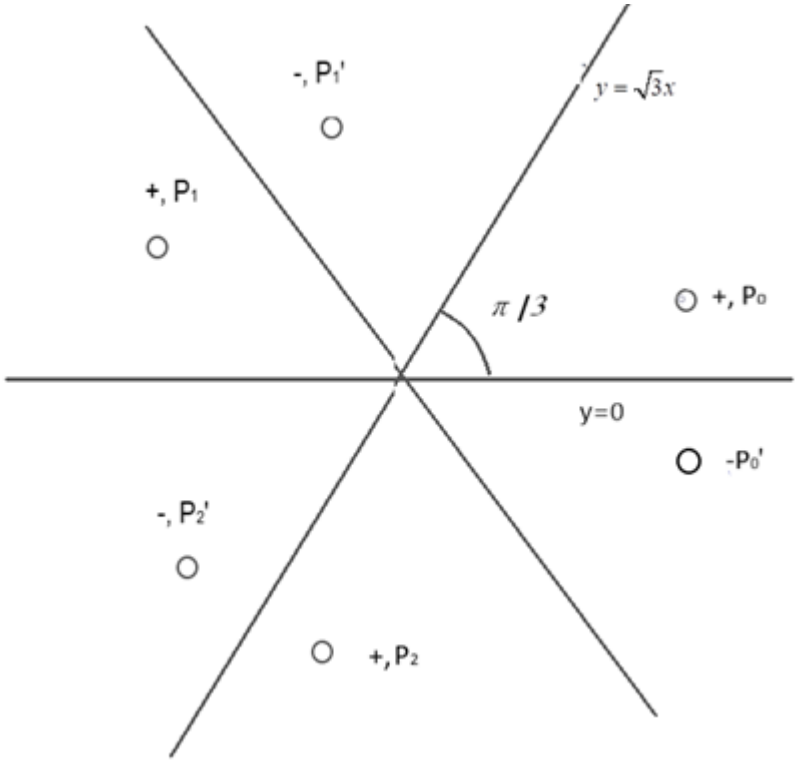


Рисунок 2

Запишемо розташування точкових зарядів та їх знаки використовуючи циліндричну систему координат (рисунок 2).

$$\oplus,\ P_i = \left(\rho_0 \cos\left(\varphi_0 + i\frac{2\pi}{3}\right),\ \rho_0 \sin\left(\varphi_0 + i\frac{2\pi}{3}\right), z_0\right),\ i = 0,1,2$$

$$\ominus,\ P_i' = \left(\rho_0 \cos\left(-\varphi_0 + i\frac{2\pi}{3}\right), \rho_0 \sin\left(-\varphi_0 + i\frac{2\pi}{3}\right), z_0\right),\ i = 0,1,2$$

$$G_1(P,P_0) = \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{4\pi|P-P_i|} - \frac{1}{4\pi|P-P_i'|};\ P = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z),$$

$$|P-P_i| = \left[\left(\rho\cos\varphi - \left(\rho_0\cos(\varphi_0 + i\frac{2\pi}{3})\right)\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\rho\sin\varphi - \rho_0 \sin\left(\varphi_0 + i\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 + (z-z_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Самостійно перевірити, що на границях двогранного кута функція Гріна перетворюється на нуль.

*Домашнє завдання*:

*Задача 1.* Побудувати функцію Гріна граничної задачі оператора Лапласа для двогранного кута $\frac{\pi}{3}$, обмеженого площинами $y = 0,\ y = \sqrt{3}x$, якщо на площині $y = 0$ задана умова першого роду, а на площині $y = \sqrt{3}x$ - гранична умова другого роду.

## Практичне заняття №26

## *Тема:* Побудова функції Гріна та знаходження розв'язку граничних задач для рівняння Лапласа та Пуассона

*Задача 1.* Побудувати функцію Гріна першої граничної задачі для оператора Лапласа в області, обмеженій площинами $z = 0,\ z = l$.

*Розв'язання.* Для побудови функції Гріна будемо використовувати метод відображення електростатичних зарядів. Для забезпечення виконання властивостей функції Гріна будемо розташовувати усі точкові заряди на проміні, що проходить через точку $P_0$ та є ортогональним до площин $z = 0,\ z = l$ (рисунок 1).

Позитивні заряди будемо розміщати в точках з координатами

$$+,\ \ P_i = (x_0, y_0, 2il + z_0),\ i = (-\infty.\infty),$$

від'ємні заряди — в точках

$$-,\ \ P_i = (x_0, y_0, 2il - z_0),\ i = (-\infty, \infty).$$

Таким чином забезпечимо виконання граничних умов

$$G_1(P, P_0)|_{z=0} = 0, \quad G_1(P, P_0)|_{z=l} = 0.$$

Функція Гріна при цьому бути мати вигляд функціонального ряду:

$$G_1(P, P_0) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi|P - P_i|} - \frac{1}{4\pi|P - P_i'|} =$$

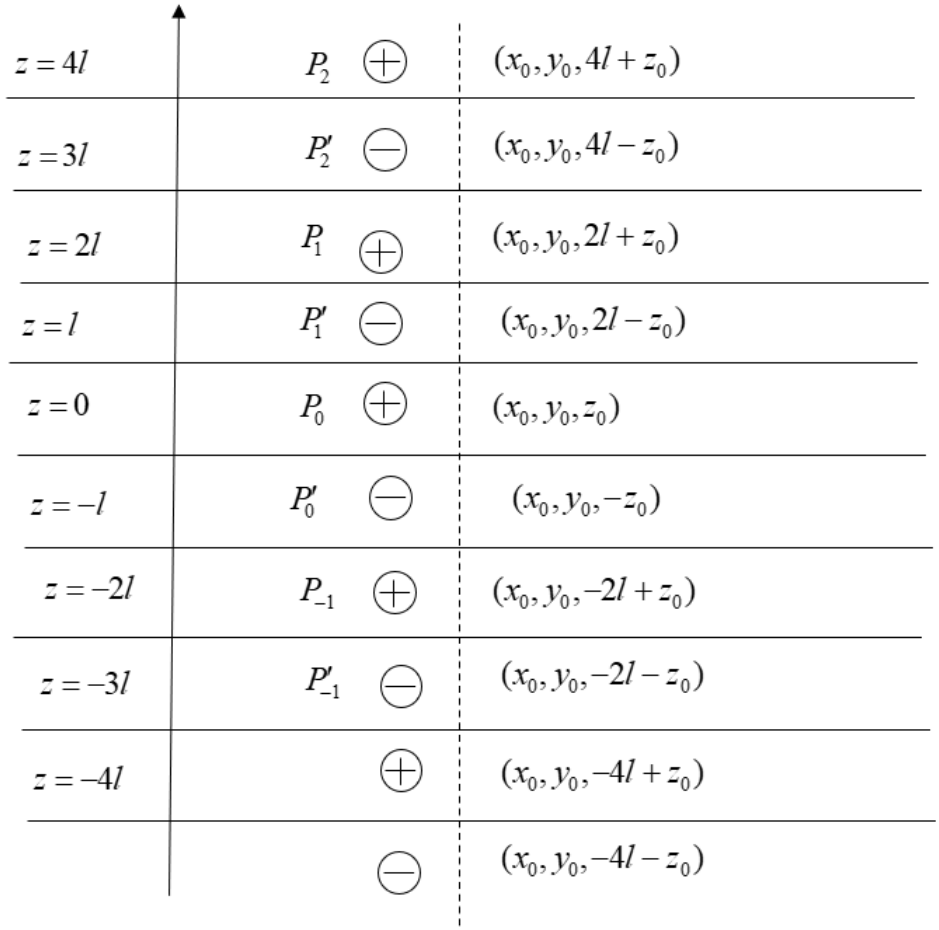


Рисунок 1

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z - z_0 - 2il)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z + z_0 - 2il)^2}}$$

де $a^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$;

А при $P = (x, y, 0)$ або $P = (x, y, l)$ виконуються граничні умови $G_1(P, P_0)|_{z=0} = 0$ та $G_1(P, P_0)|_{z=l} = 0$. Це очевидно випливає з симетричного розташування пари зарядів протилежного знаку відносно площини $z = 0$ та площини $z = l$.

Функція $G_1(P, P_0)$ записана у вигляді ряду і тому необхідно дослідити рівномірну збіжність цього ряду. Розглянемо загальний член ряду:

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z - z_0 - 2il)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z + z_0 - 2il)^2}}.$$

Для спрощення запису подальших досліджень введемо функцію

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

Тоді

$$c_i = f(2il - z + z_0) - f(2il - z - z_0).$$

Оцінимо $c_i$ за теоремою Лагранжа

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\tilde{x})(x_1 - x_2),$$

де $\tilde{x}$ - середня точка. Обчислимо похідну від функції $f(z)$:

$$f'(z) = -\frac{z}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Запишемо значення середньої точки $\tilde{z} = 2il - z + z_0(2\theta - 1),\ 0 < \theta < 1$. Тоді

$$|c_i| = \left( \frac{|2il - z + z_0(2\theta - 1)|2z_0}{(a^2 + (2il - z + z_0(2\theta - 1))^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = O\left(\frac{1}{i^2}\right).$$

Таким чином функціональний ряд мажорується збіжним числовим рядом, та за умовою Вейєрштрасса він збігається абсолютно і рівномірно; Також можна показати, що рівномірно збігаються і ряди частинних похідних функції Гріна $\frac{\partial G_1}{\partial x}, \frac{\partial G_1}{\partial y}, \frac{\partial G_1}{\partial z}$ та другі частинні похідні. Це в свою чергу означає, що побудована функція дійсно є функцією Гріна першої граничної задачі для оператора Лапласа.

*Задача 2.* Знайти функцію Гріна та побудувати розв'язок задачі Діріхле для області, яка складає верхню половину кулі радіусу $R$.

$$\Delta u = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 < R^2,\ \ z > 0,$$

$$u|_{x^2+y^2+z^2=R^2} = f_1(\varphi, \theta),$$

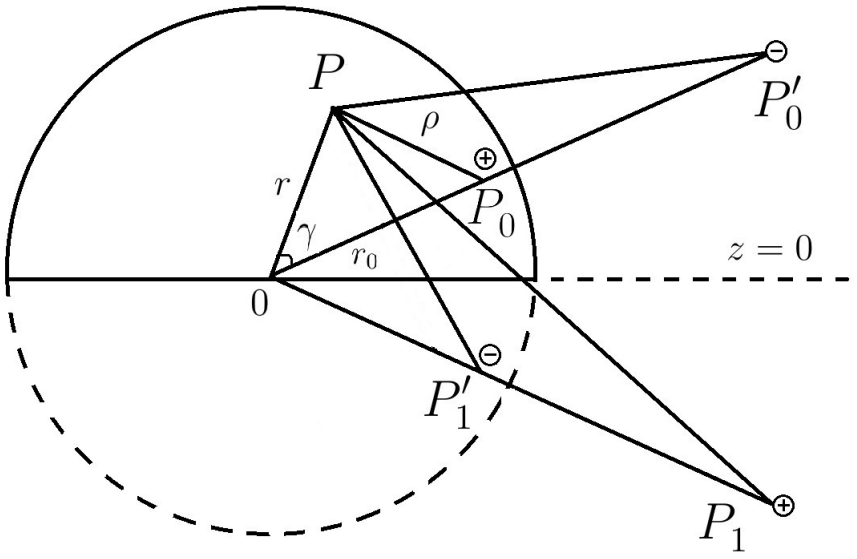


Рисунок 2

$r, \varphi, \theta$— сферичні координати точки

$$u|_{z=0} = f_2(r, \varphi).$$

*Розв'язання.* Побудуємо функцію Гріна методом відображення електростатичних заряді. Для цього в точці $P_0 = (r_0, \varphi_0, \theta_0)$ розмістимо одиничний позитивний заряд. За межами півкулі розмістимо три компенсуючи заряди (рисунок 2).

Додатні заряди розміщуємо в точках $P_0, P_1$, від'ємні в точках $P'_0, P'_1$, заряди в точці $P'_0$ величини $-e$, в точці $P_1$ - величини $+e$, $e$ треба визначити з властивостей функції Гріна.

Позначимо кут $\gamma = \angle POP_0,\ \gamma_1 = \angle POP_1$.

Сферичні координати точок $P = (r, \varphi, \theta),\quad P_0 = (r_0, \varphi_0, \theta_0)$ ,

$$P'_0 = (\frac{R^2}{r_0}, \varphi_0, \theta_0), \quad P_1 = (\frac{R^2}{r_0}, \varphi_0, \pi - \theta_0), \quad P'_1 = (r_0, \varphi_0, \pi - \theta_0),$$

$$0 < r_0 < R,\quad 0 \le \varphi < 2\pi,\quad 0 \le \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Тоді функція Гріна може бути записана у вигляді потенціалу електростатичного поля чотирьох зарядів

$$G_1(P,P_0)=\frac{1}{4\pi|P-P_0|}-\frac{e}{4\pi|P-P_0'|}-\frac{1}{4\pi|P-P_1'|}-\frac{1}{4\pi|P-P_1|}.$$

З трикутників $POP_0$ та $POP_0'$ за теоремою косинусів знайдемо

$$|P-P_0|=(r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma)^{\frac{1}{2}},$$

$$|P-P_0'|=\left(r^2+\frac{R^4}{r_0^2}-2r\frac{R^2}{r_0}\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{R}{r_0}\left(\frac{r^2r_0^2}{R^2}+R^2-2rr_0\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}.$$

З трикутників $POP_1$ та $POP_1'$ за теоремою косинусів отримаємо:

$$|P-P_1'|=(r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma_1)^{\frac{1}{2}}$$

$$|P-P_1|=\left(r^2+\frac{R^4}{r_0^2}-2r\frac{R^2}{r_0}\cos\gamma_1\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{R}{r_0}\left(\frac{r^2r_0^2}{R^2}+R^2-2rr_0\cos\gamma_1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким чином:

$$G_1(P,P_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{(r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}-\frac{e}{\frac{R}{r_0}\left(\frac{r^2r_0^2}{R^2}+R^2-2rr_0\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma_1)^{\frac{1}{2}}}+\frac{e}{\frac{R}{r_0}\left(\frac{r^2r_0^2}{R^2}+R^2-2rr_0\cos\gamma_1\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\qquad(**)$$

Перевіримо виконання граничної умови для функції Гріна

1) Нехай $r=R$ (Точка $P$ лежить на верхній півсфері)

$$G_1(P,P_0)|_{r=R}=\frac{1-e\frac{r_0}{R}}{4\pi(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}-\frac{e\frac{r_0}{R}-1}{(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma_1)^{\frac{1}{2}}}=0$$

якщо $e=\frac{R}{r_0}$.

Обчислимо $\cos\gamma, \cos\gamma_1$.

$$\cos\gamma = \frac{(OP, OP_0)}{rr_0} = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{(OP, OP_1')}{rr_0} = \cos\theta\cos(\pi - \theta_0) + \sin\theta_0\sin(\pi - \theta)\cos(\varphi - \varphi_0) =$$
$$= -\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0).$$

2) Нехай точка $P$ лежить на площині $z = 0$ всередині коло радіуса $R$. Тобто координати точки $P$ набувають значень $(r, \varphi, \frac{\pi}{2})$. Тоді $\cos\gamma = \sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)$ $(\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1)$ $\cos\gamma_1 = \sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)$. Таким чином $G_1(P, P_0)|_{z=0} = 0$. Тобто граничні умови виконані. Для запису розв'язку задачі використаємо формулу інтегрального представлення розв'язку

$$u(P_0) = -\iint\limits_S \frac{\partial G_1(P, P_0)}{\partial n_p}\varphi(P)dS_p \qquad (***)$$

*Домашне завдання*:

*Задача 1.* Записати формулу (***) застосувавши її для випадку задачі 2.

Вказівка:

1) $S = S_1 \cup S_2$, де $S_1$ - верхня півсфера, $S_2$ -круг радіусу $R$ в площині $z = 0$.

2) Обчислити а) $\frac{\partial G_1}{\partial n_p}|_{S_1} = \frac{\partial G_1}{\partial r}|_{r=R}$ б) $\frac{\partial G_1}{\partial n_P}|_{S_2} = -\frac{\partial G_1}{\partial z}|_{z=0}$.

У випадку б) координати точок $P, P_0, P_0', P_1, P_1'$ можна записати в прямокутних координатах

$$P(x, y, z),\ P_0 = (x_0, y_0, z_0),\ P_0' = \left(\frac{R^2}{r_0}x_0, \frac{R^2}{r_0}y_0, \frac{R^2}{r_0}z_0\right),$$

$$P_1 = \left(\frac{R^2}{r_0}x_0, \frac{R^2}{r_0}y_0, -\frac{R^2}{r_0}z_0\right),\ P_1' = (x_0, y_0, -z_0).$$

3) В формулі (***) поверхневий інтеграл по $S_1$ записати в сферичних координатах. Поверхневий інтеграл по $S_2$ записати в полярних координатах.

## Практичне заняття №27

## *Тема:* Потенціали та їх використання для розв'язання граничних задач.

*Задача 1.* Знайти об'ємний потенціал $V$ кулі при постійній щільності $\rho = \rho_0 = const$ поставивши граничну задачу для $V$ і розв'язавши її.

*Розв'язання.* Для розв'язання задачі необхідно використати властивості потенціалу об'єму. Сформулюємо їх:

1. Потенціал об'єму всередині області інтегрування має неперервні похідні другого порядку і задовольняє рівняння Пуассона $\Delta V(x) = -\rho_0,\ |x| < R$.

2. Потенціал об'єму поза області інтегрування має неперервні похідні будь-якого порядку та задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta V(x) = 0, |x| > R.$$

3. Потенціал об'єму є неперервною та неперервно диференційованою функцією в усьому евклідовому просторі.

4. Потенціал об'єму є регулярною в нескінченно віддаленій точці

$$V(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right),\ |x| \to \infty.$$

Врахуємо, що щільність потенціалу є постійною величиною, що гарантує залежність потенціалу об'єму $V$ лише від однієї сферичної координати $r$ та не залежить від сферичних кутів $\varphi,\ \theta$. Враховуючи цей факт запишемо

спрощений вигляд рівняння Пуассона та Лапласа.

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV(r)}{dr}\right) = -\rho_0, \quad 0 \le r < R \tag{1}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV(r)}{dr}\right) = 0, \quad R < r < \infty \tag{2}$$

Запишемо умови неперервності та неперервної диференційованості потенціалу об'єму:

$$V(R-0) = V(R+0),\ V'(R-0) = V'(R+0) \tag{3}.$$

Запишемо умови регулярності на нескінченості та обмеженості потенціалу об'єму в центрі кулі:

$$V(r) = O\left(\frac{1}{r}\right),\ V(0) < \infty. \tag{4}$$

Знайдемо розв'язок граничної задачі (1) – (4).

Загальний розв'язок рівняння Пуассона та Лапласа мають вигляд

$$V(r) = -\rho_0\frac{r^2}{6} - \frac{c_1}{r} + c_2,\ 0 \le r < R,$$

$$V(r) = -\frac{c_3}{r} + c_4,\ R < r < \infty.$$

Використаємо властивості (4). В результаті з обмеженості розв'язку отримаємо $c_1 = 0$, з умови регулярності на нескінченості маємо $c_4 = 0$

Виконаємо умови неперервності та неперервної диференційованості потенціалу об'єму:

$$\begin{cases} V(R-0) = -\rho_0\dfrac{R^2}{6} + c_2 = V(R+0) = -\dfrac{c_3}{R} \\ V'(R-0) = -\rho_0\dfrac{R}{3} = V'(R+0) = \dfrac{c_3}{R^2} \end{cases}$$

З останньої системи рівнянь знайдемо $c_3 = -\rho_0\dfrac{R^3}{3},\ c_2 = \rho_0\dfrac{R^2}{2}$.

Таким чином потенціал об'єму кулі матиме вигляд:

$$V(r) = \begin{cases} \rho_0 \dfrac{R^2}{2} - \rho_0 \dfrac{r^2}{6}, \ 0 \le r \le R \\ \dfrac{\rho_0 R^3}{3r}, \ R \le r < \infty. \end{cases} \tag{5}$$

*Задача 2.* Знайти електростатичне поле об'ємних зарядів розподілених з постійною щільністю всередині кулі центр якої розташований над ідеально провідною заземленою площиною $z = 0$ на висоті $h$.

*Розв'язання* Потенціал, який створює окрема куля заряджена з постійною щільністю нам відомий з попередньої задачі і дається формулою (5). Для розв'язання цієї задачі скористаємося наступним штучним прийомом. Враховуючи, що площина $z = 0$ має нульовий потенціал, замінимо вплив площини, який вона здійснює разом з кулею на сумарний потенціал двох симетрично розташованих відносно площини куль рівномірно заряджених зарядами протилежних знаків, верхня з зарядом $\rho_0 = const$, нижня з зарядом $-\rho_0$. Таким чином буде забезпечена виконання нульового потенціалу на площині (рисунок 1).

Для запису потенціалу, який створюють окремо верхня і нижня кулі скористаємось модернізованою формулою (5) та запишемо її в сферичних координатах з центрами в точках $P_0 = (0, 0, h)$ та $P_0' = (0, 0, -h)$. Надалі будемо позначати

$$r = |P - P_0|, \ r_1 = |P - P_0'|,$$

де $P = (x, y, z)$. Тоді потенціал який створює верхня куля запишеться формулою (5), а для нижньої кулі матиме вигляд:

$$V(r_1) = \begin{cases} -\rho_0 \dfrac{R^2}{2} + \rho_0 \dfrac{r_1^2}{6}, & 0 \le r_1 \le R \\ -\dfrac{\rho_0 R^3}{3r_1^2}, & R \le r_1 < \infty. \end{cases} \tag{6}$$

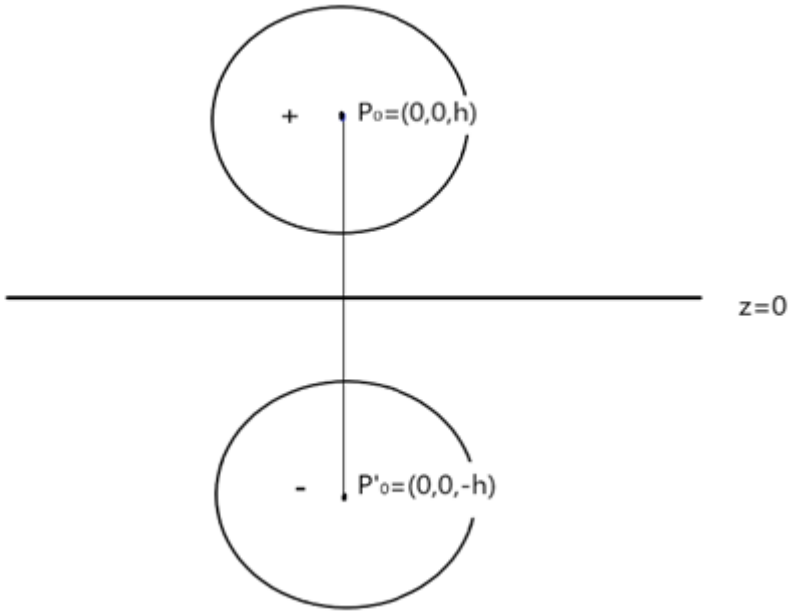


Рисунок 1

Скористаємось принципом суперпозиції електростатичних полів запишемо сумарний потенціал, який утворюють обидві кулі в верхньому півпросторі $z > 0$. Врахуємо, що зовнішнє поле, яке утворює нижня куля дається нижнім рядком формули (6).

$$V(x,y,z) = \begin{cases} \rho_0 \dfrac{R^2}{2} - \rho_0 \dfrac{r^2}{6} - \dfrac{\rho_0 R^3}{3r_1^2}, & 0 \le r \le R, \quad z > 0 \\ \dfrac{\rho_0 R^3}{3r} - \dfrac{\rho_0 R^3}{3r_1^2}, & R \le r < \infty, \quad z > 0. \end{cases} \tag{7}$$

В формулі (7) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}$, $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}$.

*Задача 3.* Знайти потенціал простого шару розподіленого з постійною щільністю $v = v_0 = const$ на сфері. Поставивши граничну задачу та розв'язавши її.

*Вказівка.* Для розв'язання задачі скористатися властивостями потенціалу простого шару.

*Домашнє завдання:*

*Задача 1.* Знайти потенціал об'єму який розподілений в кульовому шарі

$a \leq r \leq b$ з постійною щільністю $\rho_0 = const$. Поставивши граничну задачу та розв'язавши її.

*Задача 2.* Знайти логарифмічний потенціал круга з постійною щільністю зарядів.

*Задача 3.* Знайти логарифмічний потенціал простого шару відрізка з постійною щільністю зарядів.

## Практичне заняття №28

## *Тема:* Потенціали та їх використання для розв'язання граничних задач.

*Задача 1.* Розв'язати першу та другу граничні задачі для рівняння Лапласа в півпросторі $x_3 > 0,\ \infty < x_1\ < \infty, -\infty < x_2 < \infty$ використовуючи потенціали подвійного та простого шару відповідно.

*Розв'язанняю*

а) Розглянемо розв'язок першої граничної задачі (задачі Дірихле).

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0,\ -\infty < x_1,\ x_2 < \infty,\ x_3 > 0 \\ u|_{x_3=0} = f(x_1, x_2). \end{cases} \tag{1}$$

Розв'язок задачі (1) будемо шукати у вигляді потенціалу подвійного шару

$$W(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y \tag{2}$$

Тут $S$ - площина $x_3 = 0$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$,

$$|x-y| = \left[ \sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^{1/2}. \right]$$

Згідно властивостей потенціалу подвійного шару щільність $\sigma(y)$ повинна задовольняти інтегральному рівнянню:

$$f(x) = \int\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y - \frac{\sigma(x)}{2}, \ x \in S. \tag{3}$$

Обчислимо пряме значення потенціалу подвійного шару, тобто значення потенціалу подвійного шару на поверхні $S$.

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{4\pi|y-x|} = \frac{\partial}{\partial|y-x|} \left( \frac{1}{4\pi|y-x|} \right) \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial|y-x|}{\partial y_i} \cdot n_i =$$

$$= -\frac{1}{4\pi|y-x|^2} \sum_{i=1}^{3} \frac{y_i - x_i}{|y-x|} \cdot n_i = -\frac{\cos(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{n_y})}{|y-x|^2}.$$

Врахуємо, що точки $y, x$ лежать на площині $x_3 = 0$, тобто кут між векторами $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ та вектором зовнішньої нормалі $\mathbf{n_y}$ є прямим, тоді

$$\cos(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{n_y}) = \mathbf{0}.$$

Таким чином з інтегрального рівняння (3) маємо $\sigma(x) = -2f(x)$.

Підставимо знайдену щільність в (2) та обчислимо похідну по нормалі

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \left. \frac{1}{4\pi|y-x|} \right|_S = -\frac{\partial}{\partial y_3} \left. \frac{1}{4\pi|y-x|} \right|_{y_3=0} =$$

$$= \frac{-x_3}{4\pi \left[ (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + x_3^2 \right]^{3/2}}$$

Остаточно

$$W(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x_3 f(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{2\pi[(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + x_3^2]^{3/2}}$$

б) Розглянемо далі розв'язок задачі Неймана для півпростору

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \ -\infty < x_1, \ x_2 < \infty, \ x_3 > 0 \\ \left. \dfrac{\partial u}{\partial n} \right|_{x_3=0} = f(x_1, x_2). \end{cases} \tag{4}$$

Розв'язок задачі (4) будемо шукати у вигляді потенціалу простого шару

$$V(x) = \iint\limits_S \mu(y) \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y. \tag{5}$$

Враховуючи властивості потенціалу простого шару, щільність потенціалу повинна задовольняти інтегральному рівнянню:

$$f(x) = \iint\limits_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y + \frac{\mu(x)}{2}, \ x \in S. \tag{6}$$

Продовжити розв'язок задачі.

*Задача 1.* Знайти розв'язок задачі Неймана для круга користуючись потенціалом простого шару.

*Розв'язання.* Запишемо постановку задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \ x_1^2 + x_2^2 < R^2 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x_1^2+x_2^2=R^2} = f(x_1, x_2). \end{cases} \tag{7}$$

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді логарифмічного потенціалу простого шару.

$$V(x) = \int\limits_C \mu(y) \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|} dl_y. \tag{8}$$

При цьому щільність потенціалу повинна задовольняти інтегральному рівнянню Фредгольма

$$f(x) = \int\limits_C \mu(y) \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_x} \ln \frac{1}{|x-y|} dl_y + \frac{\mu(x)}{2}, \quad x \in C. \tag{9}$$

Обчислимо пряме значення нормальної похідної потенціалу простого шару:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_x} \ln \frac{1}{|x-y|} = -\frac{1}{2\pi} \frac{|x-y|}{|x-y|^2} \sum_{i=1}^{2} \frac{(x_i - y_i)}{|x-y|} n_{x_i} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{n_x})}{|x-y|} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{|x-y|}.$$

Для обчислення ядра інтегрального рівняння розглянемо рисунок 1.

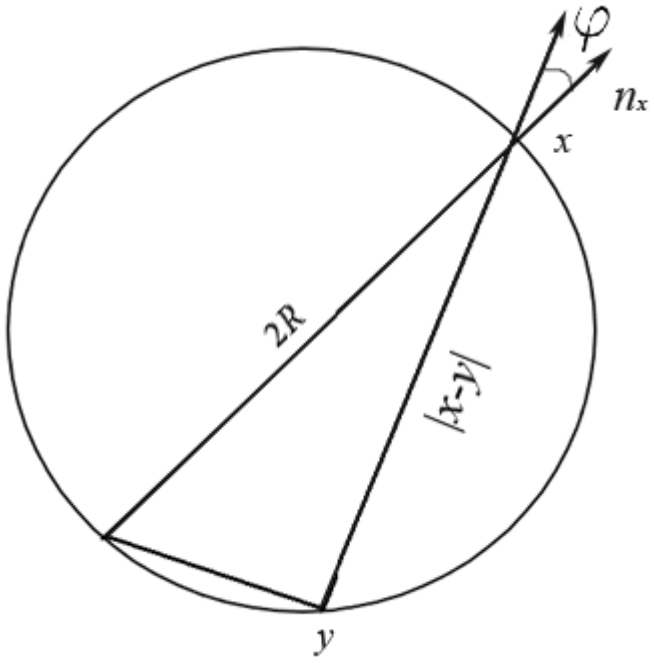


Рисунок 1

З прямокутного трикутника запишемо довжину катету

$$|x-y| = 2R\cos\varphi$$

Таким чином інтегральне рівняння (9) буде мати вигляд:

$$f(x) = -\int\limits_C \mu(y)\frac{1}{4\pi R}dl_y + \frac{\mu(x)}{2},\ x \in C$$

або

$$\mu(x) = 2f(x) + \frac{1}{2\pi R}\int\limits_C \mu(y)dl_y,\ x \in C,$$

де $C$ - коло радіуса $R$. Легко бачити, що інтегральне рівняння має вироджене ядро і його розв'язок може бути знайдений в явному вигляді.

$$\mu(x) = 2f(x) + \frac{1}{2\pi R}D,$$

де

$$D = \int\limits_C \mu(y) dl_y = \int\limits_C \left( 2f(y) + \frac{D}{2\pi R} \right) dl_y = 2 \int\limits_C f(y) dl_y + D.$$

Таким чином $D$ - залишається вільною константою, а на функцію $f(x)$ накладається умова ортогональності

$$\int\limits_C f(y) dl_y = 0.$$

Остаточно маємо

$$\mu(x) = 2f(x) + \frac{1}{2\pi R} D.$$

Підставимо знайдену щільність в формулу (8).

$$V(x) = \int\limits_C f(y) \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|x-y|} dl_y + \frac{D}{4\pi^2 R} \int\limits_C \ln \frac{1}{|x-y|} dl_y$$

Запишемо останню формулу в полярних координатах. Нехай точці $x$ відповідають полярні координати $(\rho_0, \varphi_0)$, точці $y$ відповідно $(R, \varphi)$. Тоді

$$V(\rho_0, \varphi_0) = \frac{R}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi) \ln \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + R^2 - 2\rho_0 R \cos(\varphi - \varphi_0)}} d\varphi +$$

$$+ \frac{D}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + R^2 - 2\rho_0 R \cos(\varphi - \varphi_0)}} d\varphi$$

Неважко переконатися, що другий інтеграл в останній формулі є константою. Таким чином розв'язок задачі визначається з точністю до адитивної константи:

$$V(\rho_0, \varphi_0) = \frac{R}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi) \ln \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + R^2 - 2\rho_0 R \cos(\varphi - \varphi_0)}} d\varphi + D.$$

*Задача 1.* За допомогою логарифмічного потенціалу подвійного шару розв'язати внутрішню та зовнішню задачі Дірихле для круга.

*Задача 2.* Розв'язати другу граничну задачу для рівняння Лапласа в півпросторі.

## Теми модульних контрольних робіт

Модульна контрольна робота 1: Теми занять 1 – 6

Модульна контрольна робота 2: Теми занять 7 – 13

Модульна контрольна робота 3: Теми занять 14 – 21

Модульна контрольна робота 4: Теми занять 22 – 28

## Література


1. Василишин Т. В., Гой Т. П., Федак І. В. Інтегральні рівняння. — Івано-Франківськ, 2014. — 222 с.

2. Головач Г. П. Калайда О.Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. — К. : Техніка, 1997. — 288 с.

3. Кривошея С. А., Перестюк М.О., Бурим В.М. Диференціальні та інтегральні рівняння. — К.: Либідь, 2004. — 408 с.

4. Юрачківський А.П., Грязнова В.О. Метод відокремлення змінних в задачах математичної фізики. — К. 1998. — 125 с.

5. Вірченко Н.О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики. — К., 1997. — 370 с.

6. Юрачківський А.П. Жугаєвич А.Я. Математична фізика в прикладах і задачах. — Київський університет, 2005. — 157 с.

7. Войцехівський С.О. Кузьмін А.В., Кашпур О.Ф. та інші Методичні розробки до вивчення нормативного курсу "Рівняння математичної фізики"Побудова математичних моделей, постановка граничних задач. — К., 2002. — 54 с.

8. Войцехівський С.О., Кузьмін А.В., Черній Д.І та інші. Методичні розробки до вивчення нормативного курсу "Рівняння математичної фізики"Класифікація рівнянь другого порядку, формули Д'аламбера і Пуассона, метод відокремлення змінних. — К., 2001. — 65 с.

9. Войцехівський С.О., Кашпур О.Ф., Кузьмін А.В. Методичні розробки до вивчення нормативного курсу "Рівняння математичної фізики"Розв'язання інтегральних рівнянь. — К., 2005. — 56 с.