

**Київський національний науково-дослідний університет імені Тараса  
Шевченка**

**Шатирко А.В., Хусаїнов Д.Я.**

**СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ  
СИСТЕМ РЕГУЛЮВАННЯ  
З ПІСЛЯДІЄЮ**

**навчальний посібник для студентів  
факультету кібернетики  
спеціальності «Прикладна математика»**

**Київ - 2012**

Рецензенти:  
д.-р. фіз.-мат. наук, проф. Белов Ю.А.,  
д.-р. фіз.-мат. наук, проф. Джалладова І.А.

*Рекомендовано до друку вченою радою факультету кібернетики  
(протокол №4 від 28 листопада 2011)*

**Шатирко А.В., Хусаїнов Д.Я.**

Стійкість нелінійних систем з післядією: Навч. Посібник – К.: ДП  
«Інформаційно-аналітичне агентство», 2012. – 74с. .

*Посібник «Стійкість нелінійних систем з післядією» призначено для студентів, спеціалістів, магістрів та аспірантів напрямку підготовки «прикладна математика» факультету кібернетики Київського національного науково-дослідницького університету імені Тараса Шевченка. Багато систем регулювання в техніці описуються за допомогою диференціальних рівнянь з нелінійною правою частиною. Крім того, в реальних системах, як правило, входить фактор запізнення. Стійкості розв'язків саме таких динамічних систем присвячений цей посібник. Матеріал основних розділів цього посібника викладається в курсах «моделювання динамічних систем» та «динамічні системи з післядією». В зв'язку з читанням останнього курсу з 2012р. англійською мовою, в посібник включено розділ на англійській мові, який стисло відображає весь наданий матеріал. Посібник призначений для більш поглибленого вивчення наведених вище та інших споріднених курсів.*

## П Е Р Е Д М О В А

Метою написання цієї роботи є поглиблене викладення практичних методів дослідження нелінійних систем з післядією. Однією з важливих характеристик динамічних систем є стійкість (асимптотична стійкість) її розв'язків. Умови стійкості викладені в роботах багатьох авторів і, як правило, спираються на другий метод Ляпунова, що є універсальним апаратом дослідження динамічних систем різної природи. Але за частую в більшості робіт викладаються лише умови стійкості. В той же час для практичних задач більш важливим є оцінки поведінки розв'язків. Навіть експоненціально стійка система може мати розв'язки з такими «викидами амплітуди», що практично не зможе функціонувати. Тому актуальним є отримання не лише умов стійкості (асимптотичної стійкості) розв'язків, а й оцінки загасання.

Крім того, параметри системи практично складно або неможливо точно обчислити. Існують досить добре розроблені математичні методи ідентифікації параметрів систем, але для їх використання треба проводити практичні дослідження, які інколи виконати неможливо, а інколи вони досить дорого коштують. Так останнім часом набув розвиток напрям дослідження систем з неточно заданими параметрами. Оскільки відомо, що параметри можуть приймати свої значення з деяких відомих інтервалів, то відповідна стійкість отримала назву – «інтервальна» (робастна).

В запропонованій роботі за допомогою другого методу Ляпунова проводиться дослідження стійкості нелінійних систем регулювання з запізненням та нейтрального типу. Отримані конструктивні умови абсолютної інтервальної стійкості та обчислені коефіцієнти експоненціального затухання розв'язків. Використовується метод функцій Ляпунова з умовою Б.С.Разуміхіна та метод функціоналів Ляпунова-Красовського.

## ВСТУП

Проблеми дослідження динамічних систем з неточно заданими параметрами, або й взагалі векторами швидкостей (правими частинами диференціальних рівнянь), які приймають свої значення з деяких множин, цікавили дослідників достатньо давно. Класична (ляпуновська) стійкість має на увазі дослідження розв'язків при збуреннях початкових даних. Різні її узагальнення (рівномірна за часом й фазовим змінним, за частиною змінних, асимптотична, експоненціальна, орбітальна та ін.) також мали на увазі однозначне визначення закону динаміки систем.

Вочевидь, одним з найперших напрямків досліджень стійкості з неточно заданою правою частиною було дослідження «стійкості при постійно діючих збуреннях» (Малкін І.Г., Врочч І.). Допускалися збурення не тільки початкових даних, але й векторних полів систем диференціальних рівнянь. Суттєвим було те (особливо для нелінійних систем), що збурення правих частин диференціальних рівнянь потягнуло за собою й виникнення класифікації нелінійних систем, стійких (в різному сенсі) відносно збурень. З'явилися «грубі системи» (Андронов А.А., Понтрягін Л.С.), «структурно стійкі» (Smail S.), «осуществимые» (Шарковський О.М., Хусаїнов Д.Я.) й т.д.

Розв'язок практичних задач теорії регулювання викликав до розгляду появу поняття «робастної» (або інтервальної) стійкості. Початково під робастною стійкістю розуміли асимптотичну стійкість лінійних стаціонарних диференціальних рівнянь вищих порядків при умові знаходження їх коефіцієнтів всередині деяких наперед заданих інтервалів. Цікаві фундаментальні необхідні й достатні умови інтервальної стійкості лінійних диференціальних рівнянь з неточно заданими параметрами були отримані в роботах Харитонова В.А. Але при розповсюдженні отриманих результатів на системи рівнянь, на різниці рівняння й системи рівнянь, системи з післядією виникли суттєві ускладнення.

Ще одним напрямком дослідження стійкості систем з неточно заданими правими частинами є диференціальні включення (Толстоногов А.А., Плотніков В.А.). Завдяки апарату диференціальних включень стала можлива коректна постановка й розв'язок задач керування з розривними правими частинами.

Ще одним класом систем такого вигляду, які отримали розвиток останнім часом, є «нечіткі системи» (Кудінов Ю.Н., Лакшмікантам В.). Вони дозволяють формалізувати апарат теорії прийняття рішень в динамічних системах.

В цьому посібнику буде розглянуто питання інтервальної стійкості нелінійних систем регулювання з аргументом, що запізнюється. Апаратом дослідження вибрано метод функцій Ляпунова. За своєю структурою це «грубий» метод, оскільки його умови базуються на виконанні нерівностей (позитивної визначеності функції або функціоналу й негативної визначеності похідної вздовж розв'язків системи). Тому, в основному, допускає й виконання умов для цілого сімейства параметрично заданих систем. А якщо параметри системи визначені на деяких інтервалах, він буде давати умови інтервальної стійкості.

# 1. Дослідження інтервальної стійкості розв'язків рівнянь і систем рівнянь

Розглянемо динамічну систему, яку задано лінійним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами наступного вигляду

$$x^{(n)}(t) + p_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + p_n x(t) = 0 \quad (1)$$

Як відомо, для асимптотичної стійкості нульового розв'язку (1) необхідно і достатньо, щоб характеристичний поліном

$$f_n(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n, \quad (2)$$

де  $p_i, i = \overline{1, n}$ , сталі коефіцієнти, мав корені тільки в лівій півплощині комплексної площини, тобто  $\operatorname{Re} \lambda_i(t) < 0, i = \overline{1, n}$ .

Рівняння (1) називається інтервальним, якщо коефіцієнти  $p_i, i = \overline{1, n}$  являють собою фіксовані числа з заданих інтервалів

$$p_i \in [\alpha_i, \beta_i], i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Відповідно  $f_n(\lambda)$  називається інтервальним характеристичним поліномом. Він вважається асимптотично стійким, якщо його корені при будь-яких  $p_i, i = \overline{1, n}$ , що задовольняють умову (3), лежать в лівій півплощині комплексної площини.

Необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості інтервальних характеристичних поліномів отримані Харитоновим В.А. й сформульовані у вигляді наступних двох теорем.

Нехай  $G^n$  – множина поліномів вигляду (2), всі корені яких лежать в лівій півплощині,

$S^n$  – сімейство всіх поліномів (2) з коефіцієнтами, що задовольняють (3),

$S_1^n$  – сімейство тих поліномів з  $S^n$ , у яких кожний коефіцієнт  $p_i, i \in \overline{1, n}$  дорівнює або  $\alpha_i$ , або  $\beta_i$  (тобто  $S_1^n$  має  $2^n$  “кутових” поліномів).

**Теорема 1.** (перша теорема Харитонова). Для того, щоб  $S^n \subset G^n$  необхідно і достатньо, щоб  $S_1^n \subset G^n$ .

Необхідність сформульованого твердження очевидна, так як  $S_1^n \subset S^n$ . Доведення достатньої частини виконується методом математичної індукції за  $n$ . При цьому використовується представлення поліномів  $f_n(\lambda)$  у вигляді суми

$$f_n(\lambda) = h(\lambda^2) + \lambda g(\lambda^2),$$

де  $h(\lambda), g(\lambda)$  – деякі поліноми змінної  $\lambda$ , причому степені цих поліномів однозначно пов'язані з степенем  $f_n(\lambda)$ . Хід думок опирається на теорему Ерміта-Біллера, яка встановлює взаємозв'язок між областями розташування коренів  $f_n(\lambda), h(\lambda)$ , і  $g(\lambda)$ , а також на критерій Четаєва М.Г., згідно з яким необхідною і достатньою умовою належності  $f_n(z)$  множині  $G^n$  при  $p_1 > 0$  є належність допоміжного полінома

$$\varphi(z) = \frac{(-1)^n \lambda f_n(-\lambda) - (z - 2p_1) f_n(\lambda)}{2p_1^2}$$

множині  $G^{n-1}$ .

Необхідно відмітити, що перевірка  $2^n$  поліномів при великому  $n$  дуже складна. Так коли  $n=8$  число поліномів дорівнює 256, а коли  $n=10$  вже 1024. Наступна теорема показує, що можна обмежитися тільки чотирма поліномами спеціального вигляду.

**Теорема 2.** (друга теорема Харитонова). Для того, щоб  $S_1^n \subset G^n$  необхідно й достатньо, щоб чотири поліноми  $f_i(z), i \in \overline{1,4}$  з  $S_1^n$  із наступними наборами коефіцієнтів

$$\begin{aligned} f_1(\lambda): a_{n-2k} &= \begin{cases} \beta_{n-2k}, & k - \text{парне} \\ \alpha_{n-2k}, & k - \text{непарне} \end{cases}, \quad a_{n-2k-1} = \begin{cases} \beta_{n-2k-1}, & k - \text{парне} \\ \alpha_{n-2k-1}, & k - \text{непарне} \end{cases} \\ f_2(\lambda): a_{n-2k} &= \begin{cases} \alpha_{n-2k}, & k - \text{парне} \\ \beta_{n-2k}, & k - \text{непарне} \end{cases}, \quad a_{n-2k-1} = \begin{cases} \alpha_{n-2k-1}, & k - \text{парне} \\ \beta_{n-2k-1}, & k - \text{непарне} \end{cases} \\ f_3(\lambda): a_{n-2k} &= \begin{cases} \alpha_{n-2k}, & k - \text{парне} \\ \beta_{n-2k}, & k - \text{непарне} \end{cases}, \quad a_{n-2k-1} = \begin{cases} \beta_{n-2k-1}, & k - \text{парне} \\ \alpha_{n-2k-1}, & k - \text{непарне} \end{cases} \\ f_4(z): a_{n-2k} &= \begin{cases} \beta_{n-2k}, & k - \text{парне} \\ \alpha_{n-2k}, & k - \text{непарне} \end{cases}, \quad a_{n-2k-1} = \begin{cases} \alpha_{n-2k-1}, & k - \text{парне} \\ \beta_{n-2k-1}, & k - \text{непарне} \end{cases} \end{aligned}$$

належали  $G^n$ .

Доведення даної теореми будується на основі індукції за  $n$ .

В теоремах Харитонова припускалося, що коефіцієнти змінюються у деякому паралелепіпеді. У подальшому стали розглядати варіант, при якому збурення є багатограними. Це означає наступне. Існує скінчене сімейство «базисних» многочленів  $f_n^i(\lambda), i = \overline{1,n}$ . Досліджуване сімейство може бути представлено у вигляді опуклої оболонки «базисних» многочленів. Це припущення допускає лінійну залежність збурень коефіцієнтів. Доказано, що сімейство поліномів є стійким тоді й тільки тоді, коли стійка множина виділених ребер. Отже, достатньо показати, що для будь-яких  $i, j = \overline{1,n}$  многочлен

$$\begin{aligned} f_n^{ij}(\lambda, \xi) &= f_n^i(\lambda) + (1 - \xi)f_n^j(\lambda), \\ f_n^i(\lambda) &= \sum_{j=1}^n p_i^j \lambda^j, i, j = \overline{1,n} \end{aligned}$$

є стійким для довільного  $0 \leq \xi \leq 1$ . Компоненти  $p_i^j, j = \overline{1,n}, i = \overline{1,n}$  приймають крайні значення. Цей результат став відомий, як «реберна» теорема.

Отримані результати було розповсюджено й на випадок інтервальних поліномів з комплексними коефіцієнтами. При цьому перевірці на стійкість піддавалось вісім поліномів.

Розглядалися проблеми інтервальної стійкості лінійних різницевого рівнянь

$$x(k+n) + p_1 x(k+n-1) + \dots + p_n x(k) = 0.$$

Умови стійкості для таких рівнянь складаються у тому, що всі корені характеристичного полінома лежать у колі одиничного радіуса, тобто  $|\lambda_i| < 1, i = \overline{1,n}$ . Задача інтервальної стійкості, як і для диференціальних рівнянь, складається в знаходженні умов стійкості сімейства рівнянь з коефіцієнтами, які змінюються у заданих інтервалах  $\alpha_i \leq p_i \leq \beta_i, i = \overline{1,n}$ .

Контрприклад показав, що вже коли  $n = 3$  справедлива тільки перша теорема Харитонова. Один з напрямків отримання умов інтервальної стійкості полягає у проведенні перетворення

$$\lambda = \frac{\mu + 1}{\mu - 1}.$$

При цьому перетворенні круг одиничного радіусу переходить у ліву півплощину й можна користуватися результатами, які отримані в теоремах Харитонова. Нажаль, нелінійне перетворення тягне за собою перерахування кордонів відповідних інтервалів за складними залежностями. Й застосування теорем дає тільки достатні умови. Дискретний варіант умови чотирьох многочленів відсутній. Отримано аналоги міцної й слабої теорем Харитонова, які базуються на представленні полінома у вигляді суми симетричної та антисиметричної частин. Але вони не є такими простими.

Ще більші ускладнення зустрілися при переносі результатів на системи рівнянь. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \geq 0$$

з коефіцієнтами  $a_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  що змінюються у деяких інтервалах.

Будемо вважати, що задано матриці  $P = \{p_{ij}\}$ ,  $Q = \{q_{ij}\}$  такі, що

$$p_{ij} \leq a_{ij} \leq q_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Множину всіх матриць, що задовольняють умові (4), позначимо  $N[P, Q]$ . Якщо далі покласти, що точні значення елементів матриці  $A$  наперед невідомі й вся інформація про них знаходиться у нерівностях (4), то матрицю  $A$  можна розглядати, як інтервальну. Через  $M[P, Q]$  позначимо множину всіх «кутових» матриць  $S = \{s_{ij}\}$ , кожний елемент яких задано наступним чином

$$s_{ij} = p_{ij} \quad \text{або} \quad s_{ij} = q_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Вочевидь, що  $M[P, Q] \subset N[P, Q]$ .

Інтервальна матриця  $A \in N[P, Q]$  називається стійкою, якщо для її власних чисел при будь-яких значеннях  $a_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , які задовольняють (4), має місце

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

В свою чергу множини  $N[P, Q]$ ,  $M[P, Q]$  вважаються стійкими, якщо стійкі всі матриці, які до них входять. Було проголошено припущення, що для стійкості інтервальних матриць з  $N[P, Q]$  необхідно і достатньо, щоб були стійкі всі матриці з  $M[P, Q]$ . Фактично це значить, що висновок про стійкість деякої інтервальної матриці  $A \in N[P, Q]$  можна зробити, якщо знайти власні числа  $2^n$  звичайних матриць. Нажаль, це припущення виявилось хибним.

Після того, як пряме застосування теореми Харитонова виявилось неможливим, увагу багатьох дослідників було направлено на отримання достатніх умов стійкості інтервальних матриць. Більшість результатів з отримання достатніх умов стійкості інтервальних матриць можна згрупувати за наступними напрямками.

- 1) Розвиток методу Харитонова.
- 2) Використання частотного підходу.

- 3) Застосування теорем Гершгоріна.
- 4) Застосування другого методу Ляпунова.

Використання частотного підходу дозволяє замість розгляду множини крайових та реберних поліномів обмежитися дослідженням однієї кривої. Зручністю є те, що частотні критерії формулюються одноманітно, як для неперервних, так і для дискретних систем. Будується модифікований годограф Михайлова. Для робастної стійкості сімейства поліномів необхідно і достатньо, щоб годограф проходив  $2n -$  квадрантів комплексної площини й не перетинав  $\gamma -$  криву.

В ряді робіт розглядалися системи стаціонарних різницевих рівнянь вигляду

$$x(t) = \sum_{j=1}^p A_j x(t - \tau_j).$$

Стійкість системи визначається умовою існування  $\alpha > 0$ , при якому кожен корінь  $\lambda$  характеристичного рівняння

$$\det \left( I - \sum_{j=1}^p A_j e^{-\tau_j \lambda} \right) = 0$$

задовольняв умову  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ . Припускалося, що матриця  $A_1$  фіксована, а елементи інших матриць задовольняють умову «малості»

$$\sum_{j=1}^p |A_j| \leq r.$$

Вводилося поняття комплексного радіуса стійкості матриці  $A$

$$\rho(A) = \left[ \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left\{ \left| (e^{i\theta} I - A)^{-1} \right| \right\} \right]^{-1}.$$

Нехай власні числа матриці  $A$  по модулю менші одиниці. Тоді система глобально стійка за здвигами (тобто при довільних відхиленнях  $\tau_j$ ) для всіх матриць  $A_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  тоді й тільки тоді, коли  $r < \rho(A)$ .

Основні результати підходу, що базується на теоремі Гершгоріна, витікають з переважного впливу, який мають на стійкість системи, діагональні елементи. Якщо діагональний елемент переважає за модулем суму модулів елементів матриці, які знаходяться в цій строчці, то він й визначає умови стійкості.

**Теорема 3.** Інтервальна матриця  $A$  стійка, якщо

$$q_{ii} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \max \{ |p_{ij}|, |q_{ij}| \} < 0, \quad i = \overline{1, n}$$

або

$$q_{jj} + \sum_{\substack{i=1, \\ j \neq i}}^n \max \{ |p_{ij}|, |q_{ij}| \} < 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Доведення даних тверджень базується на застосуванні теореми Гершгоріна, згідно якої для будь-якого власного числа  $\lambda$  матриці  $A$  виконується хоча б одне з співвідношень

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n},$$

а також хоча б одна з нерівностей

$$|\lambda - a_{jj}| \leq \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad j = \overline{1, n}.$$

Ці вирази розкриваються для «найгіршої» (з точки зору стійкості) матриці  $W = \{w_{ij}\}$  серед всіх матриць, елементи яких обмежено заданими інтервалами. Показано, що

$$w_{ii} = q_{ii}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$w_{ij} = \max\{|p_{ij}|, |q_{ij}|\}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j.$$

Застосування другого методу Ляпунова складається в виборі позитивно визначеної функції й обчисленні її повної похідної на розв'язках системи. Визначаються умови, за яких повна похідна є негативно визначеною. Перевага методу Ляпунова полягає в його «грубості» й складається в перевірці нерівностей. Якщо існує хоча б одна функція Ляпунова, що дає умови стійкості, то існує й ціла множина функцій, причому вони можуть бути будь-якої гладкості. Звідси витікає, що ця функція Ляпунова може бути застосована й для цілого класу систем, «близьких» (у визначеному сенсі) до первинної. Якщо «близькість» визначається на множині інтервально заданих систем, то отримуємо умови «інтервальної» стійкості

$$\delta_1(\varepsilon, \tau) = \min \left\{ \frac{e^{-\|A+\Delta A\|\tau}}{1 + 2\|D + \Delta D\| + \|B + \Delta B\|\tau}, \frac{L(H)(1-\xi)\zeta}{8\|D + \Delta D\|} * \right.$$

$$* \left[ \|(E - D) - \Delta D\|^T H(B + \Delta B)\| + \right.$$

$$\left. \left. + \left\| \left[ (E - D) - \Delta D \right]^T H(D + \Delta D) \right\| \frac{\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|}{1 - \|D + \Delta D\|} \right] \right\} \frac{R}{\sqrt{\varphi(H)}} \varepsilon,$$

## 2. Інтервальна стійкість розв'язків лінійних систем з післядією

Один з напрямків розвитку теорії інтервальної стійкості йшов в бік дослідження систем з аргументом, що відхиляється. Існує достатньо багато робіт, які присвячено цій тематиці. Слід відзначити роботи Харитонов В.Л., Жабко А.П. Розглядаються системи лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^p A_j x(t - \tau_j).$$

Аналіз стійкості зводиться до дослідження розташування на комплексній площині коренів характеристичного рівняння

$$\det \left( \lambda I - \sum_{j=1}^p A_j e^{-\lambda \tau_j} \right) = 0,$$

або коренів квазіполінома

$$F(\lambda) = \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{s=1}^m a_{js} \lambda^j e^{-\lambda \tau_s}.$$

Розглядається випадок, коли коефіцієнти квазіполінома залежать від параметрів, тобто розглядається сімейство квазіполіномів

$$J = \{F(\lambda) : a_{js} \in [\underline{a}_{js}, \bar{a}_{js}], j = \overline{0, n-1}, s = \overline{1, m}\}.$$

В просторі коефіцієнтів розглянуто опуклий багатогранник. Кожній точці багатогранника відповідає квазіполіном, а кожному багатограннику відповідає сімейство квазіполіномів. Ребру відповідає одно параметричне сімейство квазіполіномів. Доведено аналог реберної теореми. З коефіцієнтів квазіполінома складено вектор

$$a_0 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{q1}, a_{q2}, \dots, a_{qn}).$$

Вводиться сімейство квазіполіномів, які залежать від  $r$

$$H_1(r) = \{f(\lambda) : |a - a_0| < r\}.$$

Під задачею робастної стійкості розуміється визначення максимального значення величини  $r > 0$ , для якої всі поліноми з  $H_1(r)$  асимптотично стійкі.

Введено множину

$$\Pi(\omega) = \{a : f(i\omega) = 0\}.$$

Відстань від точки  $a_0$  до  $\Pi(\omega)$  позначено  $\rho(\omega)$ . Доведено, що необхідною і достатньою умовою є виконання умови

$$r < \inf_{\omega \geq 0} \{\rho(\omega)\}.$$

В багатьох роботах (наприклад, [1]) при дослідженні інтервальної стійкості використовується другий метод Ляпунова з квадратичною функцією. Отримано достатні умови інтервальної стійкості для лінійних систем з запізненням

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \tag{6}$$

де  $A, B$  - матриці з сталими коефіцієнтами,  $\tau > 0$  стале запізнення. Поряд з (6) розглянуто систему інтервального вигляду

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t - \tau), \quad (7)$$

де  $\Delta A, \Delta B$  - точно невідомі матриці, які приймають свої значення з деяких симетричних інтервалів

$$\begin{aligned} \Delta A &= \{\Delta a_{ij}\}, \quad \Delta B = \{\Delta b_{ij}\}, \quad i, j = \overline{1, n}, \\ -\alpha_{ij} &\leq \Delta a_{ij} \leq \alpha_{ij}, \quad -\beta_{ij} \leq \Delta b_{ij} \leq \beta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Припускається, що система (6) асимптотично стійка. Знаходяться умови, при виконанні яких система (7) також буде асимптотично стійкою. Під час дослідження використовується квадратична функція Ляпунова  $V(x) = x^T H x$ , де  $H$  - симетрична позитивно визначена матриця, яку можна отримати з розв'язку матричного рівняння Ляпунова

$$(A + B)^T H + H(A + B) = -C$$

З довільною позитивно визначеною матрицею  $C$ .

Введемо наступні позначення

$$\begin{aligned} \|H(\Delta A + \Delta B)\| &= \max_{\Delta a_{ij}, \Delta b_{ij}} \{H(\Delta A + \Delta B)\}, \\ \|\Delta A + \Delta B\| &= \max_{\Delta a_{ij}, \Delta b_{ij}} \{\Delta A + \Delta B\}, \\ \|H(B - \Delta A)\| &= \max_{\Delta a_{ij}} \{H(B - \Delta A)\}, \\ \|H(B + \Delta B)\| &= \max_{\Delta b_{ij}} \{H(B + \Delta B)\}, \\ \|B + \Delta B\| &= \max_{b_{ij}} \{B + \Delta B\}, \quad \|A + \Delta A\| = \max_{a_{ij}} \{A + \Delta A\}. \end{aligned}$$

**Визначення 1.** Система (6) називається інтервально стійкою, якщо вона асимптотично стійка для всіх матриць  $\Delta A, \Delta B$  з інтервалів (8).

Умови інтервальної стійкості без запізнення, тобто при  $\tau = 0$  мають наступний вигляд.

**Теорема 4.** Нехай  $A + B$  - асимптотично стійка матриця та існує симетрична, позитивно визначена матриця  $H$ , при якій виконується нерівність

$$\lambda_{\min}[-(A + B)^T H - H(A + B)] - 2\|H(\Delta A + \Delta B)\| > 0. \quad (9)$$

Тоді система без запізнення інтервально стійка.

При наявності запізнення, тобто при  $\tau \neq 0$  умови стають більш жорсткими й мають вже наступний вигляд.

**Теорема 5.** Нехай  $A + B$  - асимптотично стійка матриця та існує симетрична, позитивно визначена матриця  $H$ , при якій справедлива нерівність

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}[-(A + B)^T H + H(A + B)] - \\ - 2\left[\|H(A + \Delta A)\| + \|H(B + \Delta B)\|\sqrt{\varphi(H)}\right] > 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Тоді система (6) інтервально стійка при будь-якому відхиленні аргументу  $\tau > 0$ .

Більш того для її довільного розв'язку  $x(t)$  буде виконуватись  $|x(t)| < \varepsilon$ ,  $t > 0$ , як тільки  $\|x(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon)$ .

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon / \sqrt{\varphi(H)}.$$

Ці умови можна трошки «пом'якшити» за рахунок малості запізнення. Тоді вони мають наступний вигляд.

**Теорема б.** Нехай  $A+B$  - асимптотично стійка матриця та існує позитивно визначена симетрична матриця  $H$ , при якій виконується (9). Тоді при  $\tau < \tau_0$ , де

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}[-(A+B)^T H + H(A+B)] - 2\|H(\Delta A + \Delta B)\|}{2\|H(B + \Delta B)\|(\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|)\sqrt{\varphi(H)}},$$

система (6) буде інтервально стійкою.

Більш того для довільного розв'язку  $x(t)$  буде виконуватися  $|x(t)| < \varepsilon$ ,  $t > 0$ , як тільки  $\|x(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon, \tau)$ , де

$$\delta(\varepsilon, \tau) = \frac{e^{-\|A+\Delta A\|\tau}}{1 + \|B + \Delta B\|\tau} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varphi(H)}}.$$

Аналогічні достатні умови інтервальної стійкості отримано й для систем нейтрального типу

$$\dot{x}(t) = D \dot{x}(t - \tau) + Ax(t) + Bx(t - \tau) \quad (11)$$

Тут  $D, A, B$  - матриці з сталими коефіцієнтами,  $\tau > 0$  стале запізнення. Разом з нею розглянемо інтервальну систему вигляду

$$\dot{x}(t) = (D + \Delta D) \dot{x}(t - \tau) + (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t - \tau), \quad (12)$$

де  $\Delta A, \Delta B, \Delta D$  - матриці, які приймають значення з деяких симетричних інтервалів. Отримано наступні достатні умови інтервальної стійкості систем вигляду (12).

Нехай

$$\begin{aligned} \left\| \dot{x}(0) \right\|_\tau &= \max_{-\tau \leq s \leq 0} \left\{ \left| \dot{x}(s) \right| \right\}, \quad |x(t)|_1 = \max \left\{ |x(t)|, \left| \dot{x}(t) \right| \right\}, \\ \|A + \Delta A\| &= \max_{a_{ij}} \{A + \Delta A\}, \quad \|B + \Delta B\| = \max_{\beta_{ij}} \{B + \Delta B\}, \\ \|D + \Delta D\| &= \max_{\delta_{ij}} \{D + \Delta D\}, \quad \|\Delta D\| = \max_{\delta_{ij}} \{\Delta D\}, \\ \left\| [(E - D) - \Delta D]^T H (B + \Delta B) \right\| &= \\ &= \max_{\beta_{ij}, \delta_{ij}} \left\{ \left\| [(E - D) - \Delta D]^T H (B + \Delta B) \right\| \right\}, \\ \left\| [(E - D) - \Delta D]^T H (D + \Delta D) \right\| &= \\ &= \max_{\delta_{ij}} \left\{ \left\| [(E - D) - \Delta D]^T H (D + \Delta D) \right\| \right\}, \\ \left\| (A + B)^T H \Delta D - (\Delta A + \Delta B)^T H [(E - D) - \Delta D] \right\| &= \\ &= \max_{\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \delta_{ij}} \left\{ \left\| (A + B)^T H \Delta D - (\Delta A + \Delta B)^T H [(E - D) - \Delta D] \right\| \right\} \end{aligned}$$

Припускається, що виконано умова «стійкості» різницевого оператора, тобто  $\|D + \Delta D\| < 1$  й система без відхилення аргументу

$$\dot{x}(t) = (E - D)^{-1}(A + B)x(t) \quad (13)$$

асимптотично стійка. В цьому випадку завжди існує функція Ляпунова квадратичного вигляду  $V(x) = x^T(E - D)^T H(E - D)x$ , симетрична позитивно визначена матриця  $H$  якої, знаходиться з розв'язку матричного рівняння

$$(A + B)^T H(E - D) + (E - D)^T H(A + B) = -C \quad (14)$$

при довільній позитивно визначеній матриці  $C$ .

Розглянемо інтервальну систему без запізнення, тобто при  $\tau = 0$ .

$$\dot{x}(t) = [(E - D) - \Delta D]^{-1}[(A + B) + (\Delta A + \Delta B)]x(t). \quad (15)$$

Отримано наступні умови інтервальної стійкості системи (12) при припущенні, що система (11) асимптотично стійка.

**Теорема 7.** Нехай  $A + B$  - асимптотично стійка матриця та існує симетрична позитивно визначена матриця  $H$ , при якій виконується нерівність

$$L(H) > 0, \quad (16)$$

Де

$$L(H) = \lambda_{\min} \left[ - (A + B)^T H(E - D) - (E - D)^T H(A + B) \right] - 2 \left\| (A + B)H\Delta D - (\Delta A + \Delta B)^T H[(E - D) - \Delta D] \right\|.$$

Тоді система (15) інтервально стійка.

Для систем з відхиленням аргументу з довільною післядією справедливе наступне твердження.

**Теорема 8.** Нехай матриця  $A + B$  асимптотично стійка та існує симетрична позитивно визначена матриця  $H$ , при якій виконується нерівність

$$L(H) - 2 \left\| [(E - D) - \Delta D]^T H(B + \Delta B) \right\| (1 + \sqrt{\varphi(H)}) - 4 \left\| [(E - D) - \Delta D]^T H(D + \Delta D) \right\| \frac{\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|}{1 - \|D + \Delta D\|} \sqrt{\varphi(H)} > 0 \quad (17)$$

Тоді система (15) інтервально стійка при будь-якому відхиленні аргументу  $\tau > 0$ . Більш того, для довільного розв'язку  $x(t)$  системи (12) при  $t > 0$  буде виконуватись  $\|x(t)\|_1 < \varepsilon$ , як тільки

$$\|x(0)\|_\tau < \delta_1(\varepsilon), \quad \left\| \dot{x}(0) \right\|_\tau < \delta_2(\varepsilon),$$

$$\begin{aligned}
\delta_1(\varepsilon) &= \varepsilon / \sqrt{\varphi(H)}, \\
\delta_2(\varepsilon) &= \left[ \frac{L(H) - 2 \left\| \left[ (E - D) - \Delta D \right]^T H(B + \Delta B) \right\| (1 + \sqrt{\varphi(H)})}{4 \left\| \left[ (E - D) - \Delta D \right]^T H(D + \Delta D) \right\|} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|}{1 - \|D + \Delta D\|} \sqrt{\varphi(H)} \right] \frac{\varepsilon R}{\sqrt{\varphi(H)}}, \\
R &= \min \left\{ 1, \left[ \frac{L(H) - 2 \left\| \left[ (E - D) - \Delta D \right]^T H(B + \Delta B) \right\| (1 + \sqrt{\varphi(H)})}{4 \left\| \left[ (E - D) - \Delta D \right]^T H(D + \Delta D) \right\|} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\sqrt{\varphi(H)} - 1) \frac{\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|}{1 - \|D + \Delta D\|} \right]^{-1} \right\}.
\end{aligned}$$

Умови стійкості (17), які сформульовано в цій теоремі, допускають «пом'якшення» наступного вигляду.

**Теорема 9.** Нехай  $A + B$  - асимптотично стійка матриця й виконується умова (16). Тоді при  $\tau < \tau_0$ , де

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= \frac{L(H)(1 - \|D + \Delta D\|)}{2(\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|)} \left\| \left[ (E - D) - \Delta D \right]^T H(B + \Delta B) \right\| + \\
&\quad + \left\| \left[ (E - D) - \Delta D \right]^T H(D + \Delta D) \right\| \frac{\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|}{1 - \|D + \Delta D\|} \right]^{-1}, \tag{18}
\end{aligned}$$

система (12) буде інтервально стійкою. Більш того для довільного розв'язку  $x(t)$  буде виконуватись  $|x(t)|_1 < \varepsilon$ ,  $t > 0$ , як тільки  $\|x(0)\|_\tau < \delta_1(\varepsilon, \tau)$  й  $\left\| \dot{x}(0) \right\|_\tau \leq \delta_2(\varepsilon, \tau)$ ,

$$\begin{aligned}
\delta_1(\varepsilon, \tau) &= \min \left\{ \frac{e^{-\|A + \Delta A\|\tau}}{1 + 2\|D + \Delta D\| + \|B + \Delta B\|\tau}, \frac{L(H)(1 - \xi)\zeta}{8\|D + \Delta D\|} * \right. \\
&\quad * \left\| \left[ (E - D) - \Delta D \right]^T H(B + \Delta B) \right\| + \\
&\quad \left. + \left\| \left[ (E - D) - \Delta D \right]^T H(D + \Delta D) \right\| \frac{\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|}{1 - \|D + \Delta D\|} \right\} \frac{R}{\sqrt{\varphi(H)}} \varepsilon,
\end{aligned}$$

$$\delta_2(\varepsilon, \tau) = \frac{L(H)(1 - \xi)(1 - \zeta)}{8\|D + \Delta D\| \left\| \left[ (E - D) - \Delta D \right]^T H(D + \Delta D) \right\|} \frac{R}{\sqrt{\varphi(H)}} \varepsilon,$$

$$\begin{aligned}
R &= \min \left\{ 1, \left[ \frac{L(H)(1 - \xi)(1 - \zeta)}{8\|D + \Delta D\| \left\| \left[ (E - D) - \Delta D \right]^T H(D + \Delta D) \right\| \sqrt{\varphi(H)}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|}{1 - \|D + \Delta D\|} \sqrt{\varphi(H)} \right]^{-1} \right\},
\end{aligned}$$

$\xi = \tau / \tau_0$ ,  $0 < \zeta < 1$  - довільна фіксована стала.

### 3. Інтервальна стійкість нелінійних систем регулювання з післядією

Розв'язок задач керування в лінійних системах призводить до знаходження функції (скалярної)  $u(x)$ , при якій замкнена система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(x(t))$$

повинна бути асимптотично стійкою. Часто ця функція залежить від одного скалярного аргументу, який являє собою лінійну комбінацію фазових координат, й функція знаходиться в першому та третьому квадратах площини. Дослідження асимптотичної стійкості систем з функцією керування

$$u(x(t)) = f(\sigma(t)), \quad \sigma(t) = c^T x(t),$$

тобто систем

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bf(\sigma(t)), \quad \sigma(t) = c^T x(t), \quad t \geq 0.$$

з функцією  $f(\sigma)$ , яка лежить в заданому секторі, отримало назву дослідження «абсолютної стійкості» систем регулювання.

Одним з методів дослідження тут є, так званий, «частотний метод», який отримав розвиток в роботах Якубовича В.А., Геліга А.Х., Леонова Г.А. В основі метода лежить дослідження поведінки деякої кривої («годографа») в комплексній площині.

Іншим, альтернативним методом, який отримав розвиток в роботах Барбашина Е.О., Мартинюка А.А. та інш., є другий метод Ляпунова з функцією вигляду «квадратична форма плюс інтеграл від нелінійності»[2]. Розповсюдження цього метода на системи з запізненням та нейтрального типу отримало в роботах Хусаїнова Д.Я., Шатирко А.В.[3].

В цьому параграфі будуть розглядатися нелінійні системи регулювання з відхиляючимся аргументом запізнюючого типу. З використанням метода скінченновимірних функцій Ляпунова й умови Разуміхіна Б.С.[4] отримані достатні умови інтервальної стійкості, які відповідають як довільному запізненню, так і фіксованому («малому»), що залежить від параметрів системи. Розглянуті два типи систем, так звані системи «прямого» та «непрямого» регулювання. По суті вони відрізняються виродженістю лінійної частини, тобто наявністю у неї нульового власного числа. Основні результати, отримані в цьому розділі, опубліковано в роботах [5 – 19]. Цікаві схожі результати можна знайти в роботі [20].

#### 3.1. Системи прямого регулювання. Довільне запізнення

Розглянемо систему керування, яка описується диференціальними рівняннями вигляду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bf(\sigma(t)), \quad \sigma(t) = c^T x(t). \quad (19)$$

Припустимо, що матриця  $A$  асимптотично стійка, а нелінійна функція одного аргументу  $f(\sigma)$  лежить в заданому секторі першої й третьої чверті системи координат, а саме

$$0 \leq f(\sigma)\sigma \leq k\sigma^2, \quad k > 0. \quad (20)$$

Асимптотична стійкість нульового розв'язку  $x(t) \equiv 0$  системи (19) при довільній функції  $f(\sigma)$ , що задовольняє умові (20), отримала назву абсолютної стійкості. Припустимо, що матриця  $A$  точно не відома, а її елементи приймають значення з конкретних наперед заданих інтервалів, й система має вигляд

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + bf(\sigma(t)), \quad \sigma(t) = c^T x(t), \quad (21)$$

де

$$\Delta A = \{\Delta a_{ij}\}, \quad |\Delta a_{ij}| \leq a_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (22)$$

Система (19) називається інтервально стійкою, якщо система (21) абсолютно стійка при довільних матрицях  $\Delta A$ , що задовольняють умовам (22).

Для дослідження інтервальної стійкості системи (19) будемо використовувати функцію Ляпунова вигляду «квадратична форма плюс інтеграл від нелінійності». Ця функція дає гарні результати при дослідженні абсолютної стійкості систем з точно заданими параметрами [2].

$$V_0(x) = x^T Hx + \beta \int_0^{\sigma(x)} f(\xi) d\xi, \quad \sigma(x) = c^T x. \quad (23)$$

Позначимо  $\lambda_{\min}(\cdot)$ ,  $\lambda_{\max}(\cdot)$  – мінімальне й максимальне власні числа відповідних позитивно визначених матриць й введемо наступні позначення

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\tilde{H}) &= \begin{cases} \lambda_{\min}(H), & \beta \geq 0, \\ \lambda_{\min}(H + \beta kcc^T / 2), & \beta < 0, \end{cases} \\ \lambda_{\max}(\tilde{H}) &= \begin{cases} \lambda_{\max}(H + \beta kcc^T / 2), & \beta \geq 0, \\ \lambda_{\max}(H), & \beta < 0, \end{cases} \\ \varphi(\tilde{H}) &= \lambda_{\max}(\tilde{H}) / \lambda_{\min}(\tilde{H}). \end{aligned} \quad (24)$$

Введемо наступні векторні й матричні норми

$$\begin{aligned} |x(t)| &= \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \right\}^{1/2}, \quad \|x(t)\|_r = \max_{-r \leq s \leq 0} \{|x(t+s)|\}, \\ |A| &= \{\lambda_{\max}(AA^T)\}^{1/2}, \\ \|\Delta A\| &= \max \{|\Delta A| : |\Delta a_{ij}| \leq a_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}\}. \end{aligned}$$

Для повної похідної функції Ляпунова (23) в силу системи (19) виконується наступна нерівність

$$V_0(x(t)) \leq -(x^T(t), f(\sigma(t)))C[A, H, \beta](x^T(t), f(\sigma(t)))^T,$$

де

$$C[A, H, \beta] = \begin{bmatrix} -A^T H - HA & -\left[ Hb + \frac{1}{2}(\beta A^T + I)c \right] \\ -\left[ Hb + \frac{1}{2}(\beta A^T + I)c \right]^T & \frac{1}{k} - \beta b^T c \end{bmatrix}.$$

Мають місце наступні умови **абсолютної стійкості** [2, 20 – 22], тобто асимптотичної стійкості в цілому нульового розв'язку  $x(t) \equiv 0$  системи (19) при довільній функції  $f(\sigma)$ , що задовольняє умові (20).

**Теорема 10.** Нехай існує позитивно визначена матриця  $H$  і скаляр  $\beta$ , такі, що

$$\lambda_{\min}(\tilde{H}) > 0 \quad \text{й} \quad \lambda_{\min}(C[A, H, \beta]) > 0.$$

Тоді система без запізнення (19) абсолютно стійка.

Для інтервальної стійкості системи без запізнення справедливим є наступний результат.

**Теорема 11.** Нехай існує позитивно визначена матриця  $H$  і скаляр  $\beta$  такі, що

$$\lambda_{\min}(\tilde{H}) > 0 \quad \text{і} \quad \lambda_{\min}(C[A, H, \beta]) > 0$$

й виконується нерівність

$$\|\Delta A\| < \lambda_{\min}(C[A, H, \beta])(2|H| + \beta|c|)^{-1}.$$

Тоді система (19) інтервально стійка.

*Доведення.* Як витікає з умов теореми 11, функція Ляпунова (23) є позитивно визначеною. Обчислимо повну похідну цієї функції в силу системи (21). Отримаємо

$$\dot{V}_0(x(t)) = -(x^T(t), f(\sigma(t)))\{C[A, H, \beta] + \Delta C[\Delta A, H, \beta]\}(x^T(t), f(\sigma(t)))^T,$$

де

$$\Delta C[\Delta A, H, \beta] = \begin{bmatrix} -\Delta A^T H - H \Delta A & -\frac{1}{2} \beta \Delta A^T c \\ -\frac{1}{2} \beta c^T \Delta A & 0 \end{bmatrix}$$

З властивостей симетричних позитивно визначених матриць витікає, що

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}\{C[A, H, \beta] + \Delta C[\Delta A, H, \beta]\} &\geq \\ &\geq \lambda_{\min}(C[A, H, \beta]) - \lambda_{\max}(\Delta C[\Delta A, H, \beta]) \end{aligned}$$

Й нерівність

$$\lambda_{\min}(C[A, H, \beta]) > \lambda_{\max}(\Delta C[\Delta A, H, \beta])$$

Гарантує негативну визначеність повної похідної функції Ляпунова вздовж розв'язків інтервальної системи (21). Якщо виконується нерівність

$$\lambda_{\min}(C[A, H, \beta]) > (2|H| + \beta|c|)\|\Delta A\|$$

то попередня нерівність буде виконуватися й поготів. Таким чином при виконанні умов теореми існує додатно визначена функція Ляпунова, повна похідна якої в силу системи буде негативно визначеною. А це гарантує абсолютну стійкість інтервальної системи при збуреннях, що задовольняють обмеженням теореми.

Розглянемо далі систему диференціальних рівнянь з інтервальними коефіцієнтами й запізнюючимся аргументом вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t - \tau) + bf(\sigma(t)), \\ \sigma(t) = c^T x(t) \end{cases} \quad (25)$$

Елементи матриць  $\Delta A$  і  $\Delta B$  приймають значення з фіксованих інтервалів

$$\begin{aligned} \Delta A &= \{\Delta a_{ij}\}, \quad |\Delta a_{ij}| \leq \alpha_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \\ \Delta B &= \{\Delta b_{ij}\}, \quad |\Delta b_{ij}| \leq \beta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (26)$$

Отримаємо умови інтервальної стійкості системи з запізненням (25).

Позначимо поверхню рівня функції Ляпунова  $V_0(x)$  через  $\partial V_0^\alpha$ , тобто

$$\begin{aligned} \partial V_0^\alpha &= \{x \in R^n : V_0(x) = \alpha\}, \quad V_0^\alpha = \{x \in R^n : V_0(x) < \alpha\}, \\ \gamma_1 &= 2|H| \left(1 + \sqrt{\varphi(\tilde{H})}\right), \quad \gamma_2 = 2|H| + |\beta||c|, \\ L_1(H, \beta) &= \lambda_{\min}(C[A + B, H, \beta]) - \gamma_1|\beta_1|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C[A + B, H, \beta] &= \\ &= \begin{bmatrix} -(A + B)^T H - H(A + B) & -\left[Hb + \frac{1}{2}(\beta(A + B)^T + Ic)\right] \\ -\left[Hb + \frac{1}{2}(\beta(A + B)^T + Ic)\right]^T & \frac{1}{k} - \beta b^T c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

Справедливі наступні твердження, які дають достатні умови інтервальної стійкості систем з запізненням.

**Теорема 12.** Нехай існує додатно визначена матриця  $H$  і скаляр  $\beta$ , такі що

$$\lambda_{\min}(\tilde{H}) > 0, \quad \text{і} \quad L_1(H, \beta) > 0.$$

Тоді при

$$\gamma_2 \|\Delta A\| + (\gamma_1 + \gamma_2) \|\Delta B\| < L_1(H, \beta) \quad (28)$$

система з запізненням (25) буде інтервально (робастно) стійкою при довільному відхиленні аргументу  $\tau > 0$ . Крім того, для розв'язку  $x(t)$  системи (28) буде виконуватися  $\|x(t)\| < \varepsilon$ ,  $t > 0$  як тільки  $\|x(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon)$ , де  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / \sqrt{\varphi(\tilde{H})}$ .

*Доведення.* Запишемо інтервальну систему з запізненням (25) у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [(A + B) + (\Delta A + \Delta B)]x(t) + bf(\sigma(t)) + (B + \Delta B)[x(t - \tau) - x(t)] \\ \sigma(t) &= c^T x(t) \end{aligned}$$

й знову обчислимо повну похідну функції Ляпунова  $V_0(x)$  вигляду (23) в силу перетвореної системи.

Отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq -(x^T(t), f(\sigma(t))) \{C[A + B, H, \beta] + \Delta C[\Delta A + \Delta B, H, \beta]\}^* \\ &\quad * (x(t), f(\sigma(t)))^T + 2|H|(B + \Delta B)\|x(t) - x(t - \tau)\|, \end{aligned}$$

де

$$\Delta C[\Delta A + \Delta B, H, \beta] = \begin{bmatrix} -(\Delta A + \Delta B)^T H - H(\Delta A + \Delta B) - \frac{1}{2} \beta (\Delta A + \Delta B) c \\ -\frac{1}{2} \beta c^T (\Delta A + \Delta B)^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Нехай існує додатно визначена матриця  $H$  і скаляр  $\beta$ , при яких виконується нерівність

$$\|\Delta A\| + \|\Delta B\| < \lambda_{\min}(C[A + B, H, \beta])(2|H| + \beta|c|)^{-1}$$

Тоді матриця  $C[A + B, H, \beta] + \Delta C[\Delta A + \Delta B, H, \beta]$  також є додатно визначеною і для повної похідної функції Ляпунова  $V_0(x)$  в силу інтервальної системи з запізненням буде виконуватись

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) \leq & -\{\lambda_{\min}(C[A + B, H, \beta]) - (2|H| + \beta|c|)(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|)\}x(t)^2 + \\ & + 2|H(B + \Delta B)|x(t) - x(t - \tau). \end{aligned}$$

Оскільки функція  $V_0(x)$  має вигляд (23), то для неї виконується наступна двостороння нерівність

$$\lambda_{\min}(\tilde{H})x^2 \leq V_0(x) \leq \lambda_{\max}(\tilde{H})x^2,$$

де функції  $\lambda_{\max}(\tilde{H})$ ,  $\lambda_{\min}(\tilde{H})$  визначені в (24). Позначимо

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varphi(\tilde{H})}}, \quad \alpha = \varepsilon^2 \lambda_{\min}(\tilde{H}).$$

Якщо початкові умови розв'язку  $x(t)$  вибрані таким чином, щоб

$$\|x(0)\|_{\tau} < \delta(\varepsilon),$$

тоді  $x(t) \in V_0^\alpha$ ,  $-\tau \leq t \leq 0$ . Покажемо, що це буде виконуватись і при  $t > 0$ . Нехай це не так і існує  $T > 0$ , при якому  $x(T) \in \partial V_0^\alpha$ . Тоді, як витікає з двосторонніх нерівностей, для функції Ляпунова буде виконуватись

$$\lambda_{\min}(\tilde{H})x(T - \tau)^2 \leq V_0(x(T - \tau)) < V_0(x(T)) \leq \lambda_{\max}(\tilde{H})x(T)^2.$$

Звідси отримаємо, що

$$|x(T - \tau)| < \sqrt{\varphi(\tilde{H})}x(T).$$

Підставимо отриману залежність в оцінку повної похідної функції Ляпунова. Отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(x(T)) \leq & -\{\lambda_{\min}(C[A + B, H, \beta]) - 2(|H| + \beta|c|)(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|)\}x(T)^2 + \\ & + 2|H(B + \Delta B)|(1 + \sqrt{\varphi(\tilde{H})})x(T)^2. \end{aligned}$$

Й, якщо параметри системи такі, що виконуються умови (28) теореми 12, тоді повна похідна функції  $V_0(x(t))$  при  $t = T$  є негативно визначеною. Таким чином припущення невірне і розв'язок  $x(t)$  залишається в області  $V_0^\alpha$  при всіх  $t > 0$ . Асимптотична стійкість витікає з негативно визначеності похідної в цій області.

Покажемо, що асимптотична стійкість має експоненційний характер. Для цього використаємо неавтономну функцію Ляпунова, яку отримаємо з  $V_0(x)$  додаванням експоненційної складової, а саме

$$V(x, t) = e^{\gamma t} V_0(x), \quad \gamma > 0.$$

Відповідно через  $\partial V^{\alpha, \gamma}$  з  $V^{\alpha, \gamma}$  позначимо поверхню рівня функції Ляпунова  $V(x, t)$  і область в розширеному фазовому просторі  $R^n \times R$ , яку вона обмежує

$$\partial V^{\alpha, \gamma} = \{(x, t) : V(x, t) = \alpha\}, \quad V^{\alpha, \gamma} = \{(x, t) : V(x, t) < \alpha\}, \quad \alpha > 0.$$

**Твердження 1.** Нехай існує  $\alpha > 0$  таке, що інтегральна крива  $(x(t), t)$  в розширеному фазовому просторі  $R^n \times R$  знаходиться в  $V^{\alpha, \gamma}$ . Тоді

$$|x(t)| < \sqrt{\alpha / \lambda_{\min}(\tilde{H})} e^{-\frac{1}{2}\gamma t}, \quad t > 0.$$

*Доведення.* З двосторонніх нерівностей для функції Ляпунова  $V_0(x)$  витікає, що

$$e^{\gamma t} \lambda_{\min}(\tilde{H}) |x(t)|^2 \leq e^{\gamma t} V_0(x(t)) < \alpha.$$

Звідси отримуємо твердження 1.

Доведено, що при умовах, вказаних в теоремі 12, розв'язок  $x(t)$  системи (25) експоненційно збігається до початку координат. Отримана наступна теорема.

**Теорема 13.** Нехай існує додатно визначена матриця  $H$  і скаляр  $\beta$ , такі що  $\lambda_{\min}(\tilde{H}) > 0$ , і  $L_1(H, \beta) > 0$ . Тоді при

$$L_1(H, \beta) > \|\Delta A\| + (\gamma_1 + \gamma_2) \|\Delta B\|$$

для розв'язків  $x(t)$  системи (25) виконується наступна оцінка експоненційної збіжності

$$|x(t)| \leq \sqrt{\varphi(\tilde{H})} \|x(0)\|_{\tau} e^{-\gamma t / 2}, \quad t > 0,$$

$$\gamma = \frac{\Psi(0)}{\Psi(0) + \gamma^* \lambda_{\min}(\tilde{H})},$$

$$\Psi(0) = L_1(H, \beta) - (\gamma_1 + \gamma_2) \|\Delta B\| - \gamma_2 \|\Delta A\|, \quad (29)$$

$$\gamma^* = \frac{2}{\tau} \ln \left[ 1 + \frac{\Psi(0)}{2|H|(|B| + \|\Delta B\|) \sqrt{\varphi(\tilde{H})}} \right].$$

*Доведення.* Позначимо

$$\alpha = \|x(0)\|_{\tau}^2 \lambda_{\max}(\tilde{H})$$

тоді при  $-\tau \leq t < 0$  буде виконуватися  $(x(t), t) \in V^{\alpha, \gamma}$ . Покажемо, що це буде виконуватися і при  $t > 0$ . Обчислимо повну похідну функції Ляпунова  $V(x, t)$  в силу інтервальної системи з запізненням

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), t) &\leq \gamma V_0(x(t)) e^{\gamma t} - \\ &- \left\{ \lambda_{\min}(C[A + B, H, \beta]) - 2(|H| + \beta|c|)(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) \right\} |x(t)|^2 + \\ &+ 2e^{\gamma t} |H(B + \Delta B)x(t)| |x(t) - x(t - \tau)| \end{aligned}$$

Нехай, від зворотного, при деякому  $T > 0$  буде  $(x(T), T) \in \partial V^{\alpha, \gamma}$ . Це значить, що

$$\begin{aligned} e^{\gamma(T-\tau)} \lambda_{\min}(\tilde{H}) |x(T-\tau)|^2 &\leq V(x(T-\tau), T-\tau) < \\ < V(x(T), T) &\leq e^{\gamma T} \lambda_{\max}(\tilde{H}) |x(T)|^2 \end{aligned}$$

і

$$|x(T-\tau)| < e^{\frac{1}{2}\gamma\tau} \sqrt{\phi(\tilde{H})} |x(T)|.$$

Підставимо отриманий вираз до значення повної похідної функції Ляпунова  $V(x, t)$  при  $t = T$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(T), T) &\leq -e^{\gamma T} \left\{ \lambda_{\min}(C[A + B, H, \beta]) - 2(|H| + \beta|c|)(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) \right\} - \\ &- \gamma \lambda_{\max}(\tilde{H}) |x(T)|^2 - 2e^{\gamma T} |H(B + \Delta B)| \left( 1 + e^{\frac{1}{2}\gamma\tau} \sqrt{\phi(\tilde{H})} \right) |x(T)|^2. \end{aligned}$$

Або, використовуючи наведені в (27), (29) позначення, отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(T), T) &< - \left\{ L_1(H, \beta) - (\gamma_1 + \gamma_2)\|\Delta B\| - \gamma_2\|\Delta A\| \right\} - \gamma \lambda_{\max}(\tilde{H}) - \\ &- 2|H| \left( |B| + \|\Delta B\| \right) \sqrt{\phi(\tilde{H})} \left( e^{\frac{1}{2}\gamma\tau} - 1 \right) \left\{ e^{\gamma T} |x(T)|^2 \right\}. \end{aligned}$$

За умовою при  $\gamma = 0$  вираз в фігурних дужках негативний. Вочевидь, в силу неперервності він буде негативним і при деякому, достатньо малому  $\gamma > 0$ .

Розглянемо нерівність

$$\begin{aligned} \Psi(\gamma) &> \gamma \lambda_{\max}(\tilde{H}), \\ \Psi(\gamma) &= L_1(H, \beta) - (\gamma_1 + \gamma_2)\|\Delta B\| - \gamma_2\|\Delta A\| - \\ &- 2|H| \left( |B| + \|\Delta B\| \right) \sqrt{\phi(\tilde{H})} \left( e^{\frac{1}{2}\gamma\tau} - 1 \right). \end{aligned}$$

Функція  $\Psi(\gamma)$  по змінній  $\gamma$  є опуклою, монотонно спадаючою і задовольняє умовам

$$\begin{aligned} \Psi(0) &= L_1(H, \beta) - (\gamma_1 + \gamma_2)\|\Delta B\| - \gamma_2\|\Delta A\| > 0, \\ \Psi(\gamma^*) &= 0, \quad \gamma^* = \frac{2}{\tau} \ln \left[ 1 + \frac{L_1(H, \beta) - (\gamma_1 + \gamma_2)\|\Delta B\| - \gamma_2\|\Delta A\|}{2|H| \left( |B| + \|\Delta B\| \right) \sqrt{\phi(\tilde{H})}} \right]. \end{aligned}$$

Замінімо функцію  $\Psi(\gamma)$  прямою, яка з'єднає точки  $(0, \Psi(0))$  з  $(\gamma^*, 0)$ , тобто прямою

$$\tilde{\Psi}(\gamma) = \Psi(0) \left( 1 - \frac{\gamma}{\gamma^*} \right).$$

Оскільки функція  $\Psi(\gamma)$  опукла, то нерівність

$$\Psi(\gamma) > \gamma \lambda_{\max}(\tilde{H})$$

буде тим паче виконуватись для всіх  $\gamma$  таких, що

$$0 < \gamma < \gamma^{**},$$

де  $\gamma^{**}$  є розв'язком рівняння

$$\Psi(0) \left( 1 - \frac{\gamma}{\gamma^*} \right) = \gamma \lambda_{\max}(H^*).$$

Розв'яжемо його й отримаємо

$$\gamma^{**} = \frac{\Psi(0) \gamma^*}{\Psi(0) + \gamma^* \lambda_{\max}(\tilde{H})}$$

Таким чином при отриманому  $\gamma = \gamma^{**}$  повна похідна буде негативно визначеною і, як витікає з твердження 1, буде справедлива експоненційна оцінка (29) збіжності розв'язків інтервальної системи з запізненням (25).

### 3.2. Інтервальна стійкість систем прямого регулювання з малим запізненням

В цьому розділі також будемо розглядати інтервальну систему з запізненням вигляду (25). Як і в попередньому розділі, припустимо, що матриці  $\Delta A$  і  $\Delta B$  точно не відомі, а їх елементи можуть приймати свої значення з деяких фіксованих інтервалів (26). Нелінійна функція одного аргументу  $f(\sigma)$  задовольняє умові (20).

На відміну від попереднього розділу, в даному будуть отримані достатні умови інтервальної стійкості системи з запізненням (25) для «малого» фіксованого запізнення  $\tau \leq \tau_0$ , що залежить від параметрів системи. При їх отриманні використовується другий метод О.М. Ляпунова з функцією вигляду квадратична форма плюс інтеграл від нелінійності (23)

$$V_0(x) = x^T H x + \beta \int_0^{\sigma(x)} f(\xi) d\xi, \quad \sigma(x) = c^T x.$$

Позначимо через  $\partial V_0^\alpha$  поверхню рівня  $V_0(x) = \alpha$  функції Ляпунова (23), а  $V_0^\alpha$  область, яку вона обмежує, тобто

$$\partial V_0^\alpha = \{x : V_0(x) = \alpha\}, \quad V_0^\alpha = \{x : V_0(x) < \alpha\}.$$

Наведемо деякі допоміжні результати.

**Лема 1.** Нехай розв'язок  $x(t)$  системи (25) задовольняє початковій умові  $\|x(0)\|_\tau < \delta$ . Тоді на проміжку  $0 \leq t \leq \tau$  буде виконуватись нерівність

$$\begin{aligned}
|x(t)| &< N(t)\delta, \quad N(t) = (1 + bt)e^{at}, \\
a &= |A| + \|\Delta A\| + k|b|c, \\
b &= |B| + \|\Delta B\|.
\end{aligned} \tag{30}$$

*Доведення.* Запишемо систему (25) в інтегральному вигляді

$$x(t) = x(0) + \int_0^t [(A + \Delta A)x(s) + (B + \Delta B)x(s - \tau) + bf(c^T x(s))] ds.$$

На проміжку  $0 \leq t \leq \tau$  буде виконуватись нерівність

$$|x(t)| < \delta + |B + \Delta B|\delta t + \int_0^t (|A + \Delta A| + K|b|c)|x(s)| ds.$$

Використовуючи нерівність Гронуола-Беллмана, отримаємо, що на проміжку  $0 \leq t \leq \tau$  справедлива нерівність

$$|x(t)| < [\delta + |B + \Delta B|\delta t] e^{(|A + \Delta A| + k|b|c)t}.$$

Використовуючи приведені позначення, отримаємо твердження леми 1.

**Лема 2.** Нехай на проміжку  $T - 2\tau \leq t < T$ ,  $T > \tau$  виконується  $x(t) \in V_0^\alpha$ , а при  $t = T$  буде  $x(T) \in \partial V_0^\alpha$ . Тоді справедлива наступна нерівність

$$|x(T) - x(T - \tau)| < (a + b)\sqrt{\varphi(\tilde{H})\tau}|x(T)|. \tag{31}$$

*Доведення.* Запишемо систему (25) в вигляді

$$x(T) = x(T - \tau) + \int_{T-\tau}^T [(A + \Delta A)x(s) + (B + \Delta B)x(s - \tau) + bf(c^T x(s))] ds.$$

Звідси отримаємо

$$|x(T) - x(T - \tau)| \leq \int_{T-\tau}^T (|A + \Delta A||x(s)| + |B + \Delta B||x(s - \tau)| + k|b|c|x(s)|) ds.$$

Оскільки за умовою леми на проміжку  $T - 2\tau \leq t \leq T$  буде  $x(t) \in V_0^\alpha$ ,  $x(T) \in \partial V_0^\alpha$ , тоді

$$\lambda_{\min}(\tilde{H})|x(t)|^2 \leq V_0(x(t)) < V_0(x(T)) \leq \lambda_{\max}(\tilde{H})|x(T)|^2.$$

Звідси

$$|x(s)| < \sqrt{\varphi(\tilde{H})}|x(T)|, \quad |x(s - \tau)| < \sqrt{\varphi(\tilde{H})}|x(T)|. \tag{32}$$

Й отримаємо

$$|x(T) - x(T - \tau)| < (|A + \Delta A| + |B + \Delta B| + k|b|c)\sqrt{\varphi(\tilde{H})\tau}|x(T)|.$$

Звідси витікає твердження (31) леми 2.

Введемо наступні позначення

$$C[A+B, H, \beta] = \begin{bmatrix} -(A+B)^T H - H(A+B) & -\left[ Hb + (\beta(A+B)^T + I) \frac{1}{2} c \right] \\ -\left[ Hb + (\beta(A+B)^T + I) \frac{1}{2} c \right]^T & 1/k - \beta b^T c \end{bmatrix}$$

$$\Delta C[\Delta A + \Delta B, H, \beta] = \begin{bmatrix} -(\Delta A + \Delta B)^T H - H(\Delta A + \Delta B) & -\beta(\Delta A + \Delta B)^T \frac{1}{2} c \\ -\beta c^T (\Delta A + \Delta B) \frac{1}{2} c & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_2 = 2|H| + |\beta|c, \quad L_2(H, \beta) = \lambda_{\min}(C[A+B, H, \beta]) - \gamma_2(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|).$$

Використовуючи наведені леми отримаємо наступні умови абсолютної інтервальної стійкості.

**Теорема 14.** Нехай існує додатно визначена матриця  $H$  і скаляр  $\beta$ , при яких  $\lambda_{\min}(\tilde{H}) > 0$  й матриця  $C[A+B, H, \beta]$  додатно визначена. Тоді при  $L_2(H, \beta) > 0$  і  $\tau < \tau_0$ , де

$$\tau_0 = \frac{L(H)}{2(|HB| + |H|\|\Delta B\|)(a+b)\sqrt{\varphi(\tilde{H})}}, \quad (33)$$

система (25) буде абсолютно інтервально стійкою і для її розв'язків буде виконуватися  $|x(t)| < \varepsilon$ ,  $t > 0$ , як тільки  $\|x(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon, \tau)$ , де

$$\delta(\varepsilon, \tau) = (1 + b\tau)^{-1} e^{-a\tau} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tilde{\varphi}(H)}}. \quad (34)$$

*Доведення.* Повна похідна функції Ляпунова  $V_0(x)$  виду (23) в силу системи (25) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(x) &\leq -(x^T(t), f(\sigma(t))) \{C[A+B, H, \beta] + \Delta C[\Delta A + \Delta B, H, \beta]\} \times \\ &\times (x^T(t), f(\sigma(t)))^T + 2|H(B + \Delta B)| \|x(t)\| |x(t) - x(t-\tau)|. \end{aligned}$$

Нехай існують  $H$  і  $\beta$ , при яких  $\lambda_{\min}(\tilde{H}) > 0$  і матриця  $C[A+B, H, \beta]$  позитивно визначена. Якщо “збурені” матриці  $\Delta A$  і  $\Delta B$  такі, що  $L_2(H, \beta) > 0$ , тоді матриця  $C[A+B, H, \beta] + \Delta C[\Delta A + \Delta B, H, \beta]$  також позитивно визначена і справедлива нерівність

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(x(t)) &\leq -\left\{ \lambda_{\min}(C[A+B, H, \beta]) - (2|H| + |\beta|c)(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) \right\} |x(t)|^2 + \\ &+ 2|H(B + \Delta B)| \|x(t)\| |x(t) - x(t-\tau)|. \end{aligned}$$

Для довільного  $\varepsilon > 0$  виберемо  $\delta(\varepsilon, \tau)$  згідно (34). Тоді, як витікає з нерівності (30) леми 1, для довільного розв'язку  $x(t)$  системи (25), що задовольняє умові  $\|x(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon, \tau)$ , при  $0 \leq t \leq \tau$  буде виконуватися  $|x(t)| < \varepsilon / \sqrt{\varphi(\tilde{H})}$ , тобто  $x(t) \in V_0^\alpha$ ,  $\alpha = \lambda_{\min}(\tilde{H})\varepsilon^2$ . Покажемо, що це збережеться і при  $t > \tau$ . Нехай це не так і існує  $T > \tau$ , при якому  $x(T) \in \partial V_0^\alpha$ . Тоді, як витікає з леми 2, справедлива нерівність (31) і для повної похідної функції Ляпунова  $V_0(x)$  в момент  $t = T$  буде виконуватися

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(x(t)) &< -\{\lambda_{\min}(C[A+B, H, \beta]) - (2|H| + |\beta||c|) \times \\ &\times (|\Delta A| + \|\Delta B\|) - 2|H|(B + \Delta B)(a+b)\sqrt{\varphi(\tilde{H})\tau}\}x(t)^2. \end{aligned}$$

Нехай збурення системи  $\Delta A$  і  $\Delta B$  такі, що виконується  $L_2(H, \beta) > 0$ . Тоді при  $\tau < \tau_0$ , де  $\tau_0$  визначено в (32), повна похідна функції Ляпунова  $V_0(x)$  в момент  $t = T$  буде негативно визначеною. З цього витікає асимптотична стійкість системи (25).

Покажемо, що розв'язки системи (25) наближаються до положення рівноваги за експоненційним законом. Для цього, як витікає з попередньої глави, візьмемо функцію Ляпунова неавтономного виду  $V(x, t) = e^{\gamma t} V_0(x)$ ,  $\gamma > 0$ . Відповідно позначимо  $\partial V^{\alpha, \gamma}$  і  $V^{\alpha, \gamma}$  поверхні рівня  $V(x, t) = \alpha$  і область в розширеному фазовому просторі, яку вона обмежує

$$\partial V^{\alpha, \gamma} = \{x, t : e^{\gamma t} V_0(x) = \alpha\}, \quad V^{\alpha, \gamma} = \{x, t : e^{\gamma t} V_0(x) < \alpha\}$$

**Лема 3.** Нехай існує  $\alpha > 0$  таке, що інтегральна крива  $(x(t), t)$  в розширеному фазовому просторі  $R^n \times R$  належить  $V^{\alpha, \gamma}$ . Тоді справедлива нерівність

$$|x(t)| < \sqrt{\alpha / \lambda_{\min}(\tilde{H})} e^{-\gamma t / 2}, \quad \gamma > 0. \quad (35)$$

*Доведення.* Як витікає з нерівностей квадратичних форм і умови леми 3, виконується нерівність

$$e^{\gamma t} \lambda_{\min}(\tilde{H}) |x(t)|^2 \leq e^{\gamma t} V_0(x(t)) < \alpha.$$

Звідси витікає співвідношення (35).

**Лема 4.** Нехай існує  $T > \tau$ , що на проміжку  $T - 2\tau \leq t < T$ , виконується  $(x(t), t) \in V^{\alpha, \gamma}$ , а при  $t = T$  буде  $(x(T), T) \in \partial V^{\alpha, \gamma}$ . Тоді справедлива наступна нерівність

$$|x(T) - x(T - \tau)| < (ae^{\gamma\tau/2} + be^{\gamma\tau}) \sqrt{\varphi(\tilde{H})\tau} |x(T)|. \quad (36)$$

*Доведення.* Як витікає з інтегрального представлення системи (25), буде виконуватися співвідношення

$$\begin{aligned} |x(T) - x(T - \tau)| &\leq \int_{T-\tau}^T (|A + \Delta A| |x(s)| + |B + \Delta B| |x(s - \tau)| + \\ &+ k|b||c| |x(s)|) ds. \end{aligned}$$

З умови леми 4 і нерівностей квадратичних форм витікає, що

$$e^{\gamma t} \lambda_{\min}(\tilde{H}) |x(t)|^2 \leq V(x(t), t) < V(x(T), T) \leq e^{\gamma T} \lambda_{\max}(\tilde{H}) |x(T)|^2.$$

Звідси отримаємо, що

$$|x(s)| < e^{\gamma\tau/2} \sqrt{\varphi(H)} |x(T)|, \quad |x(s - \tau)| < e^{\gamma\tau} \sqrt{\varphi(H)} |x(T)|.$$

Й отже

$$\begin{aligned} |x(T) - x(T - \tau)| &< (|A + \Delta A| e^{\gamma\tau/2} + |B + \Delta B| e^{\gamma\tau} + \\ &+ k|b||c| e^{\gamma\tau/2}) \sqrt{\varphi(\tilde{H})\tau} |x(T)|. \end{aligned}$$

Звідси витікає твердження (36) леми 4.

За допомогою приведених лем отримаємо наступне твердження.

**Теорема 15.** Нехай існує додатно визначена матриця  $H$  і скаляр  $\beta$ , при яких  $\lambda_{\min}(\tilde{H}) > 0$  і матриця  $C[A+B, H, \beta]$  додатно визначена. Якщо збурення  $\Delta A$  і  $\Delta B$  такі, що виконується

$$L_2(H, \beta) > 0, \quad \tau < \tau_0,$$

тоді при  $\tau < \tau_0$ , де  $\tau_0$  визначено в (33), для розв'язків  $x(t)$  системи (25) справедлива наступна експоненційна оцінка збіжності

$$|x(t)| < \begin{cases} N(t)\|x(0)\|_{\tau}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ N(\tau)\sqrt{\varphi(\tilde{H})}\|x(0)\|_{\tau} \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma(t-\tau)\right\}, & t > \tau, \end{cases} \quad (37)$$

де

$$\gamma = \frac{\Psi(0, \tau)\gamma^*}{\Psi(0, \tau) + \gamma^*\lambda_{\max}(\tilde{H})},$$

$$\Psi_0(0, \tau) = L_2(H, \beta)(1 - \xi), \quad \xi = \tau / \tau_0, \quad (38)$$

$$\gamma^* = \ln \frac{2}{\tau} \left[ \frac{\sqrt{a^2 \xi^2 + 4\xi b(a+b)} - a\xi}{2b\xi} \right].$$

*Доведення.* Перша частина нерівності (37) витікає з нерівності (30) леми 1. Розглянемо  $t > \tau$ . Покладемо

$$\alpha = [N(\tau)\|x(0)\|_{\tau}]^2 \lambda_{\max}(\tilde{H}).$$

Тоді при  $-\tau \leq t \leq \tau$  буде виконуватися  $(x(t), t) \in V^{\alpha, \gamma}$ . Покажемо, що це збережеться і при  $t > \tau$ , якщо  $\gamma$  вибирати згідно (38). Візьмемо повну похідну функції Ляпунова  $V(x, t)$  в силу системи (25)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq \gamma V(x(t), t) - e^{\gamma t} \{ \lambda_{\min}(C[A+B, H, \beta]) - \\ &- (2|H| + |\beta|c)(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) \|x(t)\|^2 + \\ &+ 2e^{\gamma t} |H(B + \Delta B)| \|x(t)\| |x(t) - x(t-\tau)| \}. \end{aligned}$$

Нехай, від зворотного, при деякому  $T > \tau$  буде  $(x(T), T) \in \partial V^{\alpha, \gamma}$ . Тоді виконуються умови леми 4 і справедлива нерівність (36). Підставивши її в оцінку повної похідної, при  $t = T$  отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(T), T) &< -\{ \lambda_{\min}(C[A+B, H, \beta]) - (2|H| + |\beta|c) \\ &(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) - \gamma \lambda_{\max}(\tilde{H}) \} e^{\gamma T} |x(T)|^2 + \\ &+ 2|H(B + \Delta B)| (ae^{\gamma T/2} + be^{\gamma T}) \sqrt{\varphi(\tilde{H})} \tau e^{\gamma T} |x(T)|^2. \end{aligned}$$

Або

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(T), T) &< -\{\lambda_{\min}(C[A + B, H, \beta]) - \gamma_2(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) - \\ &- 2|H(B + \Delta B)|(ae^{\gamma\tau/2} + be^{\gamma\tau})\sqrt{\varphi(\tilde{H})}\tau - \gamma\lambda_{\max}(\tilde{H})\}e^{\gamma T}|x(T)|^2. \end{aligned}$$

При  $\gamma = 0$ ,  $\tau = 0$  повна похідна буде негативно визначеною. Очевидно, в силу неперервності, це збережеться й при достатньо малих  $\gamma > 0$ ,  $\tau > 0$ . Розглянемо нерівність

$$L_2(H, \beta) - 2(|HB| + |H\|\Delta B\|)(ae^{\gamma\tau/2} + be^{\gamma\tau})\sqrt{\varphi(\tilde{H})}\tau > \gamma\lambda_{\max}(\tilde{H}).$$

Перепишемо її у вигляді

$$\begin{aligned} \Psi(\gamma, \tau) &> \gamma\lambda_{\max}(H) \\ \Psi(\gamma, \tau) &= L_2(H, \beta) \left[ 1 - \frac{ae^{\gamma\tau} + b^{\gamma\tau}}{a + b} \xi \right], \\ \xi &= \tau / \tau_0, \quad 0 < \xi < 1. \end{aligned} \tag{39}$$

Оскільки  $\tau < \tau_0$ , тоді при  $\gamma = 0$  вона виконується. Тому, в силу неперервності, це буде виконуватися і при достатньо малому  $\gamma > 0$ . Функція  $\Psi(\gamma, \tau)$  при кожному фіксованому  $\tau < \tau_0$  за змінною  $\gamma > 0$  є опуклою догори, монотонно спадаючою і задовольняє умовам

$$\Psi(0, \tau) = L_2(H, \beta)(1 - \xi) > 0, \quad \Psi(\gamma^*, \tau) = 0,$$

$$\gamma^* = \frac{2}{\tau} \ln \left[ \frac{\sqrt{a^2 \xi^2 + 4\xi b(a + b)} - a\xi}{2b\xi} \right].$$

Замінімо функцію  $\Psi(\gamma, \tau)$  відрізком прямої, що з'єднує точки  $(0, \Psi(0, \tau))$  і  $(\gamma^*, 0)$ . Отримаємо

$$\tilde{\Psi}(\gamma, 0) = \Psi(0, \tau) \left( 1 - \frac{\gamma}{\gamma^*} \right).$$

Оскільки функція  $\Psi(\gamma, \tau)$  опукла догори, тоді для розв'язків рівняння

$$\Psi(0, \tau)(1 - \gamma / \gamma^*) = \gamma\lambda_{\max}(\tilde{H})$$

нерівність (39) буде виконуватися і поготів. Розв'язавши його отримаємо

$$\gamma = \frac{\Psi(0, \tau)\gamma^*}{\Psi(0, \tau) + \gamma^*\lambda_{\max}(\tilde{H})}.$$

Таким чином при обчисленому  $\gamma$  буде виконуватися (39), тобто повна похідна функції Ляпунова  $V(x, t)$  буде негативно визначеною. Це забезпечує  $(x(t), t) \in V^{\alpha, \gamma}$  і при  $t > T$ . А тоді за лемою 3 виконується нерівність (35), тобто при вибраному  $\gamma$  буде справедлива оцінка збіжності розв'язків  $x(t)$ , наведена в (37).

Теорема доведена.

### 3.3. Інтервальна стійкість систем непрямого регулювання з запізненням

В цьому розділі будуть розглянуті так звані системи «непрямого регулювання». Вони характеризуються наявністю одного нульового власного числа матриці лінійного наближення. Розглянемо систему регулювання, що описується диференціальними рівняннями вигляду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bf(\sigma(t)), \quad \dot{\sigma}(t) = c^T x(t) - \rho f(\sigma(t)). \quad (40)$$

Тут  $t \geq 0$ ,  $b, c, x(t) \in R^n$ ,  $A$  – квадратна асимптотично стійка матриця,  $\rho > 0$  скаляр. Скалярна функція керування  $f(\sigma)$  точно не відома, вона знаходиться в межах сектора, розташованого в першій і третій координатних четвертях, тобто задовольняє умовам

$$k_1 \sigma^2 \leq f(\sigma) \sigma \leq k_2 \sigma^2, \quad k_2 > k_1 > 0. \quad (41)$$

Асимптотична стійкість в цілому положення рівноваги  $x(t) \equiv 0$ ,  $\sigma(t) \equiv 0$  системи (40) при довільній функції  $f(\sigma)$ , що задовольняє умовам (41), отримала назву абсолютної стійкості. Розглянемо ситуацію, коли матриця  $A$  системи (40) точно не відома і рівняння мають вигляд

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + bf(\sigma(t)), \quad \dot{\sigma}(t) = c^T x(t) - \rho f(\sigma(t)). \quad (42)$$

Тут

$$\Delta A = \{\Delta a_{ij}\}, \quad |\Delta a_{ij}| \leq \alpha_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (43)$$

Асимптотична стійкість нульового положення рівноваги системи (42) при довільній фіксованій матриці  $\Delta A$ , елементи якої задовольняють умовам (43), називається абсолютною інтервальною стійкістю. Для систем виду (42) необхідних і достатніх умов абсолютної інтервальної стійкості, наскільки відомо автору, не існує.

В даному розділі отримані достатні умови абсолютної інтервальної стійкості систем такого вигляду з запізненням. При дослідженні використовується функція Ляпунова виду "квадратична форма плюс інтеграл від нелінійності"

$$V_0(x, \sigma) = x^T H x + \int_0^\sigma f(\xi) d\xi. \quad (44)$$

Для неї справедливі нерівності типу нерівностей квадратичних форм

$$\lambda_{\min}(\overline{H}) |x_\sigma|^2 \leq V_0(x, \sigma) \leq \lambda_{\max}(\overline{H}) |x_\sigma|^2, \quad (45)$$

де

$$\lambda_{\min}(\overline{H}) = \min\{\lambda_{\min}(H), k_1/2\}, \quad \lambda_{\max}(\overline{H}) = \max\{\lambda_{\max}(H), k_2/2\}$$

Тут  $\lambda_{\min}(H)$ ,  $\lambda_{\max}(H)$  – мінімальне і максимальне власні числа симетричної додатно визначеної матриці  $H$ .

Позначимо через  $\partial V_0^\alpha$  поверхню рівня  $V_0(x, \sigma) = \alpha$  функції Ляпунова  $V_0(x, \sigma)$ , а через  $V_0^\alpha$  область, яку вона обмежує, тобто

$$\partial V_0^\alpha = \{(x, \sigma) : V_0(x, \sigma) = \alpha\}, \quad V_0^\alpha = \{(x, \sigma) : V_0(x, \sigma) < \alpha\}.$$

Тут і далі

$$\begin{aligned}
x_\sigma(t) &= (x(t), \sigma(t)), \quad |x_\sigma(t)| = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2(t) + \sigma^2(t) \right\}^{1/2}, \\
|A| &= \left\{ \lambda_{\max}(AA^T) \right\}^{1/2}, \quad \varphi(\bar{H}) = \lambda_{\max}(\bar{H}) / \lambda_{\min}(\bar{H}), \\
\|\Delta A\| &= \max \left\{ |\Delta a_{ij}| : |\Delta a_{ij}| \leq \alpha_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n} \right\}, \\
C[A, H] &= \begin{bmatrix} -A^T H - HA & -(Hb + 1/2c) \\ -(Hb + 1/2c)^T & \rho \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{46}$$

Покажемо, що асимптотична стійкість має експоненціальний характер, тобто існують сталі  $N > 0$ ,  $\gamma > 0$ , при яких

$$|x_\sigma(t)| < N|x_\sigma(0)| \exp\{-\gamma t/2\}, \quad t > 0.$$

При доведенні цього факту вже будемо використовувати неавтономну функцію Ляпунова

$$V(x, \sigma, t) = e^{\gamma t} V_0(x, \sigma). \tag{47}$$

Відповідно будемо позначати  $\partial V^{\alpha, \gamma}$  і  $V^{\alpha, \gamma}$  поверхні рівня  $V(x, \sigma, t) = \alpha$  і область в розширеному фазовому просторі, яку вона обмежує

$$\partial V^{\alpha, \gamma} = \{(x, \sigma, t) : e^{\gamma t} V_0(x, \sigma) = \alpha\}, \quad V^{\alpha, \gamma} = \{(x, \sigma, t) : e^{\gamma t} V_0(x, \sigma) < \alpha\}$$

Попередньо доведемо ряд допоміжних результатів.

**Лема 5.** Нехай існує  $\alpha > 0$ , при якому інтегральна крива  $(x_\sigma(t), t)$  в розширеному фазовому просторі  $R^{n+1} \times R$  належить  $V^{\alpha, \gamma}$ . Тоді справедлива нерівність

$$|x_\sigma(t)| < \sqrt{\alpha / \lambda_{\min}(\bar{H})} e^{-\gamma t}, \quad \gamma > 0. \tag{48}$$

*Доведення.* Як витікає з виду функції Ляпунова, будуть виконуватися двосторонні нерівності

$$e^{\gamma t} \lambda_{\min}(\bar{H}) |x_\sigma(t)|^2 \leq e^{\gamma t} V_0(x(t), \sigma(t)) < \alpha.$$

Звідси витікає співвідношення (48).

**Лема 6.** Нехай існує симетрична позитивно визначена матриця  $H$ , при якій матриця  $C[A, H]$  позитивно визначена. Тоді при

$$|\Delta A| < \lambda_{\min}(C[A, H]) / 2|H| \tag{49}$$

система (40) інтервально стійка, і для її розв'язків справедлива наступна експоненційна оцінка збіжності

$$\begin{aligned}
|x_\sigma(t)| &< \sqrt{\varphi(\bar{H})} |x_\sigma(0)| \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma t\right\}, \quad t > 0, \\
\gamma &< \frac{1}{\lambda_{\max}(\bar{H})} (\lambda_{\min}(C[A, H]) - 2|H|\|\Delta A\|) \min\{1, k_1^2\},
\end{aligned} \tag{50}$$

*Доведення.* Покладемо  $\alpha = \lambda_{\max}(\bar{H}) |x_\sigma(0)|^2$ . Тоді  $(x_\sigma(0), 0) \in V^{\alpha, \gamma} \cup \partial V^{\alpha, \gamma}$ . Покажемо, що  $(x_\sigma(t), t) \in V^{\alpha, \gamma}$  при всіх  $t > 0$ .

Якщо матриця  $H$  позитивно визначена і функція  $f(\sigma)$  задовольняє умовам (41), тоді функція  $V(x, \sigma, t)$  виду (47) буде позитивно визначеною. Її повна похідна в силу системи (42) має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), \sigma(t), t) &= \gamma V(x(t), \sigma(t), t) - e^{\gamma t} (x^T(t), f(\sigma(t))) \times \\ &\times \{C[A, H] + \Delta C[\Delta A, H]\} (x^T(t), f(\sigma(t)))^T, \end{aligned}$$

де

$$\Delta C[\Delta A, H] = \begin{bmatrix} -\Delta A^T H - H \Delta A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Виберемо матрицю  $\Delta A$  таким чином, щоб

$$\lambda_{\min}(C[A, H]) - \lambda_{\max}(\Delta C[\Delta A, H]) > 0. \quad (51)$$

За умовою матриця  $C[A, H]$  позитивно визначена. Тому, якщо елементи матриці  $\Delta A$  такі, що

$$\lambda_{\min}(C[A, H]) > 2|H\|\|\Delta A\|,$$

тоді нерівність (51) буде виконуватися тим паче. А тоді для похідної функції Ляпунова буде справедливо

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), \sigma(t), t) &< -\{\lambda_{\min}(C[A, H]) - 2|H\|\|\Delta A\|\} \times \\ &\times (|x(t)|^2 + k_1^2 \sigma^2(t)) + \gamma \lambda_{\max}(\bar{H})(|x(t)|^2 + \sigma^2(t)). \end{aligned}$$

І при величинах  $\gamma$ , що задовольняють умові (50), повна похідна функції Ляпунова буде негативно визначеною. Це значить, що вектор швидкості руху направлено чітко всередину  $V^{\alpha, \gamma}$  і  $(x_\sigma(t), t) \in V^{\alpha, \gamma}$  при всіх  $t > 0$ .

Нехай існує не тільки неточність в елементах матриці  $\Delta A$ , а й в аргументі при фазовій змінній, тобто система описується диференціальними рівняннями з запізнюючимся аргументом

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t - \tau) + bf(\sigma(t)) \\ \dot{\sigma}(t) = c^T x(t) - \rho f(\sigma(t)). \end{cases} \quad (52)$$

Матриці  $\Delta A$  і  $\Delta B$  можуть приймати свої значення з деяких фіксованих інтервалів

$$\begin{aligned} \Delta A &= \{\Delta a_{ij}\}, \quad |\Delta a_{ij}| \leq \alpha_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \\ \Delta B &= \{\Delta b_{ij}\}, \quad |\Delta b_{ij}| \leq \beta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (53)$$

Отримаємо умови інтервальної стійкості системи (52). Будемо використовувати наступні позначення

$$\begin{aligned} \|x_\sigma(t)\|_\tau &= \max_{-\tau \leq s < 0} \{|x(t+s)|\}, \\ L_3(H) &= \lambda_{\min}(C[A + B, H]) - 2|HB|(1 + \sqrt{\varphi(\bar{H})}), \end{aligned}$$

$$C[A+B, H] = \begin{bmatrix} -(A+B)^T H - H(A+B) & -(Hb+1/2c) \\ -(Hb+1/2c)^T & \rho \end{bmatrix},$$

$$\Delta C[\Delta A + \Delta B, H] = \begin{bmatrix} -(\Delta A + \Delta B)^T H - H(\Delta A + \Delta B) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Теорема 16.** Нехай існує позитивно визначена матриця  $H$ , при якій виконується

$$\Psi(0) > 0, \quad \Psi(0) = L(H) - 2|H| \left[ \|\Delta A\| + (2 + \sqrt{\varphi(\bar{H})}) \|\Delta B\| \right]. \quad (54)$$

Тоді система (52) абсолютно інтервально стійка при будь-якому довільному запізненні  $\tau > 0$  і для її розв'язків  $x_\sigma(t)$  буде виконуватися  $|x_\sigma(t)| < \varepsilon$ ,  $t > 0$ , як тільки  $\|x_\sigma(t)\|_\tau < \delta(\varepsilon)$ ,  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / \sqrt{\varphi(\bar{H})}$ .

*Доведення.* Розглянемо повну похідну функції Ляпунова (44) в силу системи з запізненням (52). Для неї справедливі нерівності

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), \sigma(t)) &\leq -(x^T(t), f(\sigma(t))) \{C[A+B, H] + \Delta C[\Delta A + \Delta B, H]\} \times \\ &\times (x^T(t), f(\sigma(t)))^T + 2|H(B + \Delta B)| |x(t)| |x(t) - x(t-\tau)|. \end{aligned}$$

Нехай початкові умови для розв'язку  $x_\sigma(t)$  системи (52) обрані таким чином, що  $\|x_\sigma(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon)$ , де  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / \sqrt{\varphi(\bar{H})}$ . Покладемо  $\alpha = \varepsilon^2 \lambda_{\min}(\bar{H})$ . Тоді для довільного  $\varepsilon > 0$  буде виконуватися  $x_\sigma(t) \in V_0^\alpha$ ,  $-\tau \leq t \leq 0$ . Покажемо, що  $x_\sigma(t) \in V_0^\alpha$  і при  $t > 0$ .

Нехай, від зворотного, це не так і існує момент часу  $T > 0$ , при якому  $x_\sigma(T) \in \partial V_0^\alpha$ . Тоді, як витікає з оцінок квадратичних форм, буде виконуватись

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\bar{H}) |x_\sigma(T-\tau)|^2 &\leq V_0(x(T-\tau), \sigma(T-\tau)) < V_0(x(T), \sigma(T)) \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(\bar{H}) |x_\sigma(T)|^2. \end{aligned}$$

Звідси

$$|x_\sigma(T-\tau)| < \sqrt{\varphi(\bar{H})} |x_\sigma(T)|$$

Й отже

$$|x(T-\tau)| < \sqrt{\varphi(\bar{H})} |x(T)|.$$

В цьому випадку для оцінки значення повної похідної функції Ляпунова в момент  $t = T$  буде виконуватися нерівність

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(x(T), \sigma(T)) &< -\left\{ \lambda_{\min}(C[A+B, H]) - 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) \right\} \times \\ &\times [|x(T)|^2 + f^2(\sigma(T))] + 2(|HB| + |H\|\Delta B\|)(1 + \sqrt{\varphi(\bar{H})}) |x(T)|^2 \end{aligned}$$

Або

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(x(T), \sigma(T)) &< -\left\{ \lambda_{\min}(C[A+B, H]) - 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) - \right. \\ &- \left. 2(|HB| + |H\|\Delta B\|)(1 + \sqrt{\varphi(\bar{H})}) \right\} |x(T)|^2 - \left\{ \lambda_{\min}(C[A+B, H]) - \right. \\ &- \left. 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) \right\} f^2(\sigma(T)) \end{aligned}$$

І при виконанні умови (54) повна похідна функції  $V_0(x, \sigma)$  в момент  $t = T$  буде негативно визначеною. З цього витікає асимптотична стійкість системи з запізненням (52) при всіх матрицях  $\Delta A, \Delta B$ , що задовольняють умові (53).

Теорема доведена.

Обчислимо показники експоненційного затухання розв'язків системи (52).

**Теорема 17.** Нехай існує позитивно визначена матриця  $H$ , при якій виконується нерівність (54). Тоді при довільному запізненні  $\tau > 0$  для розв'язків  $x_\sigma(t)$  системи (52) справедлива наступна експоненційна оцінка збіжності

$$|x_\sigma(t)| < \sqrt{\varphi(\bar{H})} \|x_\sigma(0)\|_\tau \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma t\right\}, \quad t > 0, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \min\{\gamma_1, \gamma_2\}, \quad \gamma_1 = \Psi(0)\gamma^* [\Psi(0) + \gamma^* \lambda_{\max}(\bar{H})]^{-1}, \\ \gamma^* &= \frac{2}{\tau} \ln \left[ \frac{1}{\sqrt{\varphi(\bar{H})}} \left( \frac{\lambda_{\min}(C[A+B, H]) - 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|)}{2(|HB| + |H\|\|\Delta B\|)} - 1 \right) \right], \\ \gamma_2 &= \frac{\lambda_{\min}(C[A+B, H]) - 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|)}{\lambda_{\max}(\bar{H})}. \end{aligned} \quad (56)$$

*Доведення.* Покладемо  $\alpha = \lambda_{\max}(\bar{H}) \|x_\sigma(0)\|_\tau^2$ . Тоді при  $-\tau \leq t \leq 0$  буде  $(x_\sigma(0), 0) \in V^{\alpha, \gamma} \cup \partial V^{\alpha, \gamma}$ . Покажемо, що  $(x_\sigma(t), t) \in V^{\alpha, \gamma}, t > 0$ , якщо  $\gamma$  обрати згідно (56). Обчисливши повну похідну функції Ляпунова виду (47) в силу системи (52), отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), \sigma(t), t) &\leq \gamma V(x(t), \sigma(t), t) - e^{\gamma t} (x^t(t), f(\sigma(t))) \times \\ &\times \{C[A+B, H] + \Delta C[\Delta A + \Delta b, H]\} (x^T(t), f(\sigma(t)))^T + \\ &+ 2e^{\gamma t} |H(B + \Delta B)| \|x(t)\| |x(t) - x(t-\tau)|. \end{aligned}$$

Нехай, від зворотного, при деякому  $T > 0$  буде  $(x_\sigma(T), T) \in \partial V^{\alpha, \gamma}$ . Тоді, як витікає з оцінок квадратичних форм,

$$\begin{aligned} e^{\gamma(T-\tau)} \lambda_{\min}(\bar{H}) |x_\sigma(T-\tau)|^2 &\leq V(x(T-\tau), \sigma(T-\tau), T-\tau) < \\ < V(x(T), \sigma(T), T) &\leq e^{\gamma T} \lambda_{\max}(\bar{H}) |x_\sigma(T)|. \end{aligned}$$

Звідси

$$|x_\sigma(T-\tau)| < e^{\gamma\tau/2} \sqrt{\varphi(\bar{H})} |x_\sigma(T)|.$$

Й отже

$$|x(T-\tau)| < e^{\gamma\tau/2} \sqrt{\varphi(\bar{H})} |x(T)|. \quad (57)$$

Використовуючи нерівність (57), отримаємо

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x(T), \sigma(T), T) &< -\left\{ \lambda_{\min}(C[A+B, H]) - 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) - \right. \\
&- 2(|HB| + |H\|\Delta B\|) \left( 1 + e^{\gamma\tau/2} \sqrt{\varphi(\bar{H})} \right) - \gamma \lambda_{\max}(\bar{H}) \left. \right\} * \\
&* e^{\gamma T} |x(T)|^2 - \\
&- \left\{ \lambda_{\min}(C[A+B, H]) - 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) \kappa_1^2 - \gamma \lambda_{\max}(\bar{H}) \right\} * \\
&* e^{\gamma T} |x(T)|^2.
\end{aligned} \tag{58}$$

Знайдемо  $\gamma > 0$  таким чином, щоб виконувалися нерівності

$$\begin{aligned}
&\lambda_{\min}(C[A+B, H]) - 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) - 2(|HB| + \\
&+ |H\|\Delta B\|)(1 + e^{\gamma\tau/2} \sqrt{\varphi(\bar{H})}) > \gamma \lambda_{\max}(\bar{H}), \\
&\lambda_{\min}(C[A+B, H]) - 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) > \gamma \lambda_{\max}(\bar{H}) / \kappa_1^2.
\end{aligned} \tag{59}$$

Перепишемо першу з них у вигляді

$$\begin{aligned}
\Psi(\gamma) > \gamma \lambda_{\max}(\bar{H}), \quad \Psi(\gamma) = \lambda_{\min}(C[A+B, H]) - \\
- 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) - 2(|HB| + |H\|\Delta B\|) \left( 1 + e^{\gamma\tau/2} \sqrt{\varphi(\bar{H})} \right).
\end{aligned} \tag{60}$$

Функція  $\Psi(\gamma)$  є опуклою догори, монотонно спадаючою і задовольняє умовам

$$\begin{aligned}
\Psi(0) = L(H) - 2|H\|\Delta A\| - 2|H\|\Delta B\|(2 + \sqrt{\varphi(\bar{H})}) > 0, \quad \Psi(\gamma^*) = 0, \\
\gamma^* = \frac{2}{\gamma} \ln \left[ \frac{1}{\sqrt{\varphi(\bar{H})}} \left( \frac{\lambda_{\min}(C[A+B, H]) - 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|)}{2|HB| + |H\|\Delta B\|} - 1 \right) \right].
\end{aligned}$$

Замінімо функцію  $\Psi(\gamma)$  відрізком прямої, що з'єднує точки  $(0, \Psi(0))$  і  $(\gamma^*, 0)$ , тобто

$$\tilde{\Psi}(\gamma) = \Psi(0) \left( 1 - \frac{\gamma}{\gamma^*} \right).$$

Оскільки функція  $\Psi(\gamma)$  опукла догори, то для розв'язку рівняння

$$\Psi(0) \left( 1 - \frac{\gamma}{\gamma^*} \right) = \gamma \lambda_{\max}(\bar{H}) \tag{61}$$

нерівність (60) буде виконуватися й поготів. Розв'язавши (61), отримаємо

$$\gamma_1 = \Psi(0) \gamma^* [\Psi(0) + \gamma^* \lambda_{\max}(\bar{H})]^{-1}.$$

Таким чином при обчисленому  $\gamma_1$  буде виконуватися перша з нерівностей (59). Друга буде виконуватися при

$$\gamma_2 \leq [\lambda_{\min}(C[A+B, H]) - 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) \kappa_1^2] / \lambda_{\max}(\bar{H}).$$

І при  $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$  повна похідна функції  $V(x, \sigma, t)$  буде негативно визначеною. Звідси  $(x_\sigma(T), T) \in V^{\alpha, \gamma}$  і при  $t \geq T$ . Таким чином виконуються умови леми 5 і, враховуючи обране  $\alpha = \lambda_{\max}(\bar{H}) \|x_\sigma(0)\|_\tau^2$ , отримаємо твердження теореми.

### 3.4. Системи непрямого регулювання. Мале запізнення

Як і в попередньому, в цьому розділі буде розглядатися нелінійна система регулювання, що описується диференціальними рівняннями з запізнюючимся аргументом виду (52)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t - \tau) + bf(\sigma(t)) \\ \dot{\sigma}(t) &= c^T x(t) - \rho f(\sigma(t))\end{aligned}$$

Тут  $t \geq 0$ ,  $b, c, x(t) \in R^n$ ,  $\rho > 0$ ;  $A, B$  – квадратні матриці з сталими коефіцієнтами. Елементи матриці

$$\Delta A = \{\Delta a_{ij}\}, \quad \Delta B = \{\Delta b_{ij}\}, \quad i, j = \overline{1, n}$$

Можуть приймати свої значення з деяких інтервалів

$$|\Delta a_{ij}| \leq \alpha_{ij}, \quad |\Delta b_{ij}| \leq \beta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Функція  $f(\sigma)$  знаходиться в межах заданого кута першої та третьої координатних чвертей (41).

В даному розділі приведено достатні умови інтервальної абсолютної стійкості системи (52) для достатньо малого запізнення, що залежить від параметрів системи. При дослідженні використовується функція Ляпунова виду Лур'є-Постнікова, тобто виду суми “квадратична форма і інтеграл від нелінійності”

$$V_0(x, \sigma) = x^T Hx + \int_0^\sigma f(\xi) d\xi$$

Якщо матриця  $H$ , що входить в функцію Ляпунова, позитивно визначена і функція  $f(\sigma)$  задовольняє умовам «сектора», тоді для  $V_0(x, \sigma)$  справедлива двостороння нерівність

$$\lambda_{\min}(\overline{H})|x_\sigma|^2 \leq V_0(x, \sigma) \leq \lambda_{\max}(\overline{H})|x_\sigma|^2,$$

де

$$x_\sigma^T = (x^T, \sigma), \quad |x_\sigma| = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sigma^2 \right\}^{1/2},$$

$$\lambda_{\min}(\overline{H}) = \min\{\lambda_{\min}(H), k_1/2\},$$

$$\lambda_{\max}(\overline{H}) = \max\{\lambda_{\max}(H), k_2/2\},$$

$\lambda_{\max}(H)$ ,  $\lambda_{\min}(H)$  – максимальне і мінімальне власні числа матриці  $H$ .

Показано, що при зроблених припущеннях розв'язки затухають за експоненціальним законом. При одержанні коефіцієнтів експоненціального затухання використовується неавтономна функція Ляпунова

$$V(x, \sigma, t) = e^{\rho t} V_0(x, \sigma).$$

**Лема 7.** Нехай розв'язок  $x_\sigma(t)$  системи (52) задовольняє початкову умову  $\|x_\sigma(0)\|_\tau < \delta$ . Тоді на проміжку  $0 \leq t \leq \tau$  виконується нерівність

$$|x_\sigma(t)| < N(t)\delta e^{Lt},$$

$$N(t) = \left\{1 + (|B| + \|\Delta B\|)t\right\}^2 + 1\}^{1/2},$$

де  $|L|$  – норма матриці

$$L = \begin{bmatrix} |A| + \|\Delta A\| & k_2|b||c| \\ |c| & k_2\rho \end{bmatrix}. \quad (62)$$

*Доведення.* Запишемо систему в інтегральному вигляді

$$x(t) = x(0) + \int_0^t [(A + \Delta A)x(s) + (B + \Delta B)x(s - \tau) + bf(\sigma(s))] ds,$$

$$\sigma(t) = \sigma(0) + \int_0^t [c^T x(s) - \rho f(\sigma(s))] ds.$$

На проміжку  $0 \leq t \leq \tau$  буде виконуватися нерівність

$$|x_\sigma(t)| < \left\{1 + |B + \Delta B|t\right\}^2 + 1\}^{1/2} \delta + |L| \int_0^t |x_\sigma(s)| ds.$$

Використовуючи лему Гронуола-Беллмана, отримаємо нерівність леми 7.

**Лема 8.** Нехай для розв'язку  $x_\sigma(t)$  системи (52) на проміжку  $T - 2\tau \leq t < T$  виконується

$$x_\sigma(t) \in V_0^\alpha, \quad x_\sigma(T) \in \partial V_0^\alpha.$$

Тоді справедлива нерівність

$$|x(T) - x(T - \tau)| < l(0)\sqrt{\varphi(\bar{H})}\tau|x_\sigma(T)|,$$

$$l(0) = (|A| + |B|) + (\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) + k_2|b||c|. \quad (63)$$

*Доведення.* Як витікає з умов леми і вигляду функції Ляпунова  $V_0(x, \sigma)$ , виконуються двосторонні нерівності

$$\lambda_{\min}(\bar{H})|x_\sigma(t)|^2 \leq V_0(x(t), \sigma(t)) < V_0(x(T), \sigma(T)) \leq \lambda_{\max}(\bar{H})|x_\sigma(T)|^2.$$

Звідси справедливі оцінки

$$|x_\sigma(t)| < \sqrt{\varphi(\bar{H})}|x_\sigma(T)|, \quad |x(t)| < \sqrt{\varphi(\bar{H})}|x_\sigma(T)|,$$

$$|\sigma(t)| < \sqrt{\varphi(\bar{H})}|x_\sigma(T)|.$$

Для першого рівняння системи буде мати місце інтегральне представлення

$$x(T) = x(T - \tau) + \int_{T-\tau}^T [(A + \Delta A)x(s) + (B + \Delta B)x(s - \tau) + bf(\sigma(s))] ds.$$

Звідси

$$|x(T) - x(T - \tau)| \leq \{|A + \Delta A| + |B + \Delta B| + k_2|b||c|\} \sqrt{\varphi(\bar{H})}|x_\sigma(T)|\tau,$$

тобто отримали твердження (63) леми 8.

На основі приведених лем отримаємо наступні умови інтервальної абсолютної стійкості.

**Теорема 18.** Нехай існує позитивно визначена матриця  $H$ , така що

$$L_4(H) > 0.$$

Тоді при  $\tau < \tau_0$ , де

$$\tau_0 = \frac{L_4(H) \min\{1, k_1^2\}}{2(|HB| + |H\|\Delta B\|)l(0)\sqrt{\varphi(H)}} \quad (64)$$

система (52) абсолютно інтервально стійка. Причому для довільного розв'язку  $x_\sigma(t)$  системи (52) буде виконуватися  $\|x_\sigma(t)\| < \varepsilon$ ,  $t > 0$ , якщо  $\|x_\sigma(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon, \tau)$ , де

$$\delta(\varepsilon, \tau) = e^{-L\tau} \frac{\varepsilon}{N(\tau)\sqrt{\varphi(H)}}, \quad (65)$$

$$L_4(H) = \lambda_{\min}(C[A + B, H]) - 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|),$$

Тут

$$C[A + B, H] = \begin{bmatrix} -(A + B)^T - H(A + B) & -\left(Hb + \frac{1}{2}c\right) \\ -\left(Hb + \frac{1}{2}c\right)^T & \rho \end{bmatrix}.$$

*Доведення.* Нехай  $x_\sigma(t)$  довільний розв'язок інтервальної системи з запізненням, для якого виконується  $\|x_\sigma(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon, \tau)$ , де величина  $\delta(\varepsilon, \tau)$  обрана згідно (65). Тоді, як витікає з результатів леми 7, на наступному кроці  $0 < t < \tau$  буде виконуватися

$$\|x_\sigma(t)\|_{2\tau} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varphi(H)}}.$$

Покажемо, що  $\|x_\sigma(t)\| < \varepsilon$  і при  $t > \tau$ . Нехай це не так і, від зворотного, існує  $T > \tau$ , при якому  $x_\sigma(T) \in \partial V_0^\alpha$ ,  $\alpha = \varepsilon^2 \sqrt{\lambda_{\min}(\bar{H})}$ .

Обчислимо повну похідну функції Ляпунова  $V_0(x, \sigma)$  в силу інтервальної системи з запізненням

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), \sigma(t)) &\leq -(x^T(t), f(\sigma(t)))\{C[A + B, H] + \Delta C[\Delta A + \Delta B, H]\} \times \\ &\times (x^T(t), f(\sigma(t)))^T + 2|H(B + \Delta B)|\|x(t)\|\|x(t) - x(t - \tau)\|. \end{aligned}$$

Тут

$$C[\Delta A + \Delta B, H] = \begin{bmatrix} -(\Delta A + \Delta B)^T H - H(\Delta A + \Delta B) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Як витікає з припущення теореми, при  $t = T$  відбувається перший вихід розв'язку  $x_\sigma(t)$  на границю  $\partial V_0^\alpha$ . Тому виконуються умови леми 8 і, використовуючи нерівності (63), отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(T), \sigma(T)) &< -\{\lambda_{\min}(C[A + B, H]) - 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|)\} * \\ &* \left[ \|x(T)\|^2 + f^2(\sigma(T)) \right] + 2(|HB| + |H\|\Delta B\|)l(0)\sqrt{\varphi(H)}\tau \|x_\sigma(T)\|^2. \end{aligned}$$

Використовуючи позначення  $L_4(H)$ , наведене в (65), перепишемо отриманий вираз у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(x(T), \sigma(T)) &< -\left\{M(H) \min\{1, k_1\} - 2(|HB| + |H\|\Delta B\|)l(0)\sqrt{\varphi(\bar{H})}\tau\right\}^* \\ & * |x_\sigma(T)|^2. \end{aligned}$$

При  $\tau < \tau_0$ , де  $\tau_0$  задовольняє співвідношенню (64), повна похідна функції Ляпунова  $V_0(x, \sigma)$  в момент  $t = T$  буде негативно визначеною, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового положення рівноваги.

Покажемо, що при виконанні умов теореми 18 розв'язок системи (52) збігається за експоненційним законом. Для отримання оцінок збіжності використовується неавтономна функція Ляпунова.

$$V(x, \sigma, t) = e^{\gamma t} V_0(x, \sigma, t).$$

Позначимо через  $\partial V^{\alpha, \gamma}$  поверхню рівня функції Ляпунова, а  $V^{\alpha, \gamma}$  - область, яку вона обмежує в розширеному фазовому просторі, тобто

$$\begin{aligned} \partial V^{\alpha, \gamma} &= \{(x, \sigma, t) : V(x, \sigma, t) = \alpha\}, \\ V^{\alpha, \gamma} &= \{(x, \sigma, t) : V(x, \sigma, t) < \alpha\}, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Мають місце наступні результати.

**Лема 9.** Нехай для інтегральної кривої  $(x_\sigma(t), t)$  системи (52) на проміжку  $T - 2\tau \leq t < T$  виконується  $(x_\sigma(t), t) \in V^{\alpha, \gamma}$ , а при  $t = T$  буде  $(x_\sigma(T), T) \in \partial V^{\alpha, \gamma}$ . Тоді справедлива нерівність

$$\begin{aligned} |x(T) - x(T - \tau)| &< l(\gamma)\sqrt{\varphi(\bar{H})}\tau|x(T)|, \\ l(\gamma) &= e^{\gamma\tau/2} \left[ (|A| + e^{\gamma\tau/2}|B|) + (\|\Delta A\| + e^{\gamma\tau/2}\|\Delta B\|) + k_2|b\|c \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

*Доведення.* Як витікає з умов лема 9 і виду функції Ляпунова, при  $T - 2\tau \leq t < T$  буде виконуватися

$$\begin{aligned} e^{\gamma t} \lambda_{\min}(\bar{H}) |x_\sigma(t)|^2 &\leq e^{\gamma t} V_0(x(t), \sigma(t)) < \\ < e^{\gamma T} V_0(x(T), \sigma(T)) &\leq e^{\gamma T} \lambda_{\max}(\bar{H}) |x_\sigma(T)|^2. \end{aligned}$$

Тому

$$|x_\sigma(t)| < e^{\frac{1}{2}\gamma(T-t)} \sqrt{\varphi(\bar{H})} |x_\sigma(T)|.$$

Звідси отримуємо, що

$$|x(t)| < e^{\frac{1}{2}\gamma(T-t)} \sqrt{\varphi(\bar{H})} |x_\sigma(T)|, \quad |\sigma(t)| < e^{\frac{1}{2}\gamma(T-t)} \sqrt{\varphi(\bar{H})} |x_\sigma(T)|.$$

І при  $T - 2\tau \leq t < T$  маємо

$$|x(t)| < e^{\gamma\tau} \sqrt{\varphi(\bar{H})} |x_\sigma(T)|, \quad |\sigma(t)| < e^{\gamma\tau} \sqrt{\varphi(\bar{H})} |x_\sigma(T)|.$$

Для першого рівняння системи отримуємо

$$x(T) = x(T - \tau) + \int_{T-\tau}^T \{(A + \Delta A)x(s) + (B + \Delta B)x(s - \tau) + bf(\sigma(s))\} ds.$$

Звідси отримуємо

$$|x(T) - x(T - \tau)| < e^{\frac{1}{2}\gamma\tau} \left\{ |A + \Delta A| + e^{\frac{1}{2}\gamma\tau} |B + \Delta B| + k_2|b\|c \right\} \sqrt{\varphi(\bar{H})}\tau |x_\sigma(T)|,$$

тобто отримуємо нерівність (66).

Одержимо оцінки експоненціальної збіжності розв'язків наступного вигляду.

**Теорема 19.** Нехай існує позитивно визначена матриця  $H$ , така що

$$L_4(H) > 0.$$

Тоді при  $\tau < \tau_0$  для розв'язків  $x_\sigma(t)$  справедлива експоненціальна оцінка збіжності

$$|x_\sigma(t)| \leq \begin{cases} N(t)\|x(0)\|_\tau e^{L_4 t}, & \text{при } 0 \leq t \leq \tau, \\ N(\tau)\|x(0)\|_\tau \sqrt{\varphi(\bar{H})} e^{L_4|\tau - \gamma(t-\tau)/2|}, & \text{при } t > \tau \end{cases}, \quad (67)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\Psi(0)\gamma^*}{\Psi(0) + \lambda_{\max}(\bar{H}) \min\{1, k_1^2\} \gamma^*}, \\ \gamma^* &= \frac{2}{\tau} \ln \left[ \frac{\sqrt{a^2 + 4b(a+b+R)} - a}{2b} \right], \\ R &= \frac{\Psi(0)}{2(|HB| + |H\|\Delta B\|)\sqrt{\varphi(\bar{H})}}, \\ a &= |A| + \|\Delta A\| + k_2|b|c, \quad b = |B| + \|\Delta B\|, \\ \Psi(0) &= L_4(H) \min\{1, k_1^2\} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right). \end{aligned} \quad (68)$$

*Доведення.* Перша частина нерівностей (67) витікає з результатів леми 7. Отримаємо другу частину нерівностей. Покладемо

$$\alpha > [N(\tau)\|x_\sigma(0)\|_\tau]^2 \lambda_{\max}(\bar{H}).$$

Тоді при  $-\tau \leq t \leq \tau$  буде виконуватися  $(x_\sigma(t), t) \in V^{\alpha, \gamma}$ . Покажемо, що  $(x_\sigma(t), t) \in V^{\alpha, \gamma}$  і при  $t > \tau$ , якщо величину  $\gamma$  обирати згідно співвідношення (68). Обчислимо повну похідну функції Ляпунова  $V(x, \sigma, t)$  вздовж розв'язків інтервальної системи з запізненням

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), \sigma(t), t) &\leq \gamma V(x(t), \sigma(t), t) - e^{-\gamma t} \{ \lambda_{\min}(C[A+B, H]) - \\ &- 2|H|(\|A\| + \|B\|) \|x(t)\|^2 + f^2(\sigma(t)) \} + \\ &+ 2e^{\gamma t} (|HB| + |H\|\Delta B\|) x(t) \|x(t) - x(t-\tau)\|. \end{aligned}$$

Нехай, від зворотного, при деякому  $T > \tau$  відбудеться вихід розв'язку на поверхню рівня, тобто  $(x_\sigma(T), T) \in \partial V^{\alpha, \gamma}$ . Тоді виконуються умови леми 9 і справедлива нерівність (66). І для повної похідної в момент  $t = T$  отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(T), \sigma(T), T) &< -e^{\gamma T} \{ L_{14}(H) - \gamma \lambda_{\max}(\bar{H}) \|x(T)\|^2 + f^2(\sigma(T)) \} + \\ &+ 2e^{\gamma T} (|HB| + |H\|\Delta B\|) \gamma \sqrt{\varphi(\bar{H})} \tau \|x_{l\sigma}(T)\|^2. \end{aligned}$$

Або

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(T), \sigma(T), T) &< -e^{\gamma T} \left\{ L_4(H) - \gamma \lambda_{\max}(\bar{H}) \right\} \min\{1, k_1^2\} - \\ &- 2(|HB| + |H\|\Delta B\|)l(\gamma)\sqrt{\varphi(\bar{H})\tau} x_\sigma(T)^2. \end{aligned}$$

Знайдемо  $\gamma > 0$  таким чином, щоб виконувалася нерівність

$$\begin{aligned} L_4(H) \min\{1, k_1^2\} - 2(|HB| + |H\|\Delta B\|)l(\gamma)\sqrt{\varphi(\bar{H})\tau} > \\ > \gamma \lambda_{\max}(\bar{H}) \min\{1, k_1^2\}. \end{aligned}$$

Перепишемо цю нерівність у вигляді

$$\begin{aligned} L_4(H) \min\{1, k_1^2\} - 2(|HB| + |H\|\Delta B\|)l(0)\sqrt{\varphi(\bar{H})\tau} - \\ - 2(|HB| + |H\|\Delta B\|)l(\gamma)\sqrt{\varphi(\bar{H})\tau} (e^{\gamma\tau} - 1) + (|A| + \|\Delta A\|) + \\ + k_2|b|c \left[ e^{\frac{1}{2}\gamma\tau} - 1 \right] \sqrt{\varphi(\bar{H})\tau} > \gamma \lambda_{\max}(\bar{H}) \min\{1, k_1^2\}. \end{aligned}$$

Позначимо

$$\xi = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad 0 < \xi < 1.$$

Тоді отримана нерівність прийме вигляд

$$\begin{aligned} L_4(H) \min\{1, k_1^2\} (1 - \xi) - 2(|HB| + |H\|\Delta B\|)l(\gamma)\sqrt{\varphi(\bar{H})\tau} \times \\ \times \left[ b(e^{\gamma\tau} - 1) + a \left( e^{\frac{1}{2}\gamma\tau} - 1 \right) \right] > \gamma \lambda_{\max}(\bar{H}) \min\{1, k_1^2\}, \end{aligned}$$

При  $\gamma = 0$  отримана нерівність має вигляд

$$L_4(H) \min\{1, k_1^2\} (1 - \xi) > 0$$

І завжди виконується при  $\tau < \tau_0$ . Знайдемо  $\gamma_0 > 0$  таким чином, щоб ця нерівність виконувалася і при  $0 \leq \gamma \leq \gamma_0$ . Функція

$$\begin{aligned} \Psi(\gamma) = L_4(H) \min\{1, k_1^2\} (1 - \xi) - 2(|HB| + |H\|\Delta B\|)l(\gamma)\sqrt{\varphi(\bar{H})\tau} \times \\ \times \left[ b(e^{\gamma\tau} - 1) + a \left( e^{\frac{1}{2}\gamma\tau} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

при фіксованому  $\tau < \tau_0$  за змінною  $\gamma > 0$  являє собою вгнуту, монотонно спадаючу функцію, що задовольняє умовам

$$\begin{aligned} \Psi(0) = L_4(H) \min\{1, k_1^2\} (1 - \xi) > 0, \quad \Psi(\gamma^*) = 0 \\ \gamma^* = \frac{2}{\tau} \ln \left[ \frac{\sqrt{a^2 + 4b(a + b + R)} - a}{2b} \right], \quad R = \frac{\Psi(0)}{2(|HB| + |H\|\Delta B\|)l(\gamma)\sqrt{\varphi(\bar{H})\tau}}. \end{aligned}$$

Замінімо функцію  $\Psi(\gamma)$  прямою, що проходить через точки  $(0, \Psi(0))$  і  $(\gamma^*, 0)$ , тобто

$$\bar{\Psi}(\gamma) = \Psi(0) \left( 1 - \frac{\gamma}{\gamma^*} \right).$$

Для точок  $\gamma$ , при яких справедливо

$$\bar{\Psi}(\gamma) > \gamma \lambda_{\max}(\bar{H}) \min\{1, k_1^2\}$$

в силу вгнутості функції  $\Psi(\gamma)$  відповідна нерівність буде виконуватися тим паче. Розв'язуючи рівняння

$$\Psi(0) \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma^*}\right) = \gamma \lambda_{\max}(\bar{H}) \min\{1, k_1^2\},$$

отримаємо

$$\gamma_0 = \frac{\Psi(0) \gamma^*}{\Psi(0) + \lambda_{\max}(\bar{H}) \min\{1, k_1^2\} \gamma^*}.$$

Таким чином в проміжку  $0 < \gamma \leq \gamma_0$  похідна функції Ляпунова  $V(x, \sigma, t)$  буде негативно визначеною. Отже припущення невірне і  $(x_\sigma(t), t) \in V^{\alpha, \gamma}$  при всіх  $t > 0$ . Звідси витікає експоненціальна збіжність (67).

#### 4. Отримання умов інтервальної стійкості нелінійних систем регулювання з післядією за допомогою функціоналів Ляпунова-Красовського

В попередньому розділі розглядалися нелінійні системи регулювання з нелінійністю секторного вигляду. Було отримано достатні умови абсолютної інтервальної стійкості. В процесі їх отримання використовувався метод скінченновимірних функцій Ляпунова з умовою Разуміхіна[4]. Умова Разуміхіна полегшує побудову функції Ляпунова. За допомогою цього підходу можна оцінити вплив післядії, який залежить від запізнення. Але умови Разуміхіна накладають достатньо жорсткі обмеження на післядію їх використання не завжди може бути ефективним.

В цьому розділі будемо використовувати альтернативний метод функціоналів Ляпунова-Красовського [10,11,22,23]. В якості функціоналів найбільш ефективними є інтегральні добавки квадратичного вигляду. При такому підході спрощуються отримані оцінки. Але тут в якості точки фазового простору розглядається весь відрізок траєкторії, тому підхід не дозволяє оцінити вплив запізнення на абсолютну стійкість. Крім того повна похідна являє собою квадратичну форму від фазової координати та її передісторії. Тому матриця квадратичної форми повної похідної має вдвічі більшу розмірність.

##### 4.1. Системи прямого регулювання з запізненням

В цьому розділі знову будемо розглядати систему прямого регулювання, яка описується диференціальними рівняннями з інтервальними коефіцієнтами та з аргументом, що запізнюється наступного вигляду (25)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t - \tau) + bf(\sigma(t)) \\ \sigma(t) = c^T x(t) \end{cases}$$

Елементи матриць  $\Delta A$  та  $\Delta B$  приймають значення з фіксованих інтервалів (26)

$$\begin{aligned} \Delta A &= \{ \Delta a_{ij} \}, \quad |\Delta a_{ij}| \leq \alpha_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \\ \Delta B &= \{ \Delta b_{ij} \}, \quad |\Delta b_{ij}| \leq \beta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Нелінійна функція  $f(\sigma)$  задовольняє «умову сектора» (20)

$$0 \leq f(\sigma)\sigma \leq k\sigma^2.$$

В попередньому розділі було отримано умови інтервальної стійкості системи (25) з використанням скінченномірної функції Ляпунова (23)

$$V(x) = x^T Hx + \beta \int_0^{\sigma(x)} f(\xi) d\xi, \quad \sigma(x) = c^T x.$$

В даному розділі отримаємо умови інтервальної стійкості системи (25) за допомогою функціонала Ляпунова-Красовського

$$V[x(t)] = x^T(t)Hx(t) + \int_{-\tau}^0 x^T(t+s)Gx(t+s)ds + \beta \int_0^{\sigma(t)} f(\sigma) d\sigma, \quad \sigma(t) = c^T x(t). \quad (69)$$

Попередньо розглянемо систему з запізненням без «інтервальних збурень»

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + bf(\sigma(t)) \\ \sigma(t) = c^T x(t) \end{cases} \quad (70)$$

**Теорема 20.** Нехай існують позитивно визначені матриці  $G$  та  $H$  й параметр  $\beta > 0$ , при яких матриця

$$S[G, H, \beta] = \begin{bmatrix} -A^T H - HA - G & -HB & -[Hb + \frac{1}{2}(\beta A^T + I)c] \\ -B^T H & G & \theta \\ -[Hb + \frac{1}{2}(\beta A^T + I)c]^T & \theta^T & \frac{1}{k} - \beta b^T c \end{bmatrix} \quad (71)$$

позитивно визначена. Тоді система з запізненням без інтервальних збурень (70) абсолютно стійка.

*Доведення.* Оскільки функція  $f(\sigma)$  задовольняє умові (20), тоді для функціонала (69) вірні наступні двосторонні оцінки

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(H)\|x(t)\|^2 + \lambda_{\min}(G)\|x(t)\|_2^2 &\leq V[x(t)] \leq \\ &\leq \left[ \lambda_{\max}(H) + k\beta|c|^2 \right] \|x(t)\|^2 + \lambda_{\max}(G)\|x(t)\|_2^2. \end{aligned} \quad (72)$$

Обчислимо повну похідну функціонала вздовж розв'язків системи. Враховуючи результати попередніх розділів, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t)] &= [Ax(t) + Bx(t - \tau) + bf(\sigma(t))]^T Hx(t) + \\ &+ x^T(t)H[Ax(t) + Bx(t - \tau) + bf(\sigma(t))] + x^T(t)Gx(t) + \\ &+ x^T(t - \tau)Hx(t - \tau) + \beta f(\sigma(t))c^T [Ax(t) + Bx(t - \tau) + bf(\sigma(t))]. \end{aligned}$$

Або

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t)] &= -(x^T(t), x^T(t - \tau), f(\sigma(t)))^* S[G, H, \beta]^* \\ &* (x^T(t), x^T(t - \tau), f(\sigma(t)))^T, \end{aligned}$$

Якщо матриця  $S[G, H, \beta]$  позитивно визначена, то

$$\frac{d}{dt} V[x(t)] \leq -\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) \left( \|x(t)\|^2 + \|x(t - \tau)\|^2 + |f(\sigma(t))|^2 \right).$$

Враховуючи обмеження «сектора» (20), отримаємо

$$\frac{d}{dt} V[x(t)] \leq -\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) \left( \|x(t)\|^2 + \|x(t - \tau)\|^2 \right).$$

Таким чином, з ослабленої теореми Красовського М.М. [23], якщо існують позитивно визначені матриці  $G$ ,  $H$  та  $S[G, H, \beta]$ , при яких

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(H)\|x(t)\|^2 &\leq V[x(t)] \leq \left[ \lambda_{\max}(H) + k\beta|c|^2 \right] \|x(t)\|^2 + \lambda_{\max}(G)\|x(t)\|_2^2. \\ \frac{d}{dt} V[x(t)] &\leq -\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) \|x(t)\|^2, \end{aligned}$$

то система з запізненням абсолютно стійка.

Далі отримаємо умови абсолютної інтервальної стійкості системи (25).

**Теорема 21.** Нехай існують позитивно визначені матриці  $G$  та  $H$  й параметр  $\beta > 0$ , при яких виконується нерівність

$$\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) > \|\Delta A\|H + \sqrt{\|\Delta A\|^2|H|^2 + \|\Delta B\|^2|H|^2 + \frac{1}{4}\beta^2\|\Delta A\|^2|c|^2} \quad (73)$$

Тоді система (25) абсолютно інтервально стійка.

*Доведення.* Як витікає з вигляду функціонала (69), для нього справедливі двосторонні оцінки (72). Обчислимо повну похідну функціонала вздовж розв'язків систем з «інтервальними збуреннями». Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t)] &= -(x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t)))S[G, H, \beta]^* \\ & * (x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t)))^T + (x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t)))\Delta S[G, H]^* \\ & * (x^T(t)x^T(t-\tau), f(\sigma(t)))^T, \end{aligned}$$

де

$$\Delta S[G, H] = \begin{bmatrix} \Delta A^T H + H \Delta A & H \Delta B & \frac{1}{2} \beta \Delta A^T c \\ \Delta B^T H & \Theta & \theta \\ \frac{1}{2} \beta c^T \Delta A & \theta^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Якщо матриця  $S[G, H, \beta]$  позитивно визначена, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t)] &\leq -\lambda_{\min}(S[G, H, \beta])\left(\|x(t)\|^2 + \|x(t-\tau)\|^2 + \|f(\sigma(t))\|^2\right) + \\ & + 2\|\Delta A\|H\|x(t)\|^2 + 2\|\Delta B\|H\|x(t)\|x(t-\tau) + \beta\|\Delta A\|c\|x(t)\|f(\sigma(t)). \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t)] &\leq -[\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta A\|H]x(t)^2 - \\ & - \lambda_{\min}(S[G, H, \beta])x(t-\tau)^2 - \lambda_{\min}(S[G, H, \beta])f(\sigma(t))^2 + \\ & + 2\|\Delta B\|H\|x(t)\|x(t-\tau) + \beta\|\Delta A\|c\|x(t)\|f(\sigma(t)). \end{aligned}$$

Розіб'ємо перший доданок на два й представимо праву частину нерівності у вигляді суми

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t)] &\leq -\left\{ \alpha [\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta A\|H]x(t)^2 - \right. \\ & \left. 2\|\Delta B\|H\|x(t)\|x(t-\tau) + \lambda_{\min}(S[G, H, \beta])x(t-\tau)^2 \right\} - \\ & - \left\{ (1-\alpha) [\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta A\|H]x(t)^2 - \beta\|\Delta A\|c\|x(t)\|f(\sigma(t)) + \right. \\ & \left. + \lambda_{\min}(S[G, H, \beta])f(\sigma(t))^2 \right\} \end{aligned}$$

де  $0 < \alpha < 1$ - деяка стала. Тоді, як витікає з критерія Сільвестра, умовою абсолютної інтервально стійкості системи з запізненням буде виконання нерівностей

$$\begin{aligned}
& \lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta A\|H > 0, \\
& \alpha[\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta A\|H] \lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - (\|\Delta B\|H)^2 > 0, \\
& (1 - \alpha)[\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta A\|H] \lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - \\
& - \frac{1}{4} \beta \|\Delta A\|c > 0
\end{aligned} \tag{74}$$

Нехай  $\Delta A$  таке, що перша нерівність виконана. Перепишемо другу й третю нерівність у вигляді

$$\begin{aligned}
\alpha & > \frac{(\|\Delta B\|H)^2}{[\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta A\|H] \lambda_{\min}(S[G, H, \beta])} \\
\alpha & < 1 - \frac{\frac{1}{4} (\beta \|\Delta A\|c)^2}{[\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta A\|H] \lambda_{\min}(S[G, H, \beta])}.
\end{aligned}$$

I, якщо буде виконуватися нерівність

$$\begin{aligned}
& \frac{(\|\Delta B\|H)^2}{[\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta A\|H] \lambda_{\min}(S[G, H, \beta])} < \\
& < 1 - \frac{\frac{1}{4} (\beta \|\Delta A\|c)^2}{[\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta A\|H] \lambda_{\min}(S[G, H, \beta])},
\end{aligned}$$

то завжди існує  $0 < \alpha < 1$ , при якому виконуються друга й третя нерівності (74). А остання нерівність еквівалентна наступній

$$\begin{aligned}
& (\|\Delta A\|H)^2 + \frac{1}{4} \beta \|\Delta A\|c < \\
& < [\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta A\|H] \lambda_{\min}(S[G, H, \beta]).
\end{aligned}$$

Перепишемо її у вигляді

$$\begin{aligned}
& [\lambda_{\min}(S[G, H, \beta])]^2 - 2\|\Delta A\|H[\lambda_{\min}(S[G, H, \beta])] - \\
& - \left\{ (\|\Delta B\|H)^2 + \frac{1}{4} (\beta \|\Delta A\|c)^2 \right\} > 0
\end{aligned}$$

Вона завжди буде виконуватись, якщо

$$\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) > \|\Delta A\|H + \sqrt{\|\Delta A\|^2 H^2 + \|\Delta B\|^2 H^2 + \beta^2 \|\Delta A\|^2 c^2}.$$

Оскільки з виконання останньої нерівності витікає перша нерівність (74), то аналогічно теоремі 20 отримуємо твердження (73) теореми 21.

#### 4.2. Системи непрямого регулювання з запізненням

В цьому розділі будемо розглядати систему непрямого регулювання, яка описується інтервально заданими диференціальними рівняннями з аргументом, що запізнюється (52)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t - \tau) + bf(\sigma(t)) \\ \dot{\sigma}(t) &= c^T x(t) - \rho f(\sigma(t)).\end{aligned}$$

Тут  $\rho > 0$ , матриці  $\Delta A$  та  $\Delta B$  можуть приймати свої значення з фіксованих інтервалів (53)

$$\begin{aligned}\Delta A &= \{\Delta a_{ij}\}, \quad |\Delta a_{ij}| \leq \alpha_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \\ \Delta B &= \{\Delta b_{ij}\}, \quad |\Delta b_{ij}| \leq \beta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}.\end{aligned}$$

Нелінійна функція одного аргументу  $f(\sigma)$  лежить в заданому секторі першої й третьої чверті системи координат (41)

$$k_1 \sigma^2 \leq f(\sigma) \sigma \leq k_2 \sigma^2, \quad k_2 > k_1 > 0.$$

Якщо в попередньому розділі дослідження абсолютної інтервальної стійкості проводилося з допомогою скінченновимірної функції Ляпунова (44)

$$V(x, \sigma) = x^T H x + \int_0^\sigma f(\xi) d\xi,$$

то в даному розділі будемо використовувати функціонал Ляпунова-Красовського

$$V[x(t), \sigma(t)] = x^T(t) H x(t) + \int_{-\tau}^0 x^T(t+s) G x(t+s) ds + \int_0^{\sigma(t)} f(\xi) d\xi. \quad (75)$$

Спочатку розглянемо систему без інтервальних збурень

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + bf(\sigma(t)) \\ \dot{\sigma}(t) = c^T x(t) - \rho f(\sigma(t)) \end{cases}$$

й отримаємо умови абсолютної стійкості цієї системи.

**Теорема 22.** Нехай існують позитивно визначені матриці  $G$ ,  $H$ , при яких матриця

$$S[G, H] = \begin{bmatrix} -A^T H - HA & -HB & -(Hb + \frac{1}{2}) \\ -B^T H & G & \theta \\ -(Hb + \frac{1}{2}c) & \theta^T & \rho \end{bmatrix} \quad (76)$$

позитивно визначена. Тоді система з запізненням без інтервальних збурень абсолютно стійка.

*Доведення.* Для функціонала (75) вірні наступні двосторонні оцінки

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(H) \|x(t)\|^2 + \lambda_{\min}(G) \|x(t)\|_2^2 + k_1 |\sigma(t)|^2 &\leq V[x(t), \sigma(t)] \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(H) \|x(t)\|^2 + \lambda_{\max}(G) \|x(t)\|_2^2 + k_2 |\sigma(t)|^2. \end{aligned} \quad (77)$$

Обчислимо повну похідну функціонала в силу системи без інтервальних збурень. Отримаємо

$$\frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t)] = [Ax(t) + Bx(t - \tau) + bf(\sigma(t))]^T H x(t) +$$

$$+ x^T(t)H[Ax(t) + Bx(t-\tau) + bf(\sigma(t))] + x^T(t)Gx(t) - x^T(t-\tau)Hx(t-\tau) + f(\sigma(t))[c^T x(t) - \rho f(\sigma(t))]$$

Або

$$\frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t)] = -\left(x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))\right) S[G, H]^* * \left(x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))\right)^T,$$

Якщо матриця  $S[G, H]$  позитивно визначена, то

$$\frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t)] \leq -\lambda_{\min}(S[G, H])\left(|x(t)|^2 + |x(t-\tau)|^2 + |f(\sigma(t))|^2\right)$$

Враховуючи обмеження "сектора", отримуємо

$$\frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t)] \leq -\lambda_{\min}(S[G, H])\left(|x(t)|^2 + |x(t-\tau)|^2 + k_1^2 |\sigma(t)|^2\right)$$

Таким чином, з ослабленої теореми Красовського М.М. [23], якщо існують позитивно визначені матриці  $G, H, S[G, H]$ , при яких

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(H)|x(t)|^2 + k_1 |\sigma(t)|^2 &\leq V[x(t), \sigma(t)] \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(H)|x(t)|^2 + \lambda_{\max}(G)\|x(t)\|_2^2 + k_2 |\sigma(t)|^2. \\ \frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t)] &\leq -\lambda_{\min}(S[G, H])\left(|x(t)|^2 + k_1^2 |\sigma(t)|^2\right) \end{aligned}$$

тоді система з запізненням абсолютно стійка.

Отримаємо умови абсолютної інтервальної стійкості системи регулювання (52).

**Теорема 23.** Нехай існують позитивно визначені матриці  $G, H$ , при яких

$$\frac{\lambda_{\min}(S[G, H])}{\lambda_{\max}(H)} > \|\Delta A\| + \sqrt{\|\Delta A\|^2 + \|\Delta B\|^2} \quad (78)$$

Тоді система з запізненням (52) абсолютно інтервально стійка.

*Доведення.* Для функціонала Ляпунова-Красовського вигляду (75) вірні двосторонні нерівності (77). Обчислимо повну похідну функціоналу вздовж розв'язків систем з інтервальними збуреннями. Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t)] &= -\left(x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))\right) S[G, H]^* * \\ &* \left(x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))\right)^T + \left(x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))\right) \Delta S[G, H]^* * \\ &* \left(x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))\right)^T, \end{aligned}$$

де

$$\Delta S[G, H] = \begin{bmatrix} \Delta A^T H + H \Delta A & H \Delta B & \theta \\ B^T H & \Theta & \theta \\ \theta^T & \theta^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Якщо матриця  $S[G, H]$  позитивно визначена, тоді

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t)] &\leq -\lambda_{\min}(S[G, H]) \left( |x(t)|^2 + |x(t - \tau)|^2 + |f(\sigma(t))|^2 \right) + \\ &+ 2\|\Delta A\| \|H\| |x(t)|^2 + 2\|\Delta B\| \|H\| |x(t)| |x(t - \tau)|. \end{aligned}$$

Перепишемо отриману нерівність у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t)] &\leq -[\lambda_{\min}(S[G, H]) - 2\|\Delta A\| \|H\|] |x(t)|^2 - \\ &- \lambda_{\min}(S[G, H]) |x(t - \tau)|^2 - \\ &- \lambda_{\min}(S[G, H]) |f(\sigma(t))|^2 + 2\|\Delta B\| \|H\| |x(t)| |x(t - \tau)|. \end{aligned}$$

Виділимо повні квадрати

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t)] &\leq \\ &\leq -\left\{ [\lambda_{\min}(S[G, H]) - 2\|\Delta A\| \|H\|] |x(t)|^2 - 2\|\Delta B\| \|H\| |x(t)| |x(t - \tau)| + \right. \\ &\left. + \lambda_{\min}(S[G, H]) |x(t - \tau)|^2 \right\} - \lambda_{\min}(S[G, H]) |f(\sigma(t))|^2. \end{aligned}$$

Й, як витікає з критерію Сільвестра, умовою абсолютної інтервальної стійкості систем з запізненням (52) буде виконання нерівностей

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(S[G, H]) &> 0 \\ [\lambda_{\min}(S[G, H]) - 2\|\Delta A\| \|H\|] \lambda_{\min}(S[G, H]) - \|\Delta B\|^2 |H|^2 &> 0 \end{aligned} \quad (79)$$

Перепишемо другу нерівність в вигляді

$$[\lambda_{\min}(S[G, H])]^2 - 2\|\Delta A\| \|H\| \lambda_{\min}(S[G, H]) - \|\Delta B\|^2 |H|^2 > 0.$$

Тому якщо буде виконуватись умова

$$\lambda_{\min}(S[G, H]) > \|\Delta A\| \|H\| + \sqrt{\|\Delta A\|^2 |H|^2 + \|\Delta B\|^2 |H|^2}.$$

тоді обидві нерівності (79) будуть виконані тим паче. Звідси витікає твердження (78) теореми 23.

### 4.3. Системи прямого регулювання нейтрального типу

Розглянемо систему прямого регулювання, яка описується інтервально заданими диференціальними рівняннями з аргументом, що відхиляється, нейтрального типу

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x(t) - Dx(t - \tau)) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t - \tau) + \\ &+ bf(\sigma(t)), \\ \sigma(t) &= c^T x(t). \end{aligned} \quad (80)$$

Тут матриця  $D$  задовольняє умові «стійкості різницевого оператора», тобто  $|D| < 1$ , матриці  $\Delta A$  та  $\Delta B$  можуть приймати свої значення з фіксованих інтервалів (26)

$$\begin{aligned} \Delta A &= \{\Delta a_{ij}\}, \quad |\Delta a_{ij}| \leq \alpha_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \\ \Delta B &= \{\Delta b_{ij}\}, \quad |\Delta b_{ij}| \leq \beta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Нелінійна функція одного аргументу  $f(\sigma)$  лежить в заданому секторі першої та третьої чверті системи координат (20)

$$0 \leq f(\sigma)\sigma \leq k\sigma^2, \quad k > 0.$$

В даному розділі для отримання умов абсолютної інтервальної стійкості будемо використовувати функціонал Ляпунова-Красовського наступного вигляду

$$\begin{aligned} V[x(t)] &= (x(t) - Dx(t - \tau))^T H(x(t) - Dx(t - \tau)) + \\ &+ \int_{-\tau}^0 x^T(t+s)Gx(t+s)ds + \beta \int_0^{\sigma(t)} f(\xi)d\xi, \\ \sigma(t) &= c^T x(t). \end{aligned} \quad (81)$$

Попередньо розглянемо систему без інтервальних збурень

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x(t) - Dx(t - \tau)) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + bf(\sigma(t)) \\ \dot{\sigma}(t) = c^T x(t) \end{cases} \quad (82)$$

й отримаємо умови абсолютної стійкості системи (82).

Позначимо

$$M[H] = \begin{bmatrix} H & HD \\ D^T H & D^T HD \end{bmatrix}, \quad (83)$$

$$\begin{aligned} S[G, H, \beta] &= \\ &= \begin{bmatrix} -A^T H - HA - G & -HB + A^T HD & -\left[ Hb + \frac{1}{2}(\beta A^T + I)c \right] \\ -B^T H + D^T HA & D^T HD + D^T HB + G & \theta \\ -\left[ Hb + \frac{1}{2}(\beta A^T + I)c \right]^T & \theta^T & \frac{1}{k} - \beta b^T c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Теорема 24.** Нехай існують позитивно визначені матриці  $G$ ,  $H$ , та параметр  $\beta > 0$ , при яких матриця  $S[G, H, \beta]$  також позитивно визначена. Тоді система без інтервальних збурень (82) абсолютно стійка в метриці

$$\|x(t)\|_2 = \left\{ \int_{-\tau}^0 |x(t+s)|^2 ds \right\}.$$

*Доведення.* Для функціонала Ляпунова-Красовського (81) вірні наступні двосторонні оцінки

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(G)\|x(t)\|_2^2 &\leq V[x(t)] \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(M[H])\left(\|x(t)\|^2 + \|x(t - \tau)\|^2\right) + \lambda_{\max}(G)\|x(t)\|_2^2 + \beta k\|\sigma(t)\|^2. \end{aligned} \quad (84)$$

Або

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(G)\|x(t)\|_2^2 &\leq V[x(t)] \leq \\ &\leq \left[ \lambda_{\max}(M[H]) + \beta k|c|^2 \right] \|x(t)\|^2 + \lambda_{\max}(M[H])\|x(t - \tau)\|^2 + \lambda_{\max}(G)\|x(t)\|_2^2 \end{aligned}$$

Обчислимо повну похідну функціонала (81) в силу системи без інтервальних збурень. Отримаємо наступне

$$\frac{d}{dt} V[x(t)] = [Ax(t) + Bx(t - \tau) + bf(\sigma(t))]^T H(x(t) + Dx(t - \tau)) +$$

$$\begin{aligned}
& + (x(t) - Dx(t - \tau))^T H [Ax(t) + Bx(t - \tau) + bf(\sigma(t))] + \\
& x^T(t)Gx(t) - x^T(t - \tau)Gx(t - \tau) + \\
& + \beta f(\sigma(t))c^T [Ax(t) + Bx(t - \tau) + bf(\sigma(t))].
\end{aligned}$$

Або

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V[x(t)] &= -(x^T(t), x^T(t - \tau), f(\sigma(t))) S[G, H, \beta]^* \\
& * (x^T(t), x^T(t - \tau), f(\sigma(t)))^T,
\end{aligned}$$

де матриця  $S[G, H, \beta]$  визначена в (83). Якщо вона позитивно визначена, то

$$\frac{d}{dt} V[x(t)] \leq -\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) (|x(t)|^2 + |x(t - \tau)|^2 + |f(\sigma(t))|^2).$$

Враховуючи обмеження «сектора» (20), отримаємо

$$\frac{d}{dt} V[x(t)] \leq -\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) (|x(t)|^2 + |x(t - \tau)|^2).$$

Таким чином маємо систему нерівностей

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(G) \|x(t)\|_2^2 &\leq V[x(t)] \leq [\lambda_{\max}(M[H]) + \beta k |c|^2] |x(t)|^2 + \\
& + \lambda_{\max}(G) \|x(t)\|_2^2. \\
\frac{d}{dt} V[x(t)] &\leq -\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) |x(t)|^2.
\end{aligned}$$

Таким чином, з ослабленої теореми Красовського М.М. [23], якщо існують позитивно визначені матриці  $G$ ,  $H$ , при яких матриця  $S[G, H, \beta]$  також позитивно визначена, то система абсолютно стійка в метриці  $\|x(t)\|_2$ .

Далі отримаємо умови абсолютної інтервальної стійкості системи (80).

**Теорема 25.** Нехай існують позитивно визначені матриці  $G$ ,  $H$  та параметр  $\beta > 0$ , при яких виконується нерівність

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) &> (\|\Delta A\|H + \|\Delta B\|H) + \\
& + \sqrt{(\|\Delta A\|H + \|\Delta B\|HD)^2 + (\|\Delta B\|H + \|\Delta A\|HD)^2}.
\end{aligned} \quad (85)$$

Тоді система (80) інтервально абсолютно стійка в метриці  $\|x(t)\|_2$ .

*Доведення.* Як витікає з вигляду функціонала (81), для нього вірні двосторонні оцінки (84). Обчислимо повну похідну функціонала вздовж розв'язків систем з «інтервальними збуреннями». Отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V[x(t)] &= -(x^T(t), x^T(t - \tau), f(\sigma(t))) S[G, H, \beta]^* \\
& * (x^T(t), x^T(t - \tau), f(\sigma(t)))^T + (x^T(t), x^T(t - \tau), f(\sigma(t))) \Delta S[G, H]^* \\
& * (x^T(t), x^T(t - \tau), f(\sigma(t)))^T,
\end{aligned}$$

де

$$\Delta S[G, H] = \begin{bmatrix} \Delta A^T H + H \Delta A & -H \Delta B + \Delta A H D & \theta \\ -\Delta B^T H + D^T H \Delta A & \Delta B^T H D + D^T H \Delta B & \theta \\ \theta^T & \theta^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Якщо  $S[G, H, \beta]$  позитивно визначена, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t)] \leq & -\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) \left( |x(t)|^2 + |x(t-\tau)|^2 + |f(\sigma(t))|^2 \right) + \\ & + 2\|\Delta A\| \|H\| |x(t)|^2 + 2(\|\Delta B\| \|H\| + \|\Delta A\| \|HD\|) |x(t)| |x(t-\tau)| + \\ & + \|\Delta B\| \|HD\| |x(t-\tau)|^2. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо, що

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t)] \leq & -[\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta A\| \|H\|] |x(t)|^2 + \\ & + 2(\|\Delta B\| \|H\| + \|\Delta A\| \|HD\|) |x(t)| |x(t-\tau)| - \\ & - [\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta B\| \|HD\|] |x(t-\tau)|^2 - \\ & - \lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) |f(\sigma(t))|^2. \end{aligned}$$

Тоді, як витікає з критерію Сільвестра, умовою абсолютної інтервальної стійкості буде виконання системи нерівностей

$$\begin{aligned} & \lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta A\| \|H\| > 0, \\ & [\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta A\| \|H\|] [\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta B\| \|HD\|] - \\ & - (\|\Delta B\| \|H\| + \|\Delta A\| \|HD\|)^2 > 0. \end{aligned}$$

Перепишемо другу нерівність у вигляді

$$\lambda_{\min}^2(S[G, H, \beta]) - 2\|\Delta A\| \|H\| + \|\Delta B\| \|HD\| \lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) - (\|\Delta B\| \|H\| - \|\Delta A\| \|HD\|)^2 > 0.$$

Вона буде тим паче виконуватись, якщо будуть існувати позитивно визначені матриці  $G, H$  та параметр  $\beta > 0$ , при яких

$$\begin{aligned} & \lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) > \|\Delta A\| \|H\| + \|\Delta B\| \|HD\| + \\ & + \sqrt{(\|\Delta A\| \|H\| + \|\Delta B\| \|HD\|)^2 + (\|\Delta B\| \|H\| + \|\Delta A\| \|HD\|)^2}. \end{aligned}$$

Звідси витікає твердження теореми 25

З теореми 25 безпосередньо витікає наслідок, який більш легко реалізується для перевірки умов інтервальної стійкості.

**Наслідок 1.** Нехай існують позитивно визначені матриці  $G$  й  $H$  та параметр  $\beta > 0$ , при яких виконується нерівність

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_{\min}(S[G, H, \beta])}{\lambda_{\max}(H)} > (\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) + \\ & + \sqrt{(\|\Delta A\| + \|\Delta B\| \|D\|)^2 + (\|\Delta B\| + \|\Delta A\| \|D\|)^2}. \end{aligned}$$

Тоді система (80) абсолютно інтервально стійка в метриці  $\|x(t)\|_2$ .

#### 4.4. Системи непрямого регулювання нейтрального типу

В цьому розділі будемо розглядати систему непрямого регулювання, яка описується інтервально заданими диференціальними рівняннями з аргументом, що відхиляється, нейтрального типу

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t) - Dx(t - \tau)) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t - \tau) + \\ &\quad + bf(\sigma(t)) \\ \dot{\sigma}(t) &= c^T x(t) - \rho f(\sigma(t)). \end{aligned} \quad (86)$$

Тут матриця  $D$  задовольняє умові  $|D| < 1$ ,  $\rho > 0$ ,  $\Delta A$  й  $\Delta B$  можуть приймати свої значення з фіксованих інтервалів (53). Нелінійна функція одного аргументу  $f(\sigma)$  лежить в заданому секторі першої і третьої чверті системи координат (41). При дослідженні стійкості будемо використовувати функціонал Ляпунова-Красовського

$$\begin{aligned} V[x(t), \sigma(t)] &= (x(t) - Dx(t - \tau))^T H(x(t) - Dx(t - \tau)) + \\ &\quad + \int_{-\tau}^0 x^T(t+s)Gx(t+s)ds + \int_0^{\sigma(t)} f(\xi)d\xi \end{aligned} \quad (87)$$

Спочатку розглянемо систему без інтервальних збурень

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x(t) - Dx(t - \tau)) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + bf(\sigma(t)) \\ \dot{\sigma}(t) = c^T x(t) - \rho f(\sigma(t)) \end{cases}$$

й отримаємо умови абсолютної стійкості цієї системи.

Введемо наступні позначення

$$M[H] = \begin{bmatrix} H & HD \\ D^T H & D^T HD \end{bmatrix}, \quad (88)$$

$$S[G, H] = \begin{bmatrix} -A^T H - HA - G & -HB + D^T HA & -(Hb + \frac{1}{2}) \\ -B^T H + A^T HD & G + B^T HD + D^T HB & D^T Hb \\ -(Hb + \frac{1}{2}c)^T & b^T HD & \rho \end{bmatrix}$$

**Теорема 26.** Нехай існують позитивно визначені матриці  $G$ ,  $H$ , при яких матриця  $S[G, H]$  також позитивно визначена. Тоді система нейтрального типу без інтервальних збурень абсолютно стійка в метриці  $\|x(t)\|_2$ .

*Доведення.* Для функціонала (3.87) вірні наступні двосторонні оцінки

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(G)\|x(t)\|_2^2 + k_1|\sigma(t)|^2 &\leq V[x(t), \sigma(t)] \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(M[H])(\|x(t)\|^2 + |x(t - \tau)|^2) + \lambda_{\max}(G)\|x(t)\|_2^2 + k_2|\sigma(t)|^2. \end{aligned} \quad (89)$$

Обчислимо повну похідну функціонала в силу системи без інтервальних збурень. Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V[x(t), \sigma(t)] &= [Ax(t) + Bx(t - \tau) + bf(\sigma(t))]^T H(Ax(t) + Bx(t - \tau)) + \\ &\quad + (x(t) - Dx(t - \tau))^T H[Ax(t) + Bx(t - \tau) + bf(\sigma(t))] + \\ &\quad + x^T(t)Gx(t) - x^T(t - \tau)Hx(t - \tau) + \\ &\quad + f(\sigma(t))[c^T x(t) - \rho f(\sigma(t))] \end{aligned}$$

Або

$$\frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t)] = -\left(x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))\right) S[G, H]^* \\ * \left(x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))\right)^T,$$

Якщо матриця  $S[G, H]$  позитивно визначена, тоді

$$\frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t)] \leq -\lambda_{\min}(S[G, H]) \left( |x(t)|^2 + |x(t-\tau)|^2 + |f(\sigma(t))|^2 \right)$$

Враховуючи обмеження "сектора", отримаємо

$$\frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t)] \leq -\lambda_{\min}(S[G, H]) \left( |x(t)|^2 + |x(t-\tau)|^2 + k_1^2 |\sigma(t)|^2 \right)$$

Таким чином, з ослабленої теореми Красовського М.М. [23], якщо існують позитивно визначені матриці  $G$ ,  $H$ ,  $S[G, H]$ , при яких

$$\lambda_{\min}(G) \|x(t)\|_2^2 \leq V[x(t), \sigma(t)] \leq \\ \leq \lambda_{\max}(M[H]) \left( |x(t)|^2 + |x(t-\tau)|^2 \right) + \lambda_{\max}(G) \|x(t)\|_2^2 + k_2 |\sigma(t)|^2. \\ \frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t)] \leq -\lambda_{\min}(S[G, H]) \left( |x(t)|^2 + k_1^2 |\sigma(t)|^2 \right)$$

тоді система нейтрального типу абсолютно стійка в метриці  $\|x(t)\|_2$ .

Отримаємо умови абсолютної інтервальної стійкості системи регулювання (86).

**Теорема 27.** Нехай існують позитивно визначені матриці  $G$ ,  $H$ , при яких

$$\lambda_{\min}(S[G, H]) > \left[ \|\Delta A\| \|H\| + \|\Delta B\| \|HD\| \right] + \sqrt{\left[ \|\Delta A\| \|H\| - \|\Delta B\| \|HD\| \right]^2 + \left[ \|\Delta B\| \|H\| + \|\Delta A\| \|HD\| \right]^2}, \quad (90)$$

Тоді система нейтрального типу (86) абсолютно інтервально стійка в метриці  $\|x(t)\|_2$ .

*Доведення.* Для функціонала Ляпунова-Красовського вигляду (87) вірні двосторонні нерівності (89). Обчислимо повну похідну функціонала вздовж розв'язків систем з інтервальними збуреннями отримаємо

$$\frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t)] = -\left(x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))\right) S[G, H]^* \\ * \left(x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))\right)^T + \\ + \left(x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))\right) \Delta S[G, H] \left(x^T(t), x^T(t-\tau), f(\sigma(t))\right)^T,$$

Де

$$\Delta S[G, H] = \begin{bmatrix} \Delta A^T H + H \Delta A & H \Delta B + D^T H \Delta A & \theta \\ \Delta B^T H + \Delta A^T H D & \Delta B^T H D + D^T H \Delta B & \theta \\ \theta^T & \theta^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Якщо матриця  $S[G, H]$  позитивно визначена, тоді

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t)] &\leq -\lambda_{\min}(S[G, H]) \left( |x(t)|^2 + |x(t-\tau)|^2 + |f(\sigma(t))|^2 \right) + \\ &+ 2\|\Delta A\|H|x(t)|^2 + 2\left[ \|\Delta B\|H + \|\Delta A\|HD \right] x(t)x(t-\tau) + \\ &+ 2\|\Delta B\|HD|x(t-\tau)|^2. \end{aligned}$$

Перепишемо отриману нерівність у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[x(t), \sigma(t)] &\leq -\left[ \lambda_{\min}(S[G, H]) - 2\|\Delta A\|H \right] x(t)^2 - \\ &- \left[ \lambda_{\min}(S[G, H]) - 2\|\Delta B\|HD \right] x(t-\tau)^2 - \\ &- \lambda_{\min}(S[G, H]) |f(\sigma(t))|^2 + 2\left[ \|\Delta B\|H + \|\Delta A\|HD \right] x(t)x(t-\tau). \end{aligned}$$

Й, як витікає з критерію Сільвестра, умовою абсолютної інтервальної стійкості системи нейтрального типу (86) буде виконання нерівностей

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(S[G, H]) - 2\|\Delta A\|H &> 0 \\ \left[ \lambda_{\min}(S[G, H]) - 2\|\Delta A\|H \right] \left[ \lambda_{\min}(S[G, H]) - 2\|\Delta B\|HD \right] - \\ - \left[ \|\Delta B\|H + \|\Delta A\|HD \right]^2 &> 0 \end{aligned} \quad (91)$$

Перепишемо другу нерівність у вигляді

$$\begin{aligned} \left[ \lambda_{\min}(S[G, H]) \right]^2 - 2\left[ \|\Delta A\|H + \|\Delta B\|HD \right] \lambda_{\min}(S[G, H]) + \\ + \left\{ 4\|\Delta A\|H\|\Delta B\|HD - \left[ \|\Delta B\|H + \|\Delta A\|HD \right]^2 \right\} &> 0. \end{aligned}$$

Тому якщо буде виконуватись умова

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(S[G, H]) > \left[ \|\Delta A\|H + \|\Delta B\|HD \right] + \\ + \sqrt{\left[ \|\Delta A\|H - \|\Delta B\|HD \right]^2 + \left[ \|\Delta B\|H + \|\Delta A\|HD \right]^2}, \end{aligned}$$

тоді обидві нерівності (91) будуть виконані тим паче. Звідси витікає твердження (90) теореми 27.

## **SUMMARY**

This chapter is devoted to a brief translation of the main results obtained in the previous chapters of the textbook.

Fully saved all previously given notations, terminology and definitions.

Also fully saved numeration of paragraphs and formulas

**Taras Shevchenko National University of Kyiv**

**Andriy SHATYRKO, Denis KHUSAINOV**

**STABILITY of NONLINEAR  
CONTROL SYSTEMS  
with AFTEREFFECT**

**The textbook for student  
of Cybernetics Faculty  
«Applied mathematics» specialization**

**Kyiv – 2012**

55

Problems of investigation of dynamical systems with inexact parameters, or in general velocity vectors (right-hand sides of differential equations), which take their values from some set, interested researchers for a long time. Classical (Lyapunov's) stability means the investigation of solutions to the perturbation of initial data. Its various generalizations (uniform in time and phase variables, by part of variables, asymptotic, exponential, orbital, etc.) also meant unambiguous definition of the law of system dynamics.

Obviously, one of the first directions of stability investigation of inexact data on the right side was research of "stability under permanent perturbations (indignations)" (Malkin I.G., Vrkoč I.). The perturbation allowed not only of the initial data, but also of vector fields of systems of differential equations. Essential was the fact (especially for nonlinear systems), that the perturbation of right parts of differential equations brought about a classification of nonlinear systems, stable (in a different sense) relative to perturbations. There were "crude system" (Andronov A. A., Pontryagin L. S.), "structurally stable" (Smail S.), «realizable" (Sharkovskiy A. M., Khusainov D. Ya.) and etc.

The solution of practical problems of the control theory caused the consideration the appearance the concept of "robust" (or interval) stability. Initially under the robust (interval) stability understood asymptotic stability of linear steady-state differential equations of higher order under the condition of finding their coefficients inside some predefined intervals. Interesting fundamental necessary and sufficient conditions of interval stability of linear differential equations with inexact given parameters were obtained in Kharitonov V.L. works. But with the distribution of the results to the system of equations, to difference equations and systems of equations, systems with aftereffect have essential complications.

Another area of investigation of stability of systems with inexact data on the right sides are generalized differential equation (differential inclusions) (Tolstonogov A.A., Plotnikov V.A.). With the apparatus of differential inclusions has become possible correct formulation and solution of control problems with discontinuous right sides.

Another class of systems of this kind, which were developed recently, is "fuzzy systems" (Kudinov Y.N., Lakshmikantham V.). They allow formalize the apparatus of decision making theory in dynamical systems.

In this textbook will be considered interval stability of nonlinear control systems with the time-delay argument. The method of Lyapunov functions is selected as apparatus of investigation. By the structure it is a "crude" method, because its conditions are based on an inequality (positive definiteness function or functional, and the negative definiteness of the derivative along the solutions of the system). So mostly, allows the execution of conditions for a parametrically given set of systems. And if the system parameters are defined on some intervals, it will give the conditions of interval stability.

### **1. Investigation of interval (robust) stability of solutions of equations and systems**

Necessary and sufficient conditions for asymptotic stability of interval characteristic polynomials obtained by Kharitonov V.L. and formulated as the following two theorems

Let  $G^n$  – set of polynomials of the form (2), all the roots of which lie in the left half-plane,

$S^n$  – set of all polynomials (2) with coefficients satisfying (3),

$S_1^n$  – set of polynomials from  $S^n$ , in which each coefficient  $p_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$  is equal or  $\alpha_i$ , or  $\beta_i$  (i.e.  $S_1^n$  have  $2^n$  "slope" polynomials).

**Theorem 1.** (first Kharitonov's theorem). For  $S^n \subset G^n$  is necessary and sufficient that  $S_1^n \subset G^n$ .

**Theorem 2.** (second Kharitonov's theorem). For  $S_1^n \subset G^n$  is necessary and sufficient that four polynomials  $f_i(z)$ ,  $i \in \overline{1, 4}$  from  $S_1^n$  with specific sets of coefficients belonging to  $G^n$ .

Some difficulties faced in the transferring of results on a system of equations. Consider the system of differential equations

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \geq 0$$

with coefficients  $a_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  changing in some intervals (4).

After direct use of Kharitonov's theorem proved impossible, the attention of many researchers was aimed at obtaining sufficient conditions for stability of interval matrices. Most of the of the results from obtaining sufficient conditions for stability of interval matrices can be grouped in the following directions.

- 1) Development of a Kharitonov's method .
- 2) Using the frequency approach.
- 3) applying theorems of Gershgorin.
- 5) applying the second method of Lyapunov.

The main results of the approach based on Theorem of Gershgorin, arising from predominant influence, which have on the stability of the system, the diagonal elements. If the modulus of diagonal element dominates by sum of modulus of matrix elements, which belong the same line, then this element also determines the conditions of stability.

**Theorem 3.** Interval matrix  $A$  is stable if satisfies

$$q_{ii} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \max\{|p_{ij}|, |q_{ij}|\} < 0, \quad i = \overline{1, n}$$

or

$$q_{jj} + \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n \max\{|p_{ij}|, |q_{ij}|\} < 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Applying Lyapunov's second method composed in choosing a positively defined function and calculating its full derivative on solution of the system. The conditions under which the full derivative is negative definite are obtained. The advantage of method of Lyapunov is in his "crudeness" and consists in checking irregularities. If there is at least one Lyapunov function, which gives conditions for stability, then there is a whole set of functions, and they can be of any smoothness. It follows that this Lyapunov function can be applied to a class of systems, "similar" (in a certain sense) to the initial. If the "similarity" is defined on the set interval defined systems, we obtain the conditions of "interval" stability.

## 2. Interval stability of linear systems solutions with aftereffect

One of the areas of developing of the theory of interval stability went toward the research of systems with deviating argument. There are a lot of works devoted to this subject.

**Definition 1.** The system (6) is called interval stable if it asymptotically stable for all matrices from intervals (8).

Conditions of interval stability without delay  $\tau = 0$  have the following form.

**Theorem 4.** Let  $A + B$  - is asymptotically stable matrix and exist symmetric, positive definite matrix  $H$ , such that

$$\lambda_{\min}[-(A + B)^T H - H(A + B)] - 2\|H(\Delta A + \Delta B)\| > 0. \quad (9)$$

Then the system without delay is interval stable.

If there is delay, i.e.  $\tau \neq 0$  conditions become more severest (strong) and should have the following form.

**Theorem 5.** Let  $A + B$  - is asymptotically stable matrix and exist symmetric, positive definite matrix  $H$ , , such that

$$\lambda_{\min}[-(A + B)^T H + H(A + B)] - 2\left[\|H(A + \Delta A)\| + \|H(B + \Delta B)\|\sqrt{\varphi(H)}\right] > 0. \quad (10)$$

Then the system (6) is interval stable at arbitrary delay argument  $\tau > 0$ .

Moreover, for its arbitrary solution  $x(t)$  will be  $|x(t)| < \varepsilon$ ,  $t > 0$ , if  $\|x(0)\|_{\tau} < \delta(\varepsilon)$ .

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon / \sqrt{\varphi(H)}.$$

These conditions can be a little bit "alleviated" by the smallness of delay. Then they have the following form.

**Theorem 6.** Let  $A + B$  - is asymptotically stable matrix and exist symmetric, positive definite matrix  $H$ , such that (9). If  $\tau < \tau_0$ , where

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}[-(A + B)^T H + H(A + B)] - 2\|H(\Delta A + \Delta B)\|}{2\|H(B + \Delta B)\|\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|\sqrt{\varphi(H)}},$$

then system (6) will be interval stable.

Moreover, for an arbitrary solution  $x(t)$  will be  $|x(t)| < \varepsilon$ ,  $t > 0$ , if  $\|x(0)\|_{\tau} < \delta(\varepsilon, \tau)$ , where

$$\delta(\varepsilon, \tau) = \frac{e^{-\|A + \Delta A\|\tau}}{1 + \|B + \Delta B\|\tau} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varphi(H)}}.$$

Similar sufficient conditions for interval stability obtained also for systems of neutral type (11).

The following conditions of interval stability of the system (12) in assuming that the system (11) is asymptotically stable are proved.

**Theorem 7.** Let  $A + B$  - is asymptotically stable matrix and exist symmetric, positive definite matrix  $H$ , such that

$$L(H) > 0, \quad (16)$$

Where

$$L(H) = \lambda_{\min}[-(A + B)^T H(E - D) - (E - D)^T H(A + B)] - 2\left[\|(A + B)H\Delta D - (\Delta A + \Delta B)^T H[(E - D) - \Delta D]\right].$$

Then the system (15) is interval stable.

For systems with deviating argument with arbitrary delay the following statement is fair.

**Theorem 8.** Let the matrix  $A+B$  is asymptotically stable matrix and exist symmetric, positive definite matrix  $H$ , such that

$$\begin{aligned} & L(H) - 2\|[(E-D) - \Delta D]^T H(B + \Delta B)\|(1 + \sqrt{\varphi(H)}) - \\ & - 4\|[(E-D) - \Delta D]^T H(D + \Delta D)\| \frac{\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|}{1 - \|D + \Delta D\|} \sqrt{\varphi(H)} > 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Then the system (15) is interval stable at arbitrary delay argument  $\tau > 0$ . Moreover, for arbitrary solution  $x(t)$  of the system (12) at  $t > 0$  will be  $|x(t)|_1 < \varepsilon$ , if

$$\begin{aligned} & \|x(0)\|_\tau < \delta_1(\varepsilon), \quad \left\| \dot{x}(0) \right\|_\tau < \delta_2(\varepsilon), \\ & \delta_1(\varepsilon) = \varepsilon / \sqrt{\varphi(H)}, \\ & \delta_2(\varepsilon) = \left[ \frac{L(H) - 2\|[(E-D) - \Delta D]^T H(B + \Delta B)\|(1 + \sqrt{\varphi(H)})}{4\|[(E-D) - \Delta D]^T H(D + \Delta D)\|} - \right. \\ & \left. - \frac{\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|}{1 - \|D + \Delta D\|} \sqrt{\varphi(H)} \right] \frac{\varepsilon R}{\sqrt{\varphi(H)}}, \\ & R = \min \left\{ 1, \left[ \frac{L(H) - 2\|[(E-D) - \Delta D]^T H(B + \Delta B)\|(1 + \sqrt{\varphi(H)})}{4\|[(E-D) - \Delta D]^T H(D + \Delta D)\|} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\sqrt{\varphi(H)} - 1) \frac{\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|}{1 - \|D + \Delta D\|} \right]^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Conditions of stability (17), are formulated in this theorem, suppose "weakening" to the next form.

**Theorem 9.** Let  $A+B$  - is asymptotically stable matrix and the condition (16) is executing. Then if  $\tau < \tau_0$ , where

$$\begin{aligned} \tau_0 = & \frac{L(H)(1 - \|D + \Delta D\|)}{2(\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|)} \left[ \|[(E-D) - \Delta D]^T H(B + \Delta B)\| + \right. \\ & \left. + \|[(E-D) - \Delta D]^T H(D + \Delta D)\| \frac{\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|}{1 - \|D + \Delta D\|} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (18)$$

the system (12) will be interval stable. Moreover for arbitrary solution  $x(t)$  will be  $|x(t)|_1 < \varepsilon$ ,  $t > 0$ , if  $\|x(0)\|_\tau < \delta_1(\varepsilon, \tau)$  and  $\left\| \dot{x}(0) \right\|_\tau \leq \delta_2(\varepsilon, \tau)$ ,

$$\delta_1(\varepsilon, \tau) = \min \left\{ \frac{e^{-\|A+\Delta A\|\tau}}{1+2\|D+\Delta D\|+\|B+\Delta B\|\tau}, \frac{L(H)(1-\xi)\zeta}{8\|D+\Delta D\|} * \right.$$

$$* \left[ \left\| [(E-D)-\Delta D]^T H(B+\Delta B) \right\| + \right.$$

$$\left. \left. + \left\| [(E-D)-\Delta D]^T H(D+\Delta D) \left\| \frac{\|A+\Delta A\|+\|B+\Delta B\|}{1-\|D+\Delta D\|} \right\| \right] \right\} \frac{R}{\sqrt{\varphi(H)}} \varepsilon,$$

$$\delta_2(\varepsilon, \tau) = \frac{L(H)(1-\xi)(1-\zeta)}{8\|D+\Delta D\| \left\| [(E-D)-\Delta D]^T H(D+\Delta D) \right\|} \frac{R}{\sqrt{\varphi(H)}} \varepsilon,$$

$$R = \min \left\{ 1, \left[ \frac{L(H)(1-\xi)(1-\zeta)}{8\|D+\Delta D\| \left\| [(E-D)-\Delta D]^T H(D+\Delta D) \right\| \sqrt{\varphi(H)}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\|A+\Delta A\|+\|B+\Delta B\|}{1-\|D+\Delta D\|} \sqrt{\varphi(H)} \right]^{-1} \right\},$$

$\xi = \tau / \tau_0$ ,  $0 < \zeta < 1$  – an arbitrary constant.

### 3. Interval stability of nonlinear (Lurie-Type) control systems with aftereffect

Here one of the methods of investigation is so-called "frequency method", which was developed in the works of Yakubovich V.A., Gelig A.H., Leonov G.A. The method is based on a study of behaviour of some curve ("hodograph") in the complex plane.

Another, alternative method, which was developed in the works of Barbashyn E.A., Martynyuk A.A. and others, there is a second method of Lyapunov function as a "quadratic form plus integral from the nonlinearity"[2]. Distribution of this method on the systems with delay and neutral type obtained in the works of Khusainov D.YA., Shatyрко A.V.[3].

In this paragraph will be considered the nonlinear control systems with deviating arguments of delay type. Using the method of finite Lyapunov functions and Razumikhin B.S. conditions [4] obtained sufficient conditions of interval stability, corresponding to a arbitrary delay, and fixed ("low"), which depends on system parameters. Two types of systems, so-called the systems of "direct" and "indirect" control are considered. The main results obtained in this section are published in the works [5 – 19]. Interesting similar results can be find at work [20].

#### 3.1. Direct control systems. Arbitrary time-delay

There are following conditions of **absolute stability** [2, 20–22], i.e. globally asymptotic stability of zero solution  $x(t) \equiv 0$  system (19) for arbitrary functions  $f(\sigma)$ , satisfying the condition (20).

To investigate the interval stability of the system (19) will use the Lyapunov function as a "quadratic form plus integral of the nonlinearity" (23). This function

gives good results in the research of absolute stability of the systems with exact set parameters [2].

**Theorem 10.** Let exists a positive definite matrix  $H$  and scalar  $\beta$ , such that

$$\lambda_{\min}(\tilde{H}) > 0 \quad \text{and} \quad \lambda_{\min}(C[A, H, \beta]) > 0.$$

Then the system without delay (19) is absolutely stable.

For the interval stability of the system without delay is fair the next result.

**Theorem 11.** Let exists a positive definite matrix  $H$  and scalar  $\beta$  such that

$$\lambda_{\min}(\tilde{H}) > 0 \quad \text{and} \quad \lambda_{\min}(C[A, H, \beta]) > 0$$

and if satisfies

$$\|\Delta A\| < \lambda_{\min}(C[A, H, \beta])(2|H| + \beta|c|)^{-1},$$

then the system (19) is interval stable.

Following statements are fair that give sufficient conditions of interval stability of the systems with delay (25).

**Theorem 12.** Let exists a positive definite matrix  $H$  and scalar  $\beta$ , such that

$$\lambda_{\min}(\tilde{H}) > 0, \quad \text{and} \quad L_1(H, \beta) > 0.$$

Then if satisfies

$$\gamma_2 \|\Delta A\| + (\gamma_1 + \gamma_2) \|\Delta B\| < L_1(H, \beta) \quad (28)$$

the system with delay (25) will be interval (robust) stable for arbitrary deviating argument  $\tau > 0$ . Moreover, for the solution  $x(t)$  of the system (25) will be  $|x(t)| < \varepsilon$ ,  $t > 0$  if  $\|x(0)\|_{\tau} < \delta(\varepsilon)$ , where  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / \sqrt{\varphi(\tilde{H})}$ .

It is proved that under the conditions specified in Theorem 12, solution of the system (25) exponentially converges to the beginning of co-ordinates. The following theorem is proved.

**Theorem 13.** Let exists a positive definite matrix  $H$  and scalar  $\beta$ , such that  $\lambda_{\min}(\tilde{H}) > 0$ , and  $L_1(H, \beta) > 0$ . If satisfies

$$L_1(H, \beta) > \|\Delta A\| + (\gamma_1 + \gamma_2) \|\Delta B\|$$

then for the solutions  $x(t)$  of the system (25) the following estimate of the exponential convergence is true

$$|x(t)| \leq \sqrt{\varphi(\tilde{H})} \|x(0)\|_{\tau} e^{-\gamma t/2}, \quad t > 0,$$

$$\gamma = \frac{\Psi(0)}{\Psi(0) + \gamma^* \lambda_{\min}(\tilde{H})},$$

$$\Psi(0) = L_1(H, \beta) - (\gamma_1 + \gamma_2) \|\Delta B\| - \gamma_2 \|\Delta A\|, \quad (29)$$

$$\gamma^* = \frac{2}{\tau} \ln \left[ 1 + \frac{\Psi(0)}{2|H|(|B| + \|\Delta B\|) \sqrt{\varphi(\tilde{H})}} \right].$$

### 3.2. Interval stability of the direct control systems with small time-delay

In this chapter will also consider the interval system with delay of the form (25). As in the previous chapter, suppose that matrices  $\Delta A$  i  $\Delta B$  unknown exactly, but their elements can take their values from some fixed interval (26). Nonlinear function of one argument  $f(\sigma)$  satisfies the condition (20).

Unlike the previous chapter, here will be received the sufficient conditions of interval stability of the system with delay (25) for "small" fixed delay  $\tau \leq \tau_0$ , that depends on parameters of the system. Receiving them uses the second method of A.M. Lyapunov with function of quadratic form plus integral of nonlinearity (23)

$$V_0(x) = x^T Hx + \beta \int_0^{\sigma(x)} f(\xi) d\xi, \quad \sigma(x) = c^T x.$$

The following conditions of absolute interval stability are proved.

**Theorem 14.** Let exists a positive definite matrix  $H$  and scalar  $\beta$ , such that  $\lambda_{\min}(\tilde{H}) > 0$  and matrix  $C[A+B, H, \beta]$  is positive definite. If satisfies  $L_2(H, \beta) > 0$  and  $\tau < \tau_0$ , where

$$\tau_0 = \frac{L(H)}{2(|HB| + |H||\Delta B|)(a+b)\sqrt{\varphi(\tilde{H})}}, \quad (33)$$

then system (25) will be absolutely interval stable and  $|x(t)| < \varepsilon, t > 0$ , if  $\|x(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon, \tau)$ , where

$$\delta(\varepsilon, \tau) = (1 + b\tau)^{-1} e^{-a\tau} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tilde{\varphi}(H)}}. \quad (34)$$

**Theorem 15.** Let exists a positive definite matrix  $H$  and scalar  $\beta$ , such that  $\lambda_{\min}(\tilde{H}) > 0$  and matrix  $C[A+B, H, \beta]$  is positive definite. If the perturbation  $\Delta A$  and  $\Delta B$  such that

$$L_2(H, \beta) > 0, \quad \tau < \tau_0,$$

then  $\tau < \tau_0$ , where  $\tau_0$  defined in (33), for solutions  $x(t)$  of the system (25) the following estimate of the exponential convergence is true

$$|x(t)| < \begin{cases} N(t)\|x(0)\|_\tau, & 0 \leq t \leq \tau, \\ N(\tau)\sqrt{\varphi(\tilde{H})}\|x(0)\|_\tau \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma(t-\tau)\right\}, & t > \tau, \end{cases} \quad (37)$$

where

$$\gamma = \frac{\Psi(0, \tau)\gamma^*}{\Psi(0, \tau) + \gamma^* \lambda_{\max}(\tilde{H})},$$

$$\Psi_0(0, \tau) = L_2(H, \beta)(1 - \xi), \quad \xi = \tau / \tau_0, \quad (38)$$

$$\gamma^* = \ln \frac{2}{\tau} \left[ \frac{\sqrt{a^2 \xi^2 + 4\xi b(a+b)} - a\xi}{2b\xi} \right].$$

### 3.3. Interval stability of indirect control systems with time-delay

In this chapter will be considered the so-called indirect control systems. They are characterized by the existence of one equals to zero eigen-value of the matrix of the linear approximation.

The function of Lyapunov, type "quadratic form plus integral of nonlinearity" is used at research.

$$V_0(x, \sigma) = x^T Hx + \int_0^\sigma f(\xi) d\xi. \quad (44)$$

**Theorem 16.** Let exists a positive definite matrix  $H$ , such that

$$\Psi(0) > 0, \quad \Psi(0) = L(H) - 2|H| \left[ \|\Delta A\| + (2 + \sqrt{\varphi(\overline{H})}) \|\Delta B\| \right]. \quad (54)$$

Then the system (52) is absolutely interval stable at any arbitrary delay  $\tau > 0$  and for solutions  $x_\sigma(t)$  will be  $|x_\sigma(t)| < \varepsilon$ ,  $t > 0$ , if  $\|x_\sigma(t)\|_\tau < \delta(\varepsilon)$ ,  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / \sqrt{\varphi(\overline{H})}$ .

Calculate the rates of exponential convergence of solutions of systems (52).

**Theorem 17.** Let exists a positive definite matrix  $H$ , such that satisfies the inequality (54). Then at any arbitrary delay  $\tau > 0$  for solutions  $x_\sigma(t)$  of the system (52) the following estimate of the exponential convergence is true

$$|x_\sigma(t)| < \sqrt{\varphi(\overline{H})} \|x_\sigma(0)\|_\tau \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma t\right\}, \quad t > 0, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \min\{\gamma_1, \gamma_2\}, \quad \gamma_1 = \Psi(0)\gamma^* \left[ \Psi(0) + \gamma^* \lambda_{\max}(\overline{H}) \right]^{-1}, \\ \gamma^* &= \frac{2}{\tau} \ln \left[ \frac{1}{\sqrt{\varphi(\overline{H})}} \left( \frac{\lambda_{\min}(C[A+B, H]) - 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|)}{2(|HB| + |H|\|\Delta B\|)} - 1 \right) \right], \\ \gamma_2 &= \frac{\lambda_{\min}(C[A+B, H]) - 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|)}{\lambda_{\max}(\overline{H})}. \end{aligned} \quad (56)$$

### 3.4. Indirect control systems. Small time-delay

In this chapter are given sufficient conditions of interval absolute stability of the system (52) for sufficiently small delay that depends on parameters of the system. At the investigations uses Lyapunov function of a type of Lurie-Postnikov i.e. type of sums of "quadratic form and the integral of the nonlinearity"

$$V_0(x, \sigma) = x^T Hx + \int_0^\sigma f(\xi) d\xi$$

**Theorem 18.** Let exists a positive definite matrix  $H$ , such that

$$L_4(H) > 0.$$

Then at  $\tau < \tau_0$ , where

$$\tau_0 = \frac{L_4(H) \min\{1, k_1^2\}}{2(|HB| + |H\|\Delta B\|)l(0)\sqrt{\varphi(\bar{H})}} \quad (64)$$

system (52) is absolutely interval stable. Moreover, for arbitrary solution  $x_\sigma(t)$  of the system (52) will be  $\|x_\sigma(t)\| < \varepsilon$ ,  $t > 0$ , if  $\|x_\sigma(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon, \tau)$ , where

$$\delta(\varepsilon, \tau) = e^{-|L|\tau} \frac{\varepsilon}{N(\tau)\sqrt{\varphi(\bar{H})}}, \quad (65)$$

$$L_4(H) = \lambda_{\min}(C[A + B, H]) - 2|H|(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|),$$

Here

$$C[A + B, H] = \begin{bmatrix} -(A + B)^T - H(A + B) & -\left(Hb + \frac{1}{2}c\right) \\ -\left(Hb + \frac{1}{2}c\right)^T & \rho \end{bmatrix}.$$

We will show that with the satisfying of the conditions of Theorem 18 the solution of the system (52) converge by the exponential law. To prove the estimates of convergence uses no autonomous Lyapunov function..

$$V(x, \sigma, t) = e^{\gamma t} V_0(x, \sigma, t).$$

**Theorem 19.** Let exists a positive definite matrix  $H$ , such that

$$L_4(H) > 0.$$

Then at  $\tau < \tau_0$  for solutions  $x_\sigma(t)$  the following estimate of the exponential convergence is true

$$\|x_\sigma(t)\| \leq \begin{cases} N(t)\|x(0)\|_\tau e^{|L|t}, & \text{npu } 0 \leq t \leq \tau, \\ N(\tau)\|x(0)\|_\tau \sqrt{\varphi(\bar{H})} e^{|\tau - \gamma(t - \tau)|/2}, & \text{npu } t > \tau \end{cases}, \quad (67)$$

where

$$\gamma = \frac{\Psi(0)\gamma^*}{\Psi(0) + \lambda_{\max}(\bar{H}) \min\{1, k_1^2\} \gamma^*}, \quad (68)$$

$$\gamma^* = \frac{2}{\tau} \ln \left[ \frac{\sqrt{a^2 + 4b(a + b + R)} - a}{2b} \right],$$

$$R = \frac{\Psi(0)}{2(|HB| + |H\|\Delta B\|)\sqrt{\varphi(\bar{H})}},$$

$$a = |A| + \|\Delta A\| + k_2|b|c, \quad b = |B| + \|\Delta B\|,$$

$$\Psi(0) = L_4(H) \min\{1, k_1^2\} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right).$$

#### 4. Construction the interval stability conditions of nonlinear (Lurie-Type) control systems with aftereffect using the Lyapunov-Krasovskiy functionals

In the previous chapter were considered the nonlinear control systems with nonlinearity of a sector type. It was obtained sufficient conditions of absolute interval stability. In the process of the constructing used the method of finite dimensional function of Lyapunov with the condition of Razumikhin. Condition of Razumikhin facilitates realization the Lyapunov functions. This approach give the possibility to estimate the influence of aftereffect that depends from the delay rate. But conditions of Razumikhin impose quite strong restrictions on the aftereffect. Using them may not always be effective.

In this chapter we will use an alternative method of Lyapunov-Krasovskiy functionals [8]. The integral additions of quadratic form as the functionals are the most effective. This approach simplified estimates. But as a point of phase space is considered the entire interval of the trajectory, so the approach does not let us estimate the influence of delay on absolute stability. Besides the full derivative is a quadratic form from phase coordinates and its prehistory. So the matrix of quadratic form of the full derivative has the twice biggest dimension.

##### 4.1. Time-delay direct control systems

In this chapter we obtain the conditions of interval stability of the systems (25) using the Lyapunov-Krasovskiy functional

$$V[x(t)] = x^T(t)Hx(t) + \int_{-r}^0 x^T(t+s)Gx(t+s)ds + \beta \int_0^{\sigma(t)} f(\sigma)d\sigma, \quad \sigma(t) = c^T x(t). \quad (69)$$

**Theorem 20.** Let exist a positive definite matrices  $G$ ,  $H$ , and parameter  $\beta > 0$ , such that the matrix

$$S[G, H, \beta] = \begin{bmatrix} -A^T H - HA - G & -HB & -[Hb + \frac{1}{2}(\beta A^T + I)c] \\ -B^T H & G & \theta \\ -[Hb + \frac{1}{2}(\beta A^T + I)c]^T & \theta^T & \frac{1}{k} - \beta b^T c \end{bmatrix} \quad (71)$$

is positive defined. Then the system with delay without interval perturbations (70) is absolutely stable.

**Theorem 21.** Let exist a positive definite matrices  $G$ ,  $H$ , and parameter  $\beta > 0$ , such that satisfies the inequality

$$\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) > \|\Delta A\|H + \sqrt{\|\Delta A\|^2|H|^2 + \|\Delta B\|^2|H|^2 + \frac{1}{4}\beta^2\|\Delta A\|^2|c|^2} \quad (73)$$

Then the system (25) is absolutely interval stable.

## 4.2. Time-delay indirect control systems

In this chapter will consider the system of indirect control, which described by the interval set differential equations with the delayed argument (52)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t - \tau) + bf(\sigma(t)) \\ \dot{\sigma}(t) &= c^T x(t) - \rho f(\sigma(t)).\end{aligned}$$

Will use the Lyapunov-Krasovskiy functional

$$V[x(t), \sigma(t)] = x^T(t)Hx(t) + \int_{-\tau}^0 x^T(t+s)Gx(t+s)ds + \int_0^{\sigma(t)} f(\xi)d\xi. \quad (75)$$

First consider the system without interval perturbation. And prove the absolute stability conditions of this system.

**Theorem 22.** Let exist a positive definite matrices  $G$ ,  $H$ , such that the matrix

$$S[G, H] = \begin{bmatrix} -A^T H - HA & -HB & -(Hb + \frac{1}{2}) \\ -B^T H & G & \theta \\ -(Hb + \frac{1}{2}c) & \theta^T & \rho \end{bmatrix} \quad (76)$$

is positive defined. Then the delay system type (52), but without interval perturbations, is absolutely stable.

Conditions of absolute interval stability of control system (52) presented in the following theorem.

**Theorem 23.** Let exist a positive definite matrices  $G$ ,  $H$ , such that

$$\frac{\lambda_{\min}(S[G, H])}{\lambda_{\max}(H)} > \|\Delta A\| + \sqrt{\|\Delta A\|^2 + \|\Delta B\|^2} \quad (78)$$

Then the system with delay (52) is absolutely interval stable.

## 4.3. Neutral type direct control systems

Consider the direct control system, which described by the interval set differential equations with the deviating argument of neutral type (80).

To obtain the conditions of absolute interval stability will use the Lyapunov-Krasovskiy functional of the form

$$\begin{aligned}V[x(t)] &= (x(t) - Dx(t - \tau))^T H(x(t) - Dx(t - \tau)) + \\ &+ \int_{-\tau}^0 x^T(t+s)Gx(t+s)ds + \beta \int_0^{\sigma(t)} f(\xi)d\xi, \\ \sigma(t) &= c^T x(t).\end{aligned} \quad (81)$$

Denote

$$S[G, H, \beta] = \begin{bmatrix} -A^T H - HA - G & -HB + A^T HD & -\left[ Hb + \frac{1}{2}(\beta A^T + I)c \right] \\ -B^T H + D^T HA & {}^T HD + D^T HB + G & \theta \\ -\left[ Hb + \frac{1}{2}(\beta A^T + I)c \right]^T & \theta^T & \frac{1}{k} - \beta b^T c \end{bmatrix}$$

**Theorem 24.** Let exist a positive definite matrices  $G$ ,  $H$ , and parameter  $\beta > 0$ , such that the matrix  $S[G, H, \beta]$  also positive defined. Then the system without interval perturbation (82) is absolutely stable in metrics

$$\|x(t)\|_2 = \left\{ \int_{-\tau}^0 |x(t+s)|^2 ds \right\}.$$

**Theorem 25.** Let exist a positive definite matrices  $G$ ,  $H$ , and parameter  $\beta > 0$ , such that the inequality is satisfies

$$\lambda_{\min}(S[G, H, \beta]) > (\|\Delta A\|H + \|\Delta B\|H) + \sqrt{(\|\Delta A\|H + \|\Delta B\|HD)^2 + (\|\Delta B\|H + \|\Delta A\|HD)^2}. \quad (85)$$

Then the system (80) is absolutely interval stable in metrics  $\|x(t)\|_2$ .

From the Theorem 25 directly follows the result which is more easily realized to verify the conditions of interval stability.

**Corollary 1.** Let exist a positive definite matrices  $G$  and  $H$  and parameter  $\beta > 0$ , such that satisfies the inequality

$$\frac{\lambda_{\min}(S[G, H, \beta])}{\lambda_{\max}(H)} > (\|\Delta A\| + \|\Delta B\|) + \sqrt{(\|\Delta A\| + \|\Delta B\|D)^2 + (\|\Delta B\| + \|\Delta A\|D)^2}.$$

Then the system (80) is absolutely interval stable in metrics  $\|x(t)\|_2$ .

#### 4.4. Neutral type indirect control systems

Consider the indirect control system, which described by the interval set differential equations with the deviating argument of neutral type (86).

At research of stability will use the Lyapunov-Krasovskiy functional

$$V[x(t), \sigma(t)] = (x(t) - Dx(t - \tau))^T H(x(t) - Dx(t - \tau)) + \int_{-\tau}^0 x^T(t+s)Gx(t+s)ds + \int_0^{\sigma(t)} f(\xi)d\xi \quad (87)$$

Let denote

$$S[G, H] = \begin{bmatrix} -A^T H - HA - G & -HB + D^T HA & -(Hb + \frac{1}{2}) \\ -B^T H + A^T HD & G + B^T HD + D^T HB & D^T Hb \\ -(Hb + \frac{1}{2}c)^T & b^T HD & \rho \end{bmatrix}$$

**Theorem 26.** Let exist a positive definite matrices  $G$ ,  $H$ , such that matrix  $S[G, H]$  also positive definite. Then the system of neutral type (86), but without interval perturbations, is absolutely stable in metrics  $\|x(t)\|_2$ .

**Theorem 27.** Let exist a positive definite matrices  $G$ ,  $H$ , such that satisfies

$$\lambda_{\min}(S[G, H]) > \left[ \|\Delta A\| \|H\| + \|\Delta B\| \|HD\| \right] + \sqrt{\left[ \|\Delta A\| \|H\| - \|\Delta B\| \|HD\| \right]^2 + \left[ \|\Delta B\| \|H\| + \|\Delta A\| \|HD\| \right]^2}. \quad (90)$$

Then the system of neutral type (86) is absolutely interval stable in metrics  $\|x(t)\|_2$ .

So, in textbook is carry out the investigation of the actual problem - the analysis of dynamical systems with inexact set parameters. We consider nonlinear "direct" and "indirect" control systems, which are described in terms of differential equations with delay argument and neutral type. The method of research selected the second method of Lyapunov. With the apparatus of Lyapunov functions and functionals of Lyapunov-Krasovskiy type "quadratic form plus integral of nonlinearity" sufficient conditions of absolute interval (robust) stability is obtained, and investigated qualitative behaviour of solutions of systems.

## ВИСНОВОК

Отже, в посібнику проведено дослідження актуальної проблеми – аналіз динамічних систем з неточно заданими параметрами. Розглянуто нелінійні системи «прямого» та «непрямого» регулювання, що описуються в термінах диференціальних рівнянь з запізнюючимся аргументом та нейтрального типу. Методом дослідження вибрано другий метод Ляпунова. За допомогою апарата функцій Ляпунова та функціоналів Ляпунова-Красовського вигляду «квадратична форма плюс інтеграл від не лінійності» отримані достатні умови абсолютної інтервальної (робастної) стійкості, та вивчено якісний характер поведінки розв'язків систем.

## Література

1. Хусаинов Д.Я., Мустафаева Р. Робастная устойчивость систем с запаздыванием // Украинский математический журнал, Т.47, №6, 1995. – С.859-863.
2. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. - М., Наука, 1970. – 240 с.
3. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. Изд-во Киевского университета, Киев, 1997. – 236с.
4. Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикл. мат и мех. – Т.20, №4, – 1956. – С.500 – 512.
5. Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т., Шатырко А.В. Интервальна стійкість систем прямого регулювання з малим запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.3, 2001. – С.320-328.
6. Кожаметов А.Т., Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я. Интервальна стійкість систем непрямого регулювання з запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.4, 2001. – С.268-274.
7. Кожаметов А.Т., Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я. Интервальна стійкість систем регулювання з запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.5, 2001. – С.73-88.
8. Khusainov D.Ya., Kozhametov A.T. Control of Spectrum in Functional-Differential Systems. – Application of Mathematics in Engineering and Economics. – Proceedings of the 28-th International Summer School on Application of Mathematics in Engineering and Economics, Sofia, 2003. – pp.102-110.
9. Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я. Дослідження інтервальної стійкості диференціальних систем регулювання із запізненням за допомогою функціоналів Ляпунова-Красовського. Вісник Київ Ун-ту. Серія: Фіз.-мат. Науки. Вип.3, Київ, 2009. С.212-221.
10. Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я. Отримання умов абсолютної стійкості систем непрямого регулювання методом функціоналів Ляпунова-Красовського. Вісник Київ Ун-ту. Серія: Фіз.-мат. Науки. Вип.4, Київ, 2009. С.145-152.
11. Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я. Абсолютна інтервальна стійкість диференціальних систем регулювання нейтрального типу. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. – 2009.-Т.6,№3. С.232-247.
12. Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я. Абсолютная интервальная устойчивость систем непрямого регулирования нейтрального типа // Междунар. научно-техн. журнал «Проблемы управления и информатики» - 2010, №3. С.5-16
13. Shatyрко A.V., Khusainov D.Ya. Absolute interval stability of indirect regulating systems of neutral type // Journal of automation and information science. – 2010. Vol.42, Iss.6, P.43-54.
14. Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я., Диблик Й., Баштинец Я., Риволова А. Оценки возмущений нелинейных систем непрямого регулирования нейтрального типа // Кибернетика и вычислительная техника – 2010. Вып.160, С.72-85.
15. Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я., Диблик Й., Баштинец Я., Риволова А. Оценки возмущений интервальных нелинейных систем непрямого регулирования нейтрального типа // Междунар. научно-техн. журнал «Проблемы управления и информатики» - 2011, №1. С.15 – 29.

16. Шатырко А.В. Абсолютная интервальная устойчивость систем регулирования нейтрального типа // Доповіді НАНУ – 2011, №2. С.18 – 23.
17. Shatyрко A.V., Khusainov D.Ya., Diblik J, Bastinec J, Rivolova A. Estimates of perturbation of nonlinear indirect interval control system of neutral type // Journal of automation and information science. – 2011. Vol.43, Iss.1, P.13-28.
18. Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я. Исследование абсолютной устойчивости нелинейных систем специального вида с последействием методом функций Ляпунова // Междунар. научно-техн. журнал «Проблемы управления и информатики» - 2011, №4. С.7-20
19. Shatyрко A.V., Khusainov D.Ya. Investigation of Absolute Stability of Nonlinear Systems of Special Kind with Aftereffect by Lyapunov Functions Method // Journal of automation and information science. – 2011. Vol.43, Iss.7, P.61-75.
20. X.Liao, P.Yu. Absolute Stability of Nonlinear Control Systems. – Springer Science+Business Media B.V., 2008. – 390 p.
21. Комарова Г.Л., Леонов Г.А. Об оценке областей притяжения состояния равновесия динамической системы прямым методом Ляпунова // Прикладная математика и механика, Т.49, № 6, 1985. - С.900-908.
22. Корневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. - К., Наукова думка, 1989. – 208 с.
23. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. - М., Наука, 1971. – 296с.

## З М І С Т

<b>ПЕРЕДМОВА .....</b>	<b>3</b>
<b>ВСТУП.....</b>	<b>4</b>
<b>1. ДОСЛІДЖЕННЯ ІНТЕРВАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ І СИСТЕМ РІВНЯНЬ .....</b>	<b>5</b>
<b>2. ІНТЕРВАЛЬНА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З ПІСЛЯДІЄЮ.....</b>	<b>10</b>
<b>3. ІНТЕРВАЛЬНА СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ РЕГУЛЮВАННЯ З ПІСЛЯДІЄЮ.....</b>	<b>15</b>
<b>3.1. Системи прямого регулювання. Довільне запізнення</b>	<b>15</b>
<b>3.2. Інтервальна стійкість систем прямого регулювання з малим запізненням .....</b>	<b>22</b>
<b>3.3. Інтервальна стійкість систем непрямого регулювання з запізненням .....</b>	<b>28</b>
<b>3.4. Системи непрямого регулювання. Мале запізнення</b>	<b>34</b>
<b>4. ОТРИМАННЯ УМОВ ІНТЕРВАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ РЕГУЛЮВАННЯ З ПІСЛЯДІЄЮ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІОНАЛІВ ЛЯПУНОВА-КРАСОВСЬКОГО .....</b>	<b>41</b>
<b>4.1. Системи прямого регулювання з запізненням</b>	<b>41</b>
<b>4.2. Системи непрямого регулювання з запізненням</b>	<b>44</b>
<b>4.3. Системи прямого регулювання нейтрального типу</b>	<b>47</b>
<b>4.4. Системи непрямого регулювання нейтрального типу</b>	<b>50</b>
<b>5. SUMMARY .....</b>	<b>54</b>
<b>ВИСНОВОК .....</b>	<b>70</b>
<b>Література .....</b>	<b>71</b>

**Навчальне видання**

**Шатирко Андрій Володимирович  
Хусаїнов Денис Яхьєвич**

**СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ  
СИСТЕМ РЕГУЛЮВАННЯ  
З ПІСЛЯДІЄЮ**

**Навчальний посібник**



**Редактор**

**Оригінал-макет виготовлено у ДП «Інформаційно-аналітичне  
агентство» м.Київ**