МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Є.О. Лебєдєв
І.А. Макушенко

ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ ДЛЯ БАГАТОКАНАЛЬНИХ СТОХАСТИЧНИХ МЕРЕЖ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Є.О. Лебєдєв, І.А. Макушенко

ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ ДЛЯ БАГАТОКАНАЛЬНИХ СТОХАСТИЧНИХ МЕРЕЖ

Навчальний посібник

Київ 2012

УДК 519.21
ББК 22.171 я73
Л33

Рецензенти:

П. С. Кнопов, член-кор. НАН України
О. Г. Наконечний, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рекомендовано до друку Вченою радою факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 9 від 28 травня 2012 року)

Лебєдєв Є. О., Макушенко І. А.

Л33 Оптимальний розподіл зовнішнього навантаження для багатоканальних стохастичних мереж: Навчальний посібник. – К.: НБУВ, 2012. – 90 с.: іл.

У навчальному посібнику для багатоканальних стохастичних мереж напівмарковського типу розглянуто задачі оптимального керування напрямком вхідного потоку. При цьому вибір стратегії керування базується на таких показниках якості функціонування мережі як середній прибуток від роботи всієї мережі та ризик досягнення певного прибутку. Значна увага приділяється побудові апроксимативних процесів для багатовимірного процесу обробки інформації в умовах критичного навантаження в мережі.

Призначений для студентів фізико-математичних та технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 519.21
ББК 22.171 я73

Навчальний посібник

Лебедєв Євген Олександрович
Макушенко Ігор Анатолійович

ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ ДЛЯ БАГАТОКАНАЛЬНИХ СТОХАСТИЧНИХ МЕРЕЖ

В авторській редакції

Підп. до друку 25.06.2012. Формат 60x84/16. Папір офс. Друк офс.
Ум. друк. арк. 5,8. Обл.-вид. арк. 8,9. Наклад 100 прим. Зам. № 17.

Віддруковано у науково-видавничому центрі
Національної бібліотеки України імені. В. І. Вернадського.
03039, Київ, пр-т 40-річчя Жовтня, 3

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 1390 від 11.06.2003 р.

Вступ

Стохастичні мережі виникли при моделюванні реально діючих інформаційно-обчислювальних мереж та сучасних мереж зв’язку. Від класичних стохастичних систем їх відрізняє, насамперед, багатовимірність процесу обробки інформації і складна структура вхідного потоку на кожний вузол обробки. Це висуває нові математичні проблеми, які слід розв’язувати при аналізі стохастичних мереж. Сучасні задачі з проектування та модернізації інформаційно-обчислювальних мереж, мереж мобільного зв’язку потребують розв’язку оптимізаційних задач для стохастичних мереж. Головними є задачі розподілу інформаційних потоків, вибору пропускних спроможностей та топологічної структури мережі. Повнота розв’язку цих задач залежить від керуючих розподілів мережі, складності алгоритму маршрутизації та виду функції вартості.

У навчальному посібнику розглянуто задачі оптимального керування напрямком вхідного потоку для моделей багатоканальних стохастичних мереж напівмарковського типу. При цьому вибір стратегії керування базується на таких показниках якості функціонування мережі як середній прибуток від роботи всієї мережі та ризик досягнення певного прибутку. Розглянуті у посібнику моделі відрізняються від класичних багатоканальних мереж Джексона тим, що керуючі послідовності для процесу надходження і обробки інформації мають довільний розподіл. Це дозволяє поглибити аналіз проблем, що пов’язані з проектуванням, впровадженням, експлуатацією та модернізацією інформаційно-обчислювальних мереж, мереж мобільного зв’язку. Значна увага приділяється побудові апроксимативних процесів для багатовимірного процесу обробки інформації в умовах критичного навантаження в мережі.

Навчальний посібник призначений для студентів фізико-математичних та технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

1. Основна модель багатоканальної мережі і постановка оптимізаційних задач

1.1. Процес обробки інформації в мережах типу $[SM|GI|\infty]^r$

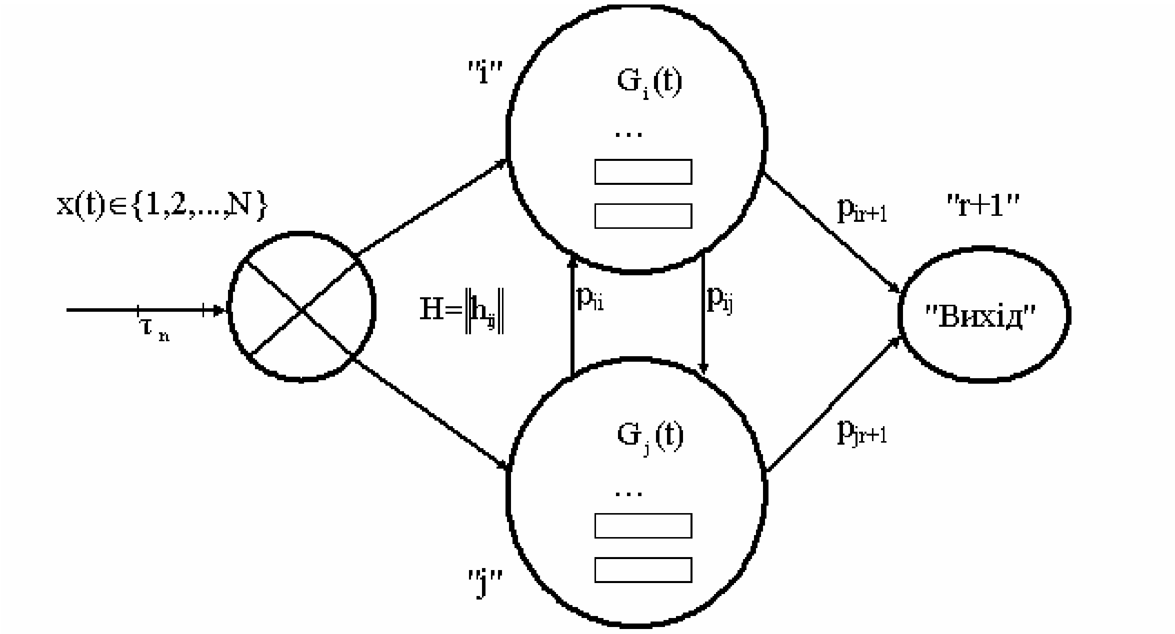

Рис. 2.1. Схема алгоритму обробки пакетів у $[SM|GI|\infty]^r$-мережі.

Розглянемо стохастичну мережу, яка функціонує наступним чином.

На "r" вузлів іззовні надходить один загальний потік пакетів, який керується напівмарковським процесом $x(t)\in\{1,2,...,N\}$. Це означає, що моменти надходження пакетів співпадають з моментами τ_n, $n=1,2,...$ змін станів $x(t)$. Якщо у момент τ_n процес $x(t)$ переходить у стан "i", то пакет з номером "n" з імовірністю h_{ij} надходить для обробки у вузол "j", $\sum_{j=1}^{r} h_{ij}=1$, $H=\|h_{ij}\|$ - прямокутна матриця розміром $N\times r$. Через

$F(t)=\left\|F_{ij}(t)\right\|_1^N$ будемо позначати напівмарковську матрицю процесу $x(t)$, а через $F_i(t)=\sum_{j=1}^{N}F_{ij}(t)$ – функцію розподілу часу перебування у стані "i".

Кожен з "r" вузлів представляє собою багатоканальну стохастичну систему. При надходженні пакету у таку систему зразу починається його обробка. Розподіл часу обробки залежить від номера вузла, через $G_j(t)$, $j=1,2,\dots,r$, будемо позначати його функцію розподілу (ф.р.). Після обробки у j- ому вузлі пакет з імовірністю p_{jk} надходить у вузол k і з імовірністю $p_{j\,r+1}=1-\sum_{k=1}^{r}p_{jk}$ залишає мережу, $P=\left\|p_{jk}\right\|_1^r$- матриця маршрутизації мережі. Додатковий вузол з номером "$r+1$" інтерпретується як "вихід" з мережі.

Стохастичні мережі такого типу використовувались при моделюванні процесів обробки інформації в системах мобільного зв'язку і мережах передачі даних [1], [2], при дослідженні параметрів трекової іонізації в трекових камерах [3], [4], в фармакокінетиці [5] та інших областях. Надалі будемо вважати, що $G_j(0+)=0$, $j=1,2,\dots,r$ і $F_i(0+)=0$, $i=1,2,\dots,N$, що завжди виконується на практиці. У відповідності до прийнятої системи позначень описану вище модель будемо позначати символом $[SM|GI|\infty]^r$.

Для мереж типу $[SM|GI|\infty]^r$ багатовимірним процесом обробки інформації будемо називати вектор $Q'(t)=(Q_1(t),\dots,Q_r(t))$, де $Q_j(t)$, $j=1,2,\dots,r$ - число пакетів у j- ому вузлі в момент часу $t\ge 0$. Якщо у початковий момент мережа порожня, $x(0)=i$, і момент надходження першого пакету в мережу співпадає з моментом виходу з "i", то процес обробки інформації будемо позначати через $Q^{i'}(t)=(Q_1^i(t),\dots,Q_r^i(t))$.

Для векторів $Q(t)$, $Q^i(t)$, $i=1,\dots,N$, введемо генератриси

$$\Phi(t,z)=Mz_1^{Q_1(t)}\times\dots\times z_r^{Q_r(t)}, \qquad \Phi^i(t,z)=Mz_1^{Q_1^i(t)}\times\dots\times z_r^{Q_r^i(t)},$$

$$z=(z_1,\ldots,z_r), \quad |z|\le 1.$$

Траєкторія пакету від моменту надходження в мережу до моменту виходу з неї може бути описана напівмарковським процесом $y(t)$, який приймає значення у множині станів $\{1,2,\ldots,r,r+1\}$ і визначається напівмарковською матрицею $\|G_{ij}(t)\|_1^{r+1}$

$$G_{ij}(t)=\begin{cases} p_{ij}G_i(t), & i=1,2,\ldots,r,\ j=1,2,\ldots,r,r+1, \\ \delta_{r+1j}G_{r+1}(t), & i=r+1,\ j=1,2,\ldots,r,r+1, \end{cases} \qquad G_{r+1}(t)=\begin{cases} 0, & t<1, \\ 1, & t\ge 1, \end{cases}$$

δ_{ij} - дельта Кронекера.

Стан "$r+1$" для процесу $y(t)$ є поглинаючим. Поглинання у "$r+1$" інтерпретується як вихід пакету з мережі. Через $p_j^i(t)=P(y(t)=j/y(0)=i)$ будемо позначати перехідні імовірності напівмарковського процесу $y(t)$.

Припустимо, що у початковий момент часу $t=0$ в i- ому вузлі $[SM|GI|\infty]^r$ - мережі знаходиться n_i, $i=1,2,\ldots,r$, пакетів, обробка яких ще не розпочиналася. Момент надходження іззовні першого пакету співпадає з моментом виходу $x(t)$ з початкового стану, і розподіл $x(0)$ співпадає з $p_1,p_2,\ldots,p_N$. Тоді

$$\Phi(t,z)=\prod_{i=1}^{N}[1-\sum_{j=1}^{r}p_j^i(t)(1-z_j)]^{n_i}[\sum_{k=1}^{N} p_k\Phi^k(t,z)]. \tag{1.1}$$

Змінюючи час перебування $y(t)$ у початковому стані можна враховувати те, що пакети n_i, $i=1,2,\ldots,r$, знаходяться в процесі обробки на момент $t=0$. Для $\Phi(t,z)$ ми будемо мати вираз, аналогічний (1.1).

Таким чином при вивченні процесу обробки пакетів у $[SM|GI|\infty]^r$ - мережі можна обмежитись аналізом r- вимірних процесів $Q^i(t)$, $i=1,2,\ldots,r$, яким відповідають генератриси $\Phi^i(t,z)$. В свою чергу процес $Q^i(t)$, $t\ge 0$, будується на основі двох процесів $x(t)$ ($x(0)=i$), $y(t)$

напівмарковського типу. Тому природньо при його аналізі спиратись на результати теорії напівмарковських процесів.

Використовуючи для $x(t)$ відому методику побудови формул для характеристик напівмарковських процесів за першим стрибком (див. [7], стор. 41-50), ми отримаємо, що функції $\Phi^i(t,z)$, $i=1,2,...,r$, задовольняють системі інтегральних рівнянь

$$\Phi^i(t,z) = 1 - F_i(t) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^t d\, F_{ij}(u) \Phi^j(t-u,z) \times \tag{1.2}$$

$$\times \sum_{k=1}^{r} h_{jk} [p_{r+1}^k(t-u) + p_1^k(t-u) z_1 + ... + p_r^k(t-u) z_r], \qquad i=1,2,\dots,N.$$

У подальшому ми проаналізуємо систему (1.2) і подамо характеристики $Q(t)$ в термінах напівмарковських процесів $x(t)$, $y(t)$.

1.2. Перехідний режим для процесу обробки інформації

В цьому підрозділі ми встановимо, що система інтегральних рівнянь (1.2) визначає генератриси $\Phi^i(t,z)$, $i=1,2,...,r$, як функції часу t єдиним чином і проаналізуємо моменти першого і другого порядку процесу обробки пакетів.

Нехай L_T, $0 < T < \infty$ - повний метричний простір векторних функцій

$$\Phi'(t,z) = (\Phi^1(t,z), \Phi^2(t,z), ..., \Phi^N(t,z)), \qquad z' = (z_1, ..., z_r),$$

з компонентами $\Phi^i(t,z)$, які визначені для $0 \le t \le T$, $|z| \le 1$, вимірні за t і є імовірносними генератрисами відносно z. Відстань між $\Phi, \Phi^* \in L_T$ визначимо рівністю

$$\rho(\Phi, \Phi^*) = \max_{1 \le i \le N} \sup_{\substack{0 \le t \le T \\ |z| \le 1}} \left| \Phi^i(t,z) - \Phi^{i*}(t,z) \right|.$$

При вивченні перехідного режиму важливу роль відіграє наступний результат.

Теорема 1.1. Для довільного $T>0$ генератриси $\Phi^i(t,z)$, $0\le t\le T$, $|z|\le 1$, векторів $Q^i(t)$, $i=1,2,\ldots,N$, є єдиним розв'язком системи інтегральних рівнянь (1.2), який при $0\le t\le T$ належить L_T.

Доведення. Розглянемо оператор $\widetilde{\Phi}=H_T\Phi$, який функцію

$$\Phi'(t,z)=(\Phi^1(t,z),\Phi^2(t,z),\ldots,\Phi^N(t,z))\in L_T$$

переводить у

$$\widetilde{\Phi}'(t,z)=(\widetilde{\Phi}^1(t,z),\widetilde{\Phi}^2(t,z),\ldots,\widetilde{\Phi}^N(t,z)),$$

де

$$\widetilde{\Phi}^i(t,z)=1-F_i(t)+\sum_{j=1}^{N}\int_0^t d\,F_{ij}(u)\Phi^j(t-u,z)\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{r}h_{jk}[p_{r+1}^k(t-u)+p_1^k(t-u)z_1+\ldots+p_r^k(t-u)z_r],$$

$$i=1,2,\ldots,N.$$

Очевидно оператор H_T здійснює відображення L_T у себе.

Нехай $t_0>0$ обрано так, що $\max\limits_{1\le i\le r}F_i(t_0)=q<1$. З визначення оператора H_{t_0} випливає, що при $t\le t_0$

$$\left|\widetilde{\Phi}^i(t,z)-\widetilde{\Phi}^{i*}(t,z)\right|=$$

$$=\left|\sum_{j=1}^{N}\int_0^t d\,F_{ij}(u)(\Phi^j(t-u,z)-\Phi^{j*}(t-u,z))\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^{r}h_{jk}[p_{r+1}^k(t-u)+p_1^k(t-u)z_1+\ldots+p_r^k(t-u)z_r]\right|\le$$

$$\le\rho_{t_0}\left(\Phi,\Phi^*\right)\int_0^t d\,F_i(u)\le q\,\rho_{t_0}\left(\Phi,\Phi^*\right).$$

Таким чином оператор H_{t_0} здійснює стиснене відображення L_{t_0} у себе. З теореми про нерухому точку стискуючого оператора випливає, що в L_{t_0} існує єдина нерухома точка оператора H_{t_0}, яка є розв'язком (1.2) при $0\le t\le t_0$.

Розглянемо тепер підпростір $L^*_{2t_0}$ простору L_{2t_0}, що складається з векторних функцій, які на відрізку $[0,t_0]$ співпадають з нерухомою точкою оператора H_{t_0}. Оскільки $\Phi(t,z) \equiv \Phi^*(t,z)$ при $0 \le t \le t_0$ для довільних $\Phi, \Phi^* \in L^*_{2t_0}$, то для усіх $t_0 \le t \le 2t_0$

$$\left|\widetilde{\Phi}^i(t,z) - \widetilde{\Phi}^{i*}(t,z)\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{N} \int_0^{t-t_0} d\,F_{ij}(u)(\Phi^j(t-u,z) - \Phi^{j*}(t-u,z)) \times\right.$$

$$\left. \times \sum_{k=1}^{r} h_{jk}[p^k_{r+1}(t-u) + p^k_1(t-u)z_1 + \ldots + p^k_r(t-u)z_r]\right| \le$$

$$\le q\,\rho_{2t_0}\left(\Phi, \Phi^*\right).$$

Звідси випливає, що для довільних $\Phi, \Phi^* \in L^*_{2t_0}$

$$\rho_{2t_0}(H_{2t_0}\Phi, H_{2t_0}\Phi^*) \le q\,\rho_{2t_0}\left(\Phi, \Phi^*\right)$$

і H_{2t_0} є стиснене відображення $L^*_{2t_0}$ в себе. Тому в $L^*_{2t_0}$ також існує єдина нерухома точка.

Нехай вже доведено, що оператор $H_{n\,t_0}$ має в просторі $L_{n\,t_0}$ єдину нерухому точку. Розглянемо підпростір $L^*_{(n+1)\,t_0}$ простору $L_{(n+1)\,t_0}$, який складається з векторних функцій, що в інтервалі $[0, n\,t_0]$ співпадають з нерухомою точкою оператора $H_{n\,t_0}$. Застосовуючи ті ж самі аргументи, що і при $n=1$, отримаємо

$$\rho_{(n+1)t_0}(H_{(n+1)t_0}\Phi, H_{(n+1)t_0}\Phi^*) \le q\,\rho_{(n+1)t_0}\left(\Phi, \Phi^*\right),$$

для довільних $\Phi, \Phi^* \in L^*_{(n+1)\,t_0}$.

Таким чином, $H_{(n+1)\,t_0}$ є стискуючим відображенням $L^*_{(n+1)\,t_0}$ у себе і в $L^*_{(n+1)\,t_0}$ існує єдина нерухома точка оператора $H_{(n+1)\,t_0}$. Твердження теореми випливає з принципа математичної індукції.

Інтегральні рівняння (1.2) не тільки задають багатовимірні генератриси розподілу процесу обробки пакетів у перехідному режимі. Вони також є джерелом для визначення моментів будь-якого порядку.

Розглянемо моменти першого і другого порядку

$$M_\alpha^i(t) = MQ_\alpha^i(t) = \frac{\partial \Phi^i(t,z)}{\partial z_\alpha}\Big|_{z=\bar{1}},$$

$$D_{\alpha\beta}^i(t) = MQ_\alpha^i(t)(Q_\beta^i(t) - \delta_{\alpha\beta}) = \frac{\partial^2 \Phi^i(t,z)}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}\Big|_{z=\bar{1}},$$

де $\bar{1}$ - r- вимірний вектор, складений з одиниць.

Теорема 1.2. Функції $M_\alpha^i(t)$, $D_{\alpha\beta}^i(t)$, $i = 1,...,N$, $\alpha,\beta = 1,...,r$, є єдиним розв'язком систем інтегральних рівнянь

$$M_\alpha^i(t) = \sum_{j=1}^N \int_0^t dF_{ij}(u) M_\alpha^j(t-u) + \sum_{j=1}^N \int_0^t dF_{ij}(u) \sum_{k=1}^r h_{jk} p_\alpha^k(t-u), \tag{1.3}$$

$$D_{\alpha\beta}^i(t) = \sum_{j=1}^N \int_0^t dF_{ij}(u) D_{\alpha\beta}^j(t-u) + \tag{1.4}$$

$$+ \sum_{j=1}^N \int_0^t dF_{ij}(u)[M_\alpha^j(t-u) \sum_{k=1}^r h_{jk} p_\beta^k(t-u) + M_\beta^j(t-u) \sum_{k=1}^r h_{jk} p_\alpha^k(t-u)].$$

Доведення. В будь-якій точці $|z| < 1$ рівняння (1.2) можна диференціювати будь-яке число раз за змінними $z_1, z_2, ..., z_r$. Для того, щоб у виразах, які при цьому отримуються, можна було переходити до границі по $z \to \bar{1}$, треба перевірити, що відповідні моменти скінченні. Доведемо це для моментів першого і другого порядку.

Продиференцюємо (1.2) по z_α

$$\frac{\partial \Phi^i(t,z)}{\partial z_\alpha} = \sum_{j=1}^N \int_0^t dF_{ij}(u) \frac{\partial \Phi^j(t-u,z)}{\partial z_\alpha} \times \tag{1.5}$$

$$\times \sum_{k=1}^r h_{jk}[p_{r+1}^k(t-u) + p_1^k(t-u)z_1 + ... + p_r^k(t-u)z_r] +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \int_0^t dF_{ij}(u)\, \Phi^j(t-u,z) \sum_{k=1}^r h_{jk} p_\alpha^k(t-u).$$

Оберемо $t_0 > 0$ таким чином, щоб $\max_{1\le i\le r} F_i(t_0) = q < 1$. Позначимо при $0 < z < \overline{1}$

$$M_\alpha(t,z) = \max_{1\le i\le N} \sup_{0\le u\le t} \frac{\partial \Phi^i(u,z)}{\partial z_\alpha}.$$

З (1.5) при $t \le t_0$ будемо мати

$$M_\alpha(t,z) \le q\, M_\alpha(t,z) + 1,$$

або

$$M_\alpha(t,z) \le \frac{1}{1-q}.$$

Доведемо методом математичної індукції, що при $(n-1)t_0 < t \le n\, t_0$

$$M_\alpha(t,z) \le \frac{1}{1-q} + \ldots + \frac{1}{(1-q)^n} = \frac{(1-q)^{-n} - 1}{q}. \tag{1.6}$$

Для $n = 1$ нерівність (1.6) доведено. Перевіримо справедливість кроку індукції. Нехай $n\, t_0 < t \le (n+1)t_0$. Тоді (1.5) можна подати у вигляді

$$\frac{\partial \Phi^i(t,z)}{\partial z_\alpha} = \sum_{j=1}^{N} \Big(\int_0^{t-n\,t_0} + \int_{t-n\,t_0}^{t} \Big)\, d\,F_{ij}(u)\, \frac{\partial \Phi^j(t-u,z)}{\partial z_\alpha} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{r} h_{jk}[p_{r+1}^k(t-u) + p_1^k(t-u)z_1 + \ldots + p_r^k(t-u)z_r] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_0^t d\,F_{ij}(u)\, \Phi^j(t-u,z) \sum_{k=1}^{r} h_{jk} p_\alpha^k(t-u).$$

Звідси випливає, що

$$M_\alpha(t,z) \le q\, M_\alpha(t,z) + M_\alpha(n\, t_0, z) + 1,$$

і

$$M_\alpha(t,z) \le \frac{1}{1-q} + \frac{1}{1-q} M_\alpha(n\, t_0, z) \le \frac{1}{1-q} + \frac{1}{(1-q)^2} + \ldots + \frac{1}{(1-q)^{n+1}}.$$

Таким чином нерівність (1.6) доведено. Її можна записати у більш зручному вигляді

$$M_\alpha(t,z) \le \frac{(1-q)^{-([t/t_0]+1)}-1}{q}. \tag{1.7}$$

Як наслідок (1.7) маємо скінченність моментів $M^i_\alpha(t)$, $i=1,2,...,N$, $\alpha=1,2,...,r$ першого порядку. Тепер граничним переходом по $z\to\overline{1}$ з (1.5) отримаємо систему інтегральних рівнянь (1.3).

Доведемо скінченність моментів другого порядку. Продиференцюємо (1.5) по z_β

$$\frac{\partial\Phi^i(t,z)}{\partial z_\alpha\partial z_\beta}=\sum_{j=1}^{N}\int_0^t dF_{ij}(u)\ \frac{\partial\Phi^j_{\alpha\beta}(t-u,z)}{\partial z_\alpha\partial z_\beta}\times \tag{1.8}$$

$$\times\sum_{k=1}^{r}h_{jk}\,[p^k_{r+1}(t-u)+p^k_1(t-u)z_1+...+p^k_r(t-u)z_r]+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_0^t dF_{ij}(u)\ \frac{\partial\Phi^i(t-u,z)}{\partial z_\alpha}\ \sum_{k=1}^{r}h_{jk}p^k_\beta(t-u)+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_0^t dF_{ij}(u)\ \frac{\partial\Phi^i(t-u,z)}{\partial z_\beta}\ \sum_{k=1}^{r}h_{jk}p^k_\alpha(t-u).$$

Позначимо при $0<z<\overline{1}$

$$D_{\alpha\beta}(t,z)=\max_{1\le i\le N}\ \sup_{0\le u\le t}\ \frac{\partial^2\Phi^i(u,z)}{\partial z_\alpha\partial z_\beta}.$$

За аналогією з попереднім маємо

$$(1-q)D_{\alpha\beta}(t_0,z)\le M_\alpha(t_0,z)+M_\beta(t_0,z), \tag{1.9}$$

і

$$(1-q)D_{\alpha\beta}(m\,t_0,z)\le D_{\alpha\beta}((m-1)t_0,z)+M_\alpha(m\,t_0,z)+M_\beta(m\,t_0,z), \tag{1.10}$$

для $m=2,3,...$.

З (1.9), (1.10) знаходимо

$$D_{\alpha\beta}(n\,t_0,z)\le$$

$$\le(1-q)^{-n}\ \sum_{k=0}^{n-1}(1-q)^k[M_\alpha((k+1)t_0,z)+M_\beta((k+1)t_0,z)]\le$$

$$\leq 2(1-q)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} (1-q)^k \frac{(1-q)^{-(k+1)}-1}{q} = 2 \frac{(1-q)^{n+1}-1+(n+1)q}{q^2(1-q)^{n+1}} .$$

Отже аналогом (1.7) буде нерівність

$$D_{\alpha\beta}(t,z) \leq 2\frac{(1-q)^{[t/t_0]+2}-1+([t/t_0]+2)q}{q^2(1-q)^{[t/t_0]+2}},$$

на основі якої граничним переходом по $z \to \overline{1}$ ми з (1.8) отримаємо систему інтегральних рівнянь (1.4).

Єдиність розв'язків систем (1.3), (1.4) випливає з того, що вони є інтегральними рівняннями марковського відновлення (див. додаток). Теорему доведено.

Для мереж типу $[SM|GI|\infty]^r$ ефективним засобом аналізу моментів процесу обробки інформації у перехідному режимі є метод перетворень Лапласа. Розглянемо систему інтегральних рівнянь (1.3). Для неї справедливий наступний результат.

Наслідок 1.1. Нехай $F_i(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}\, dF_i(t)$, $G_\alpha(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}\, dG_\alpha(t)$, $\operatorname{Re} s \geq 0$, $i = 1,2,...,N$, $\alpha = 1,2,...,r$ - перетворення Лапласа-Стільтьєса функцій $F_i(t)$, $G_\alpha(t)$ відповідно, $M_\alpha^i(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} M_\alpha^i(t)\, dt$, $\operatorname{Re} s \geq 0$, $i = 1,2,...,N$, $\alpha = 1,2,...,r$ - перетворення Лапласа функцій $M_\alpha^i(t)$, $M(s) = \left\| M_\alpha^i(s) \right\|$ - прямокутна матриця розміром $N \times r$. Тоді

$$M(s) = \frac{1}{s}(I - \Delta(F(s))F)^{-1}\Delta(F(s))FH(I - \Delta(G(s))P)^{-1}(I - \Delta(G(s))), \qquad (1.11)$$

де $F = \left\| f_{ij} \right\|_1^N$, $f_{ij} = F_{ij}(+\infty)$ - перехідні імовірності вкладеного ланцюга Маркова для напівмарковського процесу $x(t)$, $\Delta(F(s)) = \left\| \delta_{ij} F_i(s) \right\|_1^N$, $\Delta(G(s)) = \left\| \delta_{ij} G_i(s) \right\|_1^r$ – діагональні матриці.

Доведення. В термінах перетворень Лапласа система (1.3) має вигляд

$$M_\alpha^i(s) = \sum_{j=1}^{N} F_i(s)\, f_{ij}\, M_\alpha^j(s) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{r} F_i(s)\, f_{ij}\, h_{jk}\, p_\alpha^k(s), \qquad (1.12)$$

де $p_\alpha^k(s) = \int_0^\infty p_\alpha^k(t)\, e^{-st} dt$ - перетворення Лапласа перехідних імовірностей напівмарковського процесу $y(t)$.

Нехай $P(s) = \left\| p_\alpha^k(s) \right\|_1^r$. Тоді

$$M(s) = \Delta(F(s))FM(s) + \Delta(F(s))FHP(s) \qquad (1.13)$$

є матричним аналогом (1.12). З рівняння (1.13) знаходимо

$$M(s) = (I - \Delta(F(s))F)^{-1} \Delta(F(s))FHP(s).$$

Підставляючи сюди $P(s) = \frac{1}{s}(I - \Delta(G(s))P)^{-1}(I - \Delta(G(s))$ отримаємо (1.11). Наслідок доведено.

Для того, щоб користуватись формулами типу (1.11) на практиці, необхідно застосовувати чисельні алгоритми обернення перетворень Лапласа (див., наприклад, [6]).

1.3. Умови існування стаціонарного режиму для багатоканальних мереж.

Важливою проблемою при дослідженні стохастичних мереж є знаходження умов існування стаціонарного режиму та побудови формул або ефективних алгоритмів розрахунку характеристик функціонування мережі у стаціонарному режимі.

Якщо для процесу обробки пакетів $Q'(t) = (Q_1(t), \ldots, Q_r(t))$, $t \ge 0$, існує стаціонарний режим, то через Q_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, будемо позначати число пакетів у i - ому вузлі у стаціонарному режимі, а через $\Phi(z)$ – генератрису вектора $Q' = (Q_1, \ldots, Q_r)$.

Для $[SM|GI|\infty]^r$ - мережі справедливий наступний результат.

Теорема 1.3. Нехай матриця $F(t)$ – негратчаста, $F = F(+\infty)$ – нерозкладна і $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_N$ – стаціонарні імовірності F. Тоді, якщо $\max\limits_{1\le i\le N}\int\limits_0^\infty t\, d\, F_i(t) < \infty$, $\max\limits_{1\le i\le r}\int\limits_0^\infty t\, d\, G_i(t) < \infty$, спектральний радіус матриці маршрутизації P менший 1, то для процесу обробки інформації $Q(t)$ існує стаціонарний режим і

$$\Phi(z) = 1 - \sum_{j=1}^{N} a_j \int_0^\infty \Phi^j(t,z)\{\sum_{k=1}^{r} h_{jk}[p_1^k(t)(1-z_1)+...+p_r^k(t)(1-z_r)]\}d\,t, \qquad (1.14)$$

де $a_j = \pi_j \{ \sum\limits_{i=1}^{N} \pi_i \int\limits_0^\infty t\, d\, F_i(t)\}^{-1}$.

Перед тим, як доводити теорему, встановимо два допоміжних результати.

Лема 1.1. Нехай $R(t) = \left\| R_{ij}(t) \right\|_1^r = \sum\limits_{n=0}^{\infty} G^{n*}(t)$ - матриця відновлення напівмарковського процесу $y(t)$, $G(t) = \left\| G_{ij}(t) \right\|_1^r$. Якщо спектральний радіус матриці P менший 1 і $\int\limits_0^\infty t\, d\, G_i(t) = \mu_i^{-1} < \infty$ для $i = 1,2,...,r$, то:

a) $\lim\limits_{t\to\infty} R(t) = R^0 = \left\| R_{ij}^0 \right\|_1^r = (I-P)^{-1} < \infty$;

b) $R^1 = \left\| \int\limits_0^\infty (R_{ij}^0 - R_{ij}(t))d\,t \right\|_1^r = (I-P)^{-1}\Delta^{-1}(\mu)(I-P)^{-1}P < \infty$.

Доведення. Нехай $R_{ij}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} d\, R_{ij}(t)$, $\operatorname{Re} s \ge 0$, – перетворення Лапласа-Стільтьєса функцій $R_{ij}(t)$. Тоді в термінах перетворень Лапласа рівняння марковського відновлення $R(t) = I + G * R(t)$ для матриці $R(t)$ можна подати у вигляді

$$R(s) = I + \Delta(G(s))P\,R(s), \qquad (1.15)$$

де $R(s)=\left\|R_{ij}(s)\right\|_1^r$.

Розв'язком (1.15) є матриця $R(s)=(I-\Delta[G(s)]P)^{-1}$ і тому $R^0=\lim\limits_{s\to 0+}R(s)=(I-P)^{-1}$.

Розглянемо тепер

$$\frac{1}{s}[R(0)-R(s)]=\left\|\int_0^\infty [R_{ij}^0-R_{ij}(t)]e^{-st}dt\right\|_1^r=$$

$$=\frac{1}{s}[(I-P)^{-1}-(I-\Delta(G(s))P)^{-1}]=\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{\infty}[P^k-(\Delta(G(s))P)^k].$$

Методом математичної індукції можна перевірити, що для довільних квадратних матриць A і B справедливе подання

$$(A+B)^k=A^k+\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-1-i}B(A+B)^i. \tag{1.16}$$

Використовуючи (1.16) для $A=P$, $B=-(I-\Delta(G(s)))P$, $A+B=\Delta(G(s))P$, знаходимо

$$(\Delta(G(s))P)^k=P^k-\sum_{i=0}^{k-1}P^{k-1-i}(I-\Delta(G(s)))P(\Delta(G(s))P)^i.$$

Оскільки

$$\lim_{s\to 0+}\Delta[G(s)]=I, \qquad \lim_{s\to 0+}\frac{1}{s}(I-\Delta[G(s)])=\Delta^{-1}(\mu),$$

то

$$R^1=\lim_{s\to 0+}\frac{1}{s}[R(0)-R(s)]=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}P^{k-1-i}\Delta^{-1}(\mu)P^{i+1}=(I-P)^{-1}\Delta^{-1}(\mu)(I-P)^{-1}P.$$

Лему доведено.

Нехай $D[0,T]$ простір усіх функцій $\varphi(t)$, які визначені на відрізку $[0,T]$, приймають дійсні значення, мають у кожній точці границі зліва і неперервні справа (при $t=T$ - зліва). Нам буде необхідний наступний критерій інтегрованості за Ріманом.

Лема 1.2. Якщо $F(t)$ – функція розподілу і $\varphi(t) \in D[0,T]$, то $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(t-u)\, d\,F(u)$ інтегрована за Ріманом на $[0,T]$.

Доведення. Подамо $F(u)$ у вигляді

$$F(u) = \alpha\, F_c(u) + \beta\, F_d(u), \qquad \alpha,\, \beta \ge 0, \qquad \alpha + \beta = 1,$$

де $F_c(u)$ – неперервна складова $F(u)$, $F_d(u)$ – дискретна складова.

Нехай $u_1, u_2, ..., u_k, ...$ – точки, в яких $F_d(u)$ має стрибки, а $p_1, p_2, ..., p_k, ...$ – величини цих стрибків. Для $k = 1,2,...$ введемо функції

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \varphi(t-u_k), & t \ge u_k, \\ 0, & t < u_k. \end{cases}$$

Тоді

$$\Phi(t) = \alpha \int_0^t \varphi(t-u)\, d\,F_c(u) + \beta \sum_{k=1}^{\infty} p_k \varphi_k(t). \tag{1.17}$$

Оскільки другий доданок у правій частині (1.17) є рівномірно збіжним рядом, складеним з функцій, інтегрованих за Ріманом, то його сума буде інтегрованою за Ріманом, і для справедливості твердження леми достатньо перевірити, що

$$\Phi_c(t) = \int_0^t \varphi(t-u)\, d\,F_c(u)$$

є неперервною функцією.

Візьмемо будь-яке додатнє число ε. Позначимо через $t_1, t_2, ..., t_k$ усі точки відрізку $[0,t)$, де величини стрибків $\varphi(\cdot)$ не менше за ε. Тоді існує $\delta > 0$ таке, що як тільки $|\, t' - t'' \,| < \delta$ і обидві точки t', t'' належать одному з інтервалів $(0,t_1), (t_1,t_2), ..., (t_k,t)$, то $|\, \varphi(t') - \varphi(t'') \,| < \varepsilon$.

Будемо обирати δ настільки малим, щоб інтервали

$$[-\delta,\delta], \qquad [t_i - \delta,\, t_i + \delta], \quad i = 1,...,k, \qquad [t-\delta,\, t+\delta]$$

не перетинались. Позначимо через

$$I_\varepsilon(t) = [0,t] \setminus \{ \bigcup_{i=1}^{k} [t_i-\delta,\, t_i+\delta] \cup [-\delta,\, \delta] \cup [t-\delta,\, t+\delta] \}.$$

Тоді

$$\left| \int_0^{t+\delta} \varphi(t+\delta-u)\, dF_c(u) - \int_0^t \varphi(t-u)\, dF_c(u) \right| \le$$

$$\le \int_t^{t+\delta} |\, \varphi(t+\delta-u)\,|\, dF_c(u) + \int_0^t |\, \varphi(t+\delta-u) - \varphi(t-u)\,|\, dF_c(u) =$$

$$= \int_{I_\varepsilon(t)} |\, \varphi(t+\delta-u) - \varphi(t-u)\,|\, dF_c(u) + \int_t^{t+\delta} |\, \varphi(t+\delta-u)\,|\, dF_c(u) +$$

$$+ \int_0^{\delta} |\, \varphi(t+\delta-u) - \varphi(t-u)\,|\, dF_c(u) + \int_{t-\delta}^{t} |\, \varphi(t+\delta-u) - \varphi(t-u)\,|\, dF_c(u) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \int_{t_i-\delta}^{t_i+\delta} |\, \varphi(t+\delta-u) - \varphi(t-u)\,|\, dF_c(u).$$

Якщо $N = \sup\limits_{t\in[0,T]} |\, \varphi(t)\,|$, то ми маємо

$$|\, \Phi_c(t+\delta) - \Phi_c(t)\,| \le \varepsilon + N\,[F_c(t+\delta) - F_c(t)] + \tag{1.18}$$

$$+ 2N\, \{ F_c(\delta) + [F_c(t) - F_c(t-\delta)] + \sum_{i=1}^{k} [F_c(t_i+\delta) - F_c(t_i-\delta)] \}.$$

Аналогічно знаходимо

$$|\, \Phi_c(t) - \Phi_c(t-\delta)\,| \le \varepsilon + N\,[F_c(t) - F_c(t-\delta)] + \tag{1.19}$$

$$+ 2N\, \{ F_c(\delta) + \sum_{i=1}^{k} [F_c(t_i+\delta) - F_c(t_i-\delta)] \}.$$

З оцінок (1.18), (1.19) випливає неперервність $\Phi_c(t)$.

Лему доведено.

Перейдемо тепер до доведення теореми.

Доведення теореми 1.3. Подамо систему рівнянь (1.2), яка визначає генератриси $\Phi^i(t,z)$, $i = 1,2,...,N$, у вигляді рівнянь марковського відновлення

$$\Phi^i(t,z) = f_i(t) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^t d\,F_{ij}(u)\,\Phi^j(t-u,z), \quad i = 1,2,\ldots,N,$$

де
$$f_i(t) = 1 - F_i(t) - \sum_{j=1}^{N} \int_0^t d\,F_{ij}(u)\,\Phi^j(t-u,z) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{r} h_{jk}\,[p_1^k(t-u)(1-z_1)+\ldots+p_r^k(t-u)(1-z_r)].$$

Для того, щоб твердження теореми випливало з результатів про асимптотичну поведінку розв'язку системи рівнянь марковського відновлення (див. додаток, теорема 3), достатньо для $i = 1,2,\ldots,r$ перевірити безпосередню інтегровність за Ріманом на $[0,\infty)$ функцій $f_i(t)$. Оскільки $f_i(t)$ локально інтегровані за Ріманом (лема 1.2), то достатньо для $|f_i(t)|$ побудувати монотонну мажоранту $\tilde{f}_i(t)$, інтегровну на $[0,\infty)$.

Функція $\Phi^i(t-u,z)$ є генератрисою, тому

$$|f_i(t)| \le 1 - F_i(t) + \sum_{k,m=1}^{r} \int_0^t d\,F_i(u)\,p_m^k(t-u) \le \tag{1.20}$$

$$\le (1+r)[1-F_i(t/2)] + \sum_{k,m=1}^{r} \int_0^{t/2} d\,F_i(u)\,p_m^k(t-u).$$

Знайдемо оцінку зверху для інтегралу $\int_0^{t/2} d\,F_i(u) p_m^k(t-u)$.

Фунуції $p_j^i(t)$, $i,j = 1,2,\ldots,r$ як розв'язок рівняння марковського відновлення (див. додаток) можуть бути подані у вигляді

$$p_j^i(t) = \int_0^t d\,R_{ij}(u)(1-G_j(t-u)), \quad i,j = 1,2,\ldots,r. \tag{1.21}$$

Використовуючи (1.21), знаходимо

$$p_j^i(t) \le \int_0^{t/2} d\,R_{ij}(u)(1-G_j(t-u)) + \int_{t/2}^{t} d\,R_{ij}(u)(1-G_j(t-u)) \le$$

$$\le R_{ij}^0(1-G_j(t/2)) + (R_{ij}^0 - R_{ij}(t/2)). \tag{1.22}$$

Права частина (1.22) є монотонно спадною функцією, тому

$$\int_0^{t/2} d\,F_i(u) p_m^k(t-u) \le R_{k\,m}^0 (1 - G_m(t/4)) + (R_{k\,m}^0 - R_{k\,m}(t/4)) .$$

Поєднуючи (1.20) і (1.22), маємо монотонну мажоранту для $|f_i(t)|$

$$\widetilde{f}_i(t) = (1+r)[1 - F_i(t/2)] + \sum_{k,m=1}^{r} [R_{k\,m}^0 (1 - G_m(t/4)) + (R_{k\,m}^0 - R_{k\,m}(t/4))] .$$

Інтегровність на $[0,\infty)$ функції $\widetilde{f}_i(t)$ випливає з леми 1.1 і обмеженості інтегралів $\int_0^{\infty} t\,d\,F_i(t) < \infty$, $i = 1,2,...,N$, $\int_0^{\infty} t\,d\,G_j(t) < \infty$, $j = 1,2,...,r$. Теорему доведено.

У співвідношенні (1.14) генератриса стаціонарного розподілу подається через генератриси процесу обробки у перехідному режимі. Разом з системами інтегральних рівнянь (1.3), (1.4) це подання можна використовувати для знаходження моментів $M_\alpha = MQ_\alpha$, $D_{\alpha\,\beta} = MQ_\alpha (Q_\beta - \delta_{\alpha\,\beta})$ процесу обробки у стаціонарному режимі.

Нехай $\theta' = (\theta_1,...,\theta_r)$ є розв’язком рівняння балансу

$$\theta_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{r} \theta_j p_{ji} \text{ , де } \lambda_i = \sum_{j=1}^{N} a_j h_{ji} \text{ , } i = 1,2,...,r .$$

Враховуючи, що інтенсивність вхідного потоку на кожний вузол мережі перераховуються у відповідності до рівняння балансу, доведемо наступний результат.

Лема 1.3. Якщо виконуються умови теореми 1.3, то

a) $\lim\limits_{t\to\infty} M_\alpha^i(t) = \theta_\alpha / \mu_\alpha$, $\alpha = 1,2,...,r$;

$$\text{b)} \lim_{t\to\infty} D_{\alpha\,\beta}^i(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j \int_0^{\infty} [M_\alpha^j(t) \sum_{k=1}^{r} h_{j\,k} p_\beta^k(t) + \qquad (1.23)$$

$$+ M_\beta^j(t) \sum_{k=1}^{r} h_{j\,k} p_\alpha^k(t)]\, d\,t .$$

Доведення.

а) Систему рівнянь (1.3) можна записати у вигляді

$$M_\alpha^i(t) = m_\alpha^i(t) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^t dF_{ij}(u) M_\alpha^j(t-u), \qquad i = 1,2,...,N,$$

де $\quad m_\alpha^i(t) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^t dF_{ij}(u) \sum_{k=1}^{r} h_{jk} p_\alpha^k(t-u).$

Перевіримо безпосередню інтегровність за Ріманом на $[0,\infty)$ функцій $m_\alpha^i(t)$, $i = 1,2,...,N$. Використовуючи тіж аргументи, що і при доведенні теореми 1.3, знаходимо

$$m_\alpha^i(t) \le \int_0^\infty dF_i(u) \sum_{k=1}^{r} p_\alpha^k(t-u) \le$$

$$\le r\,(1 - F_i(t/2)) + \sum_{k=1}^{r} \int_0^{t/2} dF_i(u)\, p_\alpha^k(t-u) \le \tag{1.24}$$

$$\le r\,(1 - F_i(t/2)) + \sum_{k=1}^{r} [R_{k\alpha}^0 (1 - G_\alpha(t/4)) + (R_{k\alpha}^0 - R_{k\alpha}(t/4))].$$

Останній вираз нерівності (1.24) є монотонною інтегрованою на $[0,\infty)$ мажорантою для $m_\alpha^i(t)$, $i = 1,2,...,N$. Додатково, як наслідок леми 1.2, маємо локальну інтегрованість за Ріманом функцій $m_\alpha^i(t)$. Таким чином ці функції безпосередньо інтегровані за Ріманом, і з теореми 3, наведеної у додатку, випливає

$$\lim_{t\to\infty} M_\alpha^i(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j \int_0^\infty m_\alpha^j(t)\, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=1}^{r} a_j h_{mk} \int_0^\infty \{\int_0^t dF_{jm}(u) p_\alpha^k(t-u)\}\, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=1}^{r} a_j h_{mk} \int_0^\infty dF_{jm}(u)\, \{\int_u^\infty p_\alpha^k(t-u)\, dt\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=1}^{r} a_j f_{jm} h_{mk} \int_0^\infty p_\alpha^k(t) dt = (\sum_{m=1}^{N} a_m h_{mk}) \int_0^\infty p_\alpha^k(t)\, dt = \theta_\alpha / \mu_\alpha .$$

Таким чином співвідношення а) доведено.

b) Цей пункт леми перевіряється аналогічно пункту a). Дійсно, подамо систему інтегральних рівнянь (1.4) у вигляді

$$D^{i}_{\alpha\beta}(t)=d^{i}_{\alpha\beta}(t)+\sum_{j=1}^{N}\int_{0}^{t}d\,F_{ij}(u)D^{j}_{\alpha\beta}(t-u),\qquad i=1,2,...,N,$$

де

$$d^{i}_{\alpha\beta}(t)=\sum_{j=1}^{N}\int_{0}^{t}d\,F_{ij}(u)[M^{j}_{\alpha}(t-u)\sum_{k=1}^{r}h_{jk}p^{k}_{\beta}(t-u)+M^{j}_{\beta}(t-u)\sum_{k=1}^{r}h_{jk}p^{k}_{\alpha}(t-u)]$$

.

Оскільки виконується пункт a), то існує константа $C>0$ така, що

$$M^{i}_{\alpha}(t)<C,\quad i=1,2,...,N,\ \ \alpha=1,2,...,r.$$

Тоді з нерівності (1.24) випливає

$$d^{i}_{\alpha\beta}(t)\le C\int_{0}^{t}d\,F_{i}(u)\ \sum_{k=1}^{r}p^{k}_{\beta}(t-u)+C\int_{0}^{t}d\,F_{i}(u)\ \sum_{k=1}^{r}p^{k}_{\alpha}(t-u)\le$$

$$\le 2\ C\ r\ (1-F_{i}(t/2))+\sum_{k=1}^{r}\ [R^{0}_{k\beta}(1-G_{\beta}(t/4))+(R^{0}_{k\beta}-R_{k\beta}(t/4))]+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\ [R^{0}_{k\alpha}(1-G_{\alpha}(t/4))+(R^{0}_{k\alpha}-R_{k\alpha}(t/4))].$$

Разом з локальною інтегрованістю за Ріманом функцій $d^{i}_{\alpha\beta}(t)$, $i=1,2,...,N$, остання нерівність означає їх безпосередню інтегрованість за Ріманом. Отже співвідношення (1.23) є наслідком асимптотичних властивостей розв’язку рівняння марковського відновлення (див. додаток, теорема 3).

Лему доведено.

Тепер на основі (1.14) можна отримати наступний результат.

Теорема 1.4. Якщо виконуються умови теореми 1.3, то

$$M_{\alpha}=\theta_{\alpha}\,/\,\mu_{\alpha},\tag{1.25}$$

$$D_{\alpha\beta}=\sum_{j=1}^{N}a_{j}\int_{0}^{\infty}[M^{j}_{\alpha}(t)\sum_{k=1}^{r}h_{jk}p^{k}_{\beta}(t)+M^{j}_{\beta}(t)\sum_{k=1}^{r}h_{jk}p^{k}_{\alpha}(t)]d\,t,\tag{1.26}$$

$$\alpha,\beta = 1,2,\ldots,r.$$

Доведення. Продиференцюємо двічі обидві частини (1.14) по z_α і z_β

$$\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_\alpha} = -\sum_{j=1}^{N} a_j \int_0^\infty \frac{\partial\Phi^j(t,z)}{\partial z_\alpha} \times \tag{1.27}$$

$$\times \{\sum_{k=1}^{r} h_{jk}[p_1^k(t)(1-z_1)+\ldots+p_r^k(t)(1-z_r)]\}dt +$$

$$+\sum_{j=1}^{N} a_j \int_0^\infty \Phi^j(t,z)\{\sum_{k=1}^{r} h_{jk} p_\alpha^k(t)\}dt,$$

$$\frac{\partial^2\Phi(z)}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} = -\sum_{j=1}^{N} a_j \int_0^\infty \frac{\partial^2\Phi^j(t,z)}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \times \tag{1.28}$$

$$\times \{\sum_{k=1}^{r} h_{jk}[p_1^k(t)(1-z_1)+\ldots+p_r^k(t)(1-z_r)]\}dt +$$

$$+\sum_{j=1}^{N} a_j \int_0^\infty \frac{\partial\Phi^j(t,z)}{\partial z_\alpha} \{\sum_{k=1}^{r} h_{jk} p_\beta^k(t)\}dt +$$

$$+\sum_{j=1}^{N} a_j \int_0^\infty \frac{\partial\Phi^j(t,z)}{\partial z_\beta} \{\sum_{k=1}^{r} h_{jk} p_\alpha^k(t)\}dt.$$

З леми 1.3 випливає, що для довільних $i = 1,2,\ldots,N$, $\alpha,\ \beta,\ k,\ m = 1,2,\ldots,r$

$$\int_0^\infty M_\alpha^i(t) p_m^k(t)dt < \infty, \qquad \int_0^\infty D_{\alpha\beta}^i(t) p_m^k(t)dt < \infty.$$

Тому обгрунтованим є граничний перехід по $z \to \bar{1}$ в (1.27), (1.28), який приводить до (1.25), (1.26). Теорему доведено.

Очевидно, процес побудови формул для моментів стаціонарного розподілу можна подовжити без обмежень на порядок моментів. Починаючи з моментів другого порядку в цих формулах будуть присутні моменти перехідного режиму процесу обробки, для визначення яких треба розв’язувати систему інтегральних рівнянь.

1.4. Постановка оптимізаційних задач

На процесі обробки пакетів $Q^i(t), i = 1,2,...,N$ у $\left[SM|GI|\infty\right]^r$ – мережі визначимо адитивний функціонал $S^{i'}(t) = (S_1^i(t), S_2^i(t),...,S_r^i(t))$, де $S_j^i(t),\ j = 1,2,...,r$ – число пакетів, обробка яких завершилася в j-ому вузлі за час t при умові, що у початковий момент $t = 0$ мережа порожня і $x(0) = i$.

При умові, що існують границі $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}MS_j^i(t)$, будемо позначати їх через $m_j,\ j = 1,2,...,r.$ Очевидно, що $m_j,\ j = 1,2,...,r$ залежать від параметрів $\left[SM|GI|\infty\right]^r$ – мережі: $H = \|h_{ij}\|,\ F(t) = \|F_{ij}(t)\|_1^N$, $G_j(t),\ j = 1,2,...,r,\ P = \|p_{ij}\|_1^r$. У подальшому будемо вважати,що $F(t),\ G_j(t),\ j = 1,2,...,r,\ P$ є заданими, а вибір матриці H знаходиться у нашому розпорядженні. Таким чином $m_j = m_j(H),\ j = 1,2,...,r$. Аналогічно, якщо існують границі $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\operatorname{cov}(S_k^i(t), S_p^i(t))$, будемо позначати їх через $V_{kp}(H),\ k,p = 1,2,...,r$.

Перейдемо до постановки оптимізаційних задач.

Нехай $C_j,\ j = 1,2,...,r$ – прибуток від обробки одного інформаційного пакету в j-ому вузлі. Тоді важливе значення має наступна задача:

$$M(H) = \sum_{j=1}^{r} C_j m_j(H) \to \max, \tag{1.29}$$

при умові

$$h_{i1} + h_{i2} + ... + h_{ir} = 1,\ h_{ij} \ge 0, \tag{1.30}$$
$$i = 1,2,...,N,\ j = 1,2,...,r.$$

Розв'язок H^+ задачі (1.29) – (1.30) представляє собою таке управління вхідним потоком, яке максимізує середній прибуток від роботи всієї мережі.

Очевидно, що $V(H) = \sum_{k,p=1}^{r} C_k V_{kp}(H) C_p$ є величиною ризику, мірою відхилення прибутку від очікуваного значення $M(H) = \sum_{j=1}^{r} C_j m_j(H)$. Враховуючи це, ми приходимо до оптимізаційної задачі виду

$$V(H) = \sum_{k,p=1}^{r} C_k V_{kp}(H) C_p \to \min, \tag{1.31}$$

При умові

$$M(H) = \sum_{j=1}^{r} C_j m_j(H) = M_0, \tag{1.32}$$

$$h_{i1} + h_{i2} + \ldots + h_{ir} = 1, \quad h_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \tag{1.33}$$

де $M^- \leq M_0 \leq M^+$, M^+, M^- – максимальне і мінімальне значення відповідно лінійного функціоналу $M(H)$ при обмеженнях (1.33).

Пріоритетність задач максимізації прибутку (1.29), (1.30) і мінімізації ризику (1.31) – (1.33) залежить від мети управління стохастичною мережею. Задачу мінімізації ризику можна розглядати як аналог задачі Марковіца для багатоканальних стохастичних мереж. Оптимальний поділ інвестицій між типами цінних паперів відповідає оптимальному поділу інтенсивності зовнішнього потоку між вузлами мережі.

Для того, щоб розв'язати поставлені задачі, необхідно подати функціонали $M(H)$, $V(H)$ через параметри $[SM|GI|\infty]^r$– мережі. Це є предметом нашого дослідження у наступному розділі.

2. Цільові функції і алгоритми розв'язання оптимізаційних задач

2.1. Процес накопичення прибутку в мережі типу $\left[SM|GI|\infty\right]^r$.

В цьому підрозділі ми вивчимо перехідний режим процесу накопичення прибутку. Нехай $S^i(t,z),\ z'=(z_1,...,z_r),\ |z|\le 1,\ i=1,2,...,N$ – генератриси векторів $S^i(t)$. Для спрощення підрахунків надалі будемо вважати, що $F_{ij}(t)=F_i(t)f_{ij},\ i,j=1,...,N$, де $F=\left\|f_{ij}\right\|_1^N$ – перехідна матриця вкладеного ланцюга Маркова для напівмарковського процесу $x(t)$. Всі отримані нижче результати можуть бути перенесені на загальний випадок.

Аналіз перехідного режиму наведено в наступній теоремі.

Теорема 2.1. Функції $S^i(t,z),\ i=1,2,...,N$ є єдиним розв'язком системи інтегральних рівнянь

$$S^i(t,z)=(1-F_i(t))+\int_0^t\left[\sum_{j=1}^N f_{ij}S^j(t-u,z)\left(\sum_{k=1}^r h_{ij}\varphi_k(t-u,z)\right)\right]dF_i(u), \tag{2.1}$$

$$i=1,2,...,N,$$

$$\varphi_j(t,z)=(1-G_j(t))+z_j\int_0^t\left[\sum_{k=1}^r p_{jk}\varphi_k(t-u,z)+p_{jr+1}\right]dG_j(u), \tag{2.2}$$

$$j=1,2,...,r.$$

Доведення. Процес обробки пакетів у $\left[SM|GI|\infty\right]^r$ – мережі разом із введеними вище адитивними функціоналами будемо моделювати гіллястим процесом Беллмана-Харріса

$$Z'(t)=(Z^1(t),...,Z^N(t),Z^{N+1}(t),...,Z^{N+r}(t),Z^{N+r+1}(t),...,Z^{N+2r}(t)),$$

$$Z^i{}'(t)=(Z_1^i(t),...,Z_N^i(t),Z_{N+1}^i(t),...,Z_{N+r}^i(t),Z_{N+r+1}^i(t),...,Z_{N+2r}^i(t)),\quad t\ge 0,$$

з $N+2r$ типами частинок $T_1,...,T_N,T_{N+1},...,T_{N+r},T_{N+r+1},...,T_{N+2r}$. Кожна з частинок T_i має випадкову тривалість життя з функцією розподілу $G^i(t), i=1,2,...,N+2r$, причому

$$G^i(t)=F_i(t), i=1,2,...,N, \quad G^i(t)=G_{i-N}(t), i=N+1,...,N+r,$$

$$G^i(t)=\begin{cases}0, & t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases}, \quad i=N+r+1,...,N+2r.$$

Генератриси $f^i(x), x'=(x_1,...,x_N,x_{N+1},...,x_{N+r},x_{N+r+1},...,x_{N+2r})$, безпосередніх нащадків від однієї частинки типу T_i дорівнюють

$$f^i(x)=\sum_{j=1}^{N} f_{ij}x_j\left(\sum_{k=1}^{r} h_{jk}x_{N+k}\right), i=1,2,...,N,$$

$$f^i(x)=x_{i+r}\left(\sum_{j=1}^{r} p_{i-N\,j}x_{N+j}+p_{i-N\,r+1}\right), i=N+1,...,N+r,$$

$$f^i(x)=x_i, \; i=N+r+1,...,N+2r.$$

Зв’яжемо з напівмарковським процесом $x(t)\in\{1,2,...,N\}$ випадкові процеси $\chi^{i\,\prime}(t)=(\chi_1^i(t),...,\chi_N^i(t))$, $i=1,2,...,N$, індикаторного типу

$$\chi^i(t)=\begin{cases} e_j \text{ з імовірністю } f_j^i(t),\\ j=1,2,...,N,\end{cases}$$

де $e_j, j=1,2,...,N$, представляє собою N-вимірний вектор, j-та компонента якого дорівнює 1, а інші – 0, $f_j^i(t)=P(x(t)=j/x(0)=i)$ – перехідні імовірності процесу x(t).

Функції $G^i(t), f^i(x), i=1,2,...,N+2r$ у моделі Беллмана-Харріса підібрані таким чином, що

$$Z^{i\,\prime}(t)\overset{d}{=}(\chi_1^i(t),...,\chi_N^i(t),X_1^i(t),...,X_r^i(t),S_1^i(t),...,S_r^i(t)), i=1,2,...,N,$$

де $\overset{d}{=}$ означає рівність за розподілом.

Відомо ([7], стор. 231), що генератриси

$$F^i(t,x)=\sum_{\alpha} P(Z^i(t)=\alpha)x^{\alpha}, \; i=1,2,...,N+2r,$$

$\alpha' = (\alpha_1, ..., \alpha_N, \alpha_{N+1}, ..., \alpha_{N+r}, \alpha_{N+r+1}, ..., \alpha_{N+2r})$ задовольняють системі інтегральних рівнянь

$$F^i(t,x) = x_i(1 - F_i(t)) +$$

$$+\int_0^t \left[\sum_{j=1}^N f_{ij} F^j(t-u,x)(\sum_{k=1}^r h_{jk} F^{N+k}(t-u,x))\right] dF_i(u), \ i = 1,2,...,N,$$

$$F^i(t,x) = x_i(1 - G_{i-N}(t)) + \int_0^t F^{i+r}(t-u,x)\left[\sum_{j=1}^r p_{i-Nj} F^{N+j}(t-u,x) + p_{i-nr+1}\right] dG_{i-N}(u),$$

$$i = N+1, ..., N+r,$$

$$F^i(t,x) = x_i(1 - G^i(t)) + \int_0^t F^i(t-u,x) dG^i(u), \ i = N+r+1, ..., N+2r.$$

З останнього рівняння випливає, що $F^i(t,x) \equiv x_i$, $i = N+r+1, ..., N+2r.$
Використовуючи цей факт і перепозичивши

$$F^i(t,1,...,1,x_{N+r+1},...,x_{N+2r})\Big|_{x_{N+r+1}=z_1,...,x_{N+2r}=z_r} = S^i(t,z), \quad i = 1,2,...,N,$$

$$F^{N+j}(t,1,...,1,x_{N+r+1},...,x_{N+2r})\Big|_{x_{N+r+1}=z_1,...,x_{N+2r}=z_r} = \varphi_j(t,z), \quad j = 1,2,...,r,$$

приходимо до системи інтегральних рівнянь (2.1), (2.2). Теорему доведено.

Нехай $m_\alpha^i(t) = \frac{\partial S^i(t,z)}{\partial z_\alpha}\Big|_{z=\bar{1}}$, $A_\alpha^j(t) = \frac{\partial \varphi_j(t,z)}{\partial z_\alpha}\Big|_{z=\bar{1}}$,

$$i = 1,2,...,N; \ \alpha, j = 1,2,...,r.$$

Тоді як наслідок теореми 2.1 будемо мати наступний результат.

Наслідок 2.1. Функції $m_\alpha^i(t)$, $A_\alpha^j(t)$, $i = 1,2,...,N$, $\alpha, j = 1,2,...,r$ є єдиним розв'язком системи інтегральних рівнянь:

$$m_\alpha^i(t) = \sum_{k=1}^N \int_0^t dF_{ik}(u) m_\alpha^k(t-u) + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^N f_{ik} h_{kj} \int_0^t A_\alpha^j(t-u) dF_i(u), \ i = 1,2,...,N \quad (2.3)$$

$$A_\alpha^j(t) = \delta_{j\alpha} G_j(t) + \sum_{k=1}^r \int_0^t dG_j(u) p_{jk} A_\alpha^k(t-u), \ \alpha, j = 1,2,...,r. \quad (2.4)$$

Очевидно, що середній прибуток від роботи мережі на проміжку [0,t] виписується через функції $m_1^i(t), m_2^i(t), ..., m_r^i(t)$. Останній результат показує, що дослідження середнього прибутку вимагає аналізу двох взаємопов'язаних систем інтегральних рівнянь типу марковського відновлення.

2.2. Оптимальне керування вхідним потоком для задачі максимізації прибутку

Для того, щоб знайти залежність $m_j(H),\ j=1,2,...,r$ від матриці H, розглянемо систему рівнянь марковського відновлення (2.4) і введемо перетворення Лапласа і Лапласа – Стільтьєса для функцій $A_\alpha^j(t),\ G_j(t),\ j,\alpha=1,2,...,r$

$$A_\alpha^j(s)=\int_0^\infty e^{-st}A_\alpha^j(t)dt,\quad G_j(s)=\int_0^\infty e^{-st}dG_j(t),\quad \operatorname{Re} s\ge 0,\quad A(s)=\left\|A_\alpha^j(s)\right\|_1^r.$$

Справедливий такий результат.

Лема 2.1. Якщо спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший 1, то $\lim\limits_{t\to\infty}\left\|A_\alpha^j(t)\right\|_1^r=A=\left\|A_\alpha^j\right\|_1^r=(I-P)^{-1}$,

де $I=\left\|\delta_{ij}\right\|_1^r$ – одинична матриця.

Доведення. В термінах перетворень Лапласа систему (2.4) можна записати так

$$A_\alpha^j(s)=\frac{1}{s}G_j(s)\delta_{j\alpha}+\sum_{k=1}^r G_j(s)p_{jk}A_\alpha^k(s),\ j,\alpha=1,2,...,r,$$

або, використовуючи матричні позначення, для A(s) маємо рівняння

$$A(s)=\frac{1}{s}\Delta(G(s))+\Delta(G(s))PA(s), \tag{2.5}$$

де $\Delta(G(s))=\left\|\delta_{ij}G_i(s)\right\|_1^r$ – діагональна матриця.

Розв’язком (2.5) буде

$$A(s)=\frac{1}{s}\left[I-\Delta(G(s))P\right]^{-1}\Delta(G(s)). \tag{2.6}$$

Функція $A_\alpha^i(t)$ представляє собою математичне сподівання числа відвідувань вузла "α" за час t пакетом, який у початковий момент часу знаходився в i-ому вузлі. Тому $A_\alpha^i(t)$ монотонно неспадна функція. З урахуванням (2.6) і тауберової теореми для перетворень Лапласа, знаходимо

$$\lim_{t\to\infty}\left\|A_\alpha^i(t)\right\|_1^r=\lim_{s\to 0}sA(s)=(I-P)^{-1}.$$

Лему доведено.

Наслідок 2.2. Якщо виконуються умови леми 2.1, то для будь-яких $i=1,2,...,N;\ \alpha,j=1,2,...,r$

$$A_\alpha^{j,i}(t)=\int_0^t A_\alpha^j(t-u)dF_i(u)\uparrow A_\alpha^j \text{ , при } t\to\infty \tag{2.7}$$

Доведення. Оскільки функції $A_\alpha^j(t)$ неспадні, то при $t_1<t_2$

$$A_\alpha^{j,i}(t_2)-A_\alpha^{j,i}(t_1)=\int_0^{t_1}[A_\alpha^j(t_2-u)-A_\alpha^j(t_1-u)]dF_i(u)+\int_{t_1}^{t_2}A_\alpha^j(t_2-u)dF_i(u)\ge 0,$$

і функції $A_\alpha^{j,i}(t)$ теж неспадні.

Для того, щоб довести рівність $\lim\limits_{t\to\infty}A_\alpha^{j,i}(t)=A_\alpha^j$, у поданні

$$A_\alpha^{j,i}(t)=\int_0^t A_\alpha^j(t-u)dF_i(u)=A_\alpha^j F_i(t)-\int_0^t[A_\alpha^j-A_\alpha^j(t-u)]dF_i(u)$$

оцінимо зверху останній інтеграл.

$$\int_0^t\left[A_\alpha^j-A_\alpha^j(t-u)\right]dF_i(u)=\int_0^{t/2}\left[A_\alpha^j-A_\alpha^j(t-u)\right]dF_i(u)+\int_{t/2}^t\left[A_\alpha^j-A_\alpha^j(t-u)\right]dF_i(u)\le$$

$$\le\left[A_\alpha^j-A_\alpha^j(t/2)\right]+2A_\alpha^j\left[F_i(t)-F_i(t/2)\right] \tag{2.8}$$

Очевидно права частина нерівності (2.8) прямує до 0 при $t\to\infty$, наслідок доведено.

При умові, що матриця перехідних імовірностей $F=\left\|f_{ij}\right\|_1^N$ вкладеного ланцюга Маркова для напівмарковського процесу x(t) нерозкладна, то для вкладеного ланцюга існують стаціонарні імовірності $\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_N$, $\pi'=(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_N)$. Для x(t) через $\widetilde{F}(t)=\left\|\widetilde{F}_{ij}(t)\right\|_1^N=I+\sum\limits_{n=1}^{\infty}F^{n*}(t)$ будемо позначати матрицю відновлення, а через $a_i=\int\limits_0^\infty tdF_i(t)$ – середній час перебування у стані “і”, $a=\sum\limits_{i=1}^N\pi_i a_i$.

Наслідком попереднього аналізу є такий результат.

Теорема 2.2. Якщо для $\left[SM|GI|\infty\right]^r$ – мережі матриця F нерозкладна, $\max\limits_{1\le i\le N}a_i<\infty$, і спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший 1, то границя $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}(m_1^i(t),\ldots,m_r^i(t))=m'=(m_1,\ldots,m_r)$ існує і

$$m'=a^{-1}\pi' H(I-P)^{-1}. \tag{2.9}$$

Доведення. Нехай

$$k_\alpha^i(t)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{N} f_{ik}h_{kj}\int_0^t A_\alpha^j(t-u)dF_i(u),\ i=1,2,...,N,\ \alpha=1,2,...,r.$$

З (2.7) випливає, що

$$k_\alpha^i(t)\uparrow k_\alpha^i=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{N} f_{ik}h_{kj}A_\alpha^j=\sum_{k=1}^{N} f_{ik}H_\alpha^k \text{ при } t\to\infty,$$

де $H_\alpha^k=\sum_{j=1}^{r} h_{kj}A_\alpha^j,\ k=1,2,...,N,\ \alpha=1,2,...,r.$

Подамо функції $m_\alpha^i(t),\ i=1,2,...,N$ як розв'язок рівнянь марковського відновлення (2.3)

$$m_\alpha^i(t)=\sum_{j=1}^{N}\int_0^t d\widetilde{F}_{ij}(u)f_\alpha^j(t-u),\quad i=1,2,...,N.$$

Оскільки $\int_0^t d\widetilde{F}_{ij}(u)k_\alpha^j(t-u)=\widetilde{F}_{ij}(t)k_\alpha^j-\int_0^t [k_\alpha^j-k_\alpha^j(t-u)]d\widetilde{F}_{ij}(u)$, і при виконанні умов теореми $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\widetilde{F}_{ij}(t)=a^{-1}\pi_j$ (див. додаток, теорема 1), то для доведення (2.9) залишилось показати, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t [k_\alpha^j-k_\alpha^j(t-u)]d\widetilde{F}_{ij}(u)=0 \qquad (2.10)$$

Для будь-якого $0<\varepsilon<1$ оцінимо зверху останній інтеграл

$$\int_0^t [k_\alpha^j-k_\alpha^j(t-u)]d\widetilde{F}_{ij}(u)=\int_0^{t(1-\varepsilon)} [k_\alpha^j-k_\alpha^j(t-u)]d\widetilde{F}_{ij}(u)+\int_{t(1-\varepsilon)}^{t} [k_\alpha^j-k_\alpha^j(t-u)]d\widetilde{F}_{ij}(u)\le$$

$$\le[k_\alpha^j-k_\alpha^j(t\varepsilon)]\widetilde{F}_{ij}(t(1-\varepsilon))+k_\alpha^j[\widetilde{F}_{ij}(t)-\widetilde{F}_{ij}(t(1-\varepsilon))].$$

Таким чином

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t [k_\alpha^j-k_\alpha^j(t-u)]d\widetilde{F}_{ij}(u)\le a^{-1}\pi_j k_\alpha^j\varepsilon.$$

Оскільки $0<\varepsilon<1$ довільне, то співвідношення (2.10) справедливе і теорему доведено.

Наслідок 2.3. При виконанні умов теореми 2.2 задача максимізації середнього прибутку для мережі $[SM|GI|\infty]^r$ є задачею лінійного програмування виду

$$a^{-1}\pi' H(I-P)^{-1}C \to \max\,, \qquad (2.11)$$

при умові

$$h_{i1} + h_{i2} + ... + h_{ir} = 1,\ h_{ij} \ge 0,\ i = 1,2,...,N,\ \ j = 1,2,...,r. \qquad (2.12)$$

Зазначимо, що оптимізаційна задача (2.11), (2.12) розв’язується з точки зору менеджера мережі. Якщо користувач мережею може обирати матрицю H, то він буде намагатись мінімізувати функціонал у (2.11) і шукати таке управління H^{-}, яке забезпечить мінімум середніх витрат за обробку інформаційного потоку.

2.3. Гранична кореляційна матриця процесу накопичення прибутку

Цей підрозділ продовжує дослідження процесу накопичення прибутку і містить результати, які є основою для аналізу задачі мінімізації ризику.

Введемо позначення

$$m^{i}_{\alpha\beta}(t) = \left.\frac{\partial^2 S^{i}(t,z)}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}\right|_{z=\bar{1}},\ \ D^{j}_{\alpha\beta}(t) = \left.\frac{\partial^2 \varphi_j(t,z)}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}\right|_{z=\bar{1}},\ \ i = 1,2,...,N,\ \ j,\alpha,\beta = 1,2,...,r\,.$$

Лема 2.2. Функції $m^{i}_{\alpha\beta}(t)$, $i = 1,2,\ldots,N$ є єдиним розв’язком системи інтегральних рівнянь

$$m^{i}_{\alpha\beta}(t) = \sum_{j=1}^{N}\int_0^t dF_{ij}(u) m^{j}_{\alpha\beta}(t-u) + \sum_{j=1}^{N}\int_0^t dF_{ij}(u) m^{j}_{\alpha}(t-u)\left[\sum_{k=1}^{r} h_{jk} A^{k}_{\beta}(t-u)\right] +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_0^t dF_{ij}(u) m^{j}_{\beta}(t-u)\left[\sum_{k=1}^{r} h_{jk} A^{k}_{\alpha}(t-u)\right] + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{r}\int_0^t dF_{i}(u) f_{ij} h_{jk} D^{k}_{\alpha\beta}(t-u)\,, \qquad (2.13)$$

$$i = 1,2,...,N\,,$$

$$D_{\alpha\beta}^{j}(t)=\sum_{k=1}^{r}\int_{0}^{t}dG_{j}(u)p_{jk}D_{\alpha\beta}^{k}(t-u)+\delta_{\alpha j}\sum_{k=1}^{r}\int_{0}^{t}dG_{j}(u)p_{jk}A_{\beta}^{k}(t-u)+$$
$$+\delta_{\beta j}\sum_{k=1}^{r}\int_{0}^{t}dG_{j}(u)p_{jk}A_{\alpha}^{k}(t-u),\quad j=1,2,\ldots,r, \tag{2.14}$$

де функції $m_{\alpha}^{i}(t)$, $i=1,2,...,N$, $\alpha=1,2,...,r$ визначаються як розв'язок системи інтегральних рівнянь (2.3), (2.4).

Доведення леми 2.2 випливає з співвідношень (2.1), (2.2).

Лема 2.3. Якщо спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший 1, то

$$D'_{\alpha\beta}(t)=\left(D_{\alpha\beta}^{1}(t),\ldots,D_{\alpha\beta}^{r}(t)\right)\to D'_{\alpha\beta}=\left(D_{\alpha\beta}^{1},\ldots,D_{\alpha\beta}^{r}\right),\text{ при } t\to\infty, \tag{2.15}$$

де

$$D_{\alpha\beta}=(I-P)^{-1}I_{\alpha}P(I-P)^{-1}e_{\beta}+(I-P)^{-1}I_{\beta}P(I-P)^{-1}e_{\alpha}, \tag{2.16}$$

e_{α} – r- вимірний вектор, у якого компонента з номером α дорівнює 1, а інші дорівнюють 0; I_{α} – матриця розміром $r\times r$, у якій діагональний елемент з номером α дорівнює 1, а інші елементи дорівнюють 0, $I_{\alpha}=\left\|\delta_{ij}\delta_{i\alpha}\right\|_{i,j=1}^{r}$.

Доведення. Для функцій $D_{\alpha\beta}^{j}(t)$, $j,\alpha,\beta=1,2,\ldots,r$ введемо перетворення Лапласа

$$D_{\alpha\beta}^{j}(s)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}D_{\alpha\beta}^{j}(t)dt,\quad \operatorname{Re}s\geq 0,$$
$$D'_{\alpha\beta}(s)=\left(D_{\alpha\beta}^{1}(s),D_{\alpha\beta}^{2}(s),\ldots,D_{\alpha\beta}^{r}(s)\right).$$

Тоді в термінах перетворень Лапласа система (2.14) має вигляд

$$D_{\alpha\beta}^{j}(s)=\sum_{k=1}^{r}G_{j}(s)p_{jk}D_{\alpha\beta}^{k}(s)+\delta_{\alpha j}\sum_{k=1}^{r}G_{j}(s)p_{jk}A_{\beta}^{k}(s)+\delta_{\beta j}\sum_{k=1}^{r}G_{j}(s)p_{jk}A_{\alpha}^{k}(s),$$

або

$$D_{\alpha\beta}(s)=\Delta(G(s))P\,D_{\alpha\beta}(s)+I_{\alpha}\Delta(G(s))P\,A_{\beta}(s)+I_{\beta}\Delta(G(s))P\,A_{\alpha}(s), \tag{2.17}$$

де $A'_{\alpha}(s)=\left(A_{\alpha}^{1}(s),A_{\alpha}^{2}(s),\ldots,A_{\alpha}^{r}(s)\right)$, $\alpha=1,2,\ldots,r$.

Розв’язком (2.17) буде

$$D_{\alpha\beta}(s)=\left[I-\Delta(G(s))P\right]^{-1}I_\alpha\Delta(G(s))P\,A_\beta(s)+ \\ +\left[I-\Delta(G(s))P\right]^{-1}I_\beta\Delta(G(s))P\,A_\alpha(s). \qquad (2.18)$$

З леми 2.1 випливає, що вектор $A_\alpha(s)$, $\alpha=1,2,\ldots,r$ задовольняє рівнянню

$$A_\alpha(s)=\frac{1}{s}G_\alpha(s)e_\alpha+\Delta(G(s))P\,A_\alpha(s).$$

Таким чином

$$A_\alpha(s)=\frac{1}{s}\left[I-\Delta(G(s))P\right]^{-1}e_\alpha G_\alpha(s). \qquad (2.19)$$

Підставляючи (2.19) у (2.18), знаходимо

$$D_{\alpha\beta}(s)=\frac{1}{s}\left[I-\Delta(G(s))P\right]^{-1}I_\alpha\Delta(G(s))P\left[I-\Delta(G(s))P\right]^{-1}e_\beta G_\beta(s)+ \\ +\frac{1}{s}\left[I-\Delta(G(s))P\right]^{-1}I_\beta\Delta(G(s))P\left[I-\Delta(G(s))P\right]^{-1}e_\alpha G_\alpha(s).$$

З останньої рівності і тауберової теореми для перетворень Лапласа випливає (2.15), (2.16). Лему доведено.

Наслідок 2.4. Якщо спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший 1 то

$$k^i_{\alpha\beta}(t)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{r}\int_0^t dF_i(u)f_{ij}h_{jk}D^k_{\alpha\beta}(t-u)\uparrow k^i_{\alpha\beta}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{r}f_{ij}h_{jk}D^k_{\alpha\beta}\text{, при } t\to\infty \qquad (2.20)$$

Доведення (2.20) проводиться аналогічно доведенню співвідношення (2.7) у наслідку 2.2.

Наслідок 2.5. Якщо для $[SM\,|\,GI\,|\,\infty]^r$ – мережі матриця F – нерозкладна, $\max\limits_{1\le i\le r} a_i<\infty$, і спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший 1, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{N}\int_0^t d\tilde{F}_{ij}(u)k^j_{\alpha\beta}(t-u)=a^{-1}\pi' H[(I-P)^{-1}I_\alpha P(I-P)^{-1}e_\beta+ \\ +(I-P)^{-1}I_\beta P(I-P)^{-1}e_\alpha] \qquad (2.21)$$

Доведення (2.21) базується на поданні (2.16) і проводиться за схемою, що використовується у теоремі 2.2.

Вивчимо більш детально поведінку функцій

$$m_\alpha^i(t),\ \ i=1,2,\ldots,N,\quad \alpha=1,2,\ldots,r.$$

Нехай $\overline{A}_\alpha^i=\int\limits_0^\infty\left[A_\alpha^i-A_\alpha^i(t)\right]dt;\quad \overline{A}=\left\|\overline{A}_\alpha^i\right\|_1^r$, при умові, що існують відповідні інтеграли.

Лема 2.4. Якщо спектральний радіус матриці P строго менший 1 і $\int\limits_0^\infty t\,dG_i(t)=\dfrac{1}{\mu_i}<+\infty$, $i=1,2,\ldots,r$, то

$$\overline{A}=(I-P)^{-1}\Delta^{-1}(\mu)\,(I-P)^{-1}<+\infty. \tag{2.22}$$

Доведення формули (2.22) можна отримати за схемою, що була використана в лемі 2 з роботи [10].

З попереднього аналізу випливає, що

$$m_\alpha^i(t)=\sum_{j=1}^N\int\limits_0^t d\widetilde{F}_{ij}(u)k_\alpha^j(t-u),\ \text{ де }\ k_\alpha^j(t)=\sum_{k=1}^N\sum_{i=1}^r f_{jk}h_{ki}\int\limits_0^t A_\alpha^i(t-u)dF_j(u),$$

$$k_\alpha^j(t)\uparrow k_\alpha^j=\sum_{k=1}^N\sum_{i=1}^r f_{jk}h_{ki}A_\alpha^i=\sum_{k=1}^N f_{jk}H_\alpha^k,\ \text{ при } t\to\infty.$$

Використовуючи ці результати, для $m_\alpha^i(t)$ маємо наступний розклад.

Лема 2.5. Якщо матриця $F(t)$ негратчаста, F – нерозкладна, $\max\limits_{1\le i\le N}a_i<\infty$, спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший 1 і $\max\limits_{1\le i\le r}(1/\mu_i)<\infty$, то

$$m_\alpha^i(t)=\sum_{j=1}^N\widetilde{F}_{ij}(t)k_\alpha^j-\widetilde{m}_\alpha^i(t),\ i=1,2,...,N,\ \alpha=1,2,...,r,$$

Причому

$$\lim_{t\to\infty}\widetilde{m}_\alpha^i(t)=\widetilde{m}_\alpha=a^{-1}\sum_{k=1}^N\pi_k\overline{H}_\alpha^k+a^{-1}\sum_{j,k=1}^N\pi_j a_j f_{jk}H_\alpha^k, \tag{2.23}$$

де $\overline{H}_\alpha^k=\sum\limits_{i=1}^r h_{ki}\overline{A}_\alpha^i,\ k=1,2,...,N,\ \alpha=1,2,...,r$.

Доведення. Оскільки $m_\alpha^i(t) = \sum_{j=1}^{N} \widetilde{F}_{ij}(t) k_\alpha^j - \sum_{j=1}^{N} \int_0^t d\widetilde{F}_{ij}(u)[k_\alpha^j - k_\alpha^j(t-u)]$, то для доведення леми залишилось перевірити рівність (2.23) для функції

$$\widetilde{m}_\alpha^i(t) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^t d\widetilde{F}_{ij}(u)[k_\alpha^j - k_\alpha^j(t-u)] \tag{2.24}$$

За умов леми підрахуємо

$$\int_0^\infty [k_\alpha^j - k_\alpha^j(t)]dt = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{r} f_{jk} h_{ki} \int_0^\infty [A_\alpha^i - \int_0^t A_\alpha^i(t-u) dF_j(u)]dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{r} f_{jk} h_{ki} \int_0^\infty [A_\alpha^i (1 - F_j(t)) + \int_0^t (A_\alpha^i - A_\alpha^i(t-u)) dF_j(u)]dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{r} f_{jk} h_{ki} [A_\alpha^i a_j + \int_0^\infty (A_\alpha^i - A_\alpha^i(t))dt] = a_j \sum_{k=1}^{N} f_{jk} H_\alpha^k + \sum_{k=1}^{N} f_{jk} \overline{H}_\alpha^k .$$

Тепер співвідношення (2.23) випливає з теореми 3, наведеної у додатку. Лему доведено.

В теоремі 2.2 для компонент $\widetilde{F}_{ij}(t)$ матриці відновлення $\widetilde{F}(t)$ був отриманий такий результат:

Нехай $K(t) \uparrow K \geq 0$ при $t \to \infty$, матриця F – нерозкладна і $\max_{1 \leq i \leq N} a_i < \infty$. Тоді

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t K(t-u) d\widetilde{F}_{ij}(u) = \frac{\pi_j}{a} K . \tag{2.25}$$

Якщо зняти умову монотонності для функції K(t), то співвідношення (2.25) можна довести коли на процес x(t) накладається більше обмежень.

Лема 2.6. Нехай K(t) – невід’ємна, вимірна, обмежена функція, для якої існує скінченна границя $\lim_{t \to \infty} K(t) = K$. Матриця F(t) негратчаста, F – нерозкладна і $\max_{1 \leq i \leq N} a_i < \infty$. Тоді для будь-якої $\widetilde{F}_{ij}(t)$ виконується (2.25).

Доведення. З умов леми випливає, що існує $A>0$, що $|K(t)-K| \le A$ для всіх $t \ge 0$. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує t_ε таке, що $|K(t)-K| < \varepsilon$ при $t > t_\varepsilon$. Тоді при $\sqrt{t} > t_\varepsilon$

$$\left|\int_0^t [K(t-u)-K]d\widetilde{F}_{ij}(u)\right| \le \int_0^{t-\sqrt{t}} |K(t-u)-K| d\widetilde{F}_{ij}(u) + \int_{t-\sqrt{t}}^{t} |K(t-u)-K| d\widetilde{F}_{ij}(u) \le$$

$$\le \varepsilon \widetilde{F}_{ij}(t-\sqrt{t}) + A[\widetilde{F}_{ij}(t) - \widetilde{F}_{ij}(t-\sqrt{t})].$$

На основі теореми Блекуелла (див. додаток, теорема 2) знаходимо: існує $T > t_\varepsilon$, що при $t > T$

$$\left|\int_0^t [K(t-u)-K]d\widetilde{F}_{ij}(u)\right| \le \varepsilon \widetilde{F}_{ij}(t) + A\frac{\pi_j}{a}(\sqrt{t}+1).$$

Таким чином

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\left|\int_0^t [K(t-u)-K]d\widetilde{F}_{ij}(u)\right| \le \varepsilon \frac{\pi_j}{a}.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ – довільне, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t [K(t-u)-K]d\widetilde{F}_{ij}(u) = 0.$$

Щоб отримати (2.25) залишилось у поданні

$$\frac{1}{t}\int_0^t K(t-u)d\widetilde{F}_{ij}(u) = \frac{1}{t}\int_0^t [K(t-u)-K]d\widetilde{F}_{ij}(u) + K\frac{1}{t}\widetilde{F}_{ij}(t)$$

перейти до границі при $t \to \infty$. Лему доведено.

Нехай $g^i_{\alpha\beta}(t) = \sum_{j=1}^{N}\int_0^t dF_{ij}(u) m^j_\alpha(t-u) H^j_\beta,\ i = 1,2,...,N,\ \alpha,\beta = 1,2,...,r.$

Тепер асимптотичний аналіз розв’язку системи інтегральних рівнянь (2.13) можна спростити.

Наслідок 2.6. Якщо виконуються умови леми 2.5, то

$$m^i_{\alpha\beta}(t) = \sum_{j=1}^{N}\int_0^t d\widetilde{F}_{ij}(u)[g^j_{\alpha\beta}(t-u) + g^j_{\beta\alpha}(t-u)] +$$

$$+ a^{-1}\pi' H[(I-P)^{-1} I_\alpha P (I-P)^{-1} e_\beta + \tag{2.26}$$

$$+(I-P)^{-1}I_\beta P(I-P)^{-1}e_\alpha]t+o(t).$$

Доведення. З урахуванням співвідношення (2.21) для встановлення рівності (2.26) залишилось перевірити, що для функції

$$\delta^i_{\alpha\beta}(t)=\sum_{j=1}^{N}\int_0^t dF_{ij}(u)m^j_\alpha(t-u)\left[\sum_{k=1}^{r}h_{jk}(A^k_\beta-A^k_\beta(t-u))\right],\ i=1,2,...,N,\ \ \alpha,\beta=1,2,...,r$$

справедлива рівність

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t d\widetilde{F}_{ij}(u)\delta^j_{\alpha\beta}(t-u)=0. \tag{2.27}$$

Оскільки за умов леми 2.5 $\int_0^\infty [A^k_\beta-A^k_\beta(t)]dt<\infty$, то з подання (2.23) випливає

$$\lim_{t\to\infty}m^j_\alpha(t)[A^k_\beta-A^k_\beta(t)]=0,\quad \lim_{t\to\infty}\delta^i_{\alpha\beta}(t)=0.$$

Тепер (2.27) є наслідком леми 2.6. Наслідок доведено.

Нехай $\widetilde{g}^j_{\alpha\beta}(t)=\sum_{k=1}^{N}\int_0^t dF_{jk}(u)\widetilde{m}^k_\alpha(t-u)H^k_\beta$, де функції $\widetilde{m}^k_\alpha(t),\ \ k=1,2,...,N,\ \ \alpha=1,2,...,r$ визначені співвідношенням (2.23).

Наслідок 2.7. Якщо виконуються умови леми 2.5, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{N}\int_0^t d\widetilde{F}_{ij}(u)\widetilde{g}^j_{\alpha\beta}(t-u)=a^{-2}\sum_{k,s=1}^{N}\pi_k H^k_\beta\pi_s\overline{H}^s_\alpha+a^{-2}\sum_{k,p,s=1}^{N}\pi_k H^k_\beta\pi_p a_p f_{ps}H^s_\alpha$$

Доведення цього результату базується на (2.24) з леми 2.5.

При умові існування другого моменту для часу перебування у станах напівмарковського процесу $x(t)$

$$\widetilde{F}_{ij}(t)=a^{-1}\pi_j t+r_{ij}(t),\quad \lim_{t\to\infty}r_{ij}(t)=r_{ij}, \tag{2.28}$$

де $R=\left\|r_{ij}\right\|_1^N$ – скінченна матриця, яка явно виписується через параметри $x(t)$ ([7], стор. 105):

$$R = R_0 - a^{-1}[\Pi(\bar{a}\cdot\bar{1}')R_0 + R_0(\bar{a}\cdot\bar{1}')\Pi] -$$
$$- a^{-2}\Pi(\bar{a}\cdot\bar{1}')R_0(\bar{a}\cdot\bar{1}')\Pi + \frac{1}{2}a^{-2}\Pi(\bar{b}\cdot\bar{1}')\Pi, \tag{2.29}$$

$\Pi = \bar{1}\cdot\pi'$ – матриця розміром $N\times N$, рядки якої однакові і співпадають з стаціонарним розподілом вкладеного ланцюга Маркова; $\bar{1}' = (1,1,...,1)$ – N-вимірний вектор, складений з одиниць; $\pi' = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_N)$, $\bar{a}' = (a_1, a_2, ..., a_N)$,

$\bar{b}' = (b_1, b_2, ..., b_N)$, $b_i = \int\limits_0^\infty t^2 dF_i(t)$, $i = 1,2,...,N$, $R_0 = (I - F + \Pi)^{-1} - \Pi$

потенціал вкладеного ланцюга Маркова.

Нехай

$$\tilde{r}^j_{\alpha\beta}(t) = \sum_{k,s,p=1}^{N}\int\limits_0^t dF_{jk}(u)H^k_\beta r_{kp}(t-u)f_{ps}H^s_\alpha, \quad j = 1,2,...,N, \quad \alpha,\beta = 1,2,...,r.$$

З (2.28) випливає наступний результат.

Наслідок 2.8. Якщо виконуються умови леми 2.5 і $b_i = \int\limits_0^\infty t^2 dF_i(t) < \infty$ при $i = 1,2,...,N$, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_0^t d\tilde{F}_{ij}(u)\tilde{r}^j_{\alpha\beta}(t-u) = a^{-1}\sum_{j,k,p=1}^{N}\pi_j H^j_\beta r_{jk} f_{kp} H^p_\alpha$$

Оскільки

$$a^{-1}\sum_{j,k,s=1}^{N}\int\limits_0^t dF_{ij}(u)(t-u)\pi_k f_{ks}H^s_\alpha H^j_\beta = a^{-1}\sum_{j,s=1}^{N}\int\limits_0^t F_{ij}(u)du\pi_s H^s_\alpha H^j_\beta =$$
$$= a^{-1}\sum_{j,s=1}^{N}\left[tf_{ij} - \int\limits_0^t (f_{ij} - F_{ij}(u))du\right]\pi_s H^s_\alpha H^j_\beta = ta^{-1}\sum_{j,s=1}^{N} f_{ij}H^j_\beta \pi_s H^s_\alpha -$$
$$- a^{-1}\sum_{j,s=1}^{N}\int\limits_0^t [f_{ij} - F_{ij}(u)]duH^j_\beta \pi_s H^s_\alpha,$$

то для того, щоб завершити асимптотичний аналіз $m^i_{\alpha\beta}(t)$, залишилось дослідити $\sum\limits_{j=1}^{N}\int\limits_0^t d\tilde{F}_{ij}(u)(t-u)f_{jk}$ та $\sum\limits_{j=1}^{N}\int\limits_0^t d\tilde{F}_{ij}(u)\int\limits_0^{t-u}[f_{jk} - F_{jk}(v)]dv$ при $t\to\infty$.

Наслідок 2.9. Якщо матриця $F(t)$ негратчаста, F – нерозкладна і $\max\limits_{1\le i\le N} b_i < \infty$, то

$$\sum_{j=1}^{N}\int_0^t d\widetilde{F}_{ij}(u)(t-u)f_{jk} = \frac{1}{2}a^{-1}t^2\pi_k + t\sum_{j=1}^{N} r_{ij}f_{jk} + o(t) \qquad (2.30)$$

Розклад (2.30), очевидно, випливає з (2.28).

З леми 2.6 для компонент матриці відновлення маємо такий результат.

Наслідок 2.10. Якщо матриця $F(t)$ негратчаста, F – нерозкладна і $\max\limits_{1\le i\le N} a_i < \infty$, то

$$\sum_{j=1}^{N}\int_0^t d\widetilde{F}_{ij}(u)\int_0^{t-u}[f_{jk} - F_{jk}(v)]dv = ta^{-1}\sum_{j=1}^{N}\pi_j a_j f_{jk} + o(t)$$

Поєднуючи результати наслідків 2.6 – 2.10, для $m^i_{\alpha\beta}(t)$ маємо наступне подання.

Лема 2.7. Якщо виконуються умови леми 2.5 і $\max\limits_{1\le i\le N} b_i < \infty$, то

$$\begin{aligned} m^i_{\alpha\beta}(t) &= t^2a^{-2}(\pi' H_\alpha)(\pi' H_\beta) + \\ &+ ta^{-1}\{(\pi' H_\alpha)\sum_{j,k=1}^{N} r_{ij}f_{jk}H^k_\beta + (\pi' H_\beta)\sum_{j,k=1}^{N} r_{ij}f_{jk}H^k_\alpha + \\ &+ H_\beta'(\pi)RFH_\alpha + H_\alpha'(\pi)RFH_\beta + \\ &+ \pi' H[(I-P)^{-1}I_\alpha P(I-P)^{-1}e_\beta + \\ &+ (I-P)^{-1}I_\beta P(I-P)^{-1}e_\alpha] + \delta_{\alpha\beta}\pi' H_\alpha\} - \\ &- ta^{-2}\{\pi'(a)FH_\beta(\pi' H_\alpha) + \pi'(a)FH_\alpha(\pi' H_\beta) + (\pi' H_\alpha)(\pi'\overline{H}_\beta) + \\ &+ (\pi' H_\beta)(\pi'\overline{H}_\alpha) + (\pi' H_\alpha)\pi'(a)FH_\beta + (\pi' H_\beta)\pi'(a)FH_\alpha\} + o(t), \end{aligned} \qquad (2.31)$$

де

$H'_\alpha = (H^1_\alpha, H^2_\alpha, ..., H^N_\alpha)$, $\overline{H}'_\alpha = (\overline{H}^1_\alpha, \overline{H}^2_\alpha, ..., \overline{H}^N_\alpha)$, $H'_\alpha(\pi) = (\pi_1 H^1_\alpha, \pi_2 H^2_\alpha, ..., \pi_N H^N_\alpha)$
,

$\overline{H}'_\alpha(\pi) = (\pi_1\overline{H}^1_\alpha, \pi_2\overline{H}^2_\alpha, ..., \pi_N\overline{H}^N_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, ..., r$, $\pi'(a) = (\pi_1 a_1, \pi_2 a_2, ..., \pi_N a_N)$.

Оскільки права частина (2.30) містить доданки $ta^{-1}(\pi' H_\alpha)\sum_{j,k=1}^{M} r_{ij} f_{jk} H_\beta^k$ і $ta^{-1}(\pi' H_\beta)\sum_{j,k=1}^{N} r_{ij} f_{jk} H_\alpha^k$, то асимптотична поведінка другого моменту процесу накопичення прибутку залежить від початкового стану керуючого напівмарковського процесу $x(t)$.

На завершення сформулюємо основний результат цього підрозділу.

Теорема 2.3. Якщо для $[SM|GI|\infty]^r$ – мережі матриця $F(t)$ негратчаста, F – нерозкладна, $\max\limits_{1\le i\le N} b_i < \infty$, спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший 1 і $\max\limits_{1\le i\le r}(1/\mu_i) < \infty$, то $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\mathrm{cov}(S_\alpha^i(t), S_\beta^i(t)) = V_{\alpha\beta}(H)$ існує, не залежить від початкового стану “i” і

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta}(H) &= a^{-2} H'_\alpha \Delta(\pi)[aR - \Pi\Delta(\bar a)]FH_\beta + \\ &+ a^{-2} H'_\beta \Delta(\pi)[aR - \Pi\Delta(\bar a)]FH_\alpha + \\ &+ a^{-1}\pi' H[(I-P)^{-1} I_\alpha P(I-P)^{-1} e_\beta + \\ &+ (I-P)^{-1} I_\beta P(I-P)^{-1} e_\alpha] + a^{-1}\delta_{\alpha\beta}\pi' H_\alpha \end{aligned} \tag{2.32}$$

Доведення. З подання (2.31) і розкладу

$$\begin{aligned} m_\alpha^i(t) m_\beta^i(t) &= t^2 a^{-2}(\pi' H_\alpha)(\pi' H_\beta) + \\ &+ ta^{-1}[(\pi' H_\alpha)\sum_{j,s=1}^{N} r_{ij} f_{js} H_\beta^s + (\pi' H_\beta)\sum_{j,s=1}^{N} r_{ij} f_{js} H_\alpha^s] - \\ &- ta^{-2}[(\pi' H_\alpha)\pi'(a)FH_\beta + (\pi' H_\beta)\pi'(a)FH_\alpha + (\pi' H_\alpha)(\pi' \overline{H}_\beta) + (\pi' \overline{H}_\alpha)(\pi' H_\beta)] + o(t), \end{aligned}$$

який є наслідком леми 2.5, знаходимо

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta}(H) &= a^{-1}[H'_\alpha(\pi)RFH_\beta + H'_\beta(\pi)RFH_\alpha] - \\ &- a^{-2}[\pi'(a)FH_\alpha(\pi' H_\beta) + \pi'(a)FH_\beta(\pi' H_\alpha)] + \\ &+ a^{-1}\pi' H[(I-P)^{-1} I_\alpha P(I-P)^{-1} e_\beta + \end{aligned}$$

$$+(I-P)^{-1}I_{\beta}P(I-P)^{-1}e_{\alpha}]+a^{-1}\delta_{\alpha\beta}\pi' H_{\alpha}.$$

Підставляючи сюди

$$H'_{\alpha}(\pi)=H'_{\alpha}\Delta(\pi),\ H'_{\beta}(\pi)=H'_{\beta}\Delta(\pi),\ \pi' H_{\alpha}=H'_{\alpha}\pi,\ \pi' H_{\beta}=H'_{\beta}\pi,\ \pi\pi'=\Delta(\pi)\Pi$$

після нескладних матричних перетворень приходимо до (2.32). Теорему доведено.

Отриманий результат служить основою аналізу задачі мінімізації ризику для мереж типу $[SM|GI|\infty]^r$.

2.4. Алгоритм розв'язку задачі мінімізації ризику

В цьому підрозділі для задачі мінімізації ризику ми випишемо цільву функцію через параметри стохастичної мережі та з'ясуємо тип оптимізаційної задачі.

Як наслідок проведеного аналізу процесу накопичення прибутку у підрозділах 2.1 – 2.3 маємо наступний результат.

Теорема 2.4. Якщо для $[SM|GI|\infty]^r$ – мережі матриця F(t) негратчаста, F – нерозкладна, $\max\limits_{1\le i\le N} b_i<\infty$, спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший 1 і $\max\limits_{1\le i\le r}(1/\mu_i)<\infty$, то задача мінімізації ризику є задачею квадратичного програмування виду

$$V^{(1)}(H)+V^{(2)}(H)\to\min, \tag{2.33}$$

при умові

$$\begin{gathered} a^{-1}\pi' H(I-P)^{-1}C=M_0, \\ h_{i1}+h_{i2}+\ldots+h_{ir}=1,\ h_{ij}\ge 0, \end{gathered} \tag{2.34}$$

де

$$V^{(1)}(H)=a^{-1}\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}C_{\alpha}\{\delta_{\alpha\beta}\pi' H_{\alpha}+ \tag{2.35}$$

$$+\pi' H[(I-P)^{-1} I_\alpha P(I-P)^{-1} e_\beta + (I-P)^{-1} I_\beta P(I-P)^{-1} e_\alpha]\}C_\beta \quad -$$

лінійна частина цільової функції;

$$V^{(2)}(H) = a^{-2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} C_\alpha \{H'_\alpha \Delta(\pi)[aR - \Pi\Delta(\bar{a})]FH_\beta + \tag{2.36}$$

$$+ H'_\beta \Delta(\pi)[aR - \Pi\Delta(\bar{a})]FH_\alpha\}C_\beta \quad -$$

квадратична частина цільової функції.

У формулах (2.33), (2.34) і цільова функція, і обмеження, які окреслюють область допустимих значень, виписані явно через параметри $[SM|GI|\infty]^r$ – мережі. Для розв'язку задачі мінімізації ризику можна застосовувати ефективні алгоритми квадратичного програмування (див., наприклад, [11], стор. 347-361).

Спираючись на подання (2.36) можна навести обмеження на параметри $[SM|GI|\infty]^r$ – мережі, коли задача квадратичного програмування для мінімізації ризику вироджується у задачу лінійного програмування.

Наслідок 2.11. Якщо для $[SM|GI|\infty]^r$ – мережі виконуються умови теореми 2.4 і додатково

$$aRF = \Pi\Delta(\bar{a})F, \tag{2.37}$$

то задача мінімізації ризику є задачею лінійного програмування, цільова функція якої задається формулою (2.35).

Наслідком (2.37) є те, що у класі $[GI|GI|\infty]^r$ – моделей при умові $\rho = a^{-1}\sqrt{b-a^2} = 1$ задача мінімізації ризику є задачею лінійного програмування.

Як для задачі Марковіца в класичній постановці, так і для її аналога у випадку стохастичних мереж можна спостерігати ефект диверсифікації ([12], стор. 153): збільшення середнього прибутку, починаючи з мінімально можливого допустимого значення, на певному етапі приводить до зменшення ризику.

В зв'язку з цим розглянемо $[GI|GI|\infty]^2$ – модель, для якої прибуток від функціонування мережі дорівнює

$$M(h)=\lambda h_1\left(A_1^1C_1+A_2^1C_2\right)+\lambda h_2\left(A_1^2C_1+A_2^2C_2\right),$$

де $h_1=H_1^1,\ h_2=H_2^1,\ h'=(h_1,h_2)$.

Величину ризику можна подати наступним чином

$$V(h)=\sum_{i,j=1}^{2}C_iV_{ij}(h)C_j\,, \tag{2.38}$$

де $$V_{11}(h)=\lambda\left(\rho^2-1\right)\left(h_1A_1^1+h_2A_1^2\right)^2+\lambda\left(h_1B_{11}^1+h_2B_{11}^2\right)+\lambda h_1A_1^1+\lambda h_2A_1^2,$$

$$\begin{aligned}V_{12}(h)=\lambda\left(\rho^2-1\right)&\left(h_1^2A_1^1A_2^1+h_1h_2A_1^1A_2^2+h_1h_2A_1^1A_1^2+h_2^2A_1^2A_2^2\right)+\\&+\lambda\left(h_1B_{12}^1+h_2B_{12}^2\right)+\lambda h_1A_1^1+\lambda h_2A_1^2\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}V_{21}(h)=\lambda\left(\rho^2-1\right)&\left(h_1^2A_1^1A_2^1+h_1h_2A_2^1A_1^2+h_1h_2A_1^1A_2^2+h_2^2A_1^2A_2^2\right)+\\&+\lambda\left(h_1B_{21}^1+h_2B_{21}^2\right)+\lambda h_1A_2^1+\lambda h_2A_2^2\end{aligned},$$

$$V_{22}(h)=\lambda\left(\rho^2-1\right)\left(h_1A_2^1+h_2A_2^2\right)^2+\lambda\left(h_1B_{22}^1+h_2B_{22}^2\right)+\lambda h_1A_2^1+\lambda h_2A_2^2,$$

$$B_{ij}^{\alpha}=\lim_{t\to\infty}B_{ij}^{\alpha}(t),\ \ \alpha,i,j=1,2\,.$$

Нехай $\lambda=2,\ \rho=2,\ C_1=0.8,\ C_2=1,\ p_{11}=0.1,\ p_{12}=0.5,\ p_{21}=0.4,\ p_{22}=0.2$. Тоді з урахуванням того, що $h_2=1-h_1$, функціонал (2.37) можна записати у такому вигляді

$$V(h_1)=25.87h_1^2-28.77h_1+56.43\,.$$

Величина ризику є функцією однієї змінної h_1, а саме параболою. Функціонал $V(h_1)$ за визначенням може набувати лише невід'ємних значень, а тому в системі координат $(h_1, V(h_1))$ графік параболи лежить над віссю абсцис.

З системи рівнянь

$$\begin{cases} M(h) = \lambda h_1\left(A_1^1 C_1 + A_2^1 C_2\right) + \lambda h_2\left(A_1^2 C_1 + A_2^2 C_2\right); \\ h_1 + h_2 = 1 \end{cases}$$

маємо

$$h_1 = \frac{M(h) - \lambda\left(A_1^2 C_1 + A_2^2 C_2\right)}{\lambda\left(A_1^1 C_1 + A_2^1 C_2 - A_1^2 C_1 - A_2^2 C_2\right)}.$$

Тоді

$$V(h) = 24.257 M^2(h) - 213.37 M(h) + 516.99$$

Отже, зв'язок між величиною ризику $V(h)$ та величиною очікуваного прибутку $M(h)$ також описується параболою

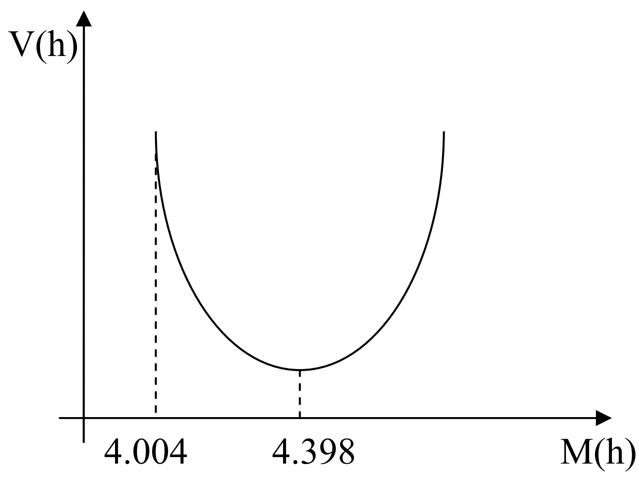

Рис. 2.1. Ефект диверсифікації

На рис. 2.1 відзначимо інтервал $[4.004; 4.398]$ на вісі абсцис, на якому одночасно збільшується очікуваний прибуток і зменшується ризик.

3. Розв’язок оптимізаційних задач при критичному навантаженні в мережі

3.1. Процес обробки інформації і накопичення прибутку в мережі типу $[G\,|\,GI\,|\,\infty]^r$

Розглянемо модель $[G\,|\,GI\,|\,\infty]^r$ – мережі, яка відрізняється від мережі типу $[SM|GI|\infty]^r$ тим, що на структуру вхідного потоку $\nu'(t)=(\nu_1(t),\nu_2(t),...,\nu_r(t))$ не накладається ніяких обмежень. Компоненти вектора $\nu(t)$ мають таку ж інтерпретацію, що і раніше: $\nu_i(t)$, $i=1,2,...,r$ – кількість інформаційних пакетів, що надійшли іззовні в і-тий вузол мережі на проміжку часу [0,t]. Компоненти можуть бути залежними, але ця залежність не обов’язково пов’язана з керуванням входу напівмарковським процесом x(t). Таке узагальнення, по-перше, дозволяє отримати більш загальні результати. По-друге, в $[G\,|\,GI\,|\,\infty]^r$ – моделях стає прозорою структура апроксимативного процесу для перевантаженого режиму функціонування.

Траєкторія інформаційного пакету в $[G\,|\,GI\,|\,\infty]^r$ – мережі описується напівмарковським процесом $y^m(t)\in\{1,2,...,r,r+1\}$, напівмарковська матриця якого $\|G_{ij}(t)\|_1^{r+1}$ будується за функціями розподілу часу обробки $G_i(t)$, $i=1,2,...,r$ у вузлах мережі і матрицею маршрутизації $P=\|p_{ij}\|_1^r$ наступним чином:

$$G_{ij}(t)=\begin{cases}p_{ij}G_i(t), & i=1,2,...,r, \quad j=1,2,...,r,\ r+1,\\ \delta_{r+1j}G_{r+1}(t), & i=r+1, \quad j=1,2,...,r,\ r+1,\end{cases} \qquad G_{r+1}(t)=\begin{cases}0, & t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases},$$

$$y^m(0)=m, \quad m=1,2,...,r\,.$$

Індекс “m” вказує на те, що інформаційний пакет надійшов у мережу через m-тий вузол, стан “$r+1$” для $y^m(t)$ є поглинаючим. Поглинання в “$r+1$” означає вихід пакету з мережі. Через $p_i^m(t)=P(y^m(t)=i)$, $m,i=1,2,...,r$, будемо позначати перехідні імовірності напівмарковського процесу $y^m(t)$, $P(t)=\left\|p_i^m(t)\right\|_1^r$.

Зв’яжемо з напівмарковським процесом $y^m(t)$ r-вимірний процес індикаторного типу $\left(\chi^m(t)\right)'=\left(\chi_1^m(t),\chi_2^m(t),...,\chi_r^m(t)\right)$ $t\geq 0$, наступним чином

$$\chi^m(t)=\begin{cases} e_j\,, \ y^m(t)=j, \ j=1,2,...,r, \\ e_0\,, \ y^m(t)=r+1, \end{cases}$$

де e_j – r-вимірний вектор, j-та компонента якого дорівнює 1, а інші – дорівнюють нулю; e_0 – нульовий r-вимірний вектор.

Нехай $\chi^{m,k}(t)$, $k=1,2,...$ послідовність незалежних випадкових процесів, скінченновимірні розподіли яких співпадають з $\chi^m(t)$. Тоді при умові, що у початковий момент часу $t=0$ $[G\,|\,GI\,|\,\infty]^r$ – мережа порожня і фіксована траєкторія вхідного потоку, процес обробки інформації $X'(t)=\left(X_1(t),X_2(t),...,X_r(t)\right)$ можна подати у вигляді

$$X(t)\overset{d}{=}\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_m(t)}\chi^{m,k}\left(t-\tau_k^m\right),$$

де τ_k^m – момент надходження k-го пакету в m-ий вузол, $m=1,2,...,r$; $k=1,2,...$.

Для того, щоб вивчати процес обробки інформації у $[G\,|\,GI\,|\,\infty]^r$ – мережі $X'(t)=\left(X_1(t),X_2(t),...,X_r(t)\right)$ сумісно з процесом накопичення прибутку $S'(t)=\left(S_1(t),S_2(t),...,S_r(t)\right)$, треба до компонент вектора $\chi^m(t)$ додати компоненти вектора $\left(\gamma^m(t)\right)'=\left(\gamma_1^m(t),\gamma_2^m(t),...,\gamma_r^m(t)\right)$, де $\gamma_i^m(t)$ –

число відвідувань i-го стану на проміжку часу [0,t] напівмарковським процесом $y^m(t)$.

Позначимо через $\gamma^{m,k}(t)$, $k=1,2,...$ послідовність незалежних випадкових процесів, скінченновимірні розподіли яких співпадають з $\gamma^m(t)$. Тоді при умові, що у початковий момент часу $t=0$ $[G\,|\,GI\,|\,\infty]^r$ – мережа порожня і фіксована траєкторія вхідного потоку, для $(X'(t),S'(t))$ маємо подання

$$(X'(t),S'(t))\overset{d}{=}\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_m(t)}\left([\chi^{m,k}\left(t-\tau_k^m\right)]',[\gamma^{m,k}\left(t-\tau_k^m\right)]'\right).$$

Позначимо через $\Phi^m(t,x,y)=Mx^{\chi^m(t)}\cdot y^{\gamma^m(t)}$, $m=1,2,...,r$ генератрису 2r-вимірного вектора $\left(\left(\chi^m(t)\right)',\left(\gamma^m(t)\right)'\right)$, $x'=\left(x_1,x_2,...,x_r\right)$, $y'=\left(y_1,y_2,...,y_r\right)$, $|x|\le 1$, $|y|\le 1$.

Для вивчення одновимірних розподілів процесу $\left(\left(\chi^m(t)\right)',\left(\gamma^m(t)\right)'\right)$, $t\ge 0$ важливе значення має наступний результат.

Лема 3.1. Функції $\Phi^m(t,x,y)$, $m=1,2,...,r$ є єдиним розв’язком системи інтегральних рівнянь

$$\Phi^m(t,x,y)=x_m[1-G_m(t)]+ \tag{3.1}$$

$$+y_m\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_m(u)p_{mj}\Phi^j(t-u,x,y)+y_m p_{mr+1}G_m(t),$$

$$m=1,2,...,r.$$

Доведення. Побудуємо для моделювання $\left(\left(\chi^m(t)\right)',\left(\gamma^m(t)\right)'\right)$, $t\ge 0$ $m=1,2,...,r$, гіллястий процес Беллмана-Харріса $Z(t)$, $t\ge 0$ з “2r” типами частинок $T_1,T_2,...,T_r,T_{r+1},...,T_{2r}$ $Z'(t)=(Z^1(t),...,Z^r(t),Z^{r+1}(t),...,Z^{2r}(t))$, $(Z^i(t))'=(Z_1^i(t),...,Z_r^i(t),Z_{r+1}^i(t),...,Z_{2r}^i(t))$, $i=1,2,...,2r$. Кожна з частинок типу T_i живе випадковий час з функцією розподілу $G_i(t)$ для $i=1,2,...,r$,

$$G_i(t)=\begin{cases}0, & t<1,\\ 1, & t\ge 1,\end{cases}$$

для $i=r+1,\dots,2r$.

Генератриси $f^i(z)$, $i=1,2,\dots,2r$, $z'=(z_1,\dots,z_{2r})$, безпосередніх нащадків від однієї частинки типу T_i дорівнюють

$$f^i(z)=z_{r+i}(\sum_{j=1}^{r}p_{ij}z_j+p_{ir+1}),\ \ i=1,2,\dots,r,\ \ f^i(z)=z_i,\ \ i=r+1,\dots,2r.$$

Параметри процесу $Z(t)$, $t\ge 0$ підібрані таким чином, що

$$(Z^m(t))'\overset{d}{=}\left(\left(\chi^m(t)\right)',\left(\gamma^m(t)\right)'\right),\ \ m=1,2,\dots,r.$$

Відомо ([9]), що генератриси $F^i(t,z)$, $i=1,2,\dots,2r$ векторів $Z^i(t)$, $i=1,2,\dots,2r$ задовольняють системі інтегральних рівнянь

$$F^i(t,z)=z_i[1-G_i(t)]+\int_0^t F^{r+i}(t-u,z)[\sum_{j=1}^{r}p_{ij}F^j(t-u,z)+p_{ir+1}]dG_i(u),\qquad(3.2)$$

$$i=1,2,\dots,r;$$

$$F^i(t,z)=z_i[1-G_i(t)]+\int_0^t F^i(t-u,z)dG_i(u),\qquad(3.3)$$

$$i=r+1,\dots,2r.$$

Система (3.3) має єдиний розв’язок

$$F^i(t,z)=z_i,\ i=r+1,\dots,2r.$$

Таким чином, $F^i(t,z)$, $i=1,2,\dots,r$ є єдиним розв’язком системи інтегральних рівнянь

$$F^i(t,z)=z_i[1-G_i(t)]+z_{r+i}\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_i(u)p_{ij}F^j(t-u,z)+z_{r+i}p_{ir+1}G_i(t),\qquad(3.4)$$

$$i=1,2,\dots,r.$$

Оскільки $\Phi^m(t,x,y)=F^m(t,z)\big|_{(z_1,\dots,z_r)=x',\,(z_{r+1},\dots,z_{2r})=y'}$, то з (3.4) випливає (3.1). Лему доведено.

В термінах перетворень Лапласа систему (3.1) можна розв'язати в явному вигляді.

Нехай

$$\Phi^m(s,x,y)=\int_0^\infty \Phi^m(t,x,y)e^{-st}dt,$$

$$G_m(s)=\int_0^\infty e^{-st}dG_m(t),\quad m=1,2,...,r,$$

перетворення Лапласа і Лапласа-Стільтьєса функцій $\Phi^m(t,x,y)$ і $G_m(t)$ відповідно. В термінах перетворень Лапласа рівняння (3.1) має вигляд

$$\Phi^m(s,x,y)=x_m\frac{1-G_m(s)}{s}+y_m\sum_{j=1}^r G_m(s)p_{mj}\Phi^j(s,x,y)+y_m p_{mr+1}\frac{1}{s}G_m(s),\quad (3.5)$$

$$m=1,2,...,r.$$

Введемо позначення:

$$\Phi'(s,x,y)=(\Phi^1(s,x,y),...,\Phi^r(s,x,y)),$$

$$(x(1-G(s)))'=(x_1(1-G_1(s)),...,x_r(1-G_r(s))),$$

$$\Delta(y)=\left\|\delta_{mk}y_m\right\|_1^r,\quad \Delta(G(s))=\left\|\delta_{mk}G_m(s)\right\|_1^r,$$

$$(yp_{r+1}G(s))'=(y_1p_{1r+1}G_1(s),...,y_rp_{rr+1}G_r(s)).$$

Тоді у векторно-матричному вигляді система (3.5) має такий запис

$$\begin{aligned}\Phi(s,x,y)&=\Delta(y)\Delta(G(s))P\Phi(s,x,y)+\\&+\frac{1}{s}[(x(1-G(s)))+(yp_{r+1}G(s))]\end{aligned}.\quad (3.6)$$

З рівняння (3.6) випливає такий результат.

Наслідок 3.1. В термінах перетворень Лапласа розв'язок системи (3.1) має такий вигляд

$$\Phi(s,x,y)=\frac{1}{s}[I-\Delta(y)\Delta(G(s))P]^{-1}[(x(1-G(s))+(yp_{r+1}G(s))].\quad (3.7)$$

Нехай $\Phi^m(s,x)=\Phi^m(s,x,\overline{1})$, $m=1,2,...,r$, $\overline{1}'=(1,1,...,1)$ – r-вимірний вектор, складений з одиниць; $\Phi(s,x)=\left(\Phi^1(s,x),...,\Phi^r(s,x)\right)$. Тоді з (3.7) випливає, що

$$\Phi(s,x)=\frac{1}{s}[I-\Delta\big(G(s)\big)P]^{-1}[(x(1-G(s))+(p_{r+1}G(s))]. \tag{3.8}$$

Покомпонентно рівність (3.8) означає

$$\begin{gathered}\Phi^m(s,x)=x_1G_{m1}^{(-1)}(s)\frac{1-G_1(s)}{s}+x_2G_{m2}^{(-1)}(s)\frac{1-G_2(s)}{s}+\ldots+\\+x_rG_{mr}^{(-1)}(s)\frac{1-G_r(s)}{s}+\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{r}G_{mj}^{(-1)}(s)G_j(s)p_{jr+1},\end{gathered} \tag{3.9}$$

$$m=1,2,\ldots,r,$$

де $\left\|G_{ij}^{(-1)}(s)\right\|_1^r=[I-\Delta\big(G(s)\big)P]^{-1}$.

З іншого боку перехідні імовірності $p_i^m(t)$, $m=1,2,\ldots,r$; $i=1,2,\ldots,r,r+1$ напівмарковського процесу $y^m(t)\in\{1,2,\ldots,r,r+1\}$ однозначно визначаються системами інтегральних рівнянь:

$$p_i^m(t)=\delta_{mi}[1-G_m(t)]+\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_m(u)p_{mj}p_i^j(t-u), \tag{3.10}$$

$$m,i=1,2,\ldots,r;$$

$$p_{r+1}^m(t)=G_m(t)p_{mr+1}+\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_m(u)p_{mj}p_{r+1}^j(t-u), \tag{3.11}$$

$$m=1,2,\ldots,r.$$

З (3.10), (3.11) для перетворень Лапласа $p_i^m(s)=\int_0^\infty p_i^m(t)e^{-st}dt$, $m=1,2,\ldots,r$; $i=1,2,\ldots,r,r+1$ знаходимо

$$\begin{gathered}p_i^m(s)=\frac{1}{s}G_{mi}^{(-1)}(s)(1-G_i(s)),\ m,i=1,2,\ldots,r;\\p_{r+1}^m(s)=\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{r}G_{mj}^{(-1)}(s)G_j(s)p_{jr+1},\ m=1,2,\ldots,r.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Порівнюючи (3.12) з (3.9), маємо

$$\Phi^m(t,x)=\Phi^m(t,x,y)\Big|_{y=\bar{1}}=x_1p_1^m(t)+\ldots+x_rp_r^m(t)+p_{mr+1}(t). \tag{3.13}$$

Для факторіальних моментів першого і другого порядку приймемо наступні позначення:

$$\left.\frac{\partial\Phi^m(t,x,y)}{\partial y_\alpha}\right|_{\substack{x=\bar{1}\\ y=\bar{1}}} = A_\alpha^m(t), \quad \left.\frac{\partial^2\Phi^m(t,x,y)}{\partial x_\alpha \partial y_\beta}\right|_{\substack{x=\bar{1}\\ y=\bar{1}}} = B_{\alpha\beta}^m(t),$$

$$\left.\frac{\partial^2\Phi^m(t,x,y)}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}\right|_{\substack{x=\bar{1}\\ y=\bar{1}}} = D_{\alpha\beta}^m(t), \quad m,\alpha,\beta = 1,2,...,r.$$

З (3.13) випливає, що

$$\left.\frac{\partial\Phi^m(t,x,y)}{\partial x_\alpha}\right|_{\substack{x=\bar{1}\\ y=\bar{1}}} = p_\alpha^m(t), \quad \left.\frac{\partial^2\Phi^m(t,x,y)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right|_{\substack{x=\bar{1}\\ y=\bar{1}}} \equiv 0, \quad m,\alpha,\beta = 1,2,...,r.$$

Отже розклад генератриси $\Phi^m(t,x,y)$ в ряд Тейлора в точці $(x',y') = (\bar{1}',\bar{1}')$ має вигляд

$$\begin{aligned}\Phi^m(t,x,y) = 1 - \sum_{\alpha=1}^{r} p_\alpha^m(t)(1-x_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{r} A_\alpha^m(t)(1-y_\alpha) + \\ + \sum_{\alpha,\beta=1}^{r}(B_{\alpha\beta}^m(t) - \delta_{\alpha\beta}^m(t,x,y))(1-x_\alpha)(1-y_\beta) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}(D_{\alpha\beta}^m(t) - \tilde{\delta}_{\alpha\beta}^m(t,x,y))(1-y_\alpha)(1-y_\beta),\end{aligned} \tag{3.14}$$

де $\delta_{\alpha\beta}^m(t,x,y)$, $\tilde{\delta}_{\alpha\beta}^m(t,x,y) \downarrow 0$, $m,\alpha,\beta = 1,2,...,r$, коли $(x',y') \uparrow (\bar{1}',\bar{1}')$ ([9], теорема 1, стор. 112).

Запис (3.14) можна дещо скоротити, якщо ввести для векторів і матриць такі позначення:

$$(p^m(t))' = (p_1^m(t), p_2^m(t),..., p_r^m(t)), \quad (A^m(t))' = (A_1^m(t), A_2^m(t),..., A_r^m(t)),$$

$$(\bar{1}-x)' = (1-x_1,...,1-x_r), \quad (\bar{1}-y)' = (1-y_1,...,1-y_r),$$

$$B^m(t) = \left\|B_{\alpha\beta}^m(t)\right\|_1^r, \quad \Delta^m(t,x,y) = \left\|\delta_{\alpha\beta}^m(t,x,y)\right\|_1^r,$$

$$D^m(t) = \left\|D_{\alpha\beta}^m(t)\right\|_1^r, \quad \tilde{\Delta}^m(t,x,y) = \left\|\tilde{\delta}_{\alpha\beta}^m(t,x,y)\right\|_1^r.$$

Тепер замість (3.14) маємо

$$\begin{gathered}\Phi^m(t,x,y)=1-(p^m(t))'(\overline{1}-x)-(A^m(t))'(\overline{1}-y)+\\+(\overline{1}-x)'[B^m(t)-\Delta^m(t,x,y)](\overline{1}-y)+\frac{1}{2}(\overline{1}-y)'[D^m(t)-\widetilde{\Delta}^m(t,x,y)](\overline{1}-y).\end{gathered}\tag{3.15}$$

З леми 3.1 випливає, що функції $A_\alpha^m(t)$, $B_{\alpha\beta}^m(t)$, $D_{\alpha\beta}^m(t)$, $m,\alpha,\beta=1,2,...,r$ можна задавати як єдиний розв'язок систем інтегральних рівнянь:

$$A_\alpha^m(t)=\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_m(u)p_{mj}A_\alpha^j(t-u)+\delta_{m\alpha}G_m(t),\tag{3.16}$$

$$\begin{gathered}D_{\alpha\beta}^m(t)=\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_m(u)p_{mj}D_{\alpha\beta}^j(t-u)+\\+\delta_{m\beta}\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_m(u)p_{mj}A_\alpha^j(t-u)+\delta_{m\alpha}\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_m(u)p_{mj}A_\beta^j(t-u),\end{gathered}\tag{3.17}$$

$$\begin{gathered}B_{\alpha\beta}^m(t)=\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_m(u)p_{mj}B_{\alpha\beta}^j(t-u)+\\+\delta_{m\beta}\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_m(u)p_{mj}p_\alpha^j(t-u),\end{gathered}\tag{3.18}$$

$$m,\alpha,\beta=1,2,...,r.$$

Інший підхід – задавати $A_\alpha^m(t)$, $B_{\alpha\beta}^m(t)$, $D_{\alpha\beta}^m(t)$ їх перетвореннями Лапласа $A_\alpha^m(s)$, $B_{\alpha\beta}^m(s)$, $D_{\alpha\beta}^m(s)$, $m,\alpha,\beta=1,2,...,r$.

Нехай $A'_\alpha(s)=(A_\alpha^1(s),A_\alpha^2(s),...,A_\alpha^r(s))$, $D'_{\alpha\beta}(s)=(D_{\alpha\beta}^1(s),D_{\alpha\beta}^2(s),...,D_{\alpha\beta}^r(s))$, $B'_{\alpha\beta}(s)=(B_{\alpha\beta}^1(s),B_{\alpha\beta}^2(s),...,B_{\alpha\beta}^r(s))$, $I_\alpha=\left\|\delta_{ij}\delta_{i\alpha}\right\|_{i,j=1}^r$ – матрця розміром $r\times r$, на головній діагоналі якої елемент з номером "α" дорівнює одиниці, а інші елементи матриці дорівнюють нулю. Тоді з (3.16) – (3.18) маємо:

$$A_\alpha(s)=\frac{1}{s}G_\alpha(s)[I-\Delta(G(s))P]^{-1}e_\alpha,\tag{3.19}$$

$$\begin{gathered}D_{\alpha\beta}(s)=\frac{1}{s}G_\alpha(s)[I-\Delta(G(s))P]^{-1}I_\beta\Delta(G(s))P[I-\Delta(G(s))P]^{-1}e_\alpha+\\+\frac{1}{s}G_\beta(s)[I-\Delta(G(s))P]^{-1}I_\alpha\Delta(G(s))P[I-\Delta(G(s))P]^{-1}e_\beta,\end{gathered}\tag{3.20}$$

$$B_{\alpha\beta}(s)=\frac{1-G_\alpha(s)}{s}[I-\Delta(G(s))P]^{-1}I_\beta\Delta(G(s))P[I-\Delta(G(s))P]^{-1}e_\alpha.\tag{3.21}$$

Зазначимо, що формули (3.19) – (3.21) задають перші два моменти процесу $((\chi^m(t))', (\gamma^m(t))')$, $t \ge 0$ через параметри стохастичної мережі.

Перейдемо тепер до аналізу скінченновимірних розподілів процесу $((\chi^m(t))', (\gamma^m(t))')$, $t \ge 0$.

Нехай $0 < t_1 < ... < t_N$ деякі фіксовані моменти часу і

$$\Phi^m(t_1, ..., t_N, x(1), y(1), ..., x(N), y(N)) = M\left(\prod_{k=1}^{N} x^{\chi^m(t_k)}(k) \cdot y^{\gamma^m(t_k)}(k)\right),$$

$x'(k) = (x_1(k), ..., x_r(k))$, $y'(k) = (y_1(k), ..., y_r(k))$, $|x(k)| \le 1$, $|y(k)| \le 1$,

$k = 1, 2, ..., N$ – багатовимірна генератриса вектора

$$((\chi^m(t_1))', (\gamma^m(t_1))', ..., (\chi^m(t_N))', (\gamma^m(t_N))').$$

При визначенні генератрис $\Phi^m(\cdot)$, $m = 1, 2, ..., r$ через локальні характеристики процесу $\left((\chi^m(t))', (\gamma^m(t))'\right)$, $t \ge 0$ важливе значення має наступний результат.

Лема 3.2. Генератриси $\Phi^m(t_1, ..., t_N, x(1), y(1), ..., x(N), y(N))$, $N = 1, 2, ...$, $0 < t_1 < ... < t_N$ є єдиним розв’язком взаємопов’язаних систем інтегральних рівнянь

$$\Phi^m(t_1, ..., t_N, x(1), y(1), ..., x(N), y(N)) =$$

$$= y_m(1) \cdot ... \cdot y_m(N) \int_0^{t_1} [\sum_{j=1}^{r} p_{mj} \Phi^j(t_1 - u, ..., t_N - u, x(1), y(1), ..., x(N), y(N)) +$$

$$+ p_{m\,r+1}] dG_m(u) + \sum_{k=1}^{N-1} x_m(1) \cdot ... \cdot x_m(k) \cdot y_m(k+1) \cdot ... \cdot y_m(N) \times \tag{3.22}$$

$$\times \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\sum_{j=1}^{r} p_{mj} \Phi^j(t_{k+1} - u, ..., t_N - u, x(k+1), y(k+1), ..., x(N), y(N)) +$$

$$+ p_{m\,r+1}] dG_m(u) + x_m(1) \cdot ... \cdot x_m(k)[1 - G_m(t_N)],$$

$$m = 1, 2, ..., r; \quad N = 1, 2, ...$$

Доведення. Щоб побудувати $\Phi^m(t_1,...,t_N, x(1), y(1),..., x(N), y(N))$ для будь-якого натурального N і будь-яких моментів часу $0 < t_1 < ... < t_N$ давайте повернемось до моделі гіллястого процесу Беллмана-Харріса
$Z(t),\ t \ge 0$ з $2r$ типами частинок з леми 3.1:

$$Z'(t) = (Z^1(t),..., Z^r(t), Z^{r+1}(t),..., Z^{2r}(t)),$$

$$(Z^m(t))' = (Z_1^m(t),..., Z_r^m(t), Z_{r+1}^m(t),..., Z_{2r}^m(t)),\ m = 1,2,...,2r.$$

Нехай як і раніше $F^m(t,z)$, $m = 1,2,...,2r$ генератриси одновимірних розподілів процесу $Z^m(t),\ t \ge 0$. Позначимо через $F^m(t_1,...,t_N, z(1),..., z(N))$ для $0 < t_1 < ... < t_N$, $z'(k) = (z_1(k),..., z_r(k), z_{r+1}(k),..., z_{2r}(k))$, $|z(k)| \le 1$, $k = 1,2,..., N$ генератриси векторів $(Z^m(t_1), Z^m(t_2),..., Z^m(t_N))$, $m = 1,2,...,2r$.

Оскільки генератриси $f^i(z)$, $i = 1,2,...,2r$, $z' = (z_1,..., z_{2r})$ безпосередніх нащадків дорівнюють $f^i(z) = z_{r+i}(\sum_{j=1}^{r} p_{ij} z_j + p_{ir+1})$, $i = 1,2,...,r$; $f^i(z) = z_i$, $i = 1,2,...,2r$, то $F^m(t_1,...,t_N, z(1),..., z(N))$ однозначно визначаються взаємопов'язаними системами інтегральних рівнянь

$$\begin{gathered}
F^m(t_1,...,t_N, z(1),..., z(N)) = \int_0^{t_1} F^{r+m}(t_1 - u,..., t_N - u, z(1),..., z(N)) \times \\
\times [\sum_{j=1}^{r} p_{mj} F^j(t_1 - u,..., t_N - u, z(1),..., z(N)) + p_{mr+1}] dG_m(u) + \qquad (3.23) \\
+ \sum_{k=1}^{N-1} z_m(1)...z_m(k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} F^{r+m}(t_{k+1} - u,..., t_N - u, z(k+1),..., z(N)) \times \\
\times [\sum_{j=1}^{r} p_{mj} F^j(t_{k+1} - u,..., t_N - u, z(k+1),..., z(N)) + p_{mr+1}] dG_m(u) + \\
+ z_m(1)...z_m(N)[1 - G_m(t_N)],
\end{gathered}$$

$$F^{r+m}(t_1,...,t_N, z(1),..., z(N)) = \int_0^{t_1} F^{r+m}(t_1 - u,..., t_N - u, z(1),..., z(N)) dG_{r+m}(u) +$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1} z_{r+m}(1)\dots z_{r+m}(k)\int_{t_k}^{t_{k+1}} F^{r+m}(t_{k+r}-u,\dots,t_N-u,z(k+1),\dots \tag{3.24}$$

$$\dots,z(N))dG_{r+m}(u)+z_{r+m}(1)\dots z_{r+m}(N)[1-G_{r+m}(t_N)],$$

$$m=1,2,\dots,r,\ \ N=1,2,\dots\ .$$

Методом математичної індукції за N можна перевірити, що єдиним розв'язком системи (3.24) в класі генератрис буде

$$F^{r+m}(t_1,\dots,t_N,z(1),\dots,z(N))\equiv z_{r+m}(1)\cdot\dots\cdot z_{r+m}(N).$$

Підставляючи цей вираз у систему (3.23), знаходимо

$$F^m(t_1,\dots,t_N,z(1),\dots,z(N))= \tag{3.25}$$

$$=z_{r+m}(1)\cdot\dots\cdot z_{r+m}(N)\int_0^{t_1}[\sum_{j=1}^{r} p_{mj}F^j(t_1-u,\dots,t_N-u,z(1),\dots,z(N))+$$

$$+p_{mr+1}]dG_m(u)+\sum_{k=1}^{N-1} z_m(1)\cdot\dots\cdot z_m(k)z_{r+m}(k+1)\cdot\dots\cdot z_{r+m}(N)\times$$

$$\times[\sum_{j=1}^{r} p_{mj}F^j(t_{k+1}-u,\dots,t_N-u,z(k+1),\dots,z(N))+p_{mr+1}]dG_m(u)+$$

$$+z_m(1)\cdot\dots\cdot z_m(N)[1-G_m(t_N)],$$

$$m=1,2,\dots,r,\ \ N=1,2,\dots\ .$$

Враховуючи те, що

$$(Z^m(\cdot))' \overset{d}{=} \left(\chi^{m'}(\cdot),\gamma^{m'}(\cdot)\right),\ \ m=1,2,\dots,r,$$

маємо

$$\Phi^m(t_1,\dots,t_N,x(1),y(1),\dots,x(N),y(N))=$$

$$=F^m(t_1,\dots,t_N,z(1),\dots,z(N))\Big|_{z'(k)=(x'(k),\,y'(k))},\ \ k=1,\dots,N,$$

і для визначення $\Phi^m(\cdot)$, $m=1,2,\dots,r$ приходимо до системи інтегральних рівнянь (3.22). Лему доведено.

Скінченновимірні розподіли вектора $\left(\chi^{m'}(t), \gamma^{m'}(t)\right)$, $t \ge 0$ визначають скінченновимірні розподіли процесу обробки інформації і накопичення прибутку $(X'(t), S'(t))$ в мережі типу $\left[G \mid GI \mid \infty\right]^r$.

Якщо у початковий момент часу $t = 0$ $\left[G \mid GI \mid \infty\right]^r$ – мережа порожня і фіксована траєкторія вхідного потоку $\nu'(t) = \left(\nu_1(t), \dots, \nu_r(t)\right)$, то для будь-якої послідовності моментів часу $0 < t_1 < \dots < t_N$

$$(X'(t_1), S'(t_1), \dots, X'(t_\alpha), S'(t_\alpha), \dots, X'(t_N), S'(t_N)) \overset{d}{=}$$

$$\overset{d}{=} \sum_{m=1}^{r} \Big(\sum_{k=1}^{\nu_m(t_1)} ([\chi^{m,k}(t_1 - \tau_k^m)]', [\gamma^{m,k}(t_1 - \tau_k^m)]'), \dots \qquad (3.26)$$

$$\dots, \sum_{k=1}^{\nu_m(t_\alpha)} ([\chi^{m,k}(t_\alpha - \tau_k^m)]', [\gamma^{m,k}(t_\alpha - \tau_k^m)]'), \dots$$

$$\dots, \sum_{k=1}^{\nu_m(t_N)} ([\chi^{m,k}(t_N - \tau_k^m)]', [\gamma^{m,k}(t_N - \tau_k^m)]')\Big).$$

Нехай $\Phi(t_1, \dots, t_N, x(1), y(1), \dots, x(N), y(N))$ генератриса вектора $(X'(t_1), S'(t_1), \dots, X'(t_N), S'(t_N))$. Тоді з (3.26) випливає

$$\Phi(t_1, \dots, t_N, x(1), y(1), \dots, x(N), y(N)) = \qquad (3.27)$$

$$= M\left\{ \prod_{m=1}^{r} \prod_{\alpha=1}^{N} \prod_{k=\nu_m(t_{\alpha-1})+1}^{\nu_m(t_\alpha)} \Phi^m(t_\alpha - \tau_k^m, \dots, t_N - \tau_k^m, x(\alpha), y(\alpha), \dots, x(N), y(N)) \right\}.$$

Розглянемо окремо частковий випадок $N = 2$.

З леми 3.2 і подання (3.27) випливає наступний результат.

Наслідок 3.2. Для будь-яких $0 < s < t$ генератрису $\Phi(s, t, x(1), y(1), x(2), y(2))$ двовимірного розподілу процесу (X', S') можна подати у вигляді

$$\Phi(s, t, x(1), y(1), x(2), y(2)) =$$

$$= M \prod_{m=1}^{r} \left\{ \prod_{k=1}^{\nu_m(s)} \Phi^m(s - \tau_k^m, t - \tau_k^m, x(1), y(1), x(2), y(2)) \times \right. \qquad (3.28)$$

$$\times \prod_{k=\nu_m(s)+1}^{\nu_m(t)} \Phi^m(t-\tau_k^m, x(2), y(2))\Bigg\},$$

де генератриси $\Phi^m(s,t,x(1),y(1),x(2),y(2))$, $m=1,2,...,r$ однозначно визначаються системою інтегральних рівнянь

$$\Phi^m(s,t,x(1),y(1),x(2),y(2)) = \tag{3.29}$$

$$= y_m(1)y_m(2)\int_0^s [\sum_{j=1}^r p_{mj}\Phi^j(s-u,t-u,x(1),y(1),x(2),y(2)) + p_{mr+1}]dG_m(u) +$$

$$= x_m(1)y_m(2)\int_0^t [\sum_{j=1}^r p_{mj}\Phi^j(t-u,x(2),y(2)) + p_{mr+1}]dG_m(u) +$$

$$+ x_m(1)x_m(2)[1-G_m(t)],\ \ m=1,2,...,r.$$

Для аналізу зв'язку між компонентами процесу $\left(\chi^{m'}, \gamma^{m'}\right)$ у різні моменти часу з'ясуємо, як визначаються змішані моменти другого порядку.

Введемо наступні позначення:

$$B_{\alpha\beta}^m(1;s,t) = \frac{\partial^2\Phi^m(s,t,\bar{1},...,\bar{1})}{\partial x_\alpha(1)\partial x_\beta(2)};\ \ B^m(1;s,t) = \left\|B_{\alpha\beta}^m(1;s,t)\right\|_{\alpha,\beta=1}^r;$$

$$B_{\alpha\beta}^m(1,2;s,t) = \frac{\partial^2\Phi^m(s,t,\bar{1},...,\bar{1})}{\partial x_\alpha(1)\partial y_\beta(2)};\ \ B^m(1,2;s,t) = \left\|B_{\alpha\beta}^m(1,2;s,t)\right\|_{\alpha,\beta=1}^r;$$

$$B_{\alpha\beta}^m(2,1;s,t) = \frac{\partial^2\Phi^m(s,t,\bar{1},...,\bar{1})}{\partial y_\alpha(1)\partial x_\beta(2)};\ \ B^m(2,1;s,t) = \left\|B_{\alpha\beta}^m(2,1;s,t)\right\|_{\alpha,\beta=1}^r;$$

$$B_{\alpha\beta}^m(2;s,t) = \frac{\partial^2\Phi^m(s,t,\bar{1},...,\bar{1})}{\partial y_\alpha(1)\partial y_\beta(2)};\ \ B^m(2;s,t) = \left\|B_{\alpha\beta}^m(2;s,t)\right\|_{\alpha,\beta=1}^r;$$

Співвідношення (3.29) дозволяє виписати системи інтегральних рівнянь для визначення функцій $B_{\alpha\beta}^m(1;s,t)$, $B_{\alpha\beta}^m(1,2;s,t)$, $B_{\alpha\beta}^m(2,1;s,t)$, $B_{\alpha\beta}^m(2;s,t)$, $m=1,2,...,r$:

$$B_{\alpha\beta}^m(1;s,t) = \sum_{j=1}^r \int_0^s dG_m(u)p_{mj}B_{\alpha\beta}^j(1;s-u,t-u) + \tag{3.30}$$

$$+\delta_{\alpha m}\sum_{j=1}^{m}\int_{s}^{t} dG_m(u)p_{mj}p_{\beta}^{j}(t-u)+\delta_{\alpha m}\delta_{\beta m}[1-G_m(t)];$$

$$B_{\alpha\beta}^{m}(1,2;s,t)=\sum_{j=1}^{r}\int_{0}^{s} dG_m(u)p_{mj}B_{\alpha\beta}^{j}(1,2;s-u,t-u)+$$

$$+\delta_{\alpha m}\sum_{j=1}^{r}\int_{s}^{t} dG_m(u)p_{mj}A_{\beta}^{j}(t-u)+ \tag{3.31}$$

$$+\delta_{\beta m}\sum_{j=1}^{r}\int_{0}^{s} dG_m(u)p_{mj}p_{\alpha}^{j}(s-u)+\delta_{\alpha m}\delta_{\beta m}[G_m(t)-G_m(s)];$$

$$B_{\alpha\beta}^{m}(2,1;s,t)=\sum_{j=1}^{r}\int_{0}^{s} dG_m(u)p_{mj}B_{\alpha\beta}^{j}(2,1;s-u,t-u)+$$

$$+\delta_{\alpha m}\sum_{j=1}^{r}\int_{0}^{s} dG_m(u)p_{mj}p_{\beta}^{j}(t-u); \tag{3.32}$$

$$B_{\alpha\beta}^{m}(2;s,t)=\sum_{j=1}^{r}\int_{0}^{s} dG_m(u)p_{mj}B_{\alpha\beta}^{j}(2;s-u,t-u)+ \tag{3.33}$$

$$+\delta_{\alpha m}\sum_{j=1}^{r}\int_{0}^{s} dG_m(u)p_{mj}A_{\beta}^{j}(t-u)+\delta_{\beta m}\sum_{j=1}^{r}\int_{0}^{s} dG_m(u)p_{mj}A_{\alpha}^{j}(s-u)+$$

$$+\delta_{\alpha m}\delta_{\beta m}[1-G_m(s)],\ m=1,2,...,r.$$

Всі інтегральні рівняння (3.30) – (3.33) є рівняннями типу марковського відновлення.

При дослідженні процесу (X',S') у перевантаженому режимі будемо використовувати розклад функцій $\Phi^m(s,t,x(1),y(1),x(2),y(2))$, $m=1,2,...,r$ в точці $(x'(1),y'(1),x'(2),y'(2))=(\overline{1}',...,\overline{1}')$ в ряд Тейлора. За аналогією з (3.15) знаходимо

$$\Phi^m(s,t,x(1),y(1),x(2),y(2))=$$

$$1-(p^m(s))'(\overline{1}-x(1))-(A^m(s))'(\overline{1}-y(1))-$$

$$-(p^m(t))'(\overline{1}-x(2))-(A^m(t))'(\overline{1}-y(2))+$$

$$+(\overline{1}-x(1))'[B^m(s)-\Delta^m(1;s,t)](\overline{1}-y(1))+$$

$$+(\overline{1}-x(2))'[B^m(t)-\Delta^m(2;s,t)](\overline{1}-y(2))+$$

$$+\frac{1}{2}(\overline{1}-y(1))'[D^m(s)-\widetilde{\Delta}^m(1;s,t)](\overline{1}-y(1))+ \qquad (3.34)$$

$$+\frac{1}{2}(\overline{1}-y(2))'[D^m(t)-\widetilde{\Delta}^m(2;s,t)](\overline{1}-y(2))+$$

$$+(\overline{1}-x(1))'[B^m(1;s,t)-\Delta^m(1,1;s,t)](\overline{1}-x(2))+$$

$$+(\overline{1}-x(1))'[B^m(1,2;s,t)-\Delta^m(1,2;s,t)](\overline{1}-y(2))+$$

$$+(\overline{1}-y(1))'[B^m(2,1;s,t)-\Delta^m(2,1;s,t)](\overline{1}-x(2))+$$

$$+(\overline{1}-y(1))'[B^m(2;s,t)-\Delta^m(2,2;s,t)](\overline{1}-y(2)),$$

де компоненти матриць $\widetilde{\Delta}^m(i;s,t)=\left\|\widetilde{\delta}^m_{\alpha\beta}(i;s,t)\right\|^r_{\alpha,\beta=1}$, $\Delta^m(i,j;s,t)=\left\|\delta^m_{\alpha\beta}(i,j;s,t)\right\|^r_{\alpha,\beta=1}$, $i,j=1,2$ невід'ємні, залежать від $x(1)$, $y(1)$, $x(2)$, $y(2)$ і монотонно прямують до нуля, коли $(x'(1),y'(1),x'(2),y'(2))\uparrow(\overline{1}',...,\overline{1}')$.

Такий же розклад має генератриса N-вимірного розподілу процесу $\left(\chi^{m'},\gamma^{m'}\right)$, $m=1,2,...,r$.

3.2. Гауссівська апроксимація режиму критичного навантаження в мережі

В цьому підрозділі процес обробки інформації $X'(t)=(X_1(t),...,X_r(t))$ разом з процесом накопичення прибутку $S'(t)=(S_1(t),...,S_r(t))$ в $[G\,|\,GI\,|\,\infty]^r$ – мережі будемо вивчати при критичному навантаженні.

Перевантажений режим для $[G\,|\,GI\,|\,\infty]^r$ – мережі означає, що її параметри залежать від “n” (номера серії) так, що виконуються наступні умови.

1) Для багатовимірного вхідного потоку $\nu^{n'}(t)=\left(\nu_1^n(t),\nu_2^n(t),...,\nu_r^n(t)\right)$ існують константи $\lambda_i \ge 0$, $i=1,2,...,r$, $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_r \ne 0$ такі, що

$$n^{-\frac{1}{2}}\left(\nu_1^{(n)}(t)-\lambda_1 nt,...,\nu_r^{(n)}(t)-\lambda_r nt\right)\underset{n\to\infty}{\overset{U}{\Rightarrow}} W'(t)=(W_1(t),...,W_r(t)),$$

де $\nu^{(n)}(t)=\nu^n(nt)$, $W(t)$ – r-вимірний процес броунівського руху з нульовим вектором математичних сподівань $MW(1)=0$, і кореляційною матрицею $MW(1)W'(1)=\sigma^2=\left\|\sigma_{ij}\right\|_1^r$, символ "$\overset{U}{\Rightarrow}$" означає слабку збіжність у рівномірній топології.

2) Послідовність (за параметром n) функцій розподілу часу обробки у вузлах мережі $G_i^n(nt)=G_i^{(n)}(t)$ слабко збігається до граничної

$$G_i^{(n)}(t)\underset{n\to\infty}{\overset{d}{\Rightarrow}} G_i(t),\ \ i=1,2,...,r.$$

Нехай для будь-яких випадкових векторів $\xi'=(\xi_1,...,\xi_r)$, $\eta'=(\eta_1,...,\eta_r)$

$$R(\xi,\eta)=M\xi\eta'-M\xi\, M\eta',$$

і для випадкових матриць $\Xi(t)=\left\|\xi_j^i(t)\right\|_1^r$, $H(t)=\left\|\eta_j^i(t)\right\|_1^r$, компоненти яких залежать від часу $t\ge 0$

$$R(\Xi(s),H(t))=M[\Xi'(s)\Delta(\lambda)H(t)-\tilde{\Xi}'(s)\Delta(\lambda)\tilde{H}(t)],$$

де $\tilde{\Xi}(s)=\left\|M\xi_j^i(s)\right\|_1^r$, $\tilde{H}(t)=\left\|M\eta_j^i(t)\right\|_1^r$, $\Delta(\lambda)=\left\|\lambda_i\delta_{ij}\right\|_1^r$ – деяка фіксована (невипадкова) діагональна матриця.

У зв'язку з випадковими процесами $\left(\left(\chi^m(t)\right)',\left(\gamma^m(t)\right)'\right)$, $m=1,2,...,r$ введемо такі позначення:

$$\chi(t)=\left\|\chi_i^m(t)\right\|_1^r,\ \Gamma(t)=\left\|\gamma_i^m(t)\right\|_1^r,\ P(t)=\left\|p_i^m(t)\right\|_1^r,\ A(t)=\left\|A_i^m(t)\right\|_1^r,$$

$p^{m'}(t)=\left(p_1^m(t),...,p_1^m(t)\right)$, $A^{m'}(t)=\left(A_1^m(t),...,A_1^m(t)\right)$ - m-ий рядок матриць $P(t)$ і $A(t)$ відповідно.

Щоб побудувати для $(X^{n'}(t), S^{n'}(t))$ апроксимативний процес, необхідні два незалежні гауссівські процеси:

$$\left(\xi^{(1)'}(t), \eta^{(1)'}(t)\right) = \left(\xi_1^{(1)}(t), \ldots, \xi_r^{(1)}(t), \eta_1^{(1)}(t), \ldots, \eta_r^{(1)}(t)\right) \text{ і}$$

$$\left(\xi^{(2)'}(t), \eta^{(2)'}(t)\right) = \left(\xi_1^{(2)}(t), \ldots, \xi_r^{(2)}(t), \eta_1^{(2)}(t), \ldots, \eta_r^{(2)}(t)\right),$$

які мають нульові середні значення і наступні кореляційні матриці:

$$R(\xi^{(1)}(t), \xi^{(1)}(t)) = \int_0^t P'(u)\sigma^2 P(u)du, \; R(\eta^{(1)}(t), \eta^{(1)}(t)) = \int_0^t A'(u)\sigma^2 A(u)du,$$

$$R(\xi^{(1)}(t), \eta^{(1)}(t)) = \int_0^t P'(u)\sigma^2 A(u)du,$$

$$R(\xi^{(1)}(s), \xi^{(1)}(t)) = \int_0^s P'(u)\sigma^2 P(u+t-s)du,$$

$$R(\xi^{(1)}(s), \eta^{(1)}(t)) = \int_0^s P'(u)\sigma^2 A(u+t-s)du,$$

$$R(\eta^{(1)}(s), \eta^{(1)}(t)) = \int_0^s A'(u)\sigma^2 A(u+t-s)du,$$

$$R(\eta^{(1)}(s), \xi^{(1)}(t)) = \int_0^s A'(u)\sigma^2 P(u+t-s)du, \; s < t,$$

$$R(\xi^{(2)}(t), \xi^{(2)}(t)) = \int_0^t R(\chi(u), \chi(u))du, \; R(\eta^{(2)}(t), \eta^{(2)}(t)) = \int_0^t R(\Gamma(u), \Gamma(u))du,$$

$$R(\xi^{(2)}(t), \eta^{(2)}(t)) = \int_0^t R(\chi(u), \Gamma(u))du,$$

$$R(\xi^{(2)}(s), \xi^{(2)}(t)) = \int_0^s R(\chi(u), \chi(u+t-s))du,$$

$$R(\xi^{(2)}(s), \eta^{(2)}(t)) = \int_0^s R(\chi(u), \Gamma(u+t-s))du,$$

$$R(\eta^{(2)}(s), \eta^{(2)}(t)) = \int_0^s R(\Gamma(u), \Gamma(u+t-s))du,$$

$$R(\eta^{(2)}(s),\xi^{(2)}(t)) = \int_0^s R(\Gamma(u),\chi(u+t-s))du\,,\ s<t\,.$$

Розглянемо послідовність випадкових процесів $(\xi^{(n)'}(t),\eta^{(n)'}(t))$, $n=1,2,\ldots,$ де

$$\xi^{(n)'}(t) = n^{-1/2}(X^{n'}(nt) - n\lambda'\int_0^t P^{(n)}(u)du)\,,$$

$$\eta^{(n)'}(t) = n^{-1/2}(S^{n'}(nt) - n\lambda'\int_0^t A^{(n)}(u)du)\,,$$

$P^{(n)}(t) = \left\| p_i^{n,m}(nt) \right\|_{m,i=1}^r$, $A^{(n)}(t) = \left\| A_i^{n,m}(nt) \right\|_{m,i=1}^r$, функції $p_i^{n,m}(\cdot)$, $A_i^{n,m}(\cdot)$ визначаються так само, як $p_i^m(\cdot)$, $A_i^m(\cdot)$, $m,i=1,2,\ldots,r$, із заміною функцій розподілу $G_i(t)$ на $G_i^n(t)$, $i=1,2,\ldots,r.$

За визначенням $(\xi^{(n)'}(t),\eta^{(n)'}(t))$ представляє собою нормований процес обробки інформації та накопичення прибутку в мережі типу $\left[G^{(n)} \mid GI^{(n)} \mid \infty\right]^r$. В наступній теоремі доведено, що апроксимативним процесом для нього буде $\left(\xi^{(1)'}(t)+\xi^{(2)'}(t),\eta^{(1)'}(t)+\eta^{(2)'}(t)\right)$.

Теорема 3.1. Нехай стохастична мережа типу $\left[G^{(n)} \mid GI^{(n)} \mid \infty\right]^r$ у початковий момент часу порожня, задовольняє умовам 1), 2) і спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший 1. Тоді на будь-якому скінченному проміжку $[0,T]$ послідовність випадкових процесів $\left(\xi^{(n)'}(t),\eta^{(n)'}(t)\right)$, $n\ge 1$, слабко збігається у рівномірній топології до $\left(\xi^{(1)'}(t)+\xi^{(2)'}(t),\eta^{(1)'}(t)+\eta^{(2)'}(t)\right)$.

Доведемо спочатку один допоміжний результат, пов'язаний з гауссівською компонентою $\left(\xi^{(1)'}(t),\eta^{(1)'}(t)\right)$ граничного процесу.

Лема 3.3. Скінченновимірні розподіли 2r-вимірного випадкового процесу

$$\zeta'(t) = \left(\zeta^{(1)'}(t), \zeta^{(2)'}(t) \right) = \left(\int_0^t dW'(u)P(t-u), \int_0^t dW'(u)A(t-u) \right)$$

Співпадають із скінченновимірними розподілами гауссівського процесу $\left(\xi^{(1)'}(t), \eta^{(1)'}(t) \right)$.

Доведення. Те, що $\zeta(t)$ є гауссівським процесом випливає з властивостей стохастичного інтегралу (див., наприклад, [13]). Таким чином, залишилось показати, що кореляційні характеристики $\zeta'(t)$ і $\left(\xi^{(1)'}(t), \eta^{(1)'}(t) \right)$ співпадають.

Розглянемо два моменти часу $0 < s < t$ і візьмемо послідовність розбиттів відрізка [0,t] точками

$$0 = t_{n_0} < \ldots < t_{n_{m_n^{(1)}-1}} < t_{n_{m_n^{(1)}}} = s < t_{n_{m_n^{(1)}+1}} < \ldots < t_{n_{m_n^{(2)}}} = t$$

таку, що $\max\limits_{0 \le k \le m_n^{(2)}-1} \Delta t_{n_k} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $\Delta t_{n_k} = t_{n_{k+1}} - t_{n_k}$, $k = 0,1,\ldots,m_n^{(2)}-1$.

Тоді для $x'(1) = (x_1(1),\ldots,x_r(1))$, $x'(2) = (x_1(2),\ldots,x_r(2))$, $y'(1) = (y_1(1),\ldots,y_r(1))$, $y'(2) = (y_1(2),\ldots,y_r(2)) \in R^r$

$$M\exp\left\{ i\int_0^s dW'(u)P(s-u)x(1) + i\int_0^s dW'(u)A(s-u)y(1) + \right.$$

$$\left. + i\int_0^t dW'(u)P(t-u)x(2) + i\int_0^t dW'(u)A(t-u)y(2) \right\} =$$

$$= M\exp\left\{ i\int_0^s dW'(u)[P(s-u)x(1) + A(s-u)y(1) + P(t-u)x(2) + A(t-u)y(2)] \right\} \times$$

$$\times M\exp\left\{ i\int_s^t dW'(u)[P(t-u)x(2) + A(t-u)y(2)] \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{m_n^{(1)}-1} M\exp\left\{ i\Delta W'(t_{n_k})[P(s-t_{n_k})x(1) + A(s-t_{n_k})y(1) + \right.$$

$$+P(t-t_{n_k})x(2)+A(t-t_{n_k})y(2)]\}\times$$

$$\times\prod_{k=m_n^{(1)}}^{m_n^{(2)}-1} M\exp\{i\Delta W'(t_{n_k})[P(t-t_{n_k})x(2)+A(t-t_{n_k})y(2)]\},$$

де $\Delta W'(t_{n_k})=W'(t_{n_{k+1}})-W'(t_{n_k}),\ k=0,1,\ldots,m_n^{(2)}-1$.

Продовжуючи обчислення границі, знаходимо

$$M\exp\{i[\zeta^{(1)}(s)x(1)+\zeta^{(2)}(s)y(1)+\zeta^{(1)}(t)x(2)+\zeta^{(2)}(t)y(2)]\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{m_n^{(1)}-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}[P(s-t_{n_k})x(1)+A(s-t_{n_k})y(1)+\right.$$

$$+P(t-t_{n_k})x(2)+A(t-t_{n_k})y(2)]'\sigma^2[P(s-t_{n_k})x(1)+A(s-t_{n_k})y(1)+$$

$$\left.+P(t-t_{n_k})x(2)+A(t-t_{n_k})y(2)]\Delta t_{n_k}\right\}\times$$

$$\times\prod_{k=m_n^{(1)}}^{m_n^{(2)}-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}[P(t-t_{n_k})x(2)+A(t-t_{n_k})y(2)]'\sigma^2\times\right.$$

$$\left.\times[P(t-t_{n_k})x(2)+A(t-t_{n_k})y(2)]\Delta\ t_{n_k}\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}x'(1)\int_0^s P'(u)\sigma^2P(u)du\,x(1)-\right.$$

$$-\frac{1}{2}y'(1)\int_0^s A'(u)\sigma^2A(u)du\,y(1)-\frac{1}{2}x'(2)\int_0^t P'(u)\sigma^2P(u)du\,x(2)-$$

$$-\frac{1}{2}y'(2)\int_0^t A'(u)\sigma^2A(u)du\,y(2)-x'(1)\int_0^s P'(u)\sigma^2A(u)du\,y(1)-$$

$$-x'(2)\int_0^t P'(u)\sigma^2A(u)du\,y(2)-x'(1)\int_0^s P'(u)\sigma^2P(u+t-s)du\,x(2)-$$

$$-x'(1)\int_0^s P'(u)\sigma^2A(u+t-s)du\,y(2)-y'(1)\int_0^s A'(u)\sigma^2P(u+t-s)du\,x(2)-$$

$$\left.-y'(1)\int_0^s A'(u)\sigma^2A(u+t-s)du\,y(2)\right\}.$$

Лему доведено.

Лема 3.3 вказує на те, що компонента $\left(\xi^{(1)'}(t), \eta^{(1)'}(t)\right)$ граничного процесу пов'язана з флуктуаціями вхідного потоку.

В процесі перетворень кореляційних матриць потрібен наступний результат технічного характеру.

Лема 3.4. Нехай $A = \left\|a_i^m\right\|_1^r$, $B = \left\|b_i^m\right\|_1^r$ - дві квадратні матриці розміром $r \times r$, $a^{m'} = \left(a_1^m, a_2^m, ..., a_r^m\right)$, $b^{m'} = \left(b_1^m, b_2^m, ..., b_r^m\right)$ - вектор-рядки цих матриць. Тоді для будь-яких $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$

$$\sum_{m=1}^{r} \lambda_m a^m b^{m'} = A' \Delta(\lambda) B, \tag{3.35}$$

де $\Delta(\lambda) = \left\|\lambda_m \delta_{mk}\right\|_1^r$ - діагональна матриця.

Формулу (3.35) можна довести прямим підрахунком компонент матриць, що стоять зліва і справа у цій формулі.

Доведення теореми. Оскільки при фіксованій траєкторії вхідного потоку

$$(X^{n'}(nt), S^{n'}(nt)) = \sum_{m=1}^{d} \sum_{k=1}^{r} \sum^{\nu_m^n(nt)} \left([\chi^{n,m,k}\left(nt - \tau_k^{n,m}\right)]', [\gamma^{n,m,k}\left(nt - \tau_k^{n,m}\right)]'\right),$$

то характеристичну функцію

$$\varphi^{(n)}(t, x, y) \overset{\text{def}}{=} M\exp\left\{i\xi^{(n)'}(t)x + i\eta^{(n)'}(t)y\right\}, \quad x, y \in R^r,$$

можна подати у вигляді

$$\varphi^{(n)}(t, x, y) = \exp\left\{- i\sqrt{n}\lambda' \int_0^t P^{(n)}(u)du\, x - i\sqrt{n}\lambda' \int_0^t A^{(n)}(u)du\, y\right\} \times \tag{3.36}$$

$$\times M[\exp\left\{\sum_{m=1}^{r} \sum_{k=1}^{\nu_m^n(nt)} \ln\Phi^{n,m}(nt - \tau_k^{n,m}, \exp(i\frac{x}{\sqrt{n}}), \exp(i\frac{y}{\sqrt{n}}))\right\}],$$

де

$$(\exp(i\frac{x}{\sqrt{n}}))' = (\exp(i\frac{x_1}{\sqrt{n}}), ..., \exp(i\frac{x_r}{\sqrt{n}})),$$

$$(\exp(i\frac{y}{\sqrt{n}}))' = (\exp(i\frac{y_1}{\sqrt{n}}),\dots,\exp(i\frac{y_r}{\sqrt{n}}))\,,$$

функції $\Phi^{n,m}(t,x,y)$, $m=1,2,\dots,r$ визначаються системою інтегральних рівнянь (3.1) із заміною $G_m(t)$, $m=1,2,\dots,r$ на $G_m^n(t)$. У подальшому приймемо позначення $\Phi^{(n)m}(t,x,y)=\Phi^{n,m}(nt,x,y)$, $m=1,2,\dots,r$.

Такий же зміст мають величини:

$$B^{(n)m}(t),\ \Delta^{(n)m}(t,x,y),\ D^{(n)m}(t),\ \widetilde{\Delta}^{(n)m}(t,x,y),\ m=1,2,\dots,r.$$

З співвідношення (3.15) маємо

$$\Phi^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n},\exp(i\frac{x}{\sqrt{n}}),\exp(i\frac{y}{\sqrt{n}}))=$$

$$=1-(p^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n}))'(\overline{1}-\exp(i\frac{x}{\sqrt{n}}))-(A^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n}))'(\overline{1}-\exp(i\frac{y}{\sqrt{n}}))+$$

$$+(\overline{1}-\exp(i\frac{x}{\sqrt{n}}))'[B^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})- \tag{3.37}$$

$$-\Delta^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n},\exp(i\frac{x}{\sqrt{n}}),\exp(i\frac{y}{\sqrt{n}}))](\overline{1}-\exp(i\frac{y}{\sqrt{n}}))+$$

$$+\frac{1}{2}(\overline{1}-\exp(i\frac{y}{\sqrt{n}}))'[D^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})-$$

$$-\widetilde{\Delta}^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n},\exp(i\frac{x}{\sqrt{n}}),\exp(i\frac{y}{\sqrt{n}}))](\overline{1}-\exp(i\frac{y}{\sqrt{n}})).$$

Нехай $(x^2)'=(x_1^2,\dots,x_r^2)$, $(y^2)'=(y_1^2,\dots,y_r^2)$,

$$W^{(n)'}(t)=(W_1^{(n)}(t),\dots,W_r^{(n)}(t))=n^{-\frac{1}{2}}\left(\nu_1^{(n)}(t)-\lambda_1 nt,\dots,\nu_r^{(n)}(t)-\lambda_r nt\right).$$

Підставляючи $\Phi^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n},\exp(i\frac{x}{\sqrt{n}}),\exp(i\frac{y}{\sqrt{n}}))$ у вигляді (3.37) в (3.36), знаходимо

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^{(n)}(t,x,y)=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{-i\sqrt{n}\lambda'\int_0^t P^{(n)}(u)du\,x-i\sqrt{n}\lambda'\int_0^t A^{(n)}(u)du\,y\right\}\times$$

$$\times M[\exp\left\{\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_m^{(n)}(t)}\ln\left\{1-(p^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n}))'(\bar{1}-\exp(i\frac{x}{\sqrt{n}}))-\right.\right.$$

$$-(A^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n}))'(\bar{1}-\exp(i\frac{y}{\sqrt{n}}))+$$

$$+(\bar{1}-\exp(i\frac{x}{\sqrt{n}}))'B^m(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})(\bar{1}-\exp(i\frac{y}{\sqrt{n}}))+$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}(\bar{1}-\exp(i\frac{y}{\sqrt{n}}))'D^m(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})(\bar{1}-\exp(i\frac{y}{\sqrt{n}}))\right\}\right\}]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{-i\sqrt{n}\lambda'\int_0^t P^{(n)}(u)du\,x-i\sqrt{n}\lambda'\int_0^t A^{(n)}(u)du\,y\right\}\times$$

$$\times M[\exp\left\{\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_m^{(n)}(t)}\left\{\frac{i}{\sqrt{n}}(p^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n}))'x-\frac{1}{2n}(p^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n}))'x^2+\right.\right.$$

$$+\frac{i}{\sqrt{n}}(A^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n}))'y-\frac{1}{2n}(A^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n}))'y^2-$$

$$-\frac{1}{n}x'B^m(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})y-\frac{1}{2n}y'D^m(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})y+$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2n}[(p^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n}))'x+(A^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n}))'y]^2\right\}\right\}]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{-i\sqrt{n}\lambda'\int_0^t P^{(n)}(u)du-i\sqrt{n}\lambda'\int_0^t A^{(n)}(u)du\,y\right\}\times$$

$$\times M[\exp\left\{\sum_{m=1}^{r}\left\{\frac{i}{\sqrt{n}}(\int_0^t p^{(n)m}(t-u)d\nu_m^{(n)}(u))'x-\frac{1}{2n}(\int_0^t p^{(n)m}(t-u)d\nu^{(n)}(u))'x^2+\right.\right.$$

$$+\frac{i}{\sqrt{n}}(\int_0^t A^{(n)m}(t-u)d\nu_m^{(n)}(u))'y-\frac{1}{2n}(\int_0^t A^{(n)m}(t-u)d\nu_m^{(n)}(u))'y^2-$$

$$-\frac{1}{n}x'[\int_0^t B^m(t-u)d\nu_m^{(n)}(u)]y-\frac{1}{2n}y'[\int_0^t D^m(t-u)d\nu_m^{(n)}(u)]y+$$

$$+\frac{1}{2n}x'[\int_0^t p^{(n)m}(t-u)(p^{(n)m}(t-u))'d\nu_m^{(n)}(u)]x+$$

$$+\frac{1}{2n}y'[\int_0^t A^{(n)m}(t-u)(A^{(n)m}(t-u))'d\nu_m^{(n)}(u)]y+$$

$$+\frac{1}{n}x'[\int_0^t p^{(n)m}(t-u)(A^{(n)m}(t-u))'d\nu_m^{(n)}(u)]y\}\}]=$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}[\int_0^t(\sum_{m=1}^r\lambda_m p^m(u))du]'x^2-\frac{1}{2}[\int_0^t(\sum_{m=1}^r\lambda_m A^m(u))du]'y^2-\right.$$

$$-x'\int_0^t(\sum_{m=1}^r\lambda_m B^m(u))duy-\frac{1}{2}y'\int_0^t(\sum_{m=1}^r\lambda_m D^m(u))duy+$$

$$+\frac{1}{2}x'[\int_0^t(\sum_{m=1}^r\lambda_m p^m(u)p^{m'}(u))du]x+\frac{1}{2}y'[\int_0^t(\sum_{m=1}^r\lambda_m A^m(u)A^{m'}(u))du]y+$$

$$\left.+x'[\int_0^t(\sum_{m=1}^r\lambda_m p^m(u)A^{m'}(u))du]y\right\}\times$$

$$\times M\exp\left\{i\sum_{m=1}^r(\int_0^t p^m(t-u)dW_m(u))'x+i\sum_{m=1}^r(\int_0^t A^m(t-u)dW_m(u))'y\right\}.$$

Оскільки

$$p^{m'}(u)y^2=y'\Delta(p^m(u))y,\ A^{m'}(u)y^2=y'\Delta(A^m(u))y,$$

$$\Delta(p^m(u))-p^m(u)p^{m'}(u)=R(\chi^m(u),\chi^m(u)),$$

$$\Delta(A^m(u))+D^m(u)-A^m(u)A^{m'}(u)=R(\gamma^m(u),\gamma^m(u)),$$

$$B^m(u)-p^m(u)A^{m'}(u)=R(\chi^m(u),\gamma^m(u)),$$

то з урахуванням (3.35)

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^{(n)}(t,x,y)=\exp\left\{-\frac{1}{2}x'\int_0^t R(\chi(u),\chi(u))du\,x-\frac{1}{2}y'\int_0^t R(\Gamma(u),\Gamma(u))duy-\right.$$

$$\left.-x'\int_0^t R(\chi(u),\Gamma(u))du]y\right\}\times M\exp\left\{i\int_0^t dW'(u)P(t-u)x+i\int_0^t dW'(u)A(t-u)y\right\}.$$

Тепер збіжність одновимірних розподілів процесу $\left(\xi^{(n)'}, \eta^{(n)'}\right)$ до граничного $(\xi', \eta') = \left(\xi^{(1)'} + \xi^{(2)'}, \eta^{(1)'} + \eta^{(2)'}\right)$ випливає з леми 3.3, в якій підраховано характеристичні функції процесу

$$\left(\int_0^t dW'(u)P(t-u), \int_0^t dW'(u)A(t-u)\right).$$

Розглянемо двовимірні розподіли процесу $\left(\xi^{(n)'}, \eta^{(n)'}\right)$ для моментів часу $0 < s < t$ та їх характеристичну функцію

$$\varphi^{(n)}(s,t,x(1),y(1),x(2),y(2)) =$$

$$= M\exp\left\{i\xi^{(n)'}(s)x(1) + i\eta^{(n)'}(s)y(1) + i\xi^{(n)'}(t)x(2) + i\eta^{(n)'}(t)y(2)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-i\sqrt{n}\lambda'\int_0^s P^{(n)}(u)dux(1) - i\sqrt{n}\lambda'\int_0^t P^{(n)}(u)dux(2) - \right.$$

$$\left. - i\sqrt{n}\lambda'\int_0^s A^{(n)}(u)duy(1) - i\sqrt{n}\lambda'\int_0^t A^{(n)}(u)duy(2)\right\} \times$$

$$\times M\left[\exp\left\{\sum_{m=1}^{r}\left\{\sum_{k=1}^{\nu_m^{(n)}(s)} \ln\Phi^{(n)m}\left(s - \frac{\tau_k^{n,m}}{n}, t - \frac{\tau_k^{n,m}}{n}, \exp\left(i\frac{x(1)}{\sqrt{n}}\right),\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\exp\left(i\frac{y(1)}{\sqrt{n}}\right), \exp\left(i\frac{x(2)}{\sqrt{n}}\right), \exp\left(i\frac{y(2)}{\sqrt{n}}\right)\right)\Bigg\} +$$

$$\left.\left.\left. + \sum_{k=\nu_m^{(n)}(s)+1}^{\nu_m^{(n)}(t)} \ln\Phi^{(n)m}\left(t - \frac{\tau_k^{n,m}}{n}, \exp\left(i\frac{x(2)}{\sqrt{n}}\right), \exp\left(i\frac{y(2)}{\sqrt{n}}\right)\right)\right\}\right\}\right].$$

Використовуючи подання (3.15), (3.34), знаходимо

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^{(n)}(s,t,x(1),y(1),x(2),y(2)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\exp\left\{-i\sqrt{n}\lambda'\int_0^s P^{(n)}(u)dux(1) - i\sqrt{n}\lambda'\int_0^t P^{(n)}(u)dux(2) - \right.$$

$$\left. - i\sqrt{n}\lambda'\int_0^s A^{(n)}(u)duy(1) - i\sqrt{n}\lambda'\int_0^t A^{(n)}(u)duy(2)\right\} \times$$

$$\times M\left[\exp\left\{\sum_{m=1}^{r}\left\{\sum_{k=1}^{\nu_m^{(n)}(s)}\ln\left[1+i\frac{1}{\sqrt{n}}\left(p^{(n)m}(s-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})\right)'x(1)+\right.\right.\right.\right.$$

$$+i\frac{1}{\sqrt{n}}\left(A^{(n)m}(s-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})\right)'y(1)+i\frac{1}{\sqrt{n}}\left(p^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})\right)'x(2)+$$

$$+i\frac{1}{\sqrt{n}}\left(A^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})\right)'y(2)-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\left(p^{m}(s-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})\right)'x^2(1)-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\left(A^{m}(s-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})\right)'y^2(1)-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\left(p^{m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})\right)'x^2(2)-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\left(A^{m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})\right)'y^2(2)-$$

$$-\frac{1}{n}x'(1)B^m(s-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})y(1)-\frac{1}{n}x'(2)B^m(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})y(2)-$$

$$-\frac{1}{n}\frac{1}{2}y'(1)D^m(s-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})y(1)-\frac{1}{n}\frac{1}{2}y'(2)D^m(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})y(2)-$$

$$-\frac{1}{n}x'(1)B^m(1;s-\frac{\tau_k^{n,m}}{n},t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})x(2)-$$

$$-\frac{1}{n}x'(1)B^m(1;2;s-\frac{\tau_k^{n,m}}{n},t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})y(2)-$$

$$-\frac{1}{n}y'(1)B^m(2;1;s-\frac{\tau_k^{n,m}}{n},t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})x(2)-$$

$$\left.-\frac{1}{n}y'(1)B^m(2;s-\frac{\tau_k^{n,m}}{n},t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})y(2)\right]+$$

$$+\sum_{k=\nu_m^{(n)}(s)+1}^{\nu_m^{(n)}(t)}\ln\left[1+i\frac{1}{\sqrt{n}}\left(p^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})\right)'x(2)+i\frac{1}{\sqrt{n}}\left(A^{(n)m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})\right)'y(2)+\right.$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\left(p^{m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})\right)'x^2(2)-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\left(A^{m}(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})\right)'y^2(2)-$$

$$-\frac{1}{n}x'(2)\left(B^m(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})\right)y(2)-\frac{1}{2}\frac{1}{n}y'(2)\left(D^m(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n})\right)'y(2)\Bigg]\Bigg\}\Bigg\}\Bigg]=$$

$$=\exp\left\{\sum_{m=1}^{r}\left\{-\frac{1}{2}\lambda_m\left(\int_0^s p^m(u)du\right)'x^2(1)-\frac{1}{2}\lambda_m\left(\int_0^s A^m(u)du\right)'y^2(1)-\right.\right.$$

$$-\frac{1}{2}\lambda_m\left(\int_0^t p^m(u)du\right)'x^2(2)-\frac{1}{2}\lambda_m\left(\int_0^t A^m(u)du\right)'y^2(2)-$$

$$-\lambda_m x'(1)\int_0^s B^m(u)duy(1)-\lambda_m x'(2)\int_0^t B^m(u)duy(2)-$$

$$-\frac{1}{2}\lambda_m y'(1)\int_0^s D^m(u)duy(1)-\frac{1}{2}\lambda_m y'(2)\int_0^t D^m(u)duy(2)-$$

$$-\lambda_m x'(1)\int_0^s B^m(1;s-u,t-u)dux(2)-\lambda_m x'(1)\int_0^s B^m(1;2;s-u,t-u)duy(2)-$$

$$-\lambda_m y'(1)\int_0^s B^m(2;1;s-u,t-u)dux(2)-\lambda_m y'(1)\int_0^s B^m(2;s-u,t-u)duy(2)+$$

$$+\frac{1}{2}\lambda_m x'(1)\int_0^s p^m(u)\left(p^m(u)\right)'dux(1)+\frac{1}{2}\lambda_m y'(1)\int_0^s A^m(u)\left(A^m(u)\right)'duy(1)+$$

$$+\frac{1}{2}\lambda_m x'(2)\int_0^t p^m(u)\left(p^m(u)\right)'dux(2)+\frac{1}{2}\lambda_m y'(2)\int_0^t A^m(u)\left(A^m(u)\right)'duy(2)+$$

$$+\lambda_m x'(1)\int_0^s p^m(u)\left(A^m(u)\right)'duy(1)+\lambda_m x'(2)\int_0^t p^m(u)\left(A^m(u)\right)'duy(2)+$$

$$+\lambda_m x'(1)\int_0^s p^m(s-u)\left(p^m(t-u)\right)'dux(2)+\lambda_m x'(1)\int_0^s p^m(s-u)\left(A^m(t-u)\right)'duy(2)+$$

$$\left.+\lambda_m y'(1)\int_0^s A^m(s-u)\left(p^m(t-u)\right)'dux(2)+\lambda_m y'(1)\int_0^s A^m(s-u)\left(A^m(t-u)\right)'duy(2)\right\}\times$$

$$\times M\exp\left\{i\int_0^s dW'(u)P(s-u)x(1)+i\int_0^s dW'(u)A(s-u)y(1)+\right.$$

$$+i\int_0^t dW'(u)P(t-u)x(2)+i\int_0^t dW'(u)A(t-u)y(2)\Bigg\}.$$

Нарешті використовуючи подання (3.35), знаходимо

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^{(n)}(s,t,x(1),y(1),x(2),y(2))=$$

$$=\exp\Bigg\{-\frac{1}{2}x'(1)\int_0^s R\big(\chi(u),\chi(u)\big)du\,x(1)-\frac{1}{2}x'(2)\int_0^t R\big(\chi(u),\chi(u)\big)du\,x(2)-$$

$$-\frac{1}{2}y'(1)\int_0^s R\big(\Gamma(u),\Gamma(u)\big)du\,y(1)-\frac{1}{2}y'(2)\int_0^t R\big(\Gamma(u),\Gamma(u)\big)du\,y(2)-$$

$$-x'(1)\int_0^s R\big(\chi(u),\Gamma(u)\big)du\,y(1)-x'(2)\int_0^t R\big(\chi(u),\Gamma(u)\big)du\,y(2)-$$

$$-x'(1)\int_0^s R\big(\chi(u),\chi(u+t-s)\big)du\,x(2)-x'(1)\int_0^s R\big(\chi(u),\Gamma(u+t-s)\big)du\,y(2)-$$

$$-y'(1)\int_0^s R\big(\Gamma(u),\chi(u+t-s)\big)du\,x(2)-y'(1)\int_0^s R\big(\Gamma(u),\Gamma(u+t-s)\big)du\,y(2)\Bigg\}\times$$

$$\times M\exp\Bigg\{i\int_0^s dW'(u)P(s-u)x(1)+i\int_0^t dW'(u)P(t-u)x(2)+$$

$$+i\int_0^s dW'(u)A(s-u)y(1)+i\int_0^t dW'(u)A(t-u)y(2)\Bigg\}.$$

Тепер на основі леми 3.3 маємо слабку збіжність двовимірних розподілів. З урахуванням подання (3.27) слабка збіжність N-вимірних розподілів для $N>2$ доводиться аналогічно.

Збіжність скінченновимірних розподілів посилюється до збіжності функціоналів так само, як це було зроблено в роботі [14]. Теорему доведено.

Наприкінці цього підрозділу зазначимо, що підрахунок кореляційних характеристик апроксимативного процесу зводиться до розв’язку систем інтегральних рівнянь типу марковського відновлення, які виписані у попередньому підрозділі (системи (3.10), (3.16) – (3.18), (3.30) – (3.33)). Таким чином через керуючі параметри $[G\,|\,GI\,|\,\infty]^r$ – мережі вони визначені опосередковано. Явний вигляд цих характеристик можна виписати при переході до границі за часом $(t \to \infty)$.

3.3. Розрахунок цільових функцій при критичному навантаженні.

При умові 1) на багатовимірний вхідний потік $\nu'(t) = (\nu_1(t), \nu_2(t), ..., \nu_r(t))$ і умові 2) на функції розподілу часу обробки інформації $[G \mid GI \mid \infty]^r$ – мережа функціонує у перевантаженому режимі. Головна мета цього підрозділу – виписати цільові функції для задач максимізації прибутку та мінімізації ризику у перевантаженому режимі.

Природньо для пошуку цільових функцій використовувати метод гауссівської апроксимації, обґрунтування якого дано в теоремі 3.1.

Розглянемо спочатку задачу максимізації прибутку.

Будемо вважати, що ми можемо керувати інтенсивностями вхідних потоків на окремі вузли $\lambda_i \ge 0, i = 1,2,...,r$, залишаючи при цьому сталу інтенсивність сумарного потоку в мережу $\Lambda = \lambda_1 + ... + \lambda_r > 0$. Тоді процес керування зводиться до вибору вектора $h' = (h_1, ..., h_r), h_i \ge 0, \sum_{i=1}^{1} h_i = 1$, де $h_i = \lambda_i / \Lambda$, $i = 1,...,r$. Нехай, як і раніше, $C_i, i = 1,...,r$ – прибуток від обробки одного інформаційного потоку в i-ому вузлі, $m_i^{(n)}(h,t) = MS_i^n(nt)$, $i = 1,...,r$ – математичне сподівання числа пакетів, що завершили обробку в i-ому вузлі на проміжку часу $[0, nt]$ при фіксованому керуванні $h' = (h_1, ..., h_r)$, $M^{(n)}(h,t) = \sum_{i=1}^{r} C_i m_i^{(n)}(h,t)$ – середній прибуток від роботи всієї мережі типу $\left[G^{(n)} \mid GI^{(n)} \mid \infty\right]^r$ за час nt. Тоді в перехідному режимі аналогом (2.5), (2.6) буде оптимізаційна задача:

$$M(h,t) = \lim_{n \to \infty} n^{-1} M^{(n)}(h,t) \to \max, \tag{3.38}$$

при умові

$$h_1 + h_2 + ... + h_r = 1, h_i \ge 0, i = 1,...,r. \qquad (3.39)$$

Співвідношенням (3.38), (3.39) можна дати наступну інтерпретацію: при фіксованій сумарній інтенсивності вхідного потоку треба так розподілити її між вузлами мережі, щоб середній прибуток був максимальним. Очевидно, розв'язок задачі максимізації прибутку h^+ в перехідному режимі буде залежати від t, $h^+ = h^+(t)$.

Враховуючи те, що мережі обробки інформації функціонують "достатньо довгий час", більш змістовною буде наступна постановка:

$$M(h) = \lim_{t\to\infty} t^{-1} M(h,t) \to \max, \qquad (3.40)$$

при умові

$$h_1 + h_2 + ... + h_r = 1, h_i \ge 0, i = 1,...,r. \qquad (3.41)$$

Оптимізаційну задачу (3.40), (3.41) будемо називати максимізацією прибутку у стаціонарному режимі.

Побудуємо розрахункові формули для функціоналів $M(h,t), M(h)$, $h' = (h_1,...,h_r)$.

Нехай $D_{[0,T]}$ – простір функцій без розривів другого роду, що визначені на проміжку $[0,T]$, $\rho_T(x(t),y(t)) = \sup\limits_{t\in[0,T]} |x(t) - y(t)|$ – рівномірна метрика в цьому просторі. Розглянемо для вхідного потоку $\nu^{(n)}(t)$ наступну умову:

а) для будь-якого $T > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \rho_T(n^{-1} M\nu_\alpha^{(n)}(t),\ \lambda_\alpha t) = 0, \quad \alpha = 1,...,r.$$

Тоді з подання процесу накопичення у вигляді (теорема 3.1)

$$S^{(n)}(t) = \sum_{m=1}^{d} \sum_{k=1}^{r} \sum^{\nu_m^{(n)}(t)} \gamma^{(n)m,k}\left(t - \frac{\tau_k^{n,m}}{n}\right) \qquad (3.42)$$

випливає такий результат.

Лема 3.5. Нехай $\left[G^{(n)} \mid GI^{(n)} \mid \infty\right]^r$ – мережа у початковий момент часу порожня, спектральний радіус матриці маршрутизації строго менший 1 і виконуються умови 2), а). Тоді

$$n^{-1} MS_{\alpha}^{(n)}(t) = \Lambda \sum_{m=1}^{r} h_m \int_0^t A_{\alpha}^{(n)m}(u)du + o(1). \qquad (3.43)$$

При виконанні умов леми 3.5

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} M^{(n)}(h,t) = \Lambda h' \int_0^t A(u)duC,$$

де $C' = (C_1, ..., C_r)$, а компоненти матриці $A(t) = \left\| A_i^m(t) \right\|_1^r$ визначаються своїми перетвореннями Лапласа (див. (3.19))

$$A(s) = \left\| A_{\alpha}^m(s) \right\|_1^r = \frac{1}{s}[I - \Delta(G(s))P]^{-1} \Delta(G(s)),$$

де $\Delta(G(s)) = \left\| \delta_{m\alpha} G_{\alpha}(s) \right\|_1^r$, $G_{\alpha}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dG_{\alpha}(t)$ – перетворення Лапласа-Стільтьєса функції розподілу $G_{\alpha}(t)$, $\alpha = 1, ..., r$.

За визначенням (див. підрозділ 3.1) функції $A_{\alpha}^m(t)$ монотонно неспадкі і тому

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^{\infty} A(u)du = \lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{s\to 0+} sA(s) = (I - P)^{-1}.$$

Підсумком проведеного аналізу є такий результат.

Наслідок 3.3. При виконанні умов леми 3.5 оптимізаційні задачі (3.38) – (3.41) є задачами лінійного програмування, цільові функції яких дорівнюють відповідно

$$M(h,t) = \Lambda h' \int_0^t A(u)duC, \; M(h) = \Lambda h'(I - P)^{-1} C.$$

Перейдемо тепер до задачі мінімізації ризику.

В умові 1) критичного навантаження мережі параметри $\lambda_{\alpha} = h_{\alpha}\Lambda$, $i = 1, ..., r$ і елементи матриці σ^2 функціонально зв'язані $\sigma^2 = \sigma^2(h)$.

Характер цього зв'язку невідомий і визначається структурою вхідного потоку. Тому при аналізі задачі мінімізації ризику будемо фіксувати певну структуру, наводити умови, які забезпечують застосування загальної теореми 3.1, і як наслідок – отримувати розрахункові формули для цільових функцій.

Спочатку розглянемо одне узагальнення мережі типу $[GI\,|\,GI\,|\,\infty]^r$ з одним джерелом інформаційних пакетів (підрозділ 2.4).

Будемо вважати, що на вхід мережі надходить один загальний потік пакетів інформації $\tilde{\nu}(t)$. У момент надходження пакет з імовірністю h_i, $i = 1,...,r$ спрямовується на обробку в і-ий вузол мережі, $\sum\limits_{i=1}^{r} h_i = 1$. Через $\nu_i(t)$, $i = 1,...,r$, як і раніше, будемо позначати зовнішній вхідний потік на і-ий вузол. Після надходження алгоритм обробки інформації такий же, як і в $[GI\,|\,GI\,|\,\infty]^r$ – мережі. Для зручності посилань описану вище модель будемо позначати символом $[G(1)\,|\,GI\,|\,\infty]^r$.

Для $[G(1)\,|\,GI\,|\,\infty]^r$ – мережі умову 1) замінимо на таку:

$1')$ існує константа $\Lambda > 0$, що

$$n^{-1}\tilde{\nu}^{(n)}(t) \underset{n\to\infty}{\overset{U}{\Rightarrow}} \Lambda t,\ \ n^{-\frac{1}{2}}(\tilde{\nu}^{(n)}(t) - \Lambda nt) \underset{n\to\infty}{\overset{U}{\Rightarrow}} \tilde{W}(t),$$

де $\tilde{\nu}^{(n)}(t) = \tilde{\nu}^n(nt)$, $\tilde{W}(t)$ – вінерівський процес з нульовим математичним сподіванням $M\tilde{W}(1) = 0$ і дисперсією $D\tilde{W}(1) = \tilde{\sigma}^2$.

Лема 3.6. Якщо для вхідного потоку $\tilde{\nu}^{(n)}(t)$ виконується умова $1')$, то

$$n^{-\frac{1}{2}}(\nu_1^{(n)}(t) - h_1\Lambda nt,...,\nu_r^{(n)}(t) - h_r\Lambda nt) \underset{n\to\infty}{\overset{U}{\Rightarrow}} W'(t) = (W_1(t),...,W_r(t)), \quad (3.44)$$

де $W(t)$ – r-вимірний процес броунівського руху з нульовим вектором математичних сподівань $MW(1) = 0$ і кореляційною матрицею

$$MW(1)W'(1) = \sigma^2 = \left\|\sigma_{ij}^2\right\|_1^r = \Lambda\Delta(h) + (\tilde{\sigma}^2 - \Lambda)hh'.$$

Доведення. Для того, щоб побудувати вхідний потік на кожний вузол $\left[G(1)\,|\,GI\,|\,\infty\right]^r$ – мережі розглянемо r-вимірну випадкову величину індикатор-ного типу $\chi' = (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_r)$, яка приймає значення e_i з імовірністю h_i, $i = 1,...,r$. (e_i, $i = 1,...,r$ – r-вимірний вектор, i-та компонента якого дорівнює 1, а інші – 0). Тоді

$$\nu^{(n)\prime}(t) = \left(\nu_1^{(n)}(t),...,\nu_r^{(n)}(t)\right) \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{\tilde{\nu}^{(n)}(t)} \chi^k , \tag{3.45}$$

де $\chi^k, k = 1,2,...$ послідовність незалежних випадкових векторів, розподіл яких співпадає з χ.

Використовуючи подання (3.45), знаходимо

$$n^{-1/2}\left(\nu_1^{(n)}(t) - h_1\Lambda nt,...,\nu_r^{(n)}(t) - h_r\Lambda nt\right) = n^{-1/2}\sum_{k=1}^{\tilde{\nu}^{(n)}(t)} \chi^{k\prime} - n^{1/2}\Lambda th' =$$

$$= n^{-1/2}\sum_{k=1}^{\tilde{\nu}^{(n)}(t)}\left(\chi^{k\prime} - h'\right) + n^{-1/2}\left(\tilde{\nu}^{(n)}(t) - \Lambda nt\right)h'.$$

Тепер співвідношення (3.44) випливає з граничної теореми для випадкової заміни часу ([15], стор. 202-203).

Лему доведено.

Головний зміст леми 3.6 в тому, що з умови $1'$) для $\left[G^{(n)}(1)\,|\,GI^{(n)}\,|\,\infty\right]^r$ – мережі випливає справедливість 1) і ми можемо застосувати теорему 3.1.

Нехай $V^{(n)}(h,t) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} C_\alpha V_{\alpha\beta}^{(n)}(h,t) C_\beta$, де $\left\| V_{\alpha\beta}^{(n)}(h,t) \right\|_1^r = R(S^{(n)}(t), S^{(n)}(t))$ і у початковий момент часу $\left[G^{(n)}(1)\,|\,GI^{(n)}\,|\,\infty\right]^r$ – мережа порожня. Аналогом (2.36) – (2.38) буде наступна задача мінімізації ризику:

$$V(h,t) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} V^{(n)}(h,t) \to \min , \tag{3.46}$$

при умові

$$\Lambda h' \int_0^t A(u)du C = M_0(t) , \tag{3.47}$$

$$h_1 + h_2 + ... + h_r = 1,\ h_i \ge 0,\ \ i = 1,2,...,r , \tag{3.48}$$

де $M^{-}(t) \le M_0(t) \le M^{+}(t)$, $M^{+}(t), M^{-}(t)$ – максимальне і мінімальне значення відповідно функціоналу $M(h,t) = \Lambda h' \int_0^t A(u)du C$ при обмеженнях (3.48).

Розв'язком задачі (3.46) – (3.48) буде таке управління напрямком вхідного потоку, яке мінімізує ризик при досягненні певного загального прибутку $M_0(t)$.

Для мінімізації ризику у стаціонарному режимі пропонується наступна постановка:

$$V(h) = \lim_{t\to\infty} t^{-1} V(h,t) \to \min, \tag{3.49}$$

при умові

$$\Lambda h'(I-P)^{-1} C = M_0, \tag{3.50}$$

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_r = 1,\ h_i \ge 0,\ \ i = 1,2,\ldots,r, \tag{3.51}$$

де $M^{-} \le M_0 \le M^{+}$, M^{+}, M^{-} – максимальне і мінімальне значення відповідно функціоналу $M(h) = \Lambda h'(I-P)^{-1} C$ при обмеженнях (3.51).

Побудуємо розрахункові формули для функціоналів $V(h,t)$ і $V(h)$.

Наслідок 3.4. Якщо у початковий момент часу $\left[G^{(n)}(1) \,|\, GI^{(n)} \,|\, \infty\right]^r$ – мережа порожня, виконуються умови $1'$), 2), для будь-якого $T > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \rho_T(n^{-1} M\tilde{\nu}^{(n)}(t), \Lambda t) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \rho_T(n^{-1} M(\tilde{\nu}^{(n)}(t) - \Lambda n t)^2, \tilde{\sigma}^2 t) = 0,$$

і спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший одиниці, то оптимізаційні задачі (3.46) – (3.51) є задачами квадратичного програмування, цільові функції яких дорівнюють відповідно

$$\begin{aligned} V(h,t) = \Lambda C' \Bigg\{ & \int_0^t A'(u)[\Delta(h) + (\Lambda^{-1}\tilde{\sigma}^2 - 1) h h'] A(u) du + \\ & + \sum_{m=1}^{r} h_m \int_0^t R(\gamma^m(u), \gamma^m(u)) du \Bigg\} C, \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$V(h) = \Lambda C'\Big\{A'[\Delta(h) + (\Lambda^{-1}\tilde{\sigma}^2 - 1)hh']A + \\ + \sum_{m=1}^{r} h_m [D^m + \Delta(A^m) - A^m A^{m'}]\Big\}C, \tag{3.53}$$

де $R(\gamma^m(u), \gamma^m(u)) = D^m(u) + \Delta(A^m(u)) - A^m(u)A^{m'}(u)$, а функції $D'_{\alpha\beta}(t) = (D^1_{\alpha\beta}(t), D^2_{\alpha\beta}(t), ..., D^r_{\alpha\beta}(t))$, $\alpha, \beta = 1, ..., r$, визначені перетвореннями Лапласа $D'_{\alpha\beta}(s) = (D^1_{\alpha\beta}(s), D^2_{\alpha\beta}(s), ..., D^r_{\alpha\beta}(s))$ у вигляді (3.20); $A = (I - P)^{-1}$,

$$A^{m'} = (A^m_1, ..., A^m_r), \quad D^m = \left\| D^m_{\alpha\beta} \right\|^r_{\alpha,\beta=1},$$

$$D'_{\alpha\beta} = (D^1_{\alpha\beta}, ..., D^r_{\alpha\beta}); \quad D_{\alpha\beta} = (I-P)^{-1} I_\beta P (I-P)^{-1} e_\alpha + (I-P)^{-1} I_\alpha P (I-P)^{-1} e_\beta.$$

Зазначимо, що при умові $\Lambda^{-1}\tilde{\sigma}^2 = 1$ цільові функції $V(h,t)$, $V(h)$ стають лінійними відносно $h' = (h_1, ..., h_r)$.

Розглянемо модель стохастичної мережі типу $\left[SM \mid GI^{(n)} \mid \infty\right]^r$, в якій параметри вхідного напівмарковського процесу $x(t) \in \{1, 2, ..., N\}$ не залежать від номера серії “n”, а вибір напрямку для інформаційного пакету, що надійшов іззовні, здійснюється на основі матриці $H = \left\| h_{ij} \right\|$ розміром $N \times r$. За рахунок вибору H будемо мінімізувати ризик при досягненні певного прибутку.

Для напівмарковського процесу x(t) приймемо такі позначення: $\Delta(\bar{a}) = \left\| \delta_{ij}\pi_i \right\|^N_1$, $\bar{a}' = (a_1, ..., a_N)$, $\Lambda = (\sum_{i=1}^{N} a_i \pi_i)^{-1}$ – інтенсивність зовнішнього вхідного потоку; $\lambda_i(H) = \Lambda \sum_{j=1}^{N} \pi_j h_{ji}$ – інтенсивність зовнішнього вхідного потоку на i-ий вузол.

Від вхідного потоку $\nu'(t) = (\nu_1(t), ..., \nu_r(t))$ в $\left[SM \mid GI^{(n)} \mid \infty\right]^r$ – мережі будемо вимагати:

1″) матриця ймовірностей переходу F вкладеного ланцюга Маркова є нерозкладною і для часу перебування у кожному стані керуючого напівмар-ковського процесу $x(t)$ скінченні моменти першого і другого порядку.

З робіт [16], [17] випливає, що при виконанні 1″) для $\nu(t)$ справедлива умова 1), причому $\lambda_i = \lambda_i(H)$, $i = 1, 2, ..., r$;

$\sigma^2(H) = \Lambda H'[T + T']H + \Lambda\Delta(\pi' H)$, де $T = \Delta(\pi)[R - \Lambda\Pi\Delta(\bar{a})]F$,

матриця $R = \|r_{ij}\|_1^N$ визначена у розділі 2 формулою (2.29).

Таким чином, при дослідженні накопичення прибутку у $\left[SM \mid GI^{(n)} \mid \infty\right]^r$ – мережі при критичному навантаженні можна використовувати теорему 3.1.

Нехай $S^{i,n}(nt) = S^{i(n)}(t) = (S_1^{i(n)}(t), ..., S_r^{i(n)}(t))$, $S_j^{i(n)}(t)$ – число інформаційних пакетів, що завершили обробку в j-ому вузлі на проміжку часу $[0, nt]$, якщо у початковий момент мережа була порожня і $x(0) = i$, $V^{i(n)}(H, t) = C' R(S^{i(n)}(t), S^{i(n)}(t))C$. Тоді задачу мінімізації ризику можна поставити наступним чином:

$$V(H, t) = \lim_{n \to \infty} n^{-1} V^{i(n)}(H, t) \to \min, \tag{3.54}$$

при умові

$$\lambda'(H) \int_0^t A(u) du C = M_0(t), \tag{3.55}$$

$$\lambda'(H) = (\lambda_1(H), ..., \lambda_r(H)), \quad \lambda_j(H) = \Lambda \sum_{k=1}^N \pi_k h_{kj}, \ j = 1, ..., r,$$

$$h_{i1} + h_{i2} + ... + h_{ir} = 1, \ h_{ij} \geq 0, \ i = 1, 2, ..., N, \ j = 1, 2, ..., r, \tag{3.56}$$

де $M^-(t) \leq M_0(t) \leq M^+(t)$, $M^+(t), M^-(t)$ – максимальне і мінімальне значення відповідно функціоналу $M(H, t) = \lambda'(H) \int_0^t A(u) du C$ при обмеженнях (3.56).

Для стаціонарного режиму постановка (3.54) – (3.56) відповідним чином змінюється:

$$V(H)=\lim_{t\to\infty} t^{-1}V(H,t)\to\min, \tag{3.57}$$

при умові

$$\lambda'(H)(I-P)^{-1}C=M_0, \tag{3.58}$$

$$\lambda'(H)=(\lambda_1(H),...,\lambda_r(H)),\ \ \lambda_j(H)=\Lambda\sum_{k=1}^{N}\pi_k h_{kj},\ j=1,...,r,$$

$$h_{i1}+h_{i2}+...+h_{ir}=1,\ h_{ij}\ge 0,\ i=1,2,...,N,\ j=1,2,...,r, \tag{3.59}$$

де $M^- \le M_0 \le M^+$, M^+, M^- – максимальне і мінімальне значення відповідно функціоналу $M(H)=\lambda'(H)(I-P)^{-1}C$ при обмеженнях (3.59).

Цільові функції $V(H,t)$, $V(H)$ оптимізаційних задач (3.55) – (3.59) мають такий вигляд.

Наслідок 3.5. Якщо у початковий момент часу $\left[SM\,|\,GI^{(n)}\,|\,\infty\right]^r$ – мережа порожня, виконуються умови $1'')$, 2) і спектральний радіус матриці маршру-тизації P строго менший одиниці, то оптимізаційні задачі (3.55) – (3.59) є задачами квадратичного програмування, цільові функції яких дорівнюють відповідно

$$V(H,t)=C'[\int_0^t A'(u)\sigma^2(H)A(u)du+\sum_{m=1}^{r}\lambda_m(H)\int_0^t R(\gamma^m(u),\gamma^m(u))du]C, \tag{3.60}$$

$$R(\gamma^m(u),\gamma^m(u))=D^m(u)+\Delta(A^m(u))-A^m(u)A^{m'}(u),\ m=1,...,r,$$

$$V(H)=C'[A'\sigma^2(H)A+\sum_{m=1}^{r}\lambda_m(H)(D^m+\Delta(A^m)-A^mA^{m'})]C, \tag{3.61}$$

де матриці A(t), $D^m(t)$ і їх границі D^m, A при $t\to\infty$ визначені у наслідку 3.4.

Зазначимо, що у розглянутих прикладах функціонали задач мінімізації ризику в стаціонарному режимі задані в явному вигляді через параметри моделі. Для перехідного режиму додатково треба розв’язувати задачу обертання перетворень Лапласа.

ДОДАТОК

Елементи теорії марковського відновлення

Розглянемо основні теореми про асимптотичну поведінку розв'язку рівняння марковського відновлення, яке представляє собою систему лінійних інтегральних рівнянь

$$z_i(t) = f_i(t) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t dF_{ij}(u) z_j(t-u), \quad i = 1, \ldots, d, \tag{1}$$

де $z_i(t)$, $i = 1, \ldots, d$ – шукані, $f_i(t)$, $i = 1, \ldots, d$ – дані функції, і неспадні функції $F_{ij}(t)$ такі, що

$$\sum_{j=1}^{d} F_{ij}(\infty) = 1, \quad i = 1, \ldots, d, \quad \min_i \sum_{j=1}^{d} F_{ij}(0+) < 1.$$

До рівняння (1) приводить вивчення процесу марковського відновлення – однорідного ланцюга Маркова (χ_n, ζ_n), адитивного (однорід-ного) і монотонно зростаючого по другій компоненті; перша компонента приймає скінченне число значень $\{1, \ldots, d\}$. Адитивність по другій компоненті означає, що

$$P\{\chi_{n+1} = j, \zeta_{n+1} \le t \,|\, \chi_n = i, \zeta_n = s\} =$$
$$= P\{\chi_1 = j, \zeta_1 \le t - s \,|\, \chi_0 = i, \zeta_0 = 0\} = F_{ij}(t-s), \; 0 \le s \le t.$$

При цьому послідовність χ_n є однорідним ланцюгом Маркова з перехідними ймовірностями за один крок $F_{ij}(\infty)$.

Процес марковського відновлення (χ_n, ζ_n) допускає конструктивний опис через суми випадкових величин, умовно незалежних при фіксованій траєкторії ланцюга Маркова χ_n. Нехай для кожних $i, j = 1, \ldots, d$ випадкові величини $\tau_1(i, j), \tau_2(i, j), \ldots$ незалежні і мають спільну функцію розподілу $F_{ij}(t) = P\{\tau_n(i, j) \le t\}$. Тоді можна вважати $\zeta_n = \zeta_0 + \sum_{k=1}^{n} \tau_k(\chi_{k-1}, \chi_k)$.

Рівнянню (1) з $f_i(t)=F_{ij}(\infty)-F_{ij}(t+s)$ при кожних фіксованих $j=1,...,d$ та $s>0$ задовольняє ймовірність

$$z_i(t)=P\{\chi_{\nu_t+1}=j,\zeta_{\nu_t+1}\geq t+s|\chi_0=i,\zeta_0=0\},$$

де $\nu_t=\max\{n:\zeta_n\leq t\}$ – число «відновлень» на $[0,t]$. Рівняння (1) можна записати у векторній формі

$$z(t)=f(t)+\int_0^t dF(u)z(t-u),$$

де $z'(t)=(z_1(t),...,z_d(t))$, $f'(t)=(f_1(t),...,f_d(t))$, $F(u)=\left\|F_{ij}(u)\right\|_{i,j=1}^d$.

Якщо функції $f_i(t)$ локально обмежені, то рівняння (1) має єдиний локально обмежений розв'язок

$$z_i(t)=\sum_j\int_0^t dH_{ij}(u)f_j(t-u),$$

або у векторній формі

$$z(t)=\int_0^t dH(u)f(t-u),$$

де $\left\|H_{ij}(t)\right\|_{i,j=1}^d=H(t)=I+\sum_{n\geq 1}F^{n*}(t)$ – матричний аналог функції відновлення; $I=\left\|\delta_{ij}\right\|_{i,j=1}^d$ – одинична матриця;

$$F^{1*}(t)=F(t),\ F^{n+1*}(t)=\int_0^t F^{n*}(t-u)dF(u).$$

Вивчимо асимптотичну поведінку розв'язків рівнянь відновлення при умові нерозкладності матриці $F(\infty)$.

Якщо матриця $F(\infty)$ нерозкладна, то існує єдиний вектор $\pi=(\pi_1,...,\pi_d)$, такий, що $\sum_{j=1}^d\pi_j=1$ і $\pi_j=\sum_{i=1}^d\pi_i F_{ij}(\infty)$. Нерозкладність матриці $F(\infty)$ означає, що всі стани ланцюга Маркова χ_n сполучаються. При цьому вектор $\pi'=(\pi_1,...,\pi_d)$ являється вектором її стаціонарних ймовірностей.

Аналогом елементарної теореми відновлення з класичної теорії відновлення (одновимірний випадок) є такий результат.

Теорема 1. Якщо матриця $F(\infty)$ нерозкладна і

$$a = \sum_{i,j} \pi_i \int_0^\infty t dF_{ij}(t) < \infty, \text{ то } \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} H_{ij}(t) = \frac{\pi_j}{a}.$$

У подальшому нам буде необхідно наступне поняття для неспадних матричних функцій. Матриця F(t) називається гратчастою, якщо існує додатнє число δ і числа $c_1,...,c_d$, такі що всі точки зростання функцій $F_{ij}(t)$ зосереджені на зсунутих гратах $\{c_j - c_i + n\delta,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$. Найбільше таке δ (якщо воно існує) називається кроком гратчастої матриці F(t), а вектор $c = (c_1,...,c_d)$ – вектором зсуву. Якщо ні при яких δ і c_i приведена умова не може бути виконана, то матриця F(t) називається негратчастою.

Сформулюємо багатовимірний варіант теореми Блекуелла.

Теорема 2. Нехай матриця F(t) негратчаста, а матриця $F(\infty)$ нерозкладна. Тоді, якщо $a = \sum_{i,j} \pi_i \int_0^\infty t dF_{ij}(t) < \infty$, то

$$\lim_{t\to\infty} [H_{ij}(t+s) - H_{ij}(t)] = \frac{\pi_j s}{a}.$$

Асимптотична поведінка розв'язку системи (1) наведена в наступній теоремі.

Теорема 3. Нехай матриця F(t) негратчаста, а матриця $F(\infty)$ нерозкладна. Тоді, якщо $a = \sum_{i,j} \pi_i \int_0^\infty t dF_{ij}(t) < \infty$ і функції $f_i(t)$, $i = 1,...,d$ безпосередньо інтегровні по Риману на $[0, \infty]$, то

$$\lim_{t\to\infty} z_i(t) = \frac{1}{a} \sum_j \pi_j \int_0^\infty f_j(t) dt.$$

Для гратчастих матриць F(t) маємо такі результати.

Теорема 4. Нехай матриця F(t) гратчаста з кроком δ і вектором зсуву $(c_1,...,c_d)$. Тоді, якщо матриця $F(\infty)$ нерозкладна і $a=\sum_{i,j}\pi_i\int_0^\infty tdF_{ij}(t)<\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left[H_{ij}\left(c_j-c_i+n\delta+\delta\right)-H_{ij}\left(c_j-c_i+n\delta\right)\right]=\frac{\delta}{a}.$$

Теорема 5. Нехай матриця $F(\infty)$ нерозкладна, а матриця F(t) гратчаста з кроком δ і вектором зсуву $(c_1,...,c_d)$. Тоді, якщо $a=\sum_{i,j}\pi_i\int_0^\infty tdF_{ij}(t)<\infty$ і $\sum_n\left|f_i(n\delta-c_i)\right|<\infty$, $i=1,...,d$, то

$$\lim_{n\to\infty}z_i(n\delta-c_i)=\frac{1}{a}\sum_j\pi_j\sum_n f_j(n\delta-c_j).$$

Оскільки координати вектора зсуву визначені з точністю до загальної адитивної добавки, то згідно теоремам 3, 5 наведене вище визначення негратчастості матриці F(t) є точним аналогом поняття негратчастої функції розподілу. Дійсно, якщо замінити в умовах теореми 5 c_i на c_i+s, то отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}z_i(n\delta+c_i+s)=\frac{1}{a}\sum_j\pi_j\sum_n f_j(n\delta+c_j+s).$$

Отже, границя $z_i(t)$ при $t\to\infty$ не може існувати, якщо множина значень функції $f_j(t)$ настільки численна, що зміною s можна змінити праву частину останньої рівності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Massey W.A. and Whitt W. Networks of infinite-server queues with nonstationary Poisson input / Queueing systems. – 1993. – N 13. – P. 183-250.
2. Massey W.A. and Whitt W. A stochastic model to capture space and time dynamics in wireless communication systems // Probability in the Engineering and Information Sciences. – 1994. – Vol. 8. – P. 541-569.
3. Кулюкина Л.А. Статистическое исследование вероятностного распределения параметров трековой ионизации // Объедин. Институт ядер. исследов., Дубна, – 1976. – Препринт P5-11143.
4. Двуреченский А., Кулюкина Л., Осоков Г. Оценки трековой ионизации в трековых камерах // Объедин. Институт ядер. исследов., Дубна, – 1981. – Препринт 5-81-362
5. Matis J., Wehrly T.E. Generalized stochastic compartmental models with Erlang transit times // Journal Pharmacokin. Bioharm. – 1990. – Vol. 18. – P. 589-607.
6. Abate J., Whitt W. Numerical inversion of Laplace transforms of probability distributions // ORSA Journal Computing. – 1995. – Vol. 7. – P. 36-43.
7. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. – К.: Наукова думка, 1976. – 184 с.
8. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М. Случайные процессы: Справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 368 с.
9. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. – 436 с.
10. Лебєдєв Є.О. Стаціонарний режим та біномні моменти для мереж типу $[SM\,|\,GI\,|\,\infty]^r$ // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 10. – С. 1371-1380.
11. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, 1967. – 460 с.

12. Вітлінський В.В., Верченко П.І. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком. – К.: КНЕУ, 2000. – 292 с.
13. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. – К.: Либідь, 1990. – 168 с.
14. Лебєдєв Є.О. Одна гранична теорема для стохастичних мереж та її застосування // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002. – Вип. 68. – С. 86-97.
15. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
16. Анисимов В.В. Предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным множеством состояний // ДАН СССР. – 1970. – Т.193, № 3. – С. 503-505.
17. Сильвестров Д.С. Предельные теоремы для функционалов от процессов ступенчатых сумм случайных величин, определенных на полумарковском процессе с конечным множеством состояний // ДАН СССР. – 1970. – Т. 195, № 5. – С. 1036-1038.

ЗМІСТ