КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Ф.Г.ГАРАЩЕНКО
В.В.ПІЧКУР

ВСТУП ДО АНАЛІЗУ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ СТРУКТУРНО ЗАДАНИХ СИСТЕМ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник*

КИЇВСЬКИЙ ВПЦ УНІВЕРСИТЕТ
2003

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук М.Ф.Кириченко,
д-р фіз.-мат. наук І.М.Ляшенко

Рекомендовано до друку вченою радою факультету кібернетики (протокол № 2 від 30 вересня 2002 року)

Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В.

Г20 Вступ до аналізу та оптимізації структурно заданих систем : Навч. посіб. для студентів факультету кібернетики. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2003. – 113 с.

ISBN 966-594-363-4

Написано на основі лекційного курсу, що читається студентам факультету кібернетики, які спеціалізуються у галузі моделювання складних систем. У ньому висвітлено основні напрямки і досягнення сучасних методів аналізу та оптимізації структурно заданих систем.

Розглянуто властивості неперервних багатозначних відображень і абсолютно неперервних функцій, основні відомості аналізу диференціальних включень. Приведено важливі результати теорії диференціальних рівнянь з розривною правою частиною та імпульсним впливом. Значна увага приділяється проблемам оптимізації динамічних структурно заданих систем.

Розраховано на студентів університетів і технічних вищих навчальних закладів з поглибленою математичною підготовкою. Він буде корисний також аспірантам і науковим працівникам.

УДК 517.925.51; 517. 977.5
ББК 22.161.6 Я 73

ISBN 966-594-363-4

ЛЕКЦІЯ 1
ВСТУП ТА ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Проблеми аналізу структурованих явищ виникають у будь-якій науковій галузі. Це пов'язано з багатьма факторами, зокрема, з природою мислення людини взагалі. Під структурою розуміють об'єкт чи явище, у якому спостерігаються усталені закономірності. Структуровані явища мають місце в біології (структура живої клітки, структура тварин, структура людини), в мовних процесах (структура мови, структура речення, структура слова), у фізиці (структура ядра, структура кристалічної решітки) та в інших науках.

Питання дослідження структурованих процесів піднімались у різні періоди розвитку математичної науки. У зв'язку з прикладним значенням ця проблематика в останні 30-40 років набула особливої гостроти в теорії динамічних систем. Так, на етапі проектування складних технічних систем для спрощення процесу виготовлення в системі виділяються структуровані підсистеми і дана система розглядається у вибраній структурі. Таким шляхом розвиваються сучасні галузі електроніки, приладо- та машинобудування тощо. Класичні підходи аналізу та оптимізації структурованих систем, як правило, не працюють. Вже на етапі побудови математичної моделі для структурованих систем виникають проблеми розривності правих частин та розв'язків динамічних процесів. Для таких математичних об'єктів навіть ввести поняття розв'язку є проблемою.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \tag{1}$$

де x – n - вимірний вектор фазових координат, $f = (f_1,\dots,f_n)^T$ – n - вимірна вектор-функція. Якщо $f(x,t)$ є неперервною, то, як відомо, розв'язком системи (1) є диференційована функція $x(t)$, яка при підстановці в (1) перетворює цю систему на тотожність. У структурованих системах, як правило, $f(x,t)$ – розривна функція. У такому випадку приведене означення не підходить, так як у точках розриву не може бути тотожності для (1).

Приклад 1. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{sign}(t).$$

Якщо $t<0$ то рівняння має вигляд $\frac{dx}{dt} = -1$ і $x = -t + C_1$. При $t>0$ отримуємо $\frac{dx}{dt} = 1$ і $x = t + C_2$. У точці $t=0$ маємо

$$x(0) = \lim_{t\to -0}(-t + C_1) = \lim_{t\to +0}(t + C_2).$$

Таким чином $x(0) = C_1 = C_2 = C$. Звідси отримуємо розв'язок $x(t) = |t| + C$. Для нього при $t = 0$ не існує $\frac{dx(t)}{dt}$.

Приклад 2. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 2\operatorname{sign}(x).$$

При $x < 0$ рівняння має вигляд $\frac{dx}{dt} = 3$. Для цього випадку $x(t) = 3t + C_1$. Якщо $x > 0$, то $\frac{dx}{dt} = -1$ і отримуємо $x(t) = -t + C_2$. На рис. 1 побудовано розширений фазовий простір для такого рівняння. Проаналізуємо його. Зафіксуємо довільну ненульову точку фазового простору. При зростанні t відповідний розв'язок доходить до прямої $x = 0$. Далі поле не дозволяє зійти з прямої $x = 0$. Але при $x = 0$ виконується $\frac{dx}{dt} = 0$, а права частина цього рівняння $1 - 2\operatorname{sign}(0) = 1 \neq 0$. Тобто, функція $x(t) = 0$ не задовольняє рівняння у звичайному розумінні, хоча є розв'язком цього рівняння в деякому сенсі. Рух по прямій $x = 0$ є прикладом так званого *ковзного руху* і є специфічним типом розв'язків. Отже, для вказаного рівняння потрібно розширити поняття розв'язку. Це робиться за допомогою процедури доозначення розв'язку, яка полягає у зведенні диференціального рівняння до *диференціального включення*. Це означає, що на поверхні розриву (у даному випадку це є вісь t) при підході зверху та знизу розглядається множина можливих напрямків руху, які є дотичними до інтегральних кривих в околі поверхні розриву. Кожному з цих напрямків відповідає своя права частина. Так отримуємо множину правих частин. Цій множині належить похідна розв'язку і рівняння перетворюється у диференціальне включення. Диференціальні включення відрізняються від диференціальних рівнянь тим, що права частина рівняння перетворюється певним способом на множину, а знак рівності замінюється на знак належності. І тоді під розв'язком диференціального рівняння розуміють розв'язок спеціально побудованого диференціального включення.

Проблеми структуризації динамічної системи є актуальними при аналізі керованих процесів. Так, цілий ряд технічних об'єктів наперед будують таким чином, що функція керування може приймати дискретну множину значень (*N-позиційні керування, релейні керування*).

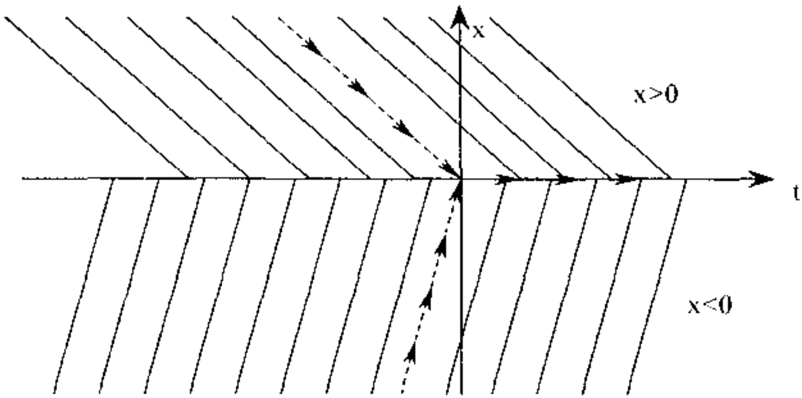

Рис. 1.

До таких пристроїв можна віднести окремі типи систем керування літальними апаратами, комп'ютерні системи, гідравлічні пристрої, системи фокусування та інші. На рис. 2 зображено графік скалярної функції, множиною значень якої є $\{0,1\}$. Точка τ називається *точкою переключення*.

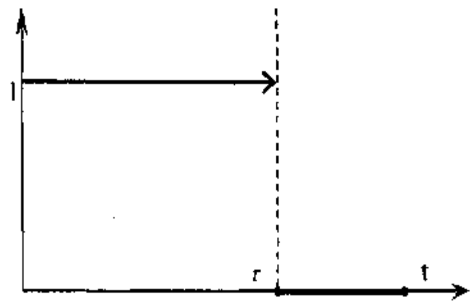

Рис. 2.

В окремих випадках динамічні системи з структурованим керуванням можна звести до *систем з імпульсним впливом*.

Приклад 3. Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \sin(t) + \frac{du}{dt},$$

де $u(t)$ – функція керування, що вибрана у структурній формі

$$u(t) = \begin{cases} \cos(t), & t \in (-\infty, \tau) \\ 0, & t \in (\tau, +\infty). \end{cases}$$

Поза околом точки $t=\tau$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sin(t) - \sin(t) = 0, & t \in (-\infty, \tau), \\ \quad \dfrac{dx}{dt} = \sin(t), & t \in (\tau, +\infty). \end{cases} \tag{2}$$

Розв'язавши (2), отримаємо (рис.3)

$$\begin{cases} \quad x(t) = C, & t \in (-\infty, \tau), \\ x(t) = -\cos(t) + C, & t \in (\tau, +\infty). \end{cases}$$

В околі точки $t=\tau$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\frac{dx}{dt}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\frac{du}{dt}dt + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon}\sin(t)dt\,.$$

Звідси

$$x(\tau+0) - x(\tau-0) = u(\tau+0) - u(\tau-0) + \sin(\tau) - \sin(\tau)$$

і остаточно

$$x(\tau+0) = x(\tau-0) - \cos(\tau)\,. \tag{3}$$

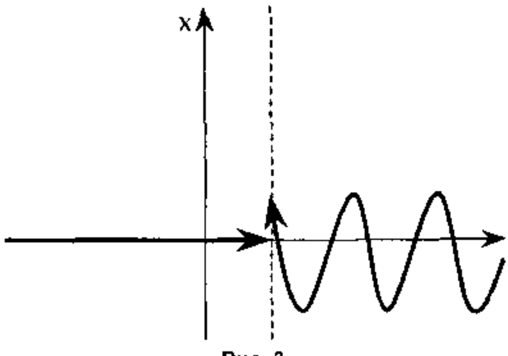

Рис. 3.

Диференціальне рівняння (2) з умовою (3) належить до класу *диференціальних рівнянь з імпульсним впливом*. Разом з тим, це є рівняння, яке допускає *зміну структури*, тобто, одночасно з співвідношеннями (2), (3) досліджується система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sin(t), & t \in (-\infty, \tau), \\ \quad \dfrac{dx}{dt} = 0, & t \in (\tau, +\infty) \end{cases}$$

при умові

$$x(\tau+0) = x(\tau-0) + \cos(\tau)\,.$$

За останні два десятиліття у теорії динамічних систем актуалізувалась проблематика, пов'язана з утворенням та втратою структур. Виявилося, що властивість виникнення структури є спільним для різних природних явищ, процесів суспільного життя. Дослідження, що аналізують закономірності виникнення структурних форм складають базис науки, що має загадкову назву *"синергетика"*. Основою цих досліджень є параметрична теорія стійкості і, як наслідок, метод фазового простору. Структура у даному контексті розуміється як стійкий у певному сенсі процес, що не змінює фазової картини стійкості у відповідному околі параметрів. При зміні параметрів може відбутися зміна структури, якщо в околі особливої точки змінюється фазовий портрет. Явище суттєвої залежності розв'язків системи від початкових данних називається *детермінованим хаосом*. Виявляється, що хаотичні явища є дуже поширеними у динамічних моделях і характеризують ступінь їх недосконалості. Вони вказують на те, що умови, в яких відбувається реальний процес, можуть бути у кожному випадку унікальними і не можуть бути враховані стандартними методами. Якщо зміна параметру приводить до втрати єдності розв'язку (явище біфуркації), то говорять про *катастрофу*.

Область досліджень, що відповідає матеріалу даного курсу, в наш час інтенсивно розвивається. Значна кількість публікацій присвячена проблемам аналізу динамічних систем з розривною правою частиною, імпульсним впливом та їх оптимізації [1-3]. Розвиваються методи аналізу ковзних режимів в системах керування з заданою структурою [4,5]. Важливе місце в цій галузі займають проблеми виникнення особливих режимів в задачах оптимального керування [6-9]. Суттєве теоретичне та прикладне значення мають результати в галузі аналізу і оптимізації систем в заданій структурі, пов'язані з вибором оптимальної структури в динамічних системах [10-13]. Велика кількість досліджень проводиться в зв'язку з проблемами синергетики, виникненням катастроф та хаосу [14-18].

Література

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М., 1985.

2. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К., 1987.

3. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. – Новосибирск:, 1987.

4. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. – М., 1976.

5. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. – М., 1974.

6. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. – М., 1977.

7. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М., 1979.

8. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М., 1973.
9. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. – Тбилиси., 1977.
10. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К., 1985.
11. Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. – К., 1978.
12. Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс-Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – К., 1984.
13. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. – К., 2000.
14. Арнольд В.И. Теория катастроф. – М., 1990.
15. Ахромеева Г.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. – М., 1992.
16. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. – М., 1999.
17. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. – М., 1990.
18. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. – М., 2000.

РОЗДІЛ 1. ДОДАТКОВІ ВІДОМОСТІ АНАЛІЗУ

ЛЕКЦІЯ 2
НЕПЕРЕРВНІ БАГАТОЗНАЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

1. *Окіл, модуль і сума множин.* Для точок a та b з простору R^n евклідова метрика задається наступним чином

$$\rho(a,b) = \|a-b\|,$$

де $\|a\| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $a = (a_1 a_2 \ldots a_n)^T$. За допомогою евклідової метрики для будь-якої точки $a \in R^n$ і множини $A \subset R^n$ можна ввести відстань між точкою і множиною (рис.1)

$$\rho(a,A) = \inf_{x \in A} \rho(a,x).$$

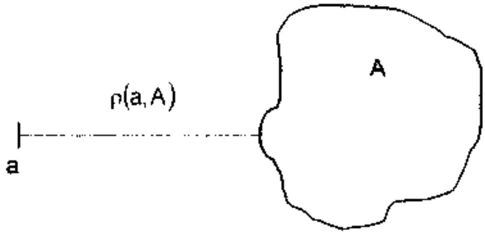

Рис. 1.

Позначимо $K_\varepsilon(a) = \{x \in R^n : \rho(a,x) \le \varepsilon\}$, $\operatorname{int} A$ – множина внутрішніх точок множини A, ∂A – границя множини A.

Означення. *Модулем* множини $A \subset R^n$ називається число

$$|A| = \sup_{a \in A} \|a\|.$$

Його геометричний зміст є наступним (рис.2): $|A|$ дорівнює радіусу найменшої кулі з центром у точці 0, яка містить множину A. Це випливає з співвідношення

$$|A| = \sup_{a \in A} \|a\| = \inf\{\varepsilon \ge 0 : \|a\| \le \varepsilon,\ a \in A\} = \inf\{\varepsilon \ge 0 : A \subseteq K_\varepsilon(0)\}.$$

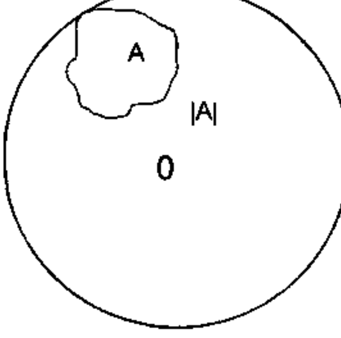

Рис. 2.

Означення. *Алгебраїчною сумою* (або просто сумою) множин $A \subset R^n$ і $B \subset R^n$ називається множина

$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Добутком множини $A \subset R^n$ на скаляр $\lambda \in R^1$ називається множина

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Лема 1. Якщо множини $A \subset R^n$ і $B \subset R^n$ є непорожніми компактами, то їх алгебраїчна сума є непорожнім компактом.

Доведення. Нехай $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. Тоді існують $a \in A$, $b \in B$, $a + b \in A + B$ і тому $A + B \neq \varnothing$. Покажемо, що $A + B$ є компактом. Виберемо $\{x_k\} \subset A + B$, $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x$. Доведемо, що $x \in A + B$. За означенням суми $x_k = a_k + b_k$, $a_k \in A$, $b_k \in B$, $k = 1,2,\ldots$ Виберемо такі підпослідовності $\{a_m\}_{m \in M} \subseteq \{a_k\}$, $\{b_p\}_{p \in P} \subseteq \{b_k\}$, що $\lim\limits_{m \in M} a_m = a$, $\lim\limits_{p \in P} b_p = b$, $a \in A$, $b \in B$. Тут M і P – нескінченні підмножини множини натуральних чисел. Тоді $x = \lim\limits_{k \in M \cap P} x_k = \lim\limits_{k \in M \cap P} (a_k + b_k) = a + b \in A + B$. Це доводить замкненість $A + B$. Покажемо обмеженість $A + B$. Виконуються включення

$$A \subseteq K_\varepsilon(0), \; B \subseteq K_\delta(0),$$

де $\varepsilon = |A|$, $\delta = |B|$. Виберемо довільне $x \in A + B$, $x = a + b$, $a \in A$, $b \in B$. Таким чином, $\|a\| \leq \varepsilon$, $\|b\| \leq \delta$ і $\|x\| = \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \leq \varepsilon + \delta$. Звідси $A + B \subseteq K_{\varepsilon + \delta}(0)$. Лему доведено.

Приклад. Покажемо, що

$K_\varepsilon(a) + K_\delta(b) = K_{\varepsilon + \delta}(a + b)$.

$(\Rightarrow)$ Виберемо довільне $x \in K_\varepsilon(a) + K_\delta(b)$. Це означає, що $x = y + z$, де $\|y - a\| \le \varepsilon$, $\|z - b\| \le \delta$. Тоді $\|x - (a + b)\| \le \|y - a\| + \|z - b\| \le \varepsilon + \delta$. Отже, $x \in K_{\varepsilon+\delta}(a + b)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \in K_{\varepsilon+\delta}(a + b)$. Побудуємо точки $y \in K_\varepsilon(a)$, $z \in K_\delta(b)$ такі, що $y + z = x$. Зафіксуємо

$$\lambda = \|x - (a + b)\| \le \varepsilon + \delta.$$

Якщо $\lambda = 0$, то $x = a + b \in K_\varepsilon(a) + K_\delta(b)$. Нехай $\lambda \ne 0$. Тоді існують такі $\xi \in (0, \varepsilon]$, $\eta \in (0, \delta]$, що $\xi + \eta = \lambda$. Візьмемо

$$y = a + \frac{\xi}{\lambda}\left[x - (a + b)\right],\ z = b + \frac{\eta}{\lambda}\left[x - (a + b)\right].$$

Отримаємо

$$y + z = a + b + \frac{\xi + \eta}{\lambda}\left[x - (a + b)\right] = x,$$

причому $\|y - a\| = \frac{\xi}{\lambda}\|x - (a + b)\| = \xi \le \varepsilon$, $\|z - b\| = \frac{\eta}{\lambda}\|x - (a + b)\| = \eta \le \delta$. Отже, $y \in K_\varepsilon(a)$, $z \in K_\delta(b)$ і $x = y + z \in K_\varepsilon(a) + K_\delta(b)$.

Задача 1. Довести, якщо A є компакт в R^n, то λA є компакт, $\lambda \in R^1$.

Задача 2. Знайти множину $\lambda K_\varepsilon(a)$.

Задача 3. Чи завжди $A + A = 2A$, $A \subset R^n$?

Означення. ε – *околом* (або розширенням радіусу ε) множини $A \subset R^n$ називається множина

$$A^\varepsilon = \{x \in R^n : \rho(x, A) \le \varepsilon\}.$$

Зауважимо, що $A^\varepsilon = \bigcup_{x \in A} K_\varepsilon(x)$ і $A^\varepsilon = A$ при $\varepsilon = 0$.

Лема 2. Якщо $A \subset R^n$ є компакт, то $A^\varepsilon = A + K_\varepsilon(0)$.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $a \in A^\varepsilon$. Тоді $\min_{x \in A} \rho(a, x) \le \varepsilon$. У силу теореми Вейєрштрасса, знайдеться $y \in A$, таке, що $\|y - a\| \le \varepsilon$. Отже, $a - y \in K_\varepsilon(0)$ і тому $a \in A + K_\varepsilon(0)$.

$(\Leftarrow)$ Візьмемо довільне $x \in A + K_\varepsilon(0)$. Тоді $x = a + z$, де $a \in A$, $\|z\| \le \varepsilon$. Звідси $\|x - a\| \le \varepsilon$, тобто, $\rho(x, A) \le \varepsilon$. Отже, $x \in A^\varepsilon$. Лему доведено.

Задача 4. Нехай $A = \{(x, y) : (x-2)^2 + 2(y+1)^2 \le 1\}$. Побудувати розширення множини A радіусу $\varepsilon = 3$.

2. *Метрика Хаусдорфа та її геометричний зміст.* Над системою множин можна ввести метрику. Так, від множини $B \subset R^n$ до множини $A \subset R^n$ вводиться відстань (β*-метрика*)

$$\beta(B, A) = \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| = \sup_{b \in B} \rho(b, A).$$

За допомогою β-метрики визначається α-метрика

$$\alpha(B, A) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\},$$

яку ще називають *метрикою Хаусдорфа*.

Задача 5. Показати, що на системі компактів виконуються для метрики Хаусдорфа аксіоми метрики.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. Нехай $A \subset R^n$ і $B \subset R^n$ є непорожніми компактами, $\varepsilon > 0$. Нерівність $\beta(A, B) \le \varepsilon$ виконується тоді і тільки тоді, коли $A \subseteq B^\varepsilon$.

Зауваження. Включення $A \subseteq B^\varepsilon$ за лемою 2 еквівалентне умові $A \subseteq B + K_\varepsilon(0)$.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $\beta(A, B) \le \varepsilon$. Тоді

$$\max_{a \in A} \rho(a, B) \le \varepsilon. \tag{1}$$

З (1) випливає, що для довільного $a \in A$ виконується $\rho(a, B) \le \varepsilon$. Звідси $a \in B^\varepsilon$ і тому $A \subseteq B^\varepsilon$.

$(\Leftarrow)$ Якщо $A \subseteq B^\varepsilon$, то для кожної точки $a \in A$ існує $b \in B$, таке, що $\rho(a, b) \le \varepsilon$. Це означає, що виконується нерівність (1). Теорему доведено.

Наслідок. Якщо множини A і B є непорожніми компактами в R^n, $\varepsilon > 0$, то для того, щоб $\alpha(A, B) \le \varepsilon$ необхідно і достатньо, щоб

$$A \subseteq B^\varepsilon \text{ та } B \subseteq A^\varepsilon.$$

Теорема 2. Нехай $A \subset R^n$, $B \subset R^n$ – компакти. Має місце рівність

$$\beta(A, B) = \min\{\varepsilon \ge 0 : A \subseteq B^\varepsilon\}. \tag{2}$$

Доведення. Нехай $\beta(A, B) = \delta$. Якщо $\delta = 0$, то для всіх $a \in A$ існує $b \in B$, для яких $\rho(a, b) = 0$. Це означає, що $A \subseteq B$, тобто, (2) справджується. Нехай $\delta > 0$. За лемою 2 $A \subseteq B^\delta$. Згідно означення β-метрики

$$\max_{a \in A} \rho(a, B) = \delta.$$

За теоремою Вейєрштрасса існує $u \in A$, для якого $\rho(u,B) = \delta$. Тобто, $u \in \partial B^{\delta}$. Оскільки

$$B^{\sigma} \subset \operatorname{int} B^{\delta}$$

для $\sigma \in (0,\delta)$, то $u \notin B^{\sigma}$, $\sigma \in (0,\delta)$. Тобто, $\delta = \min\{\varepsilon > 0 : A \subseteq B^{\varepsilon}\}$.

Теорему доведено.

Аналогічно доводиться наступне твердження.

Теорема 3. Якщо $A \subset R^n$, $B \subset R^n$ – компакти, то

$$\alpha(A,B) = \min\{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B^{\varepsilon}, B \subseteq A^{\varepsilon}\}.$$

Приклад. Нехай $A = K_2(0) \subset R^2$, $B = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{16} + y^2 \leq 1\right\}$. Знайдемо відстань Хаусдорфа $\alpha(A,B)$.

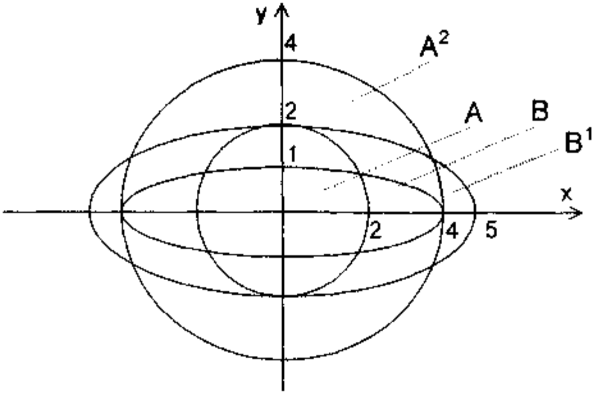

Рис. 3.

Легко бачити (рис. 3), що $B \subseteq A^{\varepsilon}$, $A \subseteq B^{\delta}$ при $\varepsilon \geq 2$, $\delta \geq 1$. Таким чином, з теорем 2 та 3 випливає $\beta(A,B) = 1$, $\beta(B,A) = 2$ і $\alpha(A,B) = 2$.

Задача 6. Знайти $\beta(A,B)$, $\beta(B,A)$ та $\alpha(A,B)$ для наступних множин A, B з R^2:

а) $A = K_2(0)$, $B = K_4(0)$;

б) $A = \{(x,x) : x \in [-1,1]\}$, $B = \{(x,0) : x \in [-1,1]\}$;

в) $A = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{4} + 4y^2 \leq 1\right\}$, $B = \left\{(x,y) : 4(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$.

3. Багатозначні відображення.

Означення. Нехай кожній точці $p \in D \subset R^m$ поставлена у відповідність непорожня замкнена множина $F(p) \subset R^n$. Тоді відображення F називається *багатозначним відображенням (багатозначною функцією)*. У випадку $m = 1$ (тобто, $D \subset R^1$) багатозначна функція називається *точково-багатозначною*. Відображення F називається *опуклозначним*, якщо для довільної точки $p \in D$ множина $F(p)$ є опуклою. Якщо множина $F(p)$ є компактом, $p \in D$, то багатозначне відображення F називається *компактозначним*.

Наведемо приклади багатозначних відображень.

1) Відображення $F(p) = K_p(0) \subset R^n$, $p \in [1,2]$ є багатозначним, опуклозначним та компактозначним.

2) Якщо $\varphi(p)$ є опукла функція, $p \in R^n$, $\partial\varphi(p)$ – її субдиференціал, то $F(p) = \partial\varphi(p)$ є багатозначним, опуклозначним та компактозначним відображенням. Якщо функція $\varphi(p)$ є диференційованою то відображення стає однозначним.

Позначимо $F(M) = \bigcup\limits_{p \in M} F(p)$ – *образ* множини *M*. Наведемо деякі елементарні властивості багатозначних відображень.

Якщо $A \subset D$, $B \subset D$, то

1) $F(A \cup B) = F(A) \cup F(B)$; 2) $F(A \cap B) \subseteq F(A) \cap F(B)$; 3) $F(D/A) \supseteq F(D) \cap F(A)$;

4) якщо $A \subset B$, то $F(A) \subseteq F(B)$.

Будемо говорити, що багатозначне відображення F є *власним*, якщо знайдеться $p \in D$, таке, що $F(p) \neq \varnothing$. Множину

$$\mathrm{Dom}(F) = \{p \in D : F(p) \neq \varnothing\}$$

називають *ефективною множиною* відображення F. Якщо $\mathrm{Dom}(F) = D$, то відображення F називається *строгим*.

Приклад. Нехай матриця *A* розмірності $n \times n$ є виродженою. Тоді

$F(p) = A^{-1}p = \{x \in R^n : Ax = p\}$, $p \in R^n$

є багатозначним відображенням. З теореми Кронекера-Капеллі випливає, що таке відображення є власним, але не строгим.

Нижче будемо розглядати лише строгі багатозначні відображення.

4. Неперервність багатозначних відображень. Як і в теорії функцій, фундаментальну роль в теорії багатозначних відображень відіграє поняття неперервності. Є два основних види неперервності багатозначних відображень: напівнеперервність зверху та неперервність за Хаусдорфом. Вони вводяться за допомогою β- та α-метрики.

Означення. Багатозначна функція F називається *β-неперервною (напівнеперервною зверху)* у точці p, якщо

$\beta(F(q),F(p)) \to 0$ при $q \to p$.

Якщо

$\alpha(F(q),F(p)) \to 0$, $q \to p$,

то F називається *α-неперервною (неперервною за Хаусдорфом)* у точці p. Функція F називається *α-неперервною (β-неперервною) на множині* D, якщо вона є α-неперервною (β-неперервною) у кожній точці множини D. Так як $\beta(A,B) \le \alpha(A,B)$, то з α-неперервності випливає β-неперервність для багатозначних відображень.

Приклад. Покажемо, що відображення

$F : p \mapsto K_r(p)$, $p \in R^m$, $r > 0$

є β- та α-неперервним.

Зафіксуємо $p \in R^m$. Побудуємо послідовність $p_k \to p$, $k \to \infty$. Розглянемо $\beta(F(p_k),F(p)) = \max\limits_{a \in K_r(p_k)} \min\limits_{b \in K_r(p)} \|a-b\|$. Нехай $\varepsilon_k = \|p_k - p\|$, $k = 1,2,\ldots$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $\varepsilon_k < r$, $k = 1,2,\ldots$, так як $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Виберемо довільне $a_k \in F(p_k)$, $k = 1,2,\ldots$. Розглянемо два випадки. Перший: якщо $a_k \in F(p)$, то $\rho(a_k, K_r(p)) = 0$. Нехай $a_k \notin F(p)$, $k = 1,2,\ldots$. Проведемо пряму, що задається множиною точок (рис. 4)

$$z = \lambda p + (1-\lambda)a_k, \ \lambda \in [0,1]. \tag{3}$$

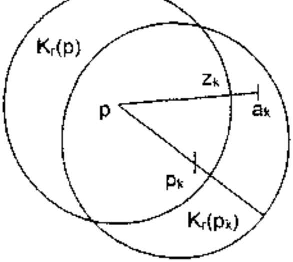

Рис. 4.

Знайдемо $\lambda = \lambda_k$ і відповідне йому $z = z_k$, такі, що $\|z_k - p\| = r$. Отримаємо

$$r = \|z_k - p\| = \|\lambda_k p + (1-\lambda_k)a_k - p\| = (1-\lambda_k)\|p - a_k\|.$$

Таким чином,

$$\lambda_k = 1 - \frac{r}{\|p - a_k\|}. \qquad (4)$$

Так як $r < \|p - a_k\| \le \|p - p_k\| + \|p_k - a_k\| \le \varepsilon_k + r$, то $\lim\limits_{k\to\infty}\|p - a_k\| = r$. З (4) випливає, що $\lambda_k \to 0$, $k \to \infty$. Враховуючи (3), маємо

$\|z_k - a_k\| = \lambda_k\|p - a_k\| \le \lambda_k(\varepsilon_k + r)$.

Отже, $\lim\limits_{k\to\infty}\|z_k - a_k\| = 0$. Так як $\min\limits_{b\in K_r(p)}\|a_k - b\| \le \|z_k - a_k\|$, то $\rho(a_k, K_r(p)) \to 0$, $k = 1,2,\ldots$. Це доводить β-неперервність даного відображення. Далі, за теоремою 2 та лемою 2 (рис. 4)

$\beta(F(p), F(p_k)) = \min\{\varepsilon \ge 0 : K_r(p) \subseteq (K_r(p_k))^{\varepsilon}\} =$

$\min\{\varepsilon \ge 0 : K_r(p) \subseteq K_r(p_k) + K_{\varepsilon}(0)\} = \|p - p_k\| = \varepsilon_k$.

Таким чином, $\beta(F(p), F(p_k)) \to 0$, $k \to \infty$. Звідси випливає α-неперервність відображення F.

Задача 7. Показати β- та α-неперервність наступних відображень:

а) $F : p \mapsto K_p(0)$, $p \ge 0$;

б) $F : p \mapsto \{x \in R^n : x^T B x \le p\}$, $p \ge 0$.

Тут B – додатновизначена симетрична матриця розмірності $n \times n$.

Задача 8. Довести, що на відрізку $[0,2]$ багатозначне відображення

$$F(t) = \begin{cases} K_1(0),\ t \in [0,1) \\ K_1(0) \cup K_2(0),\ t = 1; \\ K_2(0),\ t \in (1,2] \end{cases}$$

є напівнеперервним зверху, але не є неперервним за Хаусдорфом.

Література

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М., 1985.
2. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. – М., 1988.
3. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. – К., 2000.
4. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. – М., 2001.

ЛЕКЦІЯ 3
ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ БАГАТОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

1. *Топологічне означення неперервності багатозначних відображень.* Можна визначати поняття неперервності багатозначного відображення не прив'язуючись до евклідової метрики, а виходячи з топології простору. Нехай $p \in D \subset R^m$, $F(p) \subset R^n$.

Означення. Багатозначне відображення F називається *напівнеперервним зверху* в точці $p \in D$, якщо для будь-якого околу $U(F(p))$ множини $F(p)$ існує окіл $V(p)$ точки $p \in D$, такий, що

$$F(g) \subseteq U(F(p)) \text{ для всіх } g \in V(p). \tag{1}$$

Співвідношення (1) еквівалентне включенню

$$F(V(p)) \subseteq U(F(p)).$$

Припустимо, що топологія генерується за допомогою евклідової метрики ρ. Для цього у просторах R^m і R^n вводиться система відкритих куль

$$S_\varepsilon(a) = \{x \in R^n : \rho(a,x) < \varepsilon\},\ S_\varepsilon(b) = \{x \in R^m : \rho(b,x) < \varepsilon\},\ a \in R^m,\ b \in R^n.$$

Зауважимо, що в просторі R^k евклідова метрика

$$\rho(y,z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(y_i - z_i)^2} = \|y - z\|,\ y = (y_1\, y_2 \ldots y_k)^T,\ z = (z_1\, z_2 \ldots z_k)^T.$$

Нехай F є *компактозначним* відображенням. Тоді означення (1) можна записати наступним чином: для будь-якого $\xi > 0$ існує $\delta = \delta(\xi) > 0$, таке, що

$$F(g) \subseteq S_\xi(F(p)) = \{x \in S_\xi(y) : y \in F(p)\}$$

як тільки $g \in S_\delta(p)$. Виберемо $\varepsilon > \xi > 0$. Тоді $F(g) \subseteq S_\xi(F(p)) \subset (F(p))^\varepsilon$. За теоремою 1 лекції 2 $\beta(F(g), F(p)) \le \varepsilon$ при $\|g - p\| < \delta$. Таким чином, отримали означення β-неперервності. І навпаки, з β-неперервності для будь-якого $\xi > 0$ існує $\delta = \delta(\xi) > 0$, таке, що $F(g) \subseteq (F(p))^\xi$ при $\|g - p\| < \delta$. Тоді беремо $\varepsilon > \xi > 0$ і має місце

$$F(g) \subseteq (F(p))^\xi \subset S_\varepsilon(F(p))$$

при $g \in S_\delta(p)$. Таким чином, означення (1) та означення β-неперервності для даного випадку є еквівалентними.

Означення. Багатозначне відображення F називається *напівнеперервним знизу* в точці $p \in D$, якщо для будь-якого $z \in F(p)$ і довільного околу $U(z)$ точки z існує окіл $V(p)$ точки $p \in D$, такий, що

$$F(g) \cap U(z) \neq \varnothing \text{ для всіх } g \in V(p). \tag{2}$$

Багатозначне відображення F називається *неперервним* у точці $p \in D$, якщо воно є напівнеперервним зверху та знизу у цій точці.

Покажемо, що якщо окіл точки вводиться за допомогою евклідової метрики ρ і F є *компактозначним* відображенням, то таке означення неперервності еквівалентне означенню неперервності за Хаусдорфом. Нехай для будь-якого $\xi > 0$ існує $\delta = \delta(\xi) > 0$, таке, що $\beta(F(p), F(g)) \leq \xi$ при $\|g - p\| < \delta$. За теоремою 1 лекції 2 при $g \in S_\delta(p)$ виконується $F(p) \subseteq (F(g))^\xi$. Виберемо $\varepsilon > \xi > 0$. Тоді $F(p) \subseteq (F(g))^\xi \subset S_\varepsilon(F(g))$ при $g \in S_\delta(p)$. Візьмемо довільне $z \in F(p)$. Тоді $z \in S_\varepsilon(F(g))$ і $S_\varepsilon(z) \cap F(g) \neq \varnothing$, $g \in S_\delta(p)$. Вибравши $U(z) = S_\varepsilon(z)$, $V(p) = S_\delta(p)$, отримуємо (2). І навпаки, з означення (2) при $U(z) = S_\xi(z)$, $V(p) = S_\delta(p)$ випливає, що для будь-якого $\xi > 0$ існує $\delta = \delta(\xi) > 0$, таке, що $S_\xi(z) \cap F(g) \neq \varnothing$, $g \in S_\delta(p)$, де $z \in F(p)$. При $\varepsilon > \xi > 0$ виконується $K_\varepsilon(z) \cap F(g) \neq \varnothing$. Це означає, що $F(p) \subseteq (F(g))^\varepsilon$, $g \in S_\delta(p)$. За теоремою 1 лекції 2 має місце $\beta(F(p), F(g)) \leq \xi$ при $\|g - p\| < \delta$. А еквівалентність неперервності зверху до β-неперервності ми показали вище.

Неперервність знизу компактозначного відображення F у точці p еквівалентна тому, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $F(p) \subseteq (F(q))^\varepsilon$ при умові $\|p - q\| \leq \delta$.

Означення. Якщо багатозначне відображення F є *неперервним (напівнеперервним зверху, напівнеперервним знизу)* у кожній точці множини D, то таке відображення називається неперервним (напівнеперервним зверху, напівнеперервним знизу відповідно) на D.

Приклад. Розглянемо багатозначне точкове відображення, яке задається наступним чином

$$F(0) = [-1,1], \; F(p) = \{0\}, \; p \neq 0, \; p \in R^1. \tag{3}$$

Так як

$$\beta(F(p), F(0)) = \min\{\varepsilon \geq 0 : F(p) \subseteq (F(0))^\varepsilon\} = \min\{\varepsilon \geq 0 : 0 \in [-1,1]^\varepsilon\} = 0, \; p \in R^1,$$

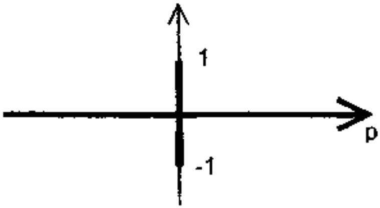

Рис.1.

то відображення F є напівнеперервним зверху у точці 0. Але це відображення не є напівнеперервним знизу у точці 0 (рис. 1). Дійсно. Виберемо $z=1$ і $U(z)=S_{1/2}(1)=\left(\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right)$. Так як $0\notin\left(\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right)$, то який би ми окіл $V(0)$ не взяли, має місце $F(p)\cap S_{1/2}(1)=\varnothing$ при $p\in V(0)$, $p\neq 0$. Отже, з напівнеперервності зверху не випливає напівнеперервність знизу багатозначного відображення. Крім того, функція (3) не є неперервною.

Багатозначне відображення G, що задається співвідношеннями

$$G(0)=\{0\} \text{ і } G(p)=[-1,1],\ p\neq 0,\ p\in R^1 \tag{4}$$

є напівнеперервним знизу, але не напівнеперервним зверху в точці 0. Таким чином, напівнеперервність зверху не еквівалентна напівнеперервності знизу.

Задача 9. Довести, що відображення (4) – напівнеперервне знизу, але не напівнеперервне зверху в точці 0.

2. Графік багатозначного відображення. Багатозначні відображення повністю характеризуються своїм графіком (рис.2).

Означення. *Графіком* багатозначного відображення F називається множина $\Gamma=\{(p,q): q\in F(p), p\in D\}$.

Графік багатозначного відображення (3) зображено на рис. 1.

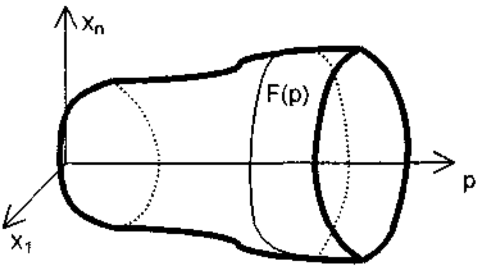

Рис.2.

Задача 10. Побудувати графік : а) для відображення (4); б) відображення $F(p): p\mapsto K_p(0)$, $p\in[0,1]$, $K_p(0)\subset R^2$.

Теорема 1. (про замкнений графік). Нехай множина D – замкнена, а багатозначна функція $F(p)$ – замкнена і обмежена в околі кожної точки $p \in D$. Тоді для β-неперервності $F(p)$ на D необхідно і достатньо, щоб її графік Γ був замкненою множиною.

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $F(p)$ – β-неперервна функція, (p,q) – гранична точка її графіка. Це означає, що існує послідовність $p_i \to p \in D$, $q_i \to q$, $q_i \in F(p_i)$, $i = 1,2,\ldots$. Тоді $\rho(q_i, F(p)) \le \beta(F(p_i), F(p)) \to 0$, $i \to \infty$. Тому $\rho(q, F(p)) = 0$. Так як $F(p)$ – замкнена множина, то $q \in F(p)$, тобто $(p,q) \in \Gamma$. Звідси випливає, що Γ – замкнена множина.

($\Leftarrow$) Від супротивного. Нехай $F(p)$ не β-неперервна функція на D. Тоді існують такі точки $p \in D$ і $p_i \to p$ та фіксоване число $\varepsilon > 0$, що $\beta(F(p_i), F(p)) \ge \varepsilon > 0$, $i = 1,2,\ldots$. Це означає, що знайдуться $q_i \in F(p_i)$, такі, що $\rho(q_i, F(p)) \ge \varepsilon$. З послідовності $\{q_i\}$ виберемо підпослідовність $\{q_{i_k}\}$, $q_{i_k} \to q$, $k = 1,2,\ldots$. Перейшовши в останній нерівності до границі, отримаємо $\rho(q, F(p)) \ge \varepsilon > 0$. Отже, $q \notin F(p)$. З $(p_{i_k}, q_{i_k}) \in \Gamma, (p_{i_k}, q_{i_k}) \to (p,q) \notin \Gamma$ випливає, що множина Γ не є замкнена. Протиріччя доводить теорему.

Означення. Багатозначна функція F називається *обмеженою* на множині M, якщо $\|F(M)\| < \infty$.

Теорема 2. Нехай функція F є β–неперервна та компактозначна на компакті $K \subset D$. Тоді функція F обмежена на K.

Доведення. Від супротивного. Нехай існують $p_i \in K$, $q_i \in F(p_i)$, $\|q_i\| \to \infty$, $i \to \infty$. Виберемо збіжну послідовність $p_{ij} \to p \in K$. З умови теореми $\|F(p)\| = a < \infty$, $q_{ij} \in F(p_{ij})$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Починаючи з деякого номера $J(\varepsilon)$ для $j > J(\varepsilon)$ має місце включення $F(p_{ij}) \subset (F(p))^{\varepsilon}$. Тоді $\|q_{ij}\| \le a + \varepsilon$, що протирічить $\|q_i\| \to \infty$, $i \to \infty$. Теорему доведено.

Наслідок. Якщо D є компактом, F є компактозначне β-неперервне багатозначне відображення, то графік Γ функції $F(p)$ є *компактом* в R^{m+n}.

Література

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М., 1985.
2. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. – М., 1988.

ЛЕКЦІЯ 4
ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ БАГАТОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ
(продовження)

1. *Властивості неперервних відображень.* У попередній лекції була доведена обмеженість напівнеперервних зверху відображень на компакті (теорема 2). Позначимо за $\mathrm{co}A$ опуклу оболонку множини A, $\overline{\mathrm{co}}\,A$ – замкнену опуклу оболонку множини A [1].

Лема 1. Якщо множина A обмежена, то $(\mathrm{co}A)^{\varepsilon} = \mathrm{co}(A^{\varepsilon})$

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $b \notin (\mathrm{co}A)^{\varepsilon}$ (рис. 1 і рис. 2). Тобто $\rho(b, \mathrm{co}A) = \alpha > \varepsilon$. Знайдеться точка $a \in \overline{\mathrm{co}A}$, така, що $\rho(b,a) = \alpha$. Помістимо початок координат у точку b і направимо вісь Ox_1 від b до a. Візьмемо будь-яке $\beta \in (\varepsilon, \alpha)$. Множина $\overline{\mathrm{co}A}$ лежить в області $x_1 > \beta$, множина A також. Тоді A^{ε} міститься в напівпросторі $x_1 \geq \beta - \varepsilon$. За означенням опуклої оболонки $\mathrm{co}(A^{\varepsilon})$ лежить в $x_1 \geq \beta - \varepsilon$. Тому $b \notin \mathrm{co}(A^{\varepsilon})$.

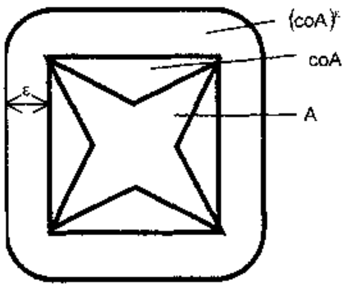

Рис.1.

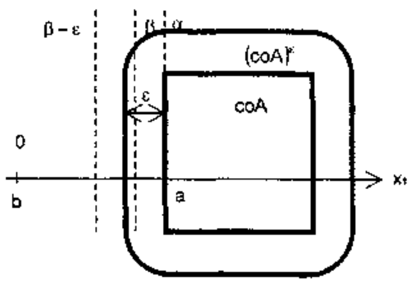

Рис.2.

$(\Leftarrow)$ Нехай $b \notin \mathrm{co}(A^{\varepsilon})$ (рис. 3 і рис. 4). Направимо вісь Ox_1 від точки b до c - найближчої точки з множини $\mathrm{co}(A^{\varepsilon})$. Тоді $\rho(b,c) = \gamma > 0$, $\mathrm{co}(A^{\varepsilon})$ лежить в області $x_1 > \delta$, $0 < \delta < \gamma$ і A^{ε}-також. Значить, A і coA міститься в напівпросторі $x_1 \geq \delta + \varepsilon$, а $(\mathrm{co}A)^{\varepsilon}$ – в напівпросторі $x_1 \geq \delta$. Значить, $b \notin (\mathrm{co}A)^{\varepsilon}$.

Лему доведено.

---

[1] Опуклою оболонкою множини A називається найменша опукла множина, що містить A.

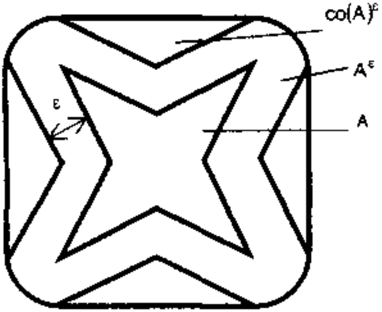

Рис.3.

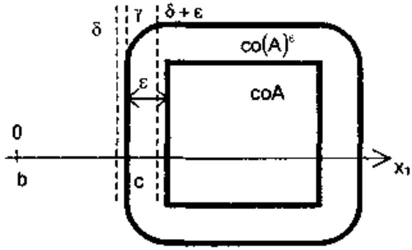

Рис.4.

Теорема 1. Якщо $H(p)$ є строгим компактозначним β- неперервним (α – неперервним) відображенням, то функція $F(p) = coH(p)$ є β- неперервною (α –неперервною).

Доведення. Для довільних $p_0 \in D$ і $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що для будь-якого $p \in K_\delta(p_0)$ виконується $H(p) \subseteq (H(p_0))^\varepsilon$. За лемою 1

$$coH(p) \subseteq co(H(p_0))^\varepsilon = [coH(p_0)]^\varepsilon . \quad (1)$$

Тобто, $F(p) \subseteq (F(p_0))^\varepsilon$. Якщо ж функція H - α -неперервна, то справджується (1) і, крім того, з $H(p_0) \subseteq (H(p))^\varepsilon$ випливає $F(p_0) \subseteq (F(p))^\varepsilon$. Тобто, F – α - неперервна функція. Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай $f(p)$ –обмежена однозначна функція, $p \in D \subset R^m$, $f(p) \in R^n$. Для кожного $p_0 \in \overline{D}$ позначимо за $H(p_0)$ множину всіх граничних значень функції $f(p)$ при $p \to p_0$, що доповнене значенням $f(p_0)$, якщо $p_0 \in D$. Тоді функції $H(p)$ і $F(p) = coH(p)$ є β –неперервними.

Доведення. Нехай $p \in \overline{D}$. Тоді $H(p)$ –замкнена множина, $\left|H(\overline{D})\right| < \infty$. Графік функції H є замиканням графіка функції f. Тому він замкнений. Отже, за теоремою 1 та теоремою 1 попередньої лекції відображення H і $F - \beta$- неперервні. Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай $f(p, u_1, ..., u_r)$ –однозначна і неперервна функція. Якщо багатозначні функції $u_1(p), ..., u_r(p)$ у точці p обмежені і β –неперервні, то функція $H(p) = f(p, u_1(p), ..., u_r(p))$ обмежена і β –неперервна.

Доведення теореми аналогічне доведенню про неперервність суперпозиції неперервних функцій у точці.

Теорема 4. Нехай $\varphi : R^n \to R^1$, $\varphi \in C(R^n)$, $F(p)$ – напівнеперервне зверху компактозначне відображення, $p \in D$, $D \subset R^m$ – замкнена обмежена область. Тоді функція

$$\psi(p) = \max_{x \in F(p)} \varphi(x)$$

напівнеперервна зверху, $p \in D$. Якщо $F(p)$ є неперервним за Хаусдорфом на D, то $\psi \in C(D)$.

Доведення. Виберемо довільну точку $s \in D$. Позначимо $x^* = \arg\max_{x \in F(s+h)} \varphi(x)$.

Для точки $x^* \in F(s+h)$ існує $y \in F(s)$, таке, що $\|x^* - y\| \to 0$ при $h \to 0$. Тоді

$$\psi(s+h) = \varphi(x^*) = \varphi(y) + w_1(h) \le \max_{x \in F(s)} \varphi(x) + w_1(h) = \psi(s) + w_1(h),$$

де $w_1(h) \to 0$ при $h \to 0$. Звідси $\overline{\lim_{h \to 0}}\ \psi(s+h) \le \psi(s)$. Якщо має місце неперервність за Хаусдорфом, то аналогічно доводиться нерівність $\psi(s) \le \psi(s+h) + w_2(h)$, де $w_2(h) \to 0$ при $h \to 0$. Тому $\lim_{h \to 0} \psi(s+h) = \psi(s)$.

Теорему доведено.

Наслідок. Якщо в умовах теореми 4 відображення $F(p)$ є неперервним за Хаусдорфом на D, то функція

$$\xi(p) = \min_{x \in F(p)} \varphi(x)$$

належить класу $C(D)$.

2. *Визначаючі функції.* Нехай K є компакт в R^m.

Означення. Функція $\alpha \in C(R^m)$, така, що

$\alpha(x) < 1, \quad x \in \operatorname{int} K;$

$\alpha(x) = 1, \quad x \in \partial K;$

$\alpha(x) > 1, \quad x \in R^m / K$

називається *визначаючою* для множини K.

Приклади.

1). Множина $K = K_r(0)$. Тоді визначаюча функція $\alpha(x) = \dfrac{\|x\|}{r}$, $x \in R^m$.

Зазначимо, що функція $\beta(x) = \|x\| - r + 1$ також є визначаючою для K.

2. Нехай $\{r_s\}_{s=1}^N$ — система векторів з R^m, $\operatorname{rang}\{r_s\}_{s=1}^N = m$, $N \ge m$ і задана множина $\Lambda = \left\{x \in R^m : \left|r_s^T x\right| \le 1, s = 1,2,\ldots,N\right\}$. Тоді функція $\lambda(x) = \max\limits_{s=1,2,\ldots,N} \left|r_s^T x\right|$ є визначаючою для Λ.

Теорема 5. Для компакту K існує визначаюча функція.

Доведення. Функція $\psi(x) = c \min\limits_{y \in \partial K} \|x - y\|$ є неперервною в R^m, $c > 0$. Тоді

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 - \psi(x), & x \in K; \\ 1 + \psi(x), & x \notin K; \end{cases} \tag{2}$$

задовольняє умовам теореми. Теорему доведено.

Зауваження. В умовах теореми 5 визначаючу функцію можна вибрати так, що $\alpha(x) \ge 0$. Для цього в доведенні беремо

$$c = \left[\max_{x \in \partial K} \max_{y \in \partial K} \|x - y\|\right]^{-1}.$$

Нехай $B = \left\{G(u) : G(u) \subset R^n, u \in D\right\}$ — клас компактів, $D \subset R^m$ – замкнена обмежена область.

Теорема 6. *Для того, щоб відображення G, $G(u) \in B$, $u \in D$, було неперервним за Хаусдорфом, необхідно і достатньо, щоб існувала функція* $\alpha \in C(R^n \times D)$, така, що:

а) $\alpha(x,u) = 1$, якщо $x \in \partial G(u)$;

б) $\alpha(x,u) < 1$, якщо $x \in \operatorname{int} G(u)$;

в) $\alpha(x,u) > 1$, якщо $x \in R^n / G(u)$, $u \in D$.

Доведення. Достатність очевидна. Покажемо необхідність. Для цього побудуємо визначаючу функцію

$$\alpha(x,u) = \begin{cases} 1 - \psi(x,u), x \in G(u), \\ 1 + \psi(x,u), x \in R^n / G(u) \end{cases}$$

множини $G(u) \in B$. Тут $\psi(x,u) = \min\limits_{v \in \partial G(u)} \|v - x\|$, $x \in R^n$, $u \in D$. З теореми 5 випливає, що досить довести неперервність $\alpha(x,u)$ за $u \in D$. З наслідку теореми 4 випливає, що для довільного $x \in R^n$ функція $\psi \in C(D)$. Нехай $s \in D$. Якщо $x \in \operatorname{int} G_s$, то $\psi(x,s) > 0$ і існує $h > 0$, таке, що $\psi(x,t) > 0$ при $t \in K_h(s) \cap D$. Це означає, що $x \in G(t)$, і $\alpha(x,t) = 1 - \psi(x,t)$ є неперервною функцією, $t \in K_h(s) \cap D$. Аналогічно показується неперервність $\alpha = \alpha(x,u)$ у точці $u = s$, якщо $x \in R^n / G(s)$. Припустимо, що $x \in \partial G_s$. Тоді $\psi(x,s) = 0$ і $\alpha(x,s) = 1$. Звідси $|\alpha(x,t) - \alpha(x,s)| = |\psi(x,t)| \to 0$ при $t \to s$. Отже, $\alpha \in (R^n \times D)$. Теорему доведено.

Теорема 7. Нехай $\Theta = \bigcap_{u \in D} G(u)$, $\Omega = \bigcup_{u \in D} G(u)$, $G(u) \in B$. Тоді $\theta(x) = \max_{u \in D} \alpha(x,u)$ і $\omega(x) = \min_{u \in D} \alpha(x,u)$ є визначаючими функціями відповідно множин Θ і Ω. Тут $\alpha(x,u)$ — функція, що задовольняє умови теореми 6.

Доведення. Нехай $x \in \operatorname{int}\Theta$. Тоді $\alpha(x,u) < 1$, $u \in D$ і $\max_{u \in D} \alpha(x,u) < 1$. Якщо $x \in \partial\Theta$, то $\alpha(x,u) \le 1$, $u \in D$, але існує $s \in D$, таке, що $\alpha(x,s) = 1$. Тому $\max_{u \in D} \alpha(x,u) = 1$. При $x \in R^n / \Theta$ знайдеться $s \in D$, для якого $\alpha(x,s) > 1$ і, отже, $\theta(x) > 1$. Аналогічно доводиться той факт, що $\omega(x)$ є визначаючою функцією Ω. Теорему доведено.

Приклад. Припустимо, що $B = \{K(0,S(t)) : t \in [0,1]\}$, $K(0,S(t)) = \{x \in R^n : x^T S(t) x \le 1\}$, $S(t)$ – додатно визначена симетрична матриця розмірності $n \times n$ з неперервними компонентами, $t \in [0,1]$. Визначаючою функцією для $K(0,S(t))$ є $\alpha(x,t) = x^T S(t) x$. Згідно теореми 7 для $\bigcap_{t \in [0,1]} K(0,S(t))$ визначаючою функцією є $\alpha(x) = \max_{t \in [0,1]} x^T S(t) x$, а для множини $\bigcup_{t \in [0,1]} K(0,S(t))$ визначаючою є функція $\alpha(x) = \min_{t \in [0,1]} x^T S(t) x$.

Література

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М., 1985.
2. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. – М., 1988.
3. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. – К., 2000.
4. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. – М., 2001.

ЛЕКЦІЯ 5
КЛАС АБСОЛЮТНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

1. *Означення та властивості.* Нехай на $[a,b]$ задана скінчена функція $f:[a,b]\to R^1$.

Означення. Функція $f(x)$ називається *абсолютно неперервною*, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, таке, що для довільної системи інтервалів $(a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)$, які не перетинаються і $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$ має місце нерівність

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{f(b_k)-f(a_k)\}\right|<\varepsilon. \qquad (1)$$

Умову (1) можна замінити на більш жорстку

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\varepsilon.$$

З означення випливає, що абсолютно неперервна на $[a,b]$ функція рівномірно неперервна на $[a,b]$. Для цього досить взяти $n=1$. Крім того, будь-яка функція $f(x)$, яка на $[a,b]$ задовольняє умові Ліпшиця $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$ є абсолютно неперервною. Так, функція $f(x)=|x|$ є абсолютно неперервною. Також будь-яка кусково-гладка функція є абсолютно неперервною.

Задача 11. Довести, що ліпшицева на $[a,b]$ функція f є абсолютно неперервною.

Розглянемо властивості абсолютно неперервних функцій.

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ абсолютно неперервні на $[a,b]$, то $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ є абсолютно неперервними на $[a,b]$. Якщо $g(x)\ne 0$, $x\in[a,b]$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ також є абсолютно неперервною функцією.

Доведення. Абсолютна неперервність суми і різниці випливає з нерівностей

$$\left|\{f(b_k)+g(b_k)\}-\{f(a_k)+g(a_k)\}\right|\le\left|f(b_k)-f(a_k)\right|+\left|g(b_k)-g(a_k)\right|,$$

$$\left|\{f(b_k)-g(b_k)\}-\{f(a_k)-g(a_k)\}\right|\le\left|f(b_k)-f(a_k)\right|+\left|g(b_k)-g(a_k)\right|.$$

Нехай $A=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$, $B=\sup\limits_{x\in[a,b]}|g(x)|$. Тоді з

$$\left|f(b_k)g(b_k)-f(a_k)g(a_k)\right|\le$$

$$\left|g(b_k)\right|\left|f(b_k)-f(a_k)\right|+\left|f(a_k)\right|\left|g(b_k)-g(a_k)\right| \le B\left|f(b_k)-f(a_k)\right|+A\left|g(b_k)-g(a_k)\right|$$

випливає абсолютна неперервність добутку. Якщо $g(x) \ne 0$, то $\left|g(x)\right| \ge \delta > 0$.

Тому $\left|\frac{1}{g(b_k)}-\frac{1}{g(a_k)}\right| \le \frac{\left|g(b_k)-g(a_k)\right|}{\sigma^2}$, звідки слідує абсолютна неперервність функції $\frac{1}{g(x)}$ і тому $\frac{f(x)}{g(x)}$ абсолютно неперервна. Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай $f(x)$ абсолютно неперервна на $[a,b]$, $f(x) \in [A,B]$, $x \in [a,b]$. Якщо $F(y)$ є ліпшицевою на $[A,B]$ з константою Ліпшиця L, то $F(f(x))$ абсолютно неперервна на $[a,b]$.

Доведення. Нехай $(a_j,b_j) \bigcap\limits_{j\ne k} (a_k,b_k) = \varnothing$, $(a_k,b_k) \subset [a,b], k=\overline{1,n}$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n}\left|F(f(b_k))-F(f(a_k))\right| \le L\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|,$$

а права частина цієї нерівності може бути як завгодно малою за рахунок зменшення $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|b_k-a_k\right|$. Теорему доведено.

Задача 12. Довести наступне твердження. Нехай $f(x)$ абсолютно неперервна на $[a,b]$ функція, яка строго зростає. Якщо $F(y)$ абсолютно неперервна на $[f(a),f(b)]$, то функція $F(f(x))$ абсолютно неперервна на $[a,b]$ [1].

Означення. Нехай на $[a,b]$ задана скінченна функція $f(x)$, $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, $V=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|$. Точна верхня границя множини усіх можливих сум V називається *повною зміною (повною варіацією)* функції $f(x)$ на $[a,b]$ і позначається $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$. Якщо $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<\infty$, то говорять, що $f(x)$ має *скінченну зміну (обмежену варіацію)*.

Теорема 3. Абсолютно неперервна функція $f(x)$ має скінченну зміну.

Доведення. Виберемо $\varepsilon=1$ і знайдемо $\delta>0$ таке, що для довільної системи $\{(a_k,b_k)\}$ інтервалів, що не перетинаються і $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$ виконується $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<1$. Нехай

$$a=c_0<c_1<c_2<\ldots<c_N=b,\ c_{k+1}-c_k<\delta,\ k=\overline{0,N-1}.$$

Звідси $\overset{c_{k+1}}{\underset{c_k}{V}}(f) \le 1$ і тоді $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \le N$. Теорему доведено.

Задача 13. Перевірити, що неперервна на $[0,1]$ функція

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, x \in (0,1]; \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

має нескінченну зміну, і тому не є абсолютно неперервною [1].

Таким чином, клас абсолютно неперервних функцій є вужчим за клас неперервних функцій.

Важливою властивістю для функцій зі скінченною зміною є існування майже скрізь інтегрованої похідної. Таким чином, за теоремою 3 *абсолютно неперервна на* $[a,b]$ *функція* $f(x)$ *майже в кожній точці з* $[a,b]$ *має скінченну похідну, яка є сумовною на* $[a,b]$.

Теорема 4. Якщо похідна $f'(x)$ абсолютно неперервної функції $f(x)$ майже скрізь рівна нулю, то $f(x)$ постійна [1,2].

2. *Відновлення функції за її похідною.* Проблема відновлення функції за її похідною полягає у тому, щоб виходячи з співвідношення

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

знайти значення функції $f(x)$ за відомою похідною $f'(x)$. Вона виникає, наприклад, при обґрунтуванні поняття розв'язку в теорії диференціальних рівнянь та у задачах оптимального керування. Теорема Ньютона-Лейбніца була доведена для неперервно диференційованих функцій. Зрозуміло, щоб вказане співвідношення виконувалось необхідно, щоб $f(x)$ мала інтегровану похідну. Функції з обмеженою варіацією та абсолютно неперервні функції мають сумовну похідну. Ще одним класом таких функцій є монотонно неспадні функції. Але існує функція $f(x)$, яка є *неперервною* на відрізку, *монотонно неспадною* і з *обмеженою варіацією*, для якої виконується

$$\int_a^x f'(t)dt < f(x) - f(a).$$

Цією функцією є *сингулярна функція Кантора* [2]. Виявляється, що сингулярна функція Кантора не є абсолютно неперервною. Доведемо наступне твердження.

Теорема 5. Функція $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, де f сумовна на $[a,b]$, є абсолютно неперервною.

Доведення. Нехай $\{(a_k,b_k)\}$ система інтервалів, що лежать в $[a,b]$ і не перетинаються. Тоді $\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)| = \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{a_k}^{b_k} f(t)dt\right| \le \sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}|f(t)|dt = \int_{\bigcup_k (a_k,b_k)}|f(t)|dt$.

З абсолютної неперервності інтегралу Лебега (див. додаток А) останній вираз прямує до нуля, якщо $\sum_k (b_k - a_k) \to 0$. Теорему доведено.

Теорема 6 (Лебега). Похідна $f'(x)$ абсолютно неперервної функції $f(x)$, що задана на $[a,b]$, є сумовною на $[a,b]$ і $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$.

Доведення. Покладемо $\Phi(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$. Ця функція згідно теореми 5 є абсолютно неперервною. За теоремою про похідну інтегралу Лебега (див. додаток В) від верхньої межі інтегрування $\Phi'(x) = f'(x)$. Тоді $\Phi'(x) - f'(x) = 0$ і за теоремою 4 $\Phi(x) - f(x) = c$, де $c = \text{const}$. Так як $\Phi(a) = f(a)$, то $c = 0$. Теорему доведено.

Теорема 7 (про середнє значення). Якщо M – обмежена множина, $V(t) \in M$ інтегрована функція, $t \in [a,b]$, то

$$V_c = \frac{1}{b-a}\int_a^b V(t)dt \in \overline{\text{co}}M.$$

Доведення. За означенням інтегралу $V_c = \lim\limits_{d\to 0} S$, де Δ_i – інтервали розбиття відрізка $[a,b]$, $d = \max\limits_i \Delta_i$ – діаметр розбиття, $S = \sum_i \frac{\Delta_i}{b-a} V(t_i)$, $\frac{\Delta_i}{b-a} = \alpha_i \ge 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$. Звідси за властивостями опуклої оболонки $S = \sum_i \alpha_i V(t_i) \in \text{co}M$. Тому $\lim S \in \overline{\text{co}}M$, $d \to 0$. Теорему доведено.

Поняття абсолютно неперервної функції природно розповсюджується на вектор функції. Для цього в нерівності (1) замість знаку модуля вибирається евклідова норма.

Теорема 8. Нехай $t \in (a,b)$ і вектор-функції $x_k(t)$ абсолютно неперервні, $x_k(t) \underset{k\to+\infty}{\to} x(t)$ та для кожного $k = 1,2\ldots$ майже скрізь $\frac{dx_k(t)}{dt} \in M$, де M –компакт у R^n. Тоді $x(t)$ – абсолютно неперервна вектор-функція і $\frac{dx(t)}{dt} \in coM$ майже скрізь на (a,b).

Доведення. Оскільки M – обмежена множина, то знайдеться константа $L > 0$, така, що $\left\|\frac{dx_k(t)}{dt}\right\| \le L$. Тоді для $t_1, t_2 \in (a,b)$ виконується нерівність

$$\|x_k(t_1) - x_k(t_2)\| = \left\|\int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_k(t)}{dt} dt\right\| \le L|t_1 - t_2|.$$

Зробивши в останній нерівності граничний перехід $k \to \infty$, отримаємо $\|x(t_1) - x(t_2)\| \le L|t_1 - t_2|$. Отже, вектор-функція $x(t)$ є ліпшицевою і тому абсолютно неперервною. За теоремою 7

$$q_k = \frac{x_k(t+h) - x_k(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \frac{dx_k(s)}{ds} ds \in coM, \ k = 1,2,\dots.$$

За означенням похідної $\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{k\to+\infty} q_k \in coM$ і функція $\frac{dx(t)}{dt}$ існує майже скрізь у силу абсолютної неперервності $x(t)$. Теорему доведено.

Додаток А.

Має місце теорема про абсолютну неперервність інтегралу Лебега: якщо $f(x)$ сумовна на множині *A* функція, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що $\left|\int_\ell f(x)dx\right| < \varepsilon$ для будь-якого вимірного $\ell \subset A, \mu(\ell) < \delta$, μ – міра Лебега.

Додаток В.

Теорема. Для будь-якої сумовної функції $f(x)$ майже скрізь має місце рівність $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$.

Література

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М., 1974.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., 1972.
3. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М., 1985.

РОЗДІЛ 2
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВКЛЮЧЕННЯ

ЛЕКЦІЯ 6
ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

1. *Означення розв'язку.* Нехай в області $G \subset R^{n+1}$ задане багатозначне відображення $F:(x,t) \mapsto F(x,t)$. Тут x – n-вимірний вектор фазових координат, t – незалежна змінна, $F(x,t) \subseteq R^n$ – замкнена множина, $(x,t) \in G$. Співвідношення вигляду

$$\frac{dx}{dt} \in F(x,t) \tag{1}$$

називається *диференціальним включенням.*

Приклад. Одним з найпростіших прикладів диференціального включення є співвідношення

$$x' \in [-1,1], \tag{2}$$

де x – скалярна функція. Розглянемо диференціальне рівняння

$$x' = ax + b. \tag{3}$$

Тут a, b – параметри. Припустимо, що b пробігає множину $[-1,1]$. Тоді рівняння (3) можна переписати у вигляді диференціального включення

$$x' \in \{ax\} + [-1,1]. \tag{4}$$

Означення. *Розв'язком* диференціального включення (1) називається абсолютно неперервна вектор-функція $x = x(t)$, яка визначена на деякому інтервалі $I \subseteq R^1$ і така, що майже для всіх $t \in I$

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F(x(t),t).$$

Так, легко переконатись, що функція $x(t) = 0$ є розв'язком диференціальних включень (2) та (4).

2. *Наближений розв'язок.* При дослідженні питання існування та єдності розв'язку задачі Коші, неперервної залежності від початкових даних і параметрів потрібно аналізувати малі зміни правої частини системи (1) в областях неперервності, а також малі зміни границь цих областей. Для цього розв'язок задачі Коші апроксимують наближеним розв'язком (ламаними Ейлера)[2] і доводять збіжність послідовності наближених розв'язків до деякого "справжнього" розв'язку. Користуючись цією методикою, будемо досліджувати умови

існування розв'язку задачі Коші для диференціальних включень. Нехай права частина диференціального включення (1) є β - неперервною за x, t.

Означення. Вектор-функція $y(t)$ називається δ - *розв'язком (наближеним розв'язком з точністю до* δ*)* включення (1), якщо на заданому інтервалі функція $y(t)$ є абсолютно неперервною і майже скрізь

$$\dot{y}(t) \in F_\delta(y(t),t).$$

Тут $F_\delta(y(t),t) = [coF(y^\delta,t^\delta)]^\delta$, $F(y^\delta,t^\delta) = \bigcup\limits_{\substack{s\in t^\delta \\ z\in y^\delta}} F(z,s)$.

3. *Основні умови. Існування розв'язку.* Як відомо з теорії звичайних диференціальних рівнянь[2], для того, щоб система диференціальних рівнянь задовольняла умові існування розв'язку задачі Коші необхідно, щоб виконувалась умова неперервності правої частина за сукупністю змінних. Аналогічну роль у теорії диференціальних включень відіграють основні умови.

Означення. Будемо говорити, що багатозначне відображення $F(x,t)$ в області G задовольняє *основним умовам*, якщо в області G відображення $F(x,t)$ є строгим компактозначним опуклозначним β-неперервним за змінними x та t.

Приклад. Багатозначні відображення

а) $F(x,t) = [-1,1]$;

б) $F(x,t) = K_1(x)$;

в) $F(0) = [-1,1]$, $F(x) = \{0\}$, $x \neq 0$, $x \in R^1$

задовольняють основні умови. Має місце наступне твердження.

Лема 1. Нехай $F(x,t)$ задовольняє основним умовам в області G. Тоді границя $x(t)$ будь-якої рівномірно збіжної послідовності δ_k – розв'язків $x_k(t)$ $(\delta_k \to 0, k \to \infty)$ включення

$$\frac{dx}{dt} \in F(x,t)$$

є розв'язок цього включення, якщо графік функції $x(t) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k(t)$ міститься у G. Тобто, $(x(t),t) \in G, t \in [a,b]$.

Доведення. Візьмемо довільні $t_0 \in [a,b]$ та $\varepsilon > 0$. Функція $F(x,t)$ є β-неперервна, тому існує $\eta > 0$, таке, що в області $G_0 = (t_0 - 2\eta, t_0 + 2\eta) \times (x(t_0) - 3\eta, x(t_0) + 3\eta)$ справджується

$$F(x,t) \subset F_0^\varepsilon, F_0 = F(x(t_0),t_0). \tag{5}$$

Оскільки функції $x_k(t)$ є неперервними, то $x(t)$ – неперервна, як границя рівномірно збіжної послідовності. Тому знайдуться $\gamma \in (0,\eta)$, k_0, такі, що при $k > k_0$, $|t - t_0| < \gamma$ виконується нерівність

$$\delta_k < \min\{\eta, \varepsilon\},\ \| x_k(t) - x(t) \| < \eta,\ \| x(t) - x(t_0) \| < \eta. \tag{6}$$

Нехай $\delta = \delta_k$, $k > k_0$ і $|t - t_0| < \gamma < \eta$.

Якщо $s \in t^\delta$, то $|s - t| \le \delta$ і $|s - t_0| \le |s - t_0| + |t - t_0| < \eta + \delta \le 2\eta$. Таким чином, $s \in t_0^{2\eta}$. Отже, $t^\delta \subset t_0^{2\eta}$.

Нехай $z \in (x_k(t))^\delta$, тобто $\| x_k(t) - z \| \le \delta$. З (6) слідує $\| z - x(t_0) \| \le \| z - x_k(t) \| + \| x_k(t) - x(t) \| + \| x(t) - x(t_0) \| < \delta + 2\eta \le 3\eta$. Звідси $z \in (x(t_0))^{3\eta}$ і $(x_k(t))^\delta \subset (x(t_0))^{3\eta}$.

Таким чином, $(x_k(t))^\delta \times t^\delta \subset G_0$ і тому $F((x_k(t))^\delta, t^\delta) \subset F_0^\varepsilon$. Так як $x_k(t)$ є δ_k – розв'язок, а множина F_0 – опукла, то майже скрізь

$$\frac{dx_k(t)}{dt} \in [\mathrm{co}F((x(t))^\delta, t^\delta)]^\delta \subset [\mathrm{co}F_0^\varepsilon]^\delta \subset F_0^{2\varepsilon}.$$

При $|t - t_0| < \gamma$ функція $x(t)$ є абсолютно неперервною (теорема 8, лекція 5) і $\frac{dx(t)}{dt} \in F_0^{2\varepsilon}$ майже скрізь на відрізку $|t - t_0| < \gamma$. Інтервалами типу $(t_0 - \gamma, t_0 + \gamma)$ можна покрити весь відрізок $[a,b]$. Тому на $[a,b]$ функція $x(t)$ абсолютно неперервна і майже скрізь існує похідна $\frac{dx(t)}{dt}$. Отже, для кожного t_0, при якому існує $\frac{dx(t_0)}{dt}$, доведено, що $\frac{dx(t_0)}{dt} \in F_0^{2\varepsilon}$ при як завгодно малому $\varepsilon > 0$. Тому $\frac{dx(t_0)}{dt} \in F_0 = F(x(t_0), t_0)$. Тобто, $x(t)$ – розв'язок диференціального включення (1). Лему доведено.

Наслідок. Якщо $F(x,t)$ задовольняє основним умовам, то границя рівномірно збіжної послідовності розв'язків диференціального включення

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F(x,t)$$

є розв'язком цього включення.

Теорема 1. Нехай багатозначне відображення $F(x,t)$ задовольняє основним умовам в області G. Тоді для довільної точки $(x_0, t_0) \in G$ існує розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F(x,t)\ .\ x(t_0) = x_0\ .$$

Якщо область G містить циліндр $Z = \{x,t : t \in [t_0, t_0 + a], \| x - x_0 \| \le b\}$, то розв'язок існує щонайменше на відрізку $t_0 \le t \le t_0 + d$, $d = \min\{a, \frac{b}{m}\}$, $m = \sup\limits_{(x,t) \in Z} | F(x,t) |$.

Доведення проведемо у два кроки.

Крок 1. Побудова послідовності, що збігається до розв'язку задачі Коші. Можна вибрати $a > 0, b > 0$ так, щоб $Z \subset G$. Тоді за теоремою про обмеженість β-неперервної функції (теорема 2, лекція 3) $m < +\infty$. Для $k = 1,2,\ldots$, візьмемо $h_k = \frac{d}{k}, t_{ki} = t_0 + ih_k, i = 0,1,\ldots,k$. Побудуємо ламану $x_k(t)$ наступним чином:

1) Покладемо $x_k(t_{k0}) = x_0$.

2) Якщо для деякого $i \ge 0$ значення $x_k(t_{ki}) = x_{ki}$ вже визначене і

$$\| x_{ki} - x_0 \| \le m \mid t_{ki} - t_0 \mid, \tag{7}$$

то візьмемо довільну точку $V_{ki} \in F(x_{ki}, t_{ki})$ і при $t_{ki} < t \le t_{k,i+1}$ визначимо $x_k(t)$ за допомогою співвідношення

$$x_k(t) = x_{ki} + (t - t_{ki})V_{ki}\ . \tag{8}$$

Так як у силу (7) $(t_{ki}, x_{ki}) \in Z$, то $\| V_{ki} \| \le \mid F(x_{ki}, t_{ki}) \mid \le m$. З (7) та (8) маємо

$$\| x_k(t) - x_0 \| \le m \mid t - t_0 \mid, \quad t_{ki} < t \le t_{k,i+1}\ . \tag{9}$$

Тому значення $x_k(t_{k,i+1}) = x_{k,i+1}$ визначене і

$$\| x_{k,i+1} - x_0 \| \le m \mid t_{k,i+1} - t_0 \mid . \tag{10}$$

Крок 2. Аналіз послідовності. Отже, $x_k(t)$ послідовно будується на кожному інтервалі $[t_{ki}, t_{k,i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,k-1$. У силу (9) графік функції $x_k(t)$, $t \in [t_0, t_0 + d]$ міститься в Z. З (8) випливає, що функція $x_k(t)$ є ліпшицевою і $\left\| \frac{dx_k(t)}{dt} \right\| \le m$, $t \ne t_{ki}$, $i = 1,2\ldots$. Тому $x_k(t)$ абсолютно неперервна. Так як з (8) і (10)

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = V_{ki} \in F(t_{ki}, x_{ki}), 0 < t - t_{ki} < h_k\ ,\ \| x_k(t) - x_{ki} \| \le mh_k\ ,$$

то $x_k(t)$ є δ_k – розв'язок включення $\frac{dx}{dt} \in F(x,t)$, де $\delta_k = \max\{h_k, mh_k\} \to 0$. Функції $x_k(t)$ у силу оцінки $\| V_{ki} \| \le m$ рівномірно обмежені і з (9) випливає їх рівностепенна неперервність. За теоремою Арцела (додаток А) з них можна вибрати рівномірно збіжну підпослідовність $\{x_s(t)\} \subset \{x_k(t)\}$. За лемою 1 границя $x(t) = \lim\limits_{s\to\infty} x_s(t)$ є розв'язок включення $\frac{dx}{dt} \in F(x,t)$. З умови $x_k(t_0) = x_0$ випливає $x(t_0) = x_0$. Теорему доведено.

Задача 14. Дослідити за допомогою теореми 1 на існування розв'язку задачі Коші:

а) $x' \in [-1,1]$, $x(0) = x_0$;

б) $x' \in [-kx, mx]$, $x(0) = x_0$.

Тут x – скалярна функція, x_0 – фіксована точка, k, m – додатні параметри.

Додаток А.

Сімейство Φ функцій φ, визначених на $[a,b]$, називається *рівномірно обмеженим*, якщо існує число $K > 0$, таке, що $|\varphi(x)| < K$ для всіх $x \in [a,b]$ і $\varphi \in \Phi$.

Сімейство Φ функцій φ, визначених на $[a,b]$, називається рівностепенно неперервним, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ для всіх $x \in [a,b]$, $y \in [a,b]$, таких, що $|x - y| < \delta$ і всіх $\varphi \in \Phi$.

Теорема (Арцела). Для того, щоб множина $\Phi \subset C[a,b]$ була компактною в $C[a,b]$ необхідно і достатньо, щоб вона була рівномірно обмеженою і рівностепенно неперервною.

Література

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М., 1985.

2. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Л., 1981.

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., 1972.

ЛЕКЦІЯ 7
ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

1. *Продовження розв'язку*. Теорема про існування розв'язку гарантує існування розв'язку задачі Коші лише у певному околі початкової умови. Але у ряді задач постає необхідність розглядати проблему існування розв'язку на заданому інтервалі зміни незалежної змінної. У зв'язку з цим виникає питання продовження розв'язку. Розглянемо диференціальне включення

$$\frac{dx}{dt} \in F(x,t), \tag{1}$$

де x – n-вимірний вектор фазових координат, $(x,t) \in D$, $D \subset R^{n+1}$ – область. Доведемо наступне твердження.

Лема 1. Якщо багатозначне відображення $F(x,t)$ задовольняє основним умовам на компакті D, то всі розв'язки диференціального включення рівностепенно неперервні.

Доведення. За теоремою про обмеженість β- неперервного відображення на компакті (теорема 2, лекція 3) $|F(x,t)| \le m$. Звідси $\left\|\frac{dx}{dt}\right\| \le m$ для всіх розв'язків, що лежать в D. Тому

$$\|x(t') - x(t'')\| \le m\,|t' - t''|$$

звідки випливає рівностепенна неперервність. Лему доведено.

Теорема 1 (про продовження розв'язку). Нехай багатозначне відображення $F(x,t)$ задовольняє основним умовам в замкненій обмеженій області D. Тоді кожний розв'язок диференціального включення (1), який проходить всередині області D, можна продовжити в обидві сторони до виходу на границю $\Gamma = \partial D$ компакту D.

Доведення. Розглянемо розв'язок $x(t)$, що проходить через точку $p_0 = (x_0, t_0) \in \operatorname{int} D$. Визначимо $\varepsilon_1 > 0$, для якого $\varepsilon_1 \le \frac{1}{2}\rho(p_0, \Gamma)$. За теоремою 1 лекції 6 знайдеться $\delta_1 > 0$, таке, що циліндр $\| x - x_0 \| \le \varepsilon_1$, $|t - t_0| \le \delta_1$ міститься в D і на відрізку $|t - t_0| \le \delta_1$ існує розв'язок $x(t)$ диференціального включення. Якщо точка $p = (x(t_0 + \delta_1), t_0 + \delta_1)$ задовольняє умові $\rho(p, \Gamma) \ge 2\varepsilon_1$, то розв'язок можна ще продовжити на δ_1 і так, поки не дійдемо до точки $p_1 = (x_1, t_1)$, такої, що $\rho(p_1, \Gamma) < 2\varepsilon_1$ Беремо послідовність $\varepsilon_i \to 0, i = 1,2 \ldots$ і послідовно продовжуємо розв'язок до точок $p_i = (x_i, t_i)$, $t_1 < t_2 < \ldots$,

$\rho(p_i,\Gamma)\underset{i\to+\infty}{\to}0$. Оскільки $\{t_i\}$ –обмежена послідовність, то $t_i \underset{i\to+\infty}{\to} t^*$. За лемою 1 у силу рівностепенної неперервності розв'язку диференціального включення $\lim\limits_{t\to t^*-0} x(t)=x^*$. Очевидно, $(x^*,t^*)\in\Gamma$. Доозначимо розв'язок $x(t)$ на границі Γ, покладаючи $x(t^*)=x^*$. Отже, отримаємо розв'язок, для якого $(x^*,t^*)\in\Gamma$. Теорему доведено.

Від вимоги опуклості правої частини диференціального включення можна відмовитись, якщо замість умови неперервності зверху багатозначного відображення $F(x,t)$ вимагати неперервність за Хаусдорфом. У цьому випадку справджуються теореми про існування розв'язку задачі Коші та про продовження розв'язку. Розглянемо без доведення наступні твердження.

Теорема 2. Нехай функція $F(x,t)$ задовольняє основним умовам в області $G\subseteq R^n$, $A\subset G$ – компакт, всі розв'язки диференціального включення (1) існують при $(x(t_0),t_0)\in A$, $t\in[a,b]$ і їх графіки проходять у G. Тоді множина точок, що лежить на графіках цих розв'язків при $t\in[a,b]$ є обмеженою і замкненою. Крім того, множина цих розв'язків є компактом у просторі $C[a,b]$.

Теорема 3 (про неперервну залежність розв'язку від початкових умов, незалежної змінної та правої частини). Нехай $F(x,t)$ задовольняє основним умовам в області $G\subseteq R^n$, $t_0\in[a,b]$, $(x_0,t_0)\in G$, всі розв'язки задачі

$$\frac{dx}{dt}\in F(x,t)\,,\ x(t_0)=x_0$$

при $t\in[a,b]$ існують та їхні графіки містяться в області G. Тоді для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$, таке, що для будь-яких $s_0\in[a,b]$, h_0 і $H(x,t)$, що задовольняють умовам

$$|s_0-t_0|\le\delta\,,\ \|x_0-h_0\|\le\delta\,,\ d(F,H)\le\delta\,,$$

і основним умовам, кожен розв'язок задачі

$$\frac{dx}{dt}\in H(x,t)\,,\ x(t_0)=h_0\,,$$

при $t\in[a,b]$ існує і відрізняється від деякого розв'язку задачі $\frac{dx}{dt}\in F(x,t)$, $x(t_0)=x_0$ не більш ніж на ε у метриці $C[a,b]$.

Тут умова $d(F,H)\le\delta$ означає, що $H(x,t)\subset\left(\mathrm{co}F\left(x^\delta,t^\delta\right)\right)^\delta$.

2. *Стійкість диференціальних включень. Основні означення.* Для диференціальних включень вводиться два види стійкості: *стійкість і слабка стій-*

кість. Позначимо за $x(t,x_0,t_0)$ деякий розв'язок диференціального включення (1) при умові $x(t_0)=x_0$.

Означення. Розв'язок $x=\varphi(t), t \ge t_0$ диференціального включення (1) називається *стійким*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що для

$$\|x_0-\varphi(t_0)\| < \delta$$

кожний розв'язок $x(t,x_0,t_0)$ при $t \ge t_0$ існує і задовольняє нерівності

$$\|x(t,x_0,t_0)-\varphi(t)\| < \varepsilon .$$

Означення. Розв'язок $x=\varphi(t), t \ge t_0$ диференціального включення (1) називається *слабко стійким*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що при

$$\|x_0-\varphi(t_0)\| < \delta$$

знайдеться розв'язок $x(t,x_0,t_0)$, для якого

$$\|x(t,x_0,t_0)-\varphi(t)\| < \varepsilon, \ t \ge t_0 .$$

Означення. Розв'язок $x=\varphi(t), t \ge t_0$ диференціального включення (1) називається *асимптотично стійким (слабко асимптотично стійким)*, якщо виконується означення стійкості (слабкої стійкості) і існує $\sigma \in (0,\delta)$, таке, що при $\|x_0-\varphi(t_0)\| < \sigma$ виконується $\|x(t,x_0,t_0)-\varphi(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Приклад. Розглянемо диференціальне включення $\frac{dx}{dt} \in F(x)$, де $x \in R^1$, $F(x)=[kx,mx]$, $k \le m$. Очевидно, що $x(t)\equiv 0$ – розв'язок. Для інших розв'язків маємо

$$k \le \frac{x'(t)}{x(t)} \le m .$$

Звідси

$$e^{kt} \le \frac{x(t)}{x(0)} \le e^{mt}, \ t \ge 0 .$$

Виходячи з властивостей експоненти, проаналізуємо у залежності від значень параметрів k та m стійкість розв'язку $x(t)=0$:

а) $k \le m < 0$ – розв'язок $x(t)=0$ асимптотично стійкий;

б) $k \le m = 0$ – стійкий;

в) $k < 0 < m$ – слабко асимптотично стійкий;

г) $k = 0 < m$ – слабко стійкий;

д) $0 < k \le m$ – нестійкий.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з керуванням $u(t)$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t), \qquad (2)$$

де x – n-вимірний вектор фазових координат, $f(x,u,t)$ – n-вимірна вектор-функція, яка є неперервною за сукупністю змінних, $u = u(t) \in U(x,t)$, $U(x,t) \subset R^r$, $(x,t) \in D$, $D \subset R^{n+1}$. *Розв'язком* системи (2) називається пара функцій $(x(t),u(t))$, де $x(t)$ – абсолютно неперервна, $u(t)$ – вимірна функції, що майже скрізь на розглядуваному інтервалі задовольняють системі (2).

Систему (2) заміняють диференціальним включенням (1) де $F(x,t) = f(x,U(x,t),t)$. Тоді *стійкість розв'язку* $x = \varphi(t)$ диференціального включення (1) для даного випадку означає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що при $\|x_0 - \varphi(t_0)\| < \delta$ розв'язок $x(t,x_0,t_0,u)$ системи (2) задовольняє $\|x(t,x_0,t_0,u) - \varphi(t)\| < \varepsilon$, $t \ge t_0$ при всіх доступних керуваннях $u(t) \in U(x,t)$, а слабка стійкість – при деякому допустимому керуванні $u(t)$.

Задача 15. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального включення $\frac{dx}{dt} \in [-a,b]$ у залежності від параметрів $a,b \in [0,\infty)$.

3. *Прямий метод Ляпунова.* Для дослідження деякого розв'язку диференціального включення (1) на стійкість може бути застосоване узагальнення відомого методу функцій Ляпунова[2]. Підхід полягає у наступному. Нехай $V(x,t)$ – функція Ляпунова з класу $C^1(D)$. При майже всіх t існує похідна $\frac{dx}{dt}$ розв'язку включення (1). Тому, при майже всіх t існує

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(1)} = \frac{dV(x(t),t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{grad}_x^T V \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Для $V(x,t)$ визначається *верхня похідна* у силу диференціального включення (1)

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^*_{(1)} = \sup_{y \in F(x,t)} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{grad}_x^T V \cdot y\right)$$

і *нижня похідна* у силу диференціального включення (1)

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{*(1)} = \inf_{y \in F(x,t)} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{grad}_x^T V \cdot y\right).$$

При цьому виконується оцінка

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{*(1)} \le \left(\frac{dV}{dt}\right)_{(1)} \le \left(\frac{dV}{dt}\right)^{*}_{(1)}. \tag{3}$$

Теорема 4 (про стійкість та асимптотичну стійкість). Нехай в області $D = \{(x,t): t \ge t_0, \|x\| \le \varepsilon_0\}$ багатозначне відображення $F(x,t)$ задовольняє основним умовам, $0 \in F(0,t)$ та існують функції $V(x,t)$, $V_0(x)$ класу $C^1(D)$ та $C(D)$ відповідно, для яких $V(0,t) = 0$, $V(x,t) \ge V_0(x) > 0$ при $0 < \|x\| < \varepsilon_0$. Тоді:

1) розв'язок $x(t) \equiv 0$ диференціального включення (1) стійкий при умові

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^{*}_{(1)} \le 0 \text{ в } D; \tag{4}$$

2) якщо виконується (4) та існують функції $V_1(x)$, $W(x)$ з $C(D)$, $\|x\| < \varepsilon_0$, причому

$$0 < V_0(x) \le V(x,t) \le V_1(x), \tag{5}$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^{*}_{(1)} \le -W(x) < 0,\ 0 < \|x\| < \varepsilon_0, V_1(0) = 0, \tag{6}$$

то розв'язок $x(t) \equiv 0$ диференціального включення (1) асимптотично стійкий.

Доведення теореми проводиться аналогічно до відповідних теорем класичного другого методу Ляпунова [2].

Теорема 5. Якщо виконуються умови теореми 4, але з заміною $\left(\frac{dV}{dt}\right)^{*}_{(1)}$ на $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{*(1)}$, то розв'язок $x(t) \equiv 0$ диференціального включення (1) слабко стійкий у випадку 1) і слабко асимптотично стійкий у випадку 2).

Доведення. Множина $F(x,t)$ замкнена, тому інфінум у формулі

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{*(1)} = \inf_{y \in F(x,t)} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mathrm{grad}_x^T V \cdot y\right)$$

досягається на замкненій підмножині $F_1(x,t) \subset F(x,t)$. Для всіх $y \in F_1(x,t)$ виконуються оцінки:

а) $\frac{\partial V}{\partial t} + \mathrm{grad}_x^T V \cdot y \le 0$ з умови (4);

б) $\frac{\partial V}{\partial t} + \mathrm{grad}_x^T V \cdot y \le -W(x) < 0$ з умов (5), (6).

Замикаємо графік G_1 багатозначної функції $F_1(x,t)$ і отримуємо графік G_2 функції $F_2(x,t)$, яка за теоремою про замкнений графік є β-неперервною. Так як багатозначне відображення $F(x,t)$ – β-неперервне, то його графік G є замкненим. Тому з $G_1 \subset G$ випливає

$$G_2 \subset \overline{G_1} \subset \overline{G} = G,$$

де $\overline{A}$ – замикання множини A. Звідси $F_2(x,t) \subset F(x,t)$. Так, як функція

$$g(x,y,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \mathrm{grad}_x^T V(x,t) y$$

неперервна за x, y, t, то для всіх $y \in F_2(x,t)$ також виконуються оцінки а) та б). При фіксованих (x,t) нерівність а) чи б) виділяє деякий напівпростір $P(x,t)$ в просторі змінної y. Це означає, що з $y \in P(x,t)$ випливає, що виконується відповідно а) чи б). Отже, $F_2(x,t) \subset P(x,t)$, звідки

$$F_0(x,t) = \mathrm{co} F_2(x,t) \subset P(x,t).$$

Так як, операція опуклого замикання $\mathrm{co}(\cdot)$ не порушує неперервності багатозначного відображення, то $F_0(x,t)$ є β-неперервним. За теоремою 4 розв'язок $x(t) = 0$ диференціального включення $\frac{dx}{dt} \in F_0(x,t)$ стійкий (відповідно асимптотично стійкий). Так як

$$F_0(x,t) = \mathrm{co} F_2(x,t) \subset \mathrm{co} F(x,t) = F(x,t),$$

то будь-який розв'язок включення $\frac{dx}{dt} \in F_0(x,t)$ є розв'язком включення (1). Звідси випливає справедливість теореми.

Література

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М., 1985.

2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М., 1998.

РОЗДІЛ 3
АНАЛІЗ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З РОЗРИВНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

ЛЕКЦІЯ 8
РІВНЯННЯ КАРАТЕОДОРІ

1. Умови Каратеодорі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)\,, \tag{1}$$

де x – n- вимірний вектор фазових координат, $f = (f_1,\dots,f_n)^T$ - n- вимірна вектор-функція. Якщо функція $f(x,t)$ є розривною за t і неперервною за x, то розв'язком (1) можна назвати функцію, що задовольняє інтегральному рівнянню

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)ds\,. \tag{2}$$

Тут інтеграл розглядається у сенсі Лебега. Для того, щоб такий інтеграл існував, на праву частину системи (1) накладаються додаткові умови. Нехай D – область в R^{n+1}. Припустимо, що в області D виконуються *умови Каратеодорі:*

1) функція $f(x,t)$ неперервна за x і визначена майже при всіх t, $(x,t) \in D$;

2) при кожному x функція $f(x,t)$ вимірна за t, $(x,t) \in D$;

3) має місце нерівність $\|f(x,t)\| \le m(t)$, де функція $m(t)$ інтегрована.

Означення. Система диференціальних рівнянь (1), для якої виконуються умови Каратеодорі 1)-3) називається системою *Каратеодорі*. Функція $x(t)$, що визначена на інтервалі I, називається *розв'язком рівняння Каратеодорі*, якщо вона абсолютно неперервна на кожному відрізку $(\alpha,\beta) \in I$ і майже скрізь задовольняє рівняння (1), або, що рівносильне при умовах Каратеодорі, якщо вона задовольняє (2) при будь-якому $t_0 \in I$.

Важливим є наступне твердження.

Лема 1. Нехай функція $f(x,t)$ задовольняє умовам Каратеодорі, а функція $x(t)$ вимірна, $t \in [a,b]$. Тоді $\eta(t) = f(x(t),t)$ є сумовною.

2. *Важливий приклад системи Каратеодорі.* Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) + p(t)\,. \tag{3}$$

Тут x – n- вимірний вектор фазових координат, $f(x,t)$ – n- вимірна вектор-функція, що задовольняє умовам Каратеодорі, *p(t)* – узагальнена функція, $\frac{d}{dt}\,q(t) = p(t)$, $q(t)$ – вимірна і обмежена на довільному скінченному інтервалі функція, а похідна розуміється у сенсі теорії узагальнених функцій. Зокрема, $p(t)$ може бути δ-функцією. Розглянемо заміну $x = y + q(t)$. Тоді система (3) зводиться до системи Каратеодорі

$$\frac{dy}{dt} = f(y + q(t),t)\,. \tag{4}$$

За лемою 1 права частина (4) є вимірною за змінною t. Розв'язком системи диференціальних рівнянь (3) називається функція $x(t) = y(t) + q(t)$, де $y(t)$ – розв'язок (4). Прикладом системи (3) може бути система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) + \sum_{i=1}^{\infty} v_i \delta(t - t_i)$$

де $v_i \in R^n$, t_i – фіксовані точки, $i = 1,2,\ldots$ Це є так звана *система диференціальних рівнянь з поштовхами.* Всі розв'язки такої системи у точках t_i мають скачки рівні v_i, $i = 1,2,\ldots$, а у проміжках між ними є абсолютно неперервними функціями і задовольняють рівняння $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$.

Приклад. Розв'яжемо диференціальне рівняння з поштовхами

$$\frac{dx}{dt} = ax + 3\delta(t-1)\,,$$

при умові, що $x(0) = x_0$, $t \in [0,2]$, a –дійсний параметр. Запишемо це рівняння у вигляді (2)

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (ax(s) + 3\delta(s-1))ds.$$

Виберемо $\varepsilon = 1/k$, $k > k_0 > 1$. При $t \in [0, 1-\varepsilon]$ це рівняння має вигляд

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (ax(s))ds.$$

Тому $x(t) = x_0 e^{at}$, $t \in [0,1-\varepsilon]$. На проміжку $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

$$x(1+\varepsilon) = x(1-\varepsilon) + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} ax(s)ds + 3\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \delta(s-1)ds = x(1-\varepsilon) + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} ax(s)ds + 3.$$

І при $t \in [1+\varepsilon, 2]$

$$x(t) = x(1+\varepsilon) + \int_{1+\varepsilon}^{t} (ax(s))ds = x(1+\varepsilon)e^{a(t-1-\varepsilon)}.$$

Тоді $\varepsilon \to +0$ при $k \to \infty$ і одержуємо розв'язок

$$x(t) = x_0 e^{at},\ t \in [0,1),\ x(1+0) = x(1-0) + 3 = x_0 e^a + 3,$$

$$x(t) = x(1+0)e^{a(t-1)} = (3 + x_0 e^a)e^{a(t-1)},\ t \in (1,2].$$

Задача 16. Розв'язати диференціальне рівняння другого порядку з поштовхами:

а) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 5\dfrac{dx}{dt} + 6x + \delta(t-1/3) - 4\delta(t-2/3) = 0$, $x(0) = x_0$, $\dfrac{dx(0)}{dt} = y_0$, $t \in [0,1]$;

б) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -2\dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{2}{3}\delta(t-2) - \dfrac{4}{5}\delta(t-3) = 0$, $x(0) = x_0$, $\dfrac{dx(0)}{dt} = y_0$, $t \in [0,5]$.

3. *Існування та єдність розв'язку задачі Коші.*

Теорема 1. Нехай при $t_0 \le t \le t_0 + a$, $\|x - x_0\| \le b$ функція $f(x,t)$ задовольняє умовам Каратеодорі. Тоді на відрізку $[t_0, t_0 + d]$ існує розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t),\ x(t_0) = x_0. \tag{5}$$

Тут $d > 0$, $d \le a$, $\varphi(t_0 + d) \le b$, $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} m(s)ds$.

Доведення. Для цілого $k \ge 1$ візьмемо $h = \dfrac{d}{k}$. Послідовно на відрізках $t_0 + ih \le t \le t_0 + (i+1)h$, $i = 0,1,\dots,k-1$, побудуємо наближений розв'язок, покладаючи $x_k(t) = x_0$ при $t \le t_0$,

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_k(s-h), s)ds, \qquad t_0 \le t \le t_0 + d.$$

Так як функція $f(x,t)$ задовольняє умовам Каратеодорі, а функція $x(t)$ вимірна, $t \in [a,b]$, то за лемою 1 складна функція $f(x(t),t)$ є інтегрована. Тому інтеграл має зміст і $\|x_k(t) - x_0\| \le b$, так як $\|x_k(t) - x_0\| \le \int_{t_0}^{t} m(t)dt$. Для довільних $\alpha, \beta \in [t_0, t_0 + d]$ виконується $\|x_k(\beta) - x_k(\alpha)\| \le \left|\int_{\alpha}^{\beta} m(t)dt\right| = |\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)|$.

Функція $\varphi(t)$ є неперервною на $[t_0, t_0 + d]$ і тому є рівномірно неперервною. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, таке, що при $|\beta - \alpha| < \delta$ має місце $|\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)| < \varepsilon$. Тому функції $x_k(t)$, к=1,2,... є рівностепенно неперервними і рівномірно обмеженими. За теоремою Арцела (додаток лекції 6) виберемо з цієї послідовності рівномірно збіжну підпослідовність. Її границю позначимо $x(t)$. Так як

$$\|x_k(s-h) - x(s)\| \le \|x_k(s-h) - x_k(s)\| + \|x_k(s) - x(s)\|$$

і $\|x_k(s-h) - x_k(s)\| < \varepsilon$ при $h = \frac{d}{k} < \varepsilon$, то $x_k(s-h) \to x(s)$. Так як $\|f(x,t)\| \le m(t)$ і $f(x,t)$ неперервна за x, то

$$x(t) = \lim_{k \to +\infty} x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{k \to +\infty} f(x_k(s-h), s)ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds.$$

Теорему доведено.

Зауваження. Якщо умови Каратеодорі виконані при $t_0 - a \le t \le t_0$, $\|x - x_0\| \le b$, $d \le a$, $|\varphi(t_0 - d)| < b$, то розв'язок існує при $t \in [t_0 - d, t_0]$.

Теорема 2. Нехай $(x_0, t_0) \in D$ та існує така інтегрована функція $\ell(t) > 0$, що для довільних $(x,t) \in D$, $(y,t) \in D$ має місце нерівність

$$\|f(x,t) - f(y,t)\| \le \ell(t)\|x - y\|.$$

Тоді в області *D* може існувати не більше одного розв'язку задачі (5).

Зауваження. Тут єдність розв'язку означає наступне: якщо існують два розв'язки, графіки яких проходять в D, то ці розв'язки співпадають на спільній частині їх інтервалів існування.

Доведення. Нехай $x(t)$ і $y(t)$ – розв'язки задачі (5), $z(t) = x(t) - y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Знайдемо похідну від функції $\|z\|^2 = (z, z)$. Маємо

$$\frac{d\|z\|^2}{dt} = 2\left(z, \frac{dz}{dt}\right) = 2\big((f(x,t) - f(y,t)), (x - y)\big).$$

Так як $(a, b) \le \|a\|\|b\|$, то

$$\big(f(x,t) - f(y,t), x - y\big) \le \ell(t)\|x - y\|\|x - y\| = \ell(t)\|x - y\|^2.$$

Отже, $\frac{d\|z\|^2}{dt} \le \ell(t)\|z\|^2$ і тому $\frac{d}{dt}\left(\|z\|^2 e^{-L(t)}\right) \le 0$, де $L(t) = \int_{t_0}^{t} \ell(s)ds$. Абсолютно неперервна функція $\eta(t) = \|z(t)\|^2 e^{-L(t)}$ не зростає і так як $z(t_0) = 0$, то $z(t)=0$, $t \ge t_0$. Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай (1) є системою Каратеодорі в замкненій обмеженій області *D*. Тоді кожний розв'язок цієї системи, що проходить всередині D, можна продовжити в обидві сторони до виходу на границю Г області D.

Теорема 3 доводиться аналогічно доведенню теореми про продовження розв'язку диференціального включення. Також справджуються теореми про неперервну залежність розв'язку від початкових умов, параметрів та правої частини системи Каратеодорі (1) [1].

Література

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М., 1985.

ЛЕКЦІЯ 9
ДООЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ В СИСТЕМАХ З РОЗРИВНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

1. *Основні означення.* Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \tag{1}$$

де x – n-вимірний вектор фазових координат, $f(x,t)$ – n-вимірна вектор-функція, $(x,t) \in G$, $G \subset R^{n+1}$ – область. Важливими є наступні поняття.

Означення. Функція $f(x,t)$ є *неперервною* в області G *впритул до границі* $\Gamma = \partial G$, якщо при наближенні до кожної точки Γ функція $f(x,t)$ прямує до скінченної границі (можливо, до різних границь для різних граничних точок).

Означення. Вектор-функція $f(x,t)$ називається *кусково-неперервною* в області $G \subset R^{n+1}$, якщо $G = (\bigcup_{i=1}^{N} G_i) \bigcup M$, де $G_i \subset R^{n+1}$ – область, у якій $f(x,t)$ є неперервною впритул до границі G_i, М-множина міри нуль, $M = \bigcup_{i=1}^{N} \partial G_i$.

Означення. Система диференціальних рівнянь (1) називається *системою з розривною правою частиною*, якщо $f(x,t)$ є кусково-неперервною в області G.

Означення розв'язку, як абсолютно неперервної функції, що задовольняє майже скрізь диференціальне рівняння не завжди може бути застосоване для рівняння, права частина якого розривна на гладкій поверхні $S = M$.

У випадку, якщо з однієї сторони розв'язок підходить до S, а з іншої сходить з S, *то тут розв'язок перетинає S і задовольняє систему скрізь, крім* точок перетину, у яких розв'язок не має похідної (рис.1). Тут можна застосувати стандартне означення.

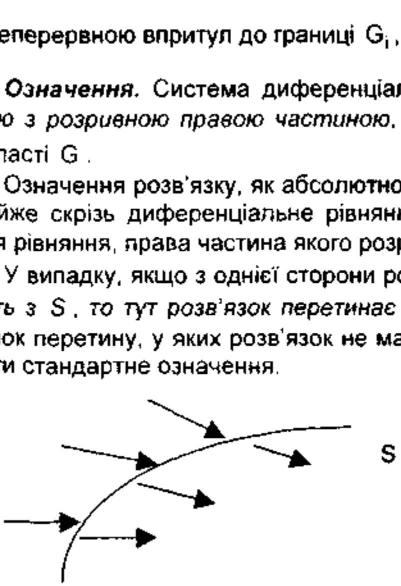

Рис. 1.

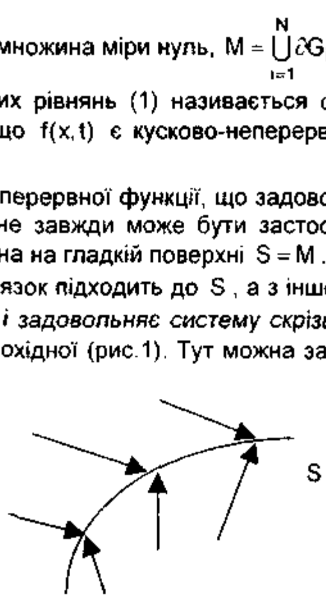

Рис. 2.

Якщо з обох сторін поверхні розриву S розв'язки наближаються до S, то постає питання про доозначення правої частини у точках розриву (рис.2).

Отже, для системи (1) будемо вважати, що $f(x,t)$ є кусково-неперервною в G, M – множина міри нуль точок розриву функції $f(x,t)$. Більшість доозначень розв'язку системи з розривною правою частиною (1) можуть бути викладеними наступним чином. Для кожної точки $(x,t) \in G$ вказується множина $F(x,t) \in R^n$. Якщо $f(x,t)$ є неперервною у точці (x,t), то $F(x,t) = \{f(x,t)\}$, тобто $F(x,t)$ складається з однієї точки. Якщо (x,t) – точка розриву функції $f(x,t)$ то множина $F(x,t)$ задається деяким способом. Як правило, множина $F(x,t)$ має містити всі граничні точки правої частини системи (1) при підході до (x,t). Тоді означення розв'язку для (1) подається наступним чином.

Означення. *Розв'язком* системи диференціальних рівнянь з розривною правою частиною (1) називають розв'язок диференціального включення

$$\frac{dx}{dt} \in F(x,t), \tag{2}$$

тобто, абсолютно неперервну вектор-функцію $x(t)$, що визначена на інтервалі $t \in I$, для якої майже скрізь на I виконується співвідношення

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F(x(t),t).$$

Розглянемо класи правих частин диференціального включення (2), які застосовуються при доозначеннях розв'язку системи диференціальних рівнянь (1).

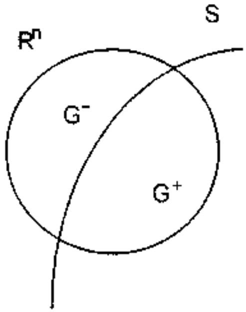

Рис.3.

2. *Найпростіше опукле доозначення*. Права частина диференціального включення (2) вибирається наступним чином: для кожного фіксованого $t = \mathrm{const}$ задається множина

$$F(x,t) = \overline{\mathrm{co}}\left\{ \lim_{y \to x} f(y,t) : (y,t) \notin M \right\}. \tag{3}$$

Якщо (x,t) – точка неперервності функції $f(x,t)$, то $F(x,t) = \{f(x,t)\}$. Якщо ж (x,t) лежить на границі перетину двох чи кількох областей $G_1,\dots,G_k$ з площиною $t = \text{const}$, то множина $F(x,t)$ є відрізок, опуклий багатокутник чи багатогранник з вершинами $f_i(x,t)$, де $f_i(x,t) = \lim\limits_{\substack{(y,t)\in G_i \\ y\to x}} f(y,t)$, $i \le k$. При цьому всі точки $f_i(x,t)$, $i = 1,2,\dots k$, належать $F(x,t)$, але не обов'язково вони є вершинами багатогранника.

3. *Важливий приклад найпростішого доозначення.* Розглянемо випадок, коли функція $f(x,t)$ розривна на гладкій поверхні S, що задається рівнянням $\varphi(x) = 0$, де функція φ є диференційованою. Поверхня S ділить деякий окіл у просторі зміни x на області G^+ та G^- (рис. 3).

Нехай $t = \text{const}$ і $\lim\limits_{\substack{y\in G^- \\ y\to x}} f(y,t) = f^-(x,t)$, $\lim\limits_{\substack{y\in G^+ \\ y\to x}} f(x,t) = f^+(x,t)$. Тоді згідно (3) $F(x,t)$ є відрізок V, що з'єднує кінці векторів $f^+(x,t)$ і $f^-(x,t)$. Розглянемо два випадки:

а) Якщо V при $t_1 < t < t_2$ лежить з однієї сторони від площини P, дотичної до поверхні S у точці x, то розв'язок при вказаних t переходить з однієї сторони поверхні S на іншу (рис. 4);

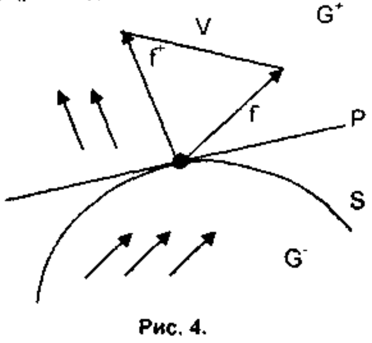

Рис. 4.

б) Якщо V перетинається з площиною P, то точка перетину є кінцем відрізку $f^0(x,t)$, що визначає швидкість руху $\frac{dx}{dt} = f^0(x,t)$ по поверхні S у просторі зміни x (рис. 5)

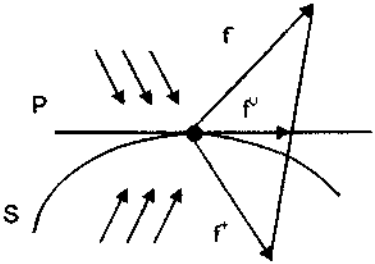

Рис. 5.

Означення. Абсолютно неперервна функція $x(t)$, що задовольняє рівнянню

$$\frac{dx}{dt} = f^0(x,t) \quad , \tag{4}$$

де $x \in S$, $f^0(x,t) \neq f^-(x,t), f^0(x,t) \neq f^+(x,t)$, називається *ковзним режимом.*

При цьому неперервна функція $x(t)$, яка на деякому інтервалі часу проходить в області G^+ (або G^-) і там задовольняє (1), а на іншій частині часового інтервалу належить поверхні S, також вважається розв'язком системи (1) в сенсі (2), (3).

Нехай N - нормаль до поверхні S у точці x, направлена у бік G^+, $f_N^-(x,t), f_N^+(x,t)$ – проекції векторів f^- та f^+ на нормаль N. Розглянемо наступні випадки:

1) Якщо $f_N^- > 0$, $f_N^+ < 0$, то вектори $f^+(x,t)$ і $f^-(x,t)$ з обох сторін поверхні S направлені до S. Тоді поблизу S при зростанні t всі розв'язки наближаються до S і не можуть зійти з S. Тому розв'язок в деякий момент t_1 виходить на S і при $t > t_1$ залишається на S (рис.6);

2) Якщо $f_N^- < 0, f_N^+ > 0$, то вектори $f^+(x,t)$, $f^-(x,t)$ з обох сторін поверхні S напрямлені від цієї поверхні (рис. 6). Тоді розв'язок при $t = t_1$, який попадає у точку поверхні S, при $t > t_1$ може зійти з S або в область G^+ або в G^-. У цьому випадку рух по поверхні S не здійснюється, він є нестійким.

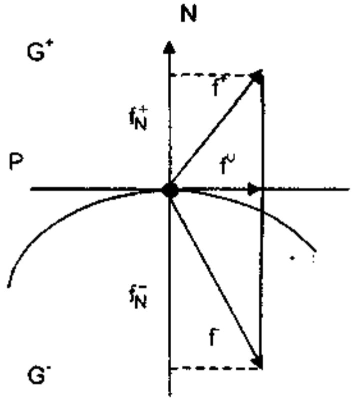

Рис. 6.

Отже, у системі (4) права частина $f^0 = \alpha f^+ + (1-\alpha)f^-, \alpha \in [0,1]$. Визначимо параметр α. Так як $(N, f^0) = 0$, то $(N, \alpha f^+ + (1+\alpha)f^-) = 0$. Звідси $\alpha(N, f^+) + (1-\alpha)(N, f^-) = 0$ і $\alpha\{(N, f^+) - (N, f^-)\} + (N, f^-) = 0$. Остаточно

$$\alpha = \frac{(N, f^-)}{(N, f^-) - (N, f^+)} = \frac{f_N^-}{f_N^- - f_N^+}.$$

Нехай $\nabla\varphi = \mathrm{grad}\varphi \neq 0$. Тоді $N = \frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|}$, $f_N^- = \frac{(\nabla\varphi, f^-)}{\|\nabla\varphi\|}$ і $f_N^+ = \frac{(\nabla\varphi, f^+)}{\|\nabla\varphi\|}$. Звідси

$$\alpha = \frac{(\nabla\varphi, f^-)}{(f^- - f^+, \nabla\varphi)}.$$

Якщо поверхня розриву *S* задається рівнянням $\varphi(x,t) = 0$, тоді аналізуються вектори $g^+ = (1, f^+)^T \in R^{n+1}, g^- = (1, f^-)^T \in R^{n+1}$ і

$$\alpha = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\nabla\varphi, f^-)}{(\nabla\varphi, f^- - f^+)}.$$

Зауваження. Якщо весь відрізок з кінцями $f^-(x,t)$ і $f^+(x,t)$ лежить на площині P, то швидкість руху $f^0(x,t)$ по поверхні S визначається неоднозначно.

Задача 17. Використовуючи найпростіше опукле доозначення, записати відповідне диференціальне включення та знайти ковзний режим для диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 2\operatorname{sign}(x).$$

4. *Опукле доозначення.* Подамо праву частину диференціального включення (2) у вигляді

$$F(x,t) = \overline{co}\{\lim_{\substack{s \to t \\ y \to x}} f(y,s) : (y,s) \notin M\}. \tag{5}$$

На відміну від найпростішого опуклого доозначення (3), у правій частині рівності (5) момент t не є фіксованим. Виявляється, що для широкого класу диференціальних рівнянь з кусково-неперервними правими частинами доозначення (3) еквівалентне доозначенню (5). Але останнє не охоплює системи типу Каратеодорі.

5. *Доозначення Філіппова.* Нехай для системи диференціальних рівнянь (1) права частина $f(x,t)$ визначена майже скрізь вимірна в області $G \subset R^{n+1}$ і для кожної замкненої обмеженої області $D \subset G$ існує майже скрізь скінченна функція $m(t)$ така, що

$$\|f(x,t)\| \le m(t).$$

Праву частину диференціального включення (2) подамо у вигляді

$$F(x,t) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu N=0} \overline{co} f(K_\delta(x)/N, t), \tag{6}$$

де $K_\delta(x) = \{y \in R^n : \|y - x\| \le \delta\}$, μ - міра Лебега. Майже скрізь

$$\bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu N=0} \overline{co} f(K_\delta(x)/N, t) = \bigcap_{\delta>0} \overline{co} f(K_\delta(x)/N_0(t), t), \text{ де } \mu N_0(t) = 0.$$

Доозначення Філіппова (17) є узагальненням попередніх доозначень та може бути застосоване до систем типу Каратеодорі.

Приклад. Механічна система з сухим тертям. Розглянемо динамічну систему

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= v, \\ m\frac{dv}{dt} &= -g(u) - f(v) + e(t), \end{aligned} \tag{7}$$

де m – маса тіла, u – положення тіла, $g(u)$ – сила пружності, $e(t)$ – зовнішня сила, $f(v)$ – сила тертя, яка є непарною і розривною при $v = 0$, $f(0)$ – тертя спокою, яке може приймати будь-яке значення між своїми найбільшим і найменшим значеннями, тобто $-f_0 \le f(0) \le f_0$.

Якщо $f_0 = \lim\limits_{v \to +0} f(v)$, то можна застосувати доозначення (3) та (5). Якщо $f_0 > \lim\limits_{v \to +0} f(v)$, то рух з початковою нульовою швидкістю $v(0) = 0$ залежить від f_0 і доозначення (3) та (5) незастосовні.

Систему (6) можна записати у вигляді диференціального включення

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in F(u, v, t),$$

де при $v \neq 0$ множина

$$F(u, v, t) = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ -g(u) - f(v) + e(t) \end{pmatrix} \right\}$$

складається з одного елемента, а при $v = 0$

$$F(u, v, t) = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ -g(u) - f(v) + e(t) \end{pmatrix} : f(v) \in [f_0, f_0] \right\}.$$

Отже, праву частину диференціального включення (2) не завжди визначають граничними значеннями функції $f(x, t)$.

Література

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М., 1985.

ЛЕКЦІЯ 10
ДООЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ В СИСТЕМАХ З РОЗРИВНИМ КЕРУВАННЯМ

1. *Приклад.* Динамічна система з неідеальним реле. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax + by_1 + cy_2,$$
$$y_1 = \operatorname{sign} x_1, \tag{1}$$
$$y_2 = \operatorname{sign} x_1,$$

де A - $n \times n$ матриця, b, c, x – n-вимірні вектори, x_1 – перша компонента вектора x. Нехай при $x_1 = 0$ величини y_1 та y_2, які моделюють роботу реле можуть приймати довільне значення від 1 до −1. Внаслідок неідеальності системи вважається, що у цьому випадку рівність $y_1 = y_2$ виконується не у кожний момент часу. Тоді система (1) може бути записана у вигляді диференціального включення

$$\frac{dx}{dt} \in F(x),$$

де

$$F(x) = \begin{cases} \{Ax + (b+c)\operatorname{sign} x_1\}, \ x_1 \neq 0, \\ \{Ax + bu_1 + cu_2 : |u_i| \le 1, i = 1,2\}, \ x_1 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Якщо $b \neq kc, k > 0$, тобто вектори b і c не є однаково направленими, то

$\{Ax + bu_1 + cu_2 : |u_i| \le 1, i = 1,2\} \supset \{Ax + (b+c)u : |u| \le 1\}$.

При застосуванні найпростішого опуклого доозначення ми отримуємо множину

$$\{Ax + (b+c)u : |u| \le 1\},$$

яка є вужча за множину (2) у точці $x_1 = 0$. Необхідність охватити такі системи приводить до розглянутого нижче способу побудови правої частини диференціального включення, яка визначає доозначення розв'язку.

2. *Доозначення з керуваннями.* Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, u_1(x,t), \ldots, u_r(x,t)), \tag{3}$$

де $x \in R^n, f$ – n-вимірна неперервна по сукупності змінних вектор-функція. Функції (скалярні чи векторні) $u_i(x,t)$ – є розривними відповідно на множинах $M_i, i = \overline{1,r}$. Множини M_i можуть мати спільні точки і навіть співпадати.

У цьому випадку поняття розв'язку системи диференціальних рівнянь (3) визначається за допомогою диференціального включення

$$\frac{dx}{dt} \in F(x,t), \tag{4}$$

права частина якого будується наступним чином. Знаходяться замкнені множини $W_i(x,t)$ можливих значень функції $u_i(x,t)$ в точці (x,t). При $i \neq j$ функції u_i і u_j можуть пробігати відповідні множини W_i і W_j незалежно одне від одного. Як правило, ця умова виконується, якщо функції u_i і u_j описують різні незалежні блоки фізичної системи. У точках неперервності функції $u_i(x,t)$ множина $W_i(x,t) = \{u_i(x,t)\}$, тобто, складається з одного елемента. Нехай (x,t) – точка розриву функції $u_i(x,t)$. Розглянемо два випадки:

а) множина $W_i(x,t)$ містить всі точки, граничні для будь-яких послідовностей $V_k \in W_i(x_k,t)$. Тобто, якщо $\{V_k\}$ збігається, то $\lim\limits_{k\to+\infty} V_k \in W_i(x,t)$;

б) множина $W_i(x,t)$ містить всі граничні точки послідовності $V_k \in W_i(x_k,t_k), \lim\limits_{k\to+\infty} t_k = t, \lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x, k = 1,2,\ldots$.

Як правило, вимагають опуклість множини $W_i(x,t), i = \overline{1,r}$. Якщо $u_i(x,t)$ – скалярні функції, то вимагають, щоб множина $W_i(x,t)$ була відрізком або точкою. Тоді праву частину диференціального включення (4) можна подати у вигляді

$$F(x,t) = f(x,t,W_1(x,t),\ldots,W_r(x,t)). \tag{5}$$

Тут $f(x,t,W_1(x,t),\ldots,W_r(x,t))$ – множина значень функції $f(x,t,u_1(x,t),\ldots,u_r(x,t))$, коли (x,t) – фіксовані, а $u_i(x,t)$ пробігають $W_i(x,t), i = \overline{1,r}$. Праву частину диференціального включення (4) можна подати також у вигляді

$$F(x,t) = \overline{co}f(x,t,W_1(x,t),\ldots,W_r(x,t)). \tag{6}$$

Зазначимо, що найпростіше опукле доозначення і опукле доозначення є частинними випадками доозначень (5), (6) відповідно.

3. *Доозначеня методом еквівалентного керування.* Доозначення методом еквівалентного керування є частинним випадком доозначень (5), (6). Воно застосовується до системи диференціальних рівнянь (3), де $f(x,t,u_1(x,t),\ldots,u_r(x,t))$ – неперервна вектор-функція, $u_i(x,t)$ – скалярні функ-

ції розривні лише на гладкій поверхні S_i, що описується рівнянням $\varphi(x)=0, i=\overline{1,r}$. Допускається перетин і співпадання поверхонь S_i.

Суть методу полягає у наступному: в точках, що належать одній чи одночасно кільком поверхням $S_1, S_2, ..., S_m$, $1 \le m \le r$, і якщо розв'язок не може зійти відразу з такої поверхні чи з перетину таких поверхонь, покладають

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t,u_1^{eq}(x,t),...,u_m^{eq}(x,t),u_{m+1}(x,t),...,u_r(x,t)). \tag{7}$$

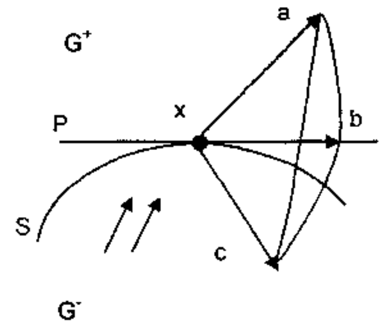

Рис. 1.

Керування $u_i^{eq}(x,t), i=1,2,...,m$ називаються *еквівалентними*. Вони визначаються так, щоб вектор f в (7) був дотичним до поверхонь $S_1, S_2, ..., S_m$ і щоб значення функції $u_i(x,t)$ належали відрізку з кінцями у точках $u_i^+=u_i^+(x,t)$, $u_i^-=u_i^-(x,t)$. Тут $u_i^+=u_i^+(x,t)$, $u_i^-=u_i^-(x,t)$ – граничні значення функції $u_i(x,t)$ з обох сторін поверхні S_i, $i=1,2,...,m$. Таким чином, функції $u_i^{eq}(x,t), i=1,2,...,m$ визначаються з системи рівнянь

$$\operatorname{grad}_x^T \varphi_i(x) f(x,t,u_1^{eq}(x,t),...,u_m^{eq}(x,t),u_{m+1}(x,t),...,u_r(x,t))=0, \tag{8}$$
$$i=1,2,...,m.$$

Розв'язком системи диференціальних рівнянь (3) називається абсолютно неперервна вектор-функція $x(t)$, яка майже при всіх t поза поверхнею S_i задовольняє системі (3), а на S_i – системі (7), $i=1,2,...,m$.

При $r=1$ отримуємо $b=f(x,t,u_1^{eq}(x,t))$, $a=f(x,t,u_1^-)$, $c=f(x,t,u_1^+)$, abc – дуга, яку пробігає кінець вектора $f(x,t,u)$, коли $u(x,t)$ змінюється від $u_i^-=u_i^-(x,t)$ до $u_i^+=u_i^+(x,t)$ (рис.1).

Система (3), яка доозначується методом еквівалентного керування, приводить до диференціального включення (4) з правою частиною (6), де $W_i(x,t)$ – відрізок з кінцями $u_i^-=u_i^-(x,t), u_i^+=u_i^+(x,t)$. Для тих $u_i(x,t)$, які є неперервними у точці (x,t) множина $W_i(x,t)$ є точкою. Права частина системи (7) є вектор з кінцем у точці перетину множини (6) з дотичною до перетину поверхонь $S_1,S_2,\dots,S_m$.

9. Приклади.

1). Нехай у системі (3) керування $u_1,\dots,u_r$ є розривними функціями відповідно на поверхнях

$S_i=\{(x,t):\varphi_i(x)=0\}, i=1,2,\dots,m$

і входять лінійно до правої частини (3), вектори $p_i=\mathrm{grad}_x\varphi_i(x)$ лінійно незалежні при $x\in S$, $i=1,2,\dots,m$. Тоді динамічну систему (3) можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt}=f_0(x,t)+B(x,t)u(x,t). \tag{9}$$

Тут $u=(u_1,\dots,u_m)^T, B(x,t)\in R^{m\times n}, 1\le m\le r.$ Інші керування $u_{m+1},\dots,u_r$ неперервні на S. Потрібно підібрати вектор $u=u^{eq}$ так, щоб вектор $\frac{dx}{dt}$ дотикався $S_1,S_2,\dots,S_m$, тобто, $\frac{dx}{dt}\perp p_i$, $i=1,2,\dots,m$. Позначимо за $G=(p_1,\dots,p_m)^T$ матрицю розмірності $n\times m$. Тоді

$$G\frac{dx}{dt}=Gf_0+GBu^{eq}=0.$$

Якщо $\det GB\neq 0$, то

$$u^{eq}=-(GB)^{-1}Gf_0. \tag{10}$$

Нехай кожна координата вектора u^{eq} задовольняє одній з нерівностей

$$u_i^-(x,t)\le u_i^{eq}\le u_i^+(x,t),\ u_i^+(x,t)\le u_i^{eq}\le u_i^-(x,t). \tag{11}$$

Підставляючи (10) в (9), отримуємо

$$\frac{dx}{dt}=f_0-B(GB)^{-1}Gf_0. \tag{12}$$

Система диференціальних рівнянь (12) описує ковзний режим. Якщо умова (11) не виконується, то руху по $S_1, S_2, \ldots, S_m$ не існує.

2). Нехай S – h-вимірна поверхня у n-вимірному просторі, в області $G_i \subset R^n$ вектор-функція $f(x,t)$ при $t \in (a,b)$ є неперервною впритул до границі, тобто

$$f(x,t) = f^j(x,t), j = 1,2,\ldots,k.$$

Тут вектор-функція $f^j(x,t)$ неперервна на замиканні G_i, $S = \bigcap_{j=1}^{k} \partial G_j$. Зафіксуємо $t \in (a,b)$, $x \in S$. Тоді найменша опукла замкнена множина $F(x,t)$, що містить точки $f(x,t)$, є сукупність всіх точок вигляду

$$v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f^j(x,t), \alpha_j \ge 0, \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1.$$

Література

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М., 1985.

ЛЕКЦІЯ 11
ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ З РОЗРИВНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

1. *Властивості доозначень.* У попередніх лекціях розглядалась система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \tag{1}$$

де x – n-вимірний вектор фазових координат, $f(x,t)$ - n-вимірна вектор-функція, яка є кусково-неперервною в області G, $(x,t) \in G$, $G \subset R^{n+1}$. Поряд з системою (1) розглядалась система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,u_1(x,t),\dots,u_r(x,t)), \tag{2}$$

де $x \in R^n$, f – n- вимірна неперервна по сукупності змінних вектор функція, $u_i(x,t)$ – є розривними відповідно на множинах M_i, $i = \overline{1,r}$. У результаті доозначення поняття розв'язку для вказаних систем приходимо до диференціального включення

$$\frac{dx}{dt} \in F(x,t). \tag{3}$$

При цьому для системи (1) права частина (3) вибиралась у наступних формах:

$$F(x,t) = \overline{co}\left\{ \lim_{y \to x} f(y,t) : (y,t) \notin M \right\},\ t = \text{const}, \tag{4}$$

$$F(x,t) = \overline{co}\{ \lim_{\substack{s \to t \\ y \to x}} f(y,s) : (y,s) \notin M\}, \tag{5}$$

$$F(x,t) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \overline{co} f(K_\delta(x)/N,t), \tag{6}$$

а для системи з керуванням (2) у вигляді

$$F(x,t) = f(x,t,W_1(x,t),\dots,W_r(x,t)), \tag{7}$$

$$F(x,t) = \overline{co} f(x,t,W_1(x,t),\dots,W_r(x,t)), \tag{8}$$

де $W_i(x,t)$ – замкнені множини значень функції $u_i(x,t)$ у точці (x,t), $i = 1,2,\dots,r$, при цьому розглядаються два варіанти:

1) множина $W_i(x,t)$ містить всі точки, граничні для будь-яких послідовностей $V_k \in W_i(x_k,t)$;

2) $W_i(x,t)$ складається з граничних точок послідовності

$$V_k \in W_i(x_k,t_k), \lim_{k\to+\infty} t_k = t, \lim_{k\to+\infty} x_k = x, k = 1,2,\dots$$

Множина $F(x,t)$ – непорожня, обмежена, замкнена, а у випадках (4)-(6), (8) – опукла. Розглянемо властивості деяких доозначень.

Лема 1. При доозначенні (4) багатозначна функція $F(x,t)$ є β- неперервною за x, а при доозначеннях (5), (7), (8) – за x і t.

Доведення. Для (4) та (5) твердження випливає з теореми 2 (лекція 4). Функція (7) є β- неперервною за теоремою 3 (лекція 4). Тоді для (8) за теоремою 1 (лекція 4) має місце β- неперервність. Лему доведено.

Задача 18. Які з доозначень (3)-(8) задовольняють основним умовам і чому?

Покажемо, що функцію (4) можна замінити на β- неперервну за x, t функцію (5), якщо для кожної з областей G_i неперервності функції $f(x,t)$ виконується *умова* γ, яка полягає у наступному: для області G_i при майже всіх t перетин границі області площиною $t = \text{const}$ співпадає з границею перетину області тією ж площиною, тобто

$$(\partial G_i)_t = \partial(G_{it})$$

при майже всіх t. Позначення M_t означає перетин множини M площиною $t = \text{const}$.

Приклад. Область G має вигляд (рис.1)

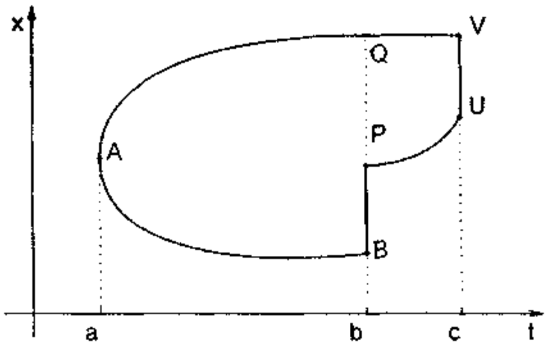

Рис. 1.

Умова $(\partial G)_t = \partial(G_t)$ не виконується в наступних точках:

1) $t = a : G_a = \varnothing$[2], $(\partial G)_a = \{A\}$;

2) $t = b : G_b = (P,Q), \partial(G_b) = \{P,Q\}, (\partial G)_b = [B,P] \cup \{Q\}$;

3) $t = c : G_c = \varnothing, (\partial G)_c = [U,V]$.

Отже, умова γ для області G виконується. Умова γ виконується для широкого класу областей. Нехай

$$H(x,t) = \left\{ \lim_{y \to x} f(y,t) : t = \text{const} \right\},\ H_0(x,t) = \{ \lim_{\substack{s \to t \\ y \to x}} f(y,s) \}.$$

Лема 2. Якщо області неперервності функції $f(x,t)$ задовольняють умові γ, то при майже всіх t виконується співвідношення $H_0(x,t) = H(x,t)$.

Доведення. Умова $(\partial G_i)_t = \partial(G_{it})$ виконується для всіх $t \notin T_i$, $\mu T_i = 0$. Виберемо точку (x,t), таку, що $t \notin T_0 = \bigcup_i T_i$. Якщо $(x,t) \in G_i$, то у цій точці $H_0(x,t) = H(x,t) = \{f(x,t)\}$. Якщо (x,t) лежить на границі G_i або кількох таких областей, то для будь-якого $v \in H_0(x,t)$ виконується

$$v = \lim f(x_k, t_k),\ x_k \to x,\ t_k \to t,$$

де $\{(x_k, t_k)\} \subset G_i$, тобто послідовність пар належить одній області. Так як $(x,t) \in (\partial G_i)_t = \partial(G_{it})$, то в G_{it} знайдеться послідовність $\{(x_m^0, t)\}$, така, що $(x_m^0, t) \to (x,t)$. Функція $f(x,t)$ – кусково-неперервна, тому $v = \lim\limits_{k \to \infty} f(x_k, t_k) = \lim\limits_{m \to \infty} f(x_m^0, t) \in H(x,t)$. Отже, $H_0(x,t) \subset H(x,t)$. Включення $H(x,t) \subset H_0(x,t)$ очевидне. Лему доведено.

Наслідок 1. При умові γ розв'язки диференціальних включень

$$\frac{dx}{dt} \in F(x,t) = \mathrm{co}H(x,t),$$

$$\frac{dx}{dt} \in F_0(x,t) = \mathrm{co}H_0(x,t)$$

співпадають. Функція $F_0(x,t) = \mathrm{co}H_0(x,t)$ є β- неперервною за x, t.

Доведення. У силу леми 2 $F_0(x,t) = F(x,t)$ майже при всіх t. За теоремою 2 (лекція 4) багатозначні відображення $H_0(x,t)$, $F_0(x,t)$ є β–неперервними. Наслідок доведено.

---

[2] Множина G – відкрита і тому не містить своєї границі.

Виходячи з властивостей доозначень з правою частиною (4), (5), (8), питання існування розв'язку, стійкості, неперервної залежності від початкових умов та правої частини для системи диференціальних рівнянь з розривною правою частиною може бути проаналізовано на основі теорем лекцій 6 і 7. Для диференціального включення (3) з правою частиною (6), тобто, у випадку доозначення Філіппова, теорема про існування розв'язку задачі Коші формулюється наступним чином.

Теорема 1. Нехай в області G вектор-функція $f(x,t)$ вимірна і майже скрізь $\|f(x,t)\| \le m(t)$, $m(t)$ - інтегрована функція. Тоді для довільної точки $(x_0,t_0) \in G$ існує розв'язок диференціального включення (3) з правою частиною (6) при умові $x(t_0) = x_0$ і він визначений по меншій мірі на відрізку $[t_0 - d, t_0 + d]$, де d є таким, що циліндр $\| x - x_0 \| \le r$, $\| t - t_0 \| \le d$ весь міститься всередині G, $r = \max\{ \int\limits_{t_0-d}^{t_0} m(s)ds; \int\limits_{t_0}^{t_0+d} m(s)ds\}$. При вказаних умовах розв'язок може бути продовжений до границі області G.

2. *Єдиність розв'язку.* Для систем диференціальних рівнянь з розривною правою частиною вводиться поняття правої та лівої єдиності.

Означення. Говорять, що для системи диференціальних рівнянь (1) виконується *права єдиність* у точці $(x_0,t_0) \in D$, якщо існує момент $t_1 > t_0$, такий, що кожні два розв'язки системи (1), які задовольняють умові $x(t_0) = x_0$, співпадають при $t \in [t_0, t_1]$ або на тій частині цього відрізку, на якій вони обидва визначені. Для (1) має місце *права єдиність в області* D (відкритій або замкненій), якщо для довільної точки $(x_0,t_0) \in D$ кожні два розв'язки, що задовольняють умові $x(t_0) = x_0$, співпадають на кожному відрізку $t \in [t_0, t_1]$, на якому вони обидва існують і проходять в цій області. Аналогічно визначається *ліва єдиність* у точці і в області – єдиність при $t_1 \le t \le t_0$.

Задача 19. Довести, що: з правої єдиності в кожній точці області D випливає права єдиність у D; з правої єдиності в області D випливає права єдиність в кожній внутрішній точці цієї області.

Праву частину диференціального включення (3) будемо розглядати у вигляді (4) і (5)

Теорема 2. Нехай права частина $f(x,t)$ системи диференціальних рівнянь (1) в області D розривна тільки на множині M міри нуль і існує така інтегрована функція $l(t)$, що для майже всіх точок (x,t) і (y,t) з D при $\varepsilon_0 > 0$, $\|x - y\| < \varepsilon_0$ справджуються нерівності

$$\|f(x,t)\| < l(t),$$

$$\big(x - y, f(x,t) - f(y,t)\big) \le l(t)\|x - y\|^2 . \tag{9}$$

Тоді для (1) при доозначеннях (4), (5) має місце права єдиність в області D.

Доведення. З (9) випливає, що для майже всіх t та будь-яких x^*, y^* виконується нерівність

$$(x^* - y^*, v - w) \le l(t)\|x^* - y^*\|^2 . \tag{10}$$

Тут v і w –довільні значення з множини V і W граничних значень функції $f(x,t)$ при $x \to x^*$ та $x \to y^*$ відповідно. Нерівність (10) збережеться, якщо умову $v \in V$ замінити $v \in \overline{co}V$,а умову $w \in W$ – на $w \in \overline{co}W$. Тоді в силу доозначень (4), (5) та нерівності (10) на розв'язках диференціального включення (3)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x(t) - y(t)\|^2 = \left(x(t) - y(t), \frac{d}{dt}x(t) - \frac{d}{dt}y(t)\right) \le l(t)\|x(t) - y(t)\|^2 .$$

Позначимо $z(t) = x(t) - y(t)$. Тоді майже скрізь $\frac{d\|z(t)\|^2}{dt} \le 2l(t)\|z(t)\|^2$ і тому

$$\frac{d}{dt}(\|z(t)\|^2 e^{-L(t)}) \le 0, \tag{11}$$

де $L(t) = \int_{t_0}^{t} l(s)ds$. Абсолютно неперервна функція $\gamma(t) = \|z(t)\|^2 e^{-L(t)}$ у силу (11) не зростає. Так як $z(t_0) = 0$, то $z(t) = x(t) - y(t) = 0$ майже скрізь, $t \ge t_0$. Теорему доведено.

Література

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М., 1985.

РОЗДІЛ 4
АНАЛІЗ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

ЛЕКЦІЯ 12
СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ: ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

1. *Основні положення.* Нехай $X \subset R^n$ - фазовий простір і задана система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t).$$

Тут $x \in X$, $t \in R^1$. Позначимо $x(t,x_0,t_0)$ розв'язок системи при умові $x(t_0) = x_0$. Задана множина $I_t \subset X \times R^1$ і оператор $A_t : I_t \to J_t$, $J_t \subset X \times R^1$. Процес відбувається наступним чином: точка (x_0,t_0) в силу системи (1) переходить в момент t у точку $(x(t),t)$, $x(t) = x(t,x_0,t_0)$. Рух здійснюється до моменту $t = t_1 > t_0$, такого, що $(x(t_1),t_1) \in I_{t_1}$. У момент t_1 точка $P_1 = (x(t_1),t_1)$ переходить в точку $A_{t_1}(P_1) = (\hat{x}(t_1),t_1) \in J_{t_1}$ і рухається далі по кривій $(x(t),t)$, де $x(t) = x(t,\hat{x}(t_1),t_1)$ в силу системи до того часу, поки знову не попаде у множину I_{t_2} в деякий момент $t_2 > t_1$. Далі під дією оператора A_t точка $P_2 = (x(t_2),t_2)$ переходить у точку $A_{t_2} P_2 = (\hat{x}(t_2),t_2) \in J_{t_2}$ і рухається далі по кривій $(x(t),t)$, $x(t) = x(t,\hat{x}(t_2),t_2)$ до тих пір, поки не вийде на множину I_t. Математично цей процес прийнято записувати так:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \qquad (x,t) \notin I_t, \tag{1}$$

$$\Delta x \Big|_{(x,t)\in I_t} = A_t x - x. \tag{2}$$

Тут $\Delta x = x(t+0) - x(t-0)$. Співвідношення (1)-(2) називаються *системою диференціальних рівнянь з імпульсним впливом.*

Означення. Розв'язком (1), (2) називається функція $\varphi(t)$, що задовольняє (1) поза множиною I_t і яка має розриви першого роду в точках I_t зі скачками $\Delta x = \varphi(t+0) - \varphi(t-0) = A_t\varphi(t-0) - \varphi(t-0)$.

Можливі наступні варіанти: розв'язок співвідношень (1), (2)

– не підпадає миттєвому впливу, тобто інтегральна крива системи рівнянь (1) не перетинає множину I_t, або перетинає її в нерухомих точках оператора A_t;

– підпадає миттєвому впливу скінченну кількість разів;

– підпадає миттєвому впливу зліченну кількість разів – інтегральна крива перетинає I_t в зліченій кількості точок, що не є нерухомими точками оператора A_t.

Серед розв'язків, що розглянуті в останньому випадку, виділяють розв'язки, що:

а) залишаються в I_t починаючи з деякого моменту $t_1 > t_0$;

б) мають в I_t точку скупчення.

Рух у випадку а) по траєкторії, що залишається в I_t є, починаючи з деякого моменту, послідовним перекиданням зображуючої точки $P_t = (x(t), t)$ з положення $(x(t_1), t_1)$ в положення $(A_{t_1}x(t_1), t_1)$, далі в $\left(A_{t_1}^2 x(t_1), t_1\right)$, а з нього в $\left(A_{t_1}^3 x(t_1), t_1\right)$ і так далі. В б) рух по траєкторії, що має точку скупчення в I_t, є рухом, який при наближенні до деякого моменту $t_1 > t_0$ зліченне число разів попадає і покидає множину I_t і тому цей рух не можна продовжити до моменту $t = t_1$. У реальних системах в околі точки $t = t_1$ у випадку б) відбувається народження якісно нового типу руху, або це може означати, що модель невірно описує фізичний процес. При розгляді систем з імпульсним впливом виникають ті ж задачі, що і для звичайних диференціальних рівнянь (проблеми існування і продовження розв'язку, єдиність розв'язку, стійкість розв'язку, оптимізація). Але є і специфічні задачі.

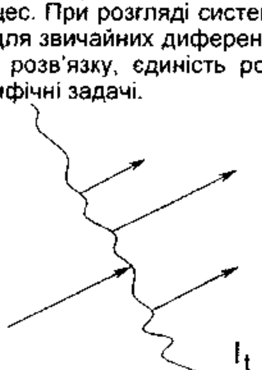

Рис. 1

Багато в чому специфіка досліджень задач, пов'язаних з співвідношеннями (1), (2), визначається властивостями оператора A_t.

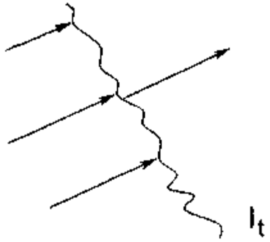

Рис.2

Так якщо A_t не є однозначним, то виникають задачі, в яких можливе "миттєве" розщеплення розв'язку на кілька розв'язків (рис.1). Якщо A_t не є взаємно однозначним, то можлива ситуація, коли кілька розв'язків миттєво зливаються в один розв'язок (рис. 2).

Не менш специфічні задачі виникають, якщо допустити, що множина $A_tS_t = \varnothing$ для деякого $S_t \subset I_t$. Таке припущення дозволяє розглядати "смертні" системи: зображуюча точка P_t, що попадає в S_t, переводиться оператором A_t в порожню множину, тобто "помирає". Множина S_t називається множиною "загибелі" траєкторії. Для вказаного випадку виникають задачі про середній час "життя" рухомої точки, про ймовірність "смерті" за час $t_0 \le t \le T$ і т.і.

Різнобарвність систем типу (1), (2) визначається типом правих частин, типом множини I_t, типом оператора A_t і дозволяє провести глибокі класифікації. На даний момент не існує класифікації систем з імпульсним впливом по властивостям множини I_t. А за характером імпульсного впливу розрізняють три істотно різні класи:

1) системи, що підпадають під імпульсний вплив у фіксовані моменти часу;

2) системи, що підпадають під імпульсний вплив в момент попадання зображуючої точки P_t на задані поверхні $t = \tau_i(x)$ розширеного фазового простору;

3) розривні динамічні системи.

Для розривних динамічних систем $f(x,t) = f(x)$, $\Gamma = I_t \subset X$, $\Gamma_0 = J_t \subset X$, $A_t = A$ для всіх t, тобто система (1)-(2) має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x \notin \Gamma, \tag{3}$$

$$\Delta x \Big|_{x \in \Gamma} = Ax - x = I(x). \tag{4}$$

Отже, рух фазової точки в такій системі відбувається по одній з траєкторій системи (3) в проміжку між попаданням фазової точки на множину Γ. В момент попадання точка x(t) "миттєво" перекидається оператором A у точку $y = Ax$ множини Γ_0.

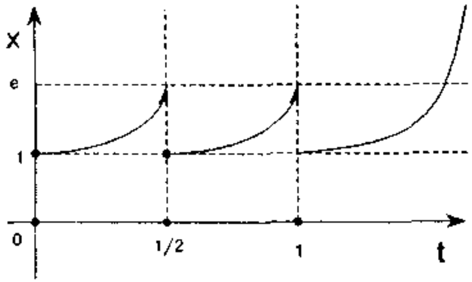

Рис. 3.

2. *Приклад.* Розглянемо диференціальне рівняння з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = 2x \; , \tag{5}$$

$$x(0) = 1 \; , \tag{6}$$

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i} = \ln(x(\tau_i - 0)) - x(\tau_i - 0),\; i = 1,2,\; t \ge 0 \; , \tag{7}$$

де $\tau_1 = 1/2,\; \tau_2 = 1$.

Це є рівняння, що підпадає під імпульсний вплив у фіксовані моменти часу. Розв'яжемо його. Загальний розв'язок (5) у формі Коші $x(t) = x_0 e^{2t},\; x_0 = x(0)$. На $t \in [0, 1/2)$ отримуємо $x(t) = e^{2t},\; x(1/2 + 0) = \ln(e) = 1$.

При $t \in (1/2, 1)$ розв'язок $x(t) = e^{2(t - \frac{1}{2})} = e^{-1}e^{2t},\; x(1+0) = 1$ і $x(t) = e^{2(t-1)}$, $t \in (1, +\infty)$

Задача 20. Розв'язати рівняння з імпульсним впливом

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + \sin t,\; t \ge t_0 \; , \qquad x(t_0) = x_0 \; , \qquad x(\tau_i + 0) = x(\tau_i - 0) + \cos(\tau_i) \; ,$$

$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N$, де N – фіксоване натуральне число.

3. Системи, що підпадають під імпульсний вплив у фіксовані моменти часу. Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t),\; t \ne \tau_i \; , \tag{8}$$

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i} = \Phi_i(x) \; . \tag{9}$$

У цій системі множиною I_t є послідовність гіперплощин $t = \tau_i$ розширеного фазового простору, $\{\tau_s\}$ – дискретна множина (скінченна чи зліченна). Оператор A_t визначається тільки для $t = \tau_i$, тому позначимо $A_i = A_{\tau_i}$ і

$$A_i : x \to A_i x = x + \Phi_i(x) .$$

Розглянемо деякі загальні теореми стосовно розв'язків системи з імпульсним впливом (8), (9). Припустимо, що сукупність розв'язків системи (8) має наступні властивості:

1) *(непродовжуваність).* Кожний розв'язок $x(t)$ системи (8) є неперервною функцією, що визначений на відрізку (a,b), який є своїм для кожного розв'язку $(a < b, a,b \in [-\infty,+\infty])$. При цьому, якщо $a > -\infty, (b < \infty)$, то $\|x(a+0)\| = \infty$ (відповідно $\|x(b-0)\| = \infty$);

2) *(локальний характер).* Якщо деяка функція $x(t), t \in (a,b)$ задовольняє умові 1) і для кожного $t_0 \in (a,b)$ існує $\varepsilon > 0$, таке, що на кожному з інтервалів $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ та $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ функція $x(t)$ співпадає з деяким розв'язком, то $x(t)$ буде також розв'язком;

3) *(розв'язність задачі Коші).* Для довільних t_0, x_0 існує щонайменше один розв'язок $x(t)$, $t \in (a,b)$, системи (8), для якого $t_0 \in (a,b)$ і $x(t_0) = x_0$.

Ці вимоги виконуються, зокрема, для системи (8), права частина якої неперервна, або задовольняє умовам Каратеодорі.

Оператор A_i, взагалі кажучи, не обов'язково однозначний, тобто, $A_i x$ може бути множиною (в тому числі і порожньою), $x \in R^n$. Має місце наступне твердження.

Теорема 1. Якщо розв'язки системи диференціальних рівнянь (8) задовольняють умовам 1)–3), то для довільних $t_0 \in R^1, x_0 \in R^n$ існує, щонайменше, один розв'язок $x(t), t \in (a,b)$ системи з імпульсним впливом (8), (9), для якого $a < t_0 \le b, a,b \in [-\infty,+\infty]$, $x(t_0) = x_0$ (при $t_0 < b$) або $x(t_0 - 0) = x_0$ (при $t_0 = b$). При цьому:

1) якщо $a > -\infty$, то або $\|x(a+0)\| = \infty$, або $a = \tau_i, \|x(a+0)\| < \infty$ і $x(a+0) \notin A_i R^n$;

2) якщо $b < \infty$, то або $\|x(b-0)\| = \infty$, або $b = \tau_j, x(b-0)$ існує і $A_j x(b-0) = \emptyset$.

Зауваження. У теоремі 1 умови 1) – 2) означають, що розв'язок не можна продовжити поза інтервал (a,b) в силу системи (8), (9).

При довільному $M \subseteq R^n$ позначимо за $g(t,t_0)M$ множину значень $x(t)$ для всіх розв'язків системи (8), для яких $x(t_0) \in M$. Тоді аналогічна множина для розв'язків системи (8),(9) має вигляд $G(t,t_0)M$, де відображення G при $t > t_0$ визначається формулою:

$$G(t,t_0)M = g(t,\tau_i)A_i g(\tau_i,\tau_{i-1})A_{i-1}...A_j g(\tau_j,t_0)M,$$
$$\tau_i < t < \tau_{i+1}, i = j-1, j, ..., j = \min\{i : \tau_i \geq t_0\}.$$

Задача 21. Який вигляд буде мати це співвідношення при $t < t_0$?

Приклад. Розв'яжемо задачу Коші для рівняння з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = 1, t \neq \tau_i, \ \Delta x\Big|_{t=\tau_i} = \ln(2-x), x(0) = 0, \ \tau_i = i, i = 1,2,\dots.$$

Виявляється, що розв'язок $x(t)$ не можна продовжити на відрізок [0,2] і момент $t = 2$ є моментом гибелі вказаного розв'язку. Дійсно при $t \in [0,2)$ отримуємо $x(t) = t, \ln(2 - x(1)) = 0$. У момент $t = 2$ $x(2) = 2$. Функція $\ln(2-x)$ у точці $x = x(2)$ не визначена, а тому вказаний розв'язок у момент $t = \tau_2$ гине.

І взагалі, випадок, коли $A_i x^* = \emptyset$ відповідає *"загибелі"* траєкторії, що прийшла у точку x^* в момент τ_i. Множина $\{x : A_i x = \emptyset\}$ є *"множиною загибелі"* траєкторії в момент τ_i.

Теорема 2. Для єдності розв'язку задачі Коші системи (8), (9) в напрямку росту *t* при довільних початкових даних x_0, t_0 необхідно і достатньо, щоб виконувались наступні умови:

1) система диференціальних рівнянь (8) є системою, для якої виконується єдність розв'язку задачі Коші при довільному $t_0 \neq 0$;

2) при довільному $t_0 = \tau_i, x_0 \in A_i R^n$ кожна з множин $A_i x_0$ містить не більше одного елементу.

Зауваження. У напрямку спадання *t* теорема формулюється аналогічно, якщо A_i замінити на A_i^{-1}.

Отже, під дією оператора A_i розв'язки можуть зливатися, розщеплюватись і система (8),(9) може втрачати єдність розв'язку. Для необмежуваної продовжуваності розв'язку системи (8), (9) вперед та назад необхідно і достатньо, щоб цю властивість мала система (8) і $A_i R^n = R^n$ для всіх *i*.

Приклад. Розглянемо задачу Коші для рівняння з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2, t \neq \tau_i, \tag{10}$$

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i} = -1, \tau_i = \frac{\pi i}{4}, x(0) = 0, \ i = 0,1,\dots. \tag{11}$$

Оскільки розв'язок рівняння (10) є $x(t) = \mathrm{tg}\,t \to \infty$ при $t \to \frac{\pi}{2}$, то розв'язок (10) не є продовжуваний на інтервал $[0, \frac{\pi}{2}]$. Але за рахунок імпульсного впливу цей розв'язок можна продовжити на $t \ge 0$. Дійсно, розв'язок *x(t)* системи з імпульсним впливом (10), (11) є періодичною функцією з періодом $\frac{\pi}{4}$ і

$x(t) = \mathrm{tg}(t - \frac{\pi}{4}i), t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0,1,\dots$.

Припустимо, що розв'язки системи (8) задовольняють наступній властивості:

4) *(локальна компактність).* Для довільних t_0, x_0 існує таке $\varepsilon > 0$, що якщо $|t_1 - t_0| < \varepsilon$, $\|x_1 - x_0\| \le \varepsilon$, то будь-який розв'язок *x(t)* для якого $x(t_0) = x_1$, існує на відрізку $t_0 - \varepsilon \le t \le t_0 + \varepsilon$ і сукупність цих розв'язків при фіксованих t_0, x_0, ε компактна в $C(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

Припустимо також, що відображення A_i напівнеперервне зверху.

Теорема 3. Нехай при вказаних припущеннях і при заданих $t_0, x(t_0)$ та при умові, що компакт $K \subset R^n$ є непорожнім, всі розв'язки системи диференціальних рівнянь (8), для яких $x(t_0) \in K$, існують на $t_0 \le t \le T, t_0 < T < \infty$. Тоді для деякого $\varepsilon > 0$ будь-який розв'язок $\overline{x}(t)$, що задовольняє умові $\rho(\overline{x}(t_1), K) \le \varepsilon, |t_1 - t_0| \le \varepsilon$, існує на відрізку $t_0 - \varepsilon \le t \le T$ і сукупність цих розв'язків при фіксованих t_0, K, T, ε є компактною в метриці рівномірного відхилення для кусково неперервних функцій. Якщо ж $t_0 = \tau_i$, то це є справедливим при $t_1 \le t_0$.

Наслідок 1. Якщо в умовах теореми 3 розв'язок задачі Коші системи (8) єдиний , а A_i - бієкція, то розв'язок $x(t, x_0, t_0)$ системи (8), (9) неперервно залежить від $t_0 \ne \tau_i$, x_0 на кожному замкненому інтервалі, на якому $x(t, x_0, t_0)$ є визначеним. При $t_0 = \tau_i$ ця залежність неперервна зліва.

Наслідок 2. В умовах теореми 3 множина $G(t, t_0)K$, $t \in [t_0, T]$ є компактом при кожному t, неперервно залежить від $t \ne \tau_i$, а при $t = \tau_i$ ця залежність неперервна зліва і $G(\tau_i + 0, t_0)K = A_i G(t, t_0)K$. Залежність $G(t, t_0)K$ від *K* напівнеперервна зверху рівномірно по *t*.

Література

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К., 1987.

ЛЕКЦІЯ 13
СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

1. *Однорідні системи.* Розглянемо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,\ t \neq \tau_i, \tag{1}$$

$$\Delta x\,|_{t=\tau_i} = B_i x\ . \tag{2}$$

Тут $A(t)$ – неперервна на проміжку $I = (a,b)$ матриця розмірності $n \times n$, B_i – постійні матриці розмірності $n \times n$, $\tau_i \in I$ – фіксований момент часу, $\tau_i < \tau_{i+1}$, $i = 1,2,\ldots$.

Теорема 1. Нехай проміжок $[t_0, t_0 + h] \subset I$ містить скінченне число точок τ_i. Тоді для будь-якого $x_0 \in R^n$ розв'язок $x(t, x_0, t_0)$ системи (1), (2) існує при всіх $t \in [t_0, t_0 + h]$. Крім того, якщо для всіх i, таких, що $\tau_i \in [t_0, t_0 + h]$, матриці $E + B_i$ не є виродженими, то $x(t, x_0, t_0) \neq x(t, y_0, t_0)$ при всіх $t \in [t_0, t_0 + h]$ як тільки $x_0 \neq y_0$. Тут E – одинична матриця.

Доведення. Нехай $t_0 < \tau_j < \tau_{j+1} < \ldots < \tau_{j+k} \leq t_0 + h$. За теоремою Пікара [2] для довільного $x_0 \in R^n$ розв'язок $x(t) = \varphi_j(t), \varphi_j(t_0) = x_0$ системи (1) на проміжку $[t_0, \tau_j]$ існує і єдиний. Покладемо $x(t, x_0, t_0) = \varphi_j(t)$ при $t \in [t_0, \tau_j]$. У силу (2) при $t = \tau_j$ маємо

$$x(\tau_j + 0, x_0, t_0) = (E + B_j)x(\tau_j, x_0, t_0) = x_j^{+}.$$

У силу теореми Пікара на проміжку $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ існує єдиний розв'язок $x = \varphi_{j+1}(t)$, $\varphi_{j+1}(\tau_j) = x_j^+$ системи (1). Тому $x(t, x_0, t_0) = \varphi_{j+1}(t)$ при $t \in (\tau_{j+1}, \tau_{j+2})$ та

$$x_{j+1}^{+} = (E + B_{j+1})x(\tau_{j+1}, x_0, t_0)$$

і т.д. Оскільки за умовою $[t_0, t_0 + h]$ містить скінчене число точок τ_j, то таким способом можна побудувати розв'язок $x(t, x_0, t_0)$ системи (1), (2) на всьому проміжку. У випадку, якщо $t_0 = \tau_j$, беруть $x(t_0 + 0, x_0, t_0) = (E + B_j)x_0$ і процедура побудови розв'язку відбувається аналогічно. За теоремою Пікара, якщо $x(\tau_j,x_0,t_0)\neq x(\tau_j,y_0,t_0)$, то $x(t,x_0,t_0)\neq x(t,y_0,t_0)$ для $t\in(t_j,t_{j+1}]$. З умови невиродженості матриці $E+B_j$ випливає наступне: оскільки

$$x(\tau_j+0,y_0,t_0)-x(\tau_j+0,x_0,t_0)=(E+B_j)(x(\tau_j,y_0,t_0)-x(\tau_j,x_0,t_0)),$$

то з $x(\tau_j,y_0,t_0)\neq x(\tau_j,x_0,t_0)$ випливає $x(\tau_j+0,x_0,t_0)\neq x(\tau_j+0,y_0,t_0)$. Теорему доведено.

Зауваження. Якщо матриця $E+B_i$ вироджена, то розв'язок $x(t,x_0,t_0)$ можна продовжити однозначно лише до моменту τ_i. Далі продовжити цей розв'язок або неможливо, або існує кілька розв'язків.

Теорема 2. Множина всіх розв'язків лінійної однорідної системи (1), (2) на відрізку $[a,b]$ утворює n – вимірний векторний простір.

Доведення. Нехай $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ – розв'язки системи (1), (2) на проміжку $[a,b]$, $c_1,c_2\in R^1$. Тоді $c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)$ є розв'язком системи (1), (2). Нехай $t\in[a,b]$. Розглянемо відображення g_t множини розв'язків (1), (2) в R^n, таке, що, якщо $\varphi(t)$ – розв'язок (1), (2), то $g_t\varphi=\varphi(t)$. Це відображення є лінійним і його образ за теоремою 2 є множина в R^n. Ядро відображення g_t рівне нулю, бо за теоремою 1 з $\varphi(t_0)=0$ випливає $\varphi(t)\equiv 0$. Отже g_t – ізоморфізм між множиною розв'язків і R^n. Теорему доведено.

Базис множини всіх розв'язків системи (1), (2) назвемо *фундаментальною системою розв'язків* системи (1), (2). З теореми 2 випливає, що фундаментальна система складається з n елементів, будь-які $n+1$ розв'язки є лінійно залежні. Позначимо через $\Phi(t)$ матрицю розмірності $n\times n$, стовпчиками якої є розв'язки з фундаментальної системи. Така матриця називається *фундаментальною*. Якщо $\Phi(t_0)=E$, то така матриця називається *матрицантом* системи (1), (2). Фундаментальна матриця системи (1), (2) задовольняє матричному рівнянню з імпульсним впливом

$$\frac{d\Phi}{dt}=A(t)\Phi\ ,\ t\neq\tau_i,\ \ \Delta\Phi|_{t=\tau_i}=B_i\Phi\,. \tag{3}$$

Нехай матриця $X(t,\tau)=E$ є розв'язок матричної задачі Коші

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X\,,\ X(\tau,\tau)=E\,,$$

тобто є матрицантом системи (1). Тоді будь-який розв'язок системи (3) можна подати у вигляді

$$\Phi(t)=X(t,\tau_{j+k})(E+B_{j+k})X(\tau_{j+k},\tau_{j+k-1})(E+B_{j+k-1})\dots(E+B_j)X(\tau_j,t_0)\Phi(t_0),$$

$$\tau_{j-1}<t_0\leq\tau_j<\tau_{j+k}<t\leq\tau_{j+k+1}\,. \tag{4}$$

Зокрема, для матриціанту $\Phi(t,t_0)$, нормованого в момент $t=t_0$ є справедливим співвідношення

$$\Phi(t,t_0) = X(t,\tau_{j+k})(E+B_{j+k})\prod_{p=k}^{1} X(\tau_{j+p},\tau_{j+p-1})(E+B_{j+p-1})X(\tau_j,t_0).$$

З (4) та формули Якобі (див. додаток А) отримуємо

$$\det\Phi(t) = \det X(t,\tau_{j+k})\det(E+B_{j+k})\times$$

$$\times\prod_{p=k}^{1}\det X(\tau_{j+p},\tau_{j+p-1})\det(E+B_{j+p-1})\det X(\tau_j,t_0)\det\Phi(t_0) =$$

$$\exp\left\{\int_{\tau_{j+k}}^{t} spA(s)ds\right\}\det(E+B_{j+k})\times$$

$$\times\prod_{p=k}^{1}\exp\left\{\int_{\tau_{j+p-1}}^{\tau_{j+p}} spA(s)ds\right\}\det(E+B_{j+p-1})\exp\left\{\int_{t_0}^{\tau_j} spA(s)ds\right\}\det\Phi(t_0)$$

і остаточно

$$\det\Phi(t) = \det\Phi(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} spA(s)ds\right\}\prod_{p=1}^{k+1}\det(E+B_{j+p-1}),$$

$$\tau_{j-1} < t_0 \le \tau_j \le \tau_{j+k} < t \le \tau_{j+k+1}.$$

Отже, якщо матриці $E+B_i$, $\Phi(t_0)$ є невиродженими, то $\Phi(t)$ є невироджена. Знайдемо $\Phi^{-1}(t)$. Маємо

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi^{-1}(t_0)X^{-1}(\tau_j,t_0)(E+B_j)^{-1}\ldots$$

$$(E+B_{j+k-1})^{-1}X^{-1}(\tau_{j+k},\tau_{j+k-1})(E+B_{j+k})^{-1}X(t,\tau_{j+k})^{-1} =$$

$$= \Phi^{-1}(t_0)X^{-1}(\tau_j,t_0)\prod_{p=1}^{k}(E+B_{j+p-1})^{-1}X^{-1}(\tau_{j+p},\tau_{j+p-1})(E+B_{j+k})^{-1}X^{-1}(t,\tau_{j+k}),$$

$$\tau_{j-1} < t_0 \le \tau_j < \tau_{j+k} < t \le \tau_{j+k+1}.$$

Звідси

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(\sigma) = X(t,\tau_{j+k})\prod_{p=k}^{s+1}\left[(E+B_{j+p})X(\tau_{j+p},\tau_{j+p-1})\right](E+B_{j+s})X(\tau_{j+s},\sigma),$$

$$\tau_{j+s-1} < \sigma < \tau_{j+s} < \tau_{j+k} < t \le \tau_{j+k+1}.$$

Зокрема, для матриціанту $\Phi(t,t_0)$ маємо є справедливим співвідношення

$$\Phi(t,t_0) = X(t,\tau_{j+k})\prod_{p=k}^{j+1}\left[(E+B_{j+p})X(\tau_{j+p},\tau_{j+p-1})\right](E+B_j)X(\tau_j,t_0),$$

$$\tau_{j-1} < t_0 \le \tau_j < \tau_{j+k} < t \le \tau_{j+k+1}.$$

Відмітимо, що за допомогою $\Phi(t,t_0)$ будь-який розв'язок системи (1), (2) з умовою Коші $x(t_0) = x_0$ можна записати у вигляді

$$x(t,x_0,t_0) = \Phi(t,t_0)x_0.$$

2. *Неоднорідні системи.* Розглянемо лінійну неоднорідну систему з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),\ t \ne \tau_i,\quad \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x + a_i, \tag{5}$$

де $A(t)$, B_i, τ_i задовольняють вимогам, аналогічним до вимог щодо (1), (2), $f(t)$ – вектор-функція, неперервна на I, $a_i \in R^n$ - фіксовані вектори.

Зауваження. В даному пункті для спрощення запису вважаємо, що $x(\tau_i - 0) = x(\tau_i)$. Тобто, в (5) $\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x + a_i$ означає $x(\tau_i + 0) = (E + B_i)\,x(\tau_i) + a_i$.

Теорема 3. Якщо $x = \varphi(t)$ є розв'язок системи (1), (2) і $x = \psi(t)$ є розв'язок (5), то функція $x = \varphi(t) + \psi(t)$ є розв'язок (5). І навпаки, якщо $x = \varphi_1(t)$ і $x = \varphi_2(t)$ є розв'язки системи (5), то $x = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ є розв'язком (1), (2).

Задача 22. Довести теорему 3.

Нехай $S(t)$ є неперервно диференційованою при $t \in [a,b]/\{\tau_i\}$, невиродженою матрицею. Підставивши $x = S(t)y$ в (5), отримуємо

$$S(t)\frac{dy}{dt} + \frac{dS}{dt}y = A(t)S(t)y + f(t),\ t \ne \tau_i,$$

$$S(\tau_i + 0)y(\tau_i + 0) - S(\tau_i)y(\tau_i) = B_i S(\tau_i)y(\tau_i) + a_i.$$

Звідси

$$\frac{dy}{dt} = S^{-1}(t)\left(A(t)S(t) - \frac{dS}{dt}\right)y + S^{-1}(t)f(t),\ t \ne \tau_i, \tag{6}$$

$$S(\tau_i + 0)y(\tau_i + 0) - S(\tau_i + 0)y(\tau_i) + S(\tau_i + 0)y(\tau_i) - S(\tau_i)y(\tau_i) = B_i S(\tau_i)y(\tau_i) + a_i.$$

Проводимо перетворення над останнім виразом

$$S(\tau_i + 0)(y(\tau_i + 0) - y(\tau_i)) + \Delta Sy|_{t=\tau_i} = B_i Sy|_{t=\tau_i} + a_i,$$

і остаточно

$$\Delta y|_{t=\tau_i} = S^{-1}(\tau_i + 0)(-\Delta S + B_i S)y|_{t=\tau_i} + S^{-1}(\tau_i + 0)a_i. \tag{7}$$

Нехай $S(t)$ є фундаментальна матриця системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, t \neq \tau_i, \Delta x|_{t=\tau_i} = L_i x, \tag{8}$$

де матриці $E + L_i$ є невиродженими. Тоді система (6), (7) має вигляд

$$\frac{dy}{dt} = S^{-1}(t)(A(t) - P(t))S(t)y + S^{-1}(t)f(t),\ t \neq \tau_i, \tag{9}$$

$$\Delta y|_{t=\tau_i} = S^{-1}(\tau_i + 0)(B_i - l_i)Sy|_{t=\tau_i} + S^{-1}(\tau_i + 0)a_i. \tag{10}$$

Якщо $A(t) = P(t)$, $B_i = L_i$, $S(t) = \Phi(t)$, де $\Phi(t)$ – фундаментальна матриця системи (1), (2), то заміна $x = S(t)y$ називається *варіацією постійних*. Тоді з (9), (10) отримуємо

$$\frac{dy}{dt} = \Phi^{-1}(t)f(t), t \neq \tau_i, \tag{11}$$

$$\Delta y|_{t=\tau_i} = \Phi^{-1}(\tau_i + 0)a_i. \tag{12}$$

Враховуючи, що $\Phi(\tau_i + 0) = (E + B_i)\Phi(\tau_i)$, отримуємо $\Delta y|_{t=\tau_i} = \Phi^{-1}(\tau_i)(E + B_i)^{-1}a_i$. З (11), (12) знаходимо, що при $t \geq t_0$

$$y(t) = C + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + \sum_{t_0 < \tau_i < t} \Phi^{-1}(\tau_i)(E + B_i)^{-1}a_i,$$

де $y_0 = y(t_0) = C$. Звідси розв'язок системи (5)

$$x(t) = \Phi(t)(C + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)f(s)ds + \sum_{t_0 < \tau_i < t} \Phi^{-1}(\tau_i)(E + B_i)^{-1}a_i).$$

Зокрема, якщо $\Phi(t) = \Phi(t, t_0)$, отримаємо

$$x(t, x_0, t_0) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)f(s)ds + \sum_{t_0 < \tau_i < t} \Phi(t, \tau_i)(E + B_i)^{-1}a_i.$$

Припустимо, що розглядається система (1), (2), але матриці A та $B_i = B$ є постійними, $\tau_1 > t_0$. Тоді

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t - \tau_i)} \prod_{t_0 < \tau_p < t} (E + B)e^{A(\tau_p - \tau_{p-1})}, \tau_0 = t_0.$$

Якщо матриці A та B комутують, то комутують e^{At} та B. Отже

$\Phi(t, t_0) = e^{A(t - t_0)}(E + B)^{i(t, t_0)}$,

де $i(t, t_0)$ – кількість точок τ_i на $[t_0, t)$, тобто $i(t, t_0) = k$ при $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$.

3. *Приклад.* Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - x_2, \ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1, \ t \neq \tau_i, \tag{13}$$

при умові, що

$$\Delta x_1 |_{t=\tau_i} = -\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{3}, \ \Delta x_2 |_{t=\tau_i} = \frac{2}{3}x_1 - \frac{3}{2}x_2 \tag{14}$$

і послідовність $\{\tau_i\}$ –задана. В даному випадку

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що A і B комутують. Власними числами матриці A є $\lambda_1(A) = 1, \lambda_2(A) = 2$. Отримуємо два лінійно незалежних розв'язки системи $\frac{dx}{dt} = Ax$

$$y^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}, \ y^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Звідси лінійно незалежними розв'язками (13), (14) є

$$x^{(1)}(t) = (E+B)^{i(0,t)} \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}, \ x^{(2)}(t) = (E+B)^{i(0,t)} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Тут

$$E + B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 2e^t & e^{2t} \end{pmatrix}, \ (E+B)^{i(0,t)} = \begin{pmatrix} 6^{\frac{1}{2k}} & 0 \\ 0 & 6^{\frac{1}{2k}} \end{pmatrix},$$

якщо $i(0,t) = 2k$ і $(E+B)^{i(0,t)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2 \cdot 6^{2k}} & -\frac{1}{3 \cdot 6^{2k}} \\ \frac{2}{3 \cdot 6^{2k}} & -\frac{1}{2 \cdot 6^{2k}} \end{pmatrix}$, при $i(0,t) = 2k+1$. Таким чином, фундаментальна матриця системи (13), (14) є

$$\Phi(t,0) = e^{At}(E+B)^{i(t,t_0)} = 6^{\frac{1}{2k}} \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 2e^t & e^{2t} \end{pmatrix}, \text{ якщо } i(0,t) = 2k \text{ і}$$

$$\Phi(t,0) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 2e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2 \cdot 6^{2k}} & -\frac{1}{3 \cdot 6^{2k}} \\ \frac{2}{3 \cdot 6^{2k}} & -\frac{1}{2 \cdot 6^{2k}} \end{pmatrix} = \frac{1}{6^{2k}} \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2} + \frac{2e^{2t}}{3} & -\left(\frac{e^t}{3} + \frac{e^{2t}}{2}\right) \\ e^t + \frac{2e^{2t}}{3} & -\left(\frac{2e^t}{3} + \frac{e^{2t}}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Задача 23. Знайти фундаментальну матрицю і розв'язок задачі Коші для системи з імпульсним впливом

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - x_2, \ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 2x_2, \ t \neq \tau_i,$$

при умові, що

$$\Delta x_1 |_{t=\tau_i} = -\frac{x_1}{2}, \ \Delta x_2 |_{t=\tau_i} = -\frac{x_2}{2},$$

послідовність $\{\tau_i\}$ – задана і $x(0) = x_0$.

Додаток А.

Якщо $\Phi(t)$ – матриця розмірності $n \times n$, вектор-стовпчики якої є розв'язками системи лінійних диференціальних рівнянь $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, $x \in R^n$, $A(t)$ – матриця розмірності $n \times n$. Тоді функція $W(t) = \det\Phi(t)$ називається визначником Вронського. Має місце *формула Якобі*

$$W(t) = W(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} spA(s)ds\right\}.$$

Якщо $W(t) = \det\Phi(t) \neq 0$, то матриця $\Phi(t)$ називається фундаментальною. Якщо $\Phi(t_0) = I$, то фундаментальна матриця $\Phi(t, t_0) = \Phi(t)$ називається нормованою у точці $t = t_0$. Для неоднорідної системи диференціальних рівнянь $\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$ за відомою фундаментальною матрицею $\Phi(t, t_0)$ можна знайти розв'язок за допомогою *формули Коші*

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi(t, s)f(s)ds.$$

Тут $x(t_0) = x_0$.

Література

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К., 1987.

2. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. –Ленинград.,1981.

ЛЕКЦІЯ 14
СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕФІКСОВАНИМИ МОМЕНТАМИ ІМПУЛЬСНОГО ВПЛИВУ

1. *Система з нефіксованими моментами імпульсного впливу.* Розглянемо систему з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \ t \neq \tau_i(x), \tag{1}$$

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i(x)} = I_i(x). \tag{2}$$

Тут x – n-вимірний вектор фазових координат, $f(x,t)$ – n-вимірна вектор функція, неперервна за сукупністю змінних і ліпшицева за x, $I_i(x)$ – n-вимірна неперервна вектор функція, $t = \tau_i(x)$ – неперервна функція, $x \in D$, $D \subset R^n$ – область.

На відміну від систем з фіксованими моментами імпульсного впливу, розв'язки системи (1), (2) є такими, що для кожного розв'язку – свої точки розриву. Крім цього, у системах з нефіксованими моментами імпульсного впливу з'являється таке явище, як *биття розв'язків* по поверхні $t = \tau_i(x)$. Воно полягає у тому, що інтегральна крива зустрічається з фіксованою поверхнею розриву зліченну кількість разів. А це може стати причиною виходу розв'язку з області визначення системи з імпульсним впливом. Крім цього, розв'язок саме через биття може бути непродовжуваним на достатній проміжок.

2. Биття розв'язків.

Приклад. Розглянемо диференціальне рівняння з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = -x, \ t \neq \tau_i(x), \ \Delta x\Big|_{t=\tau_i(x)} = \alpha x, \tag{3}$$

де $\alpha \in R^1$, $\tau_i = \mathrm{arctg}x + i\pi$, $i = 0,1,2,\dots$.

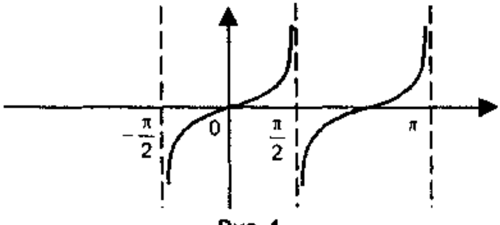

Рис. 1.

Розв'язком рівняння $\frac{dx}{dt} = -x$ є $x(t) = x_0 e^{-t}$, $x_0 = x(0)$ (рис. 1). Якщо $\varphi(0) = x_0 < 0$, $\alpha < 0$, то інтегральна крива розв'язку $x = \varphi(t)$ рівняння (3) зустрічає кожну поверхню $t = \tau_i(x)$ тільки один раз.

Якщо $\varphi(0) = x_0 > 0$, $\alpha > 0$, то відбувається биття розв'язку $x = \varphi(t)$ по поверхні $t = \mathrm{arctg}x$ і інтегральна крива зустрічається з поверхнею $t = \mathrm{arctg}x$ зліченну кількість разів. У цьому випадку розв'язок іде в нескінченність при наближенні t до точки $\frac{\pi}{2}$.

Якщо $\varphi(0) > 0$, $\alpha \in (-1, 0)$, то інтегральна крива розв'язку $x = \varphi(t)$ з кожною поверхнею $t = \tau_i(x)$ зустрічається один раз.

Якщо $\varphi(0) < 0$, $\alpha \in (-1, 0)$, то інтегральна крива розв'язку $x = \varphi(t)$ спускається до поверхні $t = \pi + \mathrm{arctg}x$ і далі відбувається биття розв'язку по цій поверхні. При цьому розв'язок наближається до прямої $x = 0$ при $t \to \pi - 0$. У даному випадку розв'язок не можна продовжити на проміжок $t \in [0, \pi]$, так як інтегральна крива кожного розв'язку з такими властивостями при $t \to \pi - 0$ наближається до точки $(\pi, 0)$. Має місце наступне твердження.

Теорема 1. Якщо функція $f(x,t)$ є неперервна за змінними x, t, функції $I_i(x)$, $\tau_i(x)$ є неперервні при $x \in D$ і для $\tau_i(x)$ виконується умова Ліпшиця, а також нерівність

$$\tau_i \geq \tau_i(x + I_i(x)), \tag{4}$$

то можна константу Ліпшиця вибрати одну для всіх $t = \tau_i(x)$, де $t \in [t_0, T]$, $T > t_0$ і інтегральна крива розв'язку $x(t)$ системи (1), (2), для якого $x(t) \in D$, $t \in [t_0, T]$ перетинає кожну гіперповерхню $t = \tau_i(x)$, $t \in [t_0, T]$ тільки один раз.

Ця теорема вказує умови відсутності биття розв'язку. Виявляється, що для систем з нефіксованими моментами імпульсного впливу є проблематичним також питання неперервної залежності розв'язків від початкових умов.

3. Неперервна залежність розв'язків від початкових умов. Розглянемо досить простий приклад. Нехай є рівняння з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = 0,\ t \neq \tau_i(x),\ \Delta x\big|_{t=\tau_i(x)} = b,\ \tau_i(x) = 2i - x,\ b > 0, \text{ де } t \in [0, 2].$$

Побудуємо два розв'язки цього рівняння виходячи з початкових умов $x(0) = 1$ та $x(0) = 1 + \alpha$, де $\alpha > 0$. Отже, якщо $x = \varphi(t)$ є розв'язок, $\varphi(0) = 1$, то $\varphi(t) = 1$, $t \in [0, 1)$. У точці $t = 1$ інтегральна крива розв'язку перетинає поверхню $t = \tau_1(x) = 2 - x$, у результаті чого $\varphi(1 + 0) = \varphi(1 - 0) + b = 1 + b$ і $\varphi(t) = 1 + b$, $t \in (1, 2]$. Аналогічно, для розв'язку $x = \psi(t)$, $\psi(0) = 1 + \alpha$ отримуємо:

$$\psi(t)=1+\alpha\ ,\ t\in[0,1-\alpha)\ ;\ \psi(t)=1+\alpha+b\ ,\ t\in(1-\alpha,2]\ .$$

Отже $|\psi(t)-\varphi(t)|=b$, $t\in(1-\alpha,1)$, у тому числі і для малих α . Це означає, що неперервність розв'язку за початковими даними в класичному розумінні не має місця для вказаного типу рівнянь з імпульсним впливом. Тоді розглядають неперервну залежність від початкових умов в сенсі наступної теореми.

Теорема 2. Нехай для системи рівнянь (1), (2) виконуються наступні нерівності:

$$\|f(x,t)\|\le C\ ,$$
$$\|f(x_1,t)-f(x_2,t)\|\le L\|x_1-x_2\|\ ,$$
$$\|I_i(x_1)-I_i(x_2)\|\le L\|x_1-x_2\|\ ,$$
$$\|\tau_i(x_1)-\tau_i(x_2)\|\le N\|x_1-x_2\|\ ,$$

де $N>0$, $C>0$, $L>0$, $NC<1$, $x_1,x_2,x_3\in D$, $t\in[t_0,T]$ і справджується нерівність (4). Якщо розв'язок $x(t,x_0,t_0)$ визначений при $t\in[t_0,T]$, то має місце неперервна залежність цього розв'язку від x_0 в наступному змісті: для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, таке, що для довільного розв'язку $x(t,x_0,t_0)$ системи (1), (2) з нерівності $\|x_0-y_0\|<\delta$ випливає $\|x(t,x_0,t_0)-x(t,y_0,t_0)\|<\varepsilon$ для всіх $t\in[t_0,T]$, що задовольняє нерівності $|t-s_i|>\varepsilon$. Тут s_i – моменти перетину інтегральної кривої розв'язку $x(t,x_0,t_0)$ з гіперповерхнею $t=\tau_i(x)$.

СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

1. *Стійкість розв'язків лінійних систем з імпульсним впливом.* Розглянемо лінійну однорідну систему з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x\ ,\ t\ne\tau_i\ , \tag{1}$$

$$\Delta x\big|_{t=\tau_i}=B_i x\ . \tag{2}$$

Тут $n\times n$ матриця A(t) неперервна і обмежена при $t\ge t_0$, B_i – $n\times n$ - матриці, $i=1,2,...,$ x – вектор фазових координат розмірності n , $t_0<\tau_1<\tau_2<...<\tau_i<\tau_{i+1}<...$, $\tau_i\to\infty$, $i\to+\infty$. Нехай $Z(t,t_0)$ - фундаментальна матриця системи (1) нормована в точці t_0 . Тоді фундаментальна матриця системи (1), (2)

$$X(t,t_o)=Z(t,\tau_j)(E+B_j)\left\{\prod_{k=j-1}^{1}Z(\tau_{k+1},\tau_k)(E+B_k)\right\}Z(\tau_1,t_0)\ .$$

Тут $t \in (\tau_j, \tau_{j+1})$. Має місце наступне твердження

Теорема 1. Для того, щоб розв'язок системи з імпульсним впливом (1),(2) був стійким, необхідно і достатньо, щоб матриця $X(t,t_0)$ була обмежена при $t \ge t_0$. Для асимптотичної стійкості необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{t\to\infty} X(t,t_0) = 0$, а для нестійкості – щоб матриця $X(t,t_0)$ була необмеженою.

Доведення теореми випливає з того, що будь-який розв'язок системи з імпульсним впливом (1),(2) можна представити у формі Коші

$$x(t,x_0,t_0) = X(t,t_0)x_0 .$$

2. *Стійкість в системах з нефіксованими моментами імпульсного впливу.* Розглянемо систему з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)\,,\; t \ne \tau_i(x)\,, \tag{3}$$

$$\Delta x\big|_{t=\tau_i(x)} = I_i(x)\,. \tag{4}$$

Тут x – n-вимірний вектор фазових координат, $f(x,t)$ – n-вимірна вектор функція, неперервна за сукупністю змінних і ліпшицева за x, $I_i(x)$ – n-вимірна неперервна вектор-функція, $t = \tau_i(x)$ -неперервні функції, $\tau_i(x) \to \infty$, $i \to \infty$.

Як вже зазначалося, для системи (3),(4) може виникнути биття розв'язку по поверхні $t = \tau_i(x)$. Таким чином, можливо не виконується неперервна залежність розв'язків від початкових умов рівномірно на скінченному проміжку зміни t. Це говорить про те, що означення стійкості розв'язку за Ляпуновим є некоректним для вказаного типу систем в звичайному трактуванні. Тому необхідно внести уточнення до відповідного означення стійкості.

Означення. Розв'язок $x(t)$ системи (3),(4), визначений при $t \ge t_0$, називається *стійким за Ляпуновим* якщо для довільних $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon,\eta,t_0) > 0$, таке, що для будь-якого іншого розв'язку $y(t)$ системи (3),(4) з того, що

$$\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta$$

випливає, що

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$$

при $t \ge t_0$, $\left|t - t_i^0\right| > \eta$, де t_i^0 – моменти перетину інтегральною кривою розв'язку $x(t)$ поверхонь $t = \tau_i(x)$. Розв'язок $x(t)$ системи (3),(4) називається *асимптотично стійким*, якщо він є стійким у сенсі попереднього означення та існує $\sigma \in (0,\delta]$, таке, що для розв'язку $y(t)$ системи (3),(4) з нерівності $\|x(t_0) - y(t_0)\| < \sigma$ випливає

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - y(t)\| = 0 .$$

Нехай скалярна функція $V(x,t)$, $V(0,t) = 0$ визначена і неперервно диференційована в області $Z_0 = \{(x;t) : t \ge t_0, \|x\| < h_0\}$. Припустимо, що для системи (3), (4) виконується наступне: $f(0,t) = 0$, $I_i(0) = 0$, $\tau_i(x) < \tau_{i+1}(x)$, функція $\tau_i(x)$ і число h_0 задовольняють умовам теореми, що виключає биття розв'язків системи (3),(4) по поверхні $t = \tau_i(x)$.

Теорема 2. Якщо існує додатно-визначена функція $V(x,t)$, яка задовольняє в області Z_0 нерівності

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \operatorname{grad}_x^T V(x,t) f(x,t) \le 0 , \tag{5}$$

$$V(x + I_i(x), \tau_i(x)) \le V(x, \tau_i(x)) , \tag{6}$$

то нульовий розв'язок системи (3),(4) є стійким. Якщо ж замість нерівності (6) виконується наступна нерівність

$$V(x + I_i(x), \tau_i(x)) - V(x, \tau_i(x)) \le -\psi(V(x, \tau_i(x)) \tag{7}$$

для всіх $i = 1,2,\dots,\psi(s)$, де $\psi(s)$-неперервна за $s \ge 0$ скалярна функція, $\psi(0) = 0$, $\psi(s) > 0$, при $s > 0$, то нульовий розв'язок системи з імпульсним впливом (3),(4) є асимптотично стійким.

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Нехай

$$L = \inf\{V(x,t) : t \ge t_0, \varepsilon \le \|x\| < h_0\}, \tag{8}$$

а $\delta > 0$ настільки є малим, що

$$\sup\{V(x,t_0) : \|x\| < \delta\} = m < L . \tag{9}$$

Візьмемо довільний розв'язок $x(t)$, $x(t_0) = x_0$ системи (3), (4), для якого $x_0 \in K_\delta(0)$, $K_\delta(a) = \{x \in R^n : \|x - a\| < \delta\}$, і розглянемо функцію $\eta(t) = V(x(t),t)$. Якщо припустити, що у деякий момент t^* виконується $\|x(t^*)\| = \varepsilon$, то з (8) випливає $\eta(t^*) \ge L$, крім того, нерівності (5),(6) гарантують незростання функції $V(x,t)$ вздовж будь-якого розв'язку системи (3), (4), який лежить в Z_0. Таким чином, в силу (9)

$$\eta(t^*) \le \eta(t_0) = V(x_0,t_0) \le m < L .$$

Отже, $L \le \eta(t^*) < L$. Отримали протиріччя, яке доводить першу частину теореми.

Нехай замість нерівності (6) має місце (7). Доведемо асимптотичну стійкість тривіального розв'язку. Для цього достатньо показати, що $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = 0$.

З нерівності (5), (7) функція $\eta(t)$ не зростає. Так як $\eta(t)$ обмежена знизу, то існує $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t)=\alpha$. Припустимо, що $\alpha>0$. Нехай

$$c=\min\{\psi(s):\alpha\le s\le\eta(t_0)\}. \qquad (10)$$

Якщо $x(t)$ перетинає поверхні $t=\tau_i(x)$ у точках $(x_i,\tau_i(x_i))$, то в силу (7) маємо

$$\eta(\tau_i(x_i)+0)-\eta(\tau_i(x_i))\le-\psi(\eta(\tau_i(x_i)))$$

при $i=1,2,\dots$. Так як $\alpha\le\eta(\tau_i(x_i))\le\eta(t_0)$, то $-\psi(\eta(\tau_i(x_i)))\le-c$, і тому $\eta(\tau_i(x_i)+0)-\eta(\tau_i(x_i))\le-c$. З нерівності (5) випливає, що функція $\eta(t)$ не зростає на кожному проміжку неперервності, тому

$$\eta(\tau_i(x_i)+0)\ge\eta(\tau_{i+1}(x_{i+1})).$$

Звідси для довільного натурального k отримуємо

$$\eta(\tau_k(x_k)+0)\le\eta(\tau_k(x_k)+0)+\sum_{i=0}^{k-1}\{\eta(\tau_i(x_i)+0)-\eta(\tau_{i+1}(x_{i+1})+0)\}=$$

$$\eta(t_0)+\sum_{i=0}^{k}\{\eta(\tau_i(x_i)+0)-\eta(\tau_i(x_i))\}\le\eta(t_0)-kc.$$

На основі останньої нерівності і з (10) випливає існування k_0 такого, що для $k>k_0$ виконується $\eta(t_0)-kc<0$. Таким чином, отримали протиріччя, припущення $\alpha>0$ є невірним. Отже, $\alpha=0$. Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай існує додатно-визначена функція $V(x,t)$, така, що задовольняє в області Z_0 нерівності

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\operatorname{grad}_x^T V(x,t)f(x,t)\le-\varphi(V(x,t)),$$

$$V(x+I_i(x),\tau_i(x))\le\psi(V(x,\tau_i(x))),$$

$i=1,2,\dots$, де $\varphi(s)$, $\psi(s)$ -неперервні функції при $s\ge0$, $\varphi(0)=\psi(0)=0$; $\varphi(s)>0$, $\psi(s)>0$ при $s>0$ і нехай

$$\sup_i\left(\min_{\|x\|\le h}\tau_{i+1}(x)-\max_{\|x\|\le h}\tau_i(x)\right)=\Theta>0.$$

Тоді, якщо функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$, такі, що при деякому $a_0>0$ для $a\in(0,a_0]$

$$\int_a^{\psi(a)}\frac{ds}{\varphi(s)}\le\Theta, \qquad (10)$$

то нульовий розв'язок системи рівнянь (3),(4) є стійким. Якщо ж замість (10) виконується

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \Theta - \gamma$$

при деякому $\gamma > 0$, то нульовий розв'язок системи (3),(4) є асимптотично стійким.

3. Приклад. Дослідимо на стійкість нульовий розв'язок рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = 0\,,\ \ t \ne \tau_i(x, \frac{dx}{dt})\,,$$

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i(x,\dot{x})} = -x + \arccos\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \cos x\right),$$

$$\Delta\frac{dx}{dt}\Big|_{t=\tau_i(x,x)} = -\frac{dx}{dt}\,.$$

Запишемо це рівняння у вигляді системи

$$\frac{dx}{dt} = y\,,\ \frac{dy}{dt} = -\sin x\,,\ \ t \ne \tau_i(x, y)\,,$$

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i(x,\dot{x})} = -x + \arccos\left(-\frac{y^2}{2} + \cos x\right),$$

$$\Delta y\Big|_{t=\tau_i(x,\dot{x})} = -y\,.$$

Функцію Ляпунова вибираємо у вигляді

$$V(x,t) = 1 - \cos x + \frac{y^2}{2}\,.$$

Знаходимо $\frac{dV}{dt} = y\sin x - y\sin x = 0$,

$$V(x + \Delta x, y + \Delta y) = 1 - \cos(\arccos(-\frac{y^2}{2} + \cos x)) = 1 - \cos x + \frac{y^2}{2} = V(x, y)$$

Отже, виконуються умови теореми 2 незалежно від властивостей поверхонь $t = \tau_i(x)$. Таким чином, тривіальний розв'язок рівняння є стійким.

4. *Теорема про нестійкість.* Розглянемо аналог теореми Четаєва про нестійкість [2].

Теорема 4. Нехай існує функція $V(x,t)$, така, що область $\Pi = \{(x,t) \in Z_0 : V(x,t) > 0\}$ при $t \ge t_0$ має непорожній перетин Π_t площиною $t = \text{const}$, Π_t містить точки в $K_r(0) \subset R^n$ для довільного $r > 0$. Крім того, в області Π функція $V(x,t)$ є обмеженою і в Π виконуються нерівності

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \text{grad}_x^T V(x,t) f(x,t) \ge 0\,, \tag{11}$$

$$V(x + I_i(x), \tau_i(x)) - V(x, \tau_i(x)) \ge \psi(V(x, \tau_i(x)))\,, \tag{12}$$

$i = 1,2,\ldots$, де $\psi(s)$ - неперервна при $s \geq 0$ функція, $\psi(0) = 0$, $\psi(s) > 0$, $s > 0$. Тоді нульовий розв'язок системи (3),(4) є нестійким.

Доведення. За умовою теореми в довільному околі точки $x = 0$ існує точка x_0 така, що $V(x_0, t_0) > 0$. Доведемо, що розв'язок $x(t)$ системи (3),(4), який виходить з вибраної точки x_0, в деякий момент $t = \bar{t}$ покине кулю $K_h(0)$. Припустимо протилежне. Нехай при всіх $t \geq t_0$ має місце $x(t) \in K_h(0)$ і $x(t)$ перетинає поверхню $t = \tau_i(x)$ у точках $(x_i, \tau_i(x_i))$. Розглянемо функцію $\eta(t) = V(x(t), t)$. У силу (11),(12) функція $\eta(t)$ є неспадною, $\eta(t) \geq \eta(t_0) > 0$, $t \geq t_0$. Це означає, що при всіх $t \geq t_0$ виконується $(x(t), t) \in \Pi$. Нехай

$$c = \min\{\psi(s) : s \in [\eta(t_0), a_0]\},$$

де $a_0 = \sup\{V(x,t) : (x,t) \in \Pi\}$. Очевидно, що $c > 0$ і $\eta(\tau_i(x_i) + 0) - \eta(\tau_i(x_i)) \geq c$, $i = 1,2,\ldots$. Так як $\eta'(t) \geq 0$ при $t \neq \tau_i(x_i)$, то $\eta(\tau_{i-1}(x_{i-1}) + 0) - \eta(\tau_i(x_i)) \leq 0$, $i = 1,2,\ldots$. Тому для будь-якого натурального k маємо

$$\eta(\tau_k(x_k) + 0) \geq \eta(\tau_k(x_k) + 0) + \sum_{i=1}^{k}\{\eta(\tau_{i-1}(x_{i-1}) + 0) - \eta(\tau_i(x_i))\} =$$

$$\eta(t_0) + \sum_{i=1}^{k}\{\eta(\tau_i(x_i) + 0) - \eta(\tau_i(x_i))\} \geq \eta(\tau_0) + kc\,.$$

При $k \to \infty$ права частина останньої нерівності необмежено зростає. А це суперечить тому, що $(x(t), t) \in \Pi$, так як в Π функція $V(x,t)$ є необмеженою. Суперечність доводить теорему.

Література

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К., 1987.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М., 1998.

РОЗДІЛ 5
ОПТИМІЗАЦІЯ СТРУКТУРНО ЗАДАНИХ СИСТЕМ

ЛЕКЦІЯ 15
МЕТОД СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

1. *Вступ.* Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t,\alpha) \tag{1}$$

з умовою Коші

$$x(t_0) = x_0 . \tag{2}$$

Тут x – вектор стану розмірності n, $f(x,u,t,\alpha)$ – n-вимірна вектор функція, визначена і неперервно диференційована за своїми аргументами, $u = u(t)$ – m-*вимірна функція керування*, α - вектор параметрів *розмірності r*, $t \in [t_0, T]$.

Нехай на розв'язках системи (1), (2) визначений деякий функціонал $I(u,\alpha)$. Якщо вектор керування є заданим і ставиться задача про оптимізацію функціоналу $I(u,\alpha)$ за α, то таку задачу називають *задачею параметричної оптимізації.* По своїй суті вона належить до класу проблем нелінійного програмування.

Нехай вектор α є фіксованим і оптимізація функціоналу $I(u,\alpha)$ проводиться за рахунок незалежного вибору функції керування $u = u(t)$. Припустимо, що задані деякі функції

$$\Psi_i = \Psi_i(t, b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ik_i}), \ t \in [t_i, t_{i+1}), \tag{3}$$

які є неперервно диференційованими за сукупністю змінних, $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Якщо наближений розв'язок такої оптимізаційної задачі шукається у вигляді

$$u(t) = \Psi_i(t, b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ik_i}), \ t \in [t_i, t_{i+1}), \tag{4}$$

то таку задачу називають *задачею структурної оптимізації.* Це означає, що проблему вибору оптимальної функції $u(t)$ звели до задачі знаходження оптимальних значень параметрів b_{ij} та t_i. У цьому випадку говорять, що функція керування задана в структурному класі (4). Найпростішим випадком структури класу керувань є клас релейних функцій (рис. 1). Припустимо, що $u(t)$ є скалярна функція. Якщо

$$u(t) = \gamma$$

для деяких інтервалів $[t_i, t_{i+1})$, а на інших інтервалах

$$u(t) = \omega ,$$

де γ, ω – задані дійсні числа, то говорять, що $u(t)$ є *релейна функція керування.*

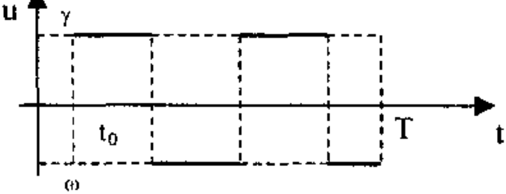

Рис. 1.

Нехай на кожному з інтервалів $[t_i, t_{i+1})$ задана система лінійно незалежних неперервних функцій $\{\varphi_{ij}^s\}_{j=1}^{k_i}$, $s = 1,2,...n$. Тоді одним з поширених випадків (4) є представлення

$$u_s(t) = \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij}^s \varphi_{ij}^s(t), \ t \in [t_i, t_{i+1}) \ , \ s = 1,2,...n, \tag{5}$$

де α_{ij}^s – набір невідомих параметрів.

2. *Параметрична оптимізація.* Припустимо, що в системі (1), (2) вектор-функція керування $u(t)$ є заданою і задача параметричної оптимізації полягає в мінімізації цільової функції

$$J(\alpha) = \Phi(x(T, \alpha)), \tag{6}$$

яка визначена на розв'язках $x(t, \alpha)$ системи (1) і є неперервно диференційованою. Поряд з системою (1), (2) розглянемо спряжену систему

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H(x, \psi, u, \alpha, t)}{\partial x}, \ \psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T, \alpha))}{\partial x}. \tag{7}$$

Тут $H(x, \psi, u, \alpha, t) = \psi^T(t) f(x, u, t, \alpha)$ – функція Гамільтона, $\psi(t)$ – n-вимірний вектор спряжених змінних. Знайдемо градієнт функції (6). Для цього розглянемо

$$\Delta J = J(\alpha + \Delta\alpha) - J(\alpha) = \Phi(x(T, \alpha + \Delta\alpha)) - \Phi(x(T, \alpha)) = \frac{\partial \Phi^T(x(T, \alpha))}{\partial x} \Delta x(T) + o(\|\Delta x(T)\|),$$

де $\Delta x(t) = x(t, \alpha + \Delta\alpha) - x(t, \alpha)$. З формули інтегрування по частинам

$$\psi^T(T)\Delta x(T) - \psi^T(t_0)\Delta x(t_0) = \int_{t_0}^{T} \psi^T(t) d\Delta x(t) + \int_{t_0}^{T} \Delta x^T(t) d\psi(t).$$

Оскільки $\Delta x(t_0) = x(t_0, \alpha + \Delta\alpha) - x(t_0, \alpha) = x_0 - x_0 = 0$ і має місце (7), то

$$\Delta J = -\psi^T(T)\Delta x(T) = -\int_{t_0}^{T} \psi^T(t) d\Delta x(t) - \int_{t_0}^{T} \Delta x^T(t) d\psi(t) + o(\|\Delta x(T)\|). \qquad (8)$$

Для $\Delta x(t)$ маємо

$$\frac{d\Delta x}{dt} = f(x + \Delta x, u, t, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, u, t, \alpha), \quad \Delta x(t_0) = 0.$$

Звідси

$$\int_{t_0}^{T} \psi^T(t) d\Delta x(t) = \int_{t_0}^{T} (H(x + \Delta x, \psi, u, \alpha + \Delta\alpha, t) - H(x, \psi, u, \alpha, t)) dt$$

і в силу (7)

$$\int_{t_0}^{T} \Delta x^T(t) d\psi(t) = -\int_{t_0}^{T} \Delta x^T(t) \frac{\partial H(x, \psi, u, \alpha, t)}{\partial x} dt.$$

Підставимо останні два співвідношення в (8) та додамо і віднімемо $H(x, \psi, u, \alpha + \Delta\alpha, t)$. Отримаємо

$$\Delta J = -\int_{t_0}^{T} [H(x, \psi, u, \alpha + \Delta\alpha, t) - H(x, \psi, u, \alpha, t)] dt -$$

$$\int_{t_0}^{T} [H(x + \Delta x, \psi, u, \alpha + \Delta\alpha, t) - H(x, \psi, u, \alpha + \Delta\alpha, t)] dt +$$

$$\int_{t_0}^{T} \Delta x^T(t) \frac{\partial H(x, \psi, u, \alpha, t)}{\partial x} dt + o(\|\Delta x(T)\|) =$$

$$-\int_{t_0}^{T} [H(x, \psi, u, \alpha + \Delta\alpha, t) - H(x, \psi, u, \alpha, t)] dt -$$

$$\int_{t_0}^{T} \Delta x^T(t) \frac{\partial}{\partial x} [H(x, \psi, u, \alpha + \Delta\alpha, t) - H(x, \psi, u, \alpha, t)] dt - \int_{t_0}^{T} o(\|\Delta x(t)\|) dt + o(\|\Delta x(T)\|) =$$

$$-\left[\int_{t_0}^{T} \frac{\partial H(x, \psi, u, \alpha, t)}{\partial \alpha} dt\right]^T \Delta\alpha + o(\|\Delta\alpha\|) -$$

$$\int_{t_0}^{T}\Delta x^T(t)\frac{\partial}{\partial x}\left[H(x,\psi,u,\alpha+\Delta\alpha,t)-H(x,\psi,u,\alpha,t)\right]dt -$$

$$\int_{t_0}^{T} o(\|\Delta x(t)\|)dt + o(\|\Delta x(T)\|). \tag{9}$$

Задача 24. Використовуючи теорему про неперервну залежність розв'язків системи диференціальних рівнянь від параметрів, довести, що останні три доданки в (9) є $o(\|\Delta\alpha\|)$, $\Delta\alpha \to 0$. Отже,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = -\int_{t_0}^{T}\frac{\partial H(x,\psi,u,\alpha,t)}{\partial \alpha}dt. \tag{10}$$

Похідна (10) використовується для побудови ітераційних процедур типу градієнтного спуску.

3. Структурна оптимізація. Розглянемо функціонал

$$J(u) = \Phi(x(T,u)), \tag{11}$$

який визначений на розв'язках системи (1). Припустимо, що параметр α – фіксований і керування задається в структурному класі (4). Запишемо варіацію функціоналу за точками t_i, які називаються *точками переключення*. Нехай спочатку параметри b_{ij} в (4) є фіксованими. Проводячи викладки аналогічні (9), отримаємо

$$\Delta J(u) = J(u+\Delta u) - J(u) = -\int_{t_0}^{T}\left[H(x,\psi,u+\Delta u,\alpha,t)-H(x,\psi,u,\alpha,t)\right]dt -$$

$$\int_{t_0}^{T}\Delta x^T(t)\frac{\partial}{\partial x}\left[H(x,\psi,u+\Delta u,\alpha,t)-H(x,\psi,u,\alpha,t)\right]dt -$$

$$\int_{t_0}^{T} o(\|\Delta x(t)\|)dt + o(\|\Delta x(T)\|). \tag{12}$$

Варіюємо точку t_i, змінюючи її на величину $\Delta t_i > 0$. Так як

$$\Delta u = \begin{cases} \psi_{i+1}(t, b_{(i+1)1},\dots,b_{(i+1)k_{i+1}}) - \psi_i(t, b_{i1},\dots,b_{ik_i}),\ t \in [t_i, t_i + \Delta t_i), \\ 0,\ t \in [t_0, T], \end{cases}$$

то з (12) випливає

$$\Delta J(u) = -\int_{t_i}^{t_i+\Delta t_i}\left[H(x,\psi,u+\Delta u,\alpha,t)-H(x,\psi,u,\alpha,t)\right]dt -$$

$$\int_{t_i}^{t_i+\Delta t_i} \Delta x^T(t)\frac{\partial}{\partial x}\left[H(x,\psi,u+\Delta u,\alpha,t)-H(x,\psi,u,\alpha,t)\right]dt -$$

$$\int_{t_0}^{T} o(\|\Delta x(t)\|)dt \ + o(\|\Delta x(T)\|). \qquad (13)$$

Останні три члени співвідношення (13) є $o(\|\Delta t_i\|)$ так як

$\max\limits_{t\in[t_0,T]}\|\Delta x(t)\| \to 0$ при $\Delta t_i \to 0$.

Тому з (13) випливає

$$\frac{\partial J}{\partial t_i} = -\lim_{\Delta t_i\to 0}\frac{1}{\Delta t_i}\left[\int_{t_i}^{t_i+\Delta t_i}\left[H(x,\psi,u+\Delta u,\alpha,t)-H(x,\psi,u,\alpha,t)\right]dt = \right.$$

$$-\left[H(x(t_i),\psi(t_i),u(t_i+0),\alpha,t_i)-H(x(t_i),\psi(t_i),u(t_i-0),\alpha,t_i)\right]. \qquad (14)$$

Аналогічно до попереднього, використовуючи співвідношення (9), отримуємо, що

$$\frac{\partial J}{\partial b_{ij}} = -\int_{t_i}^{t_{i+1}} \operatorname{grad}_u^T H(x(t),\psi(t),u(t),\alpha,t)\frac{\partial \Psi_i}{\partial b_{ij}}dt. \qquad (15)$$

Задача 25. Довести що , якщо функція керування задана в структурному класі (5), то

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_{ij}^k} = -\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial H(x(t),\psi(t),u(t),\alpha,t)}{\partial u_k}\varphi_{ij}^k(t)dt. \qquad (16)$$

Співвідношення (14)-(16) використовуються для побудови ітераційних процедур типу градієнтного спуску. Наприклад, для оптимізації системи (1) за точками переключення t_i можна застосувати метод

$$t_i^{(k+1)} = P\left\{t_i^{(k)} - \rho_k\left(H\left(x\left(t_i^k\right),\psi\left(t_i^k\right),u\left(t_i^k-0\right),\alpha,t_i^k\right)-H\left(x\left(t_i^k\right),\psi\left(t_i^k\right),u\left(t_i^k+0\right),\alpha,t_i^k\right)\right)\right\}. \quad (17)$$

Тут P – оператор упорядкування точок переключення, $\rho_k>0$ – послідовність чисел, що задовольняє умові збіжності для (17): $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\rho_j = \infty$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\rho_j^2 < \infty$.

Література

1. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К., 1985.

2. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Л.,1981.

ЛЕКЦІЯ 16
ПОХІДНА ФРЕШЕ У ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СИСТЕМОЮ З ЗАДАНОЮ СТРУКТУРОЮ

Розглянемо систему диференційних рівнянь з заданою структурою

$$\frac{dx}{dt} = f^{(1)}(x,u,t),\ t \in [t_0, t_1), \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dt} = f^{(2)}(x,u,t),\ t \in (t_1, T], \tag{2}$$

$$x(t_1 + 0) = g(x(t_1 - 0), t_1), \tag{3}$$

де x – n-вимірний вектор фазових координат, $u = u(t)$ – r - вимірна функція керування, $u(t) \in U$, $U \subset R^r$, $u(t)$ належить класу кусково неперервних функцій, $f^{(i)}(x,u,t)$ – неперервні за сукупністю змінних разом з $\frac{\partial f^{(i)}(x,u,t)}{\partial x_k}$, $\frac{\partial f^{(i)}(x,u,t)}{\partial u_m}$ – вектор функції, $i = 1,2$, $k = 1,2,\ldots,n$, $m = 1,2,\ldots,r$, $t_1 \in [t_0, T)$ – фіксована точка, $x(t_0) = x_0$, x_0 – фіксований вектор, $g(x,t)$ – неперервно диференційована n-вимірна функція. На розв'язках системи (1) – (3) задано функціонал

$$I(u) = \varphi(x(T)). \tag{4}$$

Тут $\varphi(x)$ – неперервно диференційована функція. Задача полягає у знаходженні керування $u^*(t)$, такого, що $I(u^*) = \min\limits_{u \in U} I(u)$

Розглянемо варіацію функціоналу

$$\Delta I(u) = I(u + \Delta u) - I(u) = \varphi(x(T, u + \Delta u)) - \varphi(x(T,u)) =$$
$$\mathrm{grad}_x^T \varphi(x(T)) \cdot \Delta x(T) + o(\|\Delta x(T)\|),$$

де $\Delta x(T) = x(T, u + \Delta u) - x(T,u)$. Позначимо $\psi(T) = -\mathrm{grad}_x^T \varphi(x(T))$. Тоді

$$\Delta I(u) = -(\psi^T(T)\Delta x(T) - \psi^T(t_0)\Delta x(t_0)),\ \Delta x(t_0) = 0.$$

$$\Delta I(u) = -\int_{t_0}^{T} d(\psi^T(t)\Delta x(t)) =$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{t_0}^{t_1 - \varepsilon} d(\psi^T(t)\Delta x(t)) + \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{t_1 - \varepsilon}^{t_1 + \varepsilon} d(\psi^T(t)\Delta x(t)) + \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{t_1 + \varepsilon}^{T} d(\psi^T(t)\Delta x(t)).$$

Зафіксуємо достатньо мале $\varepsilon > 0$. Використовуючи (1), отримаємо

$$J_1(u) = \int_{t_0}^{t_1 - \varepsilon} d(\psi^T(t)\Delta x(t)) = \int_{t_0}^{t_1 - \varepsilon} \Delta x^T(t) d\psi(t) + \int_{t_0}^{t_1 - \varepsilon} \psi^T(t) d\Delta x(t) =$$

$$\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\Delta x^T(t)d\psi(t)+\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\psi^T(t)(f^{(1)}(x+\Delta x,u+\Delta u,t)-f^{(1)}(x,u,t))dt\,.$$

Вектор спряжених координат $\psi(t)$ виберемо з умови

$$\frac{d\psi(t)}{dt}=-\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial x}\,,$$

де $H(x,u,\psi,t)=\psi^T(t)f^{(1)}(x,u,t)$, $t\in[t_0,t_1)$. Тому, використовуючи теорему про неперервність систем типу Каратеодорі від правої частини [4], отримуємо

$$J_1(u)=-\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\Delta x^T(t)\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial x}dt+\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}[H(x+\Delta x,u+\Delta u,\psi,t)-H(x,u,\psi,t)]=$$

$$-\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\Delta x^T(t)\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial x}dt+\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}[H(x+\Delta x,u+\Delta u,\psi,t)-H(x,u+\Delta u,\psi,t)]dt+$$

$$\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}[H(x,u+\Delta u,\psi,t)-H(x,u,\psi,t)]dt=$$

$$-\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\Delta x^T(t)\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial x}dt+\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\Delta x^T(t)\frac{\partial H(x,u+\Delta u,\psi,t)}{\partial x}dt+$$

$$\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\frac{\partial H^T(x,u,\psi,t)}{\partial u}\Delta u(t)dt+o(\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\|\Delta u(t)\|dt)+o(\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\|\Delta x(t)\|dt)=$$

$$\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\frac{\partial H^T(x,u,\psi,t)}{\partial u}\Delta u(t)dt+\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\Delta x^T(t)[\frac{\partial H(x,u+\Delta u,\psi,t)}{\partial x}-\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial x}]dt+$$

$$o(\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\|\Delta u(t)\|dt)+o(\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\|\Delta x(t)\|dt)=\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\frac{\partial H^T(x,u,\psi,t)}{\partial u}\Delta u(t)dt+o(\|\Delta u\|)\,.$$

Аналогічно

$$J_2(u)=\int_{t_1+\varepsilon}^{T}d(\psi^T(t)\Delta x(t))=\int_{t_1+\varepsilon}^{T}\frac{\partial H^T(x,u,\psi,t)}{\partial u}\Delta u(t)dt+o(\|\Delta u\|)\,,$$

де $\frac{d\psi}{dt}=-\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial x}$, $H(x,u,\psi,t)=\psi^T(t)f^{(2)}(x,u,t)$, $t\in(t_1,T]$.

Розглянемо

$$J_3(u) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} d(\psi^T(t)\Delta x(t)) = \psi(t_1+0)\Delta x(t_1+0) - \psi(t_1-0)\Delta x(t_1-0).$$

Так як

$$\Delta x(t_1+0) = g(x(t_1-0,u+\Delta u),t_1) - g(x(t_1-0,u),t_1) =$$

$$\left(\frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}\right)^T \Delta x(t_1-0) + o(\|\Delta x(t_1-0)\|),$$

то

$$J_3(u) = \psi^T(t_1+0)\left(\left(\frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}\right)^T \Delta x(t_1-0) + o(\|\Delta x(t_1-0)\|)\right) - \psi(t_1-0)\Delta x(t_1-0) =$$

$$\left(\left(\frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}\right)\psi(t_1+0) - \psi(t_1-0)\right)^T \Delta x(t_1-0) + \psi^T(t_1+0)o(\|\Delta x(t_1-0)\|).$$

Підбираємо $\psi(t_1+0)$ та $\psi(t_1-0)$ так, щоб

$$J_3(u) = \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} d(\psi^T(t)\Delta x(t)) = o(\|\Delta u\|).$$

Для цього покладаємо

$$\psi(t_1-0) = \frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}\psi(t_1+0).$$

Таким чином,

$$\Delta I(u) = -\int_{t_0}^{T} \frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial u}\Delta u(t)dt + o(\|\Delta u\|)$$

і за означенням похідної Фреше

$$\frac{\partial I(u)}{\partial u} = -\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial u},$$

де $H(x,u,\psi,t) = \psi^T(t)f^{(1)}(x,u,t)$, $t \in [t_0,t_1)$, $H(x,u,\psi,t) = \psi^T(t)f^{(2)}(x,u,t)$, $t \in (t_1,T]$, а спряжена вектор-функція $\psi(t)$ задовольняє системі з імпульсним впливом

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial x}, \ t \in [t_0,T],$$

$$\psi(t_1-0) = \frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}\psi(t_1+0),$$

$$\psi(T) = -\mathrm{grad}_x^T \varphi(x(T)).$$

Тоді для знаходження оптимального керування можна застосувати ітераційну процедуру типу градієнтного спуску

$$u^{(k+1)}(t) = P_U\left(u^{(k)}(t) - \rho_k \frac{\partial I(u^{(k)})}{\partial u} \right),$$

де $\rho_k > 0$ - крок методу, P_U – оператор проекції на множину U.

Задача 26. Знайти похідну Фреше, якщо критерій якості для (1)-(3) має вигляд

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(x,u,t)dt + \Phi(x(T)).$$

Задача 27. Знайти похідну Фреше для задачі оптимального керування з функціоналом (4), що розглядається на розв'язок системи з заданою структурою

$$\frac{dx}{dt} = f^{(k)}(x,u,t),\ t \in (t_{k-1}, t_k),\ k = 1,2,\dots,N,$$

$$x(t_k + 0) = g_k(x(t_k - 0), t_k)$$

де $f^{(k)}(x,u,t)$ – неперервні разом з частинними похідними за x та u вектор функції, $g_k(x,t)$ – неперервно диференційовані n-вимірні вектор функції, $k = 1,2,\dots,N$, $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$.

Задача 28. Для задачі оптимального керування, яка полягає в мінімізації функціоналу $I(u) = (x(T) - \gamma)^2$ на розв'язках системи

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1 x = u(t),\ t \in [t_0, t_1),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_2 x = u(t),\ t \in (t_1, T],$$

$$\frac{dx(t_1 + 0)}{dt} = \frac{dx(t_1 - 0)}{dt} + k,$$

знайти похідну Фреше. Тут $x(t)$ – скалярна функція, $u(t)$ – скалярна функція керування, $t \in [0,T]$, $t_1 \in (0,T)$, $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$, $k \in R^1$.

Література

1. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К., 1985.

2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М., 1980.

3. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М., 1978.

4. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М., 1985.

ЛЕКЦІЯ 17
ВИБІР ОПТИМАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

1. *Постановка задачі.* При конструюванні різних технічних систем для спрощення процесу виготовлення систему розбивають на підсистеми. Який має бути порядок розміщення підсистем, щоб система в цілому мала найкращі характеристики при експлуатації? У математичному плані така постановка може бути формалізована і зведена до *задачі вибору оптимальної структури* динамічної системи.

Нехай $X \subseteq R^n$ – фазовий простір і для кожного $t \in [t_0, T]$ визначено множину $\Omega(t) \subseteq X$. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f^{(j_i)}(x,t), \quad t \in (\tau_{i-1}, \tau_i), \tag{1}$$

з умовами

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

$$x(\tau_i + 0) = g_{j_i}(x(\tau_i - 0), \tau_i), \ i = 1,2,\ldots,p. \tag{3}$$

Тут $x(t) \in \Omega(t)$ – вектор фазових координат, $t \in [t_0, T]$, $f^{(j)}(x,t)$, – векторфункції розмірності n, які задовольняють умовам існування та єдності розв'язку задачі Коші, $j = 1,2,\ldots,N$, $x_0 \in \Omega(t_0)$, $g_j(x,t)$ – n-вимірні неперервні вектор-функції на $X \times [t_0, T]$, $j = 1,2,\ldots,N$, $\tau_i \in (t_0, T)$, $i = 1,2,\ldots,p$, $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p = T$. Позначимо $x^j(t) = x(t,s,y,f^{(j)})$ траєкторію підсистеми $\frac{dx}{dt} = f^{(j)}(x,t)$ системи (1) з початковою умовою $x(s) = y$. Індексація j_i в (1) вказує на те, що на відрізку $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$ використовується одна з підсистем $\frac{dx}{dt} = f^{(j)}(x,t)$, $j = 1,2,\ldots,N$, $i = 1,2,\ldots,p$. Не виключається випадок, коли деяка підсистема $\frac{dx}{dt} = f^{(k)}(x,t)$ з заданого набору підсистем не використовується на жодному з відрізків $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1,2,\ldots,p$, або використовується одночасно на кількох. Таким чином, послідовність розміщення підсистем в системі (1) не є фіксованою. Точки $\tau_i \in (t_0, T)$ називаються *точками переключення* між підсистемами, $i = 1,2,\ldots,p$. Кількість точок переключення також може бути невідомою. Співвідношення (3) вказує на те, що у точці переключення можливий розрив фазової траєкторії. При цьому величина розриву залежить від точки переключення, фазової координати та номера підсистеми, що була задіяна на попередньому інтервалі. Динамічна система вигляду (1)-(3) називається *системою зі змінною структурою*.

Нехай задана множина точок розриву

$$\{\tau_i\} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\}$$

та послідовність правих частин

$$\{f^{(j_i)}\} = \{f^{(j_1)}, f^{(j_2)}, \dots, f^{(j_p)}\}.$$

Пара $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})$ визначає кількість точок переключень p, множину $\{[\tau_{i-1}, \tau_i) \mid i = 1,2,\dots,p\}$, встановлює відповідність

$$\frac{dx}{dt} = f^{(j_i)}(x,t), \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i), \quad i = 1,2,\dots,p.$$

Таким чином, при фіксованих $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})$ система (1), (3) є системою з імпульсним впливом, для якої існує розв'язок задачі Коші. Пару $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})$ будемо називати *структурою* системи (1)-(3). Задача про вибір оптимальної структури системи (1) полягає в тому, щоб знайти структуру $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})$, таку, що мінімізує визначений на розв'язках системи (1)-(3) критерій якості

$$I(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\}) = \int_{t_0}^{T} f_0(x,t)dt + \Phi(x(T)). \quad (4)$$

Тут $f_0(x,t)$ – інтегрована за Лебегом на розв'язках системи (1) функція, $\Phi(x)$ – неперервна функція.

2. Принцип оптимальності і рівняння Беллмана. Для розв'язування задачі (1)-(4) застосуємо метод динамічного програмування. Припустимо, що пара $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})^*$ визначає оптимальну структуру задачі (1)-(4), $x^*(t) = x\left(t, x_0, t_0, (\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})^*\right)$ –траєкторія, що відповідає оптимальній структурі.

Розглянемо допоміжну задачу. Зафіксуємо точку $s \in (t_0, T)$. Необхідно мінімізувати критерій якості

$$I_s(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\}) = \int_{s}^{T} f_0(x,t)dt + \Phi(x(T))$$

на траєкторіях системи (1), що розглядається на проміжку $t \in (s, T]$ з умовами $x(s+0) = x^*(s+0)$ та (3). Має місце наступний *принцип оптимальності*.

Теорема 1. Якщо $\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)^{**}$ – розв'язок допоміжної задачі, то на проміжку $t \in (s,T]$ має місце рівність $\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)^{*} = \left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)^{**}$.

Теорема може бути доведена аналогічно до принципу оптимальності Беллмана для задачі оптимального керування Больца. При цьому за функцію керування вибирається структура $\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)$ системи (1) [1,2].

Функція

$$B(z,s) = \min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)} \left\{ \int_s^T f_0(x,t)dt + \Phi(x(T)) \right\},$$

що визначена на траєкторіях системи (1) при $t \in (s,T]$ з умовами $x(s+0) = z$ та (3) є *функцією Беллмана* задачі (1)-(4). Згідно з принципом оптимальності

$$B(z,s) = \lim_{\varepsilon \to +0} \min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)} \left\{ \int_s^{s+\Delta s+\varepsilon} f_0(x,t)dt + \int_{s+\Delta s+\varepsilon}^T f_0(x,t)dt + \Phi(x(T)) \right\} =$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)} \left\{ \int_s^{s+\Delta s+\varepsilon} f_0(x,t)dt + B(x(s+\Delta s+\varepsilon), s+\Delta s+\varepsilon) \right\} =$$

$$\min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)} \left\{ \int_s^{s+\Delta s} f_0(x,t)dt + B(x(s+\Delta s+0), s+\Delta s+0) \right\}. \qquad (5)$$

Позначимо

$$G_{j_i}(x(s-0),s) = \begin{cases} x(s), s \neq \tau_i, \\ g_{j_i}(x(s-0),s), s = \tau_i. \end{cases}$$

Враховуючи (5), отримуємо

$$B(z,s) = \min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)} \left\{ \int_s^{s+\Delta s} f_0(x,t)dt + B(G_{j_i}(x(s+\Delta s-0), s+\Delta s), s+\Delta s+0) \right\}. \qquad (6)$$

Рівняння (6) розглядається на траєкторіях даної системи і є рівнянням Беллмана в інтегральній формі для задачі (1)-(4).

Ураховуючи, що p – скінченне число, можемо для точки s вибрати таке $\Delta s > 0$, що проміжок $(s, s+\Delta s)$ не містить точок переключення τ_i. Припустимо, що функція Беллмана $B(z,s)$ – неперервно диференційована, $f_0(x,t)$ – неперервна, $\theta \in (s, s+\Delta s)$. Використовуючи теорему про середнє, розклад функції Беллмана до другого порядку та (5), при $\Delta s \to 0$ маємо

$$B(z,s) = \min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)} \left\{ f_0(x(\theta),\theta)\Delta s + B(z,s) + \frac{\partial B(z,s)}{\partial s}\Delta s + \operatorname{grad}_x^T B(z,s)\left(x(s+\Delta s) - z\right) + o(\Delta s) \right\}.$$

Поділимо останній вираз на Δs і перейдемо до границі при $\Delta s \to 0$. Таким чином, отримуємо

$$\frac{\partial B}{\partial s} + \min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)} \left\{ f_0(x,s) + \mathrm{grad}_x^T B(x,s+0) f^{(j_i)}(x,s+0) \right\} = 0, \tag{7}$$

$$x \in \Omega(s+0),\ B(x,T) = \Phi(x),\ x = G_{j_{(i-1)}}(u,s),\ u \in \Omega(s-0). \tag{8}$$

Рівняння (7), (8) є рівнянням Беллмана у диференціальній формі для задачі (1)-(4).

3. Алгоритм розв'язування задачі вибору оптимальної структури. На основі інтегрального рівняння Беллмана (6) можна запропонувати наступний алгоритм знаходження оптимальної структури.

Алгоритм.

Крок 1. Введемо на відрізку $[t_0, T]$ сітку $t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$. Позначимо $\Omega(k) = \Omega(t_k)$, $k = 1,2,\ldots,m$.

Прямий хід методу.

Крок 2. Для кожної точки $y \in \Omega(m-1)$, з якої досяжна множина $\Omega(m)$ в силу (1), (3), розв'язуємо задачу

$$B(y, t_{m-1}) = \min_j \left\{ \int_{t_{m-1}}^{t_m} f_0(x^j, t)dt + \Phi\left(x^j(T)\right) \right\}.$$

Тут $x^j(t) = x\left(t, y, t_{m-1}, f^{(j)}\right)$. Знаходимо номер оптимальної підсистеми $j^* = j^*(m-1, y)$.

Крок 3. Розв'язуємо задачу

$$B(y, t_{m-2}) = \min_{j,k=1,2} \left\{ \int_{t_{m-2}}^{t_{m-1}} f_0(x^j, t)dt + S_k(j, m-1) \right\}$$

для будь-якої точки $y \in \Omega(m-2)$, з якої досяжна множина $\Omega(m)$ в силу (1), (3). Тут

$$S_1(j, m-1) = B(x^j(t_{m-1}), t_{m-1}),\ S_2(j, m-1) = B(g_j(x^j(t_{m-1}), t_{m-1}), t_{m-1}),$$

$x^j(t) = x\left(t, y, t_{m-2}, f^{(j)}\right)$, $g_j(x^j(t_{m-1}), t_{m-1}) \in \Omega(m-1)$. Знаходимо номер оптимальної підсистеми $j^* = j^*(m-2, y)$ та обчислюємо індикатор наявності точки переключення $k^* = k^*(m-2, y)$. Продовжуємо ітераційний процес згідно рівняння (6) до того моменту, поки не прийдемо до множини $\Omega(0)$.

Крок 4. Для кожної точки $y \in \Omega(0)$, з якої досяжна множина $\Omega(m)$ у силу (1), (3), розв'язуємо задачу

$$B(y, t_{m-2}) = \min_{j,k=1,2}\left\{\int_{t_0}^{t_1} f_0(x^j, t)dt + S_k(j,1)\right\},$$

де

$$S_1(j,1) = B(x^j(t_1), t_1),\ S_2(j,1) = B(g_j(x^j(t_1), t_1), t_1),$$

$x^j(t) = x\left(t, y, t_0, f^{(j)}\right)$, $g_j(x^j(t_1), t_1) \in \Omega(1)$. Знаходимо $j^* = j^*(0, y)$ та $k^* = k^*(0, y)$.

Зворотній хід методу.

Крок 5. Присвоімо $R = 0$ (R –кількість точок переключення). Знаходимо $j = j^*(0) = j^*(0, x_0)$, $\tilde{x}(t_1) = x\left(t_1, x_0, t_0, f^{(j)}\right)$. Якщо $k^*(0, x_0) = 1$, то $x^*(t_1) = \tilde{x}(t_1)$. Інакше $x^*(t_1) = g_j(\tilde{x}(t_1), t_1)$, $R = 1$, $\tau_R = t_1$. Далі підраховуємо $j = j^*(1) = j^*(1, x^*(t_1))$, $\tilde{x}(t_2) = x\left(t_2, x^*(t_1), t_1, f^{(j)}\right)$. Якщо $k^*(1, x^*(t_1)) = 1$, то $x^*(t_2) = \tilde{x}(t_2)$. Інакше $x^*(t_2) = g_j(\tilde{x}(t_2), t_2)$, R збільшуємо на 1, $\tau_R = t_2$ і т.д. до того моменту, поки не прийдемо до множини $\Omega(m)$. У результаті обчислень отримаємо множини

$$\left\{\tau_i, i = 1,2,\ldots,R\right\},\ \left\{j^*(i)\right\},$$

які визначають оптимальну структуру системи (1) для задачі вибору оптимальної структури (1)-(4).

Література

1. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. – К., 2000.
2. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К.,1975.

ЛЕКЦІЯ 18
ОСОБЛИВІ ОПТИМАЛЬНІ КЕРУВАННЯ

1. *Вступ.* Як відомо, ідея застосування принципу максимуму для обчислення оптимальних керувань полягає у наступному. З умови максимуму функції Гамільтона-Понтрягіна знаходиться керування як функція від фазових координат та спряжених змінних. Далі результат підставляється у вихідну динамічну систему та спряжену систему. Таким чином, отримуємо систему з $2n$ диференціальних рівнянь з $2n$ крайовими умовами, де n – розмірність *фазового простору. Серед розв'язків такої системи знаходиться і оптимальна траєкторія.* Описана процедура може бути реалізована, якщо максимум функції Гамільтона-Понтрягіна *досягається у єдиній точці*. Може, проте, виникнути така ситуація, що максимум функції Гамільтона-Понтрягіна досягається у декількох точках або ж функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальній траєкторії та оптимальних спряжених змінних не залежить від керування. Такі випадки називаються *особливими*, і відповідні керування також називають *особливими*. З особливими оптимальними керуваннями тісно пов'язані оптимальні ковзні режими. Наявність особливого керування є ознакою складності задачі, оскільки на ньому принцип максимуму є виродженим. Особливі оптимальні керування не можна досліджувати лише за допомогою принципу максимуму, який за своєю суттю є необхідною умовою оптимальності першого порядку. Проте такі режими виникають у цілому ряді прикладних задач, пов'язаних з електротехнікою, металургією, космічною навігацією, що підтверджує необхідність дослідження особливих випадків.

2. *Приклад.* Розглянемо задачу оптимального керування. Потрібно мінімізувати функціонал

$$J(u) = x_1^2(T) + x_2^2(T) \tag{1}$$

при умовах

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = -\sin x_1(t) - \beta x_2(t) + u(t), \tag{2}$$

де $t \in [0,T]$, $x(0) = x_0$ – фіксована точка, $u(t) \in V = \{u \in R^1 : |u| \le 1\}$. Запишемо функцію Гамільтона-Понтрягіна

$$H(x_1, x_2, u, \psi_1, \psi_2, t) = \psi_1 x_2 + \psi_2(-\sin x_1 - \beta x_2 + u)$$

і спряжену систему

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = \psi_2 \cos x_1, \quad \frac{d\psi_2(t)}{dt} = -\psi_1 + \beta\psi_2 \tag{3}$$

з умовами

$$\psi_1(T) = 2\psi_0 x_1(T), \quad \psi_2(T) = 2\psi_0 x_2(T). \tag{4}$$

Відмітимо, що $\psi_0 = -1$, так як при $\psi_0 = 0$ з (3), (4) випливає $\psi_1(t) = \psi_2(t) = 0$. А це суперечить співвідношенню $|\psi_0| + \psi_1^2(t) + \psi_2^2(t) \neq 0,\ t \in [0,T]$, яке закладене у формулюванні принципу максимуму Понтрягіна. З умови $\max\limits_{|u|\le 1} H(x_1, x_2, u, \psi_1, \psi_2, t)$ випливає $u_0(t) = \operatorname{sign}\psi_2(t)$. Керування $u_0(t)$ є підозрілим на оптимальне. Якщо для деякого керування $v(t) \in V$ розв'язок задачі (2) є таким, що $x_1(T) = x_2(T) = 0$, то $\min\limits_{u \in V} J(u) = J(v) = 0$. Однак, у силу (3), (4)

$\psi_1(t) = \psi_1(t,v) = 0$, $\psi_2(t) = \psi_2(t,v) = 0$ і

$$H(x_1(t,v), x_2(t,v), u, \psi_1(t,v), \psi_2(t,v), t) = 0$$

для всіх $t \in [0,T]$, $u \in V$. Отже, керування $v \in V$ є особливим оптимальним керуванням, так як на оптимальній траєкторії системи (2) і на оптимальних спряжених змінних функція Гамільтона-Понтрягіна не залежить від параметра *u*. Таким чином, керування *v* не можна отримати з принципу максимуму.

3. *Основні означення*. Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає в мінімізації функціоналу

$$J(u) = \varphi(x(T)) \tag{5}$$

на розв'язках динамічної системи

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t), \tag{6}$$

де x – n-вимірний вектор фазових координат, $x(t_0) = x_0$, $t \in [t_0, T]$, моменти t_0, T – фіксовані, функції $\varphi(x)$ та $f(x,u,t)$ є неперервними разом з похідними $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x_i}$, $i = 1,2,\dots,n$, $u(t)$ – функція керування, яка належить класу кусково-неперервних *r*-вимірних функцій, що приймає значення з множини $U \subset R^r$. Якщо $u_0(t)$ – оптимальне керування задачі (5), (6), а $x_0(t)$ – відповідна йому траєкторія системи (6), то згідно принципу максимуму Понтрягіна

$$H(x_0(t), u_0(t), \psi_0(t), t) \ge H(x_0(t), u, \psi_0(t), t) \tag{7}$$

для фіксованих $t \in [t_0, T]$, $u \in U$. Тут $H(x,u,\psi,t) = \psi^T(t) f(x,u,t)$ – функція Гамільтона-Понтрягіна, $\psi_0(t)$ – n- вимірних вектор спряжених координат, що задовольняє спряженій системі

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial x}, \tag{8}$$

$$\psi(T) = -\frac{\partial \varphi(x(T))}{\partial x} \tag{9}$$

при $x = x_0(t)$, $u = u_0(t)$. Але умова (7) може виконуватися не тільки для оптимальних керувань, оскільки принцип максимуму є необхідною умовою оптимальності. Має місце наступне означення.

Означення. Допустиме керування $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, називають *екстремаллю Понтрягіна*, якщо керування $u(t)$ та розв'язок $\psi(t)$ спряженої системи (8), (9), які отримано при $x = x(t)$, $u = u(t)$ задовольняють умові

$$H(x(t),u(t),\psi(t),t) = \max_{u \in U} H(x(t),u(t),\psi(t),t). \tag{10}$$

Аналізуючи попередній приклад, приходимо до наступного поняття.

Означення. Екстремаль Понтрягіна $u(t)$ називається *особливою*, якщо для кожного $t \in [t_0, T]$ існує множина $\Omega(t) \subset U$, така, що

$$H(x(t),v,\psi(t),t) = H(x(t),u(t),\psi(t),t)$$

для всіх $v \in \Omega(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Вважаємо, що множина $\Omega(t)$ при всіх $t \in [t_0, T]$ складається щонайменше з двох елементів.

Припустимо, що вектор-функція $f(x,u,t)$ є диференційованою за u, а множина U є опуклою. Тоді з умови (7) випливає, що

$$\frac{\partial H^T(x_0(t),u_0(t),\psi_0(t),t)}{\partial u}(u - u_0(t)) \le 0.$$

Тут $u \in U$, $t \in [t_0, T]$ - фіксована точка. Звідси отримуємо

$$\frac{\partial H^T(x_0(t),u_0(t),\psi_0(t),t)}{\partial u} u_0(t) = \max_{u \in U} \frac{\partial H^T(x_0(t),u_0(t),\psi_0(t),t)}{\partial u} u.$$

Тому, якщо екстремаль Понтрягіна є особливою, то остання рівність буде досягатись не лише при $u = u_0(t)$. Отже, має місце наступне означення.

Означення. Допустиме керування $u(t)$, $t \in [t_0, T]$ називається *квазіособливою екстремаллю*, якщо на відрізку $t \in [t_0, T]$ визначена множина $\Omega(t) \subset U$, така, що для всіх $v \in \Omega(t)$ виконується умова

$$\frac{\partial H^T(x_0(t),u_0(t),\psi_0(t),t)}{\partial u} v = \frac{\partial H^T(x_0(t),u_0(t),\psi_0(t),t)}{\partial u} u(t). \tag{11}$$

Тут $x(t), \psi(t)$ – розв'язок (6) та (8),(9) відповідно в силу керування $u(t)$. Якщо множина U є відкритою (не обов'язково опуклою), то умова (7) може бути записана наступним чином:

$$\frac{\partial H^T(x_0(t),u_0(t),\psi_0(t),t)}{\partial u} = 0, \quad t \in [t_0, T].$$

Крім цього, на оптимальному розв'язку, згідно умов екстремуму другого порядку, виконується нерівність

$$v^T \frac{\partial^2 H(x_0(t), u_0(t), \psi_0(t), t)}{\partial u^2} v \le 0,$$

для довільного $v \in R^r$.

Означення. Допустиме керування $u(t)$, $t \in [t_0, T]$ називається *особливою екстремаллю*, якщо

$$\frac{\partial H(x_0(t), u_0(t), \psi_0(t), t)}{\partial u} = 0, \tag{12}$$

$$v^T \frac{\partial^2 H(x_0(t), u_0(t), \psi_0(t), t)}{\partial u^2} v \le 0, \tag{13}$$

$$\det\left(\frac{\partial^2 H(x_0(t), u_0(t), \psi_0(t), t)}{\partial u^2}\right) = 0, \tag{14}$$

де $t \in (t_0, T)$, $v \in R^r$ – довільний вектор. Умова (14) говорить про виродженість оптимальної точки. Зрозуміло, що особлива екстремаль Понтрягіна є квазіособливою та особливою в сенсі (12)-(14). З іншої сторони, особливі в сенсі (12)-(14) та квазіособливі екстремалі можуть не бути особливими екстремалями Понтрягіна. Але умову (11) або умови (12)-(14) легше перевірити, чим означення, що визначається умовою (10). З іншого боку умови (12)-(14) не можна застосовувати для дослідження задач вигляду (5),(6) з множинами типу

$$U = \left\{u \in R^n : |u_i| \le 1, i = 1, 2, \ldots, r\right\}.$$

Введення додаткових типів особливих керувань пояснюється ще й тим, що для системи (6) з правою частиною $f(x,u,t) = f_0(x) + u^T g(x)$, де $f_0(x)$ і $g(x)$ – неперервні вектор-функції, згадані означення дуже близькі.

Література

1.Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – М.,1973.

ЛЕКЦІЯ 19
ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

1. *Основні означення.* Розглянемо задачу Больца

$$I = \int_{t_0}^{T} f_0(x, u, t)dt + \Phi(x(T), T) \to \min \quad (1)$$

при умовах

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad (2)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

$$(x(T), T) \in G_1, \; u(t) \in U(x, t). \quad (4)$$

Тут $x \in R^n$ – вектор фазових координат, $f_0(x, u, t)$ – неперервна разом з $\frac{\partial f_0(x, u, t)}{\partial x_i}$ функція, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\Phi(x, T)$ – неперервна функція, $f(x, u, t)$ – неперервна за сукупністю змінних разом з $\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x_i}$ вектор-функція розмірності n, $i = 1, 2, \ldots, n$, $u(t)$ – вимірна на $[t_0, T]$ функція керування розмірності r, $U(x, t) \subset R^r$ – неперервне зверху багатозначне відображення, T – нефіксований момент. Припускаємо, що виконується умова

$$x^T f(x, u, t) \le c\left(\|x\|^2 + 1\right), \; c > 0. \quad (5)$$

У загальному випадку в класі вимірних оптимальне керування задачі (1)-(5) може не існувати. Однак, практично завжди, існує послідовність $\{u_k(t)\}$, $t \in [t_0, T_k]$ вимірних керувань, $k = 1, 2, \ldots$, що відповідна послідовність $\{x_k(t)\}$ траєкторій в силу системи (2) та умови (3) збігається до $x^*(t)$, $t \in [t_0, T^*]$, $T^* = \lim_{k \to \infty} T_k < \infty$. При цьому

$$\lim_{k \to \infty} I(u_k) = \inf I.$$

Означення. Якщо гранична крива $x^*(t)$ не є траєкторією системи (2), то рух вздовж $x^*(t)$ називається *ковзним оптимальним режимом*. Сама функція $x^*(t)$ називається *функцією нульової близькості* ковзного режиму.

2. *Приклад.* Розглянемо задачу оптимальної швидкодії: мінімізувати функціонал $I(u) = T$ при умовах:

$$\frac{dx}{dt} = -y^2 + u^2, \quad \frac{dy}{dt} = u, \tag{6}$$

$|u(t)| \le 1, \quad x(0) = y(0) = y(T) = 0, \quad x(T) = 1, \quad t \in [0, T].$

Тут $x(t), y(t), u(t)$ – скалярні функції. Оцінимо оптимальне значення функціоналу T^*. Має місце нерівність $\frac{dx}{dt} = -y^2 + u^2 \le -y^2 + 1 \le 1$. Тому $dx \le dt$ і звідси $x(T^*) - x(0) \le T^*$. Так як $x(T)=1$, $x(0)=0$, то $T^* \ge 1$. Щоб досягти $T^* = 1$, потрібно, щоб $y(t) = 0$ і $u^2 = 1$. Але з другого рівняння системи (6) випливає, що це неможливо. Тому $T^* > 1$. Побудуємо послідовність розв'язків $\{x_k(t), y_k(t)\}$, для яких $x_k(0) = y_k(0) = 0$ і відповідне керування має вигляд

$$u_k(t) = 1, \; t \in [2i/k, (2i+1)/k);$$
$$u_k(t) = -1, \; t \in [(2i+1)/k, (2i+2)/k),$$
$$i = 0, 1, 2, \dots .$$

Тоді з другого рівняння системи (6) слідує

$$y_k(t) = \int_0^t u_k(s)ds = \frac{1}{k} - \left(\frac{2}{k} - \frac{1}{k}\right) + \left(\frac{3}{k} - \frac{2}{k}\right) - \left(\frac{4}{k} - \frac{3}{k}\right) + \dots .$$

Тому

$$0 \le y_k(t) \le 1/k, \; \frac{dx_k(t)}{dt} = u_k^2(t) - y_k^2(t) \ge 1 - 1/k^2, \; x_k(1) = x_k(0) + \int_0^1 \left(u_k^2(s) - y_k^2(s)\right)ds \ge 1 - 1/k^2.$$

Таким чином, при $k \to \infty$ знайдуться точки графіків розв'язків системи (6) з нульовими початковими даними, що лежать як завгодно близько до точки $P = \{t = 1, x = 1, y = 0\}$. Але P, як показано вище, не належить графіку жодного розв'язку (6). Таким чином, крива $x(t) = t$, $y(t) = 0$ є функцією нульової близькості ковзного оптимального режиму. Систему (6) не можна за час $T = 1$ перевести з положення $x = y = 0$ в P, але можна перевести в точку, яка лежить як завгодно близько до точки P. Для цього потрібно змінювати функцію керування $u(t)$ достатньо швидко від 1 до -1 і від -1 до 1.

3. Теорема Філіппова. Розглянемо умови існування оптимального режиму в класі вимірних функцій. Для простоти сам підхід і основну теорему доведемо для задачі оптимальної швидкодії. Для доведення основного результату нам знадобиться наступна лема.

Лема 1 (Філіппова). Нехай вектор функція $g(t, u)$ є неперервна, $t \in [t_0, T]$, $u = (u_1\, u_2 \dots u_r)^T$, відображення $Q: t \mapsto Q(t)$ є напівнеперервним зверху та компактозначним, $Q(t) \subset R^r$, $t \in [t_0, T]$,

$$R(t) = \{f(t,u) : u \in Q(t)\},$$

$y(t) \in R^r$ – вимірна за Лебегом вектор функція. Тоді існує вимірна за Лебегом вектор функція $u(t)$, така, що $u(t) \in Q(t)$, $g(t,u(t)) = y(t)$.

Таким чином, розглянемо задачу оптимальної швидкодії. Нехай для задачі (1)-(5) момент t_0 – фіксований, x_0 – фіксована точка, множина G_1 складається з одного елементу $G_1 = \{(x_1,T)\}$, де x_0 є заданим, $f_0(x,u,t) = 1$, $\Phi(x,T) = 0$, а функціонал (1) має вигляд

$$I(u) = T - t_0.$$

Позначимо $T^* - t_0 = \inf I$. Припустимо, що існує щонайменше одна траєкторія $\widetilde{x}(t)$ системи (1) у силу деякого вимірного керування $\widetilde{u}(t) \in U(\widetilde{x}(t),t)$ та момент t_1, такі, що $\widetilde{x}(t_0) = x_0$, $\widetilde{x}(t_1) = x_1$. У цьому випадку $T^* \in [t_0,t_1]$. Важливу роль буде відігравати багатозначне відображення $R:(x,t) \mapsto R(x,t)$, де $R(x,t) = \{f(x,u,t) : u \in U(x,t)\}$.

Задача 29. Довести, що відображення $R:(x,t) \mapsto R(x,t)$ є компактозначним і неперервним зверху.

Теорема 1 (Філіппова). Нехай $R(x,t)$ – опукла множина. Тоді існує вимірна функція $u^*(t) \in U(x^*(t),t)$, яка мінімізує функціонал $I(u) = T - t_0$ і відповідна траєкторія $x^*(t)$ задовольняє умовам $x^*(t_0) = x_0$, $x^*(T^*) = x_1$.

Доведення проведемо в два етапи.

Етап 1. Побудова оптимальної траєкторії. Позначимо $Z(t) = \|x(t)\|^2 + 1$. З (5) отримуємо

$$\frac{dZ(t)}{dt} = 2x^T(t)\frac{dx(t)}{dt} = 2x^T(t)f(x,u,t) \le 2c(\|x(t)\|^2 + 1) = 2cZ(t).$$

Позначимо $A = Z(t_0) = \|x(t_0)\|^2 + 1$. З нерівності $\frac{dZ(t)}{dt} \le 2cZ(t)$ випливає $\frac{dZ(t)}{Z(t)} \le 2cdt$ і $Z(t) \le Ae^{2c(t-t_0)}$, $t \ge t_0$. Оскільки $T^* \in [t_0,t_1]$, то ми можемо розглядати лише ті керування, для яких значення функціоналу $I \le t_1 - t_0$. Для таких керувань розв'язок системи (2) з умовами $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ задовольняє нерівності $\|x(t)\|^2 \le Ae^{2c(t_1-t_0)}$.

Покажемо, що при $t \in [t_0, t_1]$, $\|x(t)\| \le \sqrt{A}\, e^{c(t_1 - t_0)}$ множина $U(x,t)$ є рівномірно обмежена. Тобто, знайдеться $N > 0$, таке, що для довільного $u \in U(x,t)$ виконується $\|u\| \le N$.

Від супротивного. Припустимо, що існують послідовності $\{t_k\}$, $\{x_k\}$, $\{u_k\}$, такі, що $t_k \to t$, $x_k \to x$, $\|u_k\| \to \infty$, $u_k \in U(x_k, t_k)$, $k \to \infty$. У силу неперервності зверху для довільного $\varepsilon > 0$ при великих значеннях k виконується $U(x_k, t_k) \subset (U(x,t))^{\varepsilon}$. Таким чином, $U(x_k, t_k)$ – обмежена. Звідси $U(x,t)$ – рівномірно обмежена.

Так як $f(x,u,t)$ – неперервна, то при $t \in [t_0, t_1]$, $\|x\| \le \sqrt{A}\, e^{c(t_1 - t_0)}$, $u \in U(x,t)$ отримуємо $\|f(x,u,t)\| \le M$, $M > 0$. Розглянемо множину S_0 всіх розв'язків $x(t)$ системи (2), для різних $u(t) \in U(x(t),t)$, для яких $x(t_0) = x_0$ і траєкторія проходить через x_1. Ця множина не є порожньою. Нехай W – множина керувань, які відповідають траєкторії $x(t) \in S_0$.

Візьмемо послідовність $u_s(t) \in W$, $I_s = I(u_s) \to \inf\limits_{u \in W} I = I^*$. Нехай $x_s(t)$ – відповідний розв'язок системи (2), $s = 1,2,\ldots$. Так як $\|x_s(t)\| \le \sqrt{A}\, e^{c(t_1 - t_0)}$, то $x_s(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$ є рівномірно обмежені. З умови

$$\left\| \frac{dx_s(t)}{dt} \right\| = \| f(x_s(t), u_s(t), t) \| \le M$$

випливає ліпшицевість, абсолютна неперервність і рівностепенна неперервність $x_s(t)$. За теоремою Арцела виберемо з $\{x_k(t)\}$ збіжну підпослідовність, $\lim\limits_{k \to \infty} x_k(t) = x^*(t)$.

Етап 2. Існування оптимального керування. Покажемо, що траєкторія $x^*(t)$ відповідає оптимальному керуванню. Так як всі члени послідовності $\{x_k(t)\}$ задовольняють умові Ліпшиця з однією і тією ж константою M, то $x^*(t)$ – ліпшицева з константою M. Тому $x^*(t)$ – абсолютно неперервна і $\left| \frac{dx^*(t)}{dt} \right| \le M$. Позначимо $\frac{dx(t)}{dt} = y(t)$, $\frac{dx_k(t)}{dt} = y_k(t)$, $k = 1,2,\ldots$ Функції $y(t)$, $y_k(t)$ визначені майже скрізь на $[t_0, t_1]$, вимірні і обмежені. Нехай $\tau \in [t_0, t_1]$ і існує $\frac{dx^*(\tau)}{dt}$. Покажемо, що

$$\frac{dx^*(\tau)}{dt} \in R(x^*(\tau), \tau).$$

Відображення R є β – неперервним, тому для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, таке, що при $|t-\tau| < \delta$, $\|x - x^*(\tau)\| < 2M\delta$ має місце включення

$$R(x,t) \subset (R(x^*(\tau), \tau))^{\varepsilon}.$$

Виходячи з означення похідної, для $\varepsilon > 0$, зменшивши, якщо потрібно, $\delta > 0$, можна отримати

$$\left\| \frac{x^*(t) - x^*(\tau)}{t-\tau} - \frac{dx^*(\tau)}{dt} \right\| \le \varepsilon \tag{7}$$

при $|t-\tau| < \delta$. Але

$$\frac{x^*(t) - x^*(\tau)}{t-\tau} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k(t) - x_k(\tau)}{t-\tau} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t-\tau} \int_{\tau}^{t} y_k(s)ds \tag{8}$$

Далі, майже для всіх s має місце

$$y_k(s) = \frac{dx_k(s)}{dt} = f(\tau, x_k(s), u_k(s)) \in R(x_k(s), s).$$

При $|t-\tau| < \delta$ і досить великих k маємо

$$\|x_k(\tau) - x^*(\tau)\| < M\delta, \quad \|x_k(\tau) - x_k(t)\| < M\delta.$$

Звідси $\|x_k(t) - x^*(\tau)\| < 2M\delta$. Тоді, з раніше зроблених оцінок випливає $R(x_k(t), t) \subset (R(x^*(\tau), \tau))^{\varepsilon}$. Отже, при $|t-\tau| < \delta$ і досить великих k підінтегральна функція в (8) належить $(R(x^*(\tau), \tau))^{\varepsilon}$. За лемою про середнє значення (теорема 7, лекція 5) $\frac{x^*(t) - x^*(\tau)}{t-\tau} \in (R(x^*(\tau), \tau))^{\varepsilon}$. Отже, з (7) випливає $\frac{dx^*(\tau)}{dt} \in (R(x^*(\tau), \tau))^{2\varepsilon}$. Так як $\varepsilon > 0$ як завгодно мале, $R(x^*(\tau), \tau)$ - замкнена множина, то $\frac{dx^*(\tau)}{dt} \in R(x^*(\tau), \tau)$. Тому існує $u^*(\tau) \in U(x^*(\tau), \tau)$, таке, що $\frac{dx^*(\tau)}{dt} = f(x^*(\tau), u^*(\tau), \tau)$. За лемою 1 функція $u^*(t)$ – вимірна. Теорему доведено.

Як приклад застосування теореми Філіппова, розглянемо задачу пункту 2. Позначимо $R(x, y, t) = \{(-y^2 + u^2, u) : |u| \le 1\}$. Ця множина не є опуклою (рис. 1). Дійсно, $R(x,y,t) = (A, B)$ і для точок *A*, *B* пряма $\lambda a + (1-\lambda)b \notin (A, B)$, $\lambda \in (0,1)$. Тут (A, B) – дуга від точки A до точки B. Отже, умови теореми Філіппова для системи

(6) не виконуються. Таким чином, ковзний режим виник у результаті порушення умови опуклості множини $R(x,y,t)$.

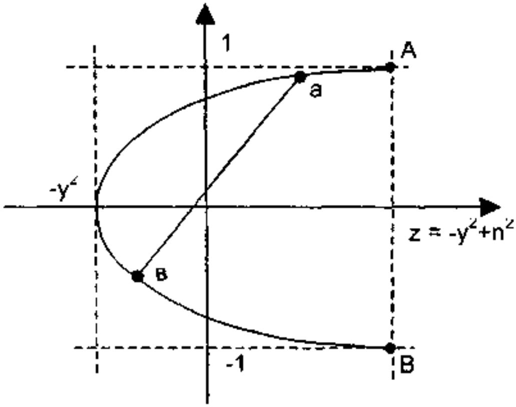

Рис. 1.

4. *Теорема Філіппова для задачі Больца.* Для задачі (1)-(4) теорема Філіппова формулюється наступним чином.

Теорема 2 (Філіппова). Нехай виконуються наступні умови:

1. Знайдеться послідовність вимірних керувань $u_k(t),\ t \in [t_0, T_k],\ k = 1,2,...,$ яка задовольняє (1)-(4), така, що відповідна послідовність $x_k(t),\ t \in [t_0, T_k]$ розв'язків динамічної системи (2) рівномірно збігається до деякої граничної кривої $x^*(t),\ t \in [t_0, T^*],\ T^* = \lim\limits_{k\to\infty} T_k < +\infty$, $x^*(t_0) = x_0,\ (x(T^*), T^*) \in G_1$ і $\lim\limits_{k\to\infty} I(u_k) = I^* = \inf I$. При цьому для будь-якої іншої послідовності керувань вказаного типу граничне значення функціоналу не менше $I^* = \inf I$.

2. Для будь-яких фіксованих (x,t) множина

$$R(x,t) = \{f(x,u,t) : u \in U(x,t)\}$$

є опуклою.

3. Функція

$$\Psi(x,t,\psi) = \min\{f_0(x,u,t) : u \in \Omega(x,\psi,t)\}$$

є для довільних (x,t) увігнутою по ψ на множині $R(x,t)$. Тут $\Omega(x,\psi,t) = \{u \in U(x,t) : f(x,u,t) = \psi, \psi \in R(x,t)\}$.

Тоді існує оптимальне вимірне керування $u^*(t),\ t \in [t_0, T^*]$ задачі (1)-(4), що реалізує траєкторію $x^*(t),\ t \in [t_0, T^*]$ динамічної системи (2), $x^*(t_0) = x_0,\ (x^*(T), T) \in G_1$ і $I(u^*) = I^*$.

Наслідок. Має місце диференціальне включення

$$\frac{dx^*(t)}{dt} \in \operatorname{co} f(x^*(t), U, t),$$

де $f(x, U, t) = \{f(x, u, t) : u \in U\}$. Якщо множина $f(x, U, t)$ не є опуклою, то оптимальний розв'язок $(x^*(t), u^*(t)),\ t \in [t_0, T^*]$ може не бути допустимим.

5. *Підхід Р.В.Гамкрелідзе.* Метод *Р.В.*Гамкрелідзе полягає у тому, щоб в аналітичній формі записати диференціальне включення $\frac{dx}{dt} \in \operatorname{co} f(x, U, t)$. Для цього застосовується наступна теорема.

Теорема 3. Всі ковзні режими задачі (1)-(4) знаходяться серед оптимальних траєкторій наступної задачі оптимального керування:

$$J(w) = \int_{t_0}^{T} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(t) f_0(x(t), u_i(t), t) dt + \Phi(x(T), T) \to \min, \tag{9}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(t) f(x(t), u_i(t), t), \tag{10}$$

$$x(t_0) = x_0,\ (x(T), T) \in G_1, \tag{11}$$

$$u_i(t) \in U(x, t),\ \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1,\ i = \overline{0, n}, \tag{12}$$

$$w(t) = [\alpha_0(t), \ldots, \alpha_n(t); u_0(t), \ldots, u_n(t)].$$

Зауваження. Задача (9)-(12) називається *розщепленою.*

Доведення. Виходячи з теореми Каратеодорі (див. додаток А), для задачі (9)-(12) виконуються умови теореми 2. Тобто, в класі вимірних функцій існує оптимальне керування $w^*(t) = [\alpha_0^*(t), \ldots, \alpha_n^*(t); u_0^*(t), \ldots, u_n^*(t)]$ задачі (9)-(12). Підставивши $w^*(t)$ в (10), отримаємо оптимальну траєкторію $x^*(t),\ t \in [t_0, T^*]$. Очевидно, що при цьому мінімальне значення функціоналу (9) не більше за мінімальне значення функціоналу (1), $I^* \geq J^*$. Покажемо, як, виходячи з $w^*(t), x^*(t)$, побудувати послідовність керувань $u^{(k)}(t),\ t \in [t_0, T^*]$ задачі (1)-(4), яким відповідає послідовність траєкторій $x^{(k)}(t)$ системи (2) і

$$\| x^{(k)} - x^* \|_{C[t_0, T]} \to 0,\ k \to \infty.$$

Розіб'ємо відрізок $[t_0, T^*]$ на k відрізків $I_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Кожен з відрізків $I_i^{(k)}$ розбиваємо на $(n+1)$ множину, які є вимірними і не перетинаються між собою:

$$I_i^{(k)} = \bigcup_{j=0}^{n} E_{ij}^{(k)}, \ i = \overline{1,k}.$$

При цьому

$$\mu E_{ij}^{(k)} = \int_{I_i^{(k)}} \alpha_j^*(t)dt. \tag{13}$$

Це можна здійснити, так як

$$\mu I_i^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} \mu E_{ij}^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} \int_{I_i^{(k)}} \alpha_j^*(t)dt = \int_{I_i^{(k)}} \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^*(t)dt = \int_{I_i^{(k)}} dt.$$

Послідовність керувань будемо будувати наступним чином:

$$u^{(k)}(t) = u_j^*(t), \ t \in E_{ij}^{(k)}, \ j = \overline{0,n}, \ i = \overline{1,k}, \tag{14}$$

де $u_j^*(t)$ є компонентами керування $w^*(t)$. Використовуючи теорему про неперервну залежність розв'язку системи типу Каратеодорі від правої частини та апарат узагальнених функцій, можна показати, що з $\lim\limits_{k \to \infty} \max\limits_{i=1,2,\ldots,k} \mu I_i^{(k)} = 0$ випливає $\lim\limits_{k \to \infty} \| x^{(k)} - x^* \|_{C[t_0,T]} = 0$. Теорему доведено.

Функції $u_j^*(t)$ називаються *базовими керуваннями*, а $\alpha_j^*(t)$ – *ваговими функціями*, $t \in [t_0, T^*]$. З описаної в доведенні теореми 3 конструкції (14) побудови керувань $u^{(k)}(t)$ випливає, що $u^{(k)}(t)$ при $k \to \infty$ нескінченно часто "скаче" з одного базового керування на інше. При цьому $u^{(k)}(t)$ затримується на базовому керуванні $u_j^*(t)$ на долю часу, що визначається ваговою функцією $\alpha_j^*(t)$ згідно (13). Рух $x^{(k)}(t)$ в границі є "ковзанням" вздовж $x^*(t)$ при $k \to \infty$.

Розглянемо випадок $G_1 = R^n$, $U(x,t) = R^r$. Функція Гамільтона-Понтрягіна для задачі (1)-(4) є

$$H(x,u,\psi,t) = -f_0(x,u,t) + \psi^T(t)f(x,u,t), \tag{15}$$

де $\psi(t)$ – спряжені змінні. Тоді для (9)-(12) функцією Гамільтона-Понтрягіна є

$$H_1(x,u_j,\alpha_j,\psi,t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(t)H(x,u_j(t),\psi,t). \tag{16}$$

З (15), (16) та принципу максимуму Понтрягіна [5] випливає, що якщо рівняння

$$H_1(x,u_0,\psi,t) = \sup_u H(x,u,\psi,t) \tag{17}$$

має єдиний розв'язок відносно u_0, то ковзний режим не може виникнути. Ковзний режим може мати місце лише тоді, коли існує декілька розв'язків рівняння (17).

Додаток А.

Теорема (Каратеодорі)[5]. Нехай $A \subset R^n$. Будь-яка точка $x \in \mathrm{co}\,A$ може бути подана у вигляді опуклої комбінації не більш ніж $n+1$ точки $x_i \in A,\ i = 1,2,\ldots,n+1$. Тобто,

$$\mathrm{co}\,A = \{x \in R^n : x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i,\ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,n+1\}\ .$$

Література

1. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. Московск. ун-та, Серия : Математика, механика. – 1959. – № 2. – С. 25–32.
2. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. – Тбилиси. 1977.
3. Вапнярский И.Б. Теорема существования оптимального управления в задаче Больца, некоторые ее приложения и необходимые условия оптимальности скользящих и особых режимов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. – Т. 7. – №2. – С. 259–283.
4. Гамкрелидзе Р.В. О скользящих оптимальных режимах // Доклады Академии Наук СССР. – 1962.– Т. 143. – №6. – С. 1243–1245.
5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М., 1980.
6. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М., 1978.
7. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М., 1985.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ГАРАЩЕНКО Федір Георгійович
ПІЧКУР Володимир Володимирович

ВСТУП ДО АНАЛІЗУ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ СТРУКТУРНО ЗАДАНИХ СИСТЕМ

Навчальний посібник

Редактор *В.І.Рижій*

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Підписано до друку 18.03.03. Формат $60x84^{1/16}$. Вид. № 259. Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Наклад 100. Ум. друк. арк. 7,3. Обл.-вид. арк. 7,6. Зам. № 23-1145.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01033, Київ, б-р. Т. Шевченка, 14, кімн. 43,
☎ (38044) 239 3222; (38044) 224 9972; (38044) 234 0105; факс (38044) 234 22 90.
Свідоцтво внесено до державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02.