Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
до курсу "ТЕОРІЯ ОПТИМІЗАЦІЇ"
по спеціальності "Інформатика"

АНАЛІЗ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПСЕВДОБАЗИСНИХ МАТРИЦЬ

Кудін В.І.

Київ- 2014

УДК 519.852:519.876

АНАЛІЗ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПСЕВДОБАЗИСНИХ МАТРИЦЬ/ Кудін В.І.- Електронне видання, 2014.- 43с.

Затверджено Вченою радою
факультету кібернетики

Протокол №5 від 27 січня 2014 року,

Зміст

ПЕРЕДМОВА

Пропонується наступна робота з запланованого циклу методичних матеріалів для студентів з математичним профілем спеціалізації інформатика, по розробці базових методів, алгоритмів та процедур аналізу та оптимізації моделей, що представляють лінійні та супутні до них слабонелінійні та нелінійні системи. Робота виконана на кафедрі обчислювальної математики факультету кібернетики Київського Національного Університету імені Тараса Шевченка.

В класі лінійних систем формалізується значна кількість класичних математичних задач: дослідження лінійних алгебраїчних систем та нерівностей, задач лінійного програмування, тощо. На основі математичних методів розв′язання цих задач грунтуються методи дослідження більш складних проблем аналізу та оптимізації в теорії ігр, задачах математичної фізики та економіки. Слід констатувати, що на даний момент відсутня єдина методологія та підхід по їх аналізу та використанню. В роботі обгрунтовано метод псевдобазисних матриць (МПБМ) аналізу та оптимізації лінійних систем, що є спробою, хоча б в якійсь мірі, це усунути та виробити єдину базову методологію аналізу та оптимізації широкого класу лінійних моделей та близьких до них.

Виконання цієї роботи, як і попередньої, проводилось в атмосфері тривалих та неупереджених обговорень з колегами кафедри. Хочеться особливо згадати доцента Київського Національного Університету Ігоря Миколайовича Кохановського (нажаль покійного) його критичні, змістовні зауваження по математичній формалізації та представленні наукових результатів. Завдячуючи йому, робота, на погляд автора, набула більш чіткої та математично строгої форми.

ВСТУП. Перший відомий опис схеми розв'язання задачі лінійного програмування був запропонований на початку 19-го століття французьким ученим Ж.Фур'є. З того часу було запропоновано чимало схем дослідження моделей лінійного програмування, що базуються на ідеї сімплекс-методу. Їх умовно можна "поділити" на декілька груп: методи застосовані до ″прямої″ задачі, матриця обмежень якої має більшу кількість стовпців ніж рядків [1-5], методи застосовані до ″двоїстої″ задачі, у якої матриця обмежень має кількість рядків більшу кількості стовпців [6-10], та на комбіновані методи, що застосовують одночасно розв'язок ″прямої″ та ″двоїстої″ задач, так звані, методи скорочення нев'язок [5]. Методи, що застосовувані, як до ″прямих″, так і до ″двоїстих″ задач, в свою чергу поділяються на "допустимі" схеми, в основі яких лежить ідея допустимої опорної вершини (методи типу послідовного покращення плану [1,3,5]) та на "недопустимі" схеми, в основі який закладена ідея недопустимої псевдоопорної вершини (методи типу послідовного уточнення оцінок [5]). Кожна алгоритмічна схема "народжувалась" під конкретні практичні застосування [1,3], і, відповідно, має свої переваги та недоліки.

В методичній розробці розглядається метод псевдобазисних матриць (МПБМ) базовий метод з сімейства сімплекс-методів побудови процедур аналізу моделей лінійного програмування на стадії оптимізації. Вцілому, схема методу, буде називатись коротко “недопустимою”. Цей ітераційний метод дає можливість за кінцеву кількість кроків знаходити розв'язок задачі, виявляти властивості досліджуваної моделі. В назві методу відображена його специфіка і деяка подібність з методом уточнення оцінок (двоїстим сімплекс-методом [5]).

Цей метод поєднує "в собі" переваги класичних сімплекс-методів такі як, врахування властивості суперрозрідженості матриці умов задачі при представленні оберненої матриці [1,3,4] та використовує структурну специфіку конкретних моделей при побудові схеми дослідження, тобто виявляє та аналізує властивості компонент моделі на стадії оптимізації та постоптимізації [6-10].

Знаходження оптимального розв′язку є лише одним із пунктів системного аналізу. Переважна більшість досліджень лінійних систем типу моделей лінійного програмування направлені, в основному, на знаходження оптимального розв′язку задачі [2-7]. Запропонований метод аналізу та оптимізації лінійної системи - МПБМ, не лише знаходить оптимальний розв′язок, але й дозволяє ідентифіковувати пасивні та неактивні обмеження моделі (лінійні нерівності) в ході ітераційного аналізу, встановлювати умови існування, єдиності, необмеженості та неєдиності оптимальних розв′язків, має широкий спектр прикладного застосування.

1. Основні теоретичні положення методу псевдобазисних матриць

Метод псевдобазисних матриць (МПБМ)- метод з сімейства сімплекс-методів побудови процедур аналізу моделей лінійного програмування на стадії оптимізації. Схема методу, в подальшому, буде називатись коротко “недопустимою” або МПБМ. В назві методу відображена його специфіка і деяка подібність з методом уточнення оцінок (двоїстим сімплекс-методом [7]). Особливості схеми розв'язку полягають в слідуючому:

в основі методу лежить ідея псевдобазисної матриці;

при переході до наступного недопустимого опорного розв'язку вводяться в псевдобазисну матрицю і виводяться на ітераціях не вектори-стовпці, як в методах типу модифікованого симплекс-методу, а вектори нормалі обмежень;

збіжність до оптимального розв'язку "іде зверху" за недопустимими вершинами, що називатимуться псевдовершинами, причому від ітерації до ітерації значення цільової функції строго зменшуватиметься (для невиродженої задачі на максимум);

на кожному кроці можливо уточнювать двосторонні оцінки оптимального розв'язку за цільовою функцією;

безпосередньо на ітераціях методу виявляються пасивні та неактивні обмеження;

визначаються як наближені так і точні розв'язки задачі лінійного програмування;

застосування процедур релаксації дає змогу, при невеликих затратах на їх реалізацію, значно скоротити розмірність базової задачі при розрахунках.

Цей метод поєднує в собі переваги класичних сімплекс-методів такі, як врахування властивості суперрозрідженості матриці умов задачі при представленні оберненої матриці та використовує структурну специфіку конкретних моделей при побудові схеми дослідження, тобто виявляє та аналізує властивості компонент моделі на стадії оптимізації та постоптимізації.

Відомо, що знаходження оптимального розв′язку є лише одним із пунктів системного аналізу. Запропонований метод аналізу та оптимізації лінійної системи - МПБМ, не лише знаходить оптимальний розв′язок, але й ідентифікує пасивні та неактивні обмеження моделі (лінійні нерівності) в ході ітераційного аналізу, встановлювати умови існування, єдиності, необмеженості та неєдиності оптимальних розв′язків, має широкий спектр прикладного застосування.

За аналогією з попереднім, введемо в розгляд пряму канонічну задачу [2-7] лінійного програмування вигляду:

$$\min Cx^T, \tag{1}$$

$$Ax^T = B^T, \tag{2}$$

$$x \geq 0 \tag{3}$$

Модель виду (1)–(3) матриця обмежень, якої А має більшу кількість стовпців ніж рядків.

Двоїста до (1)–(3) може бути задачею виду:

$$\max Bu^T, \tag{4}$$

$$A^T u^T \leq C^T, \tag{5}$$

Для визначеності, будемо вважати, що задача (1)–(3) має n>>m, матриця А обмежень витягнута горизонтально, ранг системи рівним m. Задача виду (4),(5) має n обмежень та m змінних, матриця A^T обмежень витягнута вертикально. Для випадку наявності двосторонніх обмежень на змінні в задачі (4), (5) нижні та верхні межі представимо у вигляді.

$$d_H \leq u \leq d_B, \tag{6}$$

де $d_H = (d_{1(H)}, d_{2(H)}, ..., d_{m(H)})$, $d_B = (d_{1(B)}, d_{2(B)}, ...d_{m(B)})$ m-мірні вектори.

Нехай модель лінійного програмування вигляду (4)−(6) є обмеженою, замкненою і невиродженою.

Для подальшого викладу наведемо розширену схему, аналізу (4),(5) , що базується на тимчасовому відкиданні частини обмежень (5), залишимо лише m із них, які утворять квадратну невироджену матрицю $A_б$.

Розглянемо модель лінійного програмування вигляду

$$\max_u \left\{ Bu^T \,/\, A_б u^T \le c^0 \right\}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\max_u \left\{ Bu^T \,/\, a_i u^T \le c_i,\ i \in J_b \right\},$$

де $c^0 = (c_1, c_2, ... c_m)^T$ - підвектор $C^T = (c_1, c_2, \, ... \, , c_n)^T$, який утворений компонентами обмежень, які входять у $A_б, J_b$ - індекси обмежень, нормалі яких утворюють матрицю $A_б$. Припустимо, що матриця $A_б$ невироджена, а задача має обмежений розв'язок u_0. Розв'язок u_0 може бути недопустимим для релаксованих (відкинутих) обмежень, причому $U \subseteq U_R$, де U_R релаксована (розширена) множина обмежень (5), утворена відкиданням деяких обмежень.

Нехай $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}$ − вектори нормалей обмежень, $a_j u^T \le c_j,\ j \in J_б$, де $J_б = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ − індекси обмежень, що утворюють псевдобазисну матрицю $A_{б,}$ a_l − вектор нормалі обмеження $a_l u \le c_l, \alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, ..., \alpha_{lm})$− коефіцієнти розвинення вектору a_l за рядками псевдобазисної матриці $A_б$,

$a_l = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{lj} a_{ij} = \alpha_l \cdot A_б$ − представлення нормалі обмеження.

Визначення 1.. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних нормалей $J_b = (i_1, i_2, ..., i_m)$ обмежень (5), будемо називати псевдо базисною, а розв′язок $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})$ відповідної їм системи рівнянь

$A_б u_0^T = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})$- підвектор C псевдо базисним при виконанні умови $\alpha_{0i} \geq 0,\ i = \overline{1,m}$.

Введемо в розгляд $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}$- нормалі обмежень, $a_j u^T \leq c_j, j \in J_б$ де $J_б = \{i_1, i_2, ..., i_m\},\ J_H = J / J_б$ - індекси обмежень, нормалі яких утворюють базисну матрицю $A_б$ та небазисних обмежень, a_l - вектор-нормалі обмеження $a_l u \leq c_l,\ \alpha_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, ..., \alpha_{lm})$- вектор розвинення вектора a_l за рядками базисної матриці $A_б$, $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})-$ вектори розвинення $a_r,\ r \in I$ за рядками $A_б$ та $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ − вектор розвинення B за рядками $A_б$ утворюють матрицю L $(n+1) \times m$, де $L_i = (\alpha_{0i}, \alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{ni})^T$ − i-й стовпець; $\Delta_r = a_r u_0^T - c_r$, $\Delta_0 = B u_0^T$, $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_n)$.

Лема 1. Необхідною і достатньою умовою лінійної незалежності системи векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{k-1}}, a_l, a_{i_{k+1}}, ..., a_{i_m}$ при заміні вектора a_{i_k}, що утворює k-й рядок в базисній матриці $A_б$ вектором a_l є виконання умови $\alpha_{lk} \neq 0$.

Теорема 1. (матричний аналог) Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (5) та цільової функції (4) за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв'язками, нев′язками обмежень (5) та значеннями цільової функції в двох суміжних базисних розв′язках мають місце такі співвідношення

$$\overline{L}_i = \left\{ \begin{array}{l} L_k / \alpha_{lk},\ i = k \\ \\ L_i - \overline{L}_k \times \alpha_{li},\ i \neq k,\ i = \overline{1,m} \end{array} \right\} \tag{7}$$

$$\overline{(A_b^{-1})_i} = \left\{ \begin{array}{l} (A_b^{-1})_k / \alpha_{lk},\ i = k \\ \\ (A_b^{-1})_i - \overline{(A_b^{-1})_k} \times \alpha_{li},\ i \neq k,\ i = \overline{1,m} \end{array} \right\} \tag{8}$$

$$\overline{u}_0 = u_0 - (A_b^{-1})_k \times \Delta_l \tag{9}$$

$$\overline{\Delta} = \Delta - \overline{L}_k \times \Delta_l \tag{10}$$

в припущення виконання

$$\alpha_{lk} \neq 0. \tag{11}$$

Теорема 1. (по-елементний аналог) Поміж елементами МБМ в суміжних базисних матрицях мають місце співвідношення

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}, \quad r = \overline{0,n};\quad i = \overline{1,m};\ i \neq k; \tag{7}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}},\ \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li}, \quad r = \overline{1,m};\quad i = \overline{1,m};\ i \neq k; \tag{8}$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{1k}}\Delta_l, \quad j = \overline{1,m}, \tag{9}$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}},\ \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}\Delta_l,\ r = \overline{1,n};\quad r \neq k; \tag{10}$$

$$B\overline{u}_0^T = Bu_0^T - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l, \tag{11}$$

причому умовою невиродженості є $\alpha_{lk} \neq 0$.

Для ″недопустимої″ схеми будемо використовувати допоміжну Лему 1 (про опорність) та теорему 1, які встановлюють співвідношення між величинами та векторами псевдобазисного розв'язку в суміжних псевдобазисних матрицях.

Між елементами методу в двох суміжних псевдобазисних матрицях мають місце такі співвідношення (7)−(11).

Твердження 1. Умовою: опорності та псевдобазисності матриці при вводі вектора нормалі a_l обмеження $\alpha_l u^T \leq c_l$ на k-у позицію базисної матриці $A_б$ є $\alpha_{lk} \neq 0$; псевдобазисності опорних розв'язків, тобто $\alpha_{0i} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$ є $\alpha_{lk} > 0$: спадання цільової функції у новій псевдобазисній матриці при задачі на максимум є $\Delta_l > 0$, зростання цільової функції $\Delta_l < 0$, сталості $\Delta_l = 0$.

Доведення. З умов (7)−(11) твердження 1 та леми 1.

витікає опорність, тобто $\alpha_{lk} \neq 0$.

Виконання умов псевдобазисності розв'язків, тобто $\overline{\alpha}_{0k} = \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} \geq 0,\ \overline{\alpha}_{0i} = \alpha_{0i} - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\alpha_{li} \geq 0,\ i \neq k$, означає, зокрема, для $\overline{\alpha}_{0k} = \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} \geq 0$ виконання умови $\alpha_{lk} > 0$. Для значень цільової функції в двох сусідніх псевдобазисних розв'язках при задачі на максимум, для "збіжності'' до оптимального розв'язку "зверху'' повинно виконуватись співвідношення $B\overline{u}_0^T - Bu_0^T = \frac{-\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}}\Delta_l < 0$. Оскільки $\alpha_{0k} > 0$, $\alpha_{lk} > 0$, то випливає, що $\Delta_l > 0$. Аналогічно, знаходяться умови сталості та зростання цільової функції.

На основі (7)−(11) побудуємо схему МПБМ пошуку оптимального розв'язку послідовними переходами за недопустимими псевдобазисними вершинам. Для цієї схеми, в загальному випадку, на кожній ітерації псевдобазисні розв'язки u_0 не задовольняють обмеженням (5), збіжність до максимуму цільової функції (4) "іде зверху". Обгрунтування методу приведемо в припущенні невиродженності псевдобазисних розв'язків задачі (4), (5). Більш детально випадок виродженності псевдобазисних розв'язків буде описано після викладення методу.

Визначення 2. Допустимий псевдобазисний розв'язок $\overline{u}_0$ є оптимальним, якщо $B\overline{u}_0^T - Bu^T \geq 0$ для всіх u, що задовольняють (5).

Твердження 2. Допустимість псевдобазисного розв'язку u_0, тобто виконання $\Delta_r \leq 0,\ r \in J$, є необхідною і достатньою умовою його оптимальності, при цьому $\alpha_{0i} \geq 0,\ i = \overline{1,m}$.

Необхідність. Встановимо, що оптимальний розв’язок задачі лінійного програмування має властивість $\alpha_{0i} \geq 0,\ i = \overline{1,m}$ та $\Delta_r \leq 0,\ r \in J$.

Нехай $\overline{u}_0$ оптимальний псевдобазисний розв’язок тоді згідно (11),

$$B\overline{u}_0^T - Bu_0^T = -\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{Lk}}\Delta_l > 0 .$$

Оскільки $\alpha_{Lk} > 0$, $\Delta_l < 0$ є умова допустимості для псевдобазисного розв'язку, тому витікає, що $\alpha_{0K} \geq 0$ для всіх $k = \overline{1,m}$ (в невиродженому випадку існує m ребер переходу у суміжні з u_0 m вершин для яких ця умова повинна виконуватись).

Достатність. Нехай маємо допустимий псевдобазисний розв’язок $\overline{u}_0$, для якого $\alpha_{0i} \geq 0$. Встановимо його оптимальність. Оскільки $A_б u^T \leq C^0$, а $\alpha_{0i} \geq 0$, то $\alpha_0 A_б u^T \leq \alpha_0 C^0$ або $Bu^T \leq \alpha_0 \cdot A_б \cdot u_0^T = Bu_0^T$, що означає виконання умови оптимальності для довільного $u \in U$.

Справедливість твердження 2 можна безпосередньо отримати, якщо застосувати положення методу базисних матриць. Для цього методу обгрунтовано, що оптимальний розв‘язок задачі лінійного програмування має властивість $\alpha_{0i} \geq 0,\ i = \overline{1,m}$, та $\Delta_r \leq 0,\ r \in J$. Умова має характер необхідної та достатньої, а тому витікає, що властивість допустимості псевдобазисного розв‘язку є необхідною і достатньою умовою оптимальності.

Наслідок 1 Якщо $\alpha_{0k} \geq 0, k = \overline{1,m}$, то псевдобазисний розв’язок u_0 є оптимальним, $\Delta_r \leq 0$, $r \in J$, при цьому проміжні неоптимальні розв‘язки є верхніми оцінками за значеннями цільової функції.

Доведення. Нехай u_0-псевдобазисна вершина задачі (4), (5), для якої $\alpha_{0k} \geq 0$, для всіх $k = \overline{1,m}$, u-довільний допустимий розв’язок (5). Оскільки $A_б u^T \leq c^0$, то $\alpha_0 A_б u^T \leq \alpha_0 c^0$. Це означає, що псевдобазисні розв‘язки будуть верхніми недопустимими $Bu^T \le \alpha_0 c^0 = \alpha_0 A_б u_0^T = Bu_0^T$ оцінками оптимального розв‘язку за значеннями цільової функції.

Наслідок 2 (Твердження 2). Для єдиності розв’язку задачі (4), (5) МПБМ необхідньо і достатньо, щоб розвинення вектору В цільової функції (5) за рядками $A_б$ були строго додатніми, тобто $\alpha_{0i} > 0, i = \overline{1,m}$.

Наслідок 3. (**Твердження 2).** Умовою неєдиності розв’язків задачі (4), (5) є існування серед коєфіцієнтів розвинення вектору В цільової функції нульових, тобто $\exists$ індексів і $\in I$ таких, що $\alpha_{0i} = 0$.

Наслідок 4. Неєдині розв’язки задачі (4), (5) утворюють необмежену замкнену множину при виконанні умов $\exists$ такого і, що $\alpha_{0i} = 0$ і при цьому $\alpha_{ki} > 0$, для $k \notin J_б$.

Наслідок 5. Неєдині розв’язки задачі (4), (5) утворюють обмежені замкнені множини, якщо при виконанні умови $\exists$ i такого, що $\alpha_{0i} = 0$ серед $к \notin J_б$, $\exists$ $\alpha_{кi} < 0$.

Наслідок 6. Номера $к \in I$, такі що $\alpha_{0к} = 0$ утворюють ребра неєдиності розв’язків задачі (4), (5) причому за умови виконання умови $\exists$ $j \notin J_б$ таких, що $\alpha_{jk} < 0$, маємо обмежену замкнену множину (двосторонньо обмежене ребро), а за умови виконання умови $\alpha_{jk} > 0$ $j \notin J_б$ має місце одностороння необмеженість ребра (променя), що є необмеженою замкненою множиною розмірності 1.

Нехай $u_{доп} \in U$ причому $Bu_{доп}^T = K_0$, розглянемо півпростір вигляду $-Bu^T \le -K_0$, який утворений гіперплощиною $Bu^T = K_0$, $\alpha_{0i} > 0$, $i = \overline{1,m}$.

Сsмплексом S будемо називати багатогранну множину, утворену перетином $(m+1)$ півпросторів, породженими відповідними обмеженнями-нерівностями (5), яка має $(m+1)$ вершину, утворену півпросторами, вектори нормалей яких є лінійно незалежними, рангу m.

Наслідок 7. Обмеження $a_i u^T \le c_i, i \in J_б$ та півпростір $-Bu^T \le -K_0$ утворюють сімплекс S, з вершинами $u_0, u_0^{(1)}, u_0^{(2)},...,u_0^{(m)}$, де $u_0^{(r)}$ - знаходяться сімплексною ітерацією по заміщенню i-го рядка базисної матриці $A_б$, що утворена нормалями (5) із множини $J_б$, вектором $-B$ при виконанні умов опорності леми 1 на всіх m ітераціях заміщення.

Наслідок 8. Якщо існує індекс k такий, що $\alpha_{0k} < 0$ і $\alpha_{rk} \ge 0$ для всіх небазисних r, то цільова функція задачі необмежена на множині допустимих розв'язків.

Справедливість наслідків $1 \div 8$ випливає безпосередньо з леми 1, твердження 1-4. Аналогічно, на основі МПБМ, можна провести аналіз взаєморозташування вектору B та $(A_B^{-1})_i = e_i$.

Введемо наступні позначення

$$П_r^{(-)} = \left\{u / a_r u^T \le c_r\right\}, \qquad П_r^{(+)} = \left\{u / a_r u^T \ge c_r\right\}, \; П_r^{(0)} = \left\{u / a_r u^T = c_r\right\} \quad -$$

недодатній, невід′ємний півпростори та гіперплощина, що породжені рівнянням $a_r u^T = c_r$

$$П_{r(0)}^{(-)} = \left\{u / a_r u^T \le c_r^0\right\}, \quad П_{r(0)}^{(+)} = \left\{u / a_r u^T \ge c_r^0\right\}, \quad П_{r(0)}^{(0)} = \left\{u / a_r u^T = c_r^0\right\},$$

відповідно, недодатній, невід′ємний півпростори та гіперплощина породжені, гіперплощиною $a_r u^T = c_r^0$, де c_r^0 значення цільової функції для оптимального розв′язку задачі $\max a_r u^T$, $u \in U_r$

$$U = \left\{u / a_j u^T \le c_j, \; j \in J\right\}, \; U_r = \left\{u / a_j u^T \le c_j, \; j \ne r\right\}.$$

Визначення 3. Обмеження $a_r u^T \le c_r$ пасивне, якщо $U = U_r$.

Нехай $U^0 = \left\{ u \,/\, Bu_0^T = \max Bu^T,\ u \in U \right\}$ множина оптимальних розв'язків $u \in U$ задачі (4), (5), а $U_r^0 = \left\{ u \,/\, Bu_0^T = \max Bu^T, u \in U_r \right\}$ множина оптимальних розв′язків відповідної релаксованої задачі.

Визначення 4. Обмеження $a_r u^T \le c_r$ неактивне, якщо $U^0 = U_r^0$.

Твердження 3. Для того, щоб обмеження $a_r u^T \le c_r$ було пасивним необхідно і достатньо існування псевдобазисної матриці $A_б$, відносно якої $\alpha_{ri} \ge 0,\ i = \overline{1,n}$ та $\Delta_r = a_r u_0^T - c_r \le 0$, де u_0 - псевдобазисний розв'язок.

Твердження 4. Для того, щоб $B\overline{u}_0^T > Bu_0^T$, а розв'язок $\overline{u}_0$ був псевдобазисним для задачі (4),(5) необхідно і достатньо існування такого номера l та відповідного номера k, для яких виконується нерівність

$$\frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{li}} \ge \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}},\ i \ne k,\ \alpha_{li} > 0,\ \Delta_l > 0$$

Необхідність. Нехай u_0, $\overline{u}_0$ суміжні псевдобазисисні розв'язки, $A_б$, $\overline{A}_б$ відповідні псевдобазисні матриці. Згідно співвідношення (7) та (11) для виконання умови $\alpha_{0i} \ge 0,\ i = \overline{1,m}$ та спадання значень цільової функції (5), тобто $B\overline{u}_0^T < Bu_0^T$, потрібно виконання умов:

$$\overline{\alpha}_{0k} = \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} \ge 0$$

та

$$\overline{\alpha}_{0i} = \alpha_{0i} - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li} \ge 0,\ i \ne k,\ \alpha_{lk} > 0$$

а для $B\overline{u}_0^T < Bu_0^T$ виконання $\Delta_l > 0$, оскільки $B\overline{u}_0^T - Bu_0^T = \frac{-\alpha_{ok}}{\alpha_{ek}} \Delta_l < 0$.

Це означає справедливість умов необхідності.

Достатність. Нехай виконуються умови $\frac{\alpha_{oi}}{\alpha_{li}} \geq \frac{\alpha_{ok}}{\alpha_{lk}}$, $i \neq k$, $\alpha_{li} > 0$, $\Delta_l > 0$ Встановимо псевдобазисність двох суміжних розв'язків та спадання цільової функції (5). Згідно умов Леми 1 (про опорність) $\alpha_{lk} \neq 0$ для двох суміжних псевдобазних матриць $A_б$ та $\overline{A}б$. Витікає також виконання умов (7) твердження 1, причому $\alpha_{0i} \geq 0,\ i = \overline{1,m}$, тобто умова псевдобазисності розв'язку $\overline{u}_0$. Цільова функція згідно співвідношення (11) з урахуванням умови $\Delta_l > 0$ зменшується на величину $-\frac{\alpha_{ok}}{\alpha_{lk}}\Delta_l$.

Твердження 5. Обмеження $a_r u^T \leq c_r\ r \in J$ є породжуючим нерозв′язність за несумісністю тоді і тільки тоді, якщо існує псевдобазисна матриця $A_б$, опорна вершини u_0 така, що $\alpha_{ri} \leq 0,\ i = \overline{1,m}$ та $\Delta_r = a_r u_0^T - c_r > 0$.

Приведені вище твердження охоплюють всі можливі випадки для організації роботи МПБМ:

1. Якщо існує псевдобазисна матриця A_b, що розвинення за її рядками вектору цільової функції має $\alpha_{0k} \geq 0$, $k = \overline{1,m}$, $\Delta_r \leq 0$, $r \in J$, то дана псевдобазисна матриця є оптимальною, а відповідній їй псевдобазисний розв′язок оптимальним, причому при $\alpha_{0k} > 0$, $k = \overline{1,m}$ розв'язок єдиний, а при $\exists\ r$ такого, що $\alpha_{0r} = 0$, то розв'язок неєдиний. Характер неєдиності визначається наслідками 3-6 твердження 2.

2. Якщо існує псевдобазисна матриця $A_б$ та індекс l такий, що $\Delta_l > 0$, для якого $a_{li} > 0$ а також індекс k такий, що $-\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} = \min\limits_{\substack{i, \\ \alpha_{li} > 0}} \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_{li}}$, то при заміні рядка k на l "нова" матриця $\overline{A}б$ буде псевдобазисною. При цьому можна

перейти до нового псевдобазисного розв'язку, в якому цільова функція зменшиться на $-\dfrac{\alpha_{ok}}{\alpha_{lk}}\Delta_l$.

4. Якщо існує $A_б$, в якому $\alpha_{ok} \geq 0$, $k=\overline{1,m}$, $a_r u_0^T \leq c_r$ де u_0 псевдовершина, що відповідає $A_б$, то обмеження $a_r u^T \leq c_r$ пасивне і може бути виключене з обчислень.

5. Існування для псевдобазисної матриці $A_б$ обмеження $a_l u^T \leq c_l, l \in J$, з властивостями: $\Delta_l > 0$, $\alpha_{li} \leq 0$, $i=\overline{1,m}$, є умовою нерозв′язності за несумісністю (5).

2. Виродженість псевдобазисного розв′язку

При побудові схеми МПБМ припускалась невиродженість задачі (4), (5), тобто при переході від одної псевдобазисної матриці та псевдорозв'язку до другого значення цільової функції зменшувалось. На кожній ітерації однозначно визначались кандидати нормалі обмежень на ввод-вивод. Ситуація, коли при зміні псевдобазисної матриці та псевдорозв′язку значення цільової функції залишається без змін, називається виродженням псевдобазисного розв'язку. Припущення про невиродженість досліджуваної задачі використовувалось при обчисленні $\min\limits_{\substack{r,\\ \alpha_{ri}>0}} (\frac{\alpha_{or}}{\alpha_{lr}}) \neq 0$. У випадку, якщо

$$\frac{\alpha_{ok}}{\alpha_{lk}} = \min_{\substack{r,\\ \alpha_{lr}>0}} (\frac{\alpha_{or}}{\alpha_{lr}}) = 0,$$

то

$$\bar{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l ,$$

$$B\bar{u}_0^T = Bu_0^T - \frac{\alpha_{ok}}{\alpha_{lk}} \Delta_l = Bu_0^T .$$

Це означає, що псевдовершина в результаті сімплексної ітерації змінилася, а значення цільової функції лишилося незмінним, тобто при переходах сусідні псевдобазисні матриці визначають псевдорозв′язки, що знаходяться в одній гіперплощині $Bu^T = Bu_0^T = B\bar{u}_0^T = K_0$.

Геометрична суть виродженості псевдобазисного розв′язку вказує шлях усунення небезпеки утворення виродженості псевдобазисного роз′язку в ході ітераційного процесу. Побудова, за певним правилом, малого зміщення коефіцієнтів цільової функції визначає задачу з невиродженими псевдобазисними розв'язками.

Розглянемо наступну ε - задачу:

$$\max_{u} B(\varepsilon)u^T, \tag{13}$$

$$a_j u_i^T \le c_j \tag{14}$$

$$u \ge 0, \quad \varepsilon \ge 0, \quad j \in J, \tag{15}$$

Із співідношення $\alpha_0 = B \cdot A_б^{-1}$ для ε-задачі отримаємо $\alpha_0(\varepsilon) = B(\varepsilon)$, де $B(\varepsilon) = (b_1 - \varepsilon^{m+1-1}, b_2 - \varepsilon^{m+1-2}, \dots, b_m - \varepsilon^{m+1-m})\ A_б^{-1}$, .

Це означає, що

$$\alpha_0(\varepsilon) = B(\varepsilon)\ A_б^{-1},$$

або

$$\alpha_{0i}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{m} (b_j - \varepsilon^{m+1-j})\, e_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} b_j e_{ji} + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^{m+1-i} = \alpha_{0i} + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^{m+1-j} e_{ji},\ i = \overline{1,m} \tag{16}$$

В формулі (16) e_{ji}, $j = \overline{1,m}$- стовпчик оберненої матриці $A_б^{-1}$. Із невиродженості $A_б^{-1}$ випливає, що серед елементів стовпців e_{ji}, $j = \overline{1,m}$, обов'язково існують ненульові, а тому (16) є поліномом степені не вище за m.

Твердження 6. Існує таке $\varepsilon_1 > 0$, що ε-задача при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ буде невиродженою.

Твердження 7. Існує таке $\varepsilon_2 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ оптимальна псевдобазисна матриця ε -задачі буде оптимальною для задачі (4), (5).

3. Алгоритмічні схеми аналізу лінійної системи

На основі твердження 1-6, що обгрунтовують МПБМ, можуть бути запропоновані різноманітні алгоритмічні схеми проведення аналізу та оптимізіції лінійної системи. Нижче приведені варіанти такого алгоритму.

Алгоритм 1.

Попередній крок. В ЕОМ вводяться обмеження та цільова функція. Формується початковий псевдобазисний розв′язок u_0 та псевдобазисна матриця і зв'язані з ними елементи методу.

Крок 1 (Перевірка оптимальності). Якщо $\Delta_1 \le 0$ для всіх $l \in J$ то u_0 - оптимальний розв'язок. Перехід на останній крок.

Крок 2 (Перевірка пасивності обмежень) Якщо $\alpha_{ri} \ge 0$ для $i = \overline{1,m}$, $\Delta_r \le 0$, то обмеження $a_r u^T \le c_r$ пасивне і в подальших розрахунках для задачі (4),(5) може не враховуватись.

Крок 3 (Перевірка нерозв′язності за несумісністю). Якщо $a_{ri} \le 0$ і $\Delta_r > 0$ для $i = \overline{1,m}$, то умови задачі (4),(5) несумісні. Перехід на останній крок.

Крок 4 (Вибір обмеження, що виводиться із базисної матриці) Для деякого індекса 1 $\Delta_1 > 0$ визначаємо індекс k, для якого $\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} = \min\limits_{r,\ \alpha_{lr}>0}(\frac{\alpha_{0r}}{\alpha_{lr}})$. Цей індекс визначає номер обмеження, що виводиться із псевдобазисної матриці.

Крок 5 (Формування нового псевдобазисного розв'язку) Замість k-го рядка псевдобазисної матриці $A_б$ вводимо у псевдобазисну матрицю нормаль l-го обмеження (5). Формуємо новий псевдобазисний роз'язок $\bar{u}_0$, знаходимо його елементи за формулами (7)-(11). Переходимо на Крок 1.

Останній крок. Завершення роботи алгоритму.

Важливе значення при знаходженні наближеного розв'язку набувають такі алгоритмічні схеми, в яких на кожній ітерації можна отримувати двохсторонні оцінки оптимального розв'язку за цільовою функцією. Розглянемо один із варіантів такого алгоритму, що грунтується на МПБМ. Приведемо деякі допоміжні положення для побудови відповідної алгоритмічної схеми.

Нехай на певній стадії обчислювального процесу маємо допустимий розв'язок u_d і недопустимий псевдобазисний u_0, що є верхньою оцінкою оптимального розв'язку (4),(5). Розглянемо множину точок відрізку $p = [u_0, u_d]$ у вигляді $u = \lambda u_0 + (1-\lambda)u_d, \quad 0 \le \lambda \le 1$, і обмежень (5), для яких справедливо $J_n = \left\{ j / \Delta_j = a_j u_d^T - c_j > 0 \right\}$. Для кожного $i \in J_n$ точка $u_i = \lambda_i u_0 + (1-\lambda_i)u_d$, де $\lambda_i = -(a_i u_o^T - c_i)/(a_i u_o^T - a_i u_d^T)$ є точкою перетину гіперплощини $a_i u^T = c_i$ з відрізком $p = [u_0, u_d]$.

Лема 2. Якщо $\lambda_l = \min\limits_{i \in J_n} \lambda_i$, то $u_1^{(p)} = \lambda_l u_0 + (1-\lambda_l)u_d$ буде допустимою для (5), а $Bu_l^{(P)T}$ нижньою оцінкою оптимального розв'язку за цільовою функцією, а номер 1 визначає обмеження, нормаль якого є кандидатом на ввод у псевдобазисну матрицю згідно МПБМ.

Доведення Леми 2 грунтується на врахуванні властивості випуклості відрізка Р, допустимості $[u_0, u_i]$, де $u_i^{(p)} = \lambda_i u_0 + (1-\lambda_i)u_d$, $i \in J_n$, оскільки кінці відрізка u_0, u_i допустимі для нього, то витікає допустимість $[u_0, u_l]$ для всіх точок обмеженню $a_i u^T \le c_i \;\; i \in J_n$. При виборі $\lambda_l = \min\limits_{i \in J_n} \lambda_i$. маємо

допустимість $u_1^{(p)} = \lambda_l u_0 + (1-\lambda_l)u_d$, як для перетину випуклих багатогранних множин (відрізків), $a_i u^T \le c_i \;\; \forall\, i \in J_n$, і як наслідок для (5).

Алгоритм 2

Попередній крок. Формується початковий псевдобазисний розв'язок u_0, псевдобазисна матриця і допустимий розв'язок u_d моделі (4),(5).

Крок 1 (Перевірка оптимальності). Якщо $\Delta_l \le 0$ для всіх k, то u_0- оптимальний розв'язок. Перехід на останній крок.

Крок 2 (Аналіз двосторонніх оцінок оптимального розв'язку за цільовою функцією). Вважаємо $f_H = Bu_d^T$, $f_B = Bu_0^T$. Якщо величина $|f_H - f_B|$ прийнятна, переходимо на останній крок.

Крок 3 (Перевірка властивості пасивності обмежень). Якщо $\alpha_{ri} \ge 0$ для всіх $i \in I$ і $\Delta_r \le 0$, то обмеження $a_r u^T \le c_r$ пасивне і в подальших розрахунках для задачі (4), (5) може не враховуватись.

Крок 4 (Вибір обмеження, нормаль якого вводиться у псевдобазисну матрицю). Якщо $\lambda_l = \min\limits_{i \in J_n} (-a_i u_0^T + c_i)/(a_i u_0^T - a_i u_d^T)$, то нормаль обмеження з номером l вводиться у псевдобазисну матрицю.

Крок 5 (Знаходження нового допустимого розв'язку). Присвоюємо $u_d = \lambda_l u_0 + (1-\lambda_l) u_d$, уточнюємо $f_H = Bu_d^T$

Крок 6 (Вибір нормалі обмеження, яке виводиться із псевдобазисної матриці). Для індекса l знаходимо індекс k, для якого $\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} = \min\limits_{r, \alpha_{lr} > 0} (\frac{\alpha_{0r}}{\alpha_{lr}})$, що визначає номер нормалі обмеження, що виводиться.

Крок 7 (Формування нового псевдобазисного розв'язку). Замість рядка k в псевдобазисну матрицю $A_б$ вводимо нормаль l-го обмеження (5). Формуємо новий псевдобазисний розв'язок і проводимо перетворення елементів методу за формулами (7)–(11). Переходимо на крок 1.

Останній крок. Завершення роботи алгоритму.

В ході ітерацій МПБМ верхні оцінки послідовно поліпшуються. На кроках ітераційного процесу можна також покращувати і нижні оцінки ідентифікуючи допустимі розв'язки на різноманітних відрізках вигляду $u_D = [u_D^{(i)}, u_{\max}^{(i)}]$, де $u_D^{(r)}$ належить множині допустимих, а $u_{max}^{(r)}$ - недопустимих розв'язків, $r = \overline{1, p}$. Оскільки, $u_D \in P^{(p)}$, $K_{min}^{(p)} \le Bu_D^T \le K_{\max}^{(p)}$, то на певній стадії обчислювального процесу його можна розглядати, як наближений розв'язок задачі.

Розглянемо множину відрізків виду $P = \{ [u_0^{(i)}, u_D^{(i)}] / i = \overline{1, r},\ j = \overline{1, p} \}$, що утворюються комбінаціями допустимих і недопустимих розв'язків для (5). Нехай $[u_0, u_D]$ На основі леми 2. розглянемо множину $u = [\lambda u_0 + (1-\lambda) u_D],\ \lambda \in [0, 1]$ і обмежень (5), для яких справедливо $J_n = \{ j / \Delta_j = a_j u_0^T - c_j > 0 \}$, точка $u_i = [\lambda_i u_0 + (1-\lambda_i) u_D],\ \lambda_i \in [0, 1]$, де $\lambda_i = -(a_i u_0^T - c_i)/(a_i u_0^T - a_i u_D^T)$ є точкою перетину гіперплощини $a_i u^T = c_i$ з відрізком $[u_0, u_D]$. Якщо $\lambda_l = \min\limits_{i \in J_n} \lambda_i$, то $u_l = [\lambda_l u_0 + (1-\lambda_l) u_D],\ \lambda_l \in [0, 1]$ допустима для (5), а Bu_l^T - нижня оцінка оптимального розв'язку за цільовою функцією. Величини $\max\limits_{p} Bu_l^{(p)T} = Bu_D^T$ є кращою нижньою, а $\min\limits_{p} Bu_0^{(p)T} = Bu_0^T$ верхньою оцінками на множині відрізків. Послідовністі знайдених допустимих розв'язків можуть розглядатись як наближені, оскільки значення цільової функції в них знаходиться в заданому інтервалі.

Викладення положень методу проводилось у припущенні обмеженості та сумісності системи обмежень (5). Умови необмеженісті цільової функції (необмеженості множини) дає відповідне твердження МБМ, а умови нерозв′язності задачі за несумісністю обмежень дає твердження 3. - МПБМ.

4. Релаксаційна схема аналізу лінійної системи

Деякі практичні задачі, що формалізуються в класі моделей лінійного програмування можуть бути поставлені як великорозмірні. Дослідження таких задач потребує особливого підходу до аналізу та оптимізації таких моделей, зокрема, використання релаксування – послаблення умов моделі (5) тимчасовим відкиданням деяких обмежень.

Розглянемо модель лінійного програмування типу $(4)-(6)$. Загальна схема релаксаційного методу оптимізаційного аналізу лінійної системи, особливо великої розмірності, може бути подана наступним алгоритмом.

АЛГОРИТМ 3.

Крок 1. Припустимо, що відомий псевдобазисний розв'язок u_0 та псевдобазисна матриця A_b, яка визначається множиною нормалей обмежень $J_б$, $J_H \subset J$ - множина небазисних обмежень, причому $J = J_b \cup J_H$.

Крок 2. На основі псевдобазисного розв'язку u_0 та $A_б$ утворимо множину J_R, що складається із підмножини індексів обмежень, а саме:

$$J_R = J_б \cup J_H^+,$$

де $J_H^+ = \left\{ j \,/\, j \in J_H,\ \Delta_j > 0 \right\}$,

(схема допускає введення допоміжного обмеження на потужність елементів множини J_H^+, тобто можна регулювати потужність множини) .

Крок 3. Формуємо підзадачу виду

$$\max Bu^T, \tag{18}$$

$$a_j u^T \le c_j,\ j \in J_R \tag{19}$$

Крок 4. Знаходимо оптимальний розв'язок $\bar{u}_0$ та $\overline{A}_b$ задачі (18), (19) МПБМ.

Крок 5. Якщо множина J_H^+ не є порожньою відносно $\bar{u}_0$, то $u_0 = \bar{u}_0$, $A_b = \overline{A}_b$ переходимо на крок 2 , в протилежному − на крок 6.

Крок 6. Завершення роботи алгоритму. Якщо J_H^+ порожня множина, то це означає оптимальність $\bar{u}_0$ для (5).

За побудовою, релаксаційна схема коректно вписується в МПБМ, що дає змогу замінити дослідження початкової, можливо, великорозмірної задачі послідовністю взаємопозв′язаних задач меншої розмірності. В ході ітераційного процесу ідентифіковуються пасивні обмеження системи.

Додаткові можливості аналізу лінійної оптимізаційної моделі на оптимальність в методології послідовного аналізу варіантів є включення в неї схеми релаксації. Тимчасове відкидання певної частини обмежень в ході обчислень но основі емпіричних ознак нормалей обмежень входити в оптимальну базисну матрицю. Такою ознакою є близькість нормалей обмежень до нормалі цільової функції. Нижче приведена релаксаційна процедура R дослідження моделі на оптимальність на стадії оптимізації з врахуванням цієї ознаки.

АЛГОРИТМ 4.

Крок 1. Припустимо, що відомий псевдобазисний розв'язок u_0 , який визначається множиною обмежень $J_б$ і u_d - довільний допустимий розв'язок початкової задачі. Визначимо нижню $F_н = Bu_d^T$ і верхню $F_в = Bu_0^T$ межі за цільовою функцією.

Крок 2. На основі псевдобазисного розв'язку u_0 утворимо множину J_R, що складається із підмножини обмежень, а саме $J_R = J_б \cup J_H^+$, де $J_H^+ = \{j \,/\, j \in J,\ \Delta_j > 0\}$. Для формування множини J_H^+ можна запропонувати і інші способи, наприклад

$$J_H^+ = \{j \,/\, j \in J,\ \Delta_j > 0,\ (B, a_j)/(\|B\| \times \|a_j\|) > 0\},$$

де

$$(\mathrm{B}, \mathrm{a}_j) = \sum_{r=1}^{m} \mathrm{b}_r \times a_{jr}, \|a_j\|^2 = \sum_{r=1}^{m} a^2{}_{jr}, \|B\|^2 = \sum_{r=1}^{m} \mathrm{b}_r{}^2$$

при цьому можна також ввести обмеження на кількість елементів множини J_i^+.

Крок 3. Формуємо підзадачу виду

$$\max \mathrm{Bu}^T \ , \tag{28}$$

$$a_j u^T \le c_j, \ \ j \in J_R \tag{29}$$

Якщо J_H не являється пустим, то переходимо на наступний крок, в протилежному на крок 6.

Крок 4. Уточнюємо F_H процедурою, визначаємо нормаль обмеження, яке вводиться у псевдобазисну матрицю.

Крок 5. Знаходимо оптимальний розв'язок $\bar{u}_0$ задачі (28), (29) методом псевдобазисних матриць.

Крок 6. Уточнюємо межі оптимального розв'язку за цільовою функцією, змінними процедурою V_{LP}^c [10]. Виявляємо пасивні і неактивні обмеження застосуванням процедури. Переходимо на крок 2.

Крок 7. Завершення роботи алгоритму.

Згідно цієї схеми дослідження початкової моделі зводиться до дослідження підмоделей меншої розмірності (28). Оптимальний розв'язок (27), (28), на випадок недопустимості і, відповідно, неоптимальності, буде початковим псевдобазисом для наступної підмоделі. Верхні і нижні межі оптимального розв'язку за цільовою функцією будуть послідовно покращуваться. В результаті отримаємо послідовність

$$\mathrm{F}_H^1 \le \mathrm{F}_H^2 \le .... \le \mathrm{F}_H^N \le \mathrm{Bu}_0^T \le \mathrm{F}_B^N \le \mathrm{F}_B^{N\text{-}1} \le \ ... \ \le \mathrm{F}_B^1$$

і, відповідно, $П^{(1)} \supseteq П^{(2)} \supseteq .... \supseteq П^{(N)}$. Дослідження можливо завершувати знаходженням наближеного допустимого розв'язку із паралелепіпеда змінних.

При наявності в моделі лінійної системи допустимих розв′язків можливо ″встроїти″ в релаксаційну схему послідовне уточнення верхніх та нижніх оцінок оптимальних розв′язків за цільовою функцією (аналог Алгоритмму 2.). Можемо оцінювати двосторонні оцінки змінних. В основі побудови двосторонніх оцінок за змінними та цільовою функцією лежить побудова ″оціночних″ апроксимуючих множин геометрично простої структури з заданими властивостями. Нижче наведені необхідні визначення та твердження для побудови таких множин.

Визначення 5. Обмежена замкнена множину S називатимемо апроксимуючою для U, якщо $U \subseteq S$.

Будуть розглядатися апроксимуючі множини двох видів:, S_U , S_{U_0}, де S_U - апроксимуюча множина для U, S_{U_0} - апроксимуюча множина для оптимальних розв'язків (4), (5). Слід відмітити, що неактивність обмеження для S_U еквівалентна пасивності для S_{U_0}.

Існує декілька підходів до побудови апроксимуючих множин. Наприклад, використання методу послідовного аналізу дає можливість додатково звужувати межі границь апроксимуючої множини введенням додаткових обмежень на цільову функцію

$$U=\{u/\ A^T u^T \le C\ ,\ Bu^T \le K^{(P)}_{max},\ -Bu^T \le -K^{(P)}_{min}\} \qquad (20)$$

де $П^{(p-1)} = \{u / d^{(p-1)}_{i(H)} \le u \le d^{(p-1)}_{i(B)}, i = I^{(p-1)} \subseteq I\}$

задані або знайдені оцінки змінних на $(p-1)$ –у кроці

$$K^{(p)}_{max} = min\{Bu^{(p-1)}_{max} = \max_{u \in П^{(p-1)}} Bu^T, P = Bu^T_0\ \},$$

$$K^{(p)}_{min} = max\{Bu^{(i)}_d, i = \overline{1, p-1}\ \},$$

верхня і нижні оцінки оптимального розв'язку задачі за цільовою функцією,

$$u_{min}^{(p-1)} = (u_{min,1}^{(p-1)}, u_{min,2}^{(p-1)}, \dots, u_{min,m}^{(p-1)}),$$

$$u_{max}^{(p-1)} = (u_{max,1}^{(p-1)}, u_{max,2}^{(p-1)}, \dots, u_{max,m}^{(p-1)}),$$

- вершини, в яких досягається мінімальне і максимальне значення цільової функції на гіперпаралелепіпеді змінних $(p-1)$ -го кроку вигляду

$$\Pi^{(p-1)} = \{u / d_{i(H)}^{(p-11} \le u \le d_{i(B)}^{(p-1)}, i = I^{(p-1)} \subseteq I\},$$

Слід зазначити, що координати цих вершин безпосередньо визначаються співвідношнннями

$$u_{min}^{(p-1)} = \begin{Bmatrix} d_{i(H)}^{(p-1)},\ b_i \le 0 \\ d_{i(B)}^{(p-1)},\ b_i > 0 \end{Bmatrix} \tag{21}$$

$$u_{max}^{(p-1)} = \begin{Bmatrix} d_{i(H)}^{(p-1)},\ b_i < 0 \\ d_{i(B)}^{(p-1)},\ b_i \ge 0 \end{Bmatrix} \tag{22}$$

$u_d \in [u_d^{(p-1)}, u_{\max}^{(p-1)}\}$ - допустима точка (18),(19)., а П-паралелепіпед змінних на (p-1) -у кроці.

Точка

$$u_{(sr)}^{(p-1)} = (u_{(sr),1}^{(p-1)}, u_{(sr),2}^{(p-1)}, \dots, u_{(sr),m}^{(p-1)}),$$

де $u_{(sr),i}^{(p-1)} = (d_{i(H)}^{(p-1)} + d_{i(B)}^{(p-1)})/2$ - рівновідалена від вершин Π.

Особливість даного підходу заключається в тім, що величини $K_{\min}^{(p)}$, $K_{\max}^{(p)}$ визначаються на основі f_H, f_B, тобто досяжні оцінки.

Віддаль $R^{(p-1)}$ від $u_{(sr)}^{(p-1)}$ до довільної вершини Π вираховується співвідношенням

$$R^{(p-1)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (u_{0i}^{(p-1)} - u_{(sr)}^{(p-1)})^2}, \tag{23}$$

де $u_0^{(p-1)} = (u_{01}^{(p-1)},\ u_{02}^{(p-1)}, \dots, u_{0m}^{(p-1)})$ - вершина Π. Позначимо через $R_l^{(p-1)}$ найкоротшу віддаль від точки $u_{(sr)}^{(p-1)}$ до гіперплощини l-го обмеження. Для множини Π зберігають силу умови неактивності обмежень на вершинах паралелепіпеда твердження 3. Додатково ідентифікацію неактивних обмежень можна проводити застосуванням наступних твердження.

Твердження 8. Якщо $R_l^{(p-1)} > R^{(p-1)}$, то обмеження $a_l u^T \le c_l$ неактивне.

Доведення. Розглянемо допоміжну задачу вигляду

$$\max\ a_l u^T, \tag{24}$$

$$u \in \Pi. \tag{25}$$

Множина (25) випукла і замкнута. Припустимо, що u_{opt} оптимальний розв'язок (24),(25) і $a_l u_{opt}^T = c_l^0$. Оскільки, $R_l^{(p-1)} > R^{(p-1)}$, то гіперплощина $a_l u^T = c_l^0$, опорна в точці u_{opt} до Π, розділяє $a_l u^T = c_l$ і Π. Як наслідок із твердження 1 (про розділяючу гіперплощину) випливає, що $a_l u_0^T < c_l$ і означає $a_l u^T \le c_l$ є пасивним для П і неактивним для U

Твердження 9. Якщо вершина $u_0^{(p)} \in U$, то для неактивності $a_r u^T \le c_r$ необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти розвинення нормалей обмеження за рядками базисної матриці, що відповідає даній вершині були додатніми.

Твердження 10. Якщо вершина $u_0^{(p)} \notin U$, то для неактивності обмеження $a_r u^T \le c_r$ необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти розвинення обмеження за рядками базисної матриці, що відповідає даній вершині були додатніми, а нев'язка від'ємною.

Справедливість твердження 9, 10 випливає із твердження 3.

Твердження 11. Якщо вершина $u_{\max}^{(p)} \in U$, то $u_{\max}^{(p)}$ оптимальний розв'язок початкової задачі.

Якщо в ході ітерацій МПБМ при дослідженні моделі на стадії оптимізації отримали два недопустимі розв'язки $u_0^{(1)}$, $u_0^{(2)}$, які відповідні псевдобазисним матрицям $A_б^{(1)}$, $A_б^{(2)}$. За схемою методу, в цих вершинах визначаються верхні оцінки оптимального розв'язку (4), (5). Відомийі допустимий розв'язок u_D визначає нижню допустиму оцінку оптимального розв'язку, тобто маємо

$$Bu_0^{(1)T} = P_0^{(1)} , Bu_0^{(2)} = P_0^{(2)} , Bu_D^T = K_0 , \ P_0^{(1)} > P_0^{(2)} > K_0 \ ,$$

то тоді сімплекс

$$S^{(1)} = \{ u / A_B^{(1)} u^T \le C_i \ , i \in J_b , \ -Bu^T \le -K_0 \} \qquad (26)$$

і множини

$$S^{(2)} = \{ u / A_B^{(1)} u^T \le C_i \ , i \in J_b$$

$$(27)$$

$$-Bu^T \le -K_0 , Bu^T \le P_0^{(2)} \}$$

будуть апроксимуючими множинами для допустимих розв'язків в інтервалі значень цільової функції $[K_0, P_0^{(1)}]$, $[K_0, P_0^{(2)}]$. Перевіряючи на вершинах $S^{(1)}$,$S^{(2)}$ умови пасивності обмежень (твердження 8-11), можна ідентифікувати неактивні обмеження у представленні моделі. На даній стадії дослідження можна також визначати допустимий наближений розв'язок на відрізку $\left[u_D , u_0^{(1)}\right]$. Твердження 8-11. розглянуті вище, про умови пасивності та неактивності обмежень, в сукупності утворюють процедуру, що перевіряє умови пасивності і неактивності на вершинах апроксимуючих множин, встановлює несумісність системи обмежень досліджуваної моделі.

5. Алгоритми та процедури аналізу на стадіях дооптимізації та оптимізації

Розглянемо процедури апроксимування в поєднанні зі схемами агрегування та релаксування, які аналізують моделі лінійного програмування на стадіях дооптимізації і оптимізації, на основі базового методу дослідження - МПБМ.

При виборі схеми аналізу виявляються та враховуються характерні структурні особливості моделей лінійного програмування. Слід відзначити, що переважна кількість моделей мають свою специфіку формування та дослідження. Формування моделі, яка не має "добрих" структурних властивостей для "великорозмірних" задач - складна проблема. В переважаючій більшості великорозмірні моделі мають структурні особливості у формі

- слабої заповнюваності матриці обмежень і, відповідно, базисної матриці, ненульовими елементами, великої кількості елементів зі значенням $+1$ і -1,
- ненульові елементи базисної матриці розташовані особливим чином, наприклад, повздовж основної діагоналі: одно-, дво-, тридіагональні ,
- додатності елементів, змінних моделі, їх двостороння обмеженість тощо,
- матриця обмежень моделі є блочна зі зв'язуючими змінними і (або) обмеженнями. Якщо кількість зв'язуючих стовпців (обмежень) невелика, то такі задачі називаються слабозв'язними.

Часто модель умов задачі в результаті перестановок стовпців або обмежень може бути приведена до подібного вигляду.

Серед типових практичних ″особливих″ задач великої розмірності можна привести такі класичні:

- динамічна і статична модель затрат-випуску (модель Леонт'єва), в якій матриця обмежень має блочно-трикутну форму,

- задача планування виробництва і управління запасами в матриці обмежень якої відмінні від нуля елементи, що розміщені вподовж головної діагоналі, а блоки відповідають виробничо-технологічним способам пов'язані через показники переходів,

- транспортна задача, в якій матриця блочно-трикутна зі зв'язуючими обмеженнями.

Алгоритми досліджень таких задач умовно можна поділити на прямі і декомпозиційні. Прямі методи грунтуються на використанні специфіки структури матриці обмежень при організації обчислень, які можуть бути виконані на масивах інформації зменшеної розмірності. Зокрема в схемі сімплекс методу при збереженні та представленні оберненої матриці, інших компонент, декомпозуванні та розвиненні початкової великорозмірної моделі на незалежні підсистеми меншої розмірності, ієрархічно пов′язані між собою через координуючу задачу. При релаксуванні замінюється дослідження початкової великорозмірної моделі дослідженням взаємозв'язаних моделей меншої розмірності.

Розглянемо алгоритмічну схему аналізу обмеженої лінійної моделі (4)-(6) на стадії дооптимізації, що грунтується на методології послідовного аналізу в поєднанні зі схемами релаксування, агрегування та МПБМ. Для зручності позначимо через

$$G=(G_1, G_2, \dots, G_j, \dots, G_m, G_{m+1}, G_{m+2}, \dots, G_{2m}),\ j \in J_0 = \{1, 2, \dots, 2m\},$$

гіперплощини, що породжують грані апроксимуючої множини вигляду (6). Можемо записати, що при $j < m,\ G_j = \left\{ u_j / -u_j - d_{j(H)} = 0 \right\}$,

а при $j > m,\ G_j = \left\{ u_j / u_j - d_{j(B)} = 0 \right\}$.

Нормалі введених гіперплощин будуть $g_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $g_j = (0, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$, а $u_0 = (u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0m})$ -оптимальний розв'язок задачі вигляду

$$\max Bu^{T}, \tag{30}$$

$$G_j \le 0, \ j \in J_0, \tag{31}$$

$\Delta_j = a_j u_0 - c_j$ - нев'язка j-го обмеження (5), $J_б = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ - індекси обмежень, нормалі яких утворюють базисну матрицю $A_б$. Проведемо розбиття індексів обмежень (5) на систему підмножин, що не перетинаються. Для $j \in J_б$ можна поставити у відповідність деяку підмножину обмежень

$$J_j = \{k / k \in J, (g_j, a_k) / \|g_j\| \times \|a_k\| > 0\}, \tag{32}$$

де $g_j = (g_{j1}, g_{j2}, \dots, g_{jm})$, причому згідно визначення

$$g_{jk} = 0 \text{ при } k \ne j, \ g_{jk} = \pm 1 \text{ при } k \ne j,$$

$$(g_j, a_k) = \sum_{r=1}^{m} g_{jr} a_{kr}, \ \|g_j\|^2 = \sum_{r=1}^{m} g_{jr}^2, \ \|a_k\|^2 = \sum_{r=1}^{m} a_{kr}^2,$$

для (5) введемо підмножину

$$J_c = \{k / k \in J, (B, a_k) / \|B\| \times \|a_k\| > 0\}.$$

Опишемо процедуру дооптимізаційного аналізу моделі (4), (5).

АЛГОРИТМ 5.

Попередня стадія. Процедурою апроксимації $V_{LP}^{(c)}$ [10] уточнюється або будується агрегована множина G для (6).

Крок 1. Виключаються пасивні обмеження (5) згідно умов пасивності твердження 3, 8 – 11 відносно вершин апроксимуючої множини G.

Крок 2 (Стадія агрегування). Знаходяться нормалі гіперплощин агрегованої множини, що утворюють оптимальну базисну матрицю $A_б$ і розв'язок u_0 задачі (30),(31).

Крок 3. Перевіряється знайдений розв'язок u_0 на допустимість задачі (4), (5), тобто на оптимальність. Якщо розв'язок u_0 допустимий початковій задачі, то оптимальний розв'язок початкової задачі знайдено. Переходимо на заключну стадію, в протилежному - на наступну.

Крок 4. Формується і розв'язується підзадача на основі оптимальної базисної матриці $A_б$ та розв'язку u_0 задачі (30),(31) вигляду:

$$\max Bu^T , \tag{33}$$

$$a_j u^T \le c_j,\ j \in J_c^+ \subseteq J , \tag{34}$$

$$u_j \le d_{j(B)},\ j \in J_б \subseteq J_0 , \tag{35}$$

$$-u_j \le -d_{j(H)},\ j \in J_б \subseteq J_0 , \tag{36}$$

де $J_C^+ = \{j / \Delta_j > 0,\ j \in J,\ j \in J_c,\ (B, a_j)/\|B\| \times \|a_j\| > 0\}$.

Крок 5. Перевірка розв'язку задачі (32)$-$(35) $\bar{u}_0$ на допустимість задачі (4),(5), тобто на оптимальність. Якщо $\bar{u}_0$ допустимий для початкової задачі, то переходимо на завершальну стадію, в протилежному $u_0 = \bar{u}_0$.

Крок 6. (Стадія дезагрегування). Якщо в оптимальну базисну матрицю розв'язаної підзадачі входять нормалі обмежень агрегуючої множини, то формуємо

$J_C^+ = \{ j / \Delta_j > 0,\ \ j \in J_r,\ j \in J_c, j \in J_{\ddagger},\ (g_r, a_j)/\| g_r\| \times \| a_j\| > 0\}$,

в протилежному

$J_C^+ = \{j / \Delta_j > 0,\ j \in J_c, (B, a_j)/\| B\| \times \| a_j\| > 0\}$

і переходимо на крок 4.

Заключна стадія. Представлення результатів обчислень в зручному вигляді для аналізу. Вибираючи конкретну схему розвинення множини обмежень на підмножини, правило релаксування обмежень, будемо отримувати різноманітні алгоритми

При застосуванні оптимізаційних схем таких як МДБМ, МПБМ, на результат обчислень впливає "якість" початкової базисної матриці. Часто за структурою поставленої задачі можна виявити обмеження, нормалі яких утворюють базисну матриці, з якою пов′язаний допустимий чи недопустимий початковий розв′язок. Для випадку відсутності інформації про початкову базисну матрицю можна застосувати алгоритмічну схему, яка визначає ранг системи обмежень моделі, будує початкову базисну матрицю та розв′язок на основі сімплексних ітерацій (леми 1 та твердження 1), які при допустимості (5) можуть застосуватись у МДБМ, в супротивному - МПБМ. Розгляд цього питання є предмет окремого дослідження.

6. Модельні приклади аналізу лінійної системи

Розглянемо роботу алгоритмів оптимізаційного аналізу моделі лінійного програмування МПБМ:

Приклад 1.

$$
\begin{array}{lrcrl}
(0) & \max\ 6u_1 & + & 7u_2, & \\
(1) & u_1 & + & u_2 & \le 20, \\
(2) & 18u_1 & + & 25u_2 & \le 450, \\
(3) & -u_1 & + & u_2 & \le 10, \\
(4) & 9u_1 & - & 7u_2 & \le 63, \\
(5) & 2u_1 & - & 3u_2 & \le 6, \\
(6) & 2u_1 & - & 9u_2 & \le -18, \\
(7) & -u_1 & - & u_2 & \le -8, \\
(8) & -17u_1 & - & 2u_2 & \le -34, \\
(9) & u_1 & & & \le 21, \\
(10) & & & u_2 & \le 22, \\
(11) & -u_1 & & & \le 0, \\
(12) & & & -u_2 & \le 0,
\end{array}
$$

Представимо модель в вигляді початкової таблиці 1.

Таблиця 1

П/н.	Нормалі обмежень	u_1	u_2	Вектор обмежень
1.	2.	3.	4.	5.
0.	B	6	7	
1.	a_1	1	1	20
2.	a_2	18	25	450
3.	a_3	-1	1	10
4.	a_4	9	-7	63
5.	a_5	2	-3	6
6.	a_6	2	-9	-18
7.	a_7	-1	-1	-8
8.	a_8	-17	-2	-34
9.	a_9	1	0	21
10.	a_{10}	0	1	22
11.	a_{11}	-1	0	0
12.	a_{12}	0	-1	0

Результати роботи алгоритмічної схеми приведені в таблиці 2.

Таблиця 2.

Номер ітерації	**Номери нормалей обмежень рядків псевдобазисної матриці**	**Псевдо базисний розв′язок $u_0=(u_{01},u_{02})$**	**Значення цільової функції**	**Номер обме-ження, нор-маль, якого вво-диться у псевдобазисну матрицю (l)**	**Номер обме-ження, нор-маль, якого виводиться з псевдобазисної матриці (k)**	
1	2	3	4	5	6	7
1.	9;10	21;22	280	2	10	
2.	9; 2	21;2.98	146,3	1	9	
3.	1; 2	7.1;12.9	132.9	-	-	

Як видно з таблиці розв′язок знаходиться за 3 ітерації. Значення цільової функції на псевдобазисних розв′язках послідовно спадає.

Розглянемо роботу алгоритму 2 оптимізаційного аналізу моделі лінійного програмування МПБМ на наступному прикладі:

Приклад 2.

$$
\begin{array}{lll}
(0) & \max & 6u_1 + 7u_2, \\
(1) & & u_1 + u_2 \le 20, \\
(2) & & 18u_1 + 25u_2 \le 450, \\
(3) & & -u_1 + u_2 \le 10, \\
(4) & & 9u_1 - 7u_2 \le 63, \\
(5) & & 2u_1 - 3u_2 \le 6, \\
(6) & & 2u_1 - 9u_2 \le 9, \\
(7) & & -u_1 - u_2 \le 1, \\
(8) & & -17u_1 - 2u_2 \le 17, \\
(9) & & u_1 \le 21, \\
(10) & & u_2 \le 22, \\
(11) & & -u_1 \le 3, \\
(12) & & -u_2 \le 2,
\end{array}
$$

Представимо в початковій сімплексній таблиці 3 модель прикладу 2.

Таблиця 3

П/н.	Нормалі обмежень	u_1	u_2	Вектор обмежень
1.	2.	3.	4.	5.
0.	b	6	7	
1.	a_1	1	1	20
2.	a_2	18	25	450
3.	a_3	-1	1	10
4.	a_4	9	-7	63
5.	a_5	2	-3	6
6.	a_6	2	-9	9
7.	a_7	-1	-1	1
8.	a_8	-17	-2	17
9.	a_9	1	0	21
10.	a_{10}	0	1	22
11.	a_{11}	-1	0	3
12.	a_{12}	0	-1	2

Приклад отриманий (з попереднього) зміною правих частин деяких обмежень таким чином, щоб точка (0,0) була допустимою. Результати роботи алгоритму представлені в таблиці 4. Особливість алгоритмічної схеми заключається в тім, що на кожній ітерації знаходяться двосторонні оцінки розв′язків задачі за цільовою функцією. Алгоритм знаходить оптимальний розв′язок за чотири ітерації.

Таблиця 4

Номер ітерації	Номери псевдобазисних рядків	Поточний псевдобазисний розв′язок $u_0=(u_{01},u_{02})$	Значення цільової функції	Номер обмеження, нормаль, якого вводиться в псевдобазисну матрицю	Номер обмеження, нормаль, якого виводиться з базисної матриці	λ_{min}	Допустимий розв′язок $u_d=(u_{01},u_{02})$	Значення цільової функції в $u_d=(u_{01},u_{02})$	Нижня оцінка оптимального роз-в′язку за цільовою функцією	Верхня оцінка оптимального розв′язку за цільовою функ-цією
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.	9;10	21; 22	280	1	9	0.533	9.76; 10.2	130.1	130.1	280
2.	1;10	-2; 22	142	3	10	0.584	-0.8; 9.15	59.17	130.1	142
3.	1;3	5; 15	135	2	3	0.04	4.8; 14.4	129.6	130.1	135
4.	1; 2	7.14; 12.8	132.8	-	-	-				

Слід особливо підкреслити "зручність" методу псевдобазисних матриць (МПБМ) для побудови схем релаксування [3,10] та агрегування. Це дає змогу аналізувати моделі великої розмірності на оптимальність побудовою послідовності взаємозв'язаних моделей меншої розмірності, причому оптимальний розв'язок та базисна матриця попередньої моделі , буде початковим розв'язком та базисною матрицею наступної [10]. В алгоритмічних схемах основаних на МПБМ можна поєднувати знаходження точного розв'язку зі знаходженням наближеного розв′язку з заданими інтервалами за значеннями інтервалів змінних та цільової функції, будувати різноманітні варіанти агрегування допустимих розв'язків [4,5,10].

Висновки

В методичних матеріалах поза увагою лишилось дослідження оцінок збіжності методу, не розглянуто правила побудови початкових базисних матриць. Ці питання детально розглянуто в [1,4,5] при розробці класичних схем знаходження оптимального розв'язку. Поміж класичними сімплекс-методами та МПБМ неважко провести певні паралелі і переконатись, що проблеми, і збіжності, і знаходженнґ початкової опорної базису для них ідентичні.

Запропонований МПБМ поєднується з класичними сімплекс-методами в плані організації представлення оберненої матриці та елементів методу. Унікальною властивістю даного методу є можливість знаходити не лише оптимальний розв′язок, але й проводити аналіз властивостей моделі. Наприклад, перевіркою простих, з точки зору програмної реалізіції, умов відсіву ідентифіковувати пасивні та неактивні обмеження моделі безпосередньо на ітераціях методу, а також досліджувати структуру розв‘язків задачі лінійного програмування за умов їх існування, а при властивості неєдиності встановлювати характер неєдиності. Органічно вписуються в схему методу побудова схем релаксування заміни дослідження початкової “великої” моделі послідовністю моделей меншої розмірності [4], що дає можливість находити як точні, так і наближені розв'язки та проводити дооптимізаційний та оптиізаційний аналіз.

Слід особливо підкреслити "зручність" методу псевдобазисних матриць (МПБМ) для побудови схем релаксування та агрегування. Це дає змогу аналізувати моделі великої розмірності на оптимальність побудовою послідовності взаємозв'язаних моделей меншої розмірності. Оптимальний розв'язок та базисна матриця попередньої моделі, буде початковим розв'язком та базисною матрицею наступної. В алгоритмічних схемах заснованих на МПБМ, можна поєднувати знаходження точного розв'язку зі знаходженням наближеного розв′язку з заданими інтервалами за значеннями інтервалів змінних та цільової функції, будувати різноманітні варіанти агрегування допустимих розв'язків.

Між класичними сімплекс-методами, МДБМ та МПБМ неважко провести певні паралелі і переконатись, що проблеми і збіжності, і знаходження початкової опорної базисної матриці для них ідентичні.

Запропонований МПБМ поєднується з класичними сімплекс-методами в плані організації представлення оберненої матриці та елементів методу.

Унікальною властивістю даного методу є можливість знаходити не лише оптимальний розв′язок, але й проводити аналіз властивостей моделі. Наприклад, перевіркою простих умов відсіву ідентифіковувати пасивні та неактивні обмеження моделі безпосередньо на ітераціях методу. Досліджувати структуру розв‘язків задачі лінійного програмування за умов їх існування. При їх неєдиності встановлювати характер неєдиності. Органічно вписуються в схему методу побудова схем релаксування заміни дослідження початкової “великої” моделі послідовністю моделей меншої розмірності, що дає можливість находити як точні, так і наближені розв'язки та проводити дооптимізаційний та оптимізаційний аналіз.

ЛІТЕРАТУРА

1. И.В. Гирсанов Лекции по математической теории экстремальных задач, Издательство Московского университета, 1970.
2. А. Схрейвер Теория линейного и целочисленного программирования. М. Мир, 1991.
3. Гасс С. Линейное программирование. Физматгиз,-1962.
4. Современное состояние теории исследования операций, под ред. Н.Н. Моисеева. -М. -Наука, -1979. -464с.
5. Лєсдон Л.С. Оптимизация больших систем.- М. -Наука, -1975, -430с.
6. Муртаф Б. Современное линейное программирование.-М. - Мир, 1984.-224с.
7. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Линейное программирование. Теория и конечные методы.- М.-Наука ,-1963,-776с.
8. Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С.,Тюптя В.И. Математические методы исследования операций.- Киев: Вища школа, 1979.-312с.
9. Михалевич В.С., Волкович В.Л., Волошин А.Ф. Метод последовательного анализа в задачах линейного программирования большого размера// Кибернетика. -1981.-N4. С.114-120.
10. Волошин А.Ф. Метод локализации области оптимума в задачах математического програмирования // Докл. АН СССР. -1987. -293, N 3.-С. 549-553.
11. Волкович В.Л., Войналович В.М., Кудин В.И. Релаксационная схема строчного симплекс метода // Автоматика .- 1987. -N4.-С. 79-86.
12. Волкович В.Л., Войналович В.М., Кудин В.И. Релаксационная схема двойственного строчного симплекс метода // Автоматика.-1988. -N 1, с.39-46.
13. Волошин А.Ф. Войналович В.М., Кудин В.И. Предоптимизационые и оптимизационные схемы сокращения размерности задачи линейного програмирования // Автоматика, N4, 1993.
14. Еремин И.И., Астафьев А.И. Введение в теорию линейного и выпуклого прогрмирования.-М. -1976