Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

ЗБІРНИК ЗАДАЧ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

(для студентів Навчально-наукового Інституту філології, ОП «Прикладна (комп'ютерна) лінгвістика та англійська мова»)

Навчальний посібник

Київ — 2023

УДК 51

Автори

Гуляницький А.Л., Затула Д.В.

Рецензенти

д.ф.-м.н., с.н.с. **Горбачук В.М.** *(Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України)*

д.ф.-м.н., професор **Номіровський Д.А.** *(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)*

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики КНУ імені Тараса Шевченка (протокол № 10 від 25 квітня 2023 року)

Збірник задач з вищої математики (для студентів Навчально-наукового Інституту філології, ОП «Прикладна (комп'ютерна) лінгвістика та англійська мова») / Гуляницький А.Л., Затула Д.В. – Київ, 2023. – 54 с.

У збірнику подано задачі з лінійної алгебри й математичного аналізу, розраховані на студентів 1 курсу, що спеціалізуються на комп'ютерній лінгвістиці. Охоплено такі теми: скінченновимірні векторні простори; матриці й системи лінійних алгебраїчних рівнянь; числові послідовності; границя й неперервність функції; диференціальне числення функцій однієї змінної; основи диференціального числення функцій декількох змінних; інтеграл Ньютона-Лейбніца й невласні інтеграли. До кожного розділу наведено стислу теоретичну довідку. Основою збірника є задачі, що становлять програму практичних занять. Крім того, додано низку прикладів, якими ілюструвався лекційний матеріал, і задач, рекомендованих для приготування до іспиту.

Зміст

Розділ 1

Елементи теорії множин і математичної логіки. Метод математичної індукції

Поняття множини. Основні дії з множинами

Множина – це сукупність об'єктів (**елементів**), виділених за певною ознакою.

Якщо множина M **містить** елемент x – іншими словами, x **належить** M – то пишуть $x \in M$, інакше $x \notin M$.

Порожня множина – множина, що не містить елементів. Її позначають символом $\varnothing$.

Якщо кожний елемент множини X є також елементом множини Y, то X називають **підмножиною** Y, а Y – **надмножиною** X. Такий зв'язок між множинами називається **включенням** і позначається записом $X \subseteq Y$ або $Y \supseteq X$.

Якщо множини X та Y складаються з одних і тих самих елементів, то їх називають **рівними**, і це позначається записом $X = Y$. Якщо $X \subseteq Y$, але $X \neq Y$, то кажуть про **строге включення**. Якщо важливо наголосити, що включення є строгим, то пишуть $X \subset Y$, або ж $Y \supset X$.

Об'єднання множин X та Y – це множина, що складається з елементів, які належать принаймні одній із цих множин. Така множина позначається через $X \bigcup Y$.

Перетин множин X та Y – це множина, що складається з елементів, які належать одночасно обом цим множинам. Така множина позначається через $X \bigcap Y$.

Різниця множин X та Y – це множина, що складається з елементів X, які не належать Y. Така множина позначається через $X \setminus Y$.

Числові множини

Натуральними називають числа, що використовуються для лічби: 1,2,3,... Множину натуральних чисел позначають через $\mathbb{N}$.

Цілими називають натуральні числа, число 0, а також натуральні числа з протилежним знаком: $..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$. Множину натуральних чисел позначають через $\mathbb{Z}$.

Раціональними числами називають нескоротні дроби вигляду $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, а $n \in \mathbb{N}$. Множину натуральних чисел позначають через $\mathbb{Q}$.

Дійсні числа можна уявляти як точки на осі – прямій, на якій задано початок (число 0), масштаб і додатний напрям (число 1). Множину дійсних чисел позначають через $\mathbb{R}$. Дійсні числа, які не є раціональними, називають **ірраціональними**.

Надалі, якщо не зазначено інше, під числом розуміється дійсне число.

Модуль (абсолютне значення) числа – це відстань від нього до точки 0 на дійсній прямій. Модуль числа x позначається через $|x|$.

Деякі поняття математичної логіки

Висловлення – це судження, щодо якого можна сказати, істинне воно чи хибне.

Висловлювальна форма – це висловлення, що містить змінну, яка набуває значень із певної множини.

Нехай P і Q – висловлення. Тоді $P \wedge Q$ (**логічне „і“**) – це висловлення, яке полягає в тому, що обидва ці висловлення істинні, f $P \vee Q$ (**логічне „або“**) – це висловлення, яке полягає в тому, що принаймні одне з цих висловлень істинне.

Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ – висловлювальні форми, визначені для спільної змінної. Тоді якщо для для всіх x, для яких істинне $P(x)$, істинним є і $Q(x)$, то пишуть $P(x) \Rightarrow Q(x)$, або ж $Q(x) \Leftarrow P(x)$. При цьому кажуть, що $P(x)$ є **достатньою умовою** $Q(x)$, а $Q(x)$ – **необхідною умовою** $P(x)$.

Нехай $P(x) \Rightarrow Q(x)$ і водночас $Q(x) \Rightarrow P(x)$. Тоді пишуть $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ і кажуть, що $P(x)$ є **необхідною й достатньою умовою** $Q(x)$. Необхідну й достатню умову також називають **критерієм**.

При роботі з твердженнями (висловленнями й висловлювальними формами) зручно використовувати спеціальні символи, відомоми як **квантори**:

- $\forall$ – *квантор загальності* (читається "для всіх", "для кожного", "для довільного", "для будь-якого");
- $\exists$ – *квантор існування* (читається "існує").

Твердження вигляду $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ можна доводити **методом математичної індукції**. А саме, достатньо довести $P(1)$ (**базу** індукції) і $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (індукційний **перехід**: для будь-якого n з істинності $P(n)$ випливає істинність $P(n+1)$). Якщо потрібно довести $P(n)$ для всіх цілих n, починаючи з деякого n_0, то базою має бути $P(n_0)$.

Символи суми й добутку. Факторіал

У випадках, коли потрібно працювати з сумами великої кількості доданків або добутками великої кількості множників, об'єднаних певним параметром (*індексом*), користуються спеціальними символами:

- Σ – *знак суми*;
- Π – *знак добутку*.

Наприклад, суму кубів перших n натуральних чисел можна записати як

$$\sum_{k=1}^{n} k^3,$$

а добуток перших n непарних чисел – 1, 3, 5,....,$2n-1$ – як

$$\prod_{k=1}^{n} (2k-1),$$

Факторіал натурального числа n – це добуток перших n натуральних чисел. Він позначається через $n!$. Вважатимемо також, що $0! = 1$.

Задачі

1.1 Виразіть перетин множин за допомогою об'єднання й різниці.

1.2 Запишіть за допомогою кванторів і логічних зв'язок твердження:

а) квадрат довільного дійсного числа невід'ємний;

б) квадрат числа дорівнює 1 тоді й тільки тоді, коли воно дорівнює 1 або -1;

в) існує натуральне число, квадратний корінь якого — натуральне число.

1.3 Нехай $P(x, y)$ — висловлювальна форма, де змінні x та y можуть набувати значень із множин M і N відповідно. Який зі знаків $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ можна поставити між твердженнями

$$\forall x \in M \ \exists y \in N \ P(x, y)$$

і

$$\exists x \in M \ \forall y \in N \ P(x, y) \ ?$$

(якщо відповідь — не $\Leftrightarrow$, то наведіть приклад, коли одне з тверджень істинне, а інше хибне; якщо відповідь — *не можна поставити жодного зі знаків*, то наведіть приклади, коли перше твердження істинне, а друге хибне, і навпаки)

1.4 Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ — висловлювальні форми зі спільною множиною можливих значень змінної x. Аналогічно до задачі 1.3, поставте знак $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ або $\Leftrightarrow$ між твердженнями

$$\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$$

і

$$(\forall x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x))\,.$$

1.5 Запишіть за допомогою знаків $\sum$ і $\prod$ вирази

а) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (2n)^3$;

б) $2 \cdot 12 \cdot 22 \cdot ... \cdot (10n + 2)$.

1.6 На початку року канал мав N підписників. За i-й місяць, де $i \in \{1, ..., 12\}$, додавалася частка p_i від кількості підписників на початку місяця (наприклад, приросту на 10% у березні відповідає $p_3 = 0.1$). Запишіть формулу кількості підписників каналу наприкінці року.

1.7 Доведіть методом математичної індукції, що

а) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $\forall x > -1,\ n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$;

в) модуль суми чисел не перевищує суми їхніх модулів, тобто

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$$

де $n \in \mathbb{N}$, а x_k — довільні дійсні числа;

г) $\forall b_1 \in \mathbb{R},\ q \neq 1 \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_1 q^{n-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$;

ґ) для кожного $n \in \mathbb{N}$ число $8^n - 3^n$ кратне 5.

Розділ 2

Лінійна алгебра

Векторні простори

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Тоді **дійсним n-вимірним вектором** називають упорядкований набір n дійсних чисел (**координат**, **компонент**). Множину дійсних n-вимірних векторів називають **дійсним n-вимірним простором** і позначають через $\mathbb{R}^n$. Елементи $\mathbb{R}^n$ називають також **точками** цього векторного простору.

Вектор, усі координати якого дорівнюють 0, називають **нульовим** і позначають через $\mathbf{0}$.

В n-вимірному просторі визначені такі арифметичні дії:

- додавання: нехай $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_n)$. Тоді $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$ – **сума $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$**;

- множення на скаляр: нехай $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тоді $\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

Крім того, **різницею** векторів $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ називають вектор $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{y} = (x_1 - y_1, ..., x_n - y_n)$.

Вектори $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ називають **колінеарними**, якщо існує число λ, таке що $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y}$ (геометрично це означає, що вони розташовані вздовж однієї прямої).

Нормою в $\mathbb{R}^n$ називається функція, яка кожному $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ставить у відповідність число $\|\boldsymbol{x}\|$ і задовольняє умови:

- $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \quad \|\boldsymbol{x}\| \geq 0$;

- $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;

- $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$ (додатна однорідність);

- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \quad \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (нерівність трикутника).

Норма $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ називається **евклідовою**.

Відстанню між точками $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ в $\mathbb{R}^n$ відносно вибраної норми називається число $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. Множину точок, відстань від яких до фіксованої точки $\boldsymbol{x}$ становить фіксоване додатне число r, називають **сферою** радіусу r з центром $\boldsymbol{x}$. Множину точок, відстань від яких до $\boldsymbol{x}$ менша за r, називають **кулею** радіусу r з центром $\boldsymbol{x}$.

Скалярним добутком в $\mathbb{R}^n$ називається функція, яка кожній парі $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ ставить у відповідність число $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ і задовольняє умови:

- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (симетричність);
- $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$;
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \quad (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$;
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Скалярний добуток $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ відомий як **евклідів**.

`Теорема` про породження норми скалярним добутком. Якщо $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$, то функція $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ є нормою в $\mathbb{R}^n$.

Кут між n-вимірними векторами $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ відносно вибраного скалярного добутку – це число α, таке що $0 \leq \alpha < 2\pi$ і $\cos\alpha = \dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}$. Якщо $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, тобто $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то такі вектори називають **ортогональними**.

Надалі, якщо не зазначено інше, під нормою, відстанню й скалярним добутком маються на увазі евклідова норма й відстань відносно неї, а також евклідів скалярний добуток.

Гіперплощина, задана ненульовим вектором $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ і числом c – це множина $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x}) = c\}$.

`Теорема`. Відстань від точки $\boldsymbol{y}$ до гіперплощини, заданої вектором $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ і числом c, дорівнює $\dfrac{|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{y}) - c|}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}$.

Матриці

Нехай $m, n \in \mathbb{N}$. Тоді **Числова матриця** (надалі – матриця) розміру $m \cdot n$ – це функція, яка парі індексів i, j, де $i = 1, ..., m$, $j = 1, .., n$, ставить у відповідність число (**елемент** матриці). Множину матриць розміру $m \cdot n$ позначатимемо через $\mathbb{R}^{m \cdot n}$. Матрицю розміру $m \cdot n$ можна уявляти як таблицю з m рядками й n стовпчиками. Матриці зазвичай позначають великими буквами, а їхні елементи – малими: наприклад a_{ij} – елемент матриці $\boldsymbol{A}$, розташований в i-рядку й j-му стовпчику.

На множині матриць фіксованого розміру визначено операції додавання/віднімання і множення на число (аналогічно до векторів – поелементно). Крім того, з матрицями можна виконувати такі дії:

- множення: нехай $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \cdot l}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{l \cdot n}$. Тоді добуток $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ – це матриця $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$, елементи якої дорівнюють $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}$ (це евклідів скалярний добуток i-го рядка $\boldsymbol{A}$ й j-го стовпчика $\boldsymbol{B}$);
- транспонування: нехай $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$. Тоді **транспонованою** до неї називається матриця $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$, така що $b_{ij} = a_{ji}$, тобто рядки $\boldsymbol{B}$ є стовпчиками $\boldsymbol{A}$ (і навпаки). Її позначають через $\boldsymbol{A}^T$.

n-вимірний вектор можна розглядати як матрицю розміру $n{\cdot}1$ – у такому контексті його називають **вектором-стовпчиком**.

Матриця з однаковою кількістю рядків і стовпчиків називається **квадратною**; при цьому вектор, утворений елементами a_{ii}, називають **головною діагоналлю $\boldsymbol{A}$**. Квадратна матриця $\boldsymbol{A}$ розміру $n{\cdot}n$ називається **симетричною**, якщо $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$, тобто $a_{ji} = a_{ij}$ для усіх $i, j = 1, ..., n$ (це симетрія відносно головної діагоналі).

Якщо $\boldsymbol{A}$ симетрична, і для довільного *ненульового* вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ (розглядається як вектор-стовпчик) має місце $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0$, то матрицю A називають **додатно визначеною**.

Квадратна матриця $\boldsymbol{A}$ називається **діагональною**, якщо $a_{ij} = 0$ для всіх $i \neq j$, тобто усі елементи поза головною діагоналлю рівні 0.

Одиничною матрицею розміру n називається матриця $\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$, така що для довільної $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$ виконуються рівності $\boldsymbol{A}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

`Теорема.` Елементами одиничної матриці є 1 на головній діагоналі і 0 поза нею.

Визначником матриці $\boldsymbol{A}$ розміру $2 \cdot 2$ називається число

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Визначники квадратних матриць більшого розміру задаються рекурсивно через визначники матриць розміру, меншого на 1. А саме, нехай $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$, $\overline{\boldsymbol{A}}^{ij}$ — матриця, утворена викресленням з $\boldsymbol{A}$ її i-го рядка й j-го стовпчика. Тоді **визначником $\boldsymbol{A}$** називають число

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11} \det \overline{\boldsymbol{A}}^{11} - a_{12} \det \overline{\boldsymbol{A}}^{12} + ... + (-1)^{n+1} a_{1n} \det \overline{\boldsymbol{A}}^{1n},$$

(вирази для елементів непарних стовпчиків беруться зі знаком $+$, а для парних з $-$).

`Теорема.` Визначник можна розкривати за довільним рядком або стовпчиком; а саме, для будь-яких $i, j = 1, ..., n$ маємо

$\det \boldsymbol{A} = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \overline{A}^{ij}$ (за i-м рядком);

$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \overline{A}^{ij}$ (за j-м стовпчиком).

Якщо $\det \boldsymbol{A} = 0$, то матрицю $\boldsymbol{A}$ називають **виродженою**, інакше – **невиродженою**.

Задачу знаходження вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, такого що $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ для відомої матриці $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$ і вектора $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, називають **системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)**.

`Теорема`. СЛАР $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ має єдиний розв'язок $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ невироджена.

СЛАР можна розв'язувати **методом Ґауса**, послідовно перетворюючи її до еквівалентної системи трикутного вигляду (такого, де всі елементи під головною діагоналлю або всі елементи над нею рівні 0). Альтернативою йому є **метод Крамера**.

`Теорема` (формули Крамера). Нехай $\boldsymbol{A}$ – невироджена матриця, $\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{b})$ – матриця, утворена заміною i-го стовпчика $\boldsymbol{A}$ на вектор-стовпчик $\boldsymbol{b}$. Тоді розв'язок СЛАР $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ можна знайти за формулами

$$x_i = \frac{\det \boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{b})}{\det \boldsymbol{A}}.$$

Нехай $\boldsymbol{A}$ – невироджена квадратна матриця. Тоді матрицю $\boldsymbol{A}^{-1}$ називають **оберненою** до $\boldsymbol{A}$, якщо $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

На множині матриць фіксованого розміру можна задавати поняття **норми**; означення аналогічне до норми в n-вимірному просторі.

Прикладами матричних норм є $\|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|$ (найбільша сума модулів елементів у стовпчику) і $\|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$ (найбільша сума модулів елементів у рядку).

Норма $\|\cdot\|$ на множині матриць розміру $n \cdot n$ називається **субмультиплікативною**, якщо для довільних $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$ має місце $\|\boldsymbol{AB}\| \le \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$.

Числом обумовленості невиродженої матриці $\boldsymbol{A}$ відносно вибраної норми називається число $\operatorname{cond} \boldsymbol{A} = \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$.

Власним числом (**власним значенням**) квадратної матриці $\boldsymbol{A}$ називається число λ, для якого існує ненульовий вектор $\boldsymbol{x}$, такий що $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$. При цьому $\boldsymbol{x}$ називається **власним вектором** матриці $\boldsymbol{A}$.

Задачі

2.1 Нехай $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{0}$, $\| \cdot \|$ – довільна норма на $\mathbb{R}^n$. Знайдіть норму вектора $\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}$.

2.2 Перевірте за означенням, які з указаних функцій є нормами на $\mathbb{R}^2$ (тут $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$):

а) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ (більший з модулів координат);

б) $\|\boldsymbol{x}\|_* = |x_1|$;

в) $\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + |x_2|$.

В разі ствердної відповіді зобразіть одиничну сферу з центром $(0, 0)$, а також запишіть аналогічну норму в $\mathbb{R}^n$.

2.3 Доведіть, що для довільної норми на $\mathbb{R}^n$ і векторів $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ справедлива нерівність

$$\big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\big| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

2.4 Знайдіть відстань між векторами $(-3, 4, 0)$ і $(-6, 1, \sqrt{7})$.

2.5 Перевірте, які з указаних функцій є нормами на $\mathbb{R}^3$ (тут $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$):

а) $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2}$;

б) $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2}$.

2.6 Обчисліть скалярний добуток векторів $\boldsymbol{x} = (1, 2, 1)$ і $\boldsymbol{y} = (2, 1, -4)$. Яку геометричну властивість цієї пари векторів характеризує одержаний результат?

2.7 Перевірте, чи є скалярним добутком на $\mathbb{R}^2$ функція $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_2 + x_2y_1$, де $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$.

2.8 Обчисліть косинус кута між векторами $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1)$ і $\boldsymbol{y} = (1, 1, \frac{9}{10})$.

2.9 Знайдіть відстань від точки $\boldsymbol{y} = (4, 0, 1)$ до площини, заданої рівнянням $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2$.

2.10 Доведіть, що відстань від точки $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ до гіперплощини, заданої рівнянням $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x}) = c$, можна знайти за формулою

$$d = \frac{|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})|}{\|\boldsymbol{\alpha}\|},$$

де $\boldsymbol{x}$ — довільна точка цієї гіперплощини.

2.11 Доведіть, що якщо точки $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ належать гіперплощині $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x}) = c$, то вектор $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ ортогональний вектору $\boldsymbol{\alpha}$. Поясніть геометричний зміст цієї властивості у випадку 2-вимірного простору.

2.12 Доведіть, що якщо точки в n-вимірному просторі розташовані по різні боки гіперплощини на однаковій відстані від неї, то їхня півсума належить цій гіперплощині.

2.13 Нехай $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ — ненульові n-вимірні вектори, $\|\cdot\|$ — норма, породжена деяким (не обов'язково евклідовим) скалярним добутком. Доведіть, що рівності $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ і $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ мають місце тоді й тільки тоді, коли $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$ колінеарні.

2.14 Не користуючись обчислювальними пристроями, обчисліть матриці а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$;

г) $\boldsymbol{I} - 2 \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}^T$, де $\boldsymbol{I}$ — одинична матриця розміру 2.

2.15 Наведіть приклад квадратних матриць $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ однакового розміру, для яких $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

2.16 Як зміниться матричний добуток $\boldsymbol{AB}$, якщо переставити

а) i-ий і j-ий рядки матриці $\boldsymbol{A}$;

б) i-ий і j-ий стовпчики матриці $\boldsymbol{B}$?

2.17 Доведіть, що для довільної матриці $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$ і довільних векторів $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ має місце рівність $(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y})$.

2.18 Нехай $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \cdot l}$ і $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{l \cdot n}$. Доведіть, що $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T$.

2.19 Доведіть, що для довільних матриць $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{k \cdot l}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{l \cdot m}$ і $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ виконується рівність $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$, тобто множення можна виконувати в будь-якому порядку, але зі збереженням послідовності матриць.

2.20 Нехай λ — дійсне число,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Знайдіть матрицю $\boldsymbol{A}^n$ ($\boldsymbol{A}$, помножену саму на себе $n-1$ раз; знайти — означає виразити кожний елемент, не використовуючи матрично-векторних операцій).

2.21 Доведіть для довільних матриць $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \cdot l}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \cdot l}$ і $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{l \cdot n}$ й числа $\lambda \in \mathbb{R}$ рівності

а) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$;

б) $(\lambda \boldsymbol{A})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{C}) = \lambda \boldsymbol{AC}$ (справа — число λ, помножене на матрицю $\boldsymbol{AC}$).

2.22 Перевірте за означенням, чи є додатно визначеною матриця

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Узагальніть цей результат до критерію додатної визначеності матриці вигляду $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

2.23 Доведіть, що якщо $\boldsymbol{A}$ – додатно визначена матриця, то $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{y}$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

2.24 Вкажіть матрицю $\boldsymbol{A}$, таку що $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{y}$ — евклідів скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$; спростіть цей вираз.

2.25 Сформулюйте й доведіть критерій додатної визначеності діагональної матриці.

2.26 З'ясуйте, чи розв'язні системи рівнянь, і в разі розв'язності знайдіть усі розв'язки. Проілюструйте відповіді геометрично.

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 = 17 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 12 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 6 \\ 6x_1 + 4x_2 = 16 \end{cases}$.

2.27 Обчисліть визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

за другим стовпчиком і за третім рядком.

2.28 Обчисліть визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi & 1871 & -97 \\ 0 & 2 & 1917 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 212 & 3 \end{vmatrix}$$

2.29 Знаючи визначник матриці $\boldsymbol{A}$ розміру $n \cdot n$, виразіть визначник матриці, утвореної з $\boldsymbol{A}$ домноженням на дійсне число λ

а) одного з рядків $\boldsymbol{A}$;

б) одного зі стовпчиків $\boldsymbol{A}$;

в) усіх елементів $\boldsymbol{A}$.

2.30 Розв'яжіть методом Крамера системи рівнянь

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 3.003 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 3.003 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 17 \\ 15x_1 + 75.01x_2 = 255.03 \end{cases}$.

Запропонуйте пояснення відмінностей у властивостях розв'язків систем а)-б) і в)-г).

2.31 Розв'яжіть системи рівнянь

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 8x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$.

2.32 Знайдіть матриці

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$;

в) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$, де $ad - bc \neq 0$.

2.33 Знайдіть числа обумовленості матриць

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & 75.01 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

у матричній нормі $\|\cdot\|_1$. Зробіть висновок про властивості СЛАР із такими матрицями.

2.34 Доведіть, що відносно будь-якої субмультиплікативної норми

а) $\operatorname{cond} \boldsymbol{I} \geq 1$;

б) $\operatorname{cond} \boldsymbol{A} \geq 1$ для довільної невиродженої матриці $\boldsymbol{A}$.

2.35 Доведіть, що якщо $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ – власні вектори матриці $\boldsymbol{A}$, які відповідають одному власному числу, то $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ і $c\boldsymbol{x}$, де $c \in \mathbb{R}$ – теж власні вектори $\boldsymbol{A}$, які відповідають цьому власному числу (крім випадків $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{y}$ і $c = 0$).

2.36 Знайдіть власні числа і відповідні власні вектори матриць

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

ґ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

2.37 Перевірте твердження:

а) матриця є виродженою тоді й тільки тоді, коли 0 є її власним числом;

б) додатно визначена матриця може мати тільки додатні власні числа;

в) якщо 1 – власне число матриці $\boldsymbol{A}$, то $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$;

г) якщо λ – власне число матриці $\boldsymbol{A}$, то $1-\lambda$ – власне число $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$;

ґ) якщо λ – власне число матриці $\boldsymbol{A}$, μ – власне число матриці $\boldsymbol{B}$, то $\lambda+\mu$ – власне число $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$;

д) якщо λ – власне число матриці $\boldsymbol{A}$, то λ^2 – власне число $\boldsymbol{A}^2$;

е) якщо $\boldsymbol{A}$ невироджена, то λ – власне число $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}$ – власне число $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Розділ 3

Числові послідовності

Нехай $\epsilon > 0$. Тоді ϵ-окіл числа x – це інтервал $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ (множина точок на числовій осі, відстань від яких до $\boldsymbol{x}$ менша за ϵ). Його позначатимемо через $U_\epsilon(x)$. Надалі, для простоти, слово „окіл“ вживається в розумінні „ϵ-окіл“.

Числовою послідовністю називається функція, визначена на $\mathbb{N}$ зі значеннями в $\mathbb{R}$. Її значення називаються **членами**, або ж **елементами**, і позначаються, наприклад, через x_n, а сама послідовність – через $\{x_n\}$, де n – **номер** (**індекс**) відповідного елемента.

Число a називається **границею** послідовності $\{x_n\}$, якщо

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \quad |x_n - a| < \epsilon,$$

тобто в довільному околі a перебувають усі елементи послідовності, починаючи з деякого. В такому разі пишуть $x_n \to a$ (при $n \to \infty$), а саму границю також позначають через $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Послідовність, яка має границю, називається **збіжною**, а ту, яка не має границі – **розбіжною**.

`Теорема` про проміжну послідовність. Нехай $\forall n \in \mathbb{N} \;\; x_n \leq y_n \leq z_n$, причому $\{x_n\}$ і $\{z_n\}$ мають спільну границю. Тоді $\{y_n\}$ має таку саму границю.

Якщо послідовність $\{x_n\}$ задовольняє умову

$$\forall M \in \mathbb{R} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \quad x_n > M,$$

тобто всі елементи, починаючи з деякого, стають більшими за будь-яке наперед задане число, то пишуть $x_n \to +\infty$ (але така послідовність є розбіжною). Аналогічно, якщо всі елементи, починаючи з деякого, менші за довільне наперед задане число, то пишуть $x_n \to -\infty$. Якщо $|x_n| \to +\infty$, то $\{x_n\}$ називають **нескінченно великою**, і пишуть $x_n \to \infty$ (знаки x_n при цьому можуть бути довільними).

Послідовність, яка прямує до 0, називається **нескінченно малою**. Якщо $\{x_n\}$ нескінченно мала, то пишуть $x_n = o(1)$ (ліву й праву частини тут не можна змінити місцями: строго кажучи, це не рівність, а належність x_n множині нескінченно малих послідовностей).

Числова послідовність називається **обмеженою знизу**, якщо всі її елементи не менші за певне число. Аналогічно, послідовність **обмежена згори**, якщо всі її елементи не перевищують певного числа. Якщо послідовність обмежена знизу і згори, тобто всі її елементи не менші за одну сталу й не більші за іншу, її називають **обмеженою**. Обмежену послідовність позначають через $O(1)$.

Теорема. Послідовність $\{x_n\}$ обмежена тоді й тільки тоді, коли послідовність $\{|x_n|\}$ обмежена згори.

Теорема. Нескінченно малі й обмежені послідовності мають такі властивості:

- $o(1) + o(1) = o(1)$;
- $O(1) + O(1) = O(1)$;
- $o(1)O(1) = o(1)$;

Теорема про аримфетичні дії з границями. Нехай $x_n \to a$, $y_n \to b$. Тоді $x_n \pm y_n \to a \pm b$, $x_n y_n \to ab$ і $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$ (останнє – за умови $b \neq 0$).

Теорема. Якщо $x_n \neq 0$ для всіх n, починаючи з деякого, то $x_n = o(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \to \infty$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається **неспадною**, якщо $\forall n \in \mathbb{N} \;\; x_{n+1} \geq x_n$. Аналогічно, якщо $\forall n \in \mathbb{N} \;\; x_{n+1} \leq x_n$, то кажуть, що $\{x_n\}$ **незростаюча**. **Монотонною** називають послідовність, яка є неспадною або незростаючою.

Теорема Веєрштраса. Якщо послідовність монотонна й обмежена, то вона збіжна.

Числом e називається границя $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718...$. Логарифм за основою e називається **натуральним логарифмом** і позначається через ln.

Задачі

3.1 Побудуйте ескізи графіків функцій

а) $\dfrac{1}{x-3}$;

б) $\cos\dfrac{x}{2}$;

в) $\dfrac{-2x+3}{x+2}$;

г) $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2^x}}$.

3.2 Знайдіть перетин множин $U_2(4)$ і $U_3(8)$.

3.3 Знайдіть перетин усіх ϵ-околів числа x.

3.4 Нехай x і y — фіксовані числа. Яку умову має задовольняти додатне число ϵ, щоб ϵ-околи чисел x і y не перетинались?

3.5 Знайдіть за означенням границі

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n+1}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\log_2 n}$.

3.6 Доведіть за означенням, що число 1 не є границею послідовності $\{\frac{2}{n}\}$.

3.7 Нехай $x_n \to a$, а послідовність $\{y_n\}$ утворено з $\{x_n\}$ додаванням числа 1 до перших 10 елементів. Чи обов'язково $y_n \to a$?

3.8 Нехай $x_n \to a$, $y_n = x_{n+1}$. Чи обов'язково $y_n \to a$?

3.9 Доведіть розбіжність послідовності $x_n = \frac{n}{7}$.

3.10 Доведіть, що $x_n \to 0 \;\Leftrightarrow\; |x_n| \to 0$.

3.11 Знайдіть границі

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{n^n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n-\frac{1}{2}}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n^2+1}$.

3.12 Нехай $x_n \to a$ і $y_n \to b$. Доведіть, що

а) якщо $x_n \geq y_n$ для всіх n, то $a \geq b$;

б) якщо $x_n > y_n$ для всіх n, то не обов'язково $a > b$.

3.13 Доведіть, що $x_n \to x$ тоді й тільки тоді, коли

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 \;\; |x_n - x| < 2\epsilon.$$

3.14 Перевірте, чи є обмеженими послідовності

а) $\left\{ n \sin \dfrac{\pi n}{4} \right\}$;

б) $\left\{ \dfrac{2n \cos n}{3n+2} \right\}$.

3.15 Нехай $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ — обмежені послідовності. Перевірте, чи обов'язково обмежені послідовності а) $\{x_n y_n\}$;

б) $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$, де $y_n \neq 0$.

3.16 Знайдіть границі

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{n^2+5n-2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^{100}-3}{7n^{100}+\sum\limits_{k=1}^{99} kn^k}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

3.17 Знайдіть границі

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n!}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2+k}$.

3.18 Доведіть збіжність послідовності

$$x_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right).$$

3.19 Доведіть збіжність і знайдіть границю послідовності $\{x_n\}$, де

а) $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_n = \dfrac{x_{n-1}^2+1}{2}$ $(n \geq 2)$;

б) $x_1 = 4$; $x_n = \sqrt{7+x_n}$ $(n \geq 2)$.

3.20 Знайдіть границю

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+3}.$$

3.21 Нехай $\{x_n\}$ – послідовність. Тоді **рядом** (**сумою ряду**) із **членами** x_n називається число $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, де $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ – **часткові суми** ряду. Якщо ця границя існує, то ряд („нескінченну суму“) називають **збіжним**, інакше (зокрема якщо $S_n \to \infty$) – **розбіжним**. Доведіть, що

а) якщо $b_1 \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_1 q^{k-1} = \dfrac{b_1}{1-q}$ (сума спадної геометричної прогресії), а при $|q| \geq 1$ такий ряд розбіжний;

б) якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ збіжний, то $x_n \to 0$.

Розділ 4

Границя й неперервність функції

Границя функції. Однобічні границі. Символи o й O

Нехай функція f визначена в певному околі точки x_0, крім, можливо, самої цієї точки. Тоді число a називається **границею функції f у точці** x_0, якщо

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon,$$

тобто в будь-який ϵ-окіл a потрапляють значення $f(x)$ для всіх x із достатньо малого δ-околу точки x_0 (крім, можливо, $x = x_0$). У такому разі пишуть $f(x) \to a$ при $x \to x_0$; крім того, границю позначають через $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Сформульоване означення називають означенням границі функції *за Коші*. Йому рівносильне означення *за Гейне*: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ тоді й тільки тоді, коли для довільної послідовності $\{x_n\}$, такої що $x_n \to x_0$ і $x_n \neq x_0$, має місце $f(x_n) \to a$.

Число a називається **границею функції f при** $x \to +\infty$, якщо

$$\forall \epsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{R} :\ x > p \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon.$$

Цю величину позначають через $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Її можна рівносильно задати як границю будь-якої послідовності вигляду $f(x_n)$, де $x_n \to +\infty$. Означення величини $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ і її характеризація в термінах послідовностей – аналогічні.

Якщо $f(x) \to 0$ при $x \to x_0$ (тут x_0 може бути як числом, так і $\pm\infty$), то f називають **нескінченно малою** в цій точці. Це позначається записом $f(x) = o(1)$ при $x \to x_0$.

Функція f називається **обмеженою на множині** X, якщо в усіх точках цієї множини вона за модулем не перевищує деякої сталої.

Кажуть, що функція f **обмежена при** $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, якщо

$$\exists \delta > 0, M \geq 0 :\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M,$$

тобто f обмежена в деякому околі точки x_0 (але може не бути визначеною в самій цій точці; якщо f визначена тільки по один бік від точки x_0, то в означенні слід брати саме такі x). У такому разі пишуть $f(x) = O(1)$ при $x \to x_0$.

Крім того, пишуть, що $f(x) = O(1)$ при $x \to +\infty$, якщо f обмежена на деякій множині вигляду $(M, +\infty)$. Аналогічно, обмеженість f на деякій множині вигляду $(-\infty, M)$ позначається записом $f(x) = O(1)$ при $x \to -\infty$.

Для границь функцій, аналогічно до границь послідовностей, виконуються теореми про арифметичні дії. Крім того, зберігається теорема про властивості символів $o(1)$ і $O(1)$.

Якщо $g(x) = o(1)f(x)$ при $x \to x_0$, де $x_0 \in \mathbb{R}$ або $x_0 = \pm\infty$, то пишуть $g(x) = o(f(x))$ при $x \to x_0$. Аналогічно, за означенням, $O(f(x)) = O(1)f(x)$.

Теорема про границю складеної функції. Нехай $g(x) \to a$ при $x \to x_0$, причому $g(x) \neq a$ в деякому околі точки x_0 (крім, можливо, неї самої). Крім того, нехай f має границю в точці a. Тоді $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{t \to a} f(t)$.

Ця теорема дає змогу робити заміну змінної при знаходженні границі функції. Функцію $f(g)$ називають **композицією** f і g.

Число a називають **правобічною (лівобічною) границею** функції f при $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, якщо a є границею будь-якої послідовності вигляду $f(x_n)$, де $x_n \to x_0$ і $x_n > x_0$ ($x_n < x_0$). Таку границю позначатимемо через $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ ($\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$) або записом $f(x) \to a$ при $x \to x_0+$ ($x \to x_0-$).

Теорема. Нехай функція f визначена в певному околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Тоді необхідною й достатньою умовою існування границі f у точці x_0 є рівність правобічної й лівобічної границь f у цій точці.

Якщо f визначена на проміжку, одним із кінців якого є x_0, то відповідна однобічна границя вважається границею. Наприклад, якщо $f(x)$ визначена при $x > 0$, то вважатимемо, що $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f(x)$.

Якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$, такої що $x_n \to x_0$ і $x_n \neq x_0$, має місце $f(x_n) \to +\infty$, то пишуть $f(x) \to +\infty$ при $x \to x_0$ або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$. Аналогічними є означення того, що $f(x_n) \to -\infty$ і $f(x_n) \to \infty$ при $x \to x_0$. В усіх цих випадках x_0 може бути як числом, так і $\pm\infty$.

Неперервні функції. Чудові границі

Нехай f визначена в певному околі числа x_0 або на проміжку, одним із кінців якого є x_0. Тоді якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то f називають **неперервною в точці** x_0. Функцію, неперервну в усіх точках множини X, називають **неперервною на множині** X. Множину функцій з такою властивістю позначають через $C(X)$.

Якщо функція f визначена в деякому околі точки x_0, за можливим винятком самої цієї точки, і не є неперервною в точці x_0, то x_0 називають **точкою розриву** f. Якщо при цьому $f(x)$ має скінченні лівобічну й правобічну границі при $x \to x_0$, але вони неоднакові або не дорівнюють $f(x_0)$

(це значення може бути й невизначеним), то x_0 називають **точкою розриву першого роду**, інакше – **точкою розриву другого роду**.

Елементарними функціями називають сталу, степеневу, показникову, логарифмічну, тригонометричні, обернені тригонометричні функції, модуль, а також усі функції, які можна одержати з перелічених за допомогою скінченної кількості арифметичних дій і композицій.

Теорема. Довільна елементарна функція неперервна на своїй множині визначення.

Рівності, подані нижче, відомі під назвою **чудові границі**:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$;

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$, де $\mu \in \mathbb{R}$.

Усім їм, крім 2), відповідають асимптотичні формули

1) $\sin x = x + o(x)$ при $x \to 0$;

3) $\ln(1+x) = x + o(x)$ при $x \to 0$;

4) $\mathrm{e}^x = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$;

5) $(1+x)^\mu = 1 + \mu x + o(x)$ при $x \to 0$.

Задачі

4.1 За означенням Коші (не користуючись теоремою про арифметичні дії), доведіть, що

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

4.2 Доведіть окремо за означеннями Гейне й Коші, що 0 не є границею функції $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

4.3 Доведіть, що якщо $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, то послідовність $y_n = f(n)$ теж прямує до a.

4.4 Перевірте істинність тверджень:

а) $\cos x = o(1)$ при $x \to 0$;

б) $e^x = o(1)$ при $x \to -\infty$;

в) $\sqrt{x} = O(1)$ при $x \to 0$;

г) $x^2 = O(1)$ при $x \to +\infty$;

4.5 Перевірте істинність тверджень:

а) $x^2 = o(x^3)$ при $x \to 0$;

б) $x^3 = o(x^2)$ при $x \to 0$;

в) $x^2 = o(x^3)$ при $x \to +\infty$;

г) $x^3 = o(x^2)$ при $x \to +\infty$;

ґ) $\sin x = O(x)$ при $x \to 0$;

д) $\sin x = O(x^2)$ при $x \to 0$;

е) $O(x^2) = o(x^3)$ при $x \to 0$;

є) $o(x^3) = O(x^2)$ при $x \to 0$;

ж) $o(f(x)) = O(f(x))$ при $x \to x_0$;

з) $o(f(x) + o(f(x))) = o(f(x))$ при $x \to x_0$;

и) $o(f(x))o(g(x))) = o(f(x)g(x))$ при $x \to x_0$.

У п. е)-и), якщо твердження хибне, наведіть контрприклади.

4.6 За допомогою калькулятора обчисліть $\frac{\sin x}{x}$ при $x = 1$, $x = 0.1$, $x = 0.01$ і $x = 0.001$. Порівняйте результати з границею цієї функції при $x \to 0$.

4.7 Знайдіть границі

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\sin 2x}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+6x^2}-1}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\frac{x}{2}}-1}{\sin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} (1-x)^x$;

ґ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$;

д) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

4.8 Виведіть чудові границі 3)-5) із чудової границі 2) (див. теоретичну довідку).

4.9 Знайдіть границю

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x - 1}.$$

4.10 Наведіть приклад функцій f і g, таких що $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, і при цьому

а) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = 0$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = 1$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = +\infty$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = -\infty$.

4.11 Знайдіть однобічні границі $\lim\limits_{x\to 0-}[\sin x]$ і $\lim\limits_{x\to 0+}[\sin x]$,
де $[y]$ — **ціла частина** y (найбільше ціле число, що не перевищує y).

4.12 За означенням Коші доведіть неперервність на $\mathbb{R}$ функції $\cos x$ (при цьому можна користуватися рівністю $|\sin y| \le |y|$, де y — довільне дійсне число).

4.13 За якого значення параметра a функція

$$f(x) = \begin{cases} 3 - ax, & x \le 1 \\ x^2 + a, & x > 1 \end{cases}$$

неперервна на $\mathbb{R}$?

4.14 За яких значень параметрів a і b функція

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3, & x \le 1 \\ 7 + bx^3, & x > 1 \end{cases}$$

неперервна на $\mathbb{R}$?

4.15 Знайдіть границю

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{1-\cos x} - 1}{2 - 2\cos x}.$$

4.16 Доведіть, що $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h)$.

4.17 Знайдіть границю

$$\lim_{x\to 1}\left(\ln\sqrt{x}\cdot \operatorname{arctg}\sin\frac{1}{x}\right).$$

4.18 Нехай $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Позначмо для $p \ge 1$

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Доведіть, що

$$\lim_{p\to+\infty} \|\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{x}\|_\infty.$$

Розділ 5

Похідна

Поняття похідної. Правила диференціювання

Нехай функція f визначена в деякому околі точки x_0. Тоді її **похідною** в цій точці називається число

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

яке також позначають через $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$. Якщо ця похідна існує, то f називають **диференційовною в точці** x_0. Для диференційовної функції має місце співвідношення

$$f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)h + o(h)$$

при $h \to 0$. Геометричний зміст диференційовності полягає в тому, що до графіка f можна єдиним способом провести дотичну пряму в точці x_0. Функцію, диференційовну в кожній точці множини M, називають **диференційовною на множині** M.

Наведімо похідні основних елементарних функцій:

$$\mathrm{const}' = 0;$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \neq 0$$

(зокрема, $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$);

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

(зокрема, $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$);

$$\log_a' x = \frac{1}{x\ln a}$$

(зокрема, $\ln' x = \frac{1}{x}$);

$$\sin' x = \cos x;$$

$$\cos' x = -\sin x;$$

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\operatorname{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

`Теорема` про арифметичні дії з похідними. В точках, де функції f і g диференційовні, мають місце рівності

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$;
- $(fg)' = f'g + fg'$;
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$, якщо $g \neq 0$.

`Теорема` про похідну складеної функції. Нехай функція g диференційовна в точці x, а функція f диференційовна в точці $g(x)$. Тоді

$$(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x).$$

Нехай функція f така, що кожне її значення досягається тільки при одному значенні її аргумента. Тоді можна розглянути функцію f^{-1}, яка відновлює аргумент f за її значенням, тобто $x = f^{-1}(y)$, якщо $y = f(x)$. f^{-1} називають **оберненою функцією** до f.

`Теорема` про похідну оберненої функції. Нехай диференційовна функція f має обернену, яка є неперервною. Тоді

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

де точки x і y пов'язані співвідношенням $y = f(x)$.

Монотонність і екстремум. Правило Лопіталя. Формула Тейлора

Точку x_0 називають **точкою локального мінімуму** функції f, якщо $f(x) \geq f(x_0)$ для всіх x із деякого ϵ-околу точки x_0. Якщо при цьому $f(x) > f(x_0)$ для всіх x із цього околу, крім x_0, то x_0 називається **точкою строгого локального мінімуму** f. Аналогічно, якщо в деякому ϵ-околі точки x_0

має місце нерівність $f(x) \le f(x_0)$ (або, відповідно, $f(x) < f(x_0)$, окрім випадку $x = x_0$), то x_0 називають **точкою локального максимуму** (або, відповідно, **точкою строгого локального максимуму**) функції f. Точки локального мінімуму або локального максимуму називаються **точками локального екстремуму**; аналогічним є означення **точки строгого локального екстремуму**.

`Теорема` Ферма (необхідна умова локального екстремуму). Нехай f диференційовна в точці x_0. Тоді якщо x_0 – точка локального екстремуму f, то $f'(x_0) = 0$.

`Теорема` Лаґранжа. Нехай $f \in C([a,b]) \cap D((a,b))$. Тоді існує $\xi \in (a,b)$, для якого

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Функцію f називають **зростаючою** на множині I, якщо для всіх $x, y \in I$ має місце $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Якщо ж із умови $x < y$ випливає нерівність $f(x) \le f(y)$, $f(x) > f(x)$ або $f(x) \ge f(y)$, то f у відповідних випадках називають **неспадною**, **зростаючою** і **незростаючою**. Функції, що мають одну з цих властивостей, називають **монотонними**, причому зростаючі й спадні – **строго монотонними**.

`Теорема` (достатня умова монотонності на проміжку). Нехай $f \in C([a,b]) \cap D((a,b))$. Тоді якщо $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a,b)$, то f зростає на $[a,b]$. Для того, щоб f була неспадною, спадною або незростаючою на $[a,b]$, достатньо виконання на (a,b) нерівностей $f'(x) \ge 0$, $f'(x) < 0$ і $f'(x) \ge 0$ відповідно.

Аналогічними є достатні умови монотонності на проміжках вигляду $(\infty, b]$, $[a, +\infty)$ і на $\mathbb{R}$.

`Теорема` (правило Лопіталя). Нехай функції f і g диференційовні в деякому околі точки x_0, за можливим винятком самої цієї точки. Нехай також $g(x) \ne 0$ для всіх x із деякого околу точки x_0, крім можливо $x = x_0$. Тоді якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$.

Аналогічне правило знаходження границь застосовне і для невизначеностей ∞/∞, а також для однобічних границь і границь при $x \to \pm\infty$.

Похідну похідної функції f називають **другою похідною** f і позначають через f''. Аналогічно задаються похідні вищих порядків, тобто **n-а похідна** – це похідна $(n-1)$-ої похідної. n-у похідну функції f позначають через $f^{(n)}$ або через $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$, де x – аргумент функції. Крім того, вважатимемо, що $f^{(0)} = f$.

`Теорема` (локальна формула Тейлора). Нехай функція f має похідні до $(n-1)$-го порядку в деякому околі точки x_0, а також n-у похідну в точці x_0. Тоді має місце подання

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n)$$

при $h \to 0$. Позначивши $x = x_0+h$, цю формулу можна переписати у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

при $x \to x_0$.

Кажуть, що функція g **змінює знак з $-$ на $+$** при переході через точку x_0, якщо існує $\epsilon > 0$, такий що $g(x) < 0$ для всіх $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ і $g(x) > 0$ для всіх $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ (якщо виконуються нерівності у зворотний бік, то кажуть, що g **змінює знак з $+$ на $-$**). Якщо g має однаковий знак по обидва боки від точки x_0 у деякому її околі, то кажуть, що g **зберігає знак** при переході через точку x_0.

`Теорема` (перша достатня умова екстремуму). Нехай $f'(x_0) = 0$. Тоді

а) якщо f' змінює знак з $-$ на $+$ при переході через точку x_0, то x_0 – точка строгого локального мінімуму f;

а) якщо f' змінює знак з $+$ на $-$ при переході через точку x_0, то x_0 – точка строгого локального максимуму f;

а) якщо f' зберігає знак при переході через точку x_0, то x_0 – не точка локального екстремуму f.

`Теорема` (друга достатня умова екстремуму). Нехай
$f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ і $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тоді

а) якщо n парне і $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка строгого локального мінімуму f;

б) якщо n парне і $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка строгого локального максимуму f;

в) якщо n непарне, то x_0 – не точка локального екстремуму f.

Зокрема, якщо $f'(x_0) = 0$ і $f''(x_0) > 0$, то в x_0 досягається строгий локальний мінімум, а якщо $f'(x_0) = 0$ і $f''(x_0) < 0$, то це точка строгого локального максимуму.

Для знаходження найбільшого й найменшого значення диференційовної функції f на відрізку $[a, b]$ достатньо виконати такі дії:

1) знайти точки $x \in (a, b)$, де $f'(x) = 0$;

2) знайти найбільше й найменше з-поміж чисел $f(a)$, $f(b)$ і значень f у точках, знайдених у п. 1).

Задачі

5.1 Доведіть за означенням, що

а) $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$;

б) $\ln' x = \dfrac{1}{x}$;

в) $\cos' x = -\sin x$;

г) $\sin' x = -\cos x$;

ґ) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ для $\alpha \neq 0$.

5.2 Доведіть за означенням, що операція диференціювання є лінійною, тобто $(f+g)' = f' + g'$ і $(cf)' = cf'$, де $c = \mathrm{const}$. Зробіть висновок про похідну сталої функції.

5.3 Знайдіть похідні функцій

а) $\operatorname{ctg} x$;

б) $\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$;

в) $(x^2+1)(x^2-x+1)$;

г) $\dfrac{3x^2+1}{x-2}$;

ґ) $\mathrm{e}^x \cdot \ln x$.

5.4 Доведіть, що для похідної добутку трьох функцій — f_1, f_2 й f_3 — справедлива формула

$$(f_1 f_2 f_3)' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'.$$

5.5 Сформулюйте і доведіть методом математичної індукції узагальнення формули з задачі 5.4 на випадок добутку довільної кількості функцій.

5.6 Наведіть (з обґрунтуванням) приклад неперервної функції, яка не має похідної у певній точці.

5.7 Знайдіть похідні функцій

а) $(\ln x + 5)^8$;

б) 2^{2^x};

в) $\dfrac{\ln^3 x}{x^3}$;

г) $\sin\sin\sin x$;

ґ) $x\mathrm{e}^{1-\cos x}$;

д) $x^2 \cdot \ln(3x) \cdot \sin x$;

5.8 Доведіть, що функція

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

диференційовна на $\mathbb{R}$, але її похідна має розрив другого роду в точці $x = 0$.

5.9 Доведіть, що

а) $\ln' x = \dfrac{1}{x}$;

б) $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$,

користуючись тільки формулою похідної оберненої функції й рівностями $(\mathrm{e}^y)' = \mathrm{e}^y$ і $\operatorname{tg}' y = \frac{1}{\cos^2 y}$.

5.10 Знайдіть найбільше й найменше значення функції $f(x) = x^2 - 2x + 2$ на множині $[0, 2]$, а також точки, в яких вони досягаються. Чи в усіх цих точках похідна функції дорівнює 0?

5.11 За допомогою теореми Лаґранжа доведіть нерівності

а) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ для $x, y \in \mathbb{R}$;

б) $\left|\ln \dfrac{x}{y}\right| \geq |x - y|$ для $x, y \in (0, 1)$.

5.12 Вкажіть проміжки монотонності функцій

а) $\cos x$;

б) e^{x^2-4}.

5.13 За допомогою теореми Ферма й першої достатньої умови екстремуму дослідіть, при яких $n \in \mathbb{N}$ функція $f(x) = x^n$ має мінімум, максимум або не має екстремуму в точці 0.

5.14 За правилом Лопіталя знайдіть границі

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}$ $(n \in \mathbb{N})$;

ґ) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$.

5.15 Запишіть формулу Тейлора 1-го, 3-го й 5-го порядку функції $f(x) = \sin x$ у точці $x_0 = 0$. Обчисліть відповідні многочлени в точці $x = 0.3$ і порівняйте з обчисленим на калькуляторі значенням $\sin 0.3$.

5.16 Запишіть формулу Тейлора n-го порядку в околі точки $x_0 = 0$ для функцій

а) $\cos x$, $n = 4$;
б) $\ln(1 + x)$, $n = 4$;
в) $(1 + x)^{\mu}$, $n = 3$, $\mu \in \mathbb{R}$;
г) $\dfrac{1}{1 + x}$, $n \in \mathbb{N}$ (у випадку $n = 3$ зведіть до п. в));
ґ) e^x, $n \in \mathbb{N}$;
д) $\arcsin x$, $n = 3$.

Обчисліть за допомогою калькулятора значення цих функцій і многочленів Тейлора при $x = 0.1$ (у п. г) і ґ) виберіть для цього довільне $n \geq 2$).

5.17 Користуючись формулами Тейлора для функцій з п. а)-г) задачі 5.16, запишіть формулу Тейлора n-го порядку в околі точки $x_0 = 0$ для функцій

а) $\ln \cos x$, $n = 2$;
б) $\operatorname{tg} x$, $n = 3$;
в) $\sin \sin x$, $n = 5$;
г) $\operatorname{arctg} x$, $n = 2m - 1$, де $m \in \mathbb{N}$ (n – непарне число).

5.18 Запишіть формулу Тейлора 3-го порядку в околі точки $x_0 = 1$ для функції $f(x) = x^x$. Користуючись формулою, наближено обчисліть $1.01^{1.01}$ і порівняйте зі значенням, обчисленим безпосередньо на калькуляторі.

5.19 За допомогою формули Тейлора знайдіть границі

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sqrt{1 + x} + x^2 - x - 2}{\ln \cos x}$;
б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{6x} - 6x - 1}{1 - \cos 2x}$.

5.20 За допомогою однієї з достатніх умов екстремуму, знайдіть локальні екстремуми й проміжки монотонності, схематично побудуйте графіки функцій (з урахуванням поведінки при $x \to -\pm\infty$ або на кінцях множини визначення)

а) $\dfrac{x - 3}{x^2 - 6x + 10}$;
б) $3x^4 - 4x^3$;
в) x^{x^2};
г) $x\mathrm{e}^{-x}$;
ґ) $x^2\mathrm{e}^{-x}$;
д) $x \sin x + \cos x - \dfrac{x^2}{4}$.

5.21 Перевірте, чи є 0 точкою локального екстремуму функції $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + 2\cos x$.

5.22 Знайдіть найбільше й найменше значення функції $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x$ на відрізку $[0, 1]$.

Розділ 6

Функції декількох змінних

Під **функцією декількох змінних** (**функцією багатьох змінних**, **функцією векторного аргумента**) матимемо на увазі відображення з множини $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, де n — натуральне число, більше за 1. Іншими словами, ФДЗ ставить у відповідність вектору дійсне число.

Нехай $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, ϵ — додатне число. Тоді **ϵ-околом** точки $\boldsymbol{x}$ називається множина таких елементів $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, що $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| < \epsilon$ – норма в $\mathbb{R}^n$ (надалі будемо розглядати евклідову норму, але це не має принципового значення). Отже, ϵ-окіл – це куля радіусу ϵ (див. розділ 2).

Векторною послідовністю називається відображення з $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}^n$.

Границею векторної послідовності $\{\boldsymbol{x}_k\}$, де $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$, називається вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, такий що $\forall \epsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 \; \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| < \epsilon$ (в як завгодно малий ϵ-окіл $\boldsymbol{x}$ потрапляють усі елементи послідовності, починаючи з деякого). За такої умови пишуть $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}$, а саму границю послідовності позначають через $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k$.

Нехай $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Тоді $\boldsymbol{x}$ називається **граничною точкою** множини M, якщо в довільному ϵ-околі $\boldsymbol{x}$ існує елемент M, відмінний від $\boldsymbol{x}$.

Нехай f — функція n змінних, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ — гранична точка D_f. Тоді $a \in \mathbb{R}$ називається **границею** f **у точці** x_0, якщо для довільної послідовності $\{\boldsymbol{x}_k\}$, яка прямує до $\boldsymbol{x}_0$ і при цьому $\boldsymbol{x}_k \in D_f$ і $\boldsymbol{x}_k \neq x_0$, має місце $f(\boldsymbol{x}_k) \to a$.

Наведене означення (*за Гейне*) рівносильне умові

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \boldsymbol{x} \in D_f \; \wedge \; 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - a| < \epsilon,$$

відомій як означення границі *за Коші*.

Границю функції f у точці $\boldsymbol{x}_0$ будемо позначати через $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})$.

Для границь векторних послідовностей і функцій декількох змінних справедливі теореми про арифметичні дії, аналогічні однойменним теоремам для числових послідовностей (див. розділ 3) і функцій однієї змінної.

Якщо $x_0 \in D_f$ і при цьому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функція f називається **неперервною в точці** x_0. Через $C(M)$ позначають множину функцій, неперервних у кожній точці множини $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

Частинні похідні й диференційовність

Нехай $f = f(x_1, ..., x_n)$ — функція n змінних. Тоді функція, яка ставить у відповідність змінним $x_1, ..., x_n$ число

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{h_j \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + h_j, x_{j+1}, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, ..., x_n)}{h_j},$$

називається **частинною похідною** f **за змінною** x_j. Цю функцію позначають через f_{x_j} або $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Вектор, утворений з частинних похідних функції за усіма змінними в точці, називається її **градієнтом** у цій точці. Тобто градієнт функції $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ у точці $\boldsymbol{p}$ — це вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{p})\right)$; позначається через $\nabla f(\boldsymbol{p})$ (читається „набла f“) або $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{p})$.

Функція f називається **диференційовною** в точці $\boldsymbol{x}$, якщо

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = (\nabla f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h}) + o(\|\boldsymbol{h}\|),$$

при $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$, де $o(\|\boldsymbol{h}\|) = o(1)\|\boldsymbol{h}\|$, а $o(1)$ — нескінченно мала функція змінних $h_1, ..., h_n$, які утворюють вектор $\boldsymbol{h}$. Геометричний зміст диференційовності такий: до графіка f можна провести дотичну гіперплощину в тоці $\boldsymbol{x}$.

Теорема (достатня умова диференційовності). Якщо похідні $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ існують у деякому околі точки $\boldsymbol{x}$ і неперервні в цій точці, то f диференційовна в точці $\boldsymbol{x}$.

Другою частинною похідною функції $f = f(x_1, ..., x_n)$ за змінними x_i та x_j (i, j — числа від 1 до n) називається похідна за змінною x_i від похідної f за змінною x_j, тобто функція $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$. Позначається ця похідна через $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Якщо $i = j$, то маємо просто другу похідну за однією зі змінних, і позначають її через $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$. При $i \neq j$ такі похідні називають **мішаними**.

Аналогічно означуються частинні похідні порядків більше другого, а означення диференційовності вищого порядку будується за індукцією. А саме, нехай $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Тоді функція f називається k **разів диференційовною** в точці $\boldsymbol{x}$, якщо вона $k-1$ раз диференційовна в деякому околі $\boldsymbol{x}$, а її похідні $(k-1)$-го порядку диференційовні в самій точці $\boldsymbol{x}$.

Теорема Шварца (достатня умова рівності мішаних похідних). Якщо f є k разів диференційовною в точці $\boldsymbol{x}$, то мішані похідні k-го порядку f у цій точці не залежать від послідовності, в якій ведеться диференціювання.

Наприклад, для двічі диференційовної в точці $\boldsymbol{x}$ функції маємо рівність $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x})$.

Для двічі диференційовної в точці $\boldsymbol{x}$ функції має місце **формула Тейлора** другого порядку:

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(\|\boldsymbol{h}\|^2)$$

при $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$. Подібний вигляд має й формула Тейлора вищих порядків.

Дослідження на екстремум

Нехай $\boldsymbol{x}$ – гранична точка множини визначення функції $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тоді $\boldsymbol{x}$ називається **точкою локального мінімуму** f, якщо існує $\epsilon > 0$, таке що для усіх $\boldsymbol{y} \in D_f$ з ϵ-околу $\boldsymbol{x}$ має місце нерівність $f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x})$. Якщо рівність досягається тільки при $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, то кажуть про точку **строгого локального мінімуму**. Нарешті, якщо замінити нерівності на $\leq$ і $<$ (крім випадку $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$), то одержимо означення **локального максимуму** і **строгого локального максимуму**. Точки мінімуму і точки максимуму називають **точками екстремуму**.

`Теорема` (необхідна умова екстремуму). Нехай функція $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ має частинні похідні в деякому околі точки $\boldsymbol{x}$. Тоді якщо $\boldsymbol{x}$ є точкою локального екстремуму f, то $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = 0$ для усіх $j = 1, ..., n$.

Алгоритм перевірки наявності екстремуму двічі диференційовної функції двох змінних, $f(x, y)$, у точці, де $f_x = f_y = 0$, можна записати так. Нехай $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$, $b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ (за теоремою Шварца це те саме, що $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$), $c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$. Тоді

а) якщо $a > 0$ і $ac - b^2 > 0$, то (x, y) — точка локального мінімуму;

б) якщо $a < 0$ і $ac - b^2 > 0$, то (x, y) — точка локального максимуму;

в) якщо $ac - b^2 < 0$, то (x, y) — не точка екстремуму;

г) якщо $ac - b^2 = 0$, то дослідження точки (x, y) на екстремум потрібно здійснювати іншими методами.

Узагальнення цієї схеми на випадок функції n змінних можна сформулювати так.

`Теорема.` Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ двічі диференційовна в точці $\boldsymbol{x}$, причому $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. Позначмо через $\boldsymbol{Q}$ **матрицю Гессе**, елементи якої дорівнюють значенням частинних похідних $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x})$ (за теоремою Шварца, $\boldsymbol{Q}$ симетрична). Позначмо також

$$M_1 = q_{11},$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix},$$

$$...$$

$$M_n = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

тобто M_k — це визначник матриці, утвореної „вирізанням“ з $\boldsymbol{Q}$ перших k рядків і стовпчиків (починаючи з лівого верхнього кута). Тоді

а) якщо $M_k > 0$ для усіх k, то $\boldsymbol{x}$ — точка мінімуму;

б) якщо $M_1 < 0$, $M_2 > 0$, $M_3 < 0$,..., $(-1)^n + 1M_n > 0$ ($M_k < 0$ при непарних k і $M_k > 0$ при парних k), то $\boldsymbol{x}$ — точка максимуму;

в) якщо не виконується жодна з умов а) і б), але при цьому $M_n \neq 0$, то $\boldsymbol{x}$ — не точка екстремуму.

Якщо ж $M_n = 0$, то питання про наявність і характер екстремуму в точці x треба досліджувати іншими методами (достатня умова екстремуму не дає відповіді на нього).

Дослідження на умовний екстремум

Розгляньмо задачу

$$\begin{cases} f(x_1, ..., x_n) \to \min / \max, \\ g_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ g_m(x_1, ...x_n) = 0 \end{cases},$$

де обмеження $g_i = 0$ задають звужену множину визначення функції. Такі задачі можна розв'язувати **методом множників Лаґранжа**. Він полягає в тому, щоб побудувати функцію

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x_1, ..., x_n)$$

і знайти її точки екстремуму. Для цього потрібно, перш за все, знайти точки, де L (як функція $n+m$ змінних) має нульовий градієнт. Зауважмо, що $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i$, тож рівність нулю цієї частинної похідної рівносильна умові $g_i = 0$. Достатні умови умовного екстремуму формулюються в термінах кутових мінорів матриці других похідних, яка в цьому контексті називається **обрамленою матрицею Гессе** (англ. bordered Hessian).

Розгляньмо спочатку випадок $n = 2$, $m = 1$. Тоді функція Лаґранжа записується як $L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$. Для кожної точки (x_1, x_2, λ), такої що $\nabla L = \mathbf{0}$, потрібно скласти матрицю других похідних

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

`Теорема` (достатня умова умовного екстремуму функції 2 змінних з 1 обмеженням). Нехай $\nabla L = \mathbf{0}$. Тоді якщо $\det \boldsymbol{Q} > 0$, то це точка умовного максимуму. Якщо $\det \boldsymbol{Q} < 0$, то це точка умовного мінімуму.

Достатня умова екстремуму функції n змінних з m обмеженнями типу рівностей (як і раніше, вважається, що функції f і $g_1,\ldots,g_m$ двічі диференційовні) потребує розгляду обрамленої матриці Гессе

$$
\boldsymbol{Q} = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial \lambda_1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial \lambda_2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda_m} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda_m} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial \lambda_m} \\
\hline
\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda_m} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\
\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \lambda_m} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial \lambda_m} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}
\end{array}\right).
$$

`Теорема.` Нехай M_k — визначник підматриці $\boldsymbol{Q}$, яка містить $\frac{\partial^2 L}{\partial x_k^2}$ як правий нижній елемент (наприклад, $M_n = \det \boldsymbol{Q}$). Тоді

а) якщо мінори $M_{m+1},\ldots,M_n$ чергуються знаком, причому M_{m+1} має такий знак, як $(-1)^{m+1}$ (тобто $M_{m+1} > 0$ в задачі з непарним m і $M_{m+1} < 0$ в задачі з парним m), то досягається умовний максимум;

б) якщо всі мінори $M_{m+1},\ldots,M_n$ мають такий знак, як $(-1)^m$ (тобто вони всі від'ємні в задачі з непарним m і всі додатні в задачі з парним m), то досягається умовний мінімум.

Задачі

6.1 Знайдіть множину визначення і її граничні точки для функцій

а) $\dfrac{\cos xy}{x^2+y^2}$;

б) $\dfrac{\mathrm{e}^{xy}}{\sqrt{x}}$.

6.2 За означенням *Коші* (вказавши для довільного $\epsilon > 0$ відповідне $\delta > 0$) знайдіть границю

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{1+x^4+y^4}.$$

6.3 Знайдіть (або доведіть неіснування) границі

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x-y}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{\ln(1+xy)}{x}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

6.4 Дослідіть на неперервність у точці $(0,0)$ функції

а) $\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 1, & x=y=0 \end{cases}$.

6.5 Нехай $(\cdot,\cdot)$ — деякий скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$. Доведіть, що якщо $\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}_n\to\boldsymbol{y}$, то $(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)\to(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

6.6 Знайдіть частинні похідні функцій за всіма змінними:

а) $(x+1)^y+\cos\dfrac{x^2}{y}+\sin x\cdot\ln(1+xy)$;

б) $(xy)^z+\operatorname{tg}(xy^2)$.

6.7 Знайдіть довжину (евклідову норму) градієнта функції $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ в усіх точках, де він існує.

6.8 Знайдіть довжину градієнта функції $f(x,y,z)=x^3y^2z$ у точці

а) $(1,1,1)$;

б) $(2,1,1)$;

в) $(1,2,1)$;

г) $(1,1,2)$.

6.9 Знайдіть усі другі частинні похідні функції

$$f(x,y)=\sin(x^2+y^3).$$

6.10 Запишіть формулу Тейлора 2-го порядку

а) для функції $f(x,y)=\cos(2x+3y)$ у точці $(x_0,y_0)=(0,0)$;

б) для функції $f(x,y)=\operatorname{arctg} xy^2$ у точці $(x_0,y_0)=(1,1)$;

в) для функції $f(x,y)=x^y$ у точці $(x_0,y_0)=(1,3)$; наближено обчисліть $0.97^{3.02}$ за допомогою одержаної формули.

6.11 Дослідіть на локальний екстремум функції а) $f(x,y) = -2x^2 - 3y^2$;

б) $f(x,y) = x^2 - y^2$;

в) $f(x,y) = x^3 + y^3$;

г) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$;

ґ) $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$;

д) $f(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x$;

е) $f(x,y,z) = x^3 + xy^2 - 3x^2 + 2y^2 + z^2$.

У п. а)-г) проілюструйте результати, накресливши або побудувавши на комп'ютері графіки функцій.

6.12 За допомогою методу множників Лаґранжа дослідіть на умовний екстремум

а) функцію $f(x,y) = x^2 + y^2$ на множині $3x - 5y - 1 = 0$;

б) функцію $f(x,y) = x + y$ на множині $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$;

в) функцію $f(x,y) = x + y$ на множині $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$.

Проілюструйте відповіді, зобразивши лінії рівня f і множину, задану обмеженням.

6.13 Доведіть, що відстань від точки (x_0, y_0) до прямої $ax + by + c = 0$ становить

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(це частинний випадок формули відстані від точки до гіперплощини).

6.14 Знайдіть умову, за якої коробка об'єму V з відкритим верхом має найменшу площу поверхні.

6.15 Знайдіть умову, за якої коробка з площею поверхні S має найбільший об'єм.

Розділ 7

Інтеграл

Первісна й інтеграл Ньютона-Лейбніца

Первісна функції f – це функція F, така що $F' = f$.

Теорема про клас первісних. Якщо F – деяка первісна f, то множина первісних f має вигляд $\{F+c \mid c \in \mathbb{R}\}$ (іншими словами, будь-які дві первісні однієї функції відрізняються на сталу).

Невизначений інтеграл функції f – це множина її первісних. Він позначається записом $\int f(t)\,\mathrm{d}t$.

Наведімо невизначені інтеграли деяких елементарних функцій:

$$\int t^\mu \,\mathrm{d}t = \frac{t^{\mu+1}}{\mu+1} + c \quad (\mu \neq -1)$$

(зокрема, $\int 1\,\mathrm{d}t = t + c$, $\int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + c$ тощо); окремо для $\mu = -1$ маємо

$$\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + c;$$

$$\int a^t \,\mathrm{d}t = \frac{a^t}{\ln a} + c$$

(зокрема, $\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t + c$);

$$\int \sin t\,\mathrm{d}t = -\cos t + c;$$

$$\int \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t + c;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \operatorname{tg} t + c;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = -\operatorname{ctg} t + c;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin\frac{t}{a} + c \quad (a \neq 0)$$

(зокрема, $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin t + c$);

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln|t + \sqrt{t^2 \pm a^2}| + c \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + c \quad (a \neq 0)$$

(зокрема, $\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} t + c$);

$$\int \frac{1}{t^2-a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right| + c \quad (a \neq 0).$$

(зокрема, $\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} t + c$).

`Теорема` про лінійну заміну. Нехай $p, q \in \mathbb{R}$, F — первісна f. Тоді функція $\frac{1}{p}(F(pt+q))$ є первісною $f(pt+q)$

Інтегралом Ньютона-Лейбніца функції f з нижньою межею a називається первісна f, яка дорівнює 0 при $x = a$. Його позначають через

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Геометричним змістом цього поняття є площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції f і горизонтальною віссю в межах між точками a й x (площа береться з урахуванням знака підінтегральної функції, тобто зі знаком $-$ на проміжках, де f від'ємна).

`Теорема` (формула Ньютона-Лейбніца). Нехай функція f має первісну F. Тоді

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F\big|_a^x,$$

де $F\big|_a^x = F(x) - F(a)$.

`Теорема` про лінійність інтегрування. Нехай F і G – первісні функцій f і g. Тоді для довільних $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

`Теорема` про заміну змінної. Нехай f має первісну, g — диференційовна функція. Тоді

$$\int_a^x f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(x)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

`Теорема` (формула інтегрування частинами). Нехай f і g мають неперервні похідні на відрізку $[a, x]$. Тоді

$$\int_a^x f'g\,\mathrm{d}t = (fg)\big|_a^x - \int_a^x fg'\,\mathrm{d}t.$$

Інтегрування кусково неперервних функцій

Функція f називається **кусково неперервною на відрізку** $[a,b]$, якщо існує скінченний набір точок $t_0, t_1, ..., t_m$, такий що $a = t_0 < t_1 < ... < t_{m-1} < t_m = b$, і при цьому

- f неперервна на кожному з інтервалів (t_{i-1}, t_i), $i = 1, ..., m$;
- f має скінченні однобічні границі у точках t_i (з обох боків у t_1,...,t_{m-1}, а також справа у $t_0 = a$ й зліва у $t_m = b$).

Нехай f кусково неперервна на $[a,b]$. Тоді **інтегралом** функції f **на відрізку** $[a,b]$ називається величина

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

де t_i — точки з'єднання проміжків неперервності.

Невласні інтеграли

Невласні інтеграли першого роду

Нехай $a \in \mathbb{R}$, функція f кусково неперервна на $[a, +\infty)$. Тоді границя

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

називається **невласним інтегралом** f на проміжку $[a, +\infty)$. Цю величину позначають через

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

і якщо вона скінченна, то кажуть, що інтеграл **збіжний**, а інакше – що інтеграл **розбіжний**. Аналогічним є означення інтеграла з нижньою межею $-\infty$. Інтеграли з нескінченною межею називають невласними інтегралами **першого роду**.

Теорема про збіжність невласного інтеграла першого роду степеневої функції. Нехай $a > 0$. Тоді інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{t^p}\,\mathrm{d}t$ збіжний при $p > 1$ і розбіжний при $p \le 1$.

Теорема (ознака порівняння). Нехай f і g — кусково неперервні на $[a, +\infty)$ функції. Тоді

а) якщо $|f(t)| \le g(t)$ для всіх $t \ge a$, і при цьому інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ збіжний, то й інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ збіжний;

б) якщо $g(t) \geq f(t) \geq 0$ (або $g(t) \leq f(t) \leq 0$) для всіх $t \geq a$, і при цьому інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ розбіжний, то й інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ розбіжний.

Ознаку порівняння можна використовувати для дослідження інтеграла на збіжність, порівнюючи підінтегральну функцію з відомою функцією g. Зокрема, порівняння швидкості спадання функції f зі степеневою функцією дає достатню умову збіжності/розбіжності.

`Теорема` (ознака порівняння зі степенем для невласних інтегралів першого роду). Нехай $a > 0$, f — кусково неперервна на $[a, +\infty)$ функція. Тоді

а) якщо $t^p f(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ з деяким $p > 1$, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ збіжний;

б) якщо $t^p f(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ з деяким $p \leq 1$, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ розбіжний.

Невласні інтеграли другого роду

Нехай функція f необмежена на проміжку $(a, b]$, але кусково неперервна на довільному відрізку $[l, b]$, де $a < l < b$. Тоді **невласний інтеграл** f на проміжку $(a, b]$ — це величина

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{l \to a+} \int_l^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Якщо ця границя скінченна, то кажуть, що інтеграл **збіжний**, а якщо вона нескінченна або не існує, то такий інтеграл називається **розбіжним**.

Аналогічним є означення невласного інтеграла функції, необмеженої в околі правого кінця проміжку інтегрування. Інтеграли на відрізку функцій, необмежених поблизу одного з кінців цього відрізка, називаються **невласними інтегралами другого роду**.

`Теорема` про збіжність невласного інтеграла другого роду степеневої функції. Нехай $a > 0$. Тоді інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{t^p}\,\mathrm{d}t$ збіжний при $p < 1$ і розбіжний при $p \geq 1$.

Для невласних інтегралів другого роду має місце загальна ознака порівняння, аналогічна однойменній ознаці для інтегралів першого роду.

`Теорема` (ознака порівняння зі степенем для невласних інтегралів другого роду). Нехай $a > 0$, функція f кусково неперервна на довільному проміжку вигляду $[l, 1]$, де $0 < l < 1$. Тоді

а) якщо $t^p f(t) \to 0$ при $t \to 0+$ з деяким $p < 1$, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ збіжний;

б) якщо $t^p f(t) \to +\infty$ при $t \to 0+$ з деяким $p \geq 1$, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ розбіжний.

Складені невласні інтеграли

Інтеграли складнішої структури, ніж невласні інтеграли першого й другого роду, досліджуються в такий спосіб. Проміжок інтегрування потрібно розбити на проміжки, які містять по одній *особливій точці*, де під особливими точками маються на увазі $\pm\infty$ і точки, при наближенні до яких підінтегральна функція необмежена. Інтеграл вважається збіжним тоді й тільки тоді, коли збіжними є інтеграли (першого або другого роду) на кожному з цих проміжків; при цьому він дорівнює сумі зазначених інтегралів.

Наприклад, якщо f кусково неперервна на $\mathbb{R}$, то $\int\limits_{\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ потрібно записати як $\int\limits_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ (замість 0 можна взяти будь-яку іншу точку для розбиття на два невласні інтеграли першого роду) і дослідити окремо кожний із доданків. Аналогічно, якщо $f(x) \to \infty$ при $x \to 0+$, то $\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ потрібно розбити на інтеграли другого й першого роду, наприклад $\int\limits_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Задачі

7.1 Обчисліть інтеграли

а) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$;

б) $\displaystyle\int_0^2 t^3\,\mathrm{d}t$.

7.2 Знайдіть інтеграли

а) $\displaystyle\int_0^x \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)\mathrm{d}t$;

б) $\displaystyle\int_0^x (2t+3)^4\,\mathrm{d}t$;

в) $\displaystyle\int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$;

г) $\displaystyle\int_a^x \frac{2^{t+1} - 10^{t-1}}{10^t}\,\mathrm{d}t$.

7.3 Обчисліть інтеграл
$$\int_{-1}^{1} t \sin t^2 \,\mathrm{d}t$$
і поясніть геометричний зміст результату.

7.4 За допомогою заміни змінної знайдіть інтеграли

а) $\displaystyle\int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$, де $\lambda > 0$;

б) $\displaystyle\int_a^x \frac{t^3}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$;

в) $\displaystyle\int_a^x t^4 \sin t^5 \,\mathrm{d}t$;

г) $\displaystyle\int_a^x \frac{t^2}{t^6+1}\,\mathrm{d}t$;

ґ) $\displaystyle\int_a^x \operatorname{tg} t \,\mathrm{d}t$, де a й x належать проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

д) $\displaystyle\int_a^x \frac{1}{t \ln t}\,\mathrm{d}t$, де a й x — додатні числа, що лежать по один бік від числа 1.

7.5 Обчисліть інтеграл
$$\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t.$$

7.6 Порівняйте інтеграли I_1 та I_2 (з'ясуйте, який із них більший), де
$$I_1 = \int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t, \quad I_2 = \int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

7.7 За допомогою інтегрування частинами знайдіть інтеграли

а) $\displaystyle\int_a^x t\mathrm{e}^{6t}\,\mathrm{d}t$;

б) $\displaystyle\int_a^x t^2 \cos t \,\mathrm{d}t$;

в) $\displaystyle\int_0^x \operatorname{arctg} t \,\mathrm{d}t$;

г) $\displaystyle\int_a^x \ln t \,\mathrm{d}t$, $0 < a < x$;

ґ) $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^t \cos t \,\mathrm{d}t$.

7.8 Обчисліть інтеграл

$$\int_1^{\mathrm{e}} t \ln t \, \mathrm{d}t.$$

7.9 **Дробовою частиною** числа t називають величину $\{t\} = t - [t]$, де $[t]$ — ціла частина t. Зобразіть графік кусково неперервної функції $\{t\}$ і знайдіть інтеграл

$$\int_{-0.1}^{1.6} \{t\} \, \mathrm{d}t.$$

7.10 Обчисліть невласні інтеграли першого роду

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$;

б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t$, де $\lambda > 0$;

в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{3t} \, \mathrm{d}t$.

7.11 Нехай неперервні функції f і g такі, що інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(t)g'(t) \, \mathrm{d}t$ збіжний, і при цьому $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Доведіть, що тоді має місце формула інтегрування частинами

$$\int_0^{+\infty} f(t)g'(t) \, \mathrm{d}t = -f(0)g(0) - \int\limits_0^{+\infty} f'(t)g(t) \, \mathrm{d}t.$$

7.12 Дослідіть на збіжність невласні інтеграли першого роду

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} 3 \, \mathrm{d}t$;

б) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} \, \mathrm{d}t$;

в) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{t}}{t^2 - 1} \, \mathrm{d}t$.

7.13 Обчисліть невласний інтеграл другого роду

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4 - t^2}} \, \mathrm{d}t.$$

7.14 Дослідіть на збіжність невласний інтеграл другого роду

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 - 1} \, \mathrm{d}t.$$

7.15 Обчисліть інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+9t^2}\,\mathrm{d}t.$$

7.16 Відомо, що

$$\int_0^{+\infty} \sin t^2\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Користуючись цією рівністю, обчисліть інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin 8t^2\,\mathrm{d}t.$$

7.17 Дослідіть на збіжність інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

7.18 Відомо, що **гамма-функція** Ейлера

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

визначена при $\alpha > 0$ і при $0 < \alpha < 1$ має властивість $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

а) доведіть для $\alpha > 0$ рівність $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$;

б) обчисліть $\Gamma(\frac{1}{2})$ і $\Gamma(\frac{3}{2})$.

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

7.19 Дослідіть на збіжність інтеграл

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t,$$

відомий як **бета-функція** Ейлера, залежно від параметрів $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Відповіді та вказівки до задач

2.1: 1.

2.2: а) так; б) ні; в) так.

2.4: 5.

2.5: а) – норма, б) – не норма.

2.7: ні.

2.6 (вказівка): Поміркуйте над аналогічним питанням для двовимірних векторів, наприклад, $(1, 2)$ і $(2, -1)$, зобразивши їх на рисунку. Узагальніть висновок.

2.8: 0.998813...

2.9: 2.12132...

2.13 (вказівка): як у доведенні теореми про породження норми скалярним добутком, розгляньте вираз $P(\lambda) = (\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y})$. Це квадратичний тричлен відносно λ, і як можна побачити, його дискримінант рівний 0 тоді й тільки тоді, коли $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$. Рівність дискримінанта нулю рівносильна існуванню єдиного λ, такого що $P(\lambda) = 0$. Залишилось перевірити, що умова $P(\lambda) = 0$ рівносильна колінеарності $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$. Щоб довести другу рівність задачі, потрібно розписати норми векторів через відповідні скалярні добутки.

2.14:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 12 & 29 & 43 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 12 \\ 29 \\ 28 \end{pmatrix}$;

в) вираз не має змісту;

г) $\begin{pmatrix} -21 & -148 \\ -10 & -59 \end{pmatrix}$.

2.18 (вказівка): перевірте тотожність за означенням.

2.19 (вказівка): запишіть формули для елементів матриць $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{DC}$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{AF}$. Порівняйте ці вирази для E і G, а також перевірте, що це матриці однакового розміру.

2.20 (вказівка): обчисліть $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{A}^3$, виявіть закономірність, за якою змінюються елементи при піднесенні до наступного степеня, а потім доведіть її методом математичної індукції.

2.23 (вказівка): перевірте за означенням (можна користуватися результатами задачі 2.21).

2.24: одинична матриця — при цьому $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$, а евклідова норма — $\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}$.

2.25: всі елементи на головній діагоналі додатні.

2.26 (вказівка): якщо визначник матриці ненульовий, розв'язок існує і єдиний, а знайти його можна за відомими формулами. В іншому разі розв'язок бути не єдиним (скільки їх тоді?) або не існувати.

2.27: -8.

2.28: 1. Вказівка: виберіть рядок або стовпчик, розкривання за яким веде до якнайменшої кількості обчислень.

2.29 (вказівки): а), б) — скористайтеся формулою для розкривання визначника за вибраним рядком або стовпчиком; в) виведіть результат із п. а) або б).

2.31: а) $\boldsymbol{x} = (3, 1, 1)^T$; б) система несумісна; в) $\boldsymbol{x} = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2})^T$.

2.32: а) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, де $\Delta = ad - bc$ – визначник матриці.

2.33: а) 3; б) 720170.01; в) 1; г) 1.4.

2.36: а) власні числа 2 і 4, власні вектори кратні $(3, 1)^T$ і $(1, 1)^T$ відповідно; б) власне число 1, власні вектори кратні $(1, 0)^T$; в) власне число 8; власні вектори – усі ненульові вектори; г) власні числа відсутні; ґ) власне число 0, власні вектори кратні $(1, 3, 0)^T$; власне число 1, власні вектори – $(0, 1, 0)^T$ і $(2, 0, 1)^T$, а також усі ненульові вектори, утворені з них за допомогою множення на скаляр і додавання; д) власні числа 3, 6 і 7, власні вектори кратні $(3, -3, 7)^T$, $(2, 1, 4)^T$ і $(1, 1, 1)^T$ відповідно.

2.37: а) так; б) так; в) ні; г) так; ґ) ні; д) так; е) так.

3.2: $(5, 6)$.

3.3: $\{x\}$ (множина, єдиним елементом якої є x).

3.5: а) 1; б) 0.

3.6 (вказівка): підберіть достатньо малий ϵ, такий що поза ϵ-околом числа 1, тобто поза інтервалом $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$ лежать усі x_n, починаючи з деякого номера (а отже, нескінченна кількість елементів). Для вибраного ϵ вкажіть номер n_0, починаючи з якого нерівність із означення границі не виконується.

3.7: так.

3.8: так.

3.9 (вказівка): доведіть, що довільне число $a \in \mathbb{R}$ не може бути границею, тому що послідовність необмежено зростає, тобто елементи стають більшими за довільне наперед задане число, починаючи з деякого номера. Покажіть, що це суперечить означенню границі.

3.10 (вказівка): покажіть, що це випливає з означення границі й рівності $||x|| = |x|$ (зліва — модуль модуля, а не норма).

3.11: а) 0; б) $+\infty$; в) 0; г) 0. Вказівка: скористайтесь нерівностями $n - \frac{1}{2} \geq \frac{n}{2}$ (або чимось подібним) і $-1 \leq \cos n \leq 1$, а також теоремою про проміжну послідовність.

3.12, п. а) (вказівка): здійсніть міркування від супротивного: якщо $a < b$, то взявши достатньо малий ϵ, можна показати, що належність x_n ϵ-околу точки a, а y_n — ϵ-околу точки b суперечить умові $x_n \geq y_n$.

3.14: а) необмежена. Вказівка: випишіть перші декілька елементів послідовності і зауважте закономірність. б) обмежена. Вказівка: скористайтеся критерієм.

3.15: а) обмежена; б) не обов'язково обмежена.

3.16: а) $+\infty$; б) $\frac{4}{7}$; 0.

3.17: а) 0; б) 0. Вказівка: застосуйте теорему про проміжну послідовність.

3.18 (вказівка): застосуйте теорему Веєрштраса.

3.19 а) 1; б) $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$. Вказівка: доведіть збіжність за теоремою Веєрштраса. Щоб знайти границю, складіть і розв'яжіть рівняння для неї, користуючись формулою для x_n.

3.20: e^2.

3.21 (вказівка): у п. а) скористайтеся формулою часткових сум геометричної прогресії (див. задачу 1.7, п. г)).

4.3 (вказівка): скористайтеся означенням границі за Гейне.

4.4: а) ні; б) так; в) так; г) ні.

4.4: а) ні; б) так; в) так; г) ні; ґ) так; д) ні; е) ні; є) так; ж) так; з) так; и) так.

4.7: а) 2; б) 0; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{\mathrm{e}}$; ґ) $+\infty$; д) 1. Вказівка: зведіть ці вирази до чудових границь або (крім п. г)-ґ)) розпишіть їх за асимптотичними формулами. Щоб додатково переконатись у правильності відповіді, обчисліть на калькуляторі значення функцій поблизу точок, в яких потрібно знайти границю. Якщо границя при $x \to +\infty$, то потрібно підставити велике число. Пораховані значення повинні бути близькими до знайдених границь.

4.9: $-\infty$.

4.11: -1 і 0.

4.12 (вказівка): скористайтеся формулою різниці косинусів і тим, що синус будь-якого числа за модулем не перевищує 1.

4.13: $a = 1$. Вказівка: поза точкою $x = 1$ скористайтесь теоремою про неперервність елементарних функцій; у точці $x = 1$ прирівняйте однобічні границі.

4.14: $a - b = 10$.

4.15: $\frac{1}{2}$. Вказівка: зробіть заміну $y = 1 - \cos x$.

4.16 (вказівка): Запишіть $f(x_0 + h)$ як композицію функцій f і $g(h) = x_0 + h$. Скористайтеся теоремою про границю складеної функції.

4.17: 0. Вказівка: застосуйте теорему про властивості нескінченно малих і обмежених функцій.

5.1 (вказівка): скористайтеся чудовими границями.

5.3: а) $-\frac{1}{\sin^2 x}$; б) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$; в) $4x^3 - 3x^2 + 4x - 1$; г) $\frac{3x^2-12x-1}{(x-2)^2}$; ґ) $\mathrm{e}^x(\ln x + \frac{1}{x})$.

5.5:

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 ... \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdot ... \cdot f_n + ... + f_1 \cdot f_2 \cdot ... f_{n-1} \cdot f_n'.$$

Останній вираз можна записати також у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f_i' \cdot \prod_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} f_j \right).$$

5.6 (вказівка): один із можливих прикладів — функція $|x|$ при $x = 0$.

5.7: а) $\frac{8(\ln x+5)^7}{x}$; б) $2^{2^x+x} \cdot \ln^2 2$; в) $3\ln^2 x \cdot \frac{1-\ln x}{x^4}$; г) $\cos\sin\sin x \cdot \cos\sin x \cdot \cos x$; ґ) $\mathrm{e}^{1-\cos x}(1 + x\sin x)$; д) $2x\ln(3x)\sin x + x\sin x + x^2\ln(3x)\cos x$.

5.8 (вказівка): при $x \ne 0$ похідну можна обчислити за формулою, а при $x = 0$ її потрібно знайти за означенням. Далі треба довести, що $f'(x)$ не має границі при $x \to 0$.

5.9 (вказівка до п. б)): оскільки арктангенс — непарна функція, достатньо розглянути випадок $x \ge 0$, тоді $y = \operatorname{arctg} x \in [0, \frac{\pi}{2})$. У такому разі $\sin y \ge 0$, і справедлива рівність $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$. Користуючись цим і співвідношенням $\operatorname{tg} y = x$, можна виразити $\cos y$ через x, щоб позбутись тригонометричних і обернених тригонометричних функцій у формулі.

5.10: мінімум — 1, досягається при $x = 1$, при цьому $f'(1) = 0$; максимум — 2, досягається при $x = 0$ і $x = 2$, при цьому $f'(0) \ne 0$ і $f'(2) \ne 0$.

5.11 (вказівка): скористайтесь рівністю $|ab| = |a||b|$ і нерівністю $|\cos x| \le 1$.

5.12: а) спадає на проміжках $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ і зростає на проміжках $((2k-1)\pi, 2k\pi)$, де $k \in \mathbb{Z}$; б) спадає на $(-\infty, 0)$ і зростає на $(0, +\infty)$.

5.13: мінімум при парних n, нема екстремуму при непарних n.

5.14: а) 0; б) 1; в) $\frac{25}{2}$; г) 0; ґ) 1. Вказівка: у п. в)-г) застосуйте правило Лопіталя повторно.

5.16: а) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$;

б) $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$;

в) $(1 + x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{6}x^3 + o(x^3)$;

г) $\frac{1}{1-x} = (1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^{n+1}x^n + o(x^n)$;

ґ) $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;

д) $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

5.17: а) $\ln\cos x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$;

б) $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$;

в) $\sin \sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5)$;

д) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^{m+1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + o(x^{2m-1})$.

5.18: $x^x = x + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^3)$; $1.01^{1.01} \approx 1.0101005$; справжнє значення – 1.010100503....

5.19: а) $-\frac{3}{2}$; б) 9. Вказівка: знаючи формулу Тейлора для функцій e^x і $\cos x$, підставте туди $6x$ і $2x$ відповідно — так можна робити, оскільки ці функції нескінченно малі при $x \to 0$.

5.20: а) 2 – точка мінімуму, 4 – точка максимуму; б) 1 – точка мінімуму; в) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ – точка мінімуму; г) 1 – точка мінімуму; ґ) 0 – точка мінімуму, 2 – точка максимуму; д) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ – точки мінімуму, $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ – точки максимуму.

5.21: є точкою мінімуму. Вказівка: перевірте спочатку необхідну, а потім достатню умову екстремуму.

5.22: найменше значення – 0, досягається при $x = 0$; найбільше значення – 0, досягається при $x = \frac{11}{4}$.

6.1: а) множина визначення – $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, множина її граничних точок – $\mathbb{R}^2$; б) множина визначення – $\{(x,y) \mid x > 0\}$, множина її граничних точок – $\{(x,y) \mid x \geq 0\}$.

6.2: 0.

6.3: а) границі не існує; б) 0; в) 1; г) границі не існує.

6.4: а) неперервна; б) розривна; в) розривна.

6.5 (вказівка): скористайтеся властивостями скалярного добутку, нерівністю Коші-Шварца й означенням збіжності векторів.

6.6 (частина відповідей): $\frac{\partial f}{\partial x} = y(x+1)^{y-1} - \frac{2x}{y}\sin\frac{x^2}{y} + \cos x \ln(1+xy) + \frac{y \sin x}{1+xy}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = (x+1)^y \ln(x+1) + \frac{x^2}{y^2}\sin\frac{x^2}{y} + \frac{x \sin x}{1+xy}$.

6.7: 1. Вказівка: функція має частинні похідні в усіх точках, окрім $(0,0)$. Щоб переконатися в неіснуванні похідних у цій точці, слід спробувати взяти ці похідні за означенням (а не за формулою).

6.8: а) $\sqrt{14}$; б) $4\sqrt{29}$; в) $4\sqrt{11}$; г) $\sqrt{53}$.

6.9: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\cos(x^2+y^3) - 4x^2 \sin(x^2+y^3)$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y\cos(x^2+y^3) - 9y^4 \sin(x^2+y^3)$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6xy^2 \sin(x^2+y^3)$.

6.10: а) $\cos(2h_1 + 3h_2) = 1 - 2h_1^2 - 6h_1h_2 - \frac{9}{2}h_2^2 + o(\|h\|^2)$;
б) $\operatorname{arctg}(1+h_1)(1+h_2)^2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h_1 + h_2 - \frac{1}{4}h_1^2 - \frac{1}{2}h_2^2 + o(\|h\|^2)$;
в) $(1+h_1)^{3+h_2} = 1 + 3h_1 + 3h_1^2 + h_1h_2 + o(\|h\|^2)$, $0.97^{3.02} \approx 0.9121$, справжнє значення – 0.9121171....

6.11: а) $(0,0)$ – точка максимуму; б) екстремумів немає; в) екстремумів немає; г) екстремумів немає; ґ) $(5,2)$ – точка мінімуму; д) $(5,0)$ – точка мінімуму, $(-5,0)$ – точка максимуму; е) $(0,0,0)$ – точка мінімуму.

6.12: а) $(\frac{3}{34}, -\frac{5}{34})$ – точка умовного мінімуму; б) $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ – точка умовного максимуму, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ – точка умовного мінімуму; в) $(2,2)$ – точка умовного мінімуму.

6.13 (вказівка): зауважте, що екстремум відстані — це екстремум квадрата відстані. Щоб знайти d, не обов'язково одержувати явні вирази для точки (x, y), де досягається цей мінімум.

6.14: довжина й ширина $\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$, висота $\sqrt[3]{2V}$.

6.15: куб зі стороною $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

7.1: а) $e - 1$; б) 4.

7.2: а) $\frac{1}{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{10}\left((2x+3)^5 - 243\right)$; в) $x - \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4} - 1$; г) $-\left(\frac{2}{5^t \ln 5} + \frac{t}{10}\right)\Big|_a^x$.

7.3: 0.

7.4: а) $1 - e^{-\lambda x}$; б) $\left(\frac{\ln(t^4+1)}{4}\right)\Big|_a^x$; в) $-\frac{1}{5}\cos t\Big|_a^x$; г) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} t^3\Big|_a^x$; ґ) $-\ln\cos t\Big|_a^x$; д) $\ln|\ln t|\Big|_a^x$.

7.5: $1 + \ln 2 - \ln(e+1)$.

7.6: $I_1 > I_2$.

7.7: а) $\frac{(6t-1)e^{6t}}{36}\Big|_a^x$; б) $\left((t^2-2)\sin t + 2t\cos t\right)\big|_a^x$ (вказівка: двічі проінтегруйте частинами); в) $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ (вказівка: проінтегруйте частинами, а в утвореному інтегралі зробіть заміну змінної); г) $(t\ln t - t)\Big|_a^x$; ґ) $-\frac{e^\pi+1}{2}$.

7.8: $\frac{e^2+1}{4}$.

7.9: 0.775.

7.10: а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $\frac{1}{3}$.

7.11 (вказівка): проведіть міркування за означенням.

7.12: а) розбіжний; б) збіжний; в) збіжний.

7.13: $\frac{\pi}{2}$.

7.14: розбіжний.

7.15: $\frac{\pi}{3}$.

7.16: $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$. Вказівка: скористайтеся парністю підінтегральної функції й зробіть лінійну заміну.

7.17: збіжний.

7.18: б) $\sqrt{\pi}$; $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

7.19: збіжний тоді й тільки тоді, коли $\alpha > 0$ і $\beta > 0$. Вказівка: розбийте на два невласні інтеграли II роду; в околі точки 0 функція $(1-t)^{\beta-1}$ обмежена і відокремлена від нуля (для будь-якого β), і збіжність інтеграла визначається поведінкою функції $t^{\alpha-1}$, яка має збіжний інтеграл при $\alpha > 0$; аналогічні міркування для інтеграла з правою межею 1 дадуть збіжність при $\beta > 0$ (для будь-якого α).

Рекомендовані джерела

1. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. *Математичний аналіз. Частина 1.* Київ: Вища школа, 1992. – 495 с.

2. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. *Алгебра і початки аналізу (профільний рівень), 10 кл.* Харків: Гімназія, 2018. – 422 с.

3. Пиотровский Р.Г., Бектаев К.Б., Пиотровская А.А. *Математическая лингвистика. Учеб. пособие для пед. институтов.* Москва: Высшая школа, 1977. – 383 с.

4. Александрович І. М. та ін. *Вступ до математичного аналізу. Збірник задач.* – Київ, ВПЦ "Київський університет". – 2018. – 239 с.

5. Ляшко С. І., Аджубей Л. Т., Затула Д. В., Гуляницький А. Л. *Практикум з математичного аналізу.* – Київ: ВПЦ „Київський університет“, 2021. – Ч. 1. – 86 с.

6. Gonick L. *The Cartoon Guide to Calculus.* – HarperCollins, 2012. – 256 pp.

7. https://www.khanacademy.org/math/linear-algebra/vectors-and-spaces

8. https://www.3blue1brown.com/topics/linear-algebra

9. https://www.mathportal.org/linear-algebra/matrices/

10. https://www.mathsisfun.com/algebra/matrix-index.html

11. https://www.3blue1brown.com/topics/calculus

12. https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives