

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**ЕКОЛОГІЧНІ Й ЕКОНОМІЧНІ ПРОЦЕСИ  
ТА ЇХ МОДЕЛЮВАННЯ**

**Навчально-методичний посібник для студентів**

галузі знань:	11 Математика та статистика; 12 Інформаційні технології
спеціальності:	113 Прикладна математика; 121 Інженерія програмного забезпечення; 122 Комп'ютерні науки; 124 Системний аналіз
освітні програми:	Прикладна математика; Програмна інженерія; Інформатика; Системний аналіз
освітній рівень:	бакалавр
вид дисципліни:	обов'язкова

Розробники: **Марина КОРОБОВА**, к.фіз.-мат.н.,  
доцент кафедри моделювання складних систем;  
**Тетяна КОЛЯНОВА**, к.фіз.-мат.н.,  
асистент кафедри математичної інформатики

Рецензенти:

д-р. техн. наук, проф. О.Ф. Волошин,

д-р. техн. наук, проф. В.І. Кудін

*Рекомендовано до друку вченою радою  
факультету комп'ютерних наук та кібернетики  
(протокол № 9 від 21 березня 2023 року)*

Викладено матеріал семестрового курсу нормативної навчальної дисципліни «Екологічні й економічні процеси та їх моделювання»: засадничі принципи і найпоширеніші методи математичного моделювання економічних та екологічних процесів. Зокрема, описано класичні аналітичні моделі мікро- та макроекономіки, екології й еколого-економічної взаємодії згідно з концепцією сталого розвитку; представлено їхні теоретичні обґрунтування й аналіз. Наведено приклади завдань для лабораторних робіт та їх виконання.

© Коробова М.В., Колянова Т.В., 2023

## ЗМІСТ

Рекомендовані джерела	7
<b>Моделювання економічних процесів</b>	<b>9</b>
Моделювання в мікроекономіці	
<i>ТЕМА 1. МОДЕЛЬ ПОПИТУ І ПРОПОЗИЦІЇ</i>	
Поняття попиту. Попит і ціна	11
Поняття еластичності	12
Види еластичності	13
Еластичність і виручка продавців	14
Поняття пропозиції. Пропозиція і ціна	16
Взаємодія попиту і пропозиції. Модель Маршала	
Умова часткової рівноваги (статична рівновага)	17
Динамічна рівновага. Дискретна (динамічна) павутиноподібна модель	19
Державне регулювання взаємодії попиту і пропозиції. Опосередковане (непряме) оподаткування	23
Контроль за цінами	24
Дотації. Субсидії. Імпортна квота	25
<i>ТЕМА 2. ТЕОРІЯ СПОЖИВАННЯ</i>	
Простір товарів та відношення переваг	27
Порядкові функції корисності	30
Моделі раціональної поведінки споживача	32
Неокласична модель споживання (за Маршалом)	33
Геометрична інтерпретація задачі Маршала	35
Функції попиту та граничної вартості грошей	36
Модель оптимального споживання за Хіксом	38
<i>ТЕМА 3. ТЕОРІЯ ПОВЕДІНКИ ВИРОБНИКА</i>	
Простір витрат та виробничі функції	41
Основні типи виробничих функцій	43
Еластичність випуску та можливості заміщення	44
Виробництво і вартість. Мінімізація вартості	47

Моделі поведінки фірми	48
Умови повної конкуренції	49
Неокласична модель фірми в умовах досконалої конкуренції	50
Фірма в умовах монополії та монопсонії	53
Неповна конкуренція	56
Олігополія та олігопсонія	57
Моделювання в макроекономіці	
<b>ТЕМА 4. СТАТИЧНА МОДЕЛЬ «ВИТРАТИ – ВИПУСК» ЛЕОНТЬЄВА</b>	
Міжгалузевий баланс	63
Модель Леонт'єва	65
Модель міжгалузевої залежності цін (модель ціноутворення)	66
Аналіз продуктивності моделі «витрати-випуск»	67
Динамічна модель Леонт'єва	70
<b>ТЕМА 5. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ ТА РОЗПОДІЛУ КАПІТАЛОВКЛАДЕНЬ</b>	
Неокласична модель зростання Р. Солоу	71
<b>Моделювання екологічних процесів</b>	78
Основні принципи математичного моделювання екосистем	79
<b>ТЕМА 6. НАЙПРОСТІШІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ПОПУЛЯЦІЙ</b>	
Найпростіші неперервні моделі	84
Моделі з найменшою критичною чисельністю	87
Дискретна модель вікової структури популяції (модель Леслі)	88
Узагальнена модель Леслі	94
Керування у задачах динаміки популяцій	95
<b>ТЕМА 7. МОДЕЛІ ВЗАЄМОДІЇ ДВОХ ВИДІВ</b>	
Класифікація типів взаємодії. Модель «хижак-жертва»	103
Врахування внутрішньовидової конкуренції	110
Модель Базикіна	113
Взаємодія двох видів, що вживають одну їжу	114
Біфуркаційна діаграма	117

<b>Концепція стійкого розвитку і математичне моделювання еколого-економічної взаємодії</b>	122
<i>ТЕМА 8. СТАТИЧНА МІЖГАЛУЗЕВА МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЄВА – ФОРДА</i>	
Модель Леонт'єва-Форда	130
Умови існування невід'ємних розв'язків	132
Модель міжгалузевих залежностей цін	134
Еколого-економічні виробничі функції на основі моделі Леонт'єва-Форда	138
<i>ТЕМА 9. ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЄВА – ФОРДА</i>	
Побудова динамічної моделі	141
Динаміка замкненої виробничої системи	144
Економічне зростання при різних траєкторіях споживання	147
<i>ТЕМА 10. ЕКОНОМІКО – ЕКОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ ЗРОСТАННЯ</i>	148
<i>ТЕМА 11. КІНЕТИЧНА МОДЕЛЬ МОНО – ІЕРУСАЛИМСЬКОГО</i>	
Кінетичні рівняння Моно-Іерусалимського	154
Задача оптимального збирання врожаю	155
Оптимальні врівноважені стани моделі Моно-Іерусалимського	158
Модель оптимального використання очисних споруд	162
<b>Лабораторні роботи</b>	
Лабораторна робота 1. Взаємодія попиту та пропозиції. Вплив державного регулювання	167
Лабораторна робота 2. Моделі поведінки фірми	178
Лабораторна робота 3. Модель Леонт'єва, модель ціноутворення. Продуктивність	183
Лабораторна робота 4. Моделі поведінки ізольованої популяції	187
Лабораторна робота 5. Модель ізольованої популяції з двома критичними рівнями чисельності	194
Лабораторна робота 6. Взаємодія двох популяцій	197

Лабораторна робота 7. Вплив керування у задачах динаміки популяцій	203
Лабораторна робота 8. Динамічна модель Леонт'єва-Форда	207

## Рекомендовані джерела:

### Основні:

1. Ляшенко І.М., Коробова М.В., Горіцина І.А. Моделювання економічних, екологічних і соціальних процесів: навчальний посібник. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2010. – 320 с.
2. Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. – К.: Вища школа, 1999. – 236 с.
3. Ляшенко І.М., Мукоєд А.П. Моделювання біологічних та екологічних процесів. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2002. – 340 с.
4. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. М., 2003, 368 с.

### Додаткові:

5. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Сучасний економічний аналіз: У 2ч. Ч.1. Мікроекономіка. Ч.2. Макроекономіка: Навчальний посібник. – К.: Вища школа, 2004. – 472 с.
6. Ляшенко І.М., Коробова М.В., Столяр А.М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2006. – 304 с.
7. Ляшенко І.М., Коробова М.В., Горіцина І.А., Колянова Т.В. Прості моделі пояснюють складні явища. Методичні рекомендації з курсів «Моделювання економічних та екологічних процесів», «Математична біологія». – Ел. ресурс. Режим доступу: <http://www.unicyb.kiev.ua/Library/MEEP/MEEP.pdf>
8. Колянова Т.В. Динаміка популяційних систем. К.: ІВЦ Товариства «Знання». – 2016. Ел. ресурс. Режим доступу: [http://csc.knu.ua/media/filer\\_public/54/6f/546f1d79-e7f0-42d6-8e33-d90f39f4474a/dps\\_navch\\_pos.pdf](http://csc.knu.ua/media/filer_public/54/6f/546f1d79-e7f0-42d6-8e33-d90f39f4474a/dps_navch_pos.pdf)
9. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень: навчальний посібник. – ВПЦ «Київський університет», 2010. – 336 с.

10. Чарльз Генри Эдвардс, Дэвид Э. Пенни. Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. – К: «Вільямс», 2008. – 1104 с.
11. Мур Джеффри, Уэдерфорд Ларри Р. и др. Экономическое моделирование в Microsoft Excel. – К: «Вільямс», 2004. – 1024 с.
12. Уокенбах Дж. Формулы в Microsoft Office Excel 2007. К.: «Вільямс», 2008. – 736 с.

## МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

На сьогодні математичне моделювання – це потужний засіб дослідження та отримання результатів у багатьох науках. Сучасні досягнення у техніці, фізиці, хімії, інженерних науках, біології, генетиці та медицині, економіці стали можливими саме завдяки широкому використанню математичного апарату та інформатики. І йдеться тут не стільки про елементарне застосування математики для встановлення кількісних співвідношень між окремими елементами досліджуваних явищ (типовим прикладом є побудова для потреб практики регресійних рівнянь за даними спостережень методом «чорного ящика»), скільки про таке математичне моделювання явищ, при якому описуються фундаментальні закони конкретної науки, а експериментують з гіпотезами для з'ясування глибинної суті явищ. Кінцевою метою такого моделювання є одержання нових якісних знань у даній галузі, які також можна застосовувати для потреб практики, зокрема – для прогнозування динаміки конкретних явищ.

Під *моделлю* розуміють об'єкт, що знаходиться у відношенні подібності до системи, явища або процесу, який моделюється.

Процедура моделювання включає дослідження об'єкта шляхом створення його математичної моделі, визначення загальних закономірностей її функціонування (моделі!) та перенесення отриманих результатів на об'єкт.

За допомогою математичного моделювання можна здійснювати:

- розрахунок системи з метою вибору оптимальних значень параметрів;
- прогнозування надійності роботи системи;
- дослідження чутливості системи до змін її параметрів;
- аналіз критичних режимів роботи системи тощо.

Залежно від *мети* використовують різні класи математичних моделей.

Досить часто в наш час економіку визначають як суспільну науку, що вивчає вибори, які роблять люди, використовуючи різні ресурси для задоволення своїх потреб та бажань. Тобто, економічна наука вивчає поведінку людей і допомагає пояснити, як і чому приймаються різноманітні економічні рішення в суспільстві. Так, поділ економічної науки на «мікроекономіку» і

«макроекономіку» пов'язаний насамперед з розглядом різних рівнів, на яких ухвалюються рішення.

Основна відмінність виробничо-економічних систем від фізичних полягає в тому, що в економічних процесах беруть участь люди. На відміну від технічних систем (наприклад, літака) у виробничому комплексі людина – це не лише суб'єкт, а й об'єкт керування.

Головна особливість керованих систем з участю людини полягає в тому, що процеси, які відбуваються в них, взаємодіють із соціальними. Отже, при застосуванні математики для аналізу та синтезу економічних систем необхідно вивчати також взаємодії великих груп людей, які беруть участь в роботі системи, оскільки вони суттєво впливають на всі процеси у ній. З огляду на сказане вище можна виділити два рівні (класи) економіко-математичних моделей: 1) *виробничо-технологічний*; 2) *соціально-економічний*.

# МОДЕЛЮВАННЯ В МІКРОЕКОНОМІЦІ

## ТЕМА 1

### МОДЕЛЬ ПОПИТУ І ПРОПОЗИЦІЇ

#### Поняття попиту

Існування індивіда має на увазі задоволення його потреб, які постійно виникають і відтворюються. Під **потребою** розуміють відчуття нестачі чогонебудь, що прийняло спеціальну форму відповідно до біосоціокультурних особливостей індивіда. Попит на відміну від потреби є не лише бажанням, але і здатністю людей придбати блага. Попит відрізняється від потреби моментом платоспроможності і має на увазі взаємодію з іншими людьми як економічними агентами. Отже, **попит** – це ринковий вираз потреби, який є бажанням і здатністю людей купувати блага.

Попит залежить від багатьох факторів, зокрема: ціни ( $P$ ), доходів ( $I$ ), смаків та переваг споживачів ( $Z$ ), кількості споживачів на ринку ( $N$ ), цін на інші товари ( $P_1, \dots, P_n$ ) та очікування зміни цін ( $E$ ). Залежність попиту від вищезгаданих чинників називають **функцією попиту**:

$$Q_d = f(P, P_1, \dots, P_n, I, Z, N, E).$$

#### Попит і ціна

Для аналізу формування попиту в найпростішій формі припустимо, що дана ціна буде однорідною і виражатися в грошовій формі. **Величина попиту** – це максимальна кількість блага, яку придбали б покупці за певну ціну.

Взаємозв'язок між ціною і попитом характеризується **законом попиту**, відповідно до якого із зростанням ціни величина попиту зменшується та збільшується із зменшенням ціни. Цей закон встановлюється в межах ізольованого відношення між ціною та величиною попиту. Пояснення даного феномену можна знайти у можливості заміни одного блага іншим, ціна на яке залишилася без змін.

Залежність попиту від ціни можна виразити графічно, у формі таблиці і алгебраїчно. Розглянемо графічну форму інтерпретації даної форми залежності. Це графічне зображення називається **кривою попиту**.

Крива попиту слугує ніби розмежувальною лінією між множиною допустимих для покупця значень ціни та кількості і тих, які лежать поза межами можливостей. Тобто, **крива попиту** – це межа ринкових можливостей покупців, оскільки кожна точка на ній відбиває максимальну кількість блага, яку могли б придбати споживачі при заданій ціні, або максимальну ціну, яку могли б заплатити покупці при заданій кількості (рис. 1). Максимальна ціна, яку погодилися б заплатити покупці при заданій кількості, називається **ціною попиту**.

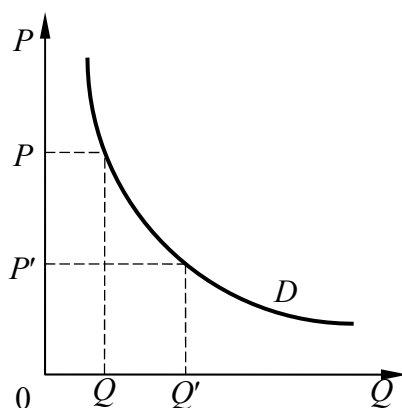


Рисунок 1. Крива попиту

Для спрощення будемо користуватися припущенням про лінійну залежність величини попиту від ціни. Аналітична форма буде виглядати так:

$$Q_d = a - bP,$$

де  $a$  та  $b$  – коефіцієнти, що відбивають значення нецінових факторів попиту. В загальному випадку крива попиту має такі властивості:  $\frac{\partial Q_d}{\partial P} < 0$ ,  $\frac{\partial^2 Q_d}{\partial P^2} \geq 0$ .

Отже, в даному контексті **попит** є залежністю між ціною і кількістю економічного блага, а під **величиною попиту** розуміють безпосередньо дану кількість економічного блага, на яку пред'являється попит.

### **Поняття еластичності**

Для аналізу поведінки покупців на ринку і, відповідно, для закономірного формування ринкового попиту дуже важливим є визначення не лише характеру

взаємозв'язку між залежною (кількість) та незалежною (ціна, дохід тощо) змінними, але й інтенсивність реакції залежної змінної у відповідь на зміну незалежної.

В якості робочого можна використовувати таке визначення поняття: **еластичність** – це показник інтенсивності реакції залежної змінної у відповідь на зміну незалежної (доходу, ціни іншого товару тощо). Аналітично **еластичність** – це відношення процентної зміни залежної змінної у відповідь на процентну зміну незалежної. Таким чином, оскільки наразі йдеться про попит і його залежність від ціни, то **коефіцієнт еластичності попиту за ціною** показує, на скільки відсотків зміниться обсяг попиту, якщо ціна товару зміниться на 1 %:

Нехай при ціні  $P_1$  обсяг попиту був  $Q_1$ , а при ціні  $P_2$  став  $Q_2$ . Тоді:

$$E_p = \frac{\left(\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} \cdot 100\%\right)}{\left(\frac{P_2 - P_1}{P_1} \cdot 100\%\right)} = \frac{\Delta Q}{Q_1} : \frac{\Delta P}{P_1} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P_1}{Q_1};$$

де  $\Delta Q = Q_2 - Q_1$ ,  $\Delta P = P_2 - P_1$ .

### ***Види еластичності***

В теорії розрізняють два види еластичності: точкову і дугову (еластичність на відрізку). *Точкова еластичність* величини попиту за ціною вимірює інтенсивність реакції попиту на нескінченно малу зміну ціни:  $\Delta P \rightarrow 0$ . Тоді:

$$E_p = \frac{dQ}{dP} / \frac{Q}{P}.$$

Звернемо увагу на те, що показник еластичності попиту за ціною має від'ємне значення, і це є відображенням оберненої залежності попиту від ціни. З метою спрощення, коли ми абстрагуємося від аномалій попиту і зміни ціни на пов'язані поміж собою товари, можна розглядати модуль даного показника:  $|E_p|$ . Зауважимо, що можлива і інша форма запису формули точкової еластичності:

$$E_p = \frac{d \ln Q}{d \ln P}.$$

Необхідність розрахунків еластичності в кожній точці кривої попиту підтверджується, зокрема, тим, що на одній і тій самій ділянці кривої при застосуванні традиційної методики еластичність буде різною, якщо ціни зростають і якщо вони знижуються. Для прикладу візьмемо таку ситуацію:

$$P_1 = 10 \text{ грн.}, \quad Q_1 = 200 \text{ од.}, \quad P_2 = 12 \text{ грн.}, \quad Q_2 = 150 \text{ од.}$$

Якщо ціна зросла з 10 грн. до 12 грн., то еластичність попиту згідно визначення буде розраховуватися так:

$$E_p = \frac{150 - 200}{200} : \frac{12 - 10}{10} = -1.25.$$

Якщо ціна зменшилася з 12 грн. до 10 грн., то еластичність попиту буде:

$$E_p = \frac{200 - 150}{150} : \frac{10 - 12}{12} = -2.$$

Дещо виправити розрахунки можна, використовуючи для розрахунків відсоткових змін середні значення ціни та попиту. *Дугова еластичність* має на увазі врахування вищезгаданої обставини:

$$E_p = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} : \frac{\frac{Q_2 + Q_1}{2}}{\frac{P_2 + P_1}{2}} = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} : \frac{Q_2 + Q_1}{P_2 + P_1} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2 + Q_1} : \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1}.$$

Для попереднього прикладу дугова еластичність дорівнюватиме  $E_p = -\frac{11}{7}$ .

### ***Еластичність і виручка продавців***

Це питання є дуже важливим для розробки ринкової стратегії фірми та здійснення маркетингу. Відомо, що дохід продавців визначається добутком проданого товару на ціну. Звідси випливає, що для того, щоб утримати дохід на певному рівні при падінні ціни, необхідно збільшити об'єм продажу у фізичному вираженні. Проте виникає запитання: в якій мірі відбувається ця компенсація?

Для цього слід виділити ділянки еластичного та нееластичного попиту. Нехай  $Q_d = a - bP$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Динаміка модуля точкової еластичності попиту за ціною ілюструється за допомогою графіка (рис. 2).

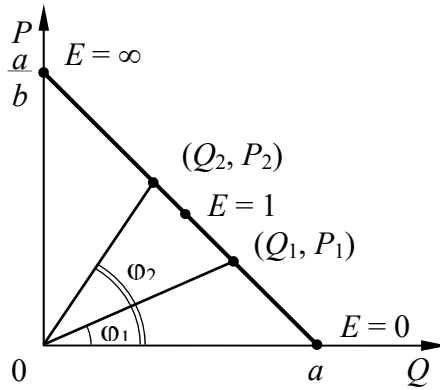


Рисунок 2. Динаміка модуля точкової еластичності попиту

Межа, за якою зміна ціни в точності компенсується зміною кількості, є точка з одиничною еластичністю. Дійсно, сукупний дохід продавця  $TR(P) = P \cdot Q_d(P)$ . Максимізуємо:  $TR(P) \rightarrow \max$ .

$$\frac{d(TR(P))}{dP} = Q_d(P) + P \cdot \frac{d(Q_d(P))}{dP} = 0;$$

$$P \cdot \frac{d(Q_d(P))}{dP} = -Q_d(P);$$

$$E = \frac{d(Q_d(P))}{Q_d(P)} \cdot \frac{dP}{P} = -1, \quad Q_d(P) \neq 0.$$

Закономірності зміни модуля показника еластичності величини попиту за ціною ілюструються в першому квадранті на рис. 3.

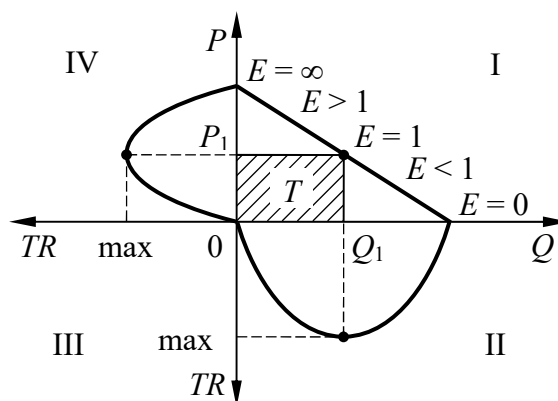


Рисунок 3. Максимізація виручки продавця

Попит, де  $|E| > 1$  будемо називати *еластичним*.

Попит, де  $|E| < 1$  будемо називати *нееластичним*.

Точка, де  $|E| = 1$  називається *еластичність одинична або унітарна*.

Якщо попит на товар еластичний, то зниження ціни веде до зростання доходу продавця. Якщо попит на товар нееластичний, то зростання ціни веде до спадання доходу продавця.

### **Поняття пропозиції**

**Пропозиція** – це ринковий вираз потреби, що полягає в бажанні та здатності економічних агентів представити товари для продажу на ринку.

**Величина пропозиції** – це максимально можлива кількість блага, яку продавці готові реалізувати при заданій ціні.

**Функцією пропозиції** називають залежність обсягу пропозиції від тих чинників, які його визначають. Серед цих чинників відзначимо такі: ціна даного товару ( $P$ ); ціна інших товарів ( $P_1, \dots, P_n$ ); ціна ресурсів ( $C$ ); зміни технології ( $H$ ); податки та дотації ( $T$ ); природні умови ( $W$ ); очікування виробників чи продавців ( $E$ ); кількість продавців ( $N$ ):

$$Q_s = f(P, P_1, \dots, P_n, C, H, T, W, N, E).$$

### **Пропозиція і ціна**

Множина точок, кожна з яких відповідає максимально можливій кількості товару, яку продавці погодилися б виставити для продажу на ринку при заданій ціні, утворюють **криву пропозиції**. Тобто, **крива пропозиції** – це множина точок, кожна з яких відповідає мінімально допустимій ціні, за якою продавці погодилися б реалізувати задану кількість товару (рис.4). Для функції пропозиції характерна пряма залежність: за більшої ціни на ринку пропонують більшу кількість товару:

$$Q_s = f(P), \quad \frac{\partial Q_s}{\partial P} > 0, \quad \frac{\partial^2 Q_s}{\partial P^2} \leq 0.$$

Множина точок, що розташовані над кривою пропозиції, є *областю допустимих* для продавців комбінацій ціни та кількості. Тоді криву пропозиції можна було б інтерпретувати як границю ринкових можливостей продавців. Одночасно вона є і кривою ціни пропозиції, а **ціна пропозиції** – це мінімально

допустима ціна, на яку погодилися б продавці при заданій кількості блага, що реалізується.

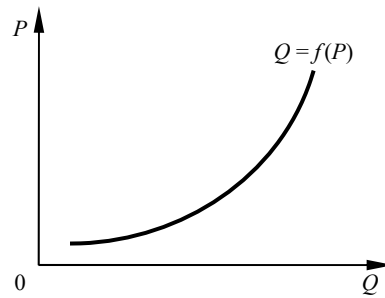


Рисунок 4. Крива пропозиції

Будемо надалі для спрощення розглядати лінійну функцію пропозиції:

$$Q_d = c + dP,$$

де  $c$  та  $d$  відповідають значенню нецінових факторів пропозиції.

## ***ВЗАЄМОДІЯ ПОПИТУ І ПРОПОЗИЦІЇ***

### ***МОДЕЛЬ МАРШАЛА***

#### ***Умова часткової рівноваги (статична рівновага)***

Англійський економіст Альфред Маршал показав, що при визначенні ціни попит і пропозиція діють одночасно. Не можна сказати, що попит або пропозиція поодиноці визначають ціну. Цей результат зображений «хрестом» («ножицями») Маршала (рис. 5.1).

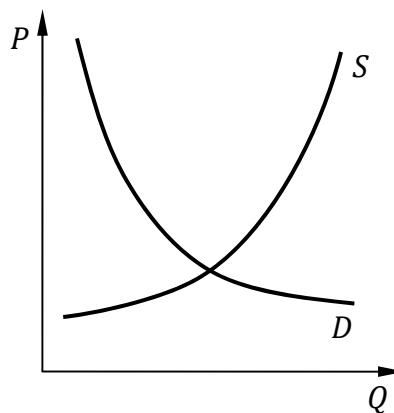


Рисунок 5.1. «Хрест» Маршала

Область допустимих значень цін та відповідних їм кількостей для обох сторін буде представляти собою перетин ринкових можливостей продавців і покупців (рис. 5.2).

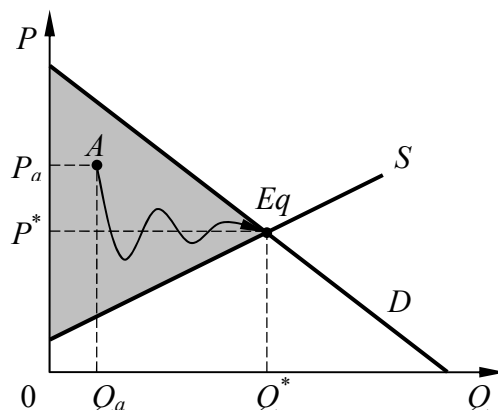


Рисунок 5.2. Взаємодія попиту і пропозиції

Пошуком взаємовигідного «компромісу» між покупцем і продавцем можна пояснити «дрейф» точки  $A$  в області допустимих значень для обох ринкових агентів. Вона буде, з одного боку, відбивати збільшення обсягу ринкових угод у фізичному вираженні, а з іншого – коливання ціни у відповідності до міри поступливості (або непоступливості) однієї з сторін. Із збільшенням обсягу ринкових угод множина значень, які може приймати ринкова ціна, зменшується, що приводить, в решті решт, до одного єдиного значення –  $Eq(P^*, Q^*)$ . При цьому значенні і продавці, і покупці опиняються на межі своїх ринкових можливостей.

Отже, **ринок знаходиться в рівновазі** тоді, коли за деякого обсягу ринкових угод у фізичному вираженні ціна попиту дорівнює ціні пропозиції. Або, **ринок знаходиться в рівновазі**, коли за деякої ціни величина запланованих попиту і пропозиції рівні. Це відбиває погодженість частинних планів економічних агентів. У випадку лінійних функцій попиту і пропозиції:

$$\begin{cases} Q_d = a - bP, \\ Q_s = c + dP. \end{cases}$$

Тоді за визначенням:

$$Q_d(P) = Q_s(P),$$

або

$$a - bP = c + dP.$$

Звідси маємо:

$$P^* = \frac{a-c}{b+d}, \quad Q^* = \frac{bc+da}{b+d}. \quad (1)$$

Варто відзначити, що встановлення рівноважної ціни і визначення відповідного їй обсягу ринкових угод у фізичному вираженні не є цілями покупців і продавців. Взаємодія економічних агентів на ринку здійснюється відповідно до принципу самокоординації, який можна розуміти в сенсі «невидимої руки», яка контролює поведінку індивідів у масштабах суспільства.

## *ДИНАМІЧНА РІВНОВАГА*

### *Дискретна (динамічна) павутиноподібна модель*

Ринкова рівновага не досягається відразу, це – процес. Одна з можливих моделей такого процесу називається **павутиноподібною моделлю**, або **процесом намацування Курно**. Дискретна модель будується на основі припущення про запізнення пропозиції по відношенню до змін в попиті. Припустимо, що відбулось несподіване для продавців підвищення попиту, наприклад, в результаті зростання ціни на товари-замінники, то величина пропозиції в заданий ринковий період залишиться незмінною, оскільки припускається рівність нулеві (незмінність) запасів. Тоді коректування буде здійснюватися лише за рахунок ринкової ціни. В наступному (першому після зміни попиту) ринковому періоді продавці, плануючи свою величину пропозиції, будуть орієнтуватися вже на ціну, яка склалася в попередньому періоді. Проте при заданій ціні їм не вдасться реалізувати всю вироблену кількість блага. Оскільки діє припущення про врівноваження величини попиту і пропозиції в кожному ринковому періоді, то ринкова ціна має знизитися до рівня ціни попиту, що відповідає виробленій кількості. Продавці, що орієнтуються на цю останню ціну, в другому після зміни попиту періоді зменшують заплановану величину пропозиції, а це знову викличе зростання цін в наступному періоді. Так буде продовжуватися до тих пір, поки ціна і обсяг ринкових угод не наблизяться до деякого рівня, для якого приватні плани продавців і покупців за обома параметрами можуть бути погодженими.

Аналітично павутиноподібна модель може бути представлена так. У випадку, коли функція попиту і пропозиції задані у вигляді:

$$Q_d = a - bP, \quad Q_s = c + dP.$$

Умова рівноваги на ринку

$$Q^* = a - bP^* = c + dP^* \quad (2)$$

перетворюється в співвідношення з урахуванням запізнення по часу пропозиції відносно попиту:

$$Q(t) = a - bP(t) = c + dP(t - 1). \quad (3)$$

Відхилення від рівноважної ціни і рівноважного обсягу ринкових угод у фізичному вираженні виражається, відповідно, такими рівняннями:

$$p(t) = P(t) - P^*, \quad (4)$$

$$q(t) = Q(t) - Q^*. \quad (5)$$

Використовуючи ці позначення, отримаємо:

$$q(t) = bp(t) = dp(t - 1). \quad (6)$$

Тоді для періоду  $t = 1$  відхилення фактичної ціни від рівноважної, яка склалася в попередній  $t = 0$ :

$$p(1) = -\frac{d}{b}p(0). \quad (7)$$

Аналогічно можна визначити відхилення для періоду  $t = 2$ :

$$p(2) = -\frac{d}{b}p(1) = \left(-\frac{d}{b}\right)^2 p(0). \quad (8)$$

Таким чином, відхилення фактичної ціни від рівноважної в період  $t$ , що виражається через вихідне відхилення фактичної ціни від потенційно рівноважної:

$$p(t) = \left(-\frac{d}{b}\right)^t p(0), \quad (9)$$

або

$$P(t) = P^* + (P(0) - P^*) \left(-\frac{d}{b}\right)^t. \quad (10)$$

Дослідимо формулу (9), коли будемо мати різні відношення параметрів  $b$  і  $d$ .

1.  $0 < \frac{d}{b} < 1$ . У цьому випадку, маємо, що після зміни ціни при  $t \rightarrow \infty$ , ціна  $P(t) \rightarrow P^*$  (до рівноважної ціни).

**Рівновага** ринку вважається **стабільною** тоді, коли в стані рівноваги еластичність попиту за ціною вища еластичності пропозиції за ціною. А це еквівалентне такому співвідношенню:  $b > d$  ( $|E_d| > |E_s|$ ). Графічно ці види рівноваги представлені на рис. 6. Точками  $C_t$  позначаються значення ціни в моменти часу  $t = 0, 1, \dots$ . Бачимо, що з наближенням до точки рівноваги амплітуда коливань ціни зменшується й ціна прямує до рівноважної.

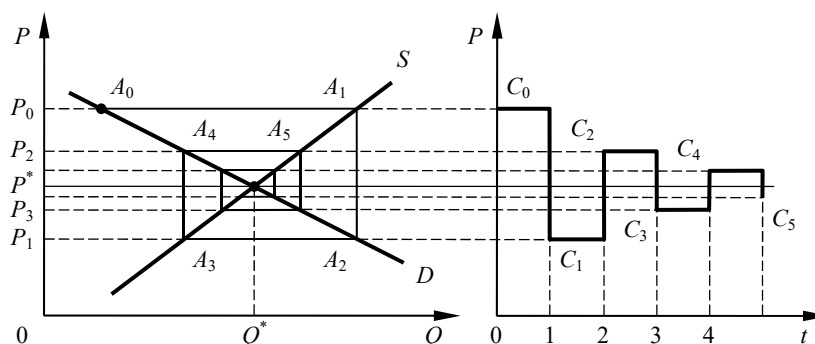


Рисунок 6. Стабільна ринкова рівновага

2.  $\frac{d}{b} > 1$ . У цьому випадку:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{d}{b}\right)^t = \infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (P(t) - P^*) = \pm\infty$ .

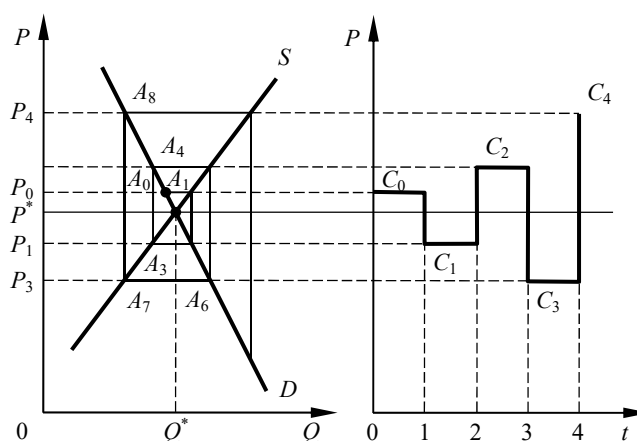


Рисунок 7. Нестабільна ринкова рівновага

**Рівновага** ринку називається **нестабільною**, якщо в результаті впливу деякого фактору амплітуда коливань ціни навколо рівноважної збільшується, що,

відповідно, збільшує відхилення фактичного обсягу ринкових угод від рівноважного. А це можливе тоді, коли еластичність попиту за ціною в умовах рівноваги є нижчою еластичності пропозиції за ціною, тобто  $b < d$  ( $|E_d| < |E_s|$ ). Графічно нестабільна рівновага представлена на рис. 7.

$$3. \frac{d}{b} = 1.$$

**Рівновага** може бути названою **квазістабільною**, якщо в результаті впливу деякого фактору на попит, відхилення фактичної ціни від рівноважної виявляється постійним, оскільки еластичність попиту і пропозиції за ціною в умовах рівноваги є однаковими, що відповідає співвідношенню  $b = d$ . Графічно квазістабільність рівноваги представлена на рис. 8.

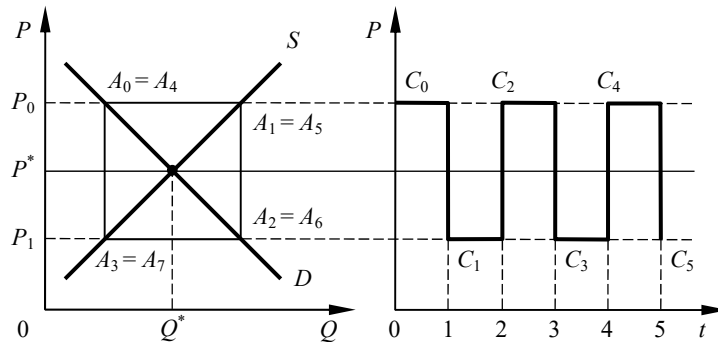


Рисунок 8. Квазістабільна ринкова рівновага

З економічної точки зору стабільність (або нестабільність) рівноваги обумовлена порівняльною інтенсивністю реакції попиту і пропозиції у відповідь на зміни в ціні. Чим споживачі більшою мірою є консервативними у своїх смаках та перевагах, чим менше замінників даного блага є в споживанні, тим нижчою є еластичність попиту за ціною, тим менш стабільною виявляється рівновага на ринку. Тому, як правило, нестабільна рівновага є характерною для галузей традиційної економіки, а також тих галузей, що виробляють товари, які не мають близьких замінювачів.

## **ДЕРЖАВНЕ РЕГУЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ПОПИТУ І ПРОПОЗИЦІЇ**

Варіанти державного регулювання розглянемо в таких формах:

- 1) оподаткування;
- 2) контроль за цінами;
- 3) квотування;
- 4) субсидіювання.

### **Опосередковане (непряме) оподаткування**

Дане питання ми будемо розглядати на прикладі опосередкованого податку, який стягується з розрахунку деякої фіксованої в абсолютному значенні суми з одиниці блага, яке реалізується. Нехай  $t$  – ставка непрямого податку. Функціональна залежність величини пропозиції блага від ціни,  $Q_s = c + dP$ , має зазнати певної модифікації. Ціна як функція кількості:

$$P = \frac{Q_s}{d} - \frac{c}{d}.$$

При кожному з можливих значень величини пропозиції  $Q_s$  нова ціна пропозиції має бути вищою за попередню на величину, що відповідає ставці непрямого податку:

$$P'_s = P_s + t.$$

Отже,

$$P = \frac{Q_s}{d} - \frac{c}{d} + t.$$

Тоді нова функція пропозиції буде мати вигляд:

$$Q_s = c + d(P - t).$$

За умовою рівноваги  $Q_s(P, t) = Q_d$ , то в результаті отримаємо нове значення рівноважної ціни:

$$P_t^* = \frac{a - c + dt}{b + d}.$$

Значення нової рівноважної ціни змінилось порівняно з (1) не на величину ставки опосередкованого податку, а на величину

$$\Delta p_t^* = \frac{dt}{b+d} = \frac{t}{1+\frac{b}{d}}. \quad (11)$$

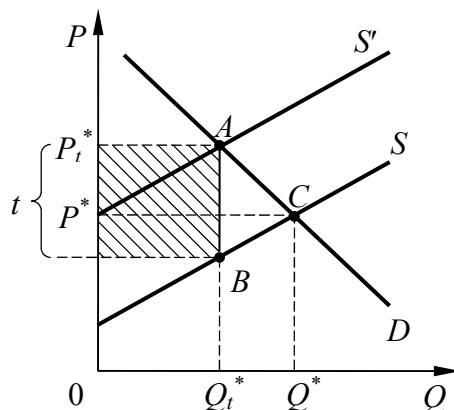


Рисунок 9. Опосередковане оподаткування

Тобто, зміна ціни в результаті введення непрямого податку залежить від співвідношення абсолютних значень показників еластичності попиту і пропозиції за ціною в точці рівноваги. Формально даний непрямий податок сплачує продавець. Проте насправді відбувається розподіл податкового тягаря між покупцями і продавцями в пропорції, що відповідає відношенню показників еластичностей попиту і пропозиції в точці рівноваги (рис. 9).

### ***Контроль за цінами***

Контроль за цінами може бути двох типів: призначення ціни та встановлення граничної ціни. Розглянемо лише другий випадок, оскільки перший завжди можна до нього звести. Контроль за цінами має дві варіації в залежності від того, на якому рівні відносно потенційно рівноважного встановлюється регульована ціна: «стеля» цін та «підлога» цін. Встановлення «стелі» цін має сенс тоді, коли регульована ціна є нижчою за рівноважну, тоді як для «підлоги» цін справедливим є обернене: регульована ціна (наприклад, ставка заробітної плати) має бути вищою за рівноважну.

## *Дотації*

У цьому випадку держава надає за кожну виготовлену одиницю товару  $h$  грошових одиниць. Тоді виробник погоджується продавати кожну одиницю продукції за ціною, яка на  $h$  одиниць менша, ніж до введення дотації. Тобто, функція пропозиції у лінійному випадку матиме вигляд:

$$Q_s = c + d(P + h).$$

Нова ринкова ціна:

$$P_h^* = \frac{a - c - dh}{b + d}.$$

Тепер покупець буде сплачувати за товар меншу ціну, а саме менше на величину

$$\Delta p_h^* = -\frac{dh}{b + d} = -\frac{h}{1 + \frac{b}{d}}.$$

## *Субсидії*

**Субсидії** – надання допомоги споживачеві в розмірі  $f$  грошових одиниць на кожну одиницю товару, що придбав споживач. У випадку отримання субсидії покупець погодиться сплачувати ціну на даний товар, яка більша на  $f$  грошових одиниць, ніж би він сплачував до введення субсидії. Тобто, тепер змін зазнає функція попиту, а саме:

$$Q_d = a - b(P - f).$$

Аналіз змін, які при цьому відбуваються на ринку даного блага є аналогічними, як і у випадках введення податку чи дотацій.

## *Імпортна квота*

**Імпортна квота** – це обмеження попиту на обсяг іноземних товарів, які можуть бути продані на внутрішньому ринку держави.

Нехай зберігається припущення про лінійний зв'язок обсягів попиту і пропозиції та ціни, а  $P^*$  та  $Q^*$  – рівноважні параметри ринку даного товару. Розглянемо випадок, коли держава з метою обмеження обсягу продажу даного

товару вводить ліміт  $Q_L$ , вище якого ввозити товар на територію держави забороняється. Зрозуміло, що  $Q_L < Q^*$ , бо в протилежному випадку подібний захід не мав би сенсу. Вплив обмеження позначиться на функції пропозиції. При цьому на ринку встановлюється нова рівноважна ціна  $P_L^* > P^*$  (рис. 10).

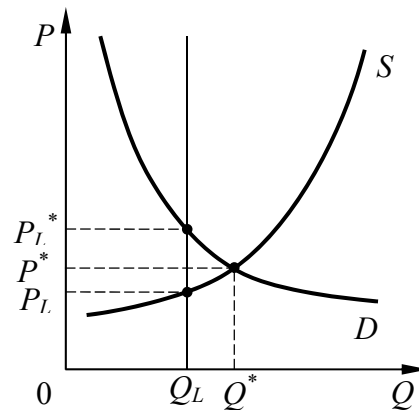


Рисунок 10. Імпортна квота та еквівалентний податок

Варто зауважити, що такого самого ефекту, як і від введення квоти, можна було б досягнути і від введення податку (рис. 10). Ставка податку (еквівалентного)  $t$  у цьому випадку визначається із співвідношення:

$$t = P_L^* - P_L,$$

де (для випадку лінійних функцій):

$$P_L = \frac{Q_L - c}{d}, \quad P_L^* = \frac{a - Q_L}{b}.$$

Тобто, еквівалентний податок можна вирахувати як різницю між ціною попиту  $P_L^*$  та пропозиції  $P_L$  за умови обсягів продажу, що дорівнює величині квоти  $Q_L$ .

## ТЕМА 2

### ТЕОРІЯ СПОЖИВАННЯ

Споживачі є одним з основних учасників будь-якої економічної системи. Будемо вивчати математичні моделі поведінки *одиночного споживача*, в ролі якого може виступати окремий індивід, родина або домашнє господарство, що мають спільний споживчий бюджет та разом формують систему переваг відносно наявних споживчих благ.

#### *Простір товарів та відношення переваг*

Під **товаром** будемо розуміти споживче благо або послугу, що надійшла в продаж у певний час у певному місці. Під **споживачем** будемо розуміти групу індивідів, які спільно розділяють свій дохід на закупівлю товарів. Головна проблема раціонального ведення господарства споживачем полягає у вирішенні питання про те, яку кількість наявних товарів він повинен придбати за певний період часу при заданих цінах і відомому споживчому доході. Математичні моделі подібної поведінки та наслідки їх аналізу складають **теорію особистого споживання**.

Вважається, що існує скінчена кількість наявних товарів, які мають властивість довільної подільності (можливо купити будь-яку кількість кожного з них). Вибір споживача можна охарактеризувати набором товарів  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ , де  $x_i$  – кількість  $i$ -го товару, яка придбана споживачем. Тоді всі можливі набори товарів є точками векторного простору товарів  $X$ , що є підмножиною  $n$ -вимірного простору  $\mathbf{R}^n$ .

Вибір споживачем деякого набору товарів залежить не тільки від його потреб, а частково і від його смаків. Він характеризується суб'єктивним **відношенням переваги**, що позначається  $\succsim$ , і є парним порівнянням можливих партій товарів. Якщо  $x \succsim y$ , де  $x, y \in X$ , то це означає, що споживач віддає перевагу набору товарів  $x$  перед набором  $y$  ( $x \succ y$ ), або ж не робить між ними різниці ( $x \sim y$ ). У першому випадку говорять, що  $x$  **строго переважає** (тоді  $x \succsim y$ , але відношення  $y \succsim x$  не має місця), а в другому випадку відношення  $\sim$

називається **відношенням байдужості** і  $x \sim y$  означає, що одночасно  $x \succcurlyeq y$  та  $y \succcurlyeq x$ .

В математичній теорії споживання вважається, що відношення переваги задовольняє низку аксіом, що втілюють природні властивості вибору споживача та забезпечують можливість дедуктивного розвитку повноцінної теорії.

**A 1.** Відношення переваги є **повним квазіпорядком** в просторі товарів.

**A 2.** Відношення переваги  $\succcurlyeq$  є неперервним, тобто множина  $\{(x, y) \in X \times X: x \succ y\}$  є відкритою в декартовому добутку  $X \times X$ .

Аксіома **A 1** означає, що  $\succcurlyeq$  є бінарним відношенням в просторі  $X$ , яке має такі властивості:

а) відношення  $\succcurlyeq$  є *рефлексивним*;

б) відношення  $\succcurlyeq$  є *транзитивним*;

в) для будь-якої пари наборів  $x$  та  $y$  з  $X$  або  $x \succcurlyeq y$ , або  $y \succcurlyeq x$ .

Неперервність переваг **A 2** означає, що коли споживач віддає перевагу набору  $x^0$  перед набором  $y^0$ , то він буде віддавати перевагу набору  $x$  перед набором  $y$ , якщо  $x$  та  $y$  досить близькі до  $x^0$  та  $y^0$  відповідно.

Пара  $(X, \succcurlyeq)$ , тобто простір товарів з відношенням переваги певного споживача, називається **полем переваг** цього споживача.

Множина  $P_x = \{y \in X: y \succcurlyeq x\}$  при  $x \in X$  називається **переважною множиною відносно набору  $x$** , а множина  $NP_x = \{y \in X: x \succcurlyeq y\}$  – **непереважною множиною відносно набору  $x$** .

Нехай  $(X, \succcurlyeq)$  – поле переваг і  $C$  – підмножина  $X$ . Елемент  $x$  множини  $C$  називається **найбільш (найменш) переважним** в  $C$ , якщо  $x \succcurlyeq y$  ( $y \succcurlyeq x$ ) для всіх  $y \in C$ .

Позначимо через  $M(C)$  множину всіх найбільш переважних елементів у  $C$ , а через  $m(C)$  – відповідно, множину найменш переважних елементів.

*Теорема 1.* Якщо відношення  $\succcurlyeq$  в умовах попереднього означення неперервне і множина  $C$  є компактною, то  $C$  містить хоча б один найбільш (найменш) переважний елемент та множина  $M(C)$  ( $m(C)$ ) є компактною.

Для поля переваг  $(X, \succsim)$  найбільш переважний елемент  $x$  в  $X$  називається **точкою насичення**. Якщо ж  $X$  не має точки насичення, то має місце **ненасиченість**.

Нехай множина  $X$  поля переваг  $(X, \succsim)$  є опуклою.

Поле  $(X, \succsim)$  називається **опуклим**, якщо з  $x \succsim y$  для  $x, y \in X$  випливає, що  $\alpha x + \beta y \succsim y$  для  $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ .

Поле  $(X, \succsim)$  називається **строго опуклим**, якщо з  $x \succ y$  для двох різних  $x, y \in X$  випливає, що  $\alpha x + \beta y \succ y$  для  $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$ .

Припущення опуклості є в економіці традиційними. Вони відображають певні економічні закономірності, а також грають важливу технічну роль у економіко-математичних моделях та їх аналізі.

*Теорема 2.* Якщо  $(X, \succsim)$  – опукле поле переваг і  $C$  є опуклою підмножиною  $X$ , то  $M(C)$  є опуклою підмножиною в  $C$ . При цьому якщо  $(X, \succsim)$  – строго опукле, то в  $M(C)$  існує не більше одного найбільш переважного елемента. Зокрема, в  $X$  існує не більше однієї точки насичення.

У застосуванні полів переваг споживачів  $(X, \succsim)$  найчастіше доводиться мати справу із ситуацією, коли простором товарів  $X$  є невід’ємний ортант  $\mathbf{R}_+^n$  простору  $\mathbf{R}^n$ , а вибір споживача стиснутий заданим *обмеженим бюджетом*. До бюджетних факторів належать ціни  $p_i$  на товари виду  $i, i = 1, \dots, n$ , а також рівень споживчого доходу  $I$ . Якщо ввести до розгляду вектор цін  $p = (p_i)_1^n$ , то споживач при виборі набору товарів  $x$  повинен враховувати бюджетне обмеження вигляду:

$$px = p_1x_1 + \dots + p_nx_n \leq I. \quad (1)$$

Надалі домовимося, що вектор цін  $p$  – це є вектор-рядок.

Таким чином, *допустимі набори товарів (партії товарів чи споживчі меню)* в просторі товарів  $\mathbf{R}_+^n$  задовольняють обмеження (1) і утворюють *споживчий симплекс*:

$$S_n = \{x \in \mathbf{R}_+^n: px \leq I\}, \quad (2)$$

що є замкненою обмеженою опуклою множиною в  $\mathbf{R}^n$  (опуклим компактом в  $\mathbf{R}^n$ ).

## Порядкові функції корисності

Нехай  $(X, \succsim)$  – деяке поле переваг,  $X \subset \mathbf{R}_+^n$  з відношенням переваги, яке задовольняє аксіому *A 1*.

Числова функція  $U: X \rightarrow \mathbf{R}$ , яка визначена на  $X$ , називається **індикатором переваги**  $\succsim$ , або **функцією корисності**, яка зображує відношення переваги  $\succsim$ , якщо для всіх  $x, y \in X$  виконується:

$$U(x) \geq U(y) \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad x \succsim y. \quad (1)$$

Таким чином, функція корисності дає нам числове втілення порядкової структури поля переваг. Якщо функція корисності  $U$  зображує квазіпорядок переваги  $\succsim$ , то множина рівней функції  $U$  є класами байдужості для  $\succsim$ . Тобто,

$$U(x) = U(y) \Leftrightarrow x \sim y, \quad x, y \in X. \quad (2)$$

*Теорема 1. (I)* Якщо  $U(x)$ ,  $x \in X$ , є функцією корисності для поля переваг  $(X, \succsim)$  і  $f: U(X) \rightarrow \mathbf{R}$  є строго зростаючою функцією, то суперпозиція  $f \circ U(x) = f(U(x))$  також є функцією корисності, яка зображує поле переваг  $(X, \succsim)$ . *(II)* Якщо  $U(x)$  та  $V(x)$ ,  $x \in X$ , – дві функції корисності, то існує така строго зростаюча дійсна функція  $f(t)$ , яка визначена на  $U(X)$ , що  $V(x) = f \circ U(x) = f(U(x))$ ,  $x \in X$ .

Одним з основних результатів теорії споживання та сучасної теорії корисності при прийнятті рішень є теорема, яка належить Жерару Дебре.

*Теорема 2 (Дебре).* Якщо множина  $X$  поля переваг  $(X, \succsim)$  є зв'язною, а відношення переваги  $\succsim$  є неперервним (тобто, задовольняє аксіомі *A 2* або еквівалентним їй вимогам), то існує функція корисності  $U(x)$ ,  $x \in X$ , яка зображує  $(X, \succsim)$ .

Зазвичай вважається, що відношення переваги  $\succsim$  задовольняє **умові монотонності** (*A 3*): якщо  $x \geq y$  ( $x > y$ ), то  $x \succsim y$  ( $x > y$ ).

Властивість *A 3* означає, що споживач буде надавати перевагу більшій кількості товарів: якщо  $v > 0$ , то  $x + v > x$  для всіх  $x$  при  $x + v$ ,  $x \in X$ .

Очевидно, що перевага  $\succsim$  є монотонною тоді і лише тоді, коли функція корисності, яка зображує поле переваг  $(X, \succsim)$  є монотонною: якщо  $x \geq y$  ( $x > y$ ),

то  $U(x) \geq U(y)$  ( $U(x) > U(y)$ ). При цьому, якщо функція корисності є диференційованою, то існує похідна

$$MU(x) = \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)_1^n = (MU_i(x))_1^n,$$

що називається **маргінальною корисністю** (при цьому  $MU_i(x) = \frac{\partial U}{\partial x_i}$  називається ***i*-ою маргінальною корисністю**). Тоді з вищезгаданої властивості монотонності, яка еквівалентна монотонності **A 3**, випливає, що вектор маргінальної корисності є додатним:  $MU(x) > 0$ ,  $x \in X$ .

У випадку, коли  $X = \mathbf{R}_+^n$ , властивість монотонності **A 3** називається **ненасичуваністю** споживача.

Відношення переваги  $\succsim$  в  $(X, \succsim)$  є опуклим тоді і лише тоді, коли функція корисності, яка зображує  $(X, \succsim)$ , є квазіугнутою. Відношення переваги  $\succ$  є строго опуклим тоді і лише тоді, коли відповідна функція корисності  $U$  є строго квазіугнутою. Проте квазіугнуті функції порівняно незручні для роботи: вони утворюють клас, який є занадто великим для того, щоб успішно застосовувати ряд добре розроблених методів. Значно зручніше працювати з угнутими та строго угнутими функціями, які відповідно визначаються умовами: для довільних  $x, y \in \mathbf{R}_+^n$ , виконується:

$$U(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y), \quad \lambda \in [0, 1];$$

$$U(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y), \quad \lambda \in (0, 1).$$

У подальшому розгляді будемо вважати, що функція корисності споживача  $U(x)$  є строго угнутою (умова **A 4**), а також припускати, що виконується більш сильна умова (**A 5**): функція корисності  $U(x)$  є двічі неперервно диференційованою та її **матриця Гессе**

$$\ddot{U}(x) = \left( \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_1^n$$

є від'ємно визначеною:  $\ddot{U}(x) \ll 0$ ,  $x \in \mathbf{R}_+^n$ .

Зауважимо, що з (**A 5**) випливає умова (**A 4**), а також той факт, що діагональні елементи матриці Гессе є від'ємними:

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i^2} < 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Умова (3) виражає відомий в описово-інструментальній економіці *перший закон Госсена*, згідно з яким маргінальна корисність будь-якого товару зменшується зі збільшенням споживання цього товару.

Наведемо приклади найбільш поширених у застосуванні функцій корисності (ФК), які задовольняють вищевказаним умовам.

**Приклад 1.** *Квадратична ФК.* Функція має вигляд:

$$U(x) = ax + \frac{1}{2}x^T Bx,$$

де матриця  $B$  є від'ємно визначеною,  $B \ll 0$ , а вектор  $a + x^T B$  є додатним,  $a + x^T B > 0$ .

**Приклад 2.** *Мультиплікативна ФК.*

$$U(x) = a \prod_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^{\alpha_i},$$

де  $a > 0$ ,  $\alpha_i \in (0, 1)$ ,  $x_i > \bar{x}_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тут, і далі  $\bar{x}_i$  – базове споживання  $i$ -го товару.

**Приклад 3.** *Логарифмічна ФК (або ФК Бернуллі).* Це функція вигляду:

$$U(x) = \sum_{i=1}^n a_i \log_b(x_i - \bar{x}_i), \quad b > 1,$$

де параметри  $a_i$  та  $\bar{x}_i$  задовольняють умовам:  $a_i > 0$ ,  $x_i > \bar{x}_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Приклад 4.** *ФК з постійною еластичністю.* Ця функція має вигляд:

$$U(x) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 - b_i} (x_i - \bar{x}_i)^{1-b_i},$$

де параметри  $a_i$ ,  $b_i$  та  $\bar{x}_i$  задовольняють обмеженням:  $a_i > 0$ ,  $0 < b_i < 1$ ,  $x_i > \bar{x}_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

### ***Моделі раціональної поведінки споживача***

Кожна людина у процесі прийняття індивідуального рішення про витрачання свого доходу керується власними смаками та уподобаннями. Ресурси споживача, як і будь-якого іншого економічного агента, є обмеженими відносно його бажань. І хоча важко передбачити, на що конкретно споживач вирішить витратити свій дохід, проте можна сформулювати основні принципи, які

визначають те чи інше рішення споживача, а також ті умови, за яких забезпечується, наприклад, максимізація його корисності.

### *Неокласична модель споживання (за Маршалом)*

Якщо функція корисності  $U(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}_+^n$  є двічі неперервно диференційованою та строго опуклою, а бюджетне обмеження має вигляд  $(p, x) \leq I$ , де  $p$  – вектор-рядок цін, а  $I$  – дохід (капітал) споживача, що може бути використаний на придбання товарів, то *раціональна поведінка споживача згідно неокласичного підходу* визначається такою задачею опуклого програмування:

$$\begin{cases} U(x) \rightarrow \max, \\ (p, x) \leq I, \\ x \in \mathbf{R}_+^n, \end{cases} \quad (1)$$

або в розгорнутій формі:

$$\begin{aligned} U(x_1, \dots, x_n) &\rightarrow \max, \\ p_1 x_1 + \dots + p_n x_n &\leq I, \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

Оскільки допустима множина векторів для даної задачі є компактною і опуклою, то вона має єдиний розв'язок  $x^*$ . Необхідні та достатні умови оптимальності розв'язку  $x^*$  задачі (1) дає теорема Куна-Таккера.

Розглянемо для задачі (1) функцію Лагранжа

$$L(x, \lambda) = U(x) + \lambda(I - (p, x)), \quad (3)$$

де  $\lambda$  – множник Лагранжа. Необхідні умови оптимальності розв'язку  $x^*$  та множника  $\lambda^*$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} &= MU(x^*) - \lambda^* p^T \leq 0, \\ \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} &= I - (p, x^*) \geq 0; \\ \left( \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} \right)^T x^* &= \left( (MU(x^*))^T - \lambda^* p \right) x^* = 0, \\ \lambda^* \frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} &= \lambda^* (I - (p, x^*)) = 0, \\ x^* &\geq 0, \quad \lambda^* \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

З наведених умов оптимальності (4) випливає, що мають місце такі співвідношення:

$$MU_i(x^*) \leq \lambda^* p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

причому

$$\begin{aligned} MU_i(x^*) &= \lambda^* p_i & \text{при } x_i^* > 0, \\ MU_i(x^*) &< \lambda^* p_i & \text{при } x_i^* = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким чином, для всіх закуплених товарів, коли  $x_i^* > 0$  маємо, що відношення часткових маргінальних корисностей до відповідних цін є сталим:

$$\frac{MU_i(x^*)}{p_i} = \lambda^*, \quad \forall i, \quad x_i^* > 0. \quad (6)$$

Вважаючи, що деякі товари були куплені, маємо, що оптимальне значення множника Лагранжа є додатним:  $\lambda^* > 0$ , і, отже, з четвертої умови в (4) при оптимальному споживанні весь дохід  $I$  повинен бути витрачений:  $I = (p, x^*)$ .

Не порушуючи загальності можна вважати, що споживач закуповує всі види товарів. Тоді умови оптимальності (4) приймають вигляд системи рівнянь:

$$\begin{aligned} MU_i(x_1^*, \dots, x_n^*) - \lambda^* p_i &= 0, & i = 1, 2, \dots, n; \\ I - \sum_{i=1}^n p_i x_i^* &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Отже, **рівновага споживача** відповідає такій комбінації придбаних товарів, яка максимізує корисність при заданому бюджетному обмеженні.

Оптимальний множник Лагранжа  $\lambda^*$  можна інтерпретувати на основі загальної теорії гладких задач математичного програмування як **граничну (маргінальну) корисність додаткового доходу**:

$$\lambda^* = \frac{\partial U(x^*(p, I))}{\partial I}. \quad (8)$$

У формулі (8) позначення  $x^*(p, I)$  вказує, що оптимальний розв'язок задачі (1) залежить від параметрів задачі  $p$  та  $I$ . Величину (8) також часто називають **граничною (маргінальною) корисністю грошей** споживача.

Система рівнянь (7) складається з  $(n + 1)$ -го рівняння і виражає не лише необхідні, але й достатні умови оптимальності задачі (1). Достатні умови оптимальності другого порядку для задачі (1) формулюються в термінах отороченої цінами матриці Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} \ddot{U}(x^*) & -p^T \\ -p & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

і згідно цим умовам перші  $n$  головних мінорів цієї матриці повинні змінювати знак, в той час як перший мінор повинен бути від'ємним, що виконується, оскільки матриця  $\ddot{U}(x^*)$  є від'ємно визначеною.

### *Геометрична інтерпретація задачі Маршала*

**Крива байдужості** – це лінія рівної корисності, усі точки якої характеризують набори товарів, які забезпечують споживачеві один і той самий рівень корисності.

**Бюджетна лінія** – це геометричне місце точок, які характеризують усі такі набори товарів  $x$ , на придбання яких за цінами  $p$  споживач повністю витрачає свій дохід  $I$ .

Для геометричної інтерпретації задачі (1) розглянемо випадок двох товарів  $n = 2$ . Тоді оптимальне споживання задовольняє систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} - \lambda^* p_1 &= 0, \\ \frac{\partial U(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} - \lambda^* p_2 &= 0, \\ I - p_1 x_1^* - p_2 x_2^* &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Розв'язок лежить на бюджетній прямій, що описується третім рівнянням в (10), і є точкою її дотику до кривої байдужості (множині точок нечутливості)

$$U(x_1, x_2) = U(x_1^*, x_2^*) = \text{const.} \tag{11}$$

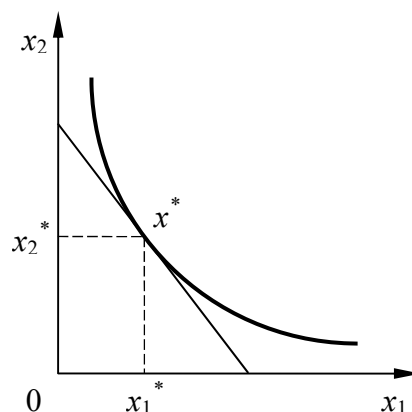


Рисунок 1. Рівновага споживача

Тобто, бюджетна лінія є *дотичною* до кривої байдужості в точці  $x^*$  (рис. 1).

Точка, в якій споживач перестає розглядати додаткове споживання як таке, що приносить йому корисність, називається **точкою насичення**.

### *Функції попиту та граничної вартості грошей*

Якщо ціни на товари  $p$  та дохід  $I$  змінюються, відповідно, у деякій області  $P$  ортанта  $\mathbf{R}_+^n$ , та на проміжку  $[I_1, I_2] \in \mathbf{R}_+$ , то споживач має справу із сім'єю задач

$$U(x) \rightarrow \max, \quad (p, x) \leq I, \quad (p, I) \in P \times [I_1, I_2]. \quad (12)$$

За тих самих припущеннях відносно функції корисності  $U$ , що й раніше, кожна із задач (12) має єдиний розв'язок відносно вектора споживання  $x^*(p, I)$  із відповідним оптимальним множником  $\lambda^*(p, I)$ .

Функції  $\xi(p, I) = x^*(p, I)$  та  $\Lambda(p, I) = \lambda^*(p, I)$  при  $(p, I) \in P \times [I_1, I_2] = D$ , називаються **функцією попиту та граничної (маргінальної) вартості грошей** споживача відповідно. Тут  $\xi(p, I) = (\xi_1(p, I), \xi_2(p, I), \dots, \xi_n(p, I))^T$ .

Однією з найбільш важливих властивостей функції попиту  $\xi(p, I)$  є її *однорідність нульового степеня відносно всіх цін та доходу*:

$$\xi(\alpha p, \alpha I) = \xi(p, I), \quad \text{при всіх } \alpha > 0. \quad (13)$$

Внаслідок однорідності попит на будь-який вид товару залежить лише від відношення цін, які називаються **відносними цінами**, та від відношення грошового доходу до деякої ціни, що називається **реальним доходом** споживача. Обравши деякий  $i$ -ий товар в якості одиниці рахунку, та покладаючи коефіцієнт пропорційності  $\alpha = 1/p_i$ , можна подати функцію попиту на цей товар у вигляді:

$$\xi_i = \xi_i(p_1/p_i, \dots, 1, \dots, p_n/p_i, I/p_i). \quad (14)$$

Цей вираз показує залежність попиту від відносних цін та реального доходу. Зустрічається випадки, коли за  $\alpha$  доцільно брати, наприклад,  $1/\sum_{i=1}^n p_i$ ,  $1/I$ .

Щоб моделювати поведінку споживача, слід розмежовуватися дією двох ефектів, які спостерігаються при зміні ціни на один з товарів. **Ефект доходу** – це тільки ті зміни у споживанні, що спричинені зміною реального доходу споживача

під впливом руху цін. **Ефект заміщення** – це тільки ті зміни у споживанні товару, які є результатом зміни цін цього товару відносно цін на інші товари. Ці два ефекти діють одночасно. Тому реальна спрямованість зміни споживання під впливом зміни ціни буде рівнодіючою ефектів доходу та заміщення.

Якщо мова йде про якісний товар, то щодо такого товару обидва ефекти діють в одному напрямку. Що ж до впливу зміни ціни на споживання неякісних товарів, то спрямованість впливу ефектів доходу та заміщення є протилежною. Якщо ефект заміщення має більший вплив, то із зростанням ціни споживання  $i$ -го товару зменшується, а при її зниженні – збільшується. Однак може скластися ситуація, коли переважає ефект доходу, тоді при зростанні ціни зростає  $i$  споживання, а при її зменшенні споживання також зменшується.

Неякісний товар, для якого ефект доходу переважає над ефектом заміщення, називається **Гіффеновим товаром**. Товар Гіффена має одночасно відповідати таким вимогам:

- ✓ бути неякісним в уявленні споживача;
- ✓ бути значною часткою його витрат.

Товар  $i$  називається **нормальним (товаром Гіффена)**, якщо  $\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} < 0$  ( $\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} > 0$ ). Тобто, при збільшенні ціни попит на нормальний товар зменшується, а на товар Гіффена збільшується. Товар  $i$  називається **цінним (малоцінним)**, якщо  $\frac{\partial \xi_i}{\partial I} > 0$  ( $\frac{\partial \xi_i}{\partial I} < 0$ ). Тобто, при збільшенні доходу попит на цінний товар збільшується, а на малоцінний зменшується. З огляду на визначення товар Гіффена може бути лише малоцінним.

Існує ще кілька прикладів винятків із закону попиту, коли з підвищенням цін спостерігається збільшення закупок того чи іншого товару. Так, деякі споживачі можуть ототожнювати зростання цін з підвищенням якості продукції і збільшувати його закупки. В умовах нестабільності економічної ситуації зростання цін може сприйматися і як передвісник інфляційного стрибка.

Поєднавши дві наведені класифікації товарів за реакцією попиту на зміни цін та доходи, можна отримати загальну сумісну класифікацію, яка наведена в таблиці 1.

Таблиця 1. Класифікація товарів

Вплив зміни часткової ціни	Вплив зміни доходу	Цінні товари $\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial I} > 0\right)$	Малоцінні товари $\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial I} < 0\right)$
Нормальні товари $\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} < 0\right)$		Нормальні цінні товари	Нормальні малоцінні товари
Товари Гіффена $\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} > 0\right)$		—	Товари Гіффена

### *Модель оптимального споживання за Хіксом*

За тих самих припущень щодо функції корисності, що й у моделі поведінки споживача за Маршалом, розглянемо дуальну (або двоїсту) модель. Вона полягає в мінімізації витраток споживача на придбання набору товарів  $x$  з рівнем корисності, не меншим від заданого значення  $V$ . Відповідна раціональна поведінка споживача визначається такою задачею опуклого програмування:

$$\begin{cases} p_1 x_1 + \dots + p_n x_n \rightarrow \min, \\ U(x_1, \dots, x_n) \geq V, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (15)$$

Задача (16) тісно пов'язана з неокласичною задачею споживання (1), і разом вони дають повний аналітичний опис раціональної поведінки споживача.

Лагранжیان задачі (15) має вигляд

$$L(x, \lambda) = -(p, x) + \lambda(U(x) - V). \quad (16)$$

Необхідні та достатні умови оптимальності розв'язку  $x^*$  задачі (15) дає теорема Куна-Таккера. Ці умови виписуються за аналогічним принципом, як це було зроблено для задачі (1). Уважаючи, що всі товари споживаються,  $x_i^* > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , і беручи до уваги, що  $\lambda^* > 0$ , отримуємо такі умови найкращого вибору споживача  $x^*$ :

$$\begin{aligned} \lambda^* MU_i(x_1^*, \dots, x_n^*) &= p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ U(x_1^*, \dots, x_n^*) &= V. \end{aligned} \quad (17)$$

Якщо ціни  $p = (p_i)_1^n$  змінні так само, як і рівень корисності  $V$ , тобто коли ми маємо справу із сім'ю задач вигляду (15), зі змінними параметрами  $p, V$ , то рівняння (17) задають оптимальний набір  $x^*$  і відповідне значення множника Лагранжа  $\lambda^*$  як неявні функції параметрів  $p, V$ . При цьому функція

$$h(p, V) = x^*(p, V) = (h_1(p, V), h_2(p, V), \dots, h_n(p, V))^T \quad (18)$$

називається **функцією хіксіанського попиту** споживача на товари  $i, i = 1, 2, \dots, n$ . Відповідне значення оптимальних видатків  $(p, x^*)$  визначає **функцію видатків споживача**

$$c(p, V) = (p, x^*(p, V)) = (p, h(p, V)) = \sum_{i=1}^n p_i h_i(p, V). \quad (19)$$

Із означень (18), (19) випливає, що функції  $h(p, V), c(p, V)$  пов'язані між собою тотожністю

$$h_i(p, V) = \frac{\partial c(p, V)}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тобто, хіксіанський попит є маргінальними видатками споживача за цінами.

Із перших рівнянь умов оптимальності (17) випливає, що

$$\lambda^*(p, V) = \frac{p_i}{MU_i(h(p, V))}$$

для будь-якого  $i, i = 1, 2, \dots, n$ . Якщо  $x_*$  – розв'язок неокласичної задачі споживання (1) і  $V = U(x_*) = W(p, I)$ , то з умов оптимальності випливає вірність співвідношення

$$\lambda^*(p, W(p, I)) = \left( \frac{\partial W(p, I)}{\partial I} \right)^{-1},$$

де  $W(p, I)$  – непряма функція корисності споживача, або

$$\lambda^*(p, W(p, I)) = (\Lambda(p, I))^{-1}.$$

Тобто, відповідні оптимальні значення множників Лагранжа прямої та дуальної задач є взаємооберненими. Зокрема, для оптимального множника Лагранжа задачі Хікса справедливе співвідношення

$$\lambda^*(p, V) = \frac{\partial c(p, V)}{\partial V}.$$

Насамкінець варто відзначити, що теорія споживчого вибору має широке практичне застосування. Найпоширенішою сферою її використання є маркетингові дослідження. Прогнозування поведінки споживача, розуміння механізму прийняття ним рішення про вибір того чи іншого набору товарів різними категоріями споживачів дають змогу опрацьовувати ефективнішу стратегію фірми та приймати більш обґрунтовані економічні рішення.

## ТЕМА 3

### *ТЕОРІЯ ПОВЕДІНКИ ВИРОБНИКА*

В центрі розгляду теорії поведінки виробника знаходиться **підприємство** або **фірма**, як деяка організація, яка здійснює витрати економічних факторів (таких як земля, праця, капітал, природні ресурси тощо) для виготовлення продукції та послуг, котрі вона продає споживачам або іншими фірмам (підприємствам).

#### *Простір витрат та виробничі функції*

Будемо для спрощення розгляду вважати, що фірма випускає лише один вид продукції, використовуючи для цього  $m$  виробничих факторів, або виробничих витрат. Подібне підприємство називається **однопродуктовим**.

Загальні виробничі витрати фірми за певний період часу можна охарактеризувати за допомогою  $m$ -вимірного вектора витрат  $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ , де  $x_i$  відображає кількість витрат  $i$ -го виробничого фактора. В припущенні, що всі витрати можуть неперервно змінюватися, простір витрат  $X$ , який складається з усіх можливих векторів витрат, можна вважати невід'ємним ортантом  $\mathbf{R}_+^m$   $m$ -вимірного простору  $\mathbf{R}^m$ .

Здатність виробництва продукувати товари за відповідних витрат факторів виробництва визначається, передусім, технологією, яка використовується у ньому. Технологічний зв'язок між випуском продукції  $q$ , що вимірюється в деяких одиницях, та виробничими витратами  $x$  характеризується **виробничою функцією**  $F$ , яка ставить у відповідність кожному вектору витрат  $x$  максимальну кількість випуску продукції  $q = F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . За означенням  $F$  відображає  $X$  в  $\mathbf{R}_+$ , бо  $q \geq 0$ .

При використанні виробничих функцій вважається, що вони повинні задовольняти певним умовам (аксіомам), які відображають основні економічні закономірності виробництва.

*Аксиома A1 відсутності рогу достатку:* для нульового вектора витрат  $\mathbf{0} \in \mathbf{R}_+^m$  відповідний випуск  $F(\mathbf{0})$  продукції є нульовим:  $F(\mathbf{0}) = 0$ .

Іноді ця аксіома вживається у підсиленому варіанті, коли вважається, що простір витрат не є надлишковим, і туди входять тільки необхідні у комплекті для випуску даної продукції види витрат. Для векторів витрат, які належать до межі  $\partial X = \{x \in \mathbf{R}_+^m: \exists \text{ хоча б одна координата } x_i, \text{ що } x_i = 0\}$ , має місце рівність:  $F(x) = 0, x \in \partial X$ .

*Аксиома A2 монотонності:* існує підмножина  $E$  простору витрат  $X$ , яка називається **економічною областю**, в якій збільшення будь-якого виду витрат не призводить до зменшення випуску продукції, тобто з того, що  $x^1, x^2 \in E$  і  $x^1 \geq x^2$  випливає, що  $F(x^1) \geq F(x^2)$ .

*Аксиома A3 угнутості:* існує **особлива область**  $D$ , котра є опуклою підмножиною економічної області  $E, D \subset E$  для якої звуження виробничої функції  $F(x), x \in D$  є угнутою (опуклою вгору) функцією. Ця аксіома відображає економічний **закон спадної віддачі (спадної доходності)**.

При моделюванні виробництва у рамках неокласичного підходу звичайно вважається, що виробнича функція  $F$  є двічі неперервно диференційованою за сукупністю аргументів. Тоді

$$\frac{dF(x)}{dx} = \left( \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \right)_1 = MP(x) \quad (1)$$

інтерпретується як **маргінальний продукт**  $MP(x)$ , а частинні похідні

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = MP_i(x), \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

називаються **маргінальними продуктами факторів** або **частинними маргінальними продуктами**. Отже, в економічній області  $E \subset X$

$$MP(x) = (MP_i(x))_1^m \geq 0, \quad (3)$$

і, отже,  $E = \{x \in X: MP(x) \geq 0\}$ .

Аксиома угнутості  $A3$  підсилюється до вимоги  $A3.1$  від'ємної визначеності матриці Гессе виробничої функції  $\ddot{F}(x)$

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} = \ddot{F}(x) = \left( \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_1^m \ll 0 \quad (4)$$

для всіх  $x$  з особливої області  $D$ . Таким чином, при аксіомі  $A3.1$ :

$$D = \{x \in E: \ddot{F}(x) \ll 0\}.$$

З (4) випливає **закон спадної віддачі**:

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} (MP_i(x)) < 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5)$$

**Ізокванта** – це крива, яка показує всі можливі комбінації ресурсів, які дозволяють отримати певний фіксований обсяг продукції  $q_0$ :

$$IQ(q_0) = \{x \in X: F(x) = q_0\}.$$

За допомогою виробничої функції можна побудувати **криві продукції**, які використовуються для визначення певних стадій процесу виробництва. Нехай  $\bar{x}(x_i)$  – вектор витрат, в якому зафіксовані всі компоненти, крім  $i$ -ої,  $x_j = \bar{x}_j$ ,  $i \neq j$ . Крива продукції для витрат  $i$ -го типу  $P_i$ :

$$P_i(x_i) = F(\bar{x}(x_i));$$

крива середнього  $i$ -го продукту  $AP_i$ :

$$AP_i(x_i) = \frac{F(\bar{x}(x_i))}{x_i} = \frac{P_i(x_i)}{x_i};$$

крива  $i$ -го маргінального продукту  $MP_i$ :

$$MP_i(x_i) = \frac{dP_i(x_i)}{dx_i} = \frac{\partial F(\bar{x}(x_i))}{\partial x_i}, \quad x_i \geq 0.$$

Перша рівність показує залежність випуску від витрат  $i$ -го типу при незмінних інших витратах (це так званий **сукупний продукт  $i$ -го фактора**). Друга рівність характеризує випуск продукції, що вироблена в розрахунку на одиницю витрат  $i$ -го виду (**продуктивність  $i$ -го фактора**), третя – додатковий дохід, який отриманий при використанні додаткової кількості витрат  $i$ -го типу.

### **Основні типи виробничих функцій**

Наведемо приклади найбільш поширених видів виробничих функцій. Подібні функції також широко використовуються і в макроекономічному моделюванні, але в просторах агрегованих (укрупнених) витрат. Часто застосовують лише два види витрат: обсяг виробничого капіталу (основних

фондів)  $K$ , та обсяг праці  $L$ . З метою спрощення записів наведемо приклади ВФ для двовимірного простору витрат.

**1. Лінійна ВФ.**

$$q = F(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

де коефіцієнти  $a_i > 0$  – маргінальний продукт  $i$ -го виду витрат.

**2. ВФ моделі «витрати-випуск» Леонт'єва (ВФ Леонт'єва).**

$$q = F(x_1, x_2) = \min\left(\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right),$$

де  $c_i > 0$  – кількість витрат  $i$ -го виду, яка необхідна для випуску одиниці продукції.

**3. Мультиплікативна ВФ.**

$$q = F(x_1, x_2) = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2},$$

де  $b_0 > 0$  є масштабним множником,  $b_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ . При використанні ресурсів  $K$  та  $L$ , а також якщо  $b_1 + b_2 = 1$ , то в такому випадку ВФ називається *ВФ Кобби-Дугласа*.

**4. ВФ із сталою еластичністю заміщення (CES).**

$$q = F(x_1, x_2) = e_0 \left( e_1 x_1^{-\beta} + e_2 x_2^{-\beta} \right)^{-\frac{h}{\beta}},$$

де  $e_0 > 0$  є масштабним множником,  $e_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ , є параметрами розподілу,  $h > 0$  характеризує степінь однорідності, а  $\beta \geq -1$  є параметром заміщення. Частинним випадком цієї ВФ є *ВФ Солоу*:

$$q = F(x_1, x_2) = e_0 \left( e x_1^{-\beta} + (1 - e) x_2^{-\beta} \right)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

***Еластичність випуску та можливості заміщення***

Якщо відбувається пропорційна зміна всіх витрат, то говорять про *зміну масштабів виробництва*.

Припустимо, що у певній точці простору витрат  $X$  всі витрати збільшуються у масштабі  $\alpha$ ,  $\alpha > 1$ , приймаючи значення  $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_m)$ . Виробництво характеризується **сталім доходом від розширення масштабу**, якщо випуск продукції зростає в тій самій пропорції, що й витрати:

$$F(\alpha x) = \alpha F(x), \quad \alpha > 1. \quad (6)$$

Виробництво характеризується **зростаючим (спадним) доходом від розширення масштабу**, якщо його виробнича функція зростає більшою (меншою) мірою, ніж усі витрати:

$$F(\alpha x) > \alpha F(x), \quad (F(\alpha x) < \alpha F(x)), \quad \alpha > 1. \quad (7)$$

Звичайно, в різних точках простору витрат  $X$  функція може поводитися по-різному. Локальним показником вимірювання доходу від розширення масштабу виробництва, що визначений у деякій точці  $x$  простору витрат, є **еластичність виробництва (сумарна еластичність виробництва)**:

$$\varepsilon(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha}{F(\alpha x)} \frac{\partial F(\alpha x)}{\partial \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\partial \ln F(\alpha x)}{\partial \ln \alpha}. \quad (8)$$

З означення (8) та співвідношень (6), (7) випливає, що у випадку сталого (зростаючого чи спадного) доходу від розширення масштабу виробництва еластичність  $\varepsilon(x)$  дорівнює (більша чи менша) одиниці. Враховуючи, що

$$\frac{\partial F(\alpha x)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F(\alpha x)}{\partial (\alpha x_i)} x_i,$$

маємо:

$$\varepsilon(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha}{F(\alpha x)} \frac{\partial F(\alpha x)}{\partial \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha}{F(\alpha x)} \sum_{i=1}^m \frac{\partial F(\alpha x)}{\partial (\alpha x_i)} x_i = \frac{1}{F(x)} (MP(x))x, \quad (9)$$

тобто

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{F(x)} \sum_{i=1}^m MP_i(x) x_i. \quad (10)$$

**Еластичність випуску відносно зміни витрат  $i$ -го виду (еластичність випуску за фактором  $i$ ) :**

$$\varepsilon_i(x) = \frac{x_i}{F(x)} \cdot \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = \frac{x_i}{F(x)} MP_i(x). \quad (11)$$

Тоді рівність (10) набуває вигляду:

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i(x). \quad (12)$$

*Можливості заміщення* характеризують технологічний процес виробництва, а, отже, і функцію  $F$  з боку різних комбінацій витрат факторів, що породжують однакові умови випуску. Можна використовувати для визначення можливостей заміщення одного фактора виробництва іншим у процесі їх

використання ізокванти. **Гранична норма технологічного заміщення**  $j$ -го ресурсу  $i$ -им –  $MRTS_{ij}$  – визначається розміром  $j$ -го ресурсу, який може замінити кожна одиниця  $i$ -го ресурсу, не викликаючи при цьому зміни обсягів виробництва:

$$MRTS_{ij} = -\frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}.$$

Форма ізоквант (випукла до початку координат) показує, що гранична норма технологічного заміщення зменшується при просуванні вниз вздовж ізокванти. Це, очевидно, пов'язане з властивістю факторів виробництва доповнювати один одного. Проте хоча спадна гранична віддача властива для абсолютної більшості виробничих процесів, але існує цілий ряд винятків, де ця залежність є дещо іншою. Наприклад, коли фактори виробництва можуть використовуватися лише у певній пропорції (рис. 1, ВФ Леонтєва).

Локальною характеристикою заміщення між витратами  $x_i$  та  $x_j$ , коли всі інші витрати залишаються постійними в точці  $x$  з  $D$ , є **еластичність заміщення**  $\sigma_{ij}(x)$  між витратами  $i$  та  $j$ :

$$\sigma_{ij}(x) = -\frac{d \ln(x_i/x_j)}{d \ln(MP_i(x)/MP_j(x))}, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (13)$$

$\sigma_{ij}(x)$  дає процентну зміну співвідношення витрат, що поділена на процентну зміну співвідношення їх граничних продуктів. При цьому знак мінус у (13) забезпечує виконання нерівності  $\sigma_{ij} \geq 0$  в особливій області  $D$ .

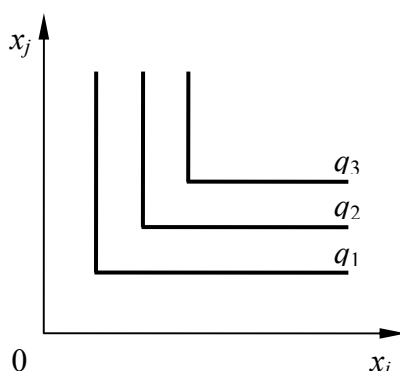


Рисунок 1. Ізокванти ВФ Леонтєва

## Виробництво і вартість. Мінімізація вартості

Зв'язок між обсягами затрат виробничих факторів  $x$  та вартістю виробництва у довгостроковому періоді показує **функція сукупної вартості виробництва**:

$$TC = c(x) = (w, x) = \sum_{i=1}^m w_i x_i, \quad (14)$$

де  $TC$  – сукупна вартість виробництва,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ ,  $w_i$  – ціна  $i$ -го виробничого фактору, причому ціни факторів виробництва розглядаються як незмінні, незалежно від обсягів використання ресурсів. Якщо  $m = 2$ , а  $TC$  зафіксувати на певному рівні  $TC_0$ , тоді в системі координат  $(x_i, x_j)$  можна зобразити пряму, всі точки якої відповідають різним варіантам сполучень факторів виробництва однакової вартості  $TC_0$ . Така пряма постійних видатків має назву **ізокоста**, або лінія незмінної вартості (рис. 2).

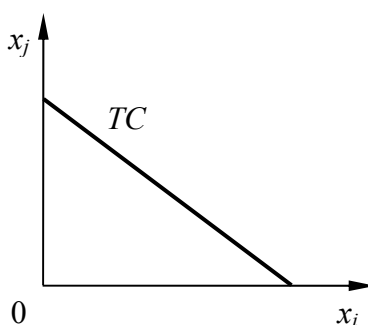


Рисунок 2. Ізокоста

Через те, що однакові обсяги випуску продукції можуть забезпечуватися використанням різних комбінацій обсягів виробничих факторів з різною вартістю, виникає питання вибору сполучення факторів мінімальної вартості. **Мінімізація вартості** – це процес досягнення фірмою таких обсягів використання ресурсів, коли вартість набору ресурсів, які необхідні для забезпечення певного обсягу випуску продукції, буде найменшою у порівнянні з вартістю всіх інших наборів ресурсів, що забезпечують той самий обсяг випуску. Аналітично ця проблема мінімізації приводить до задачі умовної мінімізації:

$$\begin{aligned} c(x) &\rightarrow \min, \\ F(x) &= q_0, \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Геометричну інтерпретацію задачі (15) для  $m = 2$  подано на рис. 3.

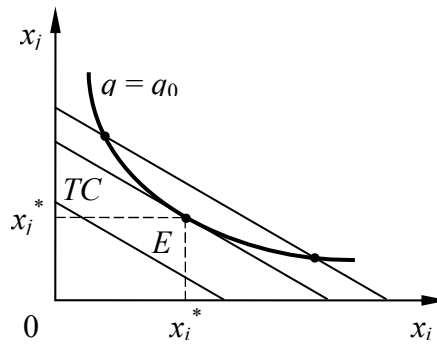


Рисунок 3. Задача мінімізації вартості

Якщо розглянути сімейство задач типу (15), де  $q_0 \in [q_1, q_2]$ , то оптимальне значення цільової функції буде залежати від обсягу виробництва  $q$ :  $TC = c(q)$ ,  $q \in [q_1, q_2]$ . Це і буде **функція вартості виробництва**, яка встановлює зв'язок між обсягом випуску  $q$  та мінімально можливою вартістю виробництва цього обсягу.

### *Моделі поведінки фірми*

Найбільш поширеними є моделі рівноваги фірми, що будуються на таких припущеннях:

1. Технологічні умови виробництва описуються виробничою функцією  $q = F(x)$ , яка має певний комплекс властивостей.
2. Враховується можливість фірми впливати на ціну своєї продукції та на ціни факторів виробництва. При цьому виникають різні моделі, що пов'язані як з умовами досконалої конкуренції, так і з різними типами недосконалої конкуренції.
3. Враховується наявність ресурсних обмежень. При цьому, звичайно, розрізняють *короткострокові моделі поведінки фірми*, коли діють ресурсні обмеження, та *довгострокові моделі*, коли такі обмеження практично не беруться до уваги.
4. Метою діяльності фірми є забезпечення максимальних прибутків або мінімізація збитків.

**Короткостроковий період** – це період у виробничій діяльності фірми, протягом якого вона може змінити обсяги використання лише деяких із ресурсів, що забезпечують випуск продукції. **Довгостроковий період** – це період у діяльності фірми, який є достатнім для зміни обсягів використання всіх без винятку факторів виробництва, які потрібні фірмі для випуску продукції.

### ***Умови повної конкуренції***

Виробники товарів та послуг пропонують свої товари на ринках відповідної продукції, де вони взаємодіють з іншими виробниками аналогічної продукції, а також із споживачами. Умови взаємодії учасників та ціноутворення на ринках залежать від *ринкової структури*, яка визначається певним набором характеристик.

У теорії вирізняють чотири типи ринкових структур:

1. повна (досконала) конкуренція;
2. монополія;
3. монополістична конкуренція;
4. олігополія.

Перші дві ще називають ідеальними, а останні дві – реальними ринковими структурами.

**Повна, або досконала конкуренція** – це такий тип ринкової структури, для якого:

- 1) частка кожного постачальника і споживача в загальному обсязі ринкової продукції є незначною, ніхто не домінує на ринку;
- 2) продукція однорідна;
- 3) учасники можуть вільно входити на ринок та виходити з нього;
- 4) постачальники не взаємодіють один з одним, так само як і споживачі (їхня поведінка не є стратегічною);
- 5) всі учасники повністю проінформовані для визначення своєї поведінки на ринку.

Фірми, які діють на конкурентному ринку, – це **конкурентні фірми** – такі, що виробляють однорідну або близьку за споживчими якостями продукцію, та

інтереси яких перетинаються на ринку при максимізації прибутку в боротьбі за споживача та визначенні ринкової ціни.

### *Неокласична модель фірми в умовах досконалої конкуренції*

Неокласична модель поведінки фірми за певний період часу полягає в максимізації свого прибутку при заданій виробничій функції, заданих ціні випуску продукції  $p$  та цінах факторів виробництва  $w = (w_i)_{i=1,m}$ . Фірма може регулювати свій попит на кількість факторів  $x = (x_i)_{i=1,m}$ , а також пропозицію продукції  $q = F(x)$ . Дохід фірми та її загальні витрати задаються, відповідно, виразами:

$$TR = p \cdot q = p \cdot F(x),$$

$$TC = \sum_{i=1}^m w_i x_i = (w, x).$$

Прибуток фірми  $\pi(x)$  має вигляд:

$$\pi(x) = p \cdot F(x) - (w, x).$$

Розв'язуючи довгострокову задачу відносно можливості придбання ресурсів, фірма може використовувати будь-який вектор з простору витрат. Тому така задача фірми має вигляд:

$$\pi(x) = p \cdot F(x) - (w, x) \rightarrow \max, \quad x \in \mathbf{R}_+^m. \quad (16)$$

Ця задача є задачею опуклого програмування, де єдиним обмеженням є умова невід'ємності вектора витрат  $x$  (тобто, вектора змінних). Розв'язок задачі залежатиме від  $(m + 1)$ -го параметра:  $p$  та  $w_1, \dots, w_m$ .

При короткостроковій задачі з'являються обмеження на вибір витрат ресурсів, наприклад, через знижені ліміти, через певні договірні зобов'язання тощо. В такій задачі фірма повинна обирати вектор витрат  $x$  із заданої множини простору витрат, і тому до задачі (16) тут додаються обмеження вигляду

$$g(x) \leq b,$$

де  $g: \mathbf{R}_+^m \rightarrow \mathbf{R}_+^m$ , тобто:

$$g_i(x_1, \dots, x_m) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (17)$$

Нерівності (17) виражають обмеження на витрати ресурсів для певного короткострокового періоду.

Для неокласичної теорії характерним є припущення про двічі неперервно диференційовану виробничу функцію, що задовольняє аксіоми, про які йшлося раніше. Зокрема, маргінальний продукт є невід'ємним,

$$MP(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \left( \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \right)_1 \geq 0, \quad x \in E,$$

а матриця Гессе

$$\ddot{F}(x) = \left( \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_1 \ll 0, \quad x \in D,$$

є від'ємно визначеною.

При цих припущеннях у довгостроковому періоді необхідними умовами першого порядку оптимізації прибутку фірми в задачі (16) є такі умови:

$$\begin{aligned} \frac{d\pi(x)}{dx} &= p \frac{dF(x)}{dx} - w^T \leq 0, \\ x^T \frac{d\pi(x)}{dx} &= x^T \left( p \frac{dF(x)}{dx} - w^T \right) = 0, \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Для всіх факторів виробництва

$$pMP_i(x) = p \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \leq w_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (19)$$

та

$$\begin{aligned} pMP_i(x) &= p \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = w_i, && \text{коли } x_i > 0, \\ pMP_i(x) &= p \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} < w_i, && \text{коли } x_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Якщо всі фактори виробництва використовуються, тобто  $x > 0$ , то оптимальні умови першого порядку:

$$p \frac{dF(x^*)}{dx} = pMP(x^*) = w^T, \quad (20)$$

тобто вартість граничних продуктів дорівнює платі за витрати одиниці факторів виробництва. Або

$$\frac{MP_1(x^*)}{w_1} = \frac{MP_2(x^*)}{w_2} = \dots = \frac{MP_m(x^*)}{w_m} = \frac{1}{p} \quad (21)$$

– закон оптимального виробництва.

Точка  $x^*$  з особливої області  $D$  простору витрат, де  $\ddot{F}(x)$  є від'ємно визначеною, яка задовольняє рівняння (20), є єдиним розв'язком задачі фірми для довгострокового періоду, оскільки вона задовольняє необхідні умови оптимальності першого порядку та достатні умови оптимальності другого порядку, які виконуються автоматично:

$$p\ddot{F}(x) \ll 0.$$

Якщо ціна  $p$  на продукцію фірми може змінюватися у деякому проміжку  $P = [p_1, p_2]$ , а вектор цін на фактори виробництва може змінюватися у деякій області  $W$  в  $\mathbf{R}_+^m$ . Тоді фірма буде мати справу із сім'єю задач

$$\pi(x) = p \cdot F(x) - (w, x) \rightarrow \max, \quad x \in \mathbf{R}_+^m, \quad (p, w) \in P \times W \quad (22)$$

з умовами оптимальності, які мають вигляд системи рівнянь:

$$\psi_i(x^*) = p \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_i} - w_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (23)$$

Матриця Якобі системи (23)  $J(x^*) = p\ddot{F}(x^*)$ ,  $x \in D$ ,  $p \in P$ . Отже, внаслідок від'ємної визначеності матриці  $\ddot{F}(x^*)$  оптимальні витрати факторів  $x_i^*$  надають максимуму функції прибутку  $\pi(x)$  задачі (7), а також вони можуть бути виражені як функції  $(m + 1)$ -го аргументу  $p, w_1, \dots, w_m$ :

$$x_i^* = \xi_i(p, w_1, \dots, w_m), \quad i = 1, \dots, m, \quad (24)$$

або

$$x^* = \xi(p, w).$$

Функції  $\xi_i(p, w)$  називаються **функціями попиту на витрати** (фактори виробництва) для фірми.

Функції попиту на ресурси  $\xi(p, w)$  є однорідними нульового степеня:

$$\xi(\alpha p, \alpha w) = \xi(p, w) \quad \text{для всіх } \alpha > 0. \quad (25)$$

Підставляючи функції попиту  $\xi(p, w)$  у виробничу функцію  $F(x)$ , отримаємо обсяг випуску продукції як функцію цін продукції та факторів виробництва:

$$q^* = F(x^*) = F(\xi(p, w)) = Q(p, w). \quad (26)$$

Функція  $Q$ , яка визначається рівністю (26), називається **функцією пропозиції випуску**. Функція  $Q(p, w)$  також є однорідною нульового степеня:

$$Q(\alpha p, \alpha w) = Q(p, w) \quad \text{для всіх } \alpha > 0. \quad (27)$$

Зауважимо, що подібний підхід також застосовується і для задачі в короткостроковому періоді, але з врахуванням обмежень на зразок (17).

### ***Фірма в умовах монополії та моносонії***

До найпростіших (з огляду на можливості їх аналізу) різновидів недосконалої конкуренції відносяться *монополія* та *моносонія*.

**Монополія** – це тип ринкової структури, коли лише одна фірма пропонує весь ринковий обсяг блага, для якого не існує близьких замінників. Фірма володіє деякою **монополістичною владою**, якщо вона здатна чинити вплив на ціну продукції. Здатність впливати на ціну обмежує лише попит споживачів. Тому фірма-монополіст є **ціноутворювачем**, на відміну від конкурентної фірми – *ціноодержувача*.

*Фірма-монополіст* має можливість впливати на ціну продукції шляхом варіювання обсягів випуску своєї продукції, для якої функцію попиту можна записати у вигляді  $p = p(q)$ . Ця функція характеризує ціну, яку фірма може призначити за різних умов пропозиції продукції. Фірма-монополіст може дотримуватися різних політик. Одна політика полягає у збільшенні виробництва та пропозиції продукції разом з деяким пониженням ціни на неї, а протилежна політика полягає у впливі на підвищення ціни продукції разом із зменшенням її випуску та пропозиції. Третя політика може полягати у певному чергуванні перших двох. Дотримання будь-якої з вищезгаданих політик означає, що виконується умова:

$$\frac{dp}{dq} < 0. \quad (28)$$

*Валовий дохід*  $TR$  фірми-монополіста є функцією від випуску  $q$  вигляду  $TR(q) = p(q)q$ , а маргінальний дохід  $MR$  є характеристикою зміни валового доходу від зміни випуску продукції:

$$MR(q) = \frac{dR(q)}{dq} = p(q) + \frac{dp(q)}{dq}q. \quad (29)$$

Враховуючи характерну для монополіста умову (28), маємо, що маргінальний дохід є меншим за ціну:  $MR(q) < p(q)$  (у конкурентної фірми, очевидно,  $MR = p$ ).

Аналітичний зв'язок між ціною еластичністю попиту, ціною попиту та маргінальним доходом можна встановити, якщо використати співвідношення (29), а також визначенням цінової еластичності попиту:

$$E_D = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}, \quad \frac{dp}{dq} = \frac{p}{qE_D}.$$

Враховуючи останнє співвідношення, з (29) матимемо:

$$MR = p + q \frac{p}{qE_D} = p \left( 1 + \frac{1}{E_D} \right). \quad (30)$$

Такий зв'язок дає змогу монополістові визначати наслідки підвищення чи зниження ціни продукції і, відповідно, зміни обсягів випуску щодо обсягів виручки.

**Монопсонія** дає владу чинити вплив на ціни факторів виробництва (одноосібне володіння всім обсягом попиту на окремий ресурс). *Монопсоніст* може вплинути на ціну факторів виробництва, користуючись тим, що він здійснює закупівлю факторів у досить значних розмірах, шляхом варіювання обсягів закупок тих чи інших видів факторів. Таким чином, для монопсоніста ціни на фактори є функціями від попиту на ці фактори:  $w_i = w_i(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Взагалі фірма може закупати більшу кількість даного фактора виробництва, запропонувавши більш високу плату за нього, або ж вплинути на зменшення ціни на фактор, скоротивши попит на нього. Отже, для монопсоніста є характерним таке співвідношення:

$$\frac{dw_i}{dx_i} > 0. \quad (31)$$

Вартість витрат  $i$ -го виду можна представити у вигляді  $C_i(x_i) = w_i(x_i)x_i$ , а маргінальна вартість витрат  $i$ -го виду відображає зміни у вартості цих витрат:

$$MC_i(x_i) = \frac{dC_i(x_i)}{dx_i} = w_i + \frac{dw_i}{dx_i} x_i. \quad (32)$$

Внаслідок властивості (31) у випадку монопсонії гранична вартість витрат перевищує їх оплату:  $MC_i(x_i) > w_i$  (у конкурентної фірми  $MC_i = w_i$ ).

Отже, можна сформулювати задачу фірми, яка випускає досить значну кількість продукції даного типу, займаючи значний сегмент ринку подібної продукції, та разом з тим використовуючи і досить значну кількість необхідних для подібного виробництва виробничих факторів. Для такої фірми, яка діє в

умовах недосконалої конкуренції, задача оптимальної поведінки полягає у максимізації прибутку шляхом варіювання випуску  $q$  та витрат факторів  $x_1, \dots, x_m$  за умови їх взаємозалежності через виробничу функцію:

$$\pi(q, x) = p(q) \cdot q - \sum_{i=1}^m w_i(x_i)x_i \rightarrow \max, \quad q = F(x_1, \dots, x_m). \quad (33)$$

Вводячи множник Лагранжа  $\lambda$  та функцію Лагранжа  $L$  задачі (33)

$$L(q, x_1, \dots, x_m) = p(q) \cdot q - \sum_{i=1}^m w_i(x_i)x_i + \lambda(F(x_1, \dots, x_m) - q)$$

можна записати необхідні умови оптимальності першого порядку для задачі (33) у вигляді рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q} &= p(q) + \frac{dp(q)}{dq}q - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -\left(w_i(x_i) + \frac{dw_i}{dx_i}x_i\right) + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= F(x_1, \dots, x_m) - q = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, необхідні умови оптимальності матимуть вигляд:

$$\lambda = p + \frac{dp}{dq}q = MR(q), \quad (34)$$

$$\lambda \frac{\partial F}{\partial x_i} = w_i + \frac{dw_i}{dx_i}x_i = MC_i(x_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad (35)$$

$$F(x_1, \dots, x_m) = q. \quad (36)$$

Поєднуючи умови (34) та (35), маємо:

$$\lambda \frac{\partial F}{\partial x_i} = MR(q) \cdot MP_i(x) = w_i + \frac{dw_i}{dx_i}x_i = MC_i(x_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Таким чином, для визначення  $m$  видів витрат та випуску маємо  $(m + 1)$ -у умову:

$$\begin{aligned} MR(q^*) \cdot MP_i(x_1^*, \dots, x_m^*) &= MC_i(x_i^*), \quad i = 1, \dots, m, \\ q^* &= F(x_1^*, \dots, x_m^*), \end{aligned}$$

де маргінальний дохід  $MR$  та маргінальні видатки  $MC_i$  визначаються рівностями (29) та (32).

Враховуючи, що для всіх  $i, i = 1, \dots, m$ , виконується:

$$\frac{MC_i(x_i^*)}{MP_i(x_1^*, \dots, x_m^*)} = \frac{\partial C_i / \partial x_i}{\partial F / \partial x_i} = \frac{\partial C_i / \partial x_i}{\partial q / \partial x_i} = \frac{\partial C}{\partial q} = MC(q),$$

то можемо переписати умови оптимальності для такого типу фірми у вигляді

$$MR(q^*) = MC(q^*), \quad q^* = F(x^*). \quad (37)$$

Для монополіста після знаходження оптимального обсягу  $q^*$  в результаті розв'язку рівнянь (37), потрібно визначити оптимальну ціну  $p^*$ :

$$p^* = p(q^*). \quad (38)$$

Ціноутворення за формулами (37) та (38) визначає точні умови максимізації прибутку фірми-монополіста. На практиці монополісти користуються принципом ціноутворення «**вартість плюс**»: ціна встановлюється на рівні маргінальної вартості  $MC$  плюс певна надбавка  $\Delta C$ . З урахуванням співвідношень (29) та (37):

$$MC = MR = p \left( 1 + \frac{1}{E_D} \right),$$

звідки

$$p = \frac{MC}{1 + \frac{1}{E_D}}, \quad (39)$$

тобто ціна встановлюється вищою за рівень  $MC$  (оскільки  $E_D < 0$ ; у випадку  $E_D = -1$  формула (39) не застосовується).

### ***Неповна конкуренція***

Більшість реально існуючих галузей організовані як суміш повної конкуренції та чистої монополії, що утворюють *монополістичну конкуренцію* та *олігополію*. Ці типи ринкових структур також відносять до *недосконалої конкуренції*.

**Монополістична конкуренція** – це тип ринкової структури, де:

- 1) на ринку діє багато продавців та покупців, частка кожного з них в обсягах ринкових продажів не є значною;
- 2) продукція різних виробників є неоднорідною (диференційованою);
- 3) вхід на ринок і вихід з нього є вільним;
- 4) виробники не взаємодіють між собою;
- 5) повна поінформованість.

Тобто, суттєвою відмінністю монополістичної конкуренції від досконалої є *диференціація продукції*. Завдяки диференціації споживачі здатні розрізняти на ринку продукцію різних фірм, і, отже, попит на продукцію окремої фірми вже не є абсолютно еластичним, хоча і залишається високоеластичним. Це означає, що фірми мають певну ринкову владу і можуть, хоча і дуже обмежено, варіювати ціни без ризику втратити всіх покупців. Типовими прикладами монополістичної конкуренції є ринки безалкогольних напоїв, виробів побутової хімії, ліків тощо.

### ***Олігополія та олігопсонія***

Важливим випадком недосконалої конкуренції є **конкуренція серед небагатьох**. Визначальною властивістю конкуренції серед небагатьох є той факт, що всі конкуруючі фірми можуть в тій чи іншій мірі впливати на ціни продукції та виробничих факторів (прибутки кожної фірми залежать від політики всіх інших конкуруючих фірм). Тобто, суттєвою відмінністю такого типу ринкової структури є *стратегічна поведінка продавців*. Ринкова структура, коли на ринку продукції пропозиції небагатьох фірм заповнюють весь ринок і декілька з цих фірм займають значні частки ринку, називається **олігополією**. Подібна ж ситуація на ринку ресурсів, коли попит на певні ресурси розподілений серед небагатьох фірм, низка з яких займають значні частки попиту, називається **олігопсонією**.

Для побудови математичних моделей подібних видів недосконалої конкуренції застосовується різний математичний апарат. Значну роль при цьому грають математичні моделі конфлікту, і, зокрема, моделі теорії стратегічних ігор. Розглянемо класичні результати для **дуополії** (олігополії з двома конкурентами) на основі оптимізаційного підходу.

Припустимо, що дві конкуруючі фірми виробляють однотипну продукцію, використовуючи технологічні процеси, які відображаються їх виробничими функціями:

$$q_j = F_j(x_1^j, \dots, x_m^j), \quad j = 1, 2, \quad (40)$$

де  $q_j$  – випуск  $j$ -ої фірми, а  $x^j = (x_i^j)_1^m$  – її витрати. Тоді ціна продукції визначається обома рівняннями випуску  $p = p(q_1, q_2)$ . Наприклад, якщо один з

випусків зростатиме, то ціна буде спадати:  $\frac{\partial p}{\partial q_1} < 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial q_2} < 0$ . Ціна будь-якого виду витрат буде залежати від їх закупки обома фірмами, тобто  $w_i = w_i(x_i^1, x_i^2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Коли фірми, наприклад, збільшують попит на витрати  $i$ -го виду, то ціна на нього збільшується:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i^1} > 0, \quad \frac{\partial w_i}{\partial x_i^2} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Якщо вважати першу фірму активною стороною (учасником), а дії другої фірми – неконтрольованими факторами для активної сторони, а також прийняти за критерії ефективності для першої фірми її функцію прибутку  $\pi_1$ , то задача першої фірми полягає у знаходженні стратегії  $(q_1, x_1^1, \dots, x_m^1)$ , яка максимізує її прибуток

$$\pi_1(q, x) = p(q_1, q_2)q_1 - \sum_{i=1}^m w_i(x_i^1, x_i^2)x_i^1 \rightarrow \max \quad (41)$$

за умов (40). Функція Лагранжа  $L$  відповідної екстремальної задачі має вигляд:

$$L = \pi_1 + \lambda(F_1(x^1) - q_1), \quad (42)$$

де  $\lambda$  – множник Лагранжа. Тоді умови екстремуму першого порядку матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_1} &= p(q_1, q_2) + q_1 \frac{\partial p}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial p}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial q_1} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_i^1} &= - \left( w_i + x_i^1 \frac{\partial w_i}{\partial x_i^1} + x_i^1 \frac{\partial w_i}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1} \right) + \lambda \frac{\partial F_1}{\partial x_i^1} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= F_1(x^1) - q_1 = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Виключаючи з рівнянь (43) множник  $\lambda$ , можна отримати  $(m + 1)$ -у умову екстремуму:

$$\begin{aligned} &\left( p + q_1 \left( \frac{\partial p}{\partial q_1} + \frac{\partial p}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial q_1} \right) \right) \frac{\partial F_1}{\partial x_i^1} = \\ &= w_i + x_i^1 \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_i^1} + \frac{\partial w_i}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1} \right), \quad i = 1, \dots, m, \\ &F_1(x^1) = q_1. \end{aligned} \quad (44)$$

Екстремальна задача, яка розглядається, є задачею багатокритеріальної оптимізації (одночасно максимізує свій прибуток друга фірма), тому критерій (41) залежить від стратегії  $(q_2, x_1^2, \dots, x_m^2)$  другої фірми. Вирази

$$\frac{\partial q_2}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (45)$$

які входять в умови (44), називаються **гаданими варіаціями**, тому що перша фірма повинна при розгляді своєї задачі зробити деякі припущення щодо поведінки конкурента та його реакцію на обрану нею політику.

Подальший аналіз повинен залежати від різних припущень про поведінку виразів (45). Розглянемо деякі з подібних альтернатив для найпростіших випадків, коли товар, який виробляється, є однорідним, маргінальні видатки є постійними; а функція попиту є лінійною, тобто  $p = a - b(q_1 + q_2)$ ,  $a > 0, b > 0$ ;  $C_i = cq_i + d$ ,  $c > 0, d > 0, i = 1, 2$ , де  $c$  – маргінальні видатки, а  $d$  – фіксовані видатки. Тоді перша фірма має прибуток:

$$\pi_1(q_1, q_2) = (a - b(q_1 + q_2))q_1 - cq_1 - d, \quad (46)$$

котрий вона прагне максимізувати шляхом вибору свого випуску  $q_1$ . Умова екстремуму першого порядку для (46) має вигляд:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = (a - b(q_1 + q_2)) - bq_1 \left(1 + \frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right) - c = 0. \quad (47)$$

**Дуополія Курно** базується на припущенні про те, що гадані варіації  $\frac{\partial q_2}{\partial q_1}$  та  $\frac{\partial q_1}{\partial q_2}$  є нульовими (кожний з дуополістів вважає, що зміни в його випуску продукції не впливають на конкурента). Тоді **рівновага Курно** – це пара  $(q_1, q_2)$ , яка задовольняє умови:

$$\left. \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} \right|_{\frac{\partial q_2}{\partial q_1}=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} \right|_{\frac{\partial q_1}{\partial q_2}=0} = 0. \quad (48)$$

Враховуючи (47), умови (48) набувають вигляду:

$$a - b(q_1 + q_2) - bq_i - c = 0, \quad i = 1, 2,$$

звідки **рівновага Курно** задається так:

$$q_1 = q_2 = \frac{a-c}{3b}, \quad p = \frac{a+2c}{3}, \quad q = \frac{2(a-c)}{3b}. \quad (49)$$

Подібний результат можна поширити на довільну кількість фірм  $f$ . Рівновага Курно (49) для цієї ситуації матиме вигляд:

$$q_j = \frac{a-c}{(f+1)b}, \quad p = \frac{a+fc}{f+1}, \quad q = \frac{f}{f+1} \frac{(a-c)}{b}, \quad j = 1, 2, \dots, f. \quad (50)$$

Коли кількість фірм  $f$  необмежено зростає, то рівновага Курно прямує до рівноваги в умовах досконалої конкуренції (при  $f \rightarrow \infty$ ,  $q_j$  прямують до нуля, а ціна  $p$  прямують до сталої  $c$ , яка є маргінальними видатками).

При більш складному аналізі припускаються ненульові гадані варіації. Прикладом може бути **дуополія Штакельберга**, коли одна або дві фірми вважають, що конкурент буде поводитись як дуополіст Курно. Припустимо, що перша фірма вважає, що друга фірма буде реагувати згідно принципу Курно, тобто

$$q_2 = \frac{a-c-bq_1}{2b}. \quad (51)$$

Тоді гадана варіація  $\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = -\frac{1}{2}$ , і, використовуючи (47), маємо:

$$a - b(q_1 + q_2) - bq_1 - c + \frac{bq_1}{2} = 0.$$

Отже, результати для обох фірм залежать від реальної поведінки іншої фірми. Якщо друга фірма вибирає реакцію Курно, як вважає перша фірма, то рішенням є **рівновага Штакельберга** для першої фірми:

$$q_1 = \frac{a-c}{2b}, \quad q_2 = \frac{a-c}{4b}.$$

Але коли друга фірма не використовує реакцію Курно, а діє згідно реакції Штакельберга (кожна фірма невірно вважає, що інша використовує найвне припущення Курно), то маємо **нерівновагу Штакельберга**:

$$q_1 = q_2 = \frac{2(a-c)}{5b}.$$

Зауважимо, що при рівновазі Штакельберга  $q_1 + q_2 = \frac{3(a-c)}{4b} > \frac{2(a-c)}{3b}$  (за рівноваги Курно), при нерівновазі Штакельберга  $q_1 + q_2 = \frac{4(a-c)}{5b} > \frac{3(a-c)}{4b}$  (за рівноваги Штакельберга).

Серед численних інших можливостей розглянемо ще кооперативне рішення обох фірм в дуополії. Цим рішенням може бути, наприклад, максимізація загального прибутку (це так зване **утилітарне рішення**). Це призводить до екстремальної задачі вигляду:

$$\begin{aligned}\pi(q_1, q_2) &= \pi_1(q_1, q_2) + \pi_2(q_1, q_2) = \\ &= (a - b(q_1 + q_2))(q_1 + q_2) - c(q_1 + q_2) - 2d \rightarrow \max.\end{aligned}$$

Розв'язок повинен задовольняти умову:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = (a - b(q_1 + q_2)) - b(q_1 + q_2) - c = 0,$$

звідки

$$q_1 + q_2 = \frac{a - c}{2b}.$$

У загальному випадку  $\pi = \alpha \pi_1 + (1 - \alpha) \pi_2$ , де  $\alpha$  – ваговий коефіцієнт,  $0 < \alpha < 1$ .

Також узгодженим може бути **егалітарне рішення**:

$$\pi(q_1, q_2) = \min\{\pi_1(q_1, q_2), \pi_2(q_1, q_2)\} \rightarrow \max,$$

або ж **крайній егалітаризм**:

$$\pi_1(q_1, q_2) = \pi_2(q_1, q_2) \rightarrow \max,$$

чи, відповідно,

$$\beta \pi_1(q_1, q_2) = \pi_2(q_1, q_2) \rightarrow \max.$$

Розглянемо крайній егалітарний принцип.

$$\begin{aligned}(a - b(q_1 + q_2))q_1 - cq_1 - d &= (a - b(q_1 + q_2))q_2 - cq_2 - d \Rightarrow \\ (q_1 - q_2)(a - b(q_1 + q_2) - c) &= 0.\end{aligned}$$

Тобто, маємо випадки:

$$1) a - b(q_1 + q_2) - c = 0 \Rightarrow q_1 + q_2 = \frac{a - c}{b}.$$

Отже,

$$\begin{cases} \pi_1 = \left(a - b \frac{a - c}{b}\right) q_1 - cq_1 - d = -d, \\ \pi_2 = -d. \end{cases}$$

У цьому випадку «прибуток» обох фірм такий, як і при  $q_1 = q_2 = 0$ . Ці рішення є домінованими.

$$2) q_1 - q_2 = 0, \quad q_1 = q_2 = q > 0.$$

Тобто,

$$\pi = \pi_1 = \pi_2 = (a - 2bq)q - cq - d.$$

Розв'язок повинен задовольняти умову:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = a - 4bq - c = 0 \Rightarrow q = \frac{a - c}{4b}.$$

Звернемо увагу, що в даному випадку  $q_1 + q_2 = \frac{a-c}{2b}$ , як і при утилітарному розв'язку, байдужому до перерозподілу величини випуску  $\frac{a-c}{2b}$  (а, отже, і до величини сумарного прибутку) між фірмами.

# МОДЕЛЮВАННЯ В МАКРОЕКОНОМІЦІ

## ТЕМА 4

### СТАТИЧНА МОДЕЛЬ «ВИТРАТИ – ВИПУСК» ЛЕОНТЬЄВА

#### Міжгалузевий баланс

Модель міжгалузевого балансу (МГБ) базується на понятті «чиста галузь» (галузь, вид економічної діяльності, ВЕД):

- 1) ВЕД випускає лише один продукт;
- 2) кожен продукт випускається лише одним ВЕД;
- 3) кожен ВЕД має єдину технологію;
- 4) не допускається заміщення ресурсів.

Припустимо, що весь виробничий сектор економіки розбито на  $n$  «чистих галузей» (видів економічної діяльності). В процесі виробництва кожен з ВЕД потребує, взагалі кажучи, продукцію, вироблену іншими ВЕД. Отже, виробляється  $n$  продуктів. Нехай в масштабах економіки маємо балансовий звіт за підсумками певного періоду (табл. 1).

Таблиця 1. Міжгалузевий баланс

Витрати Випуск		Розподіл випуску між галузями					Кінцева продукція (споживання)	Валовий випуск	
		1	2	...	$j$	...			$n$
<b>Розподіл продукції <math>i</math>-ої галузі на потреби інших галузей</b>	<b>1</b>	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1j}$	...	$x_{1n}$	$c_1$	$x_1$
	<b>2</b>	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2j}$	...	$x_{2n}$	$c_2$	$x_2$
	...	.....					...	...	
	<b><math>i</math></b>	$x_{i1}$	$x_{i2}$	...	$x_{ij}$	...	$x_{in}$	$c_i$	$x_i$
	...	.....					...	...	
	<b><math>n</math></b>	$x_{n1}$	$x_{n2}$	...	$x_{nj}$	...	$x_{nn}$	$c_n$	$x_n$
<b>Додана вартість</b>		$v_1$	$v_2$	...	$v_j$	...	$v_n$		
<b>Валовий продукт (випуск)</b>		$x_1$	$x_2$	...	$x_j$	...	$x_n$		

Тут  $x_i$  – загальний обсяг продукції  $i$ -ої галузі;  $x_{ij}$  – обсяг продукту  $i$ -ої галузі, що витрачено  $j$ -ою галуззю у виробничому процесі;  $c_i$  – обсяг  $i$ -ої продукції, що витрачається у невиробничій сфері (кінцеве споживання);

$v_j$  – додана вартість  $j$ -ої продукції (амортизаційні відрахування, оподаткування, зарплата по найму, прибуток тощо).

Оскільки таблиця має балансовий характер, то по кожній галузі можна записати:

$$x_i = (x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}) + c_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

а в цілому по економіці:

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{i=1}^n c_i. \quad (2)$$

Зауважимо, що баланс витрат (1) можна отримувати як в натуральному, так і у вартісному виразі.

Аналогічно, баланс продукції за стовпчиком: обсяг випущеної продукції дорівнює сумарним затратам:

$$x_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} + v_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Баланс виробництва (3) може мати лише вартісний вираз. В цілому по економіці:

$$\sum_{j=1}^n x_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n v_j. \quad (4)$$

Обсяг валового суспільного продукту як сума розподіленої продукції галузей дорівнює обсягу валового суспільного продукту як сумі всіх виробничих витрат. Тобто, з (2) та (4) маємо:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{i=1}^n c_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n v_j,$$

звідки очевидно:

$$\sum_{i=1}^n c_i = \sum_{j=1}^n v_j \quad (5)$$

(обсяг кінцевого продукту за матеріально-речовим та вартісним складом завжди рівні).

Умовою взаємно-однозначної відповідності балансів, які використовують різні показники (вимірники), є незмінне співвідношення масштабів цих показників за кожним видом продукції. Наприклад, якщо в одному МГБ (в натуральному виразі) електроенергія вимірюється в кіловат-годинах, а в іншому (у вартісному виразі) – в гривнях, то кожній гривні електроенергії завжди повинна відповідати одна й та ж кількість кіловат-годин, як би ця енергія не

використовувалася. Показники балансу у вартісному виразі, які задовольняють вказаній умові, позначимо:

$$\tilde{x}_j, \quad \tilde{c}_j, \quad \tilde{x}_{ij}, \quad \tilde{v}_j.$$

Для МГБ в натуральному виразі замінимо попередні позначення. Тоді замість (1) та (3), відповідно, маємо:

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^n \tilde{x}_{ij} + \tilde{c}_i, \quad (6)$$

$$\tilde{x}_j = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{ij} + \tilde{v}_j. \quad (7)$$

Якщо  $p_i$  – єдина (узгоджена) ціна  $i$ -го виду продукції ( $i = 1, \dots, n$ ), то

$$\tilde{x}_i = p_i x_i, \quad \tilde{c}_i = p_i c_i, \quad \tilde{x}_{ij} = p_i x_{ij}. \quad (8)$$

### *Модель Леонтьєва*

Для побудови математичної моделі вирішальне значення має припущення про те, що  $x_{ij}$  є функцією від обсягу виробництва цієї продукції:

$$x_{ij} = \varphi(x_j).$$

У найпростішій моделі використовується припущення про пропорційну залежність між затратами та обсягом виробництва, тобто вводяться лінійно-однорідні функції виробничих затрат:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j. \quad (9)$$

Коефіцієнт пропорційності  $a_{ij} > 0$  називається *коефіцієнтом прямих виробничих (матеріальних) витрат (технологічним коефіцієнтом)* продукції  $i$  на виробництво одиниці продукції  $j$ .

Підставляючи вираз (9) в (1) маємо:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + c_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Позначаємо:

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad c = (c_1, \dots, c_n)^T,$$

$A = \{a_{ij}\}_1^n$  – квадратна матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат (технологічна матриця). Тоді у векторно-матричній формі маємо:

$$x = Ax + c, \quad x \geq 0 \quad (10)$$

– модель Леонтьєва.

Вище було показано, що при використанні єдиної ціни на кожний вид продукції та однакових методах обміну досягається взаємно-однозначна відповідність між показниками балансів у натуральному та вартісному виразі. Приймаючи до уваги (9), маємо:

$$\tilde{x}_{ij} = \tilde{a}_{ij}\tilde{x}_j, \quad \tilde{a}_{ij} = \frac{\tilde{x}_{ij}}{\tilde{x}_j} = \frac{p_i x_{ij}}{p_j x_j} = \frac{p_i a_{ij} x_j}{p_j x_j} = a_{ij} \frac{p_i}{p_j}, \quad (11)$$

або

$$\tilde{x} = Px; \quad \tilde{c} = Pc; \quad \tilde{A} = PAP^{-1},$$

де  $P = \{p_i\}_1^n$  – діагональна матриця цін,  $P^{-1}$  – діагональна матриця величин, які обернені цінам.

### **Модель міжгалузевої залежності цін (модель ціноутворення)**

Покладемо, що  $\tilde{v}_j$  (додана вартість в  $j$ -ій продукції) пропорційна обсягу виробництва даної продукції:

$$\tilde{v}_j = r_j \tilde{x}_j,$$

де  $r_j$  – коефіцієнт умовно-чистої продукції в загальному обсязі продукції. Тоді:

$$\tilde{x}_j = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ij} \tilde{x}_j + r_j \tilde{x}_j,$$

Природно припустити, що  $\tilde{x}_j \neq 0$ , тоді

$$1 = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ij} + r_j. \quad (12)$$

Помножимо (12) справа на  $p_j \neq 0$ :

$$p_j = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ij} p_j + r_j p_j.$$

Враховуючи співвідношення (11), маємо:

$$p_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{p_i}{p_j} p_j + r_j p_j.$$

Тобто:

$$p_j = \sum_{i=1}^n p_i a_{ij} + r_j p_j.$$

Позначимо  $s_j = r_j p_j$  – додана вартість в ціні  $j$ -ої продукції, і введемо до розгляду вектори  $p = (p_1, \dots, p_n)$  та  $s = (s_1, \dots, s_n)$ . Тоді маємо **модель рівноважених цін** (модель ціноутворення).

$$p = pA + s, \quad p \geq 0. \quad (13)$$

Модель (13) є, по суті, двоїстою до моделі Леонт'єва (10). Ці моделі пов'язані парою двоїстих задач вигляду:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n s_j x_j &\rightarrow \max, \\ x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= c_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i c_i &\rightarrow \min, \\ p_j - \sum_{i=1}^n p_i a_{ij} &= s_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ p_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (15)$$

Якщо  $x^*$  та  $p^*$  – розв'язки відповідних задач (14) та (15), то

$$\sum_{j=1}^n s_j x_j^* = \sum_{i=1}^n p_i^* c_i,$$

тобто обсяг створеної в економіці продукції (за вартісним складом) дорівнює сумарній оцінці кінцевої продукції, яка використовується (вартість кінцевого споживання дорівнює сумарній доданій вартості).

### *Аналіз продуктивності моделі «витрати – випуск»*

Якщо для будь-якого невід'ємного вектора кінцевого споживання  $c \geq 0$  система (10) сумісна (тобто, має невід'ємний розв'язок), то відповідну модель Леонт'єва (або технологічну матрицю  $A$ ) називають **продуктивною**.

«Продуктивність» можна вважати синонімом «беззбитковості», «рентабельності».

Для подальших викладок важливим є поняття нерозкладності матриці.

В теорії матриць **розкладними** називаються такі матриці  $A$ , які одночасною перестановкою рядків та стовпчиків приводяться до вигляду:

$$A \sim \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

де  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  – квадратні блоки, що містять лише ненульові елементи;  $\mathbf{0}$  – блок, який містить лише нулі,  $A_{12}$  – блок, елементи якого можуть приймати будь-які значення.

Матриця  $A$  **нерозкладна**, якщо для неї не існує таких одночасних перестановок рядків та стовпчиків, які привели б її до вигляду (16).

Одна одночасна перестановка: міняються місцями  $i$ -ий та  $j$ -ий рядок, а також  $i$ -ий та  $j$ -ий стовпчик.

*Економічно* нерозкладність означає те, що кожна галузь прямо чи опосередковано використовує продукцію всіх інших галузей, а її продукція прямо чи опосередковано використовується у виробництві продукції всіх інших галузей. Тобто, всі пари галузей знаходяться в двосторонньому зв'язку.

**Теорема 1** (Фробеніуса-Перрона) (про спектральні властивості невід'ємної нерозкладної матриці). Нехай матриця  $A$  розмірності  $n \times n$  невід'ємна і нерозкладна, а  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$  – множина її власних чисел ( $m \leq n$ ). Тоді в множині  $\sigma(A)$  є таке додатне число  $\lambda_A$ , яке є простим коренем характеристичного рівняння матриці  $A$ , і таке, що

$$|\lambda_k| < \lambda_A, \quad \lambda_k \neq \lambda_A, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Крім цього, власному числу  $\lambda_A$  відповідає єдиний (з точністю до скалярного множника) власний вектор  $x_A$  такий, що  $(x_A)_i \neq 0$ ,  $\text{sign}(x_A)_i = \text{sign}(x_A)_j$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, n$ . Тобто, вектор  $x_A$  можна вибрати додатним:  $x_A > 0$ .

Серед власних векторів, що відповідають іншим власним значенням немає жодного із невід'ємними координатами.

Число  $\lambda_A$  називається **числом Фробеніуса** матриці  $A$ , а  $x_A$  – **вектором Фробеніуса** матриці  $A$ :

$$Ax_A = \lambda_A x_A.$$

Сформулюємо достатню ознаку продуктивності моделі «витрати-випуск».

**Теорема 2.** Нехай:

- 1) матриця  $A$  невід'ємна і нерозкладна;
- 2) сума  $q_i$  елементів кожного її рядка не перевищує 1:

$$q_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1, \quad i = 1, \dots, n;$$

- 3) хоча б для одного рядка  $i_0$ :  $q_{i_0} < 1$ .

Тоді модель Леонтьєва, яка відповідає цій матриці, є продуктивною.

**Теорема 3** (критерій продуктивності моделі «витрати-випуск»). Для продуктивності моделі Леонтьєва (10) необхідно і достатньо, щоб фробеніусове число  $\lambda_A$  матриці  $A$  задовольняло нерівність:  $\lambda_A < 1$ .

Наведемо теорему стосовно спектра довільної невід'ємної матриці.

**Теорема 4** (про спектр довільної невід'ємної матриці). Якщо квадратна  $n \times n$  матриця  $A$  невід'ємна, то вона має невід'ємне власне число  $\lambda_A \geq 0$ , яке є простим коренем характеристичного рівняння матриці  $A$ , і таке, що для будь-якого іншого її власного числа  $\lambda$ :  $|\lambda| \leq \lambda_A$ . При цьому існує невід'ємний власний вектор  $x_A \geq 0$ , який відповідає  $\lambda_A$ .

Ще одна теорема, яку ми тут приведемо, дозволяє оцінити фробеніусове число  $\lambda_A$  матриці  $A$ .

Нехай  $A = \{a_{ij}\}_1^n$ ,  $a_{ij} \geq 0$ . Введемо позначення

$$r = \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad R = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij},$$

$$s = \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij}, \quad S = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

**Теорема 5** (про оцінки для фробеніусового числа невід'ємної матриці  $A$ ). Якщо квадратна  $n \times n$  – матриця  $A$  – невід'ємна, то для її фробеніусового числа мають місце такі нерівності

$$r \leq \lambda_A \leq R, \quad s \leq \lambda_A \leq S. \quad (17)$$

Якщо матриця  $A$  ще й нерозкладна, то всі нерівності в (17) строгі. Винятком є випадок, коли  $r = R$ ,  $s = S$ .

Нехай модель (10) продуктивна, тоді

$$x = (E - A)^{-1}c = \left( \sum_{k=0}^{\infty} A^k \right) c = (E + A + A^2 + A^3 + \dots)c =$$

$$= y + Ac + A^2c + \dots \quad (18)$$

Тобто, щоб задовольнити кінцевий попит  $c \geq 0$ , необхідно виробити всю кількість продукції, яка представляється компонентами цього вектора (перший доданок у (18) праворуч), але в процесі виробництва  $y$  виникають витрати  $Ay$ , в свою чергу для задоволення яких необхідно здійснити витрати  $A \cdot Ac = A^2c$  і т. д. Тому ряд справа у (18) називається *повними витратами* на виробництво

кінцевого продукту  $c$ , а матриця  $(E - A)^{-1}$  називається *матрицею повних (матеріальних) витрат*.

Зауважимо, що матриці  $A^2, A^3, \dots$  називаються *матрицями непрямих (опосередкованих) витрат* 1-го, 2-го, і т.д. порядків.

### *Динамічна модель Леонтьєва*

Розглянемо неперервну постановку динамічної моделі Леонтьєва, яка використовується в якості бази для розробки прикладних моделей.

Міжгалузеві потоки витрат продуктів описуються технологічною матрицею  $A_{n \times n}$ , яка вважається невід'ємною і нерозкладною. Зв'язок між інвестиціями і приростом випуску моделюється за допомогою матриці  $B_{n \times n}$ , яка є невід'ємною і невиродженою. Елемент  $b_{ij}$  матриці показує, скільки необхідно інвестувати продукту  $i$ , щоб збільшити випуск продукту  $j$  на «малу одиницю» за одиницю часу.

Модель є системою балансових рівнянь, що зв'язують випуск продуктів і напрямки їх використання: ринкова рівновага передбачає, що економіка повинна випускати стільки, щоб цього вистачило на покриття проміжного попиту на продукти, інвестиційного попиту і кінцевого попиту (споживання).

$$x(t) = Ax(t) + B\dot{x}(t) + c(t), \quad (19)$$

де  $x(t)$  – вектор випуску продукції,  $\dot{x}(t)$  – вектор похідних (приростів) випуску,  $c(t)$  – вектор кінцевого попиту (споживання).

Перший доданок правої частини  $Ax(t)$  – це проміжне споживання продуктів (вектор поточних виробничих витрат, що необхідні для забезпечення випуску продуктів обсягом  $x(t)$ ). Другий доданок  $B\dot{x}(t)$  – це інвестиції в галузевій структурі (кожна компонента цього вектора – інвестиційний попит на відповідний продукт). Перші дві складові правої частини характеризують виробничі напрямки використання продуктів, останній доданок – це невиробниче споживання. Якщо споживання задається екзогенно як деяка функція від часу, то (19) є системою лінійних неавтономних диференціальних рівнянь, розв'язок якої буде залежати від вигляду функції  $c(t)$ .

## ТЕМА 5

### **МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ ТА РОЗПОДІЛУ КАПІТАЛОВКЛАДЕНЬ**

**Економічне зростання** – основний показник розвитку і добробуту будь-якої країни – є однією з головних макроекономічних цілей, досягнення якої зумовлене необхідністю випереджаючого зростання національного доходу в порівнянні із зростанням чисельності населення для підвищення рівня життя в країні.

#### ***Неокласична модель зростання Р. Солоу***

Моделі росту займають значне місце в економіко-математичному дослідженні. Добре відомими і детально вивченими є моделі Харрода-Домара, Філіпса, Хікса, Самуельсона, Рамсея. Модель Роберта Солоу дає змогу дослідити, як основні фактори виробництва – праця, капітал, технологічні зміни – впливають на динаміку зміни обсягу виробництва, коли економічна система перебуває у рівноважному сталому стані. Ця модель описує економічний ріст у так званій агрегованій замкнутій економіці.

1. *Агрегована* економіка характеризується тим, що в ній виробляється єдиний однорідний продукт.
2. *Замкнутість* моделі означає відсутність як імпорту в економіку, так і експорту з неї.

Сформулюємо основні передумови даної моделі, позначення та висновки.

Будемо вважати, що час  $t$  змінюється неперервно,  $t \in [0, T]$ , і будемо використовувати такі позначення:

$Y(t)$  – випуск (ВВП) або дохід в момент часу  $t$ ;

$C(t)$  – споживання;

$I(t)$  – капіталовкладення (інвестиції);

$K(t)$  – капітал (виробничий);

$A(t)$  – амортизація (знос) капіталу;

$L(t)$  – праця (трудові ресурси).

Відносно досліджуваної моделі зробимо такі припущення:

**Припущення 1.** Прибутки (доходи) і видатки (витрати) тотожні:

$$Y(t) = I(t) + C(t). \quad (1)$$

інвестицій, то їх витрачають як на збільшення розміру національного капіталу, так і на заміщення зношеного. Якщо  $K(t)$  – розмір капіталу в момент часу  $t$ , то капіталовкладення вимірюються швидкістю зміни наявного капіталу:

$$\dot{K}(t) = \frac{dK(t)}{dt}.$$

**Припущення 2.** Інвестиції витрачають як на збільшення розміру національного капіталу (капіталовкладення вимірюються швидкістю зміни наявного капіталу  $\dot{K}(t) = \frac{dK(t)}{dt}$ ), так і на заміщення зношеного. Тобто, справджується така тотожність для валових інвестицій:

$$I(t) = \dot{K}(t) + A(t). \quad (2)$$

**Припущення 3.** Амортизація (знос) наявного капіталу пропорційна його величині:

$$A(t) = \mu K(t),$$

де  $\mu$  – норма амортизації,  $\mu \in (0,1)$ .

**Припущення 4.** Чисельність населення (а, отже, і робочої сили) зростає за експоненційним законом з показником (темпом росту)  $\tau$ :

$$L(t) = L(0)e^{\tau t}. \quad (3)$$

Тобто,  $\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \tau$ .

**Припущення 5.** Розміри випуску продукції  $Y$  визначаються агрегованою виробничою функцією, яка характеризує ефективні можливості виробництва в залежності від розмірів капіталу та витрат праці:  $Y = F(K, L)$ .

Функція  $F(K, L)$  двох невід’ємних аргументів задовольняє такі умови:

1) вона безпосередньо не залежить від часу  $t$ ;

2) є двічі неперервно диференційованою, причому для всіх невід’ємних

значень аргументів виконуються співвідношення:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \quad (4)$$

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = 0. \quad (5)$$

**Припущення 6.** Для будь-якого  $\alpha > 0$  виконується тотожність:

$$F(\alpha K, \alpha L) = \alpha F(K, L), \quad (6)$$

тобто, функція  $F(K, L)$  є лінійно-однорідною.

Приведемо задачу до вигляду, де всі змінні є нормованими (у розрахунку на одного працівника). Покладемо в (6)  $\alpha = L^{-1}$ , тоді будемо мати:

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f\left(\frac{K}{L}\right) = f(k). \quad (7)$$

Функція одного аргументу  $f(k)$  характеризує продуктивність праці (випуск продукції на одного працівника) як функцію капіталоозброєності або, інакше кажучи, фондоозброєності (величина капіталу на одного працівника).

Введемо нові нормовані (питомі) величини і запишемо (7) у такому вигляді:  $y = Y/L$ , де  $y(t)$  – величина випуску продукції на одного працівника (питомий випуск),  $y(t) = Y(t)/L(t)$ , а  $k(t)$  – величина капіталу на одного працівника (капіталоозброєність):  $k(t) = K(t)/L(t)$ .

З умов (4) та (5) на виробничу функцію  $F(K, L)$  для виробничої функції  $f(k)$  будемо мати:

$$\begin{aligned} f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0 \quad \text{для всіх } k > 0, \\ \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Функція, яка задовольняє умови (8), ще називається **неокласичною**.

Приведемо і всі інші змінні до нормованого вигляду:  $c(t) = C(t)/L(t)$ ,  $i(t) = I(t)/L(t)$ , де  $c(t)$  – обсяг споживання на одного працівника, а  $i(t)$  – обсяг капіталовкладень на одного працівника.

Тепер тотожність (1) для доходу і видатків, а також (2) для валових інвестицій набувають, відповідно, такого вигляду:

$$y(t) = c(t) + i(t), \quad (9)$$

$$i(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} + \mu k(t). \quad (10)$$

Швидкість зміни величини капіталоозброєності, використовуючи (3), обчислюється:

$$\dot{k} = \frac{d}{dt} \left( \frac{K}{L} \right) = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L} \cdot \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{L} - \tau k,$$

а співвідношення (10) для питомих інвестицій:

$$i(t) = \dot{k} + (\mu + \tau)k = \dot{k} + \theta k. \quad (11)$$

Стала  $\theta \in$  сумою норми амортизації капіталу та темпу росту чисельності робочої сили:  $\theta = \mu + \tau$ ,  $\theta = \text{const} > 0$ . Підставимо вираз для  $i(t)$  з рівняння (11) і виробничу функцію в рівняння доходів і видатків (9):

$$f(k(t)) = c(t) + \theta k(t) + \dot{k}(t), \quad (12)$$

або

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \theta k(t) - c(t). \quad (13)$$

Рівняння (13) називають **основним диференціальним рівнянням неокласичної теорії економічного росту**.

З рівняння (12) бачимо, що випуск продукції, який припадає на одного працівника  $f(k(t))$  складається зі споживання на одного працівника  $c$ , частки інвестицій на підтримання капіталоозброєності працівника  $\theta k$ , чистого приросту капіталоозброєності працівника  $\dot{k}$ .

Початкова умова для рівняння (13) має вигляд:

$$k(t_0) = k_0, \quad \text{або, зокрема,} \quad k(0) = k_0, \quad (14)$$

Проте деякі якісні результати щодо динаміки питомих капіталовкладень  $k(t)$  можна отримати безпосередньо

Проведемо аналіз рівняння (13). Припустимо надалі, що  $c(t) = \text{const}$ .

Зобразимо графіки функцій  $u = f(k)$ ,  $v = \theta k$ ,  $w = u - v = f(k) - \theta k$  (рис. 1, 2).

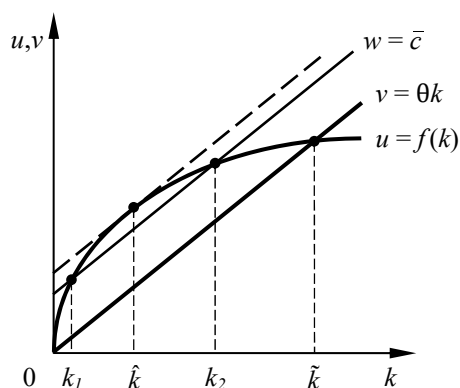


Рисунок 1. Графіки функцій  $u$  та  $v$

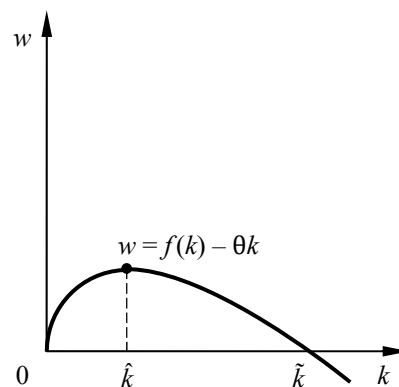


Рисунок 2. Графік функції  $w$

Точки  $\hat{k}$  і  $\tilde{k}$  на осі абсцис такі, що:

- 1) при  $k = \tilde{k} > 0$  функція  $w$  перетворюється в нуль:  $f(k) - \theta k = 0$ ;
- 2) при  $k = \hat{k}$  функція  $w$  досягає максимуму:  $f(\hat{k}) - \theta \hat{k} \geq f(k) - \theta k$  для  $\forall k > 0$ .

В силу припущень щодо виробничої функції  $f(k)$  неважко показати, що такі значення  $\hat{k}$  і  $\tilde{k}$  існують і єдині.

Вважаючи  $c(t)$  константою, розглянемо три випадки:

- a)  $c = 0$  (нульовий рівень споживання на одного працівника);
- b)  $c = \hat{c} = f(\hat{k}) - \theta \hat{k}$  (максимальний рівень споживання на одного працівника);
- c)  $c = \bar{c}$ ,  $0 < \bar{c} < \hat{c}$  (проміжний випадок).

**Випадок а).** Основне рівняння (13) набуває вигляду:  $\dot{k}(t) = f(k) - \theta k(t)$ , має, очевидно, сталий розв'язок  $k = \tilde{k}$  (точку рівноваги  $\tilde{k}$ ) на фазовій прямій  $Ok$ . Лінеаризуємо праву частину рівняння (13) в околі точки  $k = \tilde{k}$ , а потім знайдемо відповідне власне значення з рівняння:

$$f'(\tilde{k}) - \theta - \lambda = 0.$$

Звідси маємо:

$$\lambda = f'(\tilde{k}) - \theta. \quad (15)$$

Проведемо дослідження знаку власного значення  $\lambda$ . Використовуючи властивості виробничої функції (4), маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial(L \cdot f(\frac{K}{L}))}{\partial L} = f(k) + L \cdot f'(k) \cdot \left(-\frac{K}{L^2}\right) = f(k) - \frac{K}{L} \cdot f'(k) = f - k \cdot f' > 0.$$

З останнього співвідношення випливає, що  $f(k) > k \cdot f'(k)$  для  $\forall k > 0$ .

Використовуючи цю властивість, маємо при  $k = \tilde{k}$ :

$$f'(\tilde{k}) < \frac{f(\tilde{k})}{\tilde{k}}.$$

Таким чином, із (15) випливає, що

$$\lambda < \frac{f(\tilde{k})}{\tilde{k}} - \theta = \frac{f(\tilde{k}) - \theta \tilde{k}}{\tilde{k}} = 0.$$

Отже, оскільки власне значення є від'ємним, то точка  $k = \tilde{k}$  є асимптотично стійкою.

**Випадок б).** Визначимо рівень капіталоозброєності  $\hat{k}$ , який максимізує функцію  $w = f(k) - \theta k$ , з рівняння:

$$f'(k) = \theta \quad \text{або} \quad f'(k) = \mu + \tau,$$

і покладемо

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - \theta \hat{k}. \quad (16)$$

Якщо в основному рівнянні (13) покласти  $c(t) = \hat{c}$ , то воно набуває вигляду:

$$\dot{k}(t) = f(k) - f(\hat{k}) - \theta(k - \hat{k}). \quad (17)$$

Отже,  $\hat{c}$  – це максимально можливий рівень споживання на одного працівника. Співвідношення (16), з якого цей рівень визначається, називають **золотим правилом накопичення**. Величину  $\hat{c}$  називають **рівнем споживання** на одного працівника, який відповідає **золотому правилу накопичення**. Відповідний рівень  $\hat{k}$  є **рівнем капіталоозброєності золотого правила накопичення**.

Із співвідношення (17) випливає, що  $k = \hat{k}$  є станом рівноваги (для основного рівняння (13)). Отже, рівень капіталоозброєності  $\hat{k}$  та відповідний рівень  $\hat{c}$  споживання золотого правила теоретично можуть зберігатися як завгодно довго. Якщо скористатися аналогічними міркуваннями, які були наведені у **випадку а)**, то відповідне власне значення  $\lambda = f'(\hat{k}) - \theta = 0$ . Тобто, за допомогою методу лінеаризації ми не маємо можливості встановити характер рівноваги. Проте якщо розглянути рівняння (17), то з нього випливає, що  $\dot{k}(t) < 0$ . Це означає, що якщо початкове значення  $k_0 > \hat{k}$  (достатній початковий запас капіталу), то в деякий момент часу значення  $\hat{k}$  може бути досягнуто, але в протилежному випадку, при  $k_0 < \hat{k}$ , відповідного стану рівноваги  $\hat{k}$  досягти неможливо. Тобто, стан рівноваги  $\hat{k}$  є нестійким. Цей факт видається цілком логічним, адже довго підтримувати економічну систему в стані, що відповідає максимально можливому споживанню, є невиправданим.

**Випадок с).** Тепер рівень споживання  $\bar{c}$  зафіксовано в межах  $(0, \hat{c})$ .

Основне рівняння

$$\dot{k}(t) = f(k) - \theta k - \bar{c} = g(k)$$

має два стаціонарні розв'язки:  $k = k_1$ ,  $0 < k_1 < \hat{k}$ , та  $k = k_2$ ,  $\hat{k} < k_2 < \tilde{k}$ . Крива  $w$  і пряма  $w = \bar{c}$  перетинаються в двох точках, абсциси яких дорівнюють  $k_1$  та  $k_2$ . Ці точки також є точками рівноваги для основного рівняння (13). Скориставшись методом лінеаризації, приходимо до висновку, що в першому випадку  $\lambda = f'(k_1) - \theta$ . Оскільки  $k_1 < \hat{k}$ , то з неокласичних властивостей виробничої функції (8):

$$\lambda = f'(k_1) - \theta > f'(\hat{k}) - \theta = 0.$$

Отже, оскільки відповідне власне значення додатне, то точка  $k = k_1$  є нестійкою. Зокрема, якщо  $k_0 < k_1$ , то  $k \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Аналогічно, для точки  $k = k_2$  маємо:

$$\lambda = f'(k_2) - \theta < f'(\hat{k}) - \theta = 0.$$

Власне значення від'ємне, тобто точка  $k = k_2$  є асимптотично стійкою.

Таким чином, можна зробити такий висновок. Якщо  $\bar{c} \in (0, \hat{c})$ , наприклад,  $\bar{c}$  є прожитковим мінімумом, тоді для того, щоб система досягла стійкого положення рівноваги  $k_2$  необхідно, щоб початковий стан капіталоозброєності був достатньо високим:  $k_0 > k_1$ . Після встановлення таких умов економіка розвивається в силу власної динаміки. При цьому рівень капіталоозброєності одного працівника зростає. Якщо рівень споживання  $c$  вважати характеристикою добробуту населення, то цей показник бажано максимально наближати до золотого правила накопичення. Але оскільки відповідний стан рівноваги нестійкий, то можна за відповідний орієнтир вибирати рівень споживання  $\bar{c}$ , що максимально наближається до золотого правила, і при цьому економіка може досягти рівноваги при  $k = k_2$ .

## МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

**Екологія** – міждисциплінарна область знань, що розвивається, і містить уявлення практично всіх наук про взаємодію живих організмів, включаючи людину, з навколишнім середовищем. До середини ХХ століття екологія була однією з біологічних дисциплін, а саме, наукою про взаємодію живих організмів з довкіллям. Сучасна екологія поряд з цим містить у собі науку і практичні методи контролю за станом навколишнього середовища, вчення про біогеоценози та антропологічні впливи на природні екосистеми, еколого-економічні та еколого-соціальні аспекти. Все це визначає також і предмет математичної екології, яка об'єднує математичні моделі та методи, що використовуються при розв'язанні проблем екології.

Застосування математики та математичне моделювання в екології використовується практично з моменту виникнення цієї науки. Однак сучасна математична екологія починається з книги В. Вольтерри – першої спроби побудови математичної теорії біологічних спільнот. (Віто Вольтєрра – італійський математик і фізик, відомий за своїми роботами з математичної біології та інтегральних рівнянь.) В монографії «Математична теорія боротьби за існування» сформулював модель системи «хижак-жертва». Як правило, у вольтеррівських моделях описуються популяції та спільноти живих організмів; при цьому припускається, що параметри абіотичного (неживого) середовища є фіксованими. Існує велика кількість моделей, що описують динаміку абіотичних компонентів екосистеми (переважно за допомогою рівнянь математичної фізики).

Живі організми та їхнє абіотичне оточення нерозривно пов'язані один з одним і перебувають у постійній взаємодії. Будь-яка біосистема, що включає всі організми, які спільно функціонують (біотична спільнота) на даній ділянці, і взаємодіє з фізичним середовищем таким чином, що потік енергії утворює чітко визначені біотичні структури і кругообіг речовин між живою і неживою частинами, становить **екологічну систему (екосистему)**.

Складність побудови і функцій екосистем, їхній комплексний характер робить екосистеми одним з найважчих для вивчення об'єктів і потребують об'єднання методів та концепцій фізичних, хімічних, геолого-географічних і

біологічних наук. Важко обходитися при цьому і без соціально-економічних наук, оскільки основна мета екології в широкому розумінні – це організація раціонального природокористування, гармонічного співіснування біосфери і людини. Але найголовнішу роль в комплексних екологічних дослідженнях відіграє математичне моделювання.

### ***Основні принципи математичного моделювання екосистем***

Можна сформулювати такі принципи математичного моделювання екосистем.

#### *1. Побудова концептуальної основи моделі*

В основі математичної моделі біологічного явища має бути його детальне вивчення. Зокрема, потрібно виділити основні елементи та об'єкти, які визначають явище (компоненти явища), і перерахувати ті елементарні дії, що притаманні цим об'єктам, а також зміни, що відбуваються в об'єктах у результаті виконання вказаних дій.

Значне місце в математичній екології мають займати різноманітні «предмоделі», тобто логічні (концептуальні) схеми майбутніх моделей, які передують самим моделям. Їхнє призначення полягає насамперед в тому, щоб в умовах недостатньої інформації для побудови моделей в цілому пов'язати існуючі уявлення про перебіг явища і з'ясувати, які додаткові дослідження потрібні для одержання необхідних даних.

#### *2. Повнота опису*

Вимога повноти полягає в тому, що в кожній ситуації, яка може виникнути в даній системі, має бути зрозуміло, яка елементарна дія буде виконуватися.

Проте це не виключає, що деякі дії можуть мати випадковий характер і описуватися ймовірносними методами. Крім цього, повнота опису не передбачає врахування всіх дрібних обставин, які можуть вплинути на явище, що досліджується.

### 3. Принцип моделі «в розвитку»

Завжди потрібно починати з більш простіших математичних моделей реальних процесів. Спочатку необхідно відчутно «спростити» досліджуване явище і, лише з'ясувавши, що є поганого у «спрощеній» моделі, вводити її ускладнення. Послідовність моделей, яка чимраз краще і краще описує дійсність, сама собою викликає інтерес. Водночас при побудові надто складної моделі легко заплутатися і піти хибним шляхом.

Реалізації цього принципу покликана сприяти блочна (модульна) структура моделі. В цьому випадку модель складається з доволі автономних підмоделей (блоків, модулів), які описують відповідні частини екосистеми. Така структура дає змогу нарощувати кількість блоків, враховувати нові фактори та природничо-наукові відомості.

### 4. Ієрархія моделей

Довільна екосистема складається з підсистем, які взаємодіють нелінійно. Їх можна впорядкувати в деяку ієрархічну структуру. Зокрема, система моделей математичної біології має будуватися відповідно до рівнів живої природи. Наприклад, можна окреслити рівні популяційний та екосистемний.

*Популяцію* можна означити як будь-яку групу організмів одного виду, яка обіймає певний простір і функціонує як частина *біотичної спільноти*. Остання, зі свого боку, означається як сукупність популяцій, що функціонує як цілісна одиниця у відведеному їй просторі фізичного середовища.

**Екосистему** можна означити як сукупність на певному просторі земної поверхні однорідних природних явищ (атмосфери, гірської породи, ґрунту та гідрологічних умов), що має свою особливу специфіку взаємодій компонентів, які її утворюють, і певний тип обміну речовиною та енергією між ними та з явищами природи, і яка перебуває в постійному русі та розвитку. Варто зауважити, що при виділенні екосистеми не є суттєвими природні межі: як екосистеми можуть розглядатися не лише реально існуючі спільноти, а й будь-які інші структури, навіть нестійкі або такі, що не мають цілісності.

## 5. Системний підхід

При системному підході до вивчення екосистеми одним з основних етапів дослідження є побудова її структурно-функціональної схеми. Йдеться про опис системи кругообігів речовини і потоків енергії в екосистемі. Сутність системного підходу полягає в тому, що:

- а) кожна екосистема розглядається як система з певних блоків;
- б) в кожному з блоків міститься запас різних субстанцій;
- в) існують потоки субстанцій, що переходять з одного блоку в інший, і ті, що входять і виходять з деяких блоків екосистеми за її межі.

*Субстанціями* вважають речовину та енергію, що циркулює в біосфері, а *блоком* – певний елемент екосистеми, до якого субстанція надходить, в якому вона зберігається, можливо, перетворюється і з якого вона виходить.

Кожний блок характеризується набором субстанцій, які в ньому зберігаються, та їхньою кількістю (запасами). Виділення субстанцій, блоків та потоків має задовольняти вимоги повноти опису, які конкретизуються таким чином:

а) якщо в деякий блок надходить певна субстанція, то мають бути враховані всі потоки даної субстанції, які призводять до помітної зміни кількості цієї субстанції в блоці або до помітного переміщення субстанції через блок. Крім цього, для кожного потоку кількість будь-якої вхідної субстанції має дорівнювати кількості субстанції, що направляється цим потоком в інші блоки. Інакше кажучи, для кожної врахованої субстанції, кожного блоку і кожного потоку повнота опису має забезпечити можливість складання балансу;

б) далеко не всі потоки і всі субстанції, які перерозподіляються в блоці, є незалежними між собою;

в) слід визначити, які субстанції грають істотну роль в існуванні блока, та описати їхню циркуляцію.

Для побудови математичної моделі важливо визначити інтенсивність всіх потоків. Для цього необхідно визначити, від яких параметрів залежать коефіцієнти пропорційності між інтенсивністю потоків та запасами субстанцій, якими законами природи керуються ці залежності, і як вони кількісно

виражаються. В найпростішому випадку ці коефіцієнти можна вважати сталими чи такими, що змінюються ступінчато або лінійно.

Таким чином, побудова математичної моделі для процесів обміну в екосистемі зводиться до того, що для кожного блоку, а також і для кожної субстанції в межах блоку визначається баланс за певний проміжок часу. Це дає змогу, послідовно повторюючи необхідні операції, простежити перерозподіл субстанції між блоками системи з плином часу.

#### *б. Інформаційне забезпечення*

Коли вже з'ясована схема перебігу процесу і на її основі сформульована математична задача, то таким чином відокремлені початкові дані, необхідні для проведення розрахунків за моделями. Ці дані можна розділити на дві частини:

- 1) ті, що характеризують початковий стан системи;
- 2) ті, що характеризують інтенсивність перебігу різних процесів.

Останні, зі свого боку, поділяються на дві групи: параметри та співвідношень між ними: а) які можна «витягнути» з відомих загальних законів природи; б) які при вивченні даного явища мають бути знайдені експериментально.

Все, що стосується групи 2а), можна взяти з довідників загального призначення, а те, що стосується груп 1) та 2б), потрібно добирати шляхом спеціальних спостережень та експериментів. Крім цього, дані з групи 1) слід мати для різних моментів часу, аби можна було зіставляти перебіг природного явища з модельними розрахунками (верифікація моделі).

Однією з центральних проблем екології взагалі і математичної екології зокрема є проблема стійкості, стабільності екосистем. Довго існувати можуть лише стійкі екосистеми. З іншого боку, межі стійкості системи встановлюють ті максимальні навантаження на неї, перевищення яких призведе до руйнації. Цей аспект набув особливої актуальності у зв'язку з посиленням антропогенного впливу на екосистеми.

Можна виділити два типи стійкості (стабільності): *резистентна* (здатність залишатися в стійкому стані під навантаженням) і *пружна* (здатність швидко відновлюватися); ці два типи стабільності пов'язані оберненою залежністю.

Стосовно біологічних спільнот поняття стійкості зазвичай зводиться до вимоги збереження чисельності видів протягом тривалого часу.

Якщо маємо достатньо повну і адекватну модель біологічної спільноти, то на питання про стійкість реальної спільноти можна відповісти, досліджуючи цю модель методами математичної теорії стійкості. Методологічно такий підхід виправданий тим, що аналіз стійкості моделі дає змогу формувати різні гіпотези щодо поведінки модельованого об'єкта, виконання або відсутності яких в реальності визначає додаткові аргументи у міркуваннях щодо адекватності моделі.

Будемо вважати, що *спільнота стійка*, якщо стійким є деякий нетривіальний додатний розв'язок системи диференціальних (різницевих) рівнянь, яка є моделлю цієї спільноти. Як правило, розглядається лише стійкість стаціонарних розв'язків, до того ж таких, для яких чисельність жодного з видів не дорівнює нулю або нескінченності. Ці розв'язки називаються *нетривіальною рівновагою*, або просто *рівновагою*, спільноти. Зі стійкості таких розв'язків впливає збереження чисельності видів у спільноті.

Цілісність екосистем сама по собі є об'єктом економічного аналізу як запорука відтворення асиміляційного потенціалу навколишнього середовища чи окремої екосистеми.

## ТЕМА 6

### *НАЙПРОСТІШІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ПОПУЛЯЦІЙ*

*Популяція* – це довільна група організмів одного виду, що займає певний простір і функціонує як частина біотичної спільноти. Популяція характеризується низкою ознак; вони найчастіше виражаються статистичними функціями. Єдиним носієм ознак є група в цілому, а не окрема особина в цій групі. Густина (об'єм, кількість, щільність), народжуваність, смертність, вікова структура, біотичний потенціал, розподіл у просторі (дисперсія) – ось деякі з цих ознак.

Якщо розглядається деяка популяція і припускається, що інші популяції на неї не впливають та існує досить багато харчу, то таку популяцію можна вважати ізольованою. Для вивчення таких популяцій запропоновано багато моделей. Зауважимо, що розглядатимемо популяції з рівномірним розміщенням особин у просторі (які, очевидно, простіші, ніж розподілені випадково або групами).

#### *Найпростіші неперервні моделі*

Далі літерою  $N$  будемо позначати чисельність (кількість, густину, щільність, об'єм і т.п.) популяції. Чисельність популяції може змінюватися з часом у різний спосіб: зростати, здійснювати коливання, спадати, і причини цього можуть бути найрізноманітнішими.

Всесвітньо відомою математичною моделлю, в основу якої покладено задачу про динаміку чисельності популяції, є класична модель необмеженого росту – геометрична прогресія в дискретному представленні:

$$N_{i+1} = \mu N_i, \quad (1)$$

або експонента – в неперервному:

$$\frac{dN}{dt} = \mu N. \quad (2)$$

Модель (2) задається так званим рівнянням Бернуллі (1760). Власне, як модель (2) запропонована Мальтусом у 1798 р. в його класичній праці «Про закон росту народонаселення» (Томас Роберт Мальтус – відомий англійський демограф та економіст).

У рівнянні (2)  $t$  – час,  $\mu$  – величина, що є різницею коефіцієнту народжуваності  $B$  і коефіцієнту смертності  $D$ :

$$\mu = B - D. \quad (3)$$

Розв'язком рівняння (2) при  $\mu = \text{const}$  є експонента:

$$N(t) = N(0)e^{\mu t}. \quad (4)$$

При  $\mu = \text{const} > 0$  закон розвитку (4) і є законом Мальтуса або законом експоненціального росту популяцій в необмеженому (в розумінні поживності) середовищі.

Із розв'язку (4) видно, що при  $\mu > 0$  і  $t \rightarrow \infty$  чисельність  $N(t) \rightarrow \infty$ ; при  $\mu < 0$  і  $t \rightarrow \infty$   $N(t) \rightarrow 0$ . Рівняння (2) є рівнянням природного «росту». Таким рівнянням, наприклад, описується радіоактивний розпад речовин. Рівняння (2) і розв'язок (4) описують ріст бактерій до того, як середовище почне виснажуватись, ріст мікробів, водоростей, дріжджів. Модель Мальтуса (2) має місце на обмежених часових інтервалах.

У природі для багатьох популяцій маємо виконання умови:  $N(t) \rightarrow K$  ( $K = \text{const}$ ) при  $t \rightarrow \infty$ . Відповідно, були запропоновані моделі, що відповідають цій умові.

Бенджамін Гомпертц (1825) використав модель

$$\frac{dN}{dt} = -\mu N \ln(N/K). \quad (5)$$

Розв'язок рівняння (5) має вигляд:

$$N(t) = \alpha e^{e^{-\mu t}}, \quad (6)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт, що пов'язаний з початковими умовами. Очевидно, що розв'язок цієї моделі є досить складним. Проте рівняння (6), або так звана функція Гомпертця, успішно використовується в сучасних дослідженнях (моделювання збільшення кількості мобільних телефонів, статей у вікіпедії, росту пухлин тощо).

П'єр Франсуа Ферхюльст (1838) запропонував таку модель:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{q}\right) = rN - \frac{r}{q} N^2, \quad (7)$$

назвавши її рівнянням логістичного росту.

Ця модель уже враховує внутрішньовидову конкуренцію (нестача їжі, площі, світла). Розв'язком рівняння (7) є функція

$$N(t) = \frac{q}{1 - Ce^{-rt}}, \quad (8)$$

де стала  $C$ , що визначається з початкової умови, має вигляд:

$$C = 1 - \frac{q}{N(0)}. \quad (9)$$

Із (8) видно, що при  $t \rightarrow \infty$  чисельність  $N(t) \rightarrow q$ . Логістичне рівняння має дві важливі властивості. При малих значеннях  $N$  чисельність зростає експоненційно (як в рівнянні (2)), при великих – наближається до певної границі  $q$ , яка інтерпретується як потенційна ємність екологічного середовища, що визначається доступною кількістю ресурсів (рис. 1).

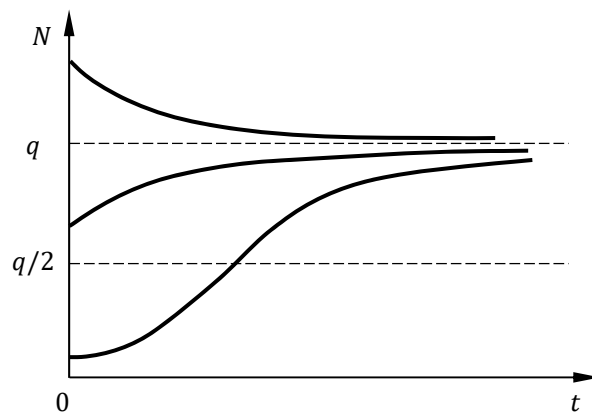


Рисунок 1. Поведінка логістичних кривих

Не дивлячись на схематичність уявлень, що покладені в її основу, логістична крива виявилась дуже хорошим наближенням для опису кривих росту чисельності багатьох популяцій. У природі внутрішньовидова конкуренція не утримує природні популяції на строго незмінному рівні, але діє в широкому діапазоні початкових значень щільності і призводить їх до значно більш вузького діапазону кінцевих значень, визначаючи, таким чином, тенденцію до підтримки щільності в певних межах.

Більш того, логістична крива вважається деяким фундаментальним біологічним законом, подібно до законів термодинаміки у фізиці. Багато різних процесів не лише в біології, але й в економіці, соціології описуються логістичним рівнянням.

Зауважимо, що коефіцієнт  $\mu$ , заданий формулою (3), в загальному випадку залежить від  $N$ . Власне, у логістичному рівнянні (7) можна вважати, що коефіцієнт  $\mu$  лінійно залежить від  $N$ :  $\mu = r - \gamma N$ .

### *Моделі з найменшою критичною чисельністю*

У моделях, що розглядалися, приріст чисельності (біомаси) популяції представлений лінійним членом, який пропорційний чисельності. Власне, це відповідає лише тим популяціям, у яких розмноження відбувається шляхом самовідтворення (мікроорганізми). Якщо ж розмноження передбачає зустрічі між особинами різних статей, то приріст буде тем вищим, чим більшою є кількість зустрічей між особинами, а останнє є пропорційним другому ступеню  $N$  (таке припущення називається «гіпотезою ефективних зустрічей»). Таким чином, для різностатевої популяції в умовах необмеженості ресурсів можна записати:

$$\frac{dN}{dt} = \mu N^2. \quad (10)$$

Варто зауважити, що розв'язок рівняння (10) при відповідних початкових умовах, як показує статистика, з достатньо високою точністю описує ріст населення Землі протягом останніх 500 років.

Рівняння (10) добре описує той факт, що при низьких щільностях популяцій швидкість розмноження різко падає, оскільки ймовірність зустрічі двох особин різних статей зменшується при зниженні щільності популяції пропорційно квадрату щільності. Проте при великих щільностях популяцій швидкість розмноження лімітує вже не кількість зустрічей особин протилежної статі, а кількість самок у популяції. Рівняння (модель), що враховує ці обидва ефекти, має вигляд:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \frac{\beta N^2}{\beta + \delta N}. \quad (11)$$

Насправді щільність популяції не повинна опускатися нижче деякої критичної величини. При падінні щільності популяції нижче критичної середній час, протягом якого особина здатна до розмноження, стає більшим за час життя окремої особини. У цьому випадку популяція вимирає.

Цей ефект може бути врахований, якщо у формули (10) та (11) ввести доданок, що пропорційний чисельності та описує смертність. Залежність швидкості росту популяції від її чисельності при цьому набуває, відповідно, вигляду:

$$\frac{dN}{dt} = \mu N^2 - \gamma N = N(\mu N - \gamma), \quad (12)$$

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \frac{\beta N^2}{\beta + \delta N} - \gamma N. \quad (13)$$

Насамкінець, ввівши в останнє рівняння доданок, який відповідає за внутрішньовидову конкуренцію, отримаємо модель вигляду

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \frac{\beta N^2}{\beta + \delta N} - \gamma N - \varepsilon N^2. \quad (14)$$

Графіки динаміки чисельності популяції відповідно до моделі (14), залежно від різних початкових умов, наведено на рис. 2.

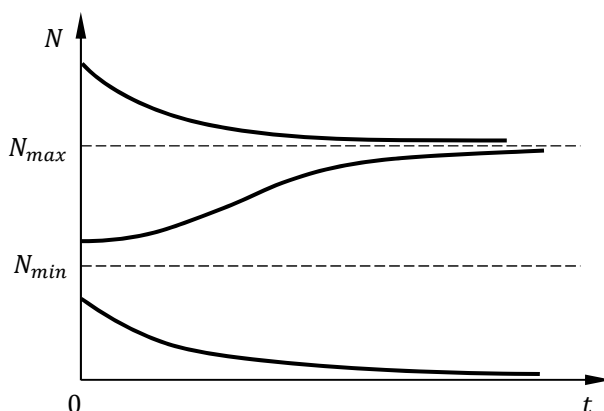


Рисунок 2. Криві динаміки чисельності популяції з двома критичними рівнями

### *Дискретна модель вікової структури популяції (модель Леслі)*

У життєвому циклі будь-якого організму можна виділити кілька стадій розвитку або вікових сходинок. У деяких популяціях врахування вікової структури популяції має істотне значення. Розглядаючи далі деяку популяцію, вважатимемо, що вона розпадається на  $n$  вікових груп. Спосіб розбиття на вікові групи визначається, як правило, біологічними особливостями організмів та специфікою задачі. Вікові структури мають різну ймовірність виживання та

народжуваності для кожного періоду. Найпростіші постулати щодо взаємозалежності чисельності вікових груп призводять до так званої *моделі Леслі* (1945).

Нехай  $x_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , – чисельність  $i$ -тої вікової групи (якщо не враховується поділ на статі). Якщо ж істотний поділ на статі, то  $x_i(t)$  – чисельність самок  $i$ -тої групи. Змінна  $t$  враховує дискретні зміни часу при переході від однієї до наступної вікової групи.

Введемо до розгляду вектор вікової структури:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T. \quad (1)$$

Вважатимемо, що функції народжуваності  $b_i(x)$ , які показують чисельність потомства  $i$ -тої вікової групи, є лінійними функціями чисельності лише даної вікової групи:

$$b_i(x) = b_i x_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

де  $b_i$  – коефіцієнти народжуваності. Тоді чисельність початкової вікової групи, що складається з потомства усіх вікових груп, описується співвідношенням:

$$x_1(t+1) = \sum_{i=1}^n b_i x_i(t). \quad (3)$$

Припустимо, що функції  $s_i(x)$ , які описують перехід з  $i$ -тої вікової групи в  $(i+1)$ -шу, також є лінійними функціями чисельності лише  $i$ -тої вікової групи:

$$s_i(x) = s_i x_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (4)$$

де коефіцієнти  $s_i$  ( $0 < s_i \leq 1$ ) визначають частку осіб  $i$ -тої групи, що доживають до  $(i+1)$ -го віку. Тоді для всіх груп, починаючи з другої, виконується співвідношення:

$$x_{i+1}(t+1) = s_i x_i(t), \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (5)$$

Припущення (2) та (4) означають, що не враховується мінливість параметрів у залежності від умов довкілля та ігнорується вплив загальної чисельності популяції на народжуваність і смертність (очевидно, що саме таке припущення суттєво спрощує реальні ситуації в переважній більшості популяцій). Таким чином, з (3) та (5) випливає співвідношення:

$$x(t+1) = Lx(t), \quad (6)$$

де квадратна матриця  $L$  має вигляд:

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & s_n \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Далі (7) будемо називати *матрицею Леслі* або *оператором Леслі*. (Іноді ще треба врахувати коефіцієнт виживання й на останньому періоді, тоді  $a_{nn} = s_n$ , що і показано в матриці (7).)

Якщо початковий розподіл чисельності заданий вектором  $x(0)$ , то для дискретного часу  $t$  маємо рівняння

$$x(t) = L^t x(0), \quad (8)$$

яке визначає вектор  $x$  в момент часу  $t$  при заданих початкових умовах  $x(0)$ . Всі подальші властивості моделі Леслі випливають з невід'ємності матриці Леслі та її спеціальної структури.

Оскільки величини  $b_i$  і  $s_i$  невід'ємні, то матриця  $L$  також невід'ємна. Асимптотична поведінка розв'язків рівняння (8) суттєво пов'язана зі спектральними властивостями матриці  $L$ , основні з яких встановлюються теоремою Перрона-Фробеніуса (див. тему 4). Ця теорема застосовується до матриць, що не розкладаються (так званих нерозкладних матриць). Тобто, для застосування вищезгаданої теореми варто переконатися, що невід'ємна матриця  $L$  є нерозкладною.

Для нерозкладності матриці Леслі необхідно і достатньо, щоб

$$b_n \neq 0. \quad (9)$$

Зокрема, умова (9) відповідає тому, що в якості  $n$  виступає не максимально можливий, а найбільш репродуктивний вік особин. Очевидно, що чисельності пострепродуктивних груп можуть чинити вплив на динаміку вікового складу молодших груп лише за наявності ефектів лімітування за загальною чисельністю популяції. А оскільки модель Леслі подібних ефектів не враховує, то обмеження (9) є цілком прийнятним, тобто можна розглядати лише репродуктивні групи. Якщо чисельності пострепродуктивних груп все ж є цікавими з деяких міркувань, то вони досить просто визначаються у довільний момент часу за динамікою репродуктивної групи  $x_n(t)$ :

$$\begin{aligned}
x_{n+1}(t+1) &= s_n x_n(t), \\
x_{n+2}(t+2) &= s_{n+1} x_{n+1}(t+1), \\
&\dots\dots\dots \\
x_{n+k}(t+k) &= s_{n+k-1} x_{n+k-1}(t+k-1),
\end{aligned}$$

або ж:

$$\begin{aligned}
x_{n+j}(t) &= s_n s_{n+1} \dots s_{n+j-1} x_n(t-j), \\
j &= 1, 2, \dots, k,
\end{aligned}$$

( $k$  – кількість пострепродуктивних вікових груп). Тому далі будемо розглядати лише нерозкладну матрицю Леслі, порядок якої дорівнює номеру останньої репродуктивної групи.

Отже, нерозкладна матриця Леслі  $L$  має найбільше власне значення  $\lambda_L > 0$ , яке простим коренем відповідного характеристичного многочлена матриці. Оператор Леслі є оператором простої структури. (Лінійний оператор  $A$ , що діє в  $n$ -вимірному лінійному просторі  $X$ , називається *оператором простої структури*, якщо в просторі  $X$  існує базис, що складається з власних векторів цього оператора. Отже, всі власні значення цього оператора є різними.) Така властивість, власне, дає можливість обчислити віковий розподіл  $x(t)$  на будь-якому кроці  $t$  при довільному початковому розподілі  $x(0)$ , а також дослідити асимптотичну поведінку компонент вектора  $x(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , тобто дослідити границю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L^t x(0). \tag{10}$$

Оскільки  $L^t$  можна подати у вигляді:

$$L^t = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^t \end{pmatrix} S,$$

то з такого представлення очевидно, випливає, що якщо для усіх  $\lambda_j$ :  $|\lambda_j| < 1$ , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L^t x(0) = 0.$$

Якщо ж існує  $\lambda_j$  таке, що  $|\lambda_j| > 1$ , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L^t x(0) = \infty.$$

Таким чином, нетривіальна границя (10) може існувати лише у випадку, коли максимальне значення модулів усіх власних чисел дорівнює 1.

*Рівноважний розв'язок моделі Леслі* – це розв'язок, який володіє властивістю:

$$x^* = Lx^*,$$

тобто,  $x^*$  – це є не що інше, як власний вектор матриці  $L$ , який відповідає максимальному власному значенню  $\lambda_L = 1$ .

Власне значення  $\lambda_L$  дозволяє, зокрема, визначити частку особин популяції (у відсотках), яку можна з неї вилучити, щоб величина популяції була рівною вихідній:

$$H = 100 \left( 1 - \frac{1}{\lambda_L} \right).$$

Розглянемо приклади застосування моделі Леслі.

**Приклад 1.** Виживання та плодовитість синього кита.

*Зауваження.* Дані зібрані в 30-х р. 20-го століття, до того часу, коли цей вид китів ще не був під загрозою. Зараз цей вид дуже рідкісний.

Самки синього кита досягають статевої зрілості між 4 і 7 роками, вагітність триває близько року. Народжується одне дитя, самка вигодовує його близько 7 місяців і не може завагітніти. Вчені роблять висновок, що самка народжує не більше одного дитяти за два роки. Чисельності самок і самців приблизно рівні і це співвідношення не змінюється з віком. Для перших 10 років коефіцієнт виживання рівний 0,87 (за два роки). Крок по часу покладемо 2 роки. Матриця Леслі має вигляд

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,19 & 0,44 & 0,50 & 0,50 & 0,45 \\ 0,87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,87 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,87 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,87 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,87 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Найбільше власне значення і відповідний йому власний вектор рівні  $\lambda_L = 1,0036$ ,  $x_L = (1000 \ 764 \ 584 \ 447 \ 341 \ 261 \ 885)^T$ . Власне значення  $\lambda_L > 1$  вказує на те, що чисельність популяції зростає.

За два роки можна вилучити

$$H = 100 \left(1 - \frac{1}{\lambda_L}\right) = 0,711 \% \text{ (особин),}$$

тобто частка особин, які можна відловити, досить мала.

Зокрема, було показано, що зменшення всіх коефіцієнтів виживання з 0,87 до 0,755 призводить до зменшення  $\lambda_L$  до одиниці.

**Приклад 2.** Модель Леслі на випадок урахування обох статей.

Нехай популяція розділена на три вікові групи. Віковий вектор  $x(t)$  для дискретного часу  $t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ , запишеться у вигляді

$$x(t) = (x_{t,m_0}(t); x_{t,f_0}(t); x_{t,m_1}(t); x_{t,f_1}(t); x_{t,m_2}(t); x_{t,f_2}(t))^T.$$

Тут індекси  $m$  і  $f$  означають чоловічу та жіночу стать,  $x$  – їхня кількість. Матриця Леслі має такий вигляд:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_{m_0} & 0 & \varphi_{m_1} & 0 & \varphi_{m_2} \\ 0 & \varphi_{f_0} & 0 & \varphi_{f_1} & 0 & \varphi_{f_2} \\ P_{m_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{f_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{f_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

де  $\varphi_{m_i}$ ,  $\varphi_{f_i}$  – відповідна кількість самців і самок, що народжує самка  $i$ -ої вікової групи,  $P_{m_i}$ ,  $P_{f_i}$  – ймовірності того, що самець і самка доживуть до наступного вікового цензу в момент  $t$ .

Основне рівняння –

$$x(t + 1) = Lx(t) = L^t x(0).$$

Дослідження проводяться, як і у випадку (8).

## Узагальнена модель Леслі

Класична модель Леслі припускає постійність коефіцієнтів народжуваності та виживання незалежно від щільності популяції або чисельності окремих вікових груп. Очевидно, що такий підхід не завжди є виправданим. Значно частішою є ситуація, коли внутрішньопопуляційні зв'язки суттєво залежать від обсягів вікових груп. Розглянемо узагальнену модель Леслі, яку в матричному вигляді можна записати так:

$$x(t + 1) = L(x(t))x(t). \quad (11)$$

Елементи матриці  $L$  є функціями вектора чисельностей  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ :

$$L = \begin{pmatrix} b_1(x) & b_2(x) & \cdots & b_{n-1}(x) & b_n(x) \\ s_1(x) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2(x) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1}(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Будемо припускати, що функції  $b_i(x)$ ,  $s_i(x)$  є неперервно диференційованими та

$$b_i(x) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad 0 < s_i(x) \leq 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

Розв'язок рівняння (11) вигляду  $x(t) = x^* = const$  (для довільного  $t$ ) називається *стаціонарним* або *рівноважним*. Отже, в моделі (11) стани рівноваги  $x^*$  визначаються розв'язком рівняння:

$$x^* = L(x^*)x^*. \quad (12)$$

Рівняння (12) має ненульовий розв'язок, якщо існує невід'ємний вектор  $x^*$  такий, що

$$b_1(x^*) + b_2(x^*)s_1(x^*) + \dots + b_n(x^*)s_1(x^*)s_2(x^*) \dots s_{n-1}(x^*) = 1. \quad (13)$$

Рівняння (13) може мати і не один розв'язок. Оскільки функції  $b_i$  та  $s_i$  є неперервно диференційованими, то для аналізу стійкості стану рівноваги можна застосувати метод лінеаризації. Функції, які складають вектор правої частини рівняння (11), розкладаються в околі стану рівноваги  $x^*$ , який досліджується, в ряд Тейлора, зберігаючи лише лінійні доданки. Лінеаризоване рівняння має вигляд:

$$\xi(t + 1) = \tilde{L}\xi(t), \quad (14)$$

де  $\xi(t) = x(t) - x^*$  (відхилення від стану рівноваги в момент часу  $t$ ), а елементи матриці  $\tilde{L}$  обчислюються так:

$$\tilde{L}_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{k=1}^n L_{ik} x_k(t) \right) \Big|_{x(t)=x^*}.$$

Розв'язок рівняння (14) можна представити у вигляді

$$\xi(t) = \tilde{L}^t \xi(0),$$

де  $\xi(0)$  – вектор-стовпчик, що характеризує початкове відхилення від рівноваги  $x^*$ .

Про стійкість стану рівноваги  $x^*$  можна судити за спектром власних значень матриці  $\tilde{L}$ . Якщо всі власні значення матриці  $\tilde{L}$  по модулю менші за одиницю, то стан рівноваги  $x^*$  буде асимптотично стійким ( $\xi(t) \rightarrow 0$ ;  $x(t) \rightarrow x^*$ ).

### ***Керування у задачах динаміки популяцій***

Складність задач оптимального керування є такою, що побудова розв'язків у явній аналітичній формі виявляється можливою лише у виняткових випадках. Більше того, не існує універсальних обчислювальних процедур з гарантією збіжності. Як правило, у задачах керування можна встановити необхідні і дуже рідко достатні умови оптимальності. Знаходження оптимальних керувань та траєкторій, що задовольняють усі умови, залишається значною справою мистецтва.

#### *1. Модель знищення шкідників за скінченний час*

Як відомо деякі шкідники (наприклад, колорадський жук) розвиваються спонтанно і на малому проміжку часу підпорядковуються закону Мальтуса (2).

Нехай  $u(t) \geq 0$  – інтенсивність знищення шкідників. Модель процесу керування знищенням шкідників запишеться у наступному вигляді

$$\frac{dN}{dt} = \mu N - u(t), \quad N(0) = N_0. \quad (15)$$

Розв'язок рівняння (15) має вигляд

$$N(t) = N_0 e^{\mu t} - \int_0^t u(\tau) e^{\mu(t-\tau)} d\tau. \quad (16)$$

Оскільки метою є знищення шкідників за скінченний час, то будемо вимагати, щоб при  $t = T$  виконувалась умова  $N(T) = 0$ . Тоді з рівняння (16) матимемо:

$$N_0 = \int_0^T u(\tau) e^{-\mu\tau} d\tau \quad (17)$$

Зокрема, при  $u(t) = u_0 = \text{const}$  з рівняння (17) знаходимо:

$$N_0 = \frac{u_0}{\mu} (1 - e^{-\mu T}).$$

Отже, можна підібрати таку функцію керування  $u(t)$ , що за скінченний час  $T$  популяція шкідників буде знищена.

## 2. Модель про вирубку дерев

Дерева в лісі класифікують, як правило, за розміром, а не за віком. Тому можна для побудови моделі використати модель Леслі. Проте основна складність при побудові моделі лісу полягає у визначенні аналогу тієї частини популяції (вікові групи), яка відповідає за плодовитість. Якщо припустити, що ліс відновлюється природним шляхом, то вільний простір, що утворився в результаті вирубки дерев, буде заповнюватись або природним відновленням, або кронами сусідніх дерев. Тому елементи матриці Леслі, що описують плодовитість, залежать від числа вирубаних дерев.

Якщо у віковому класі  $j$  в момент часу  $t$  маємо  $n_j$  дерев, то при стійкій віковій структурі популяції в момент часу  $t + 1$  у цьому класі буде  $\alpha n_j$  дерев та  $(\alpha - 1)n_j$  з них буде вирубано, щоб звести чисельність до  $n_j$ . У цьому випадку вихідна матриця Леслі матиме вигляд  $L = (l_{ij})_1^n$ , ненульові елементи якої визначаються так:

$$\begin{cases} l_{11} = a_1 + c_1(\alpha - 1), \\ l_{1j} = c_j(\alpha - 1), \quad j = \overline{2, n-1}, \\ l_{1n} = c_n(\alpha - a_n), \\ l_{jj} = a_j, \quad j = \overline{2, n}, \\ l_{j+1,j} = b_j, \quad j = \overline{1, n-1}. \end{cases} \quad (18)$$

де  $a_j$  – ймовірність того, що дерево залишається в  $j$ -му віковому класі;  $b_j$  – ймовірність того, що дерево перейде в наступний віковий клас;  $c_j$  – число дерев вікового класу «нуль», який заповнює вільний простір, що утворився в результаті вирубки одного дерева  $j$ -го вікового класу.

Величина  $a_n$  – керуючий параметр, що залежить від числа дерев, які необхідно залишити в найстаршому віковому класі. Дуже часто  $a_n = 0$ , причому  $a_n = 1 - b_n$ .

Доведено, що ця модель має лише одне власне значення більше одиниці, та відповідний йому додатній власний вектор.

### **Приклад 3.** Задача про вирубку сосни звичайної.

Нехай дерева в лісі розбиті на 6 вікових класів. Матриця Леслі має вигляд:

$$L = \begin{pmatrix} 0.72 & 0 & 0 & 3.6(\lambda - 1) & 5.1(\lambda - 1) & 7.5\lambda \\ 0.28 & 0.69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.31 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.23 & 0.63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.37 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Найбільше власне значення матриці (19)  $\lambda_L = 1.204$ , відповідну частка для вирубки дерев складає:  $H = \left(1 - \frac{1}{\lambda_L}\right) \approx 17\%$ .

### *3. Модель про вилов риби у ставку*

Розглянемо ізольовану популяцію та вивчимо зміну її чисельності. Для дослідження зміни чисельності використаємо логістичне рівняння у безрозмірних величинах:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x), \quad x(0) = x_0. \quad (20)$$

Стаціонарні точки цього рівняння  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 1$ . Розв'язок рівняння (20) матиме вигляд:

$$x(t) = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x_0}\right)e^{-t}}. \quad (21)$$

З розв'язку (21) видно, що при  $t \rightarrow +\infty$   $x(t) \rightarrow 1 = q_2$ . Таким чином, маємо стійкий стан рівноваги при довільному початковому значенні  $x_0 > 0$ .

Введемо деяку квоту  $p > 0$  на вилов популяції риби, вважаючи її керуючим фактором. Тоді вихідна модель матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x) - p, \quad x(0) = x_0. \quad (22)$$

Знайдемо стаціонарні точки рівняння (22):

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - p}. \quad (23)$$

Значення точок спокою (23) буде залежати від знаку дискримінанту:

- 1)  $D = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}$ , тоді  $x_{1,2} = \frac{1}{2}$ .
- 2)  $D > 0 \Leftrightarrow p < \frac{1}{4}$  (нехай  $p = \frac{1}{4} - \varepsilon^2, \varepsilon > 0$ ), тоді  $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \varepsilon$ .
- 3)  $D < 0 \Leftrightarrow p > \frac{1}{4}$  (нехай  $p = \frac{1}{4} + \varepsilon^2, \varepsilon > 0$ ), тоді дійсних коренів немає.

Розглянемо детальніше кожен з трьох випадків.

- 1) Нехай  $p = \frac{1}{4}$ , тоді  $x_{1,2} = \frac{1}{2}$ . Рівняння (22) матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x) - \frac{1}{4}, \quad x(0) = x_0. \quad (24)$$

Перепишемо це рівняння у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2, \quad x(0) = x_0. \quad (25)$$

Розв'язавши (25), знайдемо, що

$$-\frac{1}{x - \frac{1}{2}} = t + C,$$

де

$$C = -\frac{1}{x_0 - \frac{1}{2}}.$$

Отже, маємо:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{t+C}, \quad x_0 \neq \frac{1}{2}. \quad (26)$$

При  $x_0 > \frac{1}{2}$   $x(t) \rightarrow \frac{1}{2}$ . При  $x_0 < \frac{1}{2}$   $x(t) \rightarrow 0$ . Таким чином, якщо квота на вилов складає 25 %, то динаміка популяції залежить від початкових умов. Якщо початкова чисельність буде вище половини максимально можливої, то стабілізація чисельності популяції відбувається на половині від максимально можливої. В протилежному випадку популяція вимирає. Вигляд розв'язків (26) подано на рис. 3.

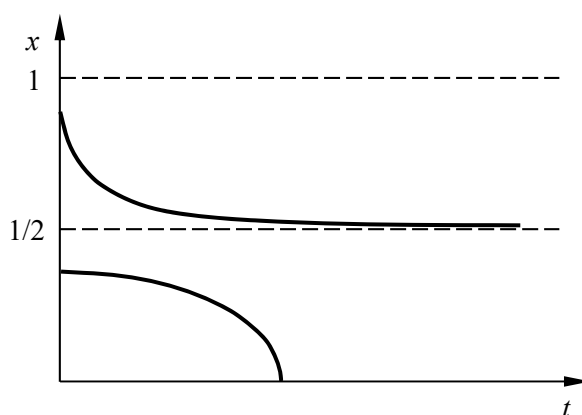


Рисунок 3. Динаміка чисельності за квоти  $p = \frac{1}{4}$

2) Нехай  $p < \frac{1}{4}$  (тоді  $p = \frac{1}{4} - \varepsilon^2$ ,  $\varepsilon > 0$ ),  $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \varepsilon$ . Рівняння (22) матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{1}{4} + \varepsilon^2, \quad x(0) = x_0. \quad (27)$$

Перепишемо (27) у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \varepsilon^2\right), \quad x(0) = x_0. \quad (28)$$

Стани рівноваги рівняння (28)  $x_1 = \frac{1}{2} + \varepsilon$  та  $x_2 = \frac{1}{2} - \varepsilon$ . Якщо скористатися методом лінеаризації правої частини рівняння (28) в околі кожної із вказаних точок рівноваги  $x_1$  та  $x_2$ , то неважко переконатися, що точка  $x_1$  є асимптотично стійкою, а  $x_2$  – нестійкою. Розв'язуючи рівняння (28), маємо:

$$\frac{1}{2\varepsilon} \ln \left| \frac{x - \frac{1}{2} - \varepsilon}{x - \frac{1}{2} + \varepsilon} \right| = -t + \ln C. \quad (29)$$

Пропонтеціювавши рівняння (29), отримаємо

$$\frac{x - (\frac{1}{2} + \varepsilon)}{x - (\frac{1}{2} - \varepsilon)} = C e^{-2\varepsilon t}, \quad (30)$$

де константа інтегрування має вигляд

$$C = \frac{x_0 - (\frac{1}{2} + \varepsilon)}{x_0 - (\frac{1}{2} - \varepsilon)}. \quad (31)$$

Подальші результати залежить від початкового значення  $x_0$ . Якщо  $x_0 < \frac{1}{2} - \varepsilon = x_2$ , то траєкторія, що визначається рівнянням (30)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon - C e^{-2\varepsilon t} (\frac{1}{2} - \varepsilon)}{1 - C e^{-2\varepsilon t}} = \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon - C e^{-2\varepsilon t} (\frac{1}{2} - \varepsilon) + 2\varepsilon}{1 - C e^{-2\varepsilon t}} = \\ &= \frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{1 - C e^{-2\varepsilon t}}, \end{aligned} \quad (32)$$

буде спадати і прямувати до нуля (це пов'язане, зокрема, із знаком довільної сталої (31)).

Якщо ж  $x_2 = \frac{1}{2} - \varepsilon < x_0 < \frac{1}{2} + \varepsilon = x_1$ , то траєкторія (32) буде зростаючою, і вона прямуватиме асимптотично стійкого стану  $x_1$ .

Нарешті, коли  $x_1 = \frac{1}{2} + \varepsilon < x_0$ , то траєкторія (32) буде спадати і прямуватиме до  $x_1$ .

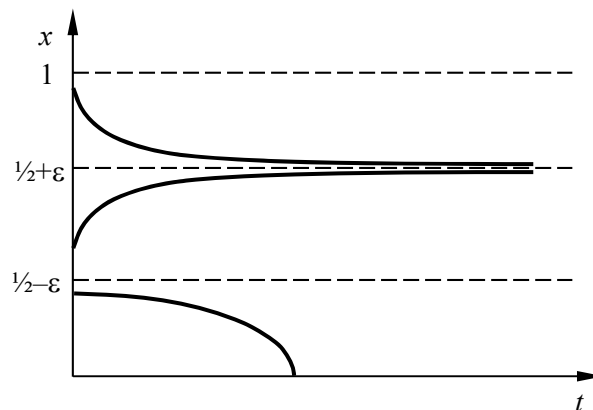


Рисунок 4. Динаміка чисельності за квоти  $p < \frac{1}{4}$

Вигляд відповідних розв'язків подано на рис. 4. Як видно з графіку, поведінка траєкторій нагадує поведінку в популяції з двома критичними рівнями чисельності.

3) Нехай  $p > \frac{1}{4}$  (тоді  $p = \frac{1}{4} + \varepsilon^2$ ,  $\varepsilon > 0$ ),  $x_{1,2}$  не є дійсними.

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{1}{4} - \varepsilon^2, \quad x(0) = x_0. \quad (33)$$

Перепишемо (33) у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \varepsilon^2\right), \quad x(0) = x_0. \quad (34)$$

Розв'язуючи рівняння (34), отримаємо:

$$\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{\varepsilon} = -t + C, \quad (35)$$

де константа інтегрування має вигляд

$$C = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{x_0 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}.$$

Перетворюючи рівняння (35), отримаємо

$$x(t) = \frac{1}{2} + \varepsilon \operatorname{tg}(C_1 - \varepsilon t),$$

де  $C_1 = \varepsilon C$ .

Схематично динаміку чисельності риб при такій високій квоті (більше за 25 %) наведено на рис. 5.

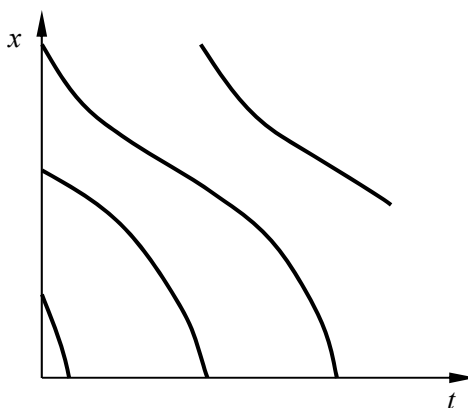


Рисунок 5. Динаміка чисельності за квоти  $p > \frac{1}{4}$

## ТЕМА 7

### *МОДЕЛІ ВЗАЄМОДІЇ ДВОХ ВИДІВ*

Основоположником сучасної математичної теорії популяцій справедливо вважається італійський математик Віто Вольтерра, який розробив математичну теорію біологічних спільнот, апаратом для якої слугують диференціальні та інтегро-диференціальні рівняння. У своїх працях науковець спочатку формулював деякі припущення про математичні об'єкти, які передбачається вивчати, а потім проводив математичне дослідження властивостей цих об'єктів. В подальшому популяційна динаміка розвивалася, здебільшого, в руслі ідей, що висловлювались Вольтерром.

Системи, що вивчені Вольтерром, складаються з двох або декількох видів. В основу рівнянь, що описують взаємодію цих видів, покладені такі уявлення:

#### *Гіпотези Вольтерри*

1. Їжа або наявна в необмеженій кількості, або її надходження з плином часу жорстко регламентоване.
2. Особини кожного виду вмирають так, що в одиницю часу гине постійна частка існуючих особин.
3. Хижі види поїдають жертв, причому за одиницю часу кількість жертв, яких з'їли, завжди пропорційна ймовірності зустрічі особин цих двох видів, тобто, добутку кількості хижаків та кількості жертв.
4. Якщо їжа наявна в обмеженій кількості та є декілька видів, які здатні її споживати, то частка їжі, що споживається видом за одиницю часу, пропорційна кількості особин цього виду, причому взятої з деяким коефіцієнтом, який залежить від виду (моделі міжвидової конкуренції).
5. Якщо вид харчується їжею, що наявна в необмеженій кількості, то приріст чисельності виду за одиницю часу є пропорційним чисельності виду.
6. Якщо вид харчується їжею, що наявна в обмеженій кількості, то його розмноження регулюється швидкістю споживання їжі, тобто, за одиницю часу приріст пропорційний кількості спожитої їжі.

## *Класифікація типів взаємодії*

Відповідно до гіпотез Вольтерри взаємодія двох видів, чисельності яких  $N_1$  та  $N_2$ , можуть бути описані рівняннями:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = a_1 N_1 + b_{12} N_1 N_2 - c_1 N_1^2, \\ \frac{dN_2}{dt} = a_2 N_2 + b_{21} N_1 N_2 - c_2 N_2^2. \end{cases} \quad (1)$$

Тут параметри  $a_i$  – константи власної швидкості росту видів,  $c_i$  – константи самообмеження чисельності (внутрішньовидової конкуренції),  $b_{ij}$  – константи взаємодії видів ( $i, j = 1, 2$ ). Знаки цих коефіцієнтів визначають тип взаємодії.

В біологічній літературі зазвичай класифікують взаємодії за механізмами, що беруть у них участь, і така класифікація здається неосяжною. Юджин Одум (математик, еколог та біолог), враховуючи запропоновані Вольтерром моделі, запропонував класифікацію не за механізмами, а за результатами. Згідно з цією класифікацією, оцінювати взаємовідношення варто як позитивні, негативні або нейтральні залежно від того, зростає, спадає чи залишається незмінною чисельність одного виду за наявності іншого виду (таблиця 1).

Таблиця 1. Типи взаємодії видів

<i>СИМБІОЗ</i>	+	+	$b_{12}, b_{21} > 0$
<i>КОМЕНСАЛІЗМ</i>	+	<b>0</b>	$b_{12} > 0, b_{21} = 0$
<i>ХИЖАК-ЖЕРТВА</i>	+	–	$b_{12} > 0, b_{21} < 0$
<i>АМЕНСАЛІЗМ</i>	<b>0</b>	–	$b_{12} = 0, b_{21} < 0$
<i>КОНКУРЕНЦІЯ</i>	–	–	$b_{12}, b_{21} < 0$
<i>НЕЙТРАЛІЗМ</i>	<b>0</b>	<b>0</b>	$b_{12}, b_{21} = 0$

### *Модель «хижак – жертва»*

Стосунки з умовною характеристикою «хижак – жертва» є найістотнішими для функціонування екосистем. В основу відповідної моделі покладені такі ідеалізовані уявлення про характер внутрішньо- та міжвидових стосунків у спільноті, що складається з виду «хижак» і виду «жертва»:

- 1) за умови відсутності хижака популяція жертви розмножується

експоненціально;

2) за умови відсутності жертви популяція хижака експоненціально вимирає;

3) сумарна кількість біомаси жертв, що споживається популяцією хижака за одиницю часу, лінійно залежить від густини популяції жертви і від щільності популяції хижака;

4) біомаса жертви, що споживається хижак, перетворюється з певним коефіцієнтом в біомасу хижака;

5) будь-які додаткові фактори, що впливають на динаміку популяції жертви і хижака, відсутні.

За цих припущень дана модель може бути описана у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2 = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2 N_2 + \gamma_2 N_1 N_2 = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2, \end{cases} \quad (2)$$

де  $N_1$  – густина популяції жертви;  $N_2$  – густина популяції хижака;  $\varepsilon_1 > 0$  – швидкість розмноження популяції жертви за відсутності хижака;  $\varepsilon_2 > 0$  – природна смертність хижака;  $\gamma_1 > 0$  – питома швидкість споживання популяцією хижака популяції жертви при одиничній густині обох популяцій;  $\gamma_2/\gamma_1 > 0$  – коефіцієнт перетворення біомаси жертви, що була спожита хижак, на його біомасу. Інакше кажучи, популяції жертви та хижака розмножуються з коефіцієнтами приросту, що дорівнюють відповідно  $(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)$  та  $(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)$ . Модель (2) відома також і як *модель Лоткі-Вольтерри*.

Для знаходження рівноваги системи (2) потрібно розв'язати систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1 = 0, \\ (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

з якої:

$$1) N_1^* = 0, N_2^* = 0;$$

$$2) N_1^* = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, N_2^* = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}.$$

Нехай система знаходиться в стані рівноваги. Тоді зображуюча точка знаходиться в одній з особливих точок системи, в яких за визначенням:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Чи є стійкою особлива точка, визначається тим, чи піде зображуюча точка при малому відхиленні від стаціонарного стану. Стосовно системи з двох рівнянь визначення стійкості на мові  $\varepsilon, \delta$  виглядає так:

Стан рівноваги стійкий, якщо для довільної заданої області відхилень від стану рівноваги ( $\varepsilon$ ) можна вказати область  $\delta(\varepsilon)$ , що оточує стан рівноваги, і має ту властивість, що жодна траєкторія, яка починається всередині області  $\delta$ , ніколи не досягне границі  $\varepsilon$  (рис. 1).

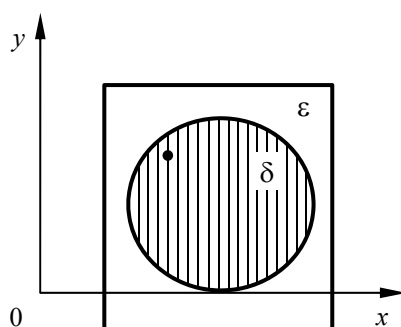


Рисунок 1. Ілюстрація до визначення стійкості

Для великого класу систем – «грубих» систем – інформацію про тип поведінки в околі стаціонарного стану можна отримати, досліджуючи не вихідну, а спрощену лінеаризовану систему. «Грубі» системи – це системи диференціальних рівнянь, у яких топологічна поведінка траєкторій не змінюється при малих збуреннях правої частини. Згідно із загальноприйнятою точкою зору тільки «грубі» системи можуть описувати реальні процеси. Не можна довіряти математичній моделі, яка різко змінює свою поведінку при малій зміні параметрів, що входять до неї (і які в реальності ніколи не можуть визначатися точно).

Проаналізуємо знайдені стани рівноваги на стійкість. Нехай

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

автономна система диференціальних рівнянь, і  $a = (a^1, \dots, a^n)$  – її стан рівноваги;

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f^i(x)}{\partial x^j} \right|_{x=a}; \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^n.$$

Тоді справедлива така теорема.

**Теорема.** Якщо всі власні значення матриці  $A$  мають від'ємні дійсні частини, то стан рівноваги  $a$  системи (4) асимптотично стійкий.

Таким чином, для дослідження стійкості потрібно лінеаризувати систему (2); при цьому отримаємо матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2^* & -\gamma_1 N_1^* \\ \gamma_2 N_2^* & -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1^* \end{pmatrix}.$$

У першій точці рівноваги характеристичне рівняння має вигляд:

$$(\varepsilon_1 - \lambda_1)(-\varepsilon_2 - \lambda_2) = 0.$$

Звідси:

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 \quad \text{і} \quad \lambda_2 = -\varepsilon_2.$$

Оскільки  $Re(\lambda_1) = \varepsilon_1 > 0$ , то рівновага 1) нестійка.

Для другої точки рівноваги маємо:

$$\lambda^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}.$$

Звідси:  $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0$ . Отже, даний метод застосувати не можна.

Помножимо перше рівняння в (2) на  $\gamma_2$ , друге – на  $\gamma_1$  і додамо їх:

$$\frac{\gamma_2 dN_1}{dt} + \frac{\gamma_1 dN_2}{dt} = \varepsilon_1 \gamma_2 N_1 - \varepsilon_2 \gamma_1 N_2. \quad (5)$$

Тепер помножимо перше рівняння в (2) на  $\varepsilon_2$  і поділимо на  $N_1$ , а друге – помножимо на  $\varepsilon_1$  і поділимо на  $N_2$ ; потім знову додамо їх:

$$\frac{\varepsilon_2}{N_1} \frac{dN_1}{dt} + \frac{\varepsilon_1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} = \varepsilon_1 \gamma_2 N_1 - \varepsilon_2 \gamma_1 N_2. \quad (6)$$

З рівності правих частин (5) і (6) випливає рівність їхніх лівих частин:

$$\frac{\gamma_2 dN_1}{dt} - \frac{\varepsilon_2}{N_1} \frac{dN_1}{dt} = \frac{\varepsilon_1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} - \frac{\gamma_1 dN_2}{dt}.$$

Звідси шляхом інтегрування одержуємо:

$$\gamma_2 N_1 - \varepsilon_2 \ln N_1 = \varepsilon_1 \ln N_2 - \gamma_1 N_2 + \ln C,$$

а після потенціювання –

$$N_1^{-\varepsilon_2} e^{\gamma_2 N_1} = C N_2^{\varepsilon_1} e^{-\gamma_1 N_2}. \quad (7)$$

Оскільки біологічний зміст мають лише невід'ємні значення  $N_1, N_2$ , то достатньо побудувати сім'ю кривих (7) у першому квадранті. Схематичний фазовий портрет системи (2) (тобто її графік в координатних осях, що відповідають фазовим змінним  $N_1$  та  $N_2$ ) в першому квадранті показано на рис. 2.

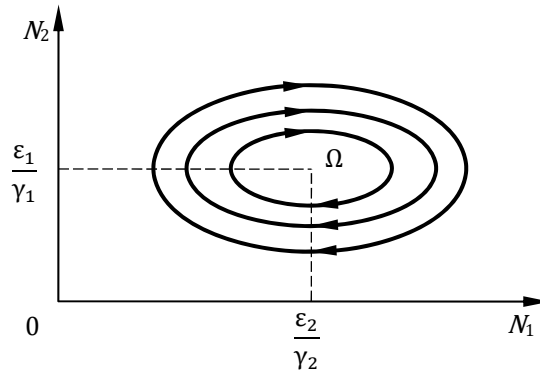


Рисунок 2. Схематичний фазовий портрет системи (2)

Тобто маємо нескінчену сім'ю концентричних замкнених кривих, що стягуються в одну точку  $\Omega = \left(\frac{\epsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\epsilon_1}{\gamma_1}\right)$ . З якісної теорії диференціальних рівнянь відомо, що при  $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0$  рівновага є так званим центром – точкою стійкою, але не асимптотично. Дослідження системи показує, що траєкторії поблизу особливої точки є концентричними еліпсами, а сама особлива точка – центром. Модель Вольтерри, яка розглядається, і вдалині від особливої точки має замкнуті траєкторії, хоча форма цих траєкторій вже відрізняється від еліпсоїдальної, і визначається параметрами системи (рис. 3).

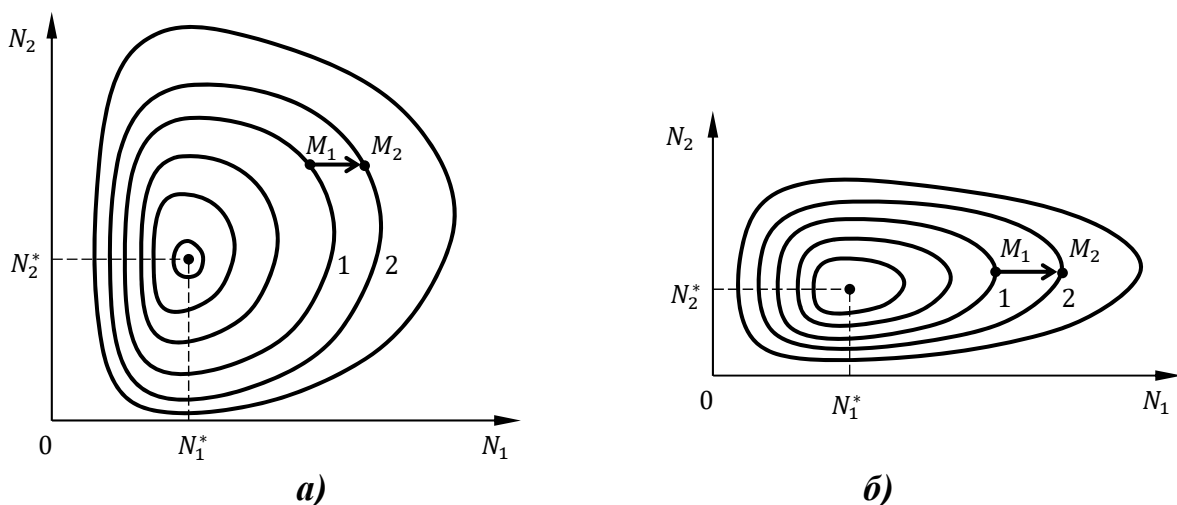


Рисунок 3. Фазові портрети системи (2). Особлива точка типу «центр»

а) – параметри системи:  $\epsilon_1 = 4, \quad \gamma_1 = 0.3, \quad \epsilon_2 = \gamma_2 = 0.4$

б) – параметри системи:  $\epsilon_1 = 2, \quad \gamma_1 = 0.3, \quad \epsilon_2 = \gamma_2 = 0.4$

Точка  $\Omega$  характеризує стаціонарний стан, що відповідає системі (2), оскільки її координати перетворюються в нуль  $\frac{dN_1}{dt}, \frac{dN_2}{dt}$ . У будь-якому іншому випадку  $\frac{dN_1}{dt}, \frac{dN_2}{dt}$  не можуть перетворюватися на нуль одночасно (при  $N_1 > 0, N_2 > 0$ ). Отже, точка  $(N_1, N_2)$  буде описувати криву завжди в одному й тому самому напрямку. Для характеристики цього руху вводиться поняття секторальної швидкості. Секторальною швидкістю вектора  $\Omega M$ , що обертається навколо  $\Omega$ , називають похідну за часом від площі, котру він «замітає» (остання береться алгебраїчно), за умови, що площа «замітається» в додатному напрямку. У площині  $(xOy)$  площа «замітається» в додатному напрямку, коли таке «замітання» відбувається при повороті від  $Ox$  до  $Oy$  на кут  $\pi/2$ . У цьому випадку секторальна швидкість дорівнює  $\frac{1}{2} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)$ , а в полярних координатах –  $\frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\varphi}{dt}$ .

У нашому випадку секторальна швидкість радіус-вектора, що виходить з точки  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \omega(N_1, N_2) &= \frac{1}{2} \left( (N_1 - N_1^*) \frac{dN_2}{dt} - (N_2 - N_2^*) \frac{dN_1}{dt} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\gamma_2 (N_1 - N_1^*)^2 N_2 + \gamma_1 (N_2 - N_2^*)^2 N_1), \end{aligned} \quad (8)$$

де  $(N_1^*, N_2^*)$  – координати точки  $\Omega$ .

Оскільки  $N_1 - N_1^*$  та  $N_2 - N_2^*$  не перетворюються в нуль одночасно, то одержаний вираз (8) завжди додатний. Якщо його розглянути як функцію від точки  $(N_1, N_2)$ , то він має деякий додатний мінімум  $m$ . Якщо  $(\rho, \varphi)$  – полярні координати з полюсом  $\Omega$ , то  $\frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} > m > 0$ , і якщо  $d$  – верхня грань відстаней від  $\Omega$  до точок кривої, то  $\frac{d\varphi}{dt} > \frac{2m}{d^2}$ .

Отже, точка  $(N_1, N_2)$  описує криву, рухаючись в напрямку від  $ON_1$  до  $ON_2$ , а кутова швидкість обертання навколо  $\Omega$  більша за певне додатне число. Таким чином, за якийсь скінчений час ця точка повернеться у свій початковий стан та відновить той самий рух, тобто наявна *періодичність*. Таким чином, зміна

чисельностей жертви та хижака з часом є коливаннями, причому коливання чисельності хижака відстають по фазі від коливань жертв.

Важливий наслідок періодичності  $N_1$  і  $N_2$  можна отримати, якщо записати рівняння (2) у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{d(\ln N_1)}{dt} = \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2, \\ -\frac{d(\ln N_2)}{dt} = \varepsilon_2 - \gamma_2 N_1. \end{cases}$$

Інтегруючи за періодом  $T$ , отримаємо:

$$0 = \varepsilon_1 T - \gamma_1 \int_{t_0}^{t_0+T} N_2(t) dt = \varepsilon_2 T - \gamma_2 \int_{t_0}^{t_0+T} N_1(t) dt,$$

звідки маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} &= T^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} N_2(t) dt, \\ \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} &= T^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} N_1(t) dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким чином,  $K_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$ ,  $K_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$  є середніми значеннями  $N_1$  та  $N_2$  протягом періоду  $T$ .

Припустимо, що відбувається рівномірне за часом і пропорційне до чисельності особин «вилучення» особин кожного виду (винищування, виловлювання, відстрілювання і т. ін.). Якщо за час  $dt$  вилучається  $\alpha \mu N_1 dt$  жертв і  $\beta \mu N_2 dt$  хижаків, то система (2) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \alpha \mu - \gamma_1 N_2) N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2 - \beta \mu + \gamma_2 N_1) N_2, \end{cases} \quad (10)$$

де числа  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  характеризують способи вилучення,  $\mu \geq 0$  – інтенсивність вилучення. Легко побачити, що система (10) отримана з (2) заміною  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  відповідно на  $(\varepsilon_1 - \alpha \mu)$  та  $(\varepsilon_2 + \beta \mu)$ .

Попередні результати можуть бути використані лише в тому випадку, якщо  $\varepsilon_1 - \alpha \mu > 0$ . Якщо заданий спосіб вилучення, то, доки інтенсивність  $\mu$  залишається меншою, ніж  $\varepsilon_1/\alpha$ , будуть відбуватися флуктуації (коливання

чисельності). Якщо  $\mu$  доволі мале, то, наприклад, середня кількість жертв, які вилучається за одиницю часу, дорівнюватиме:

$$T^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T} \alpha \mu N_1(t) dt = \alpha \mu \frac{\varepsilon_2 + \beta \mu}{\gamma_2}. \quad (11)$$

Порівняємо ці коливання з тими, які мали місце до «вилучення». Середні значення для  $N_1, N_2$  замість  $\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$ , дорівнюватимуть тепер  $\frac{\varepsilon_2 + \beta \mu}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1 - \alpha \mu}{\gamma_1}$ .

Отже, отримані з аналізу системи (2) результати дають змогу сформулювати такі закони:

1. *Закон періодичного циклу.* Коливання чисельностей обох видів періодичні. Для певної пари значень чисельностей стан біологічної спільноти стаціонарний і рівновага стійка.

2. *Закон збереження середніх.* Середні протягом періоду  $T$  чисельності особин обох видів не залежать від початкових умов і дорівнюють числам, що відповідають нетривіальному стаціонарному стану для даних значень параметрів  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2$ .

3. *Закон зміни середніх.* Якщо обидва види «вилучаються» рівномірно і пропорційно до кількості особин, то середня кількість жертв зростає, а хижаків – зменшується.

### ***Врахування внутрішньовидової конкуренції***

Серйозним недоліком розглянутої моделі (2) є нестійкість розв'язків щодо малих випадкових впливів, що призводять до зміни змінних. Оскільки природні системи зазнають величезної кількості випадкових впливів, реалістична модель має бути щодо них стійкою. Різноманітні модифікації розглянутої нами системи, вивчені самим Вольтерром та іншими авторами, позбавлені відповідних недоліків.

Наприклад, одним з недоліків моделі (2) є те, що за відсутності хижака чисельність жертви може необмежено зростати. Насправді цього не відбувається, завдячуючи конкуренції всередині популяції. Зокрема, врахування внутрішньовидової конкуренції в популяції жертв призводить до системи (узагальнена модель Лоткі-Вольтерри):

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 - \beta N_1)N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)N_2. \end{cases} \quad (12)$$

Ця система має три стани рівноваги:

$$1) N_1^* = 0, N_2^* = 0;$$

$$2) N_1^{**} = \frac{\varepsilon_1}{\beta}, N_2^{**} = 0; \quad (13)$$

$$3) q_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, q_2 = \frac{\varepsilon_1 \gamma_2 - \beta \varepsilon_2}{\gamma_1 \gamma_2}. \quad (14)$$

Єдиний нетривіальний стан рівноваги маємо в точці (14). За умови

$$\varepsilon_1 \gamma_2 - \beta \varepsilon_2 > 0, \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} > \frac{\beta}{\gamma_2} \quad (15)$$

величина  $q_2 > 0$ , тобто цей стан рівноваги існуватиме.

Лінеаризуємо систему рівнянь (12) в околі точки рівноваги (14). Матриця лінеаризованої системи матиме вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} -\beta q_1 & -\gamma_1 q_1 \\ \gamma_2 q_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді відповідне характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + \beta q_1 \lambda + \gamma_1 \gamma_2 q_1 q_2 = 0. \quad (16)$$

З рівняння (16) випливає, що

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\beta q_1 < 0, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \gamma_1 \gamma_2 q_1 q_2 > 0. \quad (17)$$

Отже, з (17) випливає, що нетривіальна точка рівноваги (14) буде асимптотично стійкою. Причому вона буде або фокусом за умови

$$D = (\beta q_1)^2 - 4\gamma_1 \gamma_2 q_1 q_2 < 0,$$

або вузлом – при  $D > 0$ .

Що стосується напівтривіальної точки рівноваги (13), то такий стан системи може трапитись, очевидно, за відсутності хижака. Матриця лінеаризованої системи в цій точці матиме вигляд

$$A = \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 & -\frac{\gamma_1 \varepsilon_1}{\beta} \\ 0 & \frac{\varepsilon_1 \gamma_2 - \beta \varepsilon_2}{\beta} \end{pmatrix}.$$

Звідси, очевидно, що її власні значення

$$\lambda_1 = -\varepsilon_1 < 0, \quad \lambda_2 = \frac{\varepsilon_1\gamma_2 - \beta\varepsilon_2}{\beta} > 0.$$

Додатність другого власного значення впливає із співвідношення (15), яке є умовою існування нетривіального стану рівноваги (14). Таким чином, точка рівноваги (13) є сідловою; цей стан рівноваги нестійкий.

Повна система рівнянь Лоткі-Вольтерри має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_{11}N_1 - \gamma_{12}N_2)N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_{21}N_1 - \gamma_{22}N_2)N_2. \end{cases} \quad (18)$$

В кожне рівняння входять квадратичні члени. Ці члени враховують внутрішньовидову конкуренцію (або ж самообмеження).

Поклавши  $\dot{N}_1 = \dot{N}_2 = 0$ , отримаємо систему алгебраїчних рівнянь для знаходження точок рівноваги

$$\begin{cases} (\varepsilon_1 - \gamma_{11}N_1 - \gamma_{12}N_2)N_1 = 0, \\ (-\varepsilon_2 + \gamma_{21}N_1 - \gamma_{22}N_2)N_2 = 0, \end{cases} \quad (19)$$

з якої маємо такі розв'язки:

$$(0, 0); \quad (0, N'_2); \quad (N'_1, 0); \quad (\tilde{N}_1, \tilde{N}_2).$$

Тут

$$\begin{aligned} N'_1 &= \frac{\varepsilon_1}{\gamma_{11}}, & N'_2 &= -\frac{\varepsilon_2}{\gamma_{22}}, \\ \tilde{N}_1 &= \frac{\varepsilon_1\gamma_{22} + \varepsilon_2\gamma_{12}}{\gamma_{11}\gamma_{22} + \gamma_{12}\gamma_{21}}, & \tilde{N}_2 &= \frac{\varepsilon_1\gamma_{21} - \varepsilon_2\gamma_{11}}{\gamma_{11}\gamma_{22} + \gamma_{12}\gamma_{21}}. \end{aligned}$$

Очевидно, що друга точка не має біологічного змісту. Дослідження на стійкість решти точок можна провести методом лінеаризації, як було показано вище. Зокрема, перша (тривіальна) та третя (напівтривіальна) точки завжди будуть сідловими в першому наближенні (за умови існування четвертої точки, тобто  $\varepsilon_1\gamma_{21} - \varepsilon_2\gamma_{11} > 0$ ). Варіанти фазових портретів системи (18) наведено на рис. 4.

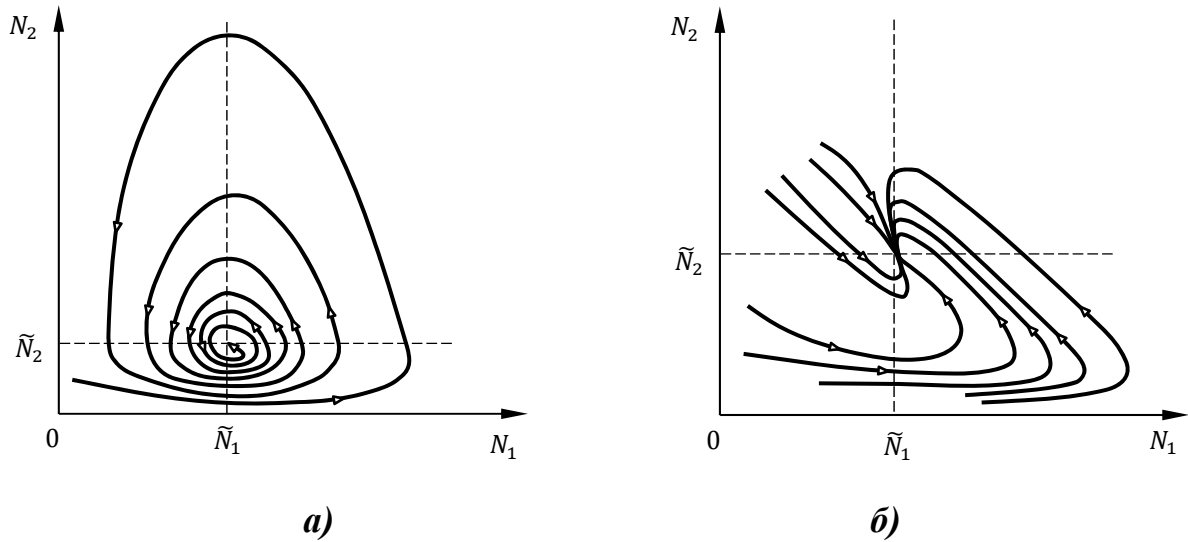


Рисунок 4. Варіанти фазових портретів системи (18)

- а) – стійкий фокус:  $\varepsilon_1 = 2, \quad \gamma_{11} = 1, \quad \gamma_{12} = 18, \quad \varepsilon_2 = 3, \quad \gamma_{21} = 5, \quad \gamma_{22} = 1;$   
 б) – стійкий вузол:  $\varepsilon_1 = 2, \quad \gamma_{11} = 1, \quad \gamma_{12} = 1, \quad \varepsilon_2 = 3, \quad \gamma_{21} = 1, \quad \gamma_{22} = 1$

### Модель Базикіна

Теоретичний аналіз моделей взаємодій видів найбільш вичерпно проведено О.Д. Базикіним (1985). Розглянемо одну з вивчених в цій книзі моделей типу «хижак – жертва».

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = AN_1 - \frac{BN_1N_2}{1+\beta N_1} - EN_1^2, \\ \frac{dN_2}{dt} = -CN_2 + \frac{DN_1N_2}{1+\beta N_1} - MN_2^2. \end{cases} \quad (20)$$

Система (20) є узагальненням найпростішої моделі «хижак – жертва» (2) з врахуванням ефекту насичення хижаків. У моделі (2) припускається, що інтенсивність поїдання жертв лінійно зростає з ростом щільності жертв. А це при великих щільностях жертв не відповідає дійсності. Для опису залежності раціону хижака від щільності жертв можуть бути обрані різні функції. Найбільш суттєво, щоб вибрана функція із зростанням  $N_1$  асимптотично прямувала до постійного значення. В моделі (18) використовувалась логістична залежність. У моделі Базикіна (20) в ролі такої функції вибрано гіперболу  $N_1/(1 + \beta N_1)$ . Зауважимо, що такий вигляд має відома формула Моно, яка описує залежність швидкості росту мікроорганізмів від концентрації поживного субстрату. Тут в ролі «субстрату» виступає жертва, а в ролі «мікроорганізмів» – хижак.

Система (20) залежить від семи параметрів. Кількість параметрів можна зменшити за допомогою такої заміни змінних:

$$\begin{aligned}x &= (A/D)N_1; & y &= (A/B)/N_2; \\t &= (1/A)\tau; & \gamma &= (C/A); \\ \alpha &= \beta(A/D); & \varepsilon &= (E/D); & \mu &= (M/B).\end{aligned}$$

В нових безрозмірних змінних система має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x - \frac{xy}{1+\alpha x} - \varepsilon x^2, \\ \frac{dy}{d\tau} = -\gamma y + \frac{xy}{1+\alpha x} - \mu y^2, \end{cases} \quad (21)$$

і залежить від чотирьох параметрів.

Залежно від співвідношення між параметрами системи (21) можливе більше розмаїття фазових портретів, кількість точок спокою зростає до п'яти, одна з яких може бути нестійким фокусом, що обмежений стійким граничним циклом.

### ***Взаємодія двох видів, що вживають одну їжу***

Дотримуючись введених раніше позначень, будемо вважати, що популяції  $N_1$  та  $N_2$ , (це їх відповідні кількісні характеристики), які вживають одну їжу, більш того, будемо вважати, що ці види борються за спільну їжу (згідно з наведеною раніше класифікацією має місце конкуренція між даними видами), мають додатні коефіцієнти приросту  $\varepsilon_i$  (тобто, кількість спільної їжі необмежена) і додатні коефіцієнти потреби в їжі  $\gamma_i$ . Нехай  $F(N) = F(N_1, N_2)$  – деяка функція, що виражає швидкість споживання їжі, причому така, що задовольняє умову  $F(0,0) = 0$ , і монотонно зростає за кожною змінною:  $F'_{N_i} > 0$ .

Система диференціальних рівнянь динаміки таких популяцій може бути представлена у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N)), \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 F(N)). \end{cases} \quad (22)$$

Нехай у початковий момент  $t = 0$  задано кількісні характеристики популяцій:

$$N_1(0) = N_1^0, \quad N_2(0) = N_2^0. \quad (23)$$

Для системи рівнянь (22) знайдемо перший інтеграл. З цією метою рівняння (22) розділимо відповідно на  $N_1$  та  $N_2$ . Далі перше рівняння помножимо на  $\gamma_2$ , а друге – на  $-\gamma_1$ . Тепер додаючи та інтегруючи отримані вирази, матимемо співвідношення:

$$\frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} = C e^{(\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1)t}. \quad (24)$$

З умов (23) знаходимо константу інтегрування:

$$C = \frac{(N_1^0)^{\gamma_2}}{(N_2^0)^{\gamma_1}}. \quad (25)$$

Випадок  $\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1 = 0$  є малоімовірним, а тому його ми розглядати не будемо. Припустимо, для визначеності, що

$$\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1 > 0. \quad (26)$$

Звідси маємо, що  $\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$ . Тоді згідно з (24) при  $t \rightarrow \infty$  матимемо:

$$\frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Очевидно, що реалістичним буде випадок, коли величини  $N_i$  є обмеженими. При цьому співвідношення (27) може мати місце лише за умови, що  $N_2 \rightarrow 0$ . Звідси випливає такий висновок: із двох біологічних видів, що борються за спільну їжу, той вид, у якого співвідношення відповідних параметрів  $\frac{\varepsilon}{\gamma}$  є меншим, буде вимирати.

Розглянемо частинний випадок рівнянь (22) – рівняння типу Вольтерри:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2), \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1). \end{cases} \quad (28)$$

Тут параметри  $\varepsilon_i, \gamma_i$ , як і раніше, є додатними.

Нетривіальна точка спокою системи (28), очевидно, визначається як

$$\tilde{N}_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \quad \tilde{N}_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}. \quad (29)$$

Лінеаризуємо систему рівнянь (28) в околі точки рівноваги (29)  $\tilde{N} = (\tilde{N}_1, \tilde{N}_2)$ .

Матимемо таку матрицю системи лінійного наближення:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \gamma_1 \tilde{N}_2 & -\gamma_1 \tilde{N}_1 \\ -\gamma_2 \tilde{N}_2 & \varepsilon_2 - \gamma_2 \tilde{N}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\gamma_1 \varepsilon_2}{\gamma_2} \\ -\frac{\gamma_2 \varepsilon_1}{\gamma_1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Очевидно, що характеристичне рівняння матриці (30) буде мати вигляд:

$$\lambda^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0,$$

а його корені –

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}.$$

Тобто, особлива точка у першому наближенні – сідло (нестійка рівновага, один вид може «витіснити» інший впритул до повного вимирання останнього).

### **Приклад 1.** Конкуруючі види.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь, яка описує конкуренцію (змагання) двох видів:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = a_1 N_1 - b_1 N_1 N_2 - c_1 N_1^2, \\ \frac{dN_2}{dt} = a_2 N_2 - b_2 N_1 N_2 - c_2 N_2^2, \end{cases} \quad (31)$$

де всі коефіцієнти  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  є додатними.

Система (31) має чотири точки рівноваги:

$$(0, 0); \quad \left(0, \frac{a_2}{c_2}\right); \quad \left(\frac{a_1}{c_1}, 0\right); \quad (\tilde{N}_1, \tilde{N}_2).$$

Тут  $\tilde{N}_1$  та  $\tilde{N}_2$  є розв'язками системи

$$\begin{cases} c_1 N_1 + b_1 N_2 = a_1, \\ b_2 N_1 + c_2 N_2 = a_2. \end{cases}$$

Звісно, будемо вважати, що точка  $(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2)$  має біологічний зміст, тобто її координати є додатними.

Нас цікавитиме випадок стійкості точки рівноваги  $(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2)$ . Виявляється, що це залежить від того, яка з нерівностей виконується:

$$b_1 b_2 < c_1 c_2 \quad \text{або} \quad b_1 b_2 > c_1 c_2. \quad (32)$$

Кожна з нерівностей у (32) має свою інтерпретацію. Оскільки добуток  $c_1 c_2$  є мірою самообмеження (відповідає за внутрішньовидову конкуренцію), а добуток  $b_1 b_2$  є мірою конкуренції, то аналіз точки рівноваги  $(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2)$  показує таке:

- 1) якщо  $b_1 b_2 < c_1 c_2$ , тобто конкуренція є незначною у порівнянні із самообмеженням, то  $(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2)$  – асимптотично стійка точка рівноваги. Таким чином, обидва види можуть мирно співіснувати, і дійсно співіснують у даному випадку;
- 2) якщо ж  $b_1 b_2 > c_1 c_2$ , тобто конкуренція домінує порівняно із самообмеженням, то  $(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2)$  – нестійка точка рівноваги. Таким чином, обидва види не можуть мирно співіснувати: один з видів виживає, а інший вимирає.

Пропонуємо самостійно знайти та дослідити на стійкість усі стани рівноваги системи вигляду (31), а також побудувати відповідні фазові портрети системи при таких варіантах параметрів:

- a)  $a_1 = 14, a_2 = 16, b_1 = 1, b_2 = 1, c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}$ ;
- b)  $a_1 = 14, a_2 = 16, b_1 = 1, b_2 = 1, c_1 = 2, c_2 = 2$ .

### ***Біфуркаційна діаграма***

Розглянемо систему двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases} \quad (33)$$

Тут  $a, b, c, d$  – константи,  $x, y$  – декартові координати на фазовій площині.

Введемо позначення:

$$\sigma = -(a + d), \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Тоді характеристичне рівняння матриці системи (33) запишеться у вигляді:

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0.$$

Розглянемо площину з декартовими координатами  $(\sigma, \Delta)$  та позначимо на ній області, що відповідають тому чи іншому типу стану рівноваги, який визначається характером коренів характеристичного рівняння

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}.$$

Умовою стійкості стану рівноваги буде наявність від'ємної дійсної частини у  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$ . Необхідна і достатня умова цього – виконання нерівностей  $\sigma > 0$ ,  $\Delta > 0$ . На діаграмі (рис. 5) цій умові відповідають точки, які розташовані в першій чверті площини параметрів. Особлива точка буде фокусом, якщо  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  є комплексними. Цій умові відповідають ті точки площини, для яких  $\sigma^2 - 4\Delta < 0$ , тобто точки між двома гілками параболи  $\sigma^2 = 4\Delta$ . Точки півосі  $\sigma = 0$ ,  $\Delta > 0$ , відповідають станам рівноваги типу центр. Аналогічно,  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  – дійсні, але різних знаків, тобто особлива точка буде сідлом, якщо  $\Delta < 0$ , і т.д. В підсумку ми отримуємо діаграму розбиття площини параметрів  $\sigma$ ,  $\Delta$ , на області, що відповідають різним типам стану рівноваги.

Якщо коефіцієнти лінійної системи  $a, b, c, d$  залежать від деякого параметра, то при зміні цього параметра будуть змінюватися і величини  $\sigma$ ,  $\Delta$ . При переході через границі характер фазового портрета якісно змінюється. Тому такі границі називаються *біфуркаційними* – по різні боки від границі система має два топологічно різних фазових портрета і, відповідно, два різних типи поведінки.

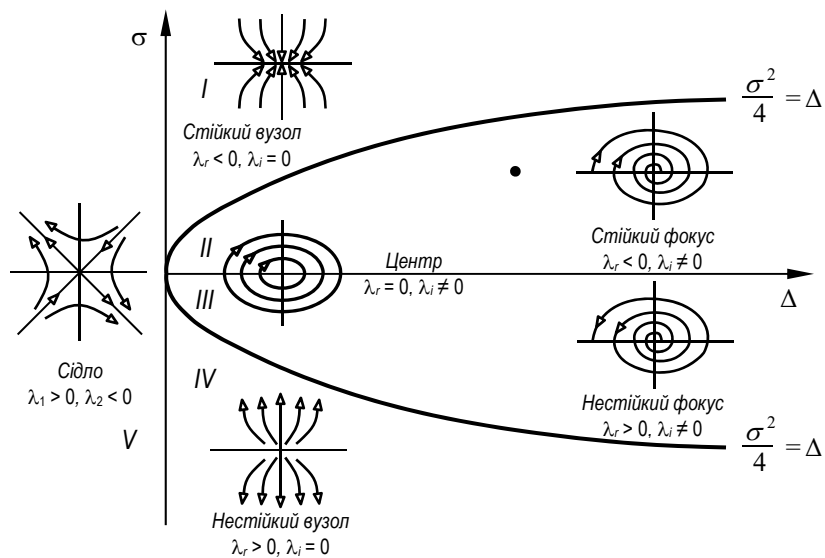


Рисунок 5. Біфуркаційна діаграма для системи лінійних рівнянь (33)

На діаграмі видно, як можуть проходити такі зміни. Якщо виключити особливі випадки – початок координат, – то легко бачити, що сідло може переходити у вузол, стійкий чи нестійкий при перетині осі ординат. Стійкий вузол може перейти або в сідло, або в стійкий фокус, і т.д. Відзначимо, що переходи

стійкий вузол – стійкий фокус та нестійкий вузол – нестійкий фокус не є біфуркаційними, оскільки топологія фазового простору при цьому не змінюється.

При біфуркаційних переходах, власне, змінюється характер стійкості особливої точки. Наприклад, стійкий фокус через центр може переходити в нестійкий фокус. Ця біфуркація називається *біфуркацією Андронова-Хопфа* за іменами вчених, які її дослідили.

**Приклад 2.** Біфуркація залежно від параметра.

Нехай маємо таку систему із параметром  $\alpha$ :

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = 2N_1 - N_1N_2 + \alpha N_1(5 - N_1), \\ \frac{dN_2}{dt} = -5N_2 + N_1N_2. \end{cases} \quad (34)$$

Для знаходження точок рівноваги системи (34) потрібно розв'язати систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (2 - N_2 + \alpha(5 - N_1))N_1 = 0, \\ (N_1 - 5)N_2 = 0. \end{cases} \quad (35)$$

З (35) отримуємо:

- 1)  $N_1^* = 0, N_2^* = 0$ ;
- 2)  $N_1^{**} = \frac{2+5\alpha}{\alpha}, N_2^{**} = 0$ ;
- 3)  $\tilde{N}_1 = 5, \tilde{N}_2 = 2$ .

Друга точка має біологічний зміст при  $N_1^{**} > 0$ , тобто коли або  $\alpha > 0$ , або  $\alpha < -\frac{2}{5}$ .

Матриця системи лінійного наближення має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 2 - N_2 + 5\alpha - 2\alpha N_1 & -N_1 \\ N_2 & -5 + N_1 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Розглянемо два варіанти допустимих значень параметра  $\alpha$ .

**I.**  $\alpha > 0$ .

Підставимо в матрицю (36) координати кожної з трьох точок спокою системи (34).

1) В точці  $(N_1^*, N_2^*)$  маємо:  $A = \begin{pmatrix} 2 + 5\alpha & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ . Очевидно, що власні значення цієї матриці  $\lambda_1 = 2 + 5\alpha > 0$ ,  $\lambda_2 = -5 < 0$ . Отже, тривіальна точка – сідлова (нестійка).

2) В точці  $(N_1^{**}, N_2^{**})$  маємо:  $A = \begin{pmatrix} -(2 + 5\alpha) & -\frac{2+5\alpha}{\alpha} \\ 0 & \frac{2}{\alpha} \end{pmatrix}$ . Власні значення:  $\lambda_1 = -(2 + 5\alpha) < 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{2}{\alpha} > 0$ . Тобто, напівтривіальна рівновага  $(N_1^{**}, N_2^{**})$  також є сідловою точкою.

3) В точці  $(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2)$  матриця  $A = \begin{pmatrix} -5\alpha & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Характеристичний поліном  $|A - \lambda E| = \lambda^2 + 5\alpha\lambda + 10 = 0$ . Таким чином, маємо:  $\lambda_1 + \lambda_2 = -5\alpha < 0$ ,  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 10 > 0$ . Отже, нетривіальна рівновага  $(5, 2)$  є асимптотично стійкою. Оскільки  $D = 25\alpha^2 - 40$ , то при  $D < 0$ , тобто  $0 < \alpha < \frac{2\sqrt{10}}{5}$ , маємо в першому наближенні фокус, а при  $D > 0$ , тобто при  $\alpha \geq \frac{2\sqrt{10}}{5}$ , – вузол.

$$\text{II. } \alpha < -\frac{2}{5}.$$

Знову ж таки, підставимо в матрицю (36) координати кожної з трьох точок рівноваги системи (34).

1) В точці  $(N_1^*, N_2^*)$ :  $A = \begin{pmatrix} 2 + 5\alpha & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ . Очевидно, що власні значення цієї матриці  $\lambda_1 = 2 + 5\alpha < 0$ ,  $\lambda_2 = -5 < 0$ . Отже, тривіальна точка є асимптотично стійкою і вузлом у першому наближенні.

2) В точці  $(N_1^{**}, N_2^{**})$  маємо:  $A = \begin{pmatrix} -(2 + 5\alpha) & -\frac{2+5\alpha}{\alpha} \\ 0 & \frac{2}{\alpha} \end{pmatrix}$ . Власні значення:  $\lambda_1 = -(2 + 5\alpha) > 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{2}{\alpha} < 0$ . Таким чином, в цьому випадку напівтривіальна точка рівноваги  $(N_1^{**}, N_2^{**})$  залишається сідловою.

3) В точці  $(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2)$  матриця  $A = \begin{pmatrix} -5\alpha & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Характеристичний поліном  $|A - \lambda E| = \lambda^2 + 5\alpha\lambda + 10 = 0$ . Отже, маємо:  $\lambda_1 + \lambda_2 = -5\alpha > 0$ ,

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 10 > 0$ . Тобто, нетривіальна рівновага  $(5, 2)$  є нестійкою. При  $D < 0$ , тобто  $-\frac{2\sqrt{10}}{5} < \alpha < -\frac{2}{5}$  маємо в першому наближенні фокус; при  $D > 0$ , або ж  $\alpha \leq -\frac{2\sqrt{10}}{5}$ , точка в першому наближенні є вузлом.

Висновки з вищенаведеного дослідження можемо зробити такі:

- 1) При  $\alpha = 0$  система (34) є системою Вольтерри і другої точки рівноваги не існує.
- 2) При  $\alpha \neq 0$  друга точка рівноваги (напівтривіальна) завжди буде сідловою.
- 3) Біфуркація Андронова-Хопфа має місце для третьої (нетривіальної) точки рівноваги системи при переході через центр:

- ✓ при  $0 < \alpha < \frac{2\sqrt{10}}{5}$  – стійкий фокус;
- ✓ при  $\alpha = 0$  – центр (система Вольтерри);
- ✓  $-\frac{2\sqrt{10}}{5} < \alpha < -\frac{2}{5}$  – нестійкий фокус.

Очевидно, що останній перехід може статися при різкій зміні параметра, який можливо пов'язаний з особливостями внутрішньовидової поведінки жертв залежно від умов довкілля.

Зауважимо, що біфуркувати може і тривіальна точка, яка, залежно від параметру, може переходити із сідлової у стійкий вузол. Очевидно, що такий перехід означає вимирання даної екосистеми. Це синхронізується з вищезгаданою біфуркацією нетривіальної точки, яка із стійкої переходить у нестійку.

**КОНЦЕПЦІЯ СТІЙКОГО РОЗВИТКУ**  
**I МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ**  
**ЕКОЛОГО – ЕКОНОМІЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ**

Особливістю розвитку виробничих сил суспільства на сучасному етапі є виснаження традиційних природних ресурсів, забруднення навколишнього середовища, а також порушення рівноваги між середовищем і виробництвом. Історично склалося так, що науки про виробничі та природні системи (економіка та екологія) розвивалися незалежно одна від одної, розробляючи свої концептуальні основи і свій апарат дослідження, що й зумовило паралельний розвиток двох напрямків у математичному моделюванні – математичної економіки і математичної екології. Проте в другій половині минулого століття економіка та екологія вже розглядаються не лише традиційно, тобто як окремі дисципліни, а починається інтеграція економічних і екологічних знань, придатних для вивчення законів екологічної економіки.

На той час вже був накопичений багатий досвід в області побудови економіко-математичних моделей, що засновані на різних методах моделювання: економетричних, оптимізаційних, балансових, імітаційних тощо. Математична економіка досягла значних наукових висот – вона стала могутнім джерелом нових задач, які стимулювали розвиток методів оптимізації та інших розділів математики. Розв'язки багатьох економічних проблем спирались на фундаментальні результати в галузі теорії оптимізації та моделювання.

Поряд з економікою та математичною економікою прискореними темпами розвивалась і екологічна наука. Екологію традиційно вважали одним із розділів «науки про життя» – біології, проте вже досить швидко стало зрозумілим, що екологія – це широкий міждисциплінарний комплекс, який включає десятки наук. На сьогоднішній день діапазон екологічних досліджень є багатограним, оскільки актуальність цих досліджень стала очевидною в найрізноманітніших галузях суспільного буття. В рамках математичної екології були розроблені основи математичного моделювання складних систем, моделі оптимального керування в екології, моделі популяцій, імітаційні моделі екосистем, методи математичного

аналізу екологічних моделей, а також багато інших теоретичних та прикладних проблем.

Але вже в другій половині ХХ століття, коли прийшло усвідомлення того, що розглядати економіку та екологію традиційно, тобто як окремі дисципліни неможливо, почалася інтеграція економічних та екологічних знань, їх кількісне та якісне зростання. Зокрема, думки багатьох вчених поступово збігалися в тому, що екологія тісно пов'язана з макроекономікою, і остання має розглядатися як відкрита підсистема екосистеми та повністю від неї залежати. Так, фундатор екологічної економіки Герман Дейлі зазначив, що створена людиною економіка є «вмурованою» в природну екосистему нашої планети, а тому цілком від неї залежить.

Отже, від економічних та екологічних досліджень наука поступово перейшла до дослідження проблем екологізації економіки. Оскільки взаємодія людини з довкіллям здійснюється в основному через економічну діяльність (виробництво, перерозподіл та споживання продукції), яка є головним джерелом забруднення та виснаження довкілля, то необхідність екологізації сучасного виробництва та розробка стратегій екологічно орієнтованого менеджменту і практичного екологічного підприємництва перетворилась в одну з найбільш актуальних задач сьогодення.

Потреба розглядати цілісні еколого-економічні системи привела науковців до необхідності застосовувати методи математичного моделювання як найбільш потужного та ефективного способу дослідження еколого-економічних систем. Складність математичного моделювання тут пояснюється особливістю об'єкта моделювання, який включає в себе цілу низку природних, виробничих і біологічних процесів, рівновагу між якими надзвичайно важко зберегти, а ще складніше – керувати нею. Труднощі, що виникають окремо при математичному моделюванні економічних і екологічних систем, багатократно зростають у випадку побудови еколого-економічних моделей.

Часто для опису економічних процесів в умовах взаємодії економічного росту і навколишнього середовища використовується «нова теорія зростання».

Усвідомлення того факту, що виснаження природних ресурсів та відсутність екологічної рівноваги приведе до катастрофічних наслідків всесвітнього масштабу, стало початком не тільки інтенсивних наукових, але й політичних пошуків в галузі прийняття економічних, екологічних та соціально-політичних рішень. В цьому плані особливо яскравою подією стала у 1992 році Конференція ООН з навколишнього середовища і розвитку, на якій керівники 179 країн світу, в тому числі й України, спільно виробили всесвітню програму дій під назвою «Порядок дня на ХХІ століття». Основу програми склали 27 принципів, що регламентують раціональну поведінку країн світу (права та зобов'язання) на шляху переходу людства на збалансований в економічному, екологічному і соціальному сенсі спосіб життя.

Такий спосіб передбачає самовідтворюваний розвиток економіки та економічне зростання в межах допустимих можливостей природного середовища. Цей розвиток був названий сталим. Одне з визначень сталого розвитку належить, зокрема, Донелі Медоуз: «Це такий розвиток, коли ми задовольняємо свої поточні потреби і водночас не створюємо загрозу для існування наступних поколінь».

Тому однією з основних теоретичних і методологічних проблем розробки довгострокової стратегії природокористування того чи іншого регіону, що забезпечує гармонійний соціально-економічний розвиток на віддалену перспективу, є розподіл наявних природних ресурсів між теперішнім та майбутнім поколіннями. Саме обмеженість природних ресурсів необхідно розглядати як фактор, який лімітує довгостроковий економічний розвиток. А обмеженість спроможності навколишнього природного середовища до «знищення» викидів і до регенерації відновлюваних природних ресурсів необхідно розглядати як фактор, що лімітує економічне зростання.

Із терміном «сталий розвиток» асоціюються поняття про розвиток – збалансований, стабільний, природовідповідний. Збалансований в динаміці еколого-економічний процес суспільного відтворення стає тим надзвичайно важливим об'єктом, дослідження якого належить до пріоритетних напрямків наукової діяльності, зокрема математичного моделювання.

Таким чином, нові реалії життя вимагають дещо інших підходів у моделюванні та дослідженні взаємодії економіки та довкілля.

Повна модель еколого-економічної системи повинна містити математичний опис таких чотирьох взаємозалежних аспектів:

- 1) соціально-економічної підсистеми;
- 2) природної підсистеми (екосистеми);
- 3) антропогенний вплив на природне середовище і оцінка його наслідків;
- 4) вплив природних факторів на життєдіяльність суспільства і здоров'я людини.

Проблема оцінювання наслідків впливу на природне середовище є центральною в системі взаємин суспільства і природи. Забруднення навколишнього середовища всілякими шкідливими речовинами і сполуками, інтенсивний видобуток корисних копалин і експлуатація природних ресурсів, відчуження природних територій під промислове і міське будівництво, створення каналів і водоймищ, осушення боліт і обводнювання посушливих земель – усі ці і багато інших видів впливу набули глобального характеру та істотно змінюють сталий плин природних процесів, що найчастіше призводить до непередбачених і майже не виправних наслідків.

Оцінювання впливу на довкілля має стати невід'ємною складовою частиною планування основних видів людської діяльності. Задача математичного моделювання полягає в тому, щоб навчитися описувати динаміку екологічних систем в умовах антропогенного впливу.

Можна запропонувати таку спрощену формалізацію: якщо поведінка екосистеми в «природному» стані описується системою нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \quad (1)$$

де  $x(t)$  – вектор-функція стану екосистеми, то врахування антропогенного впливу означає перехід до системи

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x(t), \mu(t)), \quad (2)$$

де  $\mu(t)$  – узагальнена характеристика впливу.

Для побудови моделі виду (2) необхідно вивчити всі фізико-хімічні, біологічні, економічні, технічні і соціальні фактори, що стосуються справи. Наприклад, при дослідженні процесів забруднення треба знати кількість і розташування джерел забруднення, склад і динаміку викидів, закономірності переміщення і трансформації забруднюючих речовин у різних геофізичних середовищах, можливості самоочищення елементів біосфери, відповідну реакцію біоти, заходів для контролю і запобігання забруднення, що складає природний перехід до аналізу четвертого аспекту еколого-економічної взаємодії – впливу природних факторів на життєдіяльність суспільства. Річ у тім, що найбільший інтерес викликає не так перетворення чи навіть деградація природних систем, як наслідки цих змін для людини і суспільства загалом.

Зі зростанням матеріального добробуту і культурного рівня людей, вимоги до якості навколишнього середовища зростають, і екологічні складові («екологічний добробут») грають усе більш важливу роль при визначенні «якості життя».

У найбільш загальній формі можна стверджувати, що якщо  $y(t)$  – вектор-функція стану соціально-економічної системи, то його динаміка визначається співвідношенням

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y(t)); \quad (3)$$

а з врахуванням впливу довкілля –

$$\frac{dy}{dt} = g_1 \left( t, y(t), x(t), \frac{dx}{dt} \right), \quad (4)$$

де  $\frac{dx}{dt}$  знаходиться з (2).

Тоді функціонування еколого-економічної системи в цілому описується співвідношеннями (2) і (4) при  $\mu(t) = \left(y(t), \frac{dy}{dt}\right)$ , тобто системою:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1 \left( t, x(t), y(t), \frac{dy}{dt} \right), \\ \frac{dy}{dt} = g_1 \left( t, y(t), x(t), \frac{dx}{dt} \right). \end{cases} \quad (5)$$

Звичайно, система (5) є дуже умовним описом процесу еколого-економічної взаємодії. Однак безумовний характер носить вимога докладного опису економічних і природних процесів з урахуванням їх взаємозалежності. А це зумовлює іншу вимогу – приділяти особливу увагу опису зворотних зав'язків в еколого-економічній системі.

Попередньо обумовлювалися труднощі, що виникають при математичному моделюванні економічних і природних систем. Зрозуміло, що ці труднощі багаторазово збільшуються при спробах побудови еколого-економічних моделей, які потребують одночасного комплексного розгляду різнорідних фізико-хімічних, біологічних і соціально-економічних процесів, багато з яких ще недостатньо повно вивчені в змістовному плані. Значно збільшується і складність інформаційного забезпечення моделей, що необхідне для їхньої ідентифікації та верифікації, а також проблеми, які пов'язані з високою розмірністю моделей.

Такі труднощі, що носять не тільки технічний, але і принциповий характер, обумовили необхідність поступового, поетапного переходу від моделей математичної економіки і математичної екології до еколого-економічних моделей. У зв'язку з цим можна виділити два основних напрямки побудови «проміжних» моделей:

- 1) врахування екологічного фактору в економіко-математичних моделях;
- 2) врахування антропогенного впливу в моделях екосистем.

Моделі першого виду, зберігаючи традиційну структуру економіко-математичних моделей (як правило, системи опуклих чи навіть лінійних рівнянь і нерівностей), включають додаткові змінні і зв'язки, що характеризують екологічну підсистему. При цьому, як і раніше, повинні виконуватися закони

збереження в їх балансовій формі, що тепер включають потоки природної сировини і матеріалів, забруднюючих речовин і т.д. Власне, природні процеси, що визначають динаміку екосистеми, у моделі не описуються, або описуються зі значно меншим ступенем деталізації, ніж виробничо-економічна діяльність. Одним із класичних представників моделей цього класу є модель Леонтьєва-Форда.

У моделях другого виду за основу беруться моделі математичної екології. Антропогенна діяльність розглядається як екзогенний вплив на екосистему. Слід зазначити, що вже в основній роботі В. Вольтерри вивчався вплив на динаміку популяції «вилучення» частини її особин. З того часу найбільш розповсюдженими представниками розглянутого класу моделей виступають моделі оптимальної експлуатації природних ресурсів («збирання врожаю»). Їхньою відмінною рисою є наявність економічного критерію, відповідно до якого здійснюється політика експлуатації «популяції», що досліджується.

Нехай  $x(t)$  – чисельність популяції, що досліджується, в році  $t$ ,  $u(t)$  – величина «вилучення» особин популяції. Тоді динаміку чисельності можна описати рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) - u(t), \quad t \in [0, T]. \quad (6)$$

Критерій ефективності експлуатації («збирання врожаю») можна задавати різними способами, наприклад,

$$p \int_0^T u(t) dt \rightarrow \max, \quad (7)$$

де  $p$  – ціна однієї особини.

Для з'ясування частки популяції, що експлуатується за межами періоду  $T$ , треба накласти додаткове обмеження. Наприклад,

$$x(T) \geq x_T, \quad (8)$$

де  $x_T$  – деяка критична чисельність популяції, яка є необхідною для її виживання.

Важливе значення при моделюванні еколого-економічних систем має рівень агрегованості. За рівнем агрегованості еколого-економічні моделі можна розділити на регіональні і глобальні.

*Регіональні*, як правило, зосереджують увагу на деякій проблемі, що визначається специфікою конкретного регіону (водогосподарчі проблеми, лісовикористання, проблеми сільського господарства, рекреації і т.д.). У моделі з найбільшою повнотою описуються процеси, що мають безпосереднє відношення до розглянутої проблеми. Можливі і регіональні моделі загального призначення.

*Глобальні* моделі описують функціонування світової економіки і його вплив на біосферу. Як правило, вони мають ієрархічну структуру, включаючи в якості блоків моделі великих регіонів світу. У числі біосферних процесів розглядаються глобальні біогеохімічні цикли, динаміка атмосфери і Світового океану, приріст органічної речовини рослинності тощо. Економічну підсистему характеризують процеси виробництва і споживання, демографічні процеси, забруднення навколишнього середовища тощо.

Особливою рисою еколого-економічних моделей є їхня керованість. Таким чином, еколого-економічні системи відносяться до класу кібернетичних систем, тобто систем, якими можна керувати за допомогою деяких вільних екзогенних змінних. Звичайно набори значень керуючих змінних поєднуються в сценарії, що відображають різні стратегії керування досліджуваними еколого-економічними системами. Якісний аналіз фазових траєкторій системи при різних сценаріях її розвитку дозволяє оцінити допустимість цих сценаріїв залежно від мети дослідження.

Найбільш адекватним засобом еколого-економічного аналізу представляється імітаційне моделювання, що припускає розробку імітаційних систем.

## ТЕМА 8

### СТАТИЧНА МІЖГАЛУЗЕВА МОДЕЛЬ

#### ЛЕОНТЬЄВА – ФОРДА

У сучасних умовах суспільство страждає від наслідків негативних антропогенних впливів і тому надзвичайно велике значення має охорона навколишнього середовища (повітряного та водного басейнів, ґрунтового покриття, рослинного та тваринного світів тощо). Забруднення довкілля є побічним результатом економічної діяльності суспільства (виробництва, розподілу та споживання продукції). Боротьба із забрудненням середовища вимагає додаткових затрат, приводить до створення нових виробництв з переробки та знищення шкідливих відходів. У результаті розширюється сама сфера суспільного виробництва: вона включає не лише створення матеріальних благ, але й різні види діяльності, пов'язані зі зменшенням забруднення навколишнього середовища та відновлення природних ресурсів.

#### Модель Леонтьєва – Форда

Перша міжгалузєва модель, що охоплює взаємозв'язки економіки та навколишнього середовища, була запропонована В. Леонтьєвим і Д. Фордом. Вона узагальнює схему класичного міжгалузєвого балансу, і включає дві групи галузей (виробництв): *основне виробництво* (галузі матеріального виробництва) та *допоміжне виробництво* (галузі, що знищують шкідливі відходи). Основні умови моделі виражаються системою рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + c_1, \\ x_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - c_2. \end{cases} \quad (1)$$

В системі (1) вектори-колонки  $x_1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)^T$ ,  $c_1 = (c_1^1, c_2^1, \dots, c_n^1)^T$  та квадратна матриця  $n$ -го порядку  $A_{11} = (a_{ij}^{11})_1^n$  відповідають величинам  $x, c$  та  $A$  основної моделі міжгалузєвого балансу;  $x_2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2)^T$  – вектор-колонка

об'ємів знищених забруднювачів,  $c_2 = (c_1^2, c_2^2, \dots, c_m^2)^T$  – вектор-колонка об'ємів незнищених забруднювачів;  $A_{12} = (a_{ig}^{12})_{i,g=1}^{n,m}$  – прямокутна матриця затрат продукції  $i$  на одиницю знищення забруднювачів  $g$ ,  $A_{21} = (a_{kj}^{21})_{k,j=1}^{m,n}$  – прямокутна матриця випуску забруднювачів  $k$  на одиницю вироблення продукції  $j$ ,  $A_{22} = (a_{kg}^{22})_1^m$  – квадратна матриця випуску забруднювачів  $k$  на одиницю знищення забруднювачів  $g$ .

Коефіцієнти відповідних матриць  $a_{ij}^{11} \geq 0$ ,  $a_{ig}^{12} \geq 0$ ,  $a_{kj}^{21} \geq 0$ ,  $a_{kg}^{22} \geq 0$  відповідно назвемо коефіцієнтами прямих затрат продукції  $i$  на виробництво одиниці продукції  $j$ , прямих затрат продукції  $i$  при знищенні одиниці забруднювачів  $g$ , прямого випуску  $k$ -го забруднювача при виробництві одиниці продукції  $j$ , прямого випуску  $k$ -го забруднювача при знищенні одиниці забруднювача  $g$ .

Припускаючи, що всі коефіцієнти матриць є невід'ємними, ми неявно розповсюджуємо на всі види виробничої діяльності (матеріальне виробництво та знищення забруднювачів) припущення (гіпотези) основної моделі міжгалузевого балансу (кількість технологічних способів дорівнює кількості видів продукції та в кожному технологічному способі виробляється лише один вид продукції). Отже, в подальшому будемо вважати матриці  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  та  $A_{22}$  невід'ємними:

$$A_{11} \geq 0, \quad A_{12} \geq 0, \quad A_{21} \geq 0, \quad A_{22} \geq 0.$$

Додамо, що економічний зміст моделі Леонтьєва-Форда вимагає, щоб всі її змінні були невід'ємними, тобто,

$$x_i^1 \geq 0, \quad x_k^2 \geq 0, \quad c_i^1 \geq 0, \quad c_k^2 \geq 0. \quad (2)$$

### Умови існування невід'ємних розв'язків

Для дослідження умов існування економічно змістовних розв'язків моделі (1), розглянемо друге з рівнянь моделі. Сума  $A_{21}x_1 + A_{22}x_2$  дає об'єми забруднення від усіх видів виробничої діяльності (основного та допоміжного виробництва). Вектор  $x_2$  залежить не лише від цієї суми, але й від припустимих об'ємів незнищуваних забруднювачів  $c_2$ . В принципі, максимальні припустимі значення компонент вектора  $c_2$  визначаються умовами екологічної рівноваги або прийнятими стандартами якості навколишнього середовища, проте вони можуть встановлюватись також і виходячи з реальних техніко-економічних можливостей або економії коштів. Діяльність зі знищенням забруднювачів має сенс (тобто відповідні  $x_g^2 \geq 0$ ), якщо  $c_2 \leq A_{21}x_1 + A_{22}x_2$ .

Розв'яжемо формально систему лінійних алгебраїчних рівнянь (1) двома способами. За першим способом спочатку знайдемо  $x_2$  з другого рівняння, підставимо знайдене  $x_2$  в перше рівняння і розв'яжемо його відносно  $x_1$ . За другим способом спочатку знайдемо  $x_1$  з першого рівняння, підставимо знайдене  $x_1$  в друге рівняння і розв'яжемо його відносно  $x_2$ .

$$x_1 = (E_1 - A_{11})^{-1}(A_{12}x_2 + c_1), \quad (3)$$

$$x_2 = (E_2 - A_{22})^{-1}(A_{21}x_1 - c_2).$$

В результаті одержимо

$$x_1 = (E_1 - A_1)^{-1}(c_1 - A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1}c_2), \quad (4)$$

$$x_2 = (E_2 - A_2)^{-1}(A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1}c_1 - c_2), \quad (5)$$

де  $E_1$  та  $E_2$  – діагональні одиничні матриці відповідно  $n$ -го та  $m$ -го порядків,  $A_1$  та  $A_2$  – квадратні матриці відповідно  $n$ -го та  $m$ -го порядків:

$$A_1 = A_{11} + A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1}A_{21}, \quad (6)$$

$$A_2 = A_{22} + A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1}A_{12}. \quad (7)$$

Взявши розв'язки у вигляді (4), (5), можемо записати формальний розв'язок системи (1) в такому вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E_1 - A_1)^{-1} & (E_1 - A_1)^{-1}A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1} \\ (E_2 - A_2)^{-1}A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1} & (E_2 - A_2)^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Раніше було приведено поняття продуктивності економічної системи в моделі міжгалузевого балансу, що пов'язується лише з властивостями матриці прямих затрат  $A$ . Продуктивній економічній системі відповідала така матриця коефіцієнтів  $A$ , яка забезпечувала можливість одержання кінцевої продукції ( $c \geq 0$ ) при відповідних пропорціях розвитку виробництва ( $x \geq 0$ ). Для продуктивності матриці  $A$  необхідною та достатньою умовою є невід'ємність матриці  $B = (E - A)^{-1} \geq 0$ . Якщо при цьому матриця  $A$  є нерозкладною, то матриця  $B = (E - A)^{-1} > 0$ . Узагальнимо поняття продуктивності матриці  $A$  на випадок блочної матриці з невід'ємними елементами

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \geq 0. \quad (9)$$

Будемо вважати невід'ємну блочну матрицю (9) продуктивною, якщо продуктивними є матриці  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  та матриці  $A_1$ ,  $A_2$ , які визначаються співвідношеннями (6), (7).

Продуктивність матриць  $A_1$  та  $A_2$  означає рентабельність основного та допоміжного виробництва за повним циклом виробництва продукції та за повним циклом знищення забруднювачів.

Якщо матриці  $A_{11}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_1$  та  $A_2$  продуктивні, то виконуються нерівності:

$$\begin{aligned} (E_1 - A_{11})^{-1} \geq 0, & \quad (E_2 - A_{22})^{-1} \geq 0, \\ (E_1 - A_1)^{-1} \geq 0, & \quad (E_2 - A_2)^{-1} \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Якщо матриці  $A_{11}$  та  $A_{22}$  – нерозкладні, то нестрогі нерівності в формулах (10) замінюються на строгі.

Проте продуктивність блочної матриці (9) не гарантує невід'ємність розв'язків системи (1). Справа в тому, що величини векторів  $c_1 > 0$  та  $c_2 \geq 0$  можуть змінюватись довільно, а тому можуть виникнути умови, які їх пов'язують.

Аналізуючи вирази (3) бачимо, що

$$x_1 = (E_1 - A_{11})^{-1}(A_{12}x_2 + c_1).$$

Таким чином, якщо  $x_2 \geq 0$ , то при  $c_1 > 0$  автоматично виконується умова  $x_1 > 0$ .

Отже, необхідною та достатньою умовою невід'ємності розв'язків моделі Леонтьєва-Форда при продуктивності матриці (9) системи рівнянь (1) та при  $c_1 > 0$ ,  $c_2 \geq 0$  буде умова  $x_2 \geq 0$ , тобто

$$(E_2 - A_2)^{-1}(A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1}c_1 - c_2) \geq 0. \quad (11)$$

Достатньою умовою невід'ємності розв'язків при продуктивності матриці (9) та при  $c_1 > 0$ ,  $c_2 \geq 0$  є умова

$$A_{21}(E_1 - A_{11})^{-1}c_1 \geq c_2, \quad (12)$$

що має такий економічний зміст: основне та допоміжне виробництва будуть функціонувати, якщо об'єм незнищуваних забруднювачів  $c_2$  не перевищує повного забруднення, що виникає при одержанні кінцевої продукції  $c_1$ .

Неважко переконатись, що замість (12) достатньою умовою також є більш жорстка умова

$$A_{21}c_1 \geq c_2. \quad (13)$$

### ***Модель міжгалузевих залежностей цін***

Перейдемо тепер до побудови двоїстої моделі Леонтьєва-Форда відносно цін. Для цього запишемо вартісний баланс виробленої продукції для кожної галузі основного виробництва:

$$\tilde{x}_j^1 = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{ij}^{11} + \sum_{k=1}^m \tilde{x}_{kj}^{21} + \tilde{v}_j^1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

та вартісний баланс знищених забруднювачів для кожної галузі допоміжного виробництва:

$$\tilde{x}_g^2 = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{ig}^{12} + \sum_{k=1}^m \tilde{x}_{kg}^{22} + \tilde{v}_g^2, \quad g = 1, 2, \dots, m. \quad (15)$$

Тут  $\tilde{x}_j^1$  – об’єм виробництва  $j$ -ої продукції у вартісній формі;  $\tilde{v}_j^1$  – додана вартість  $j$ -ої галузі основного виробництва, що включає амортизацію, оплату праці та прибуток;  $\tilde{x}_g^2$  – вартість знищення всього об’єму  $g$ -го забруднювача;  $\tilde{v}_g^2$  – додана вартість  $g$ -ої галузі допоміжного виробництва, що включає амортизацію, оплату та прибуток;  $\tilde{x}_{ij}^{11}$  – вартісні витрати  $i$ -ої продукції при випуску  $j$ -ої продукції;  $\tilde{x}_{kj}^{21}$  – вартість знищення  $k$ -го забруднювача, що випускається  $j$ -ою галуззю основного виробництва;  $\tilde{x}_{ig}^{12}$  – вартість прямих затрат  $i$ -ої продукції основного виробництва на знищення об’єму  $g$ -го забруднювача;  $\tilde{x}_{kg}^{22}$  – вартість прямих затрат, пов’язаних із знищенням об’єму  $k$ -го забруднювача, що виникає при знищенні  $g$ -го забруднювача.

Нехай  $p_i^1$  – ціна одиниці  $i$ -ої продукції,  $p_k^2$  – вартість знищення одиниці  $k$ -го забруднювача,  $r_j^1$  – коефіцієнт умовно-чистої продукції (доданої вартості) на одиницю продукції  $j$ -ої галузі ( $\tilde{v}_j^1 = r_j^1 \cdot \tilde{x}_j^1$ ),  $r_g^2$  – коефіцієнт умовно-чистої продукції (доданої вартості)  $g$ -ої галузі допоміжного виробництва ( $\tilde{v}_g^2 = r_g^2 \cdot \tilde{x}_g^2$ ).

Підставимо вирази

$$\tilde{x}_j^1 = p_j^1 \cdot x_j^1, \quad \tilde{v}_j^1 = r_j^1 \cdot p_j^1 \cdot x_j^1, \quad \tilde{x}_{ij}^{11} = p_i^1 \cdot a_{ij}^{11} \cdot x_j^1, \quad \tilde{x}_{kj}^{21} = p_k^2 \cdot a_{kj}^{21} \cdot x_j^1,$$

$$\tilde{x}_g^2 = p_g^2 \cdot x_g^2, \quad \tilde{v}_g^2 = r_g^2 \cdot p_g^2 \cdot x_g^2, \quad \tilde{x}_{ig}^{12} = p_i^1 \cdot a_{ig}^{12} \cdot x_g^2, \quad \tilde{x}_{kg}^{22} = p_k^2 \cdot a_{kg}^{22} \cdot x_g^2$$

в баланси (14) та (15). Тоді після скорочення обох частин відповідних рівностей на  $x_j^1 > 0$ ,  $x_g^2 > 0$ , одержимо

$$p_j^1 = \sum_{i=1}^n p_i^1 a_{ij}^{11} + \sum_{k=1}^m p_k^2 a_{kj}^{21} + s_j^1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

$$p_g^2 = \sum_{i=1}^n p_i^1 a_{ig}^{12} + \sum_{k=1}^m p_k^2 a_{kg}^{22} + s_g^2, \quad g = 1, 2, \dots, m, \quad (17)$$

де  $s_j^1$  – частка доданої вартості в ціні  $j$ -го (основного) продукту,  $s_g^2$  – частка доданої вартості в ціні  $g$ -го (допоміжного) продукту. Скалярні рівняння (16) та (17) можна також записати у векторно-матричному вигляді:

$$\begin{cases} p_1 = p_1 A_{11} + p_2 A_{21} + s_1, \\ p_2 = p_1 A_{12} + p_2 A_{22} + s_2, \end{cases} \quad (18)$$

де  $p_1 = (p_1^1, p_2^1, \dots, p_n^1)$  – вектор-рядок цін основної продукції,  $p_2 = (p_1^2, p_2^2, \dots, p_m^2)$  – вектор-рядок вартостей знищення одиниць забруднювачів,  $s_1 = (s_1^1, s_2^1, \dots, s_n^1)$  – вектор-рядок доданих вартостей в цінах продукції основного виробництва,  $s_2 = (s_1^2, s_2^2, \dots, s_m^2)$  – вектор-рядок доданих вартостей в цінах продукції допоміжного виробництва.

Модель міжгалузевих залежностей цін (16), (17) також є двоїстою по відношенню до моделі міжгалузевих матеріально-речових зв'язків (1). Співвідношення рівнянь цих моделей аналогічні співвідношенням умов двоїстості задач лінійного програмування. Крім цього, обов'язково виконується рівність

$$\sum_{j=1}^n s_j^1 x_j^1 + \sum_{g=1}^m s_g^2 x_g^2 = \sum_{i=1}^n p_i^1 c_i^1 + \sum_{k=1}^m p_k^2 (-c_k^2), \quad (19)$$

тобто об'єм створеної в економіці основної та допоміжної продукції (за вартісним складом) дорівнює сумарній оцінці використаної кінцевої продукції (з урахуванням шкоди від незнищеного забруднення).

Економічний зміст приведеної двоїстої моделі Леонт'єва-Форда вимагає, щоб всі змінні її були невід'ємними  $p_1 \geq 0$ ,  $p_2 \geq 0$ ,  $s_1 \geq 0$ ,  $s_2 \geq 0$ . Але оскільки додані вартості в цінах продукції  $s_1 > 0$ ,  $s_2 > 0$ , то для випадку нерозкладної продуктивної блочної матриці  $A$  системи рівнянь (18) розв'язками будуть  $p_1 > 0$ ,  $p_2 > 0$ . Цей випадок відповідає ситуації, коли галузі основного виробництва (виробництва продукції) та галузі допоміжного виробництва (знищення забруднювачів) функціонують окремо і кожна з них має свій матеріально-фінансовий рахунок.

Проте нерідко трапляються випадки, коли знищення забруднювачів перебуває в нерозривному технологічному процесі «випуск продукції + знищення

(повне або часткове) забруднювачів». У цьому випадку додана вартість продукції (амортизація основних фондів, оплата праці, прибуток тощо) відноситься лише до основної продукції. Тобто, в цьому випадку умовно-чиста вартість знищення забруднювачів окремо не вираховується, а повністю переноситься на ціну основної продукції. Ми пропонуємо цю ситуацію тлумачити, як випадок  $s_2 = 0$ .  
Відповідна двоїста модель

$$\begin{cases} p_1 = p_1 A_{11} + p_2 A_{21} + s_1, \\ p_2 = p_1 A_{12} + p_2 A_{22} \end{cases} \quad (20)$$

дає можливість підрахувати як ціну основної продукції  $p_1 > 0$ , що враховує додану вартість продукції, так і ціну знищення забруднювачів  $p_2 > 0$ , яка не враховує додану вартість продукції і складається лише з матеріальних витрат. Це доцільно робити, щоб мати оцінку повних матеріальних витрат на очищення забруднювачів.

Трапляються випадки порушення нерозривного технологічного процесу «випуск продукції + знищення забруднювачів» шляхом економії коштів при знищенні забруднювачів, що призводить до погіршення якості знищення забруднювачів (наприклад, використовується заміна матеріалів очисних споруд, пришвидшується технологічний процес очищення, проводяться несанкціоновані викиди забруднювачів тощо). У цьому випадку потрібно оцінити лише величину прямої економії на знищенні одиниці забруднювачів ( $-s_2$ ), а відповідна двоїста модель

$$\begin{cases} p_1 = p_1 A_{11} + p_2 A_{21} + s_1, \\ p_2 = p_1 A_{12} + p_2 A_{22} - s_2, \end{cases} \quad (21)$$

дозволяє вже оцінити повні матеріальні затрати на очищення забруднювачів в цій ситуації.

Аналогічно, як це було зроблено раніше, можна показати, що необхідною та достатньою умовою невід'ємності розв'язків двоїстої моделі (21) є продуктивність блочної матриці (9) та умова  $p_2 \geq 0$ , тобто

$$(s_1(E_1 - A_{11})^{-1}A_{12} - s_2)(E_2 - A_2)^{-1} \geq 0,$$

де  $s_1 \geq 0$ ,  $s_2 \geq 0$ . Ця умова пов'язана з умовою невід'ємності вектора  $p_2$ , що, в свою чергу, гарантує виконання нерівності

$$p_1 = (p_2A_{21} + s_1)(E_1 - A_{11})^{-1} \geq 0.$$

Достатньою умовою невід'ємності розв'язків є продуктивність блочної матриці  $A$  та умова

$$s_1(E_1 - A_{11})^{-1}A_{12} \geq s_2,$$

що має такий зміст: економія при знищенні забруднення  $s_2$  не повинна перевищувати повної доданої вартості при виробництві основної продукції. Більш проста умова

$$s_1A_{12} \geq s_2.$$

### *Еколого – економічні виробничі функції на основі моделі Леонтьєва – Форда*

У рамках лінійної економіки врахування екологічного фактора в економіко-математичних моделях найбільш вдало здійснено в міжгалузевій балансовій моделі «витрати-випуск» Леонтьєва-Форда (1), де всі матриці системи лінійних рівнянь вважаються невід'ємними, а відповідна блочна матриця  $A$  – продуктивною. Економічний зміст моделі Леонтьєва-Форда вимагає, щоб усі змінні її були невід'ємними.

Модель Леонтьєва-Форда (1) як окремий елемент використовується в більш складних еколого-економічних моделях. Покажемо, як ця модель використовується при побудові виробничої функції екологічної економіки.

Нехай  $q_1$  – вектор-рядок економічної оцінки кінцевої продукції,  $q_2$  – вектор-рядок економічної оцінки збитків від викидів забруднювачів в навколишнє середовище,  $r$  – вектор-стовпчик  $f$  наявних загальних ресурсів,  $R_1 = (r_{lj}^1)_{l,j=1}^{f,n} \geq 0$

та  $R_2 = (r_{lg}^2)_{l,g=1}^{f,m} \geq 0$  – технологічні матриці витрат ресурсів (питомі витрати ресурсів на виробництво продукції та на знищення забруднень, відповідно). Тоді оптимальне функціонування екологічної економіки у найпростішому варіанті описується такою моделлю (задачею лінійного програмування):

$$\begin{cases} q_1 c_1 - q_2 c_2 \rightarrow \max, \\ x_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + c_1, \\ x_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - c_2, \\ R_1 x_1 + R_2 x_2 \leq r, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, c_1 \geq 0, c_2 \geq 0. \end{cases} \quad (22)$$

Розв'язуючи цю параметричну (відносно наявних ресурсів  $r$ ) задачу лінійного програмування, знаходимо оптимальні розв'язки:

$$x_1^*(r), \quad x_2^*(r), \quad c_1^*(r), \quad c_2^*(r), \quad (23)$$

на основі яких формується еколого-економічна виробнича функція як оптимальне значення цільової функції в (22):

$$F(r) = q_1 c_1^*(r) - q_2 c_2^*(r). \quad (24)$$

Якщо в задачі (22) зняти обмеження  $c_1 \geq 0$ , та  $c_2 \geq 0$ , то ця задача після виключення змінних  $c_1$  та  $c_2$  спроститься до такої:

$$\begin{cases} ((q_1(E_1 - A_{11}) - q_2 A_{21})x_1 + (q_1 A_{12} - q_2(E_2 - A_{22}))x_2 \rightarrow \max, \\ R_1 x_1 + R_2 x_2 \leq r, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (25)$$

Задача (25) описує оптимальне функціонування гіпотетичної екологічної економіки, що може як виробляти продукцію, так і «очищувати» довкілля. Власне, цільова функція дає оцінку випущеної продукції та знищених забруднювачів. Виробнича функція такої екологічної економіки запишеться у вигляді:

$$F_0(r) = (q_1(E_1 - A_{11}) - q_2 A_{21})\bar{x}_1(r) + (q_1 A_{12} - q_2(E_2 - A_{22}))\bar{x}_2(r), \quad (26)$$

де  $\bar{x}_1(r)$  та  $\bar{x}_2(r)$  – оптимальні розв'язки задачі (25).

Проте реально розв'язати задачу вигляду (25) складно, адже якщо вважати  $r$  вектором параметрів, то ця задача має параметрично задану допустиму область, що практично унеможлиблює пошук оптимального розв'язку. Оскільки при розв'язуванні задачі (25) важливим є побудова виробничої функції вигляду (26), а не знаходження конкретних оптимальних значень векторів  $\bar{x}_1(r)$  та  $\bar{x}_2(r)$ , то в такому випадку доцільно перейти в задачі (25) до двоїстої:

$$\begin{cases} pr \rightarrow \min, \\ pR_1 \geq q_1(E_1 - A_{11}) - q_2A_{21}, \\ pR_2 \geq q_1A_{12} - q_2(E_2 - A_{22}), \\ p \geq 0, \end{cases} \quad (27)$$

яка має цілком визначену допустиму область і цільову функцію, що залежить від параметрів вектора  $r$ . В залежності від співвідношень між цими параметрами, можна отримати оптимальний розв'язок задачі (27) – вектор  $p^*$ . Для цього лише потрібно перебрати можливі комбінації параметрів вектора  $r$  у скінченій множині вершин допустимої області. А оскільки  $p^*r = F_0(r)$  на оптимальних розв'язках, то таким чином отримуємо оптимальну виробничу функцію екологічної економіки, яка набуватиме того чи іншого вигляду залежно від співвідношень між параметрами вектора  $r$ .

З огляду на постановку задачі (27) приходимо до висновку, що достатньою умовою існування її розв'язку є умова невід'ємності коефіцієнтів її цільової функції:

$$q_1(E_1 - A_{11}) \geq q_2A_{21} \quad \text{та} \quad q_1A_{12} \geq q_2(E_2 - A_{22}). \quad (28)$$

Нерівності (28) пов'язують оцінки  $q_1$  та  $q_2$ .

Також, розв'язуючи задачу (27), можна знайти вектор  $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_f^*)$  оптимальних цін на ресурси в умовах екологічної економіки.

## ТЕМА 9

### ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЄВА – ФОРДА

#### Побудова динамічної моделі

Запропонована В. Леонт'євим на початку 50-х років динамічна міжгалузева модель стала класичним прикладом використання систем диференціальних рівнянь в дослідженні проблем економічного росту. Модель має вигляд

$$x(t) = Ax(t) + B\dot{x}(t) + c(t), \quad (1)$$

де  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  – вектор-колонка об'ємів виробництва (випуску продукції);  $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t))^T$  – вектор-колонка абсолютних приростів виробництва (випуску) продукції;  $c(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))^T$  – вектор-колонка кінцевого попиту (споживання), включаючи невиробниче нагромадження;  $A = (a_{ij})_1^n$  – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат (на відміну від коефіцієнтів статичного міжгалузевого балансу коефіцієнти в динамічній моделі включають також витрати на відновлення вибуття капіталу та ремонт основних виробничих фондів);  $B = (b_{ij})_1^n$  – матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів виробництва (затрати виробничого нагромадження на одиницю приросту відповідних видів продукції, інвестиційні витрати).

За аналогією з цим для статичної еколого-економічної міжгалузевої моделі Леонт'єва-Форда можна запропонувати також відповідну динамічну міжгалузову модель взаємодії економіки та навколишнього середовища:

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1\dot{x}_1(t) + B_2\dot{x}_2(t) + c_1(t), \\ x_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) - c_2(t), \end{cases} \quad (2)$$

де  $x_1(t) = (x_1^1(t), x_2^1(t), \dots, x_n^1(t))^T$  – вектор-колонка об'ємів виробництва продукції;  $\dot{x}_1(t) = (\dot{x}_1^1(t), \dot{x}_2^1(t), \dots, \dot{x}_n^1(t))^T$  – вектор-колонка абсолютних приростів виробництва продукції;  $c_1(t) = (c_1^1(t), c_2^1(t), \dots, c_n^1(t))^T$  – вектор-колонка споживання продукції (включаючи невиробниче нагромадження);  $x_2(t) = (x_1^2(t), x_2^2(t), \dots, x_m^2(t))^T$  – вектор-колонка об'ємів виробництва із знищення забруднювачів;  $\dot{x}_2(t) = (\dot{x}_1^2(t), \dot{x}_2^2(t), \dots, \dot{x}_m^2(t))^T$  – вектор-колонка

абсолютних приростів виробництва із знищення забруднювачів;  
 $c_2(t) = (c_1^2(t), c_2^2(t), \dots, c_m^2(t))^T$  – вектор-колонка об’ємів незнищених забруднювачів (викиди в навколишнє середовище);  $A_{11} = (a_{ij}^{11})_1^n$  – квадратна матриця коефіцієнтів прямих матеріальних затрат на виробництво продукції (сюди включаються також затрати на відновлення вибуття і капітальний ремонт основних виробничих фондів основного виробництва);  $A_{12} = (a_{ig}^{12})_{i,g=1}^{n,m}$  – прямокутна матриця коефіцієнтів прямих матеріальних затрат на знищення забруднювачів (сюди включаються також затрати на відновлення вибуття і капітальний ремонт основних виробничих фондів допоміжного виробництва – очисних споруд);  $A_{21} = (a_{kj}^{21})_{k,j=1}^{m,n}$  – прямокутна матриця коефіцієнтів випуску забруднювачів основним виробництвом;  $A_{22} = (a_{kg}^{22})_1^m$  – квадратна матриця коефіцієнтів випуску забруднювачів допоміжним виробництвом – очисними спорудами;  $B_1 = (b_{ij}^1)_1^n$  – квадратна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів основного виробництва;  $B_2 = (b_{ig}^2)_{i,g=1}^{n,m}$  – прямокутна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів допоміжного виробництва.

Щоб виключити з розгляду  $x_2(t)$  з системи (2) розв’яжемо друге з цих рівнянь відносно  $x_2(t)$ :

$$x_2(t) = (E_2 - A_{22})^{-1}(A_{21}x_1(t) - c_2(t)) \quad (3)$$

та продиференціюємо цей вираз:

$$\dot{x}_2(t) = (E_2 - A_{22})^{-1}(A_{21}\dot{x}_1(t) - \dot{c}_2(t)). \quad (4)$$

Підставляючи вирази (3) та (4) в перше рівняння системи (2), одержимо:

$$x_1(t) = A_1x_1(t) + B\dot{x}_1(t) + c(t), \quad (5)$$

де  $A_1$  і  $B$  – квадратні матриці

$$A_1 = A_{11} + A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1}A_{21}, \quad (6)$$

$$B = B_1 + B_2(E_2 - A_{22})^{-1}A_{21}, \quad (7)$$

а  $c(t)$  – вектор-колонка

$$c(t) = c_1(t) - A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1}c_2(t) - B_2(E_2 - A_{22})^{-1}\dot{c}_2(t).$$

Розв'язавши формально систему диференціальних рівнянь (5) відносно вектора  $x_1(t)$ , запишемо її у вигляді:

$$x_1(t) = (E_1 - A_1)^{-1} B \dot{x}_1(t) + (E_1 - A_1)^{-1} c(t). \quad (8)$$

Тут  $(E_1 - A_1)^{-1} B$  – матриця коефіцієнтів повної прирідної капіталомісткості, тобто повних затрат виробничого нагромадження на одиничні прирости виробництва продукції.

Припускається, що матриці  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  та  $A_1$  – продуктивні. Надалі при аналізі зручно вважати матрицю  $A_1$  нерозкладною, а матрицю  $B$  невинродженою. Тоді  $(E_1 - A_1)^{-1} > E_1 + A_1$ ;  $B(E_1 - A_1)^{-1} > B$ .

Очевидно, що економічний зміст мають лише розв'язки  $x_1(t) \geq 0$ ,  $x_2(t) \geq 0$ . Далі, з економічного змісту моделі (2) нас цікавлять лише неспадні траєкторії  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$ , тобто, коли  $\dot{x}_1(t) \geq 0$ ,  $\dot{x}_2(t) \geq 0$ .

Розв'язок системи (8) при  $c(t) \geq 0$ ,  $\dot{x}_1(t) \geq 0$  і невід'ємності матриць  $(E_1 - A_1)^{-1}$  та  $B(E_1 - A_1)^{-1}$  гарантує, що

$$x_1(t) \geq 0.$$

Для невід'ємності неспадного розв'язку  $x_2(t) \geq 0$ ,  $\dot{x}_2(t) \geq 0$  достатньо, щоб

$$A_{21}x_1(t) \geq c_2(t), \quad (9)$$

$$A_{21}\dot{x}_1(t) \geq \dot{c}_2(t), \quad (10)$$

що впливає із співвідношень (3), (4). Зокрема, нерівність (9) має виконуватися для довільного моменту часу  $t$ , в тому числі і умовно-початковому  $t_0 = 0$ :

$$A_{21}x_1(0) \geq c_2(0). \quad (11)$$

З екологічного змісту моделі (2) нас цікавить лише випадок, коли  $c_2(t) = \text{const} = c_2 \geq 0$  (умова екологічної рівноваги). Тоді  $\dot{c}_2(t) = 0$ , і достатні умови невід'ємності неспадаючих розв'язків  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  будуть мати вигляд:

$$c_1(t) \geq A_{12}(E_2 - A_{22})^{-1}c_2, \quad (12)$$

$$A_{21}x_1(0) \geq c_2, \quad (13)$$

$$x_2(0) = (E_2 - A_{22})^{-1}(A_{21}x_1(0) - c_2). \quad (14)$$

Нерівність (12) є умовою невід'ємності вектора  $c(t)$ , умова (13) – по суті, аналог умови (11), а умова (14) – це узгоджена початкова умова для вектора  $x_2(t)$ .

Система (5) формально є системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь. Спочатку запишемо цю систему у відповідному «канонічному» вигляді:

$$\dot{x}_1(t) = B^{-1}(E_1 - A_1)x_1(t) - B^{-1}c(t). \quad (15)$$

Позначимо матрицю відповідної однорідної системи через  $G$ :

$$G = B^{-1}(E_1 - A_1). \quad (16)$$

Тоді систему (8) можна подати у вигляді

$$x_1(t) = G^{-1}\dot{x}_1(t) + (E_1 - A_1)^{-1}c(t). \quad (17)$$

Згідно з теорією диференціальних рівнянь розв'язок систем (5), а, отже, (8), (15) і (17), проводиться в три етапи:

- 1) визначається загальний розв'язок відповідної однорідної системи рівнянь;
- 2) знаходиться частинний розв'язок неоднорідної системи;
- 3) із початкових умов розраховуються невизначені сталі загального розв'язку.

### *Динаміка замкненої виробничої системи*

Проаналізуємо систему однорідних диференціальних рівнянь, що відповідають системі (15):

$$\dot{x}_1(t) = Gx_1(t). \quad (18)$$

Розв'язок цієї системи характеризує граничні технологічні можливості розвитку виробництва при відомих матрицях  $A_1$  і  $B$ , коли всі ресурси економіки направляються на розширене відтворення.

Якщо розглянути систему (17), то відповідна однорідна система матиме вигляд

$$x_1(t) = G^{-1}\dot{x}_1(t). \quad (19)$$

Загальний розв'язок системи (18) формально може бути представлений у вигляді

$$x_1(t) = \sum_{s=1}^n d_s v_s e^{\lambda_s t}, \quad (20)$$

де  $\lambda_s$  – власні значення матриці  $G$ , тобто корені характеристичного рівняння

$$|G - \lambda E_1| = 0; \quad (21)$$

$v_s$  – відповідні до  $\lambda_s$  власні вектори матриці  $G$ ;

$d_s$  – довільні сталі, які, в результаті, можна бути визначити з початкових умов.

В загальному випадку розв'язок системи (18) містить декілька відмінних від нуля компонент  $d_s$ . Тому в типовій ситуації єдина траєкторія системи, що виходить з початкової точки, представляє собою комбінацію експонент, що ростуть з різними темпами.

Згідно з прийнятими припущеннями матриця  $G^{-1} = (E_1 - A_1)^{-1}B \geq 0$ . Згідно з теоремою Фробеніуса-Перрона вона має додатне власне число  $\hat{\mu}$  (корінь Фробеніуса), яке переважає по модулю всі інші власні числа цієї матриці, і відповідний йому власний вектор  $\hat{v} > 0$ . При цьому власні вектори, що відповідають відмінним від  $\hat{\mu}$  власним числам, обов'язково мають компоненти різних знаків. Оскільки власні значення матриці  $G$ , які фігурують в представленні (20), є оберненими до власних чисел матриці  $G^{-1}$ , а власні вектори цих матриць збігаються, то числу  $\hat{\mu}$  відповідає власне значення  $\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{\mu}}$  матриці  $G$ , яке є дійсним, але мінімальним за модулем власним числом цієї матриці.

Величина  $\hat{\lambda}$  називається *технологічним темпом зростання*. Ця характеристика визначає максимальні можливості зростання «замкненої» виробничої системи.

Траєкторія  $x_1(t)$  є сумою експонент. Очевидно, що при  $t \rightarrow \infty$  в ній починає переважати доданок з максимальною (серед номерів  $s$  з  $d_s \neq 0$ ) дійсною частиною  $\lambda_s$ . Можливі дві взаємовиключні ситуації:

- 1) домінуючою є експонента  $e^{\hat{\lambda}t}$ ;
- 2) домінуючою є експонента з темпом  $\lambda_s \neq \hat{\lambda}$ .

У першому випадку темпи приросту продукції кожної галузі при  $t \rightarrow \infty$  прямують до технологічного темпу зростання  $\hat{\lambda}$ , а галузева структура виробництва продукції в границі визначається пропорціями компонент власного вектора  $\hat{v}$ .

У другому випадку динаміка  $x_1(t)$  у все більшому ступені визначається власним вектором  $v_s$ , що має компоненти різних знаків. Тому при достатньо великих  $t$  в розв'язку  $x_1(t)$  обов'язково з'являються від'ємні компоненти.

Таким чином, розв'язок (20), в якому домінує доданок з темпом, відмінним від  $\hat{\lambda}$ , є економічно неприйнятним.

Сім'я траєкторій системи (20) у двовимірному випадку, що ілюструють перший випадок, зображено на рис. 1. Траєкторією з технологічним темпом  $\hat{\lambda}$  є промінь  $OA$ . Оскільки траєкторія  $OA$  визначається доданком  $\hat{v}e^{\hat{\lambda}t} = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{pmatrix} e^{\hat{\lambda}t} = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}$  системи (20), то  $x_2^1 = \hat{v}_2 e^{\hat{\lambda}t}$ ,  $x_1^1 = \hat{v}_1 e^{\hat{\lambda}t}$ , тому  $x_2^1 = \frac{\hat{v}_2}{\hat{v}_1} x_1^1$ .

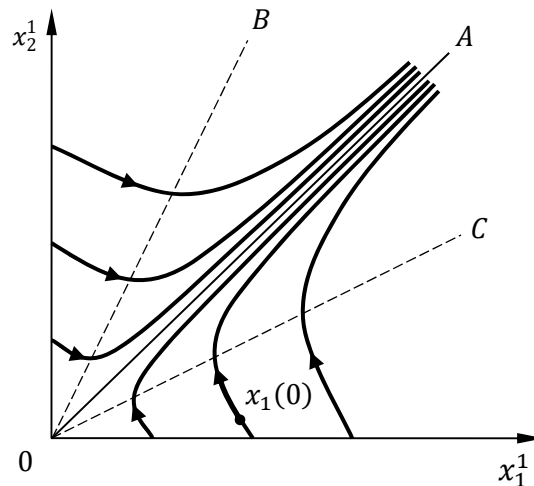


Рисунок 1. Економічно прийнятний розв'язок

Конус  $BOC$  – множина станів, для яких  $\dot{x}_1 \geq 0$ . Траєкторія, що виходить з довільного початкового стану  $x_1(0)$ , швидко наближається до променя  $OA$ . Але початкова частина траєкторії не обов'язково відповідає припущенню про невід'ємність  $\dot{x}_1(t)$ . Після входження в конус допустимих розв'язків траєкторія вже залишається в ньому. В теорії диференціальних рівнянь сім'ю траєкторій такого типу називають сідлом.

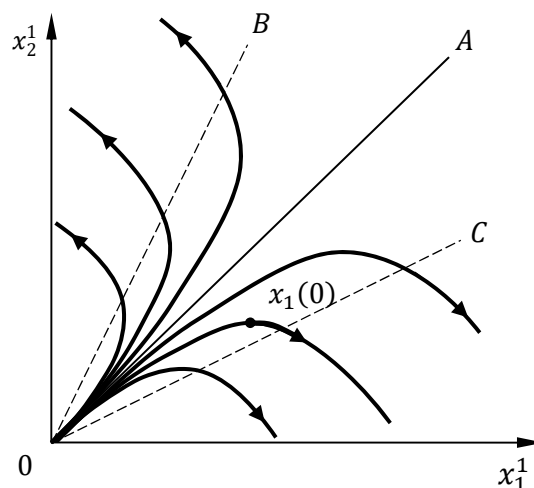


Рисунок 2. Економічно неприйнятний розв'язок

**Економічне зростання**  
**при різних траєкторіях споживання**

Представимо загальний розв'язок системи (15) у вигляді суми загального розв'язку однорідної системи  $\bar{x}_1(t)$ , що визначається співвідношенням (20), і частинного розв'язку неоднорідної системи  $x_1^0(t)$ :

$$x_1(t) = \bar{x}_1(t) + x_1^0(t).$$

Будемо розглядати траєкторію споживання у вигляді:  $c(t) = c(0)e^{rt}$ , тобто коли компоненти вектора споживання ростуть одним і тим же сталим темпом  $r \geq 0$ , причому  $c(0) \geq 0$ .

У такому випадку частинний розв'язок  $x_1^0(t)$  визначається так:

$$x_1^0(t) = (E_1 - A_1 - rB)^{-1}c(0)e^{rt}. \quad (22)$$

Об'єднуючи (20) та (22), одержуємо загальний розв'язок системи у вигляді

$$x_1(t) = \sum_{s=1}^n d_s v_s e^{\lambda_s t} + (E_1 - A_1 - rB)^{-1}c(0)e^{rt}. \quad (23)$$

Довільні сталі  $d_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ , знаходяться як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (умова відповідності розв'язку початковим даним при  $t = 0$ ):

$$\sum_{s=1}^n d_s v_s = x_1(0) - (E_1 - A_1 - rB)^{-1}c(0).$$

При відомих значеннях  $v_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ , конкретні значення розв'язку (23) знаходяться шляхом задавання темпу приросту споживання  $r$ . Зокрема, можна показати, що економічно прийнятні траєкторії випуску продукції одержуються при  $r < \hat{\lambda}$ .

## ТЕМА 10

### *ЕКОНОМІКО – ЕКОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ ЗРОСТАННЯ*

Теорія виробничих функцій є ефективним апаратом при дослідженні динаміки процесів виробництва і розподілу. Вона дає змогу дослідити найраціональніші пропорції між виробництвом, споживанням та інвестиціями, враховуючи при цьому обсяги доступних ресурсів. У контексті актуальності концепції стійкого розвитку було створено моделі, які враховують і рівень забруднення навколишнього середовища. Розглянемо одну з таких моделей, яка формулюється як задача оптимального керування.

Застосуємо в цій моделі некласичну однопродуктову двофакторну виробничу функцію  $Y = F(K, L)$ , яку ми використовували при розгляді моделі Солоу (тема 5). Будемо зберігати основні позначення, які використовувались при побудові цієї моделі. Зокрема, для норми амортизації зберігаємо позначення  $\mu$  ( $\mu > 0$ ). Нехай  $P$  – обсяг забруднення довкілля.

Будемо вважати, що обсяг забруднення

$$P = \varepsilon Y, \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad (1)$$

виражається в одиницях основної продукції. Закономірності вигляду (1) є справедливим для металургії, паперової промисловості тощо. Крім того, вважатимемо, що частина відходів виробництва асимілюється середовищем з темпом  $\gamma$  ( $\gamma > 0$ ). Обсяг коштів  $V$ , що виділяються на боротьбу із забрудненням, пропорційний загальному обсягу виробництва з коефіцієнтом  $\beta$  ( $\beta \leq 1$ ). При зменшенні забруднення на одну одиницю витрачається  $r$  ( $r > \varepsilon$ ) одиниць загального обсягу коштів  $V$ .

Зберігаємо основні припущення моделі Солоу, але з розширеною номенклатурою витрат, що пов'язане з видатками на безпечне довкілля:

$$Y = C + I + V; \quad I = \dot{K} + A; \quad A = \mu K; \quad C = \alpha Y; \quad V = \beta Y.$$

Тут  $\alpha$  – частка загального випуску, яка використовується як споживча продукція ( $\alpha \leq 1$ ).

Нехай маємо функцію корисності  $U = U(C, P)$ . Щодо цієї функції зробимо такі припущення:  $U(C, P)$  є двічі неперервно диференційованою функцією за сукупністю аргументів, причому

$$\frac{\partial U}{\partial C} > 0, \quad \frac{\partial U}{\partial P} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial C^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial P^2} < 0, \quad \lim_{C \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial C} = \infty. \quad (2)$$

**Приклад.** Функція  $U(C, P) = AC^a - BP^b$ , де  $A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $0 < a < 1$ ,  $b > 1$  задовольняє всі вказані вище умови.

Критерій оптимальності в моделі, що розглядається, доцільно взяти у вигляді інтеграла від функції корисності вздовж траєкторії  $C(t)$ ,  $P(t)$  з урахуванням дисконтування:

$$W = \int_0^T U(C(t), P(t))e^{-\delta t} dt. \quad (3)$$

Задача керування полягає у виборі частин випуску, які використовуються на споживання ( $\alpha Y$ ) та боротьбу із забрудненням довкілля ( $\beta Y$ ), з метою максимізації добробуту (3).

Разом із функціоналом (3) отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{K} = (1 - \alpha - \beta)F(K, L) - \mu K, \\ \dot{P} = (\varepsilon - r\beta)F(K, L) - \gamma P, \\ C = \alpha F(K, L), \end{cases} \quad (4)$$

де

$$0 < \alpha(t) \leq 1; \quad 0 < \beta(t) \leq 1; \quad \alpha(t) + \beta(t) \leq 1.$$

Отже, йдеться про оптимальний вибір керувань  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ . Застосуємо принцип максимуму Понтрягіна. Позначимо спряжені змінні через  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  (зауважимо, що їх можна трактувати як «тіньові ціни», або об'єктивно зумовлені оцінки капіталу  $K(t)$  та забруднення  $P(t)$ ).

Уведемо замість  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  нові змінні  $q_1(t) = \psi_1(t)e^{\delta t}$ ,  $q_2(t) = \psi_2(t)e^{\delta t}$ .

З урахуванням цього гамільтоніан матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} H(\cdot) = e^{-\delta t} & (U(\alpha F(K, L), P) + q_1((1 - \alpha - \beta)F(K, L) - \mu K) + \\ & + q_2((\varepsilon - r\beta)F(K, L) - \gamma P)), \end{aligned}$$

або:

$$H(\cdot) = e^{-\delta t}(U(\alpha F(K, L), P) - q_1 \alpha F(K, L) - (q_1 + r q_2) \beta F(K, L) + q_1(F(K, L) - \mu K) + q_2(\varepsilon F(K, L) - \gamma P)). \quad (5)$$

Відповідно до принципу максимуму оптимальні керування  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  надають максимального значення гамільтоніану  $H$ , функції  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  є розв'язками спряженої системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial K}, \\ \dot{\psi}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial P}. \end{cases}$$

Оскільки

$$\frac{\partial \psi_i(t)}{\partial t} = \frac{\partial (q_i(t) e^{-\delta t})}{\partial t} = \left( \frac{\partial q_i(t)}{\partial t} - \delta q_i(t) \right) e^{-\delta t},$$

то звідси випливає, що функції  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  є розв'язками такої системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -\alpha \frac{\partial U}{\partial C} \frac{\partial F}{\partial K} + q_1 (\delta + \mu - (1 - \alpha - \beta) \frac{\partial F}{\partial K}) + q_2 (r\beta - \varepsilon) \frac{\partial F}{\partial K}, \\ \dot{q}_2 = -\frac{\partial U}{\partial P} + q_2 (\delta + \gamma). \end{cases} \quad (6)$$

Із (5) випливає, що функція  $H$  досягає максимуму щодо  $\alpha$ ,  $\beta$  разом із функцією

$$h(\alpha, \beta) = \vartheta(\alpha) + \theta\beta, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \vartheta(\alpha) &= U(\alpha F(K, L), P) - q_1 \alpha F(K, L); \\ \theta &= -(q_1 + r q_2) F(K, L). \end{aligned}$$

При цьому  $\alpha$  та  $\beta$  змінюються в трикутнику

$$\Delta = \{ (\alpha, \beta): \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq 1 \}.$$

Нескладний аналіз виразу (7) дає підстави для висновку щодо  $\max_{\Delta} h(\alpha, \beta)$ :

- 1) якщо  $\theta > 0$ , то  $\max_{\Delta} h(\alpha, \beta)$  досягається при  $\alpha + \beta = 1$ ;
- 2) якщо  $\theta < 0$ , то  $\max_{\Delta} h(\alpha, \beta)$  спостерігається при  $\beta = 0$ ;
- 3) якщо  $\theta = 0$ , то  $\beta \in [0, 1]$  – довільне, а  $\alpha$  або дорівнює 1, або є коренем

$$\text{рівняння } \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} = 0.$$

Повного аналізу оптимальних траєкторій моделі (3), (4) ми наводити не будемо, проте розглянемо стани рівноваги або траєкторії збалансованого еколого-економічного зростання, які задовольняють необхідні умови оптимальності.

Стан рівноваги знаходимо з умов

$$\begin{cases} \dot{K} = 0, \\ \dot{P} = 0, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} (1 - \alpha - \beta)F(K, L) - \mu K = 0, \\ (\varepsilon - r\beta)F(K, L) - \gamma P = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Оскільки  $F, K, \mu > 0$ , то з першого рівняння системи (8) отримуємо: сума  $\alpha + \beta$  є сталою, а тому  $\alpha + \beta < 1$ . Таким чином,  $\alpha < 1, \beta < 1$ , тобто маємо випадок, коли виконується або умова 2), або умова 3):  $\theta \leq 0$ .

Друге з рівнянь (8) дає змогу зробити такий висновок: у точці рівноваги параметри  $\alpha$  та  $\beta$  – сталі, а оскільки  $\alpha < 1$ , то із 3) матимемо:  $\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = 0$  (це впливає з принципу максимуму), або

$$\frac{\partial U(\alpha F(K, L), P)}{\partial C} = q_1. \quad (9)$$

Отже,  $q_1(t) = const$ , а на підставі рівнянь (6) –  $q_2(t) = const$ .

Крім того, з (6) знаходимо

$$q_2 = (\delta + \gamma)^{-1} \frac{\partial U}{\partial P},$$

а перше з рівнянь (6), враховуючи (9), дає можливість записати:

$$q_1 \left( \delta + \mu - \frac{\partial F}{\partial K} + \beta \frac{\partial F}{\partial K} \right) - q_2 (\varepsilon - r\beta) \frac{\partial F}{\partial K} = 0. \quad (10)$$

Розглянемо два можливих випадки.

1. Випадок, коли  $\theta = 0$ , називають *рівновагою «золотого віку»*. Передбачено витрати як на споживання, так і на боротьбу із забрудненням довкілля ( $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ). Такий стан рівноваги ( $K^*, P^*, C^*$ ) характеризується помірними рівнями капіталу, споживання та забруднення.

При  $\theta = 0$

$$q_2 = -\frac{q_1}{r}, \quad (11)$$

а тому з (10) і за умови, що  $r > \varepsilon$ , маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\delta + \mu}{1 - \varepsilon r^{-1}} > 0. \quad (12)$$

Із неокласичних умов щодо  $F(K, L)$  нескладно вивести факт існування лише одного розв'язку  $K^*$  рівняння (12). З умови  $\dot{q}_2 = 0$  на підставі (6), (9) та (11) отримуємо:

$$\frac{\partial U}{\partial P} = (\delta + \gamma)q_2 = -\frac{\delta + \gamma}{r} \frac{\partial U}{\partial C},$$

або

$$\frac{\partial U / \partial P}{\partial U / \partial C} = -\frac{\delta + \gamma}{r}. \quad (13)$$

Із (8) легко виключити  $\beta$  (шляхом множення першого рівняння на  $(-r)$  і додавання до другого), що дає:

$$\alpha r F(K^*, L) = \gamma P - \mu r K^* + (r - \varepsilon) F(K^*, L),$$

а оскільки  $C = \alpha F(K^*, L)$ , то отримуємо:

$$rC = \gamma P - \mu r K^* + (r - \varepsilon) F(K^*, L). \quad (14)$$

Легко перевірити, що отримана система рівнянь (13) і (14)

$$\begin{cases} \frac{\partial U / \partial P}{\partial U / \partial C} = -\frac{\delta + \gamma}{r}, \\ rC = \gamma P - \mu r K^* + (r - \varepsilon) F(K^*, L), \end{cases}$$

має єдиний розв'язок  $(C^*, P^*)$ ,  $C^* > 0$ ,  $P^* > 0$ .

Отже, рівновагою оптимального режиму «золотого віку»  $(K^*, P^*, C^*)$  є розв'язок системи рівнянь (12)–(14).

**2.** Цей випадок ( $\theta < 0$ ) називають *рівновагою «темного віку»*. Оскільки  $\theta < 0$ , то  $\beta = 0$ . Отже, жодних витрат на боротьбу із забрудненням не передбачено.

Стан рівноваги в цьому випадку, беручи до уваги (6), (8), (9) та (10), визначається із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial K} = (\delta + \mu) \left( 1 + \frac{\varepsilon}{\delta + \gamma} \frac{\partial U / \partial P}{\partial U / \partial C} \right)^{-1}, \\ P = \frac{\varepsilon}{\gamma} F(K, L), \end{cases}$$

єдиний розв'язок якої позначимо  $(K^{**}, P^{**})$ .

Відповідне значення рівня споживання  $C^{**}$  знаходимо з (8) при  $\beta = 0$ :

$$C^{**} = \alpha^{**} F(K^{**}, L) = F(K^{**}, L) - \mu K^{**}.$$

Стан рівноваги  $(K^{**}, P^{**}, C^{**})$  характеризується високими рівнями виробництва (великий обсяг основних фондів), споживання і забруднення. Останній регулюється природними процесами із відповідним темпом зниження

$$\gamma = -\frac{\dot{P}}{P}.$$

## ТЕМА 11

### *КІНЕТИЧНА МОДЕЛЬ МОНО – ІЄРУСАЛИМСЬКОГО*

#### *Кінетичні рівняння Моно – Ієрусалимського*

Однією з актуальних еколого-економічних задач є задача оптимального збирання врожаю, яка має таку біологічну інтерпретацію. В популяції неперервний ріст якої стимулюється потоком поживних речовин та пригнічується продуктами життєдіяльності (інгібіторами), здійснюється неперервне або дискретне збирання врожаю шляхом відбору частини біомаси і виведення її з репродукційного циклу. Ставиться задача про визначення такого керування системою виробництва біомаси, щоб сумарний врожай, зібраний за фіксований проміжок часу  $[0, T]$ , був максимальним. У кінцевий момент часу  $T$  процес зупиняється шляхом повного відбору біомаси.

Досліди з неперервного (проточного) культивування бактерій показали, що для опису основних особливостей росту біомаси достатньо знати всього лише декілька величин (концентрацій): власне, біомаси; лімітованого поживного субстрату; інгібітора («пригнічувача»), що впливає на мінімальну швидкість в біохімічному ланцюгу реакцій. Залежність між питомою швидкістю (темпом) ензиматичної реакції та концентрацією субстрату характеризується рівнянням Міхаеліса-Ментен:

$$\mu_1 = \frac{\mu_m s}{k_s + s}, \quad (1)$$

де  $\mu_m$  – границя, до якої прямує питома швидкість реакції з підвищенням концентрації субстрату  $s$ ;  $k_s$  – константа лімітування, що чисельно дорівнює концентрації субстрату при  $\mu_1 = \frac{\mu_m}{2}$ . Гальмування ензиматичної реакції пригнічуючими речовинами, в тому числі продуктами обміну, підкоряється тій самій закономірності, відповідно до якої субстрат пришвидшує її. Тоді

$$\mu = \mu_1 - \frac{\mu_1 w}{k_p + w} = \mu_m \frac{s}{k_s + s} \frac{k_w}{k_w + w}, \quad (2)$$

де  $w$  – концентрація продуктів обміну;  $k_w$  – константа інгібірування, яка чисельно дорівнює концентрації продуктів обміну при  $\mu = \frac{\mu_1}{2}$ .

Нехай поживне середовище концентрації  $y^0$  неперервно надходить до області, де культивується біомаса, зі швидкістю розчинення (темпом)  $u$  (1/год) та з тією самою швидкістю з цієї області виходить суміш, що складається із непрореагованого поживного середовища, біомаси і продуктів обміну. Оскільки поживне середовище є єдиним джерелом енергії як для побудови клітинної маси, так і для утворення продуктів обміну, то для складання рівняння динаміки процесу природно скористатися законом збереження речовини. Для цього всі величини, що входять до балансу, необхідно виразити в єдиних одиницях. Кінетичні рівняння у відповідних позначеннях відомі як *кінетична модель Моно-Ієрусалимського*:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\mu_m y k_w}{(k_y + y)(k_w + w)} x - ux, \\ \dot{y} = -\alpha \frac{\mu_m y k_w}{(k_y + y)(k_w + w)} x + u(y^0 - y), \\ \dot{w} = (\alpha - 1) \frac{\mu_m y k_w}{(k_y + y)(k_w + w)} x - uw. \end{cases} \quad (3)$$

Тут  $\alpha = const > 0$  – економічний коефіцієнт, який дорівнює затратам лімітуючого компонента на приріст одиниці біомаси. Система рівнянь (3) замкнута і зв'язує між собою концентрації біомаси  $x$ , поживного субстрату  $y$  та продуктів життєдіяльності  $w$ .

### **Задача оптимального збирання врожаю**

Для подальшого дослідження розглянемо більш загальну систему кінетичних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y, w) - ux, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = -\alpha f(t, x, y, w) + u(y^0 - y), & y(0) = y_0, \\ \dot{w} = (\alpha - 1)f(t, x, y, w) - uw, & w(0) = w_0, \end{cases} \quad (4)$$

де  $f(t, x, y, w) \geq 0$  – відома функція, що задовольняє всі необхідні умови існування розв'язку задачі Коші (4) на часовому проміжку  $[0, T]$ ,  $(x_0, y_0, w_0)$  – задане початкове значення розв'язку  $(x, y, w)$ .

Диференціальні рівняння (4) не мають жодної біологічної специфіки і тому адекватно описують будь-який неперервний технологічний процес, що супроводжується подачею сировини та відтоком продуктів. Надалі цю систему та

її часткові випадки використаємо для моделювання технологічних процесів екологічно чистих виробництв.

Для системи кінетичних рівнянь (4) поставимо задачу оптимального збирання врожаю у вигляді узагальненої задачі оптимального керування:

$$F(x, y, w, u) = \int_0^T ux dt + x(T) \rightarrow \sup_{(x,y,w,u) \in V^t}, \quad (5)$$

$$\dot{x} = f(t, x, y, w) - ux, \quad x(0) = x_0, \quad (6)$$

$$\dot{y} = -\alpha f(t, x, y, w) + u(y^0 - y), \quad y(0) = y_0 < y^0, \quad (7)$$

$$\dot{w} = (\alpha - 1)f(t, x, y, w) - uw, \quad w(0) = w_0, \quad (8)$$

$$x(t) \geq 0, \quad 0 \leq y(t) \leq y^0, \quad w(t) \geq 0, \quad u(t) \geq 0, \quad t \in [0, T]. \quad (9)$$

Тут  $V^t$  – допустима множина, що описується співвідношеннями (6) – (9) при будь-якому  $t \in [0, T]$ ;  $u(t)$  – керування, що має такий технологічний зміст:  $u = 0$  – непроточний процес,  $0 < u < \infty$  – проточний процес.

Згідно з узагальненою теоремою про достатні умови оптимальності для неперервних процесів (Кротова), достатньою умовою оптимальності задачі (5) – (9) буде така умова:

$$R(t, x, y, w, u) = f(t, x, y, w) \rightarrow \sup_{(x,y,w,u) \in V^t}, \quad (10)$$

рівномірно для всіх  $t \in [0, T]$ .

Зазначимо, що функціонал  $F(x, y, w, u)$  задачі (5) – (9) можна також переписати у вигляді (використовуючи рівняння (6)):

$$F(x, y, w, u) = x(0) + \int_0^T f(t, x, y, w) dt,$$

а тому вимога його максимізації узгоджується з вимогою (10).

Система кінетичних рівнянь (6) – (8) є замкненою системою диференціальних рівнянь. Підсумовуючи рівняння (6), (7) і (8), а потім інтегруючи підсумкове рівняння, доходимо до співвідношення:

$$x(t) + y(t) + w(t) - y^0 = (x_0 + y_0 + w_0 - y^0) \cdot \exp\left(-\int_0^T u(\tau) d\tau\right). \quad (11)$$

Помножимо рівняння (6) на  $(\alpha - 1)$  і віднімемо від нього рівняння (8), а потім проінтегруємо підсумкове рівняння. Одержимо:

$$(\alpha - 1)x(t) - w(t) = ((\alpha - 1)x_0 - w_0) \cdot \exp\left(-\int_0^T u(\tau) d\tau\right). \quad (12)$$

Додаючи (11) та (12), маємо:

$$\alpha x(t) + y(t) - y^0 = (\alpha x_0 + y_0 - y^0) \cdot \exp\left(-\int_0^T u(\tau) d\tau\right). \quad (13)$$

Таким чином, система трьох диференціальних рівнянь (6) – (8) еквівалентна одному диференціальному рівнянню (6) та двом балансовим співвідношенням (12) і (13).

Назвемо початкові умови системи (6) – (8) *інваріантними*, якщо вони вибрані так, що

$$\alpha x_0 + y_0 = y^0, \quad w_0 = (\alpha - 1)x_0. \quad (14)$$

Для випадку інваріантних початкових умов (14) система рівнянь (6), (12), (13) спрощується і стає еквівалентною системі

$$\dot{x} = f(t, x, y, w) - ux, \quad x(0) = x_0, \quad (15)$$

$$y = y^0 - \alpha x, \quad w = (\alpha - 1)x, \quad (16)$$

або одновимірній задачі Коші

$$\dot{x} = f(t, x, y^0 - \alpha x, (\alpha - 1)x) - ux, \quad x(0) = x_0. \quad (17)$$

Розв'язки  $x(t) \geq 0$ ,  $y(t) = y^0 - \alpha x(t) \geq 0$ ,  $w(t) = (\alpha - 1)x(t) \geq 0$  системи (15), (16) будемо також називати *інваріантними*.

Достатня умова оптимальності (10) на інваріантному розв'язку запишеться у вигляді:

$$f(t, x(t), y^0 - \alpha x(t), (\alpha - 1)x(t)) = f_0(t, x(t)) \rightarrow \sup_{0 \leq x(t) \leq \frac{y^0}{\alpha}}, \quad (18)$$

рівномірно для всіх  $t \in [0, T]$ .

За умови єдиності оптимального розв'язку  $x^*(t)$  задачі (18) можливі три випадки:

- 1)  $x^*(t) = 0$ ,  $y^*(t) = y^0$ ,  $w^*(t) = 0$  (система перебуває в спокої – нічого не виробляється);
- 2)  $0 < x^*(t) < \frac{y^0}{\alpha}$ ,  $y^*(t) = y^0 - \alpha x^*(t) > 0$ ,  $w^*(t) = (\alpha - 1)x^*(t) > 0$  (здійснюється оптимальний виробничий процес);
- 3)  $x^*(t) = \frac{y^0}{\alpha}$ ,  $y^*(t) = 0$ ,  $w^*(t) = (\alpha - 1)\frac{y^0}{\alpha}$  (система перебуває в спокої – зростання припинене).

Якщо початкові умови системи (6) – (8) неінваріантні, тобто умови (14) не виконуються, то при  $u > 0$  і  $t \gg \frac{1}{u}$  розв'язки  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $w(t)$  внаслідок співвідношень (12), (13) все ж встановлюються та асимптотично переходять в інваріантні розв'язки.

Таким чином, за умови єдиності оптимальний розв'язок  $x^*(t)$ , одержаний з (18), є магістральною траєкторією для задачі оптимального збирання врожаю (5) – (9):

$$x^*(t) = \arg \sup_{0 \leq x(t) \leq \frac{y^0}{\alpha}} f(t, x, y^0 - \alpha x, (\alpha - 1)x), \quad (19)$$

рівномірно для всіх  $t \in [0, T]$ .

Якщо магістральна траєкторія  $x^*(t) > 0$  побудована, то на ділянці диференційованості її оптимальне керування  $u^*(t)$  може бути знайдене з рівняння (6), а саме

$$u^*(t) = \frac{1}{x^*(t)} (f_0(t, x^*(t)) - \dot{x}^*(t)). \quad (20)$$

### **Оптимальні врівноважені стани моделі Моно – Ієрусалимського**

Як зазначалося вище, загальна система кінетичних рівнянь (4) описує будь-який неперервний технологічний процес, що супроводжується подачею сировини і відтоком продуктів. Цю систему можна використати при моделюванні технологічних процесів екологічно чистих виробництв. У цьому випадку її змінні набувають конкретного технологічного змісту:  $x(t)$  – концентрація чистого корисного продукту, який у результаті технологічного процесу одержується зі швидкістю  $u$  (1/год);  $u(t)$  – інтенсивність технологічного процесу;  $ux$  – потік корисного продукту за одиницю часу;  $y^0$  – концентрація природного ресурсу (сировини), яка зі швидкістю  $u$  (1/год) надходить до технологічного процесу;  $uy^0$  – потік сировини за одиницю часу;  $y(t)$  – концентрація залишкової сировини у відходах виробництва;  $uy$  – потік сировини через відходи виробництва за одиницю часу;  $w(t)$  – концентрація шкідливих відходів (забруднювачів), що

утворюються у результаті технологічного процесу;  $uw$  – потік забруднювачів за одиницю часу.

Надалі будемо розглядати лише випадок автономної системи, тобто коли функція  $f(t, x, y, w)$  в системі (4) не залежить явно від часу  $t$ . Конкретизуємо таку функцію  $f(x, y, w)$  і подамо її у вигляді:

$$f(x, y, w) = \mu(y, w)x.$$

У біології  $\mu(y, w)$  – це питома швидкість (темп) ензиматичної реакції, що залежить від концентрації поживного субстрату  $y$  та концентрації метаболітів  $w$ . Залежність  $\mu = \mu(y, w)$  встановлюється емпіричним шляхом через статистичну обробку дослідних даних. Найбільш відомі в біології гіперболічні залежності:

$$\mu = \mu_m \frac{y}{k_y + y} \frac{1}{k_w + w}, \quad \mu = \mu_m \frac{y}{k_y + y + y^2/k_m} \frac{1}{k_w + w}, \quad (21)$$

де  $\mu_m, k_y, k_w, k_m$  – додатні константи. У першому випадку моделюється процес росту біомаси при лімітуючому впливові поживного субстрату та інгібіруючому впливові метаболітів. У другому випадку наявний інгібіруючий вплив метаболітів, а також одночасно лімітуючий та інгібіруючий вплив поживного субстрату. Ілюстрацією для другого випадку є фотосинтез зелених рослин, де світло виступає поживним субстратом, що має лімітуючий вплив при малих енергетичних рівнях освітленості й одночасно інгібіруючий вплив при великих рівнях.

Співвідношення (21) достатньо точно уловлюють нелінійні особливості використання сировинних ресурсів і утворення забруднень. Тому ці співвідношення разом із моделлю Моно-Ієрусалимського можна успішно використовувати для моделювання технологій з еколого-економічними характеристиками.

Надалі розглянемо загальну залежність темпу зростання  $\mu$  від лімітуючого фактора  $y$  та інгібіруючого фактора  $w$ , а саме:  $\mu = \mu(y, w)$ . Щодо цієї функції передбачатимемо виконання таких умов:

1)  $\mu(y, w)$  – обмежена та неперервна в  $\mathbf{R}_+^2$  і при цьому:

$$0 \leq \mu(y, w) \leq \mu_m < \infty, \quad \mu(0, w) = 0, \quad \mu(y, \infty) = 0; \quad (22)$$

2)  $\mu(y, w)$  – двічі неперервно диференційована в  $\mathbf{R}_+^2$  і при цьому:

$$\mu'_y \geq 0, \quad \mu'_w \leq 0, \quad |\mu'_y| + |\mu'_w| > 0, \quad \mu''_{yy} < 0, \quad \mu''_{ww} > 0 \quad (23)$$

для  $y < \infty, w < \infty$ .

Відповідна система кінетичних рівнянь Моно-Ієрусалимського набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(y, w)x - ux, \\ \dot{y} = -\alpha\mu(y, w)x + u(y^0 - y), \\ \dot{w} = (\alpha - 1)\mu(y, w)x - uw. \end{cases} \quad y < y^0, \quad (24)$$

Розглянемо питання про існування зрівноважених стаціонарних станів кінетичної системи (24), що одержуються із системи нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \mu(y, w)x - ux = 0, \\ -\alpha\mu(y, w)x + u(y^0 - y) = 0, \\ (\alpha - 1)\mu(y, w)x - uw = 0. \end{cases}$$

Звідси, враховуючи, що нас цікавить лише випадок  $x > 0, y > 0, w > 0$ , одержуємо:

$$\begin{cases} u = \mu(y, w), \\ \alpha x + y = y^0, \\ (\alpha - 1)x = w. \end{cases} \quad (25)$$

Ця система рівнянь еквівалентна одному рівнянню:

$$\mu(y^0 - \alpha x, (\alpha - 1)x) = u, \quad (26)$$

або:

$$\mu_0(x) = u,$$

де  $\mu_0(x) = \mu(y^0 - \alpha x, (\alpha - 1)x)$  є монотонно спадною функцією від  $x$  при  $0 \leq x \leq y^0/\alpha$ , оскільки:

$$(\mu_0)'_x = -\alpha\mu'_y + (\alpha - 1)\mu'_w < 0.$$

Тому рівняння (26) має єдиний корінь  $x > 0$  для кожного значення  $u > 0$  за умови:

$$\mu(y^0, 0) > u > 0. \quad (27)$$

Отже, за умови (27) рівняння (26) має однопараметричну сім'ю коренів  $\bar{x}(u), \bar{y}(u), \bar{w}(u)$ .

Розглянемо питання про стійкість однопараметричної сім'ї стаціонарних зрівноважених точок кінетичної системи диференціальних рівнянь (24). Для цього

складемо матрицю частинних похідних від правих частин цих рівнянь і знайдемо власні числа одержаної матриці (метод першого наближення). Маємо:

$$\begin{vmatrix} \mu - u - \lambda & \mu'_y x & \mu'_w x \\ -\alpha \mu & -\alpha \mu'_y x - u - \lambda & -\alpha \mu'_w x \\ (\alpha - 1)\mu & (\alpha - 1)\mu'_y x & (\alpha - 1)\mu'_w x - u - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda + u)^2(\lambda - \mu + u + \alpha \mu'_y x - (\alpha - 1)\mu'_w x) = 0.$$

Враховуючи, що стаціонарні стани визначаються умовою  $u = \mu > 0$ , одержуємо власні числа:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu < 0, \quad \lambda_3 = (-\alpha \mu'_y + (\alpha - 1)\mu'_w)x < 0.$$

Таким чином, всі стаціонарні точки кінетичної системи (24) при  $\bar{x} > 0$ ,  $\bar{y} > 0$ ,  $\bar{w} > 0$  є асимптотично стійкими за Ляпуновим (стійкість відносно збурень правих частин диференціальних рівнянь). Зазначимо також, що тривіальна стаціонарна точка  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{y} = y^0$ ,  $\bar{w} = 0$  не є асимптотично стійкою (пропонуємо переконатися в цьому самостійно).

Розглянемо тепер питання про оптимальні стаціонарні розв'язки задачі оптимального збирання врожаю. Аналізуючи систему (25), доходимо висновку, що нетривіальні стаціонарні розв'язки системи рівнянь (24) можна подати у вигляді функції параметра  $u$ :

$$\bar{x} = \mu_0^{-1}(u), \quad \bar{y} = y^0 - \alpha \mu_0^{-1}(u), \quad \bar{w} = (\alpha - 1)\mu_0^{-1}(u),$$

де  $\mu_0^{-1}(u)$  – обернена функція для функції  $u = \mu_0(x)$ . Враховуючи умови (22), (23), переконуємося, що обернена функція  $\mu_0^{-1}(u)$  при  $0 \leq u \leq \mu_0(x)$  існує, оскільки для  $0 \leq x \leq y^0/\alpha$  маємо:

$$\frac{d\mu_0(x)}{dx} = -\alpha \mu'_y(y, z) + (\alpha - 1)\mu'_w(y, z) < 0.$$

Тепер природно поставити питання про існування оптимальних стаціонарних станів, що відповідають стаціонарним розв'язкам, які, за критерієм (10), максимізують продуктивність:

$$\mu(\bar{y}, \bar{w})\bar{x} \rightarrow \max.$$

Ця задача еквівалентна задачі умовної оптимізації:

$$\mu_0(x)x \rightarrow \max_{0 \leq x \leq y^0/\alpha},$$

що має єдиний оптимальний розв'язок  $x^*$ , якщо функція  $\varphi(x) = \mu_0(x)x = \mu(y^0 - \alpha x, (\alpha - 1)x)x$  є строго опуклою вгору на відрізку  $0 \leq x \leq y^0/\alpha$ .

Оскільки  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(y^0/\alpha) = 0$ ,  $\varphi(x) > 0$  при  $0 \leq x \leq y^0/\alpha$ , то максимум функції досягається у внутрішній точці відрізка  $0 \leq x \leq y^0/\alpha$ . Ця точка визначається як корінь рівняння:

$$\begin{aligned} \varphi'(\bar{x}) &= \mu_0(\bar{x}) + \mu'_0(\bar{x})\bar{x} = \mu(y^0 - \alpha\bar{x}, (\alpha - 1)\bar{x}) - \\ &- \left( \alpha\mu'_y(y^0 - \alpha\bar{x}, (\alpha - 1)\bar{x}) - (\alpha - 1)\mu'_w(y^0 - \alpha\bar{x}, (\alpha - 1)\bar{x}) \right) \bar{x} = 0. \end{aligned}$$

### *Модель оптимального використання очисних споруд*

Розглянемо спеціальну задачу оптимального збирання врожаю для узагальненої кінетичної системи Моно-Ієрусалимського вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y, w) - ux, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = -\alpha f(t, x, y, w) + u(y^0 - y), & y(0) = y_0 < y^0, \\ \dot{w} = (\alpha - 1)f(t, x, y, w) - uw - v, & w(0) = w_0, \end{cases} \quad (28)$$

де  $u \geq 0$ ,  $v \geq 0$  – два керування ( $u$  – темп розведення,  $v$  – швидкість надходження контрагента).

У технології екологічно чистих виробництв ці керування мають таку інтерпретацію:  $u$  – інтенсивність основного виробництва,  $v$  – потік внутрішньої очистки, вбудованої в технологічний процес.

Нехай  $p_1$  – ціна одиниці корисного продукту,  $p_2$  – ціна одиниці сировини,  $p_3$  – затрати на знищення одиниці забруднювачів (зовнішні очисні споруди),  $p_3^0$  – затрати на знищення одиниці забруднювачів (внутрішньо вбудована очисна технологія згідно з принципом безвідходності) ( $p_3^0 > p_3$ ). Тоді загальний прибуток за певний період  $[0, T]$  буде:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= p_1 \left( \int_0^T ux dt + x(T) \right) + p_2 \left( \int_0^T uy dt + y(T) \right) - \\ &- p_2 \int_0^T uy^0 dt - p_3 \left( \int_0^T uw dt + w(T) \right) - p_3^0 \int_0^T v dt. \end{aligned} \quad (29)$$

Перший доданок в загальному прибутку (29) означає вартість корисного продукту, другий доданок – вартість залишку сировини, третій – затрати на придбання сировини, четвертий – затрати на знищення забруднювачів

зовнішніми очисними спорудами, п'ятий – затрати на знищення забруднювачів внутрішньо вбудованими в технологічний процес очисними спорудами (за технологією безвідходного виробництва).

Користуючись диференціальними рівняннями (28), перепишемо  $F(u, v)$  у вигляді:

$$\begin{aligned}
 F(u, v) &= p_1 \left( \int_0^T f dt + x_0 \right) + p_2 \left( -\alpha \int_0^T f dt + y_0 \right) - \\
 &\quad - p_3 \left( (\alpha - 1) \int_0^T f dt + w_0 - \int_0^T v dt \right) - p_3^0 \int_0^T v dt = \\
 &= (p_1 - \alpha p_2 - (\alpha - 1)p_3) \int_0^T f dt + (p_1 x_0 + p_2 y_0 - p_3 w_0) - (p_3^0 - p_3) \int_0^T v dt.
 \end{aligned}$$

Позначимо

$$p_0 = p_1 - \alpha p_2 - (\alpha - 1)p_3$$

– приведена вартість виробленої продукції, що складається з ціни продукції  $p_1$  за винятком затрат на придбання сировини та знищення забруднювачів зовнішніми очисними спорудами. Умову

$$p_1 > \alpha p_2 + (\alpha - 1)p_3$$

можна розглядати як умову продуктивності основної технології. Величина

$$p_1 x_0 + p_2 y_0 - p_3 w_0$$

характеризує початковий стан і не залежить від керування технологічним процесом. Величина

$$(p_3^0 - p_3) \int_0^T v dt$$

характеризує додаткові збитки, пов'язані з роботою внутрішньо вбудованих за принципом безвідходної технології очисних споруд.

Тоді критерій задачі оптимального збирання врожаю для системи диференціальних рівнянь (28) можна записати у вигляді:

$$J(u, v) = \int_0^T (f(t, x(t), y(t), w(t)) - sv(t)) dt \rightarrow \sup_{u, v}, \quad (30)$$

де

$$s = \frac{p_3^0 - p_3}{p_1 - \alpha p_2 - (\alpha - 1)p_3} > 0$$

– вартісний параметр, що співвимірює вартість продукції  $ux$  і витрати нейтралізуючого контрагента  $v$ .

Критерій (30) можна записати також у вигляді

$$J(u, v) = \int_0^T (ux - sv) dt + x(T) \rightarrow \sup_{u, v} \quad (31)$$

Крім диференціальних рівнянь з початковими умовами (28) та критерію оптимальності (31) задаються обмеження на траєкторію росту та обмеження на керування:

$$x(t) \geq 0, \quad 0 \leq y(t) \leq y^0, \quad w(t) \geq 0, \quad u(t) \geq 0, \quad v(t) \geq 0, \quad t \in [0, T]. \quad (32)$$

Достатні умови оптимальності (Кротова), як і у випадку раніше розглянутої задачі оптимального збирання врожаю, запишуться у вигляді:

$$R(t, x, y, w, u, v) = f(t, x, y, w) - sv \rightarrow \sup_{(x, y, w, u, v) \in V^t},$$

рівномірно для всіх  $t \in [0, T]$ , що узгоджується з критерієм (30).

Надалі будемо розглядати випадок автономної кінетичної системи, коли функція  $f(t, x, y, w)$  має вигляд:

$$f(x, y, w) = \mu(y, w)x,$$

де функція  $\mu(y, w)$  володіє властивостями (22), (23).

Тоді система диференціальних рівнянь (28) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(y, w)x - ux, \\ \dot{y} = -\alpha\mu(y, w)x + u(y^0 - y), \\ \dot{w} = (\alpha - 1)\mu(y, w)x - uw - v. \end{cases} \quad y < y^0, \quad (33)$$

Система диференціальних рівнянь (33) містить два керування  $u \geq 0, v \geq 0$ . Критерієм оптимальності є максимум загального прибутку за одиницю часу:

$$\mu(y, w)x - sv \rightarrow \sup,$$

де  $s \geq 0$  – вартісний параметр. Оптимізація проходить в допустимій області

$$x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq y^0, \quad w \geq 0, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0.$$

Розглянемо питання про існування врівноважених стаціонарних станів кінетичної системи (33), що одержуються з умови  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = 0$ ,  $\dot{w} = 0$ , тобто із системи нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \mu(y, w)x - ux = 0, \\ -\alpha\mu(y, w)x + u(y^0 - y) = 0, \\ (\alpha - 1)\mu(y, w)x - uw - v = 0. \end{cases}$$

Звідси, враховуючи, що нас цікавить лише випадок  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $w \geq 0$ , одержуємо:

$$\begin{cases} u = \mu(y, w), \\ \alpha x + y = y^0, \\ v = \mu(y, w)((\alpha - 1)x - w). \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи є двохпараметрична сім'я  $\bar{x}(u, v)$ ,  $\bar{y}(u, v)$ ,  $\bar{w}(u, v)$  стаціонарних точок системи диференціальних рівнянь (33).

Оптимальні стаціонарні стани одержуємо як розв'язки параметричної задачі нелінійного програмування:

$$\begin{aligned} F(y, w) = \mu(y, w) \left( \frac{1-s(\alpha-1)}{\alpha} (y^0 - y) + sw \right) \rightarrow \max, \\ 0 \leq y \leq y^0, \quad w \geq 0, \quad \frac{\alpha-1}{\alpha} (y^0 - y) - w \geq 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Допустима область цієї задачі

$$D = \left\{ (y, w): 0 \leq y \leq y^0, \quad w \geq 0, \quad \frac{\alpha-1}{\alpha} (y^0 - y) - w \geq 0 \right\}$$

є прямокутним трикутником (рис. 1), де випадки, які нас цікавлять, відмічені цифрами:

1.  $w = 0$ ;
2.  $y > 0$ ,  $w > 0$ ,  $\frac{\alpha-1}{\alpha} (y^0 - y) - w > 0$ ;
3.  $\frac{\alpha-1}{\alpha} (y^0 - y) - w = 0$  ( $v = 0$ ).

Представлені на рис. 1 три випадки, які нас цікавлять, мають таку економічну інтерпретацію. В першому випадку оптимум досягається на границі  $w = 0$ , де  $v > 0$ , тобто контрагент використовується для повного знищення продуктів обміну (це відбувається при досить низькій ціні  $s$  контрагента).

В другому випадку оптимум є внутрішньою точкою допустимої множини  $D$ , де  $v > 0$ ,  $w > 0$ , тобто контрагент використовується лише для часткового знищення продуктів обміну (це відбувається, мабуть, коли ціна  $s$  контрагента не є малою, але і не є досить високою). В третьому випадку оптимум досягається на границі  $\frac{\alpha-1}{\alpha}(y^0 - y) - w = 0$ , де  $v = 0$ , тобто контрагент зовсім не використовується (це відбувається при досить високій ціні  $s$  контрагента).

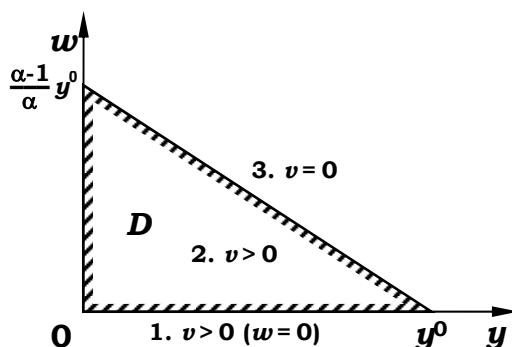


Рисунок 1. Допустима область задачі параметричної оптимізації (34)

Питання про асимптотичну стійкість стаціонарних точок системи диференціальних рівнянь (33) при  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $w \geq 0$ , вирішується аналогічно як для системи (23). Виявляється, що всі стаціонарні стани системи диференціальних рівнянь (33) при  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $w \geq 0$  є асимптотично стійкими за Ляпуновим (стійкість відносно збурень правих частин диференціальних рівнянь). Отже, і оптимальні стаціонарні стани, що знаходяться як розв'язки параметричної задачі нелінійної оптимізації (34), також є асимптотично стійкими за Ляпуновим. Останнє свідчить про можливість практично реалізувати описаний неперервний технологічний процес з внутрішньо вбудованою очисною спорудою.

Повністю дослідити в аналітичному вигляді задачу про оптимальні стаціонарні стани кінетичної системи Моно-Ієрусалимського (33) вдається, коли, наприклад:

$$\mu(y, w) = \mu_m \frac{y}{k_y + y} \frac{k_w}{k_w + w},$$

де  $\mu_m > 0$ ,  $k_y > 0$ ,  $k_w > 0$  – відомі константи.

# ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

## Лабораторна робота 1.

### Взаємодія попиту та пропозиції. Вплив державного регулювання

#### Приклад.

Маємо результати спостережень за зміною величин попиту та пропозиції на ринку деякого товару.

	Price	Demand	Supply
3			
4	1,23	100	10
5	2,05	70	26
6	2,78	65	33
7	3,45	40	50
8	4,99	35	62
9	5,26	24	88
10	6,13	18	94
11	7,5	17	101

1. За цими даними знайти аналітичний вигляд функцій для попиту та пропозиції.

2. Побудувати знайдені функції в осях  $(Q, P)$ . Знайти точку ринкової рівноваги і нанести її на графік. Дослідити стан рівноваги на стабільність.

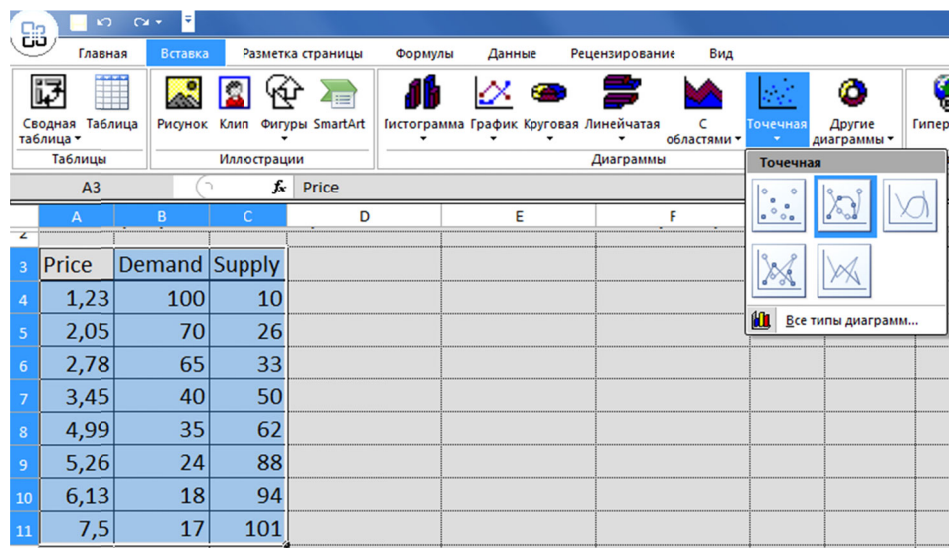
3. Визначити дугову еластичність попиту та пропозиції на всьому діапазоні спостережень.

4. З'ясувати та графічно відобразити (на графіку з п. 2), як зміняться параметри ринкової рівноваги після введення: податку, субсидії, дотації або квоти.

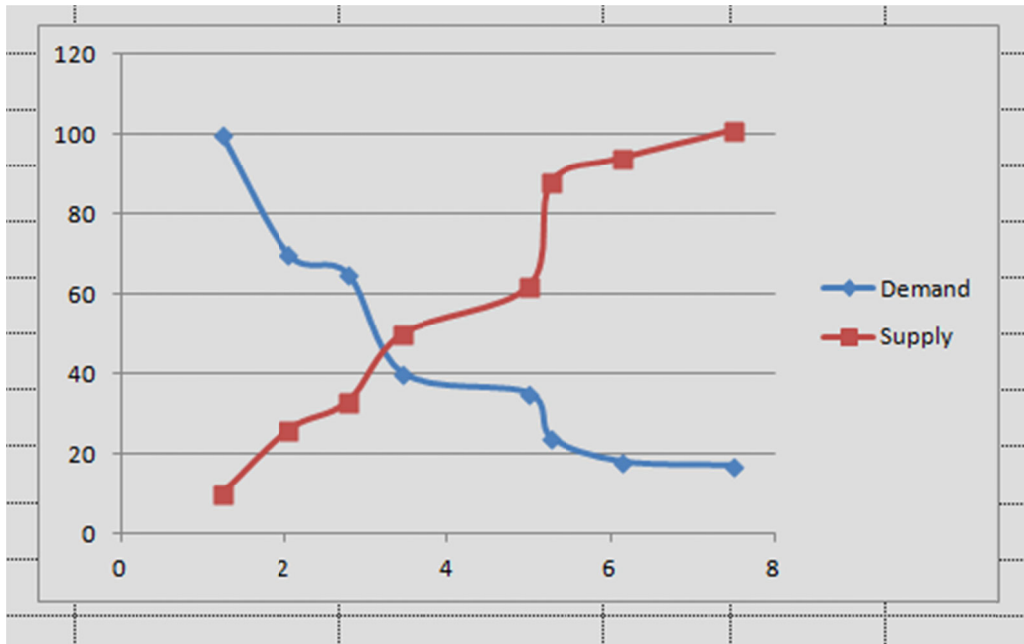
#### Розв'язання.

Роботу для прикладу виконаємо в пакеті Microsoft Office Excel.

Виділяємо діапазон даних, далі у вкладці ВСТАВКА обираємо **точкову діаграму** (оскільки нам потрібно задати осі координат для ціни  $P$  та кількості  $Q$  за нашими даними спостережень):



Отримаємо графік наступного вигляду



Для знаходження аналітичного вигляду функції додамо на графік лінію тренда. Маємо пам'ятати про властивості функцій попиту та пропозиції, а саме: функція попиту монотонно спадає

$$\frac{dQ_d}{dP} < 0$$

та опукла вниз

$$\frac{d^2Q_d}{dP^2} > 0;$$

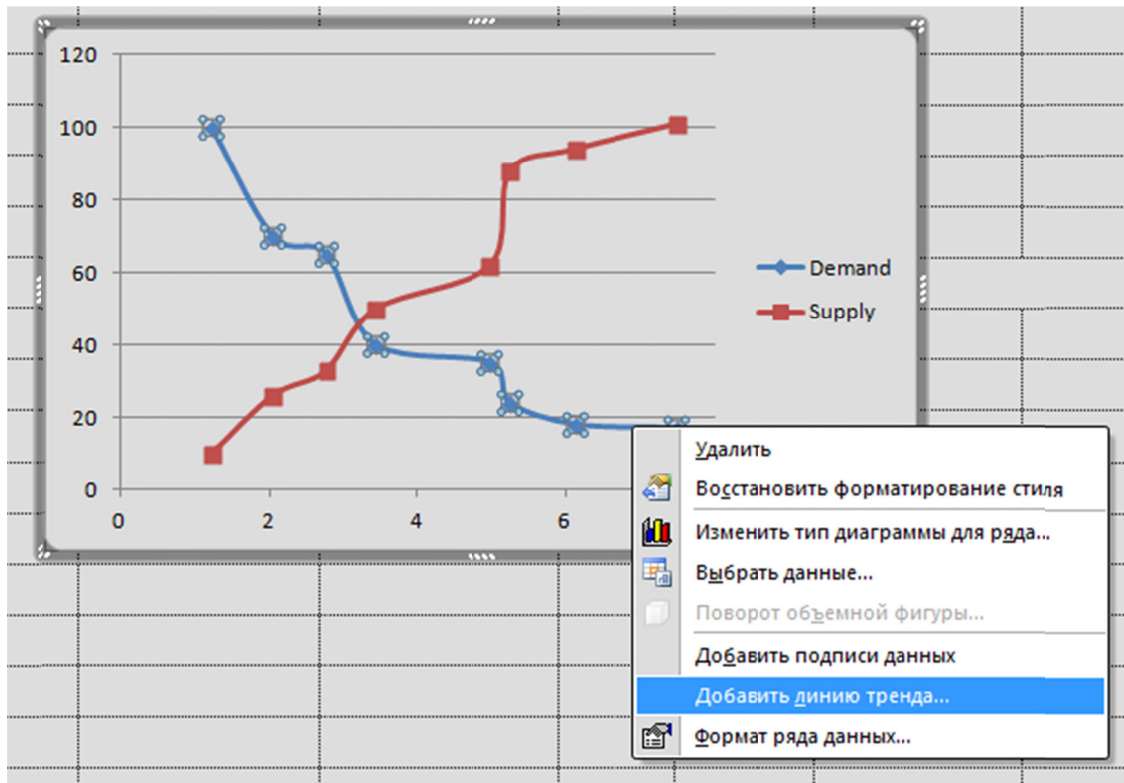
функція пропозиції монотонно зростає

$$\frac{dQ_s}{dP} > 0$$

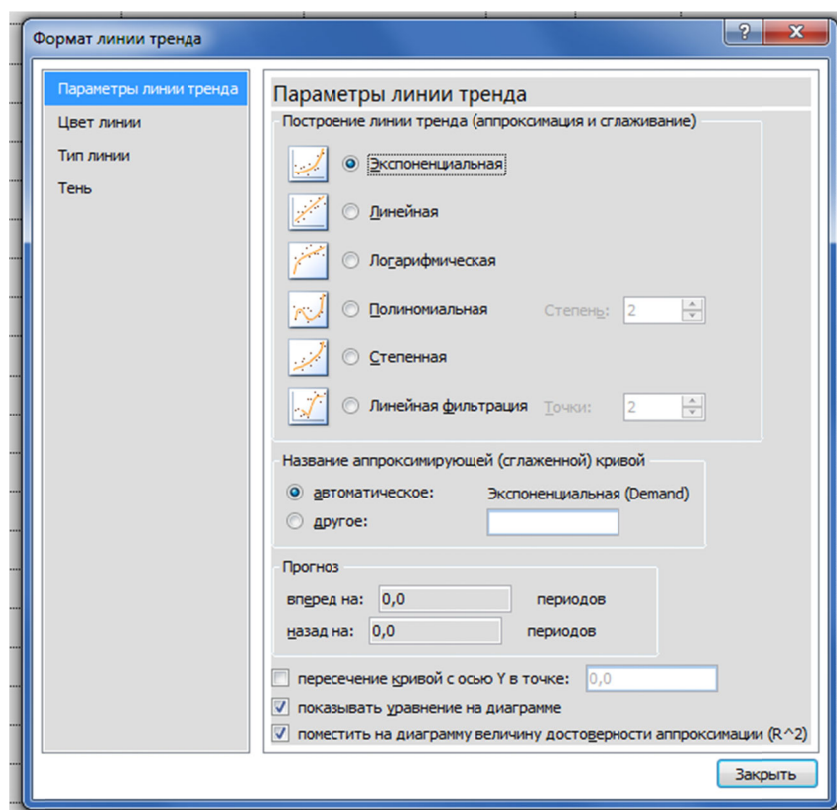
та опукла вгору

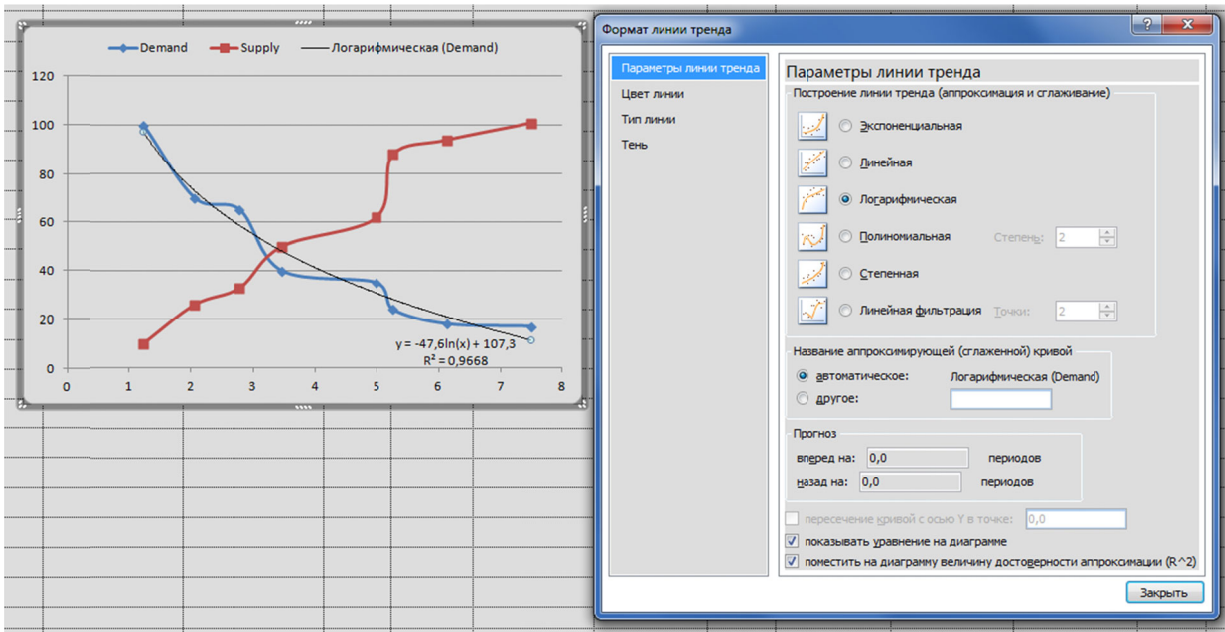
$$\frac{d^2Q_s}{dP^2} < 0.$$

Отже, підводимо курсор мишки, наприклад, спочатку до кривої попиту, та натискаємо праву клавішу мишки. З'являється меню, де обираємо відповідний пункт – Додати лінію тренду...

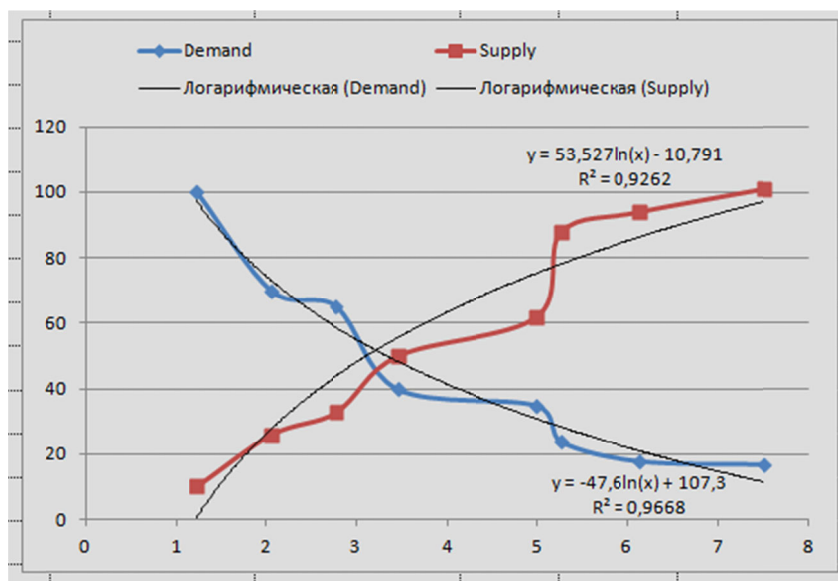


Відкривається меню. Обов'язково відмічаємо – Показувати рівняння на діаграмі та помістити на діаграму  $R^2$ . Із запропонованих ліній тренду нам підходять не всі. Лінійна та поліноміальна лінії тренда не задовольняють вищевказані умови. Тому можемо обирати лише серед трьох типів – експоненціальна, логарифмічна та степенева.





Аналогічно знаходимо лінію тренда для пропозиції. Отримаємо такі залежності:



Пункт 1 виконаний. У даному випадку  $y = Q$ ,  $x = P$ .

Тепер потрібно побудувати знайдені функції в осях  $(Q, P)$ . Для цього створимо два додаткових стовпчики для попиту та пропозиції, куди запишемо наші функціональні залежності.

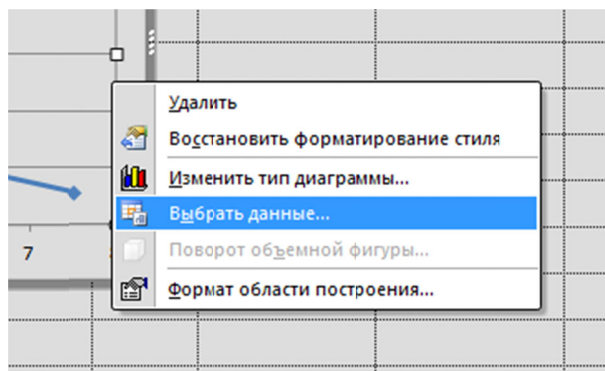
Будь-яка формула починається зі знаку "=".

Price	Demand	Supply	Function demand
1,23	100	10	=-47,6*LN(A4)+107,3

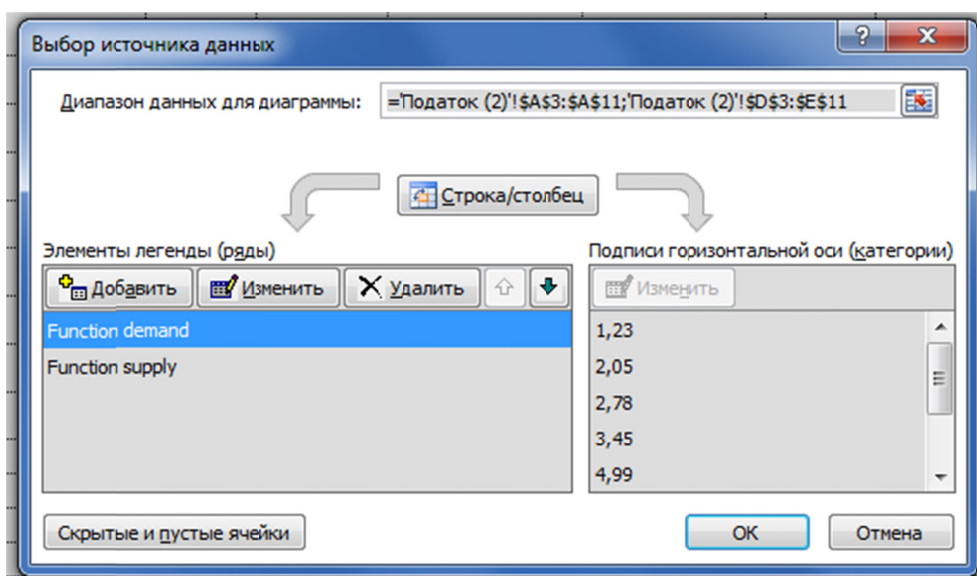
Аналогічно для пропозиції



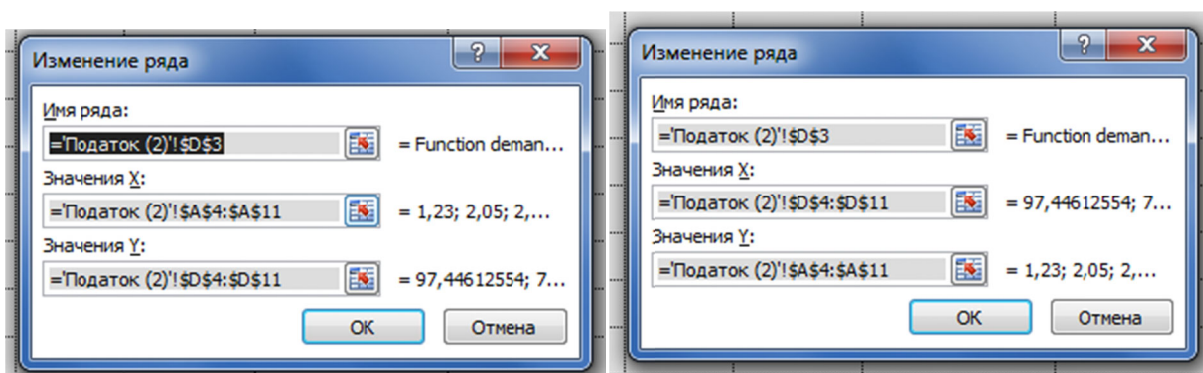
Тепер нам потрібно поміняти місцями осі координат. Для цього натискаємо праву клавiшу мишки на полі діаграми і обираємо



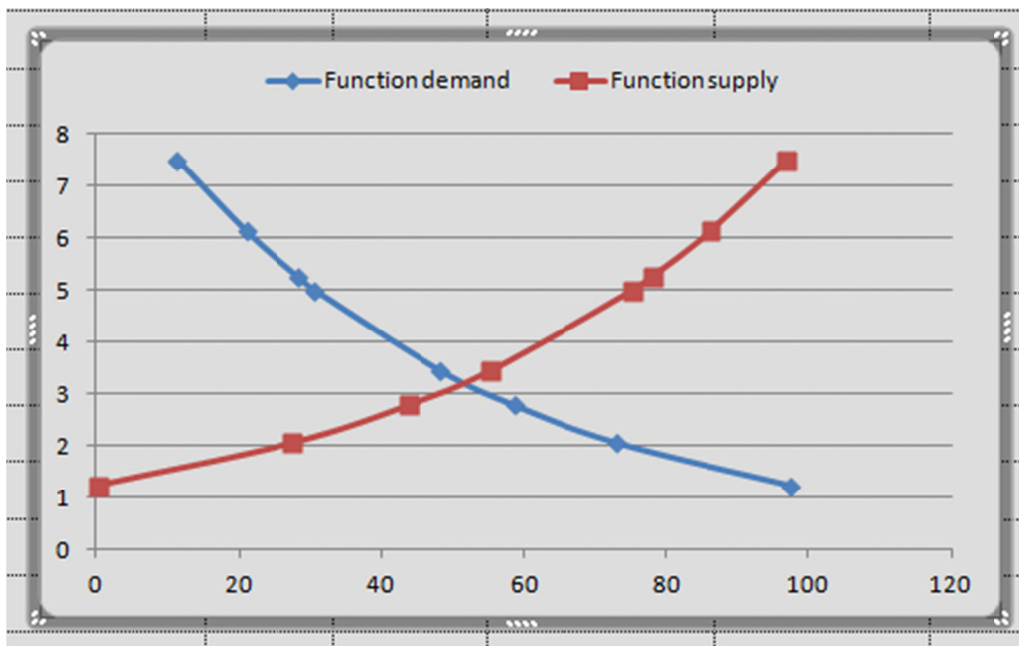
Далі з'явиться наступне меню



Спочатку обираємо один ряд (Function demand), потім інший (Function supply) та натискаємо кнопку ЗМІНИТИ. Міняємо місцями діапазон по X та Y.



Аналогічно змінюємо для Function supply. Отримаємо той графік, який вимагається в пункті 2.



Для знаходження точки ринкової рівноваги підготуємо область обчислень. Ринкова рівновага – коли величини попиту та пропозиції збігаються. Покажемо знаходження рівноважних параметрів ринку двома способами:

- 1) Підбір параметра.
- 2) Пошук рішення.

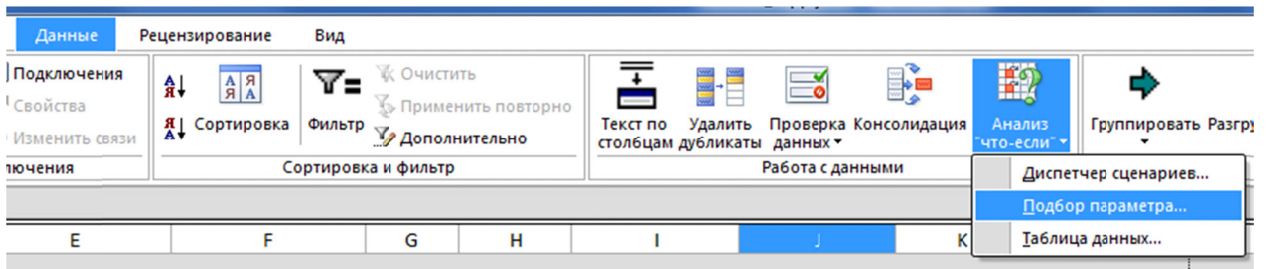
	Підбір параметру		Пошук рішення (Solver)	
Пункт 2	Q*d=		Q*d=	
	Q*s=		Q*s=	
	p*=		p*=	
	Q*d-Q*s=		Q*d-Q*s=	
Рівноважні параметри ринку				

Використаємо наші функції попиту та пропозиції з ліній тренду.

Підбір параметру	
Q*d=	=-47,6*LN(J5)+107,3
Q*s=	-10,791
p*=	1
Q*d-Q*s=	118,09

1) Підбір параметру.

Обираємо вкладку ДАНІ –> Аналіз «Що-Якщо» –> Підбір параметру



Н	І	Ј	К	Л	М
<b>Підбір параметру</b>					
Пункт 2	Q*d=	107,3			
	Q*s=	-10,791			
	p*=	1			
	Q*d-Q*s=	118,09			
Рівноважні параметри ринку					

**Підбір параметру**

Установить в ячейке:

Значение:

Изменяя значение ячейки:

OK

Підбір параметру	
Q*d=	51,715158
Q*s=	51,715089
p*=	3,2147474
Q*d-Q*s=	0,00

2) Пошук рішення.

Та ж вкладка ДАНІ.

**Поиск решения**

Анализ данных

---

Анализ

**Поиск решения**

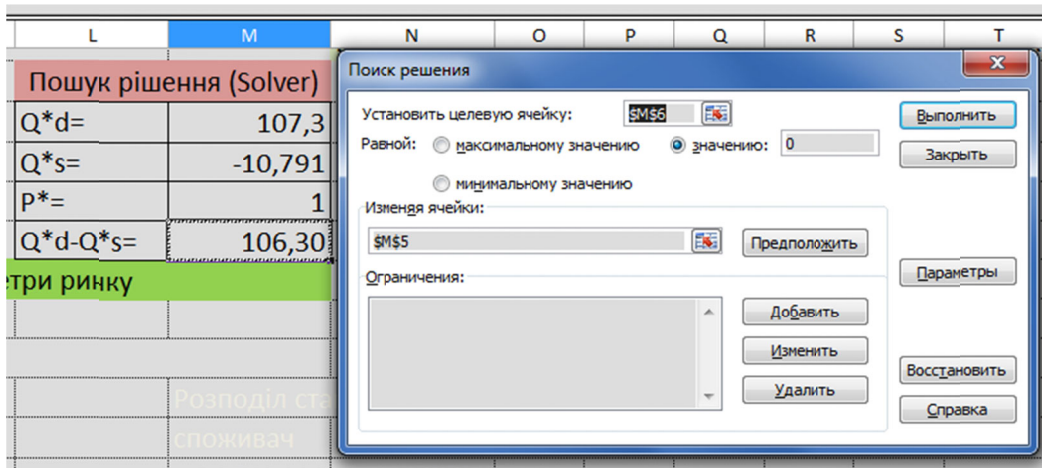
Поиск оптимального значения в ячейке путем изменения значений в ячейках, используемых при вычислении значения в этой ячейке.

---

**SOLVER.XLAM**

Для получения дополнительных сведений нажмите клавишу F1.

Маємо таке вікно для обчислень:

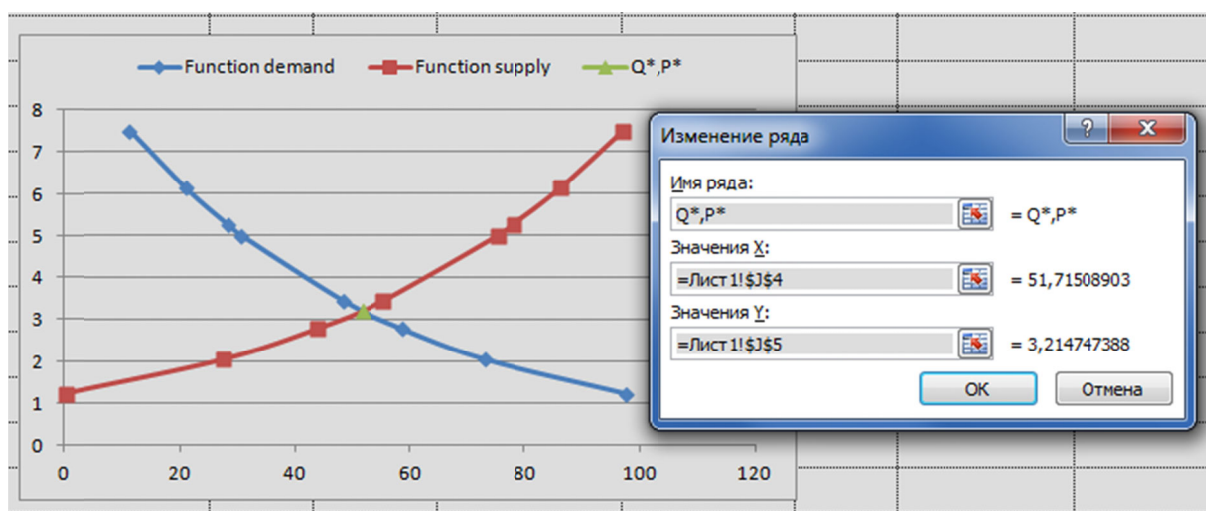


Виконати

Отримали

Пошук рішення (Solver)	
$Q^*d=$	51,715125
$Q^*s=$	51,715126
$P^*=$	3,2147496
$Q^*d-Q^*s=$	0,00

Тепер потрібно рівноважні параметри ринку ( $Q^*, P^*$ ) нанести на графік (з пункту 2). Правою клавішою мишки натискаємо на полі діаграми, обираємо ОБРАТИ ДАНІ. Далі додаємо ще один ряд.



Присвоюємо цьому ряду ім'я. Вибираємо відповідні значення по  $X$  та  $Y$ . На графіку бачимо, що з'явився зелений трикутник на перетині двох функцій, в легенді – додатковий надпис. Натискаємо ОК. Рівноважна точка додана.

З метою дослідження стану рівноваги на ринку за нашими формулами для попиту та пропозиції маємо порахувати еластичності в точці рівноваги та порівняти їх між собою.

Рахувати і записувати формулу еластичності прийдеться самостійно, самостійно рахувати похідну. Наприклад, еластичність попиту (аналогічно розраховується еластичність пропозиції).

	А	Н	І	Ж	К
2			Підбір параметру		
3	Пункт 2	Q*d=		51,715158	
4		Q*s=		51,715089	
5		P*=		3,2147474	
6		Q*d-Q*s=		0,00	
7		Рівноважні парам			
8					
9		Ed		=(-47,6/J5)*(J5/J3)	
10		Es		1,0350364	

Перша дужка у формулі – це похідна від логарифмічної функції у рівноважній точці, друга дужка – це дріб  $\frac{P^*}{Q^*}$ .

Ed	-0,920426	нестабільна динамічна рівновага
Es	1,0350364	

Можна використати логічну функцію для отримання відповіді. Наприклад

	А	Н	І	Ж	К	Л	М	Н	О	Р	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB
9		Ed		-0,920426		=ЕСЛИ(ABS(J9)>10;"стабільна динамічна рівновага";ЕСЛИ(ABS(J9)<10;"нестабільна динамічна рівновага";"квазістабільна динамічна рівновага"))																
10		Es		1,0350364		=ЕСЛИ(ЛОГ_ВЫРАЖЕНИЕ [значеніе_если_истина] [значеніе_если_ложь])																

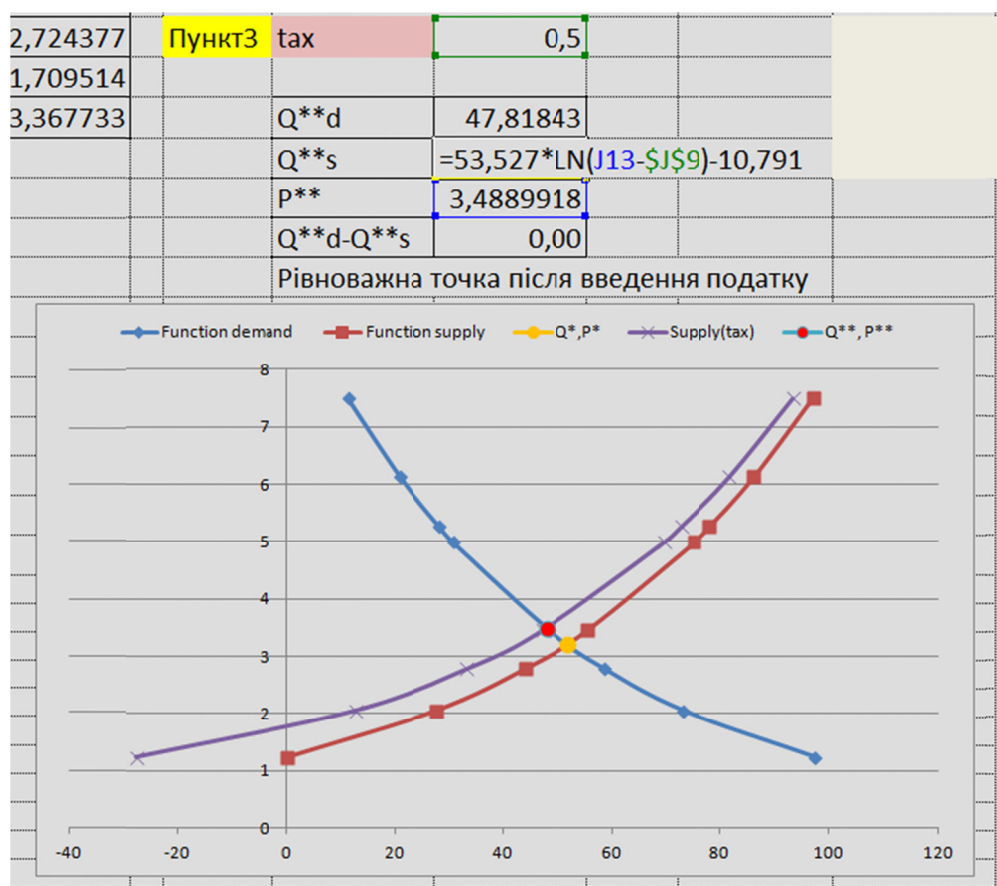
Вплив державного регулювання розглянемо на прикладі опосередкованої ставки податку. Вона призводить до зміни, наприклад, функції пропозиції.

$$Q_s = f(P) \Rightarrow Q_s^{tax} = f(P - tax).$$

Виберемо значення ставки податку  $tax$  (залежно від рівноважної ціни) та додамо до нашої таблички ще один стовпчик, наприклад, Supply (tax). У відповідні комірки занесемо змінену функцію пропозиції з врахуванням податку:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2										
3	Price					Suply(tax)				
4	1,23					=53,527*LN(A4-\$J\$9)-10,791				
5	2,05					12,66747169				
6	2,78					33,32463894				
7	3,45					47,11478535				
8	4,99					69,59866957				
9	5,26					72,72437694	Пункт3	tax	0,5	
10	6,13					81,70951411				
11	7,5					93,36773255				

Так само, як ми додавали рівноважну точку на графік, додаємо нову криву пропозиції (після введення опосередкованої ставки податку). Користуючись тим самим алгоритмом (пункт 2), знаходимо нові рівноважні параметри. І додаємо нову рівноважну точку на графік:



Формула для функції попиту залишається без змін, а функція пропозиції змінилася.

Аналогічно можна провести дослідження впливу інших форм державного регулювання, врахувавши відповідні зміни функцій.

## Лабораторна робота 2. Моделі поведінки фірми

### Приклад.

$K$ , Обсяг витрат капіталу	$L$ , Обсяг витрат трудових ресурсів	$q = F(K, L)$ , Обсяг випуску продукції
2860	10680	49920
2740	10310	47750
2950	10680	50550
2880	10800	50570
2510	10540	47820
2690	10420	47900
2990	10940	51900
2850	10710	45970
3000	9900	48030
3070	9930	48100

$$p = 5, \quad w_K = 2, \quad w_L = 3, \quad TC_0 = 100\,000, \quad q_0 = 55\,000.$$

За даним статистичних спостережень побудувати мультиплікативну виробничу функцію  $F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$ . Знайти оптимальні витрати обсягу капіталу та праці для задач:

- 1) максимізація прибутку;
- 2) максимізація випуску продукції;
- 3) мінімізація витрат.

### Розв'язання.

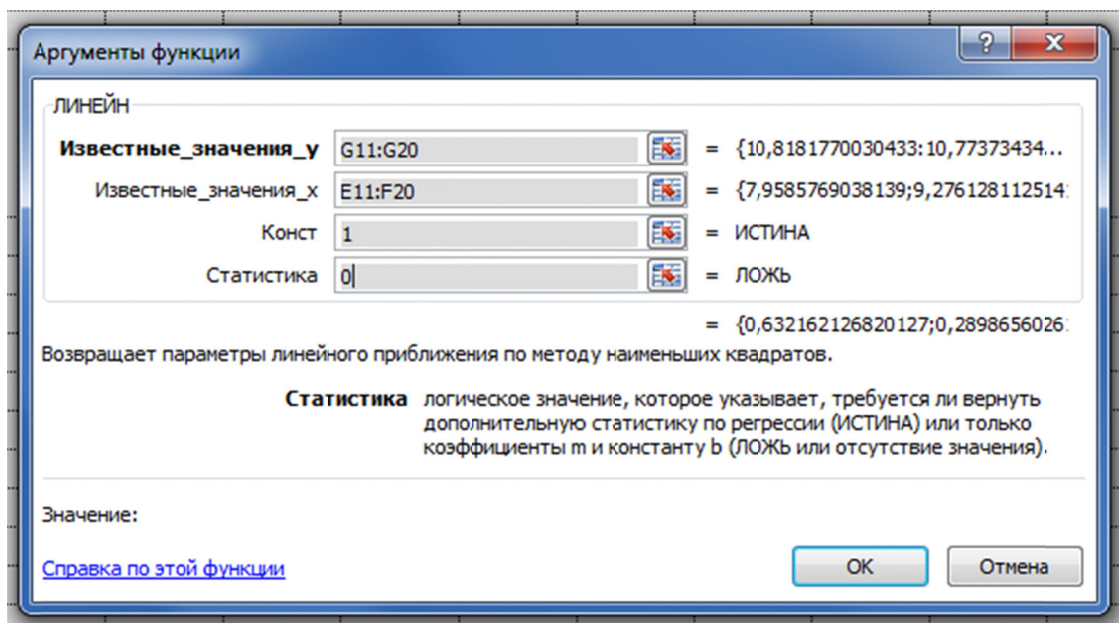
Перш ніж перейти до розв'язання відповідних задач поведінки фірми, маємо побудувати задану виробничу функцію, для цього потрібно знайти відповідні коефіцієнти рівняння –  $A, \alpha, \beta$ . З цією метою скористаємося вбудованою функцією ЛИНЕЙН( ). Але для цього нашу функцію  $F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$  маємо звести до функції лінійної регресії:

$$F(K, L) = AK^\alpha L^\beta \Rightarrow \ln(F(K, L)) = \ln(A) + \alpha \ln(K) + \beta \ln(L).$$

А точніше

$$\ln(F(K, L)) = \beta \ln(L) + \alpha \ln(K) + \ln(A).$$

Зауваження. Коефіцієнти лінійної регресії виводяться у зворотному порядку. Для знаходження коефіцієнту  $A$  потрібно взяти  $\exp(\ln(A))$ .



Діапазон **значень y** – це наші дані спостережень по  $\ln(q)$ , діапазон **значень x** – це значення  $\ln(K)$ ,  $\ln(L)$ ; виділяємо обидва стовпчики як один діапазон. **Конст** = 1 (оскільки у нас є  $\ln(A)$ , в іншому випадку ставимо значення 0).

Після натискання ОК, ми отримаємо лише значення в одній комірці. Для того, щоб вивести інші значення, виділяємо відповідні комірки, натискаємо F2, потім Ctrl+Shift+Enter. І побачимо інші розраховані значення:

beta	alpha	$\ln(A)$	A
0,63216	0,28987	2,63768	=EXP(K7)
EXP(число)			
$F(K,L)=13,98*(K^{0,29})*(L^{0,63})$			

Отже, у нас є виробнича функція, побудована на даних спостережень:

$$F(K, L) = 13,98 \cdot K^{0,29} \cdot L^{0,63}$$

Тепер можемо переходити до розв'язання відповідних задач поведінки фірми.

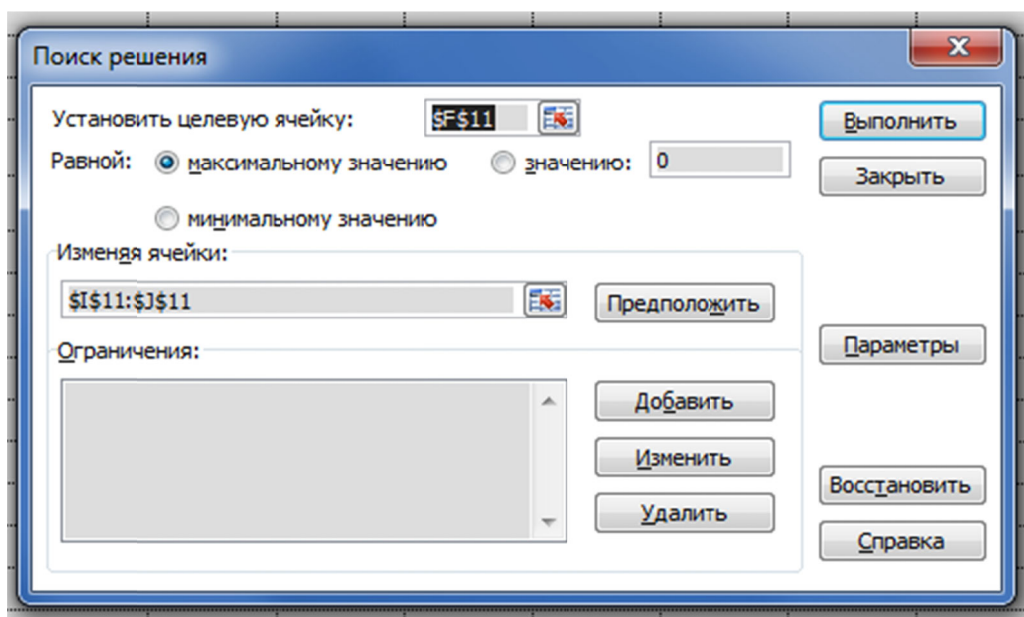
Для розв'язку задачі максимізація прибутку створимо новий аркуш з аналогічною назвою, перенесемо значення знайдених коефіцієнтів функції, щоб

використати у формулах. Маємо підготувати область обчислень з відповідними формулами (завжди намагаємось використовувати посилання на відповідні комірки):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	<b>Максимізація прибутку</b>					довгостроковий період					
2	Використаємо потрібні дані										
3	p=	5									
4	w(K)=	2		beta	alpha	ln(A)	A				
5	w(L)=	3		0,632162	0,289865	2,6376808842099	13,9807430204559				
6											
7	F(K,L)=13,98*(K^0,0,29)*(L^0,63)										
8											
9											
10						<b>ПРИБУТОК</b>	Дохід	Витрати	K*	L*	
11						=G11-H11	=B3*G5*СТЕПЕНЬ(I11;E5)*СТЕПЕНЬ(J11;D5)	=B4*I11+B5*J11			

Комірки  $K^*$  та  $L^*$  – поки що невідомі.

Для знаходження оптимальних обсягів капіталу та праці ( $K^*$  та  $L^*$  відповідно) використаємо **Пошук рішення**:

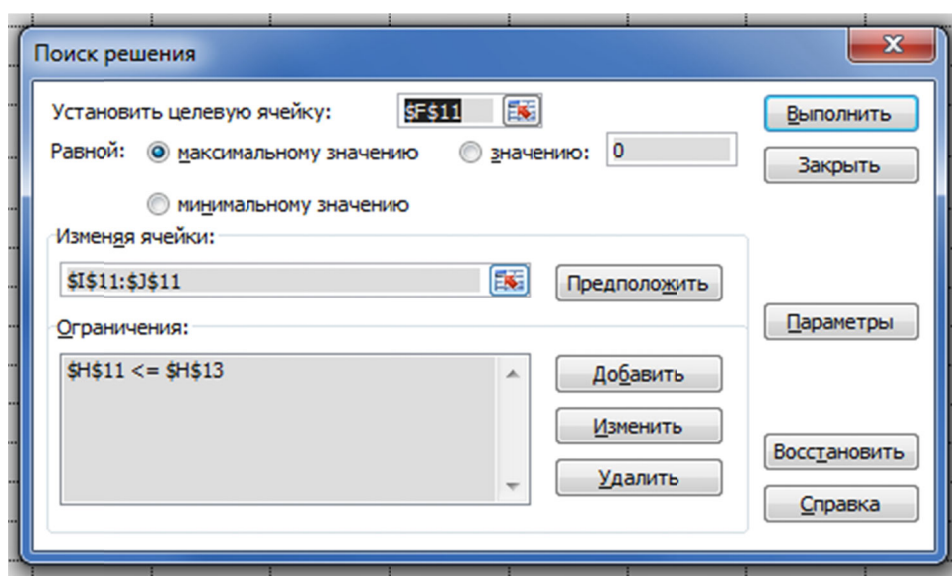


Пам'ятаємо, що розв'язок має бути невід'ємний (Параметри).

Для розв'язку задачі максимізації випуску створимо новий аркуш з аналогічною назвою, перенесемо значення знайдених коефіцієнтів функції, щоб використати у формулах. Підготуємо область для обчислень. Введемо формули у відповідні комірки:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	<b>Максимізація випуску</b>									
2	Використаємо потрібні дані									
3	TC0=	=100000								
4	w(K)=	2	beta	alpha	ln(A)	A				
5	w(L)=	3	0,63216212682	0,2898656026	2,6376808842099	13,980743				
6										
7	F(K,L)=13,98*(K^0,29)*(L^0,63)									
8										
9										
10						<b>ВИПУСК</b>		Витрати, TC	K*	L*
11						=G5*СТЕПЕНЬ(I11;E5)*СТЕПЕНЬ(J11;D5)		=B4*I11+B5*J11		
12										
13								=B3		
14										

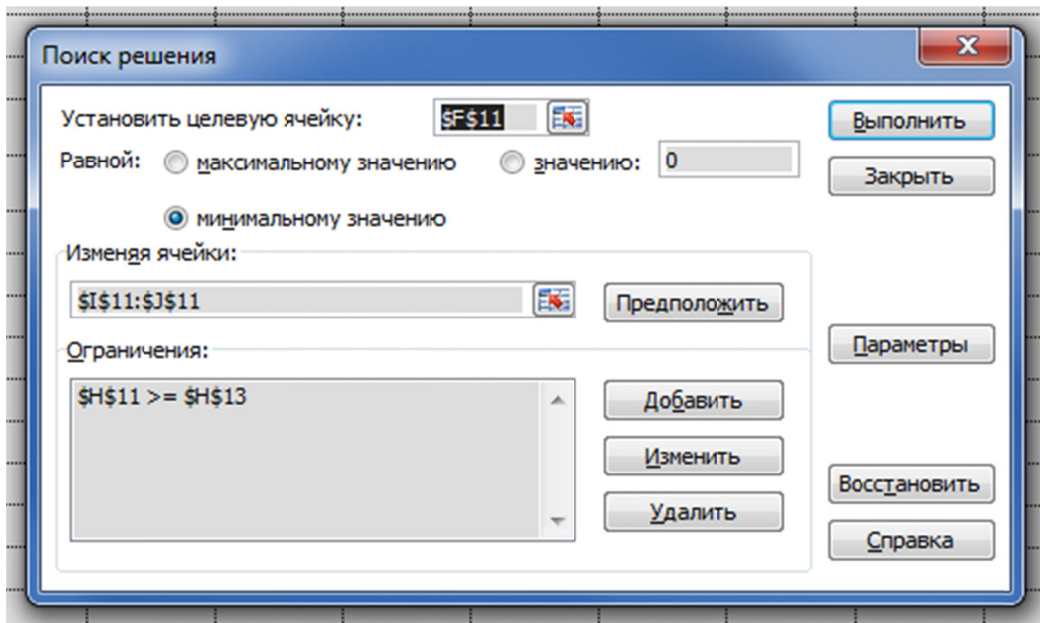
Для знаходження оптимальних обсягів капіталу та праці ( $K^*$  та  $L^*$  відповідно) використаємо **Пошук рішення**:



Для розв'язку задачі мінімізація витрат створимо новий аркуш з аналогічною назвою, перенесемо значення знайдених коефіцієнтів функції, щоб використати у формулах:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	<b>Мінімізація витрат</b>									
2	Використаємо потрібні дані									
3	q0=	55000								
4	w(K)=	2	beta	alpha	ln(A)	A				
5	w(L)=	3	0,6321621268	0,2898656026	2,6376808842099	13,98074302				
6										
7	F(K,L)=13,98*(K^0,29)*(L^0,63)									
8										
9										
10						<b>ВИТРАТИ</b>		Випуск	K*	L*
11						=B4*I11+B5*J11		=G5*СТЕПЕНЬ(I11;E5)*СТЕПЕНЬ(J11;D5)		
12										
13								=B3		
14										

Для знаходження оптимальних обсягів капіталу та праці ( $K^*$  та  $L^*$  відповідно) використаємо **Пошук рішення**:



### Лабораторна робота 3.

#### Модель Леонт'єва, модель ціноутворення. Продуктивність

##### Приклад 1.

Економіка країни розбита на дві виробничі галузі (промисловість та сільське господарство). За минулий рік повний випуск промислових виробництв у вартісній формі був розподілений таким чином:

- 500 млн. грн. для виробничих потреб промисловості;
- 300 млн. грн. для виробничих потреб сільського господарства;
- 900 млн. грн. для споживання населення (згідно попиту на цю продукцію).

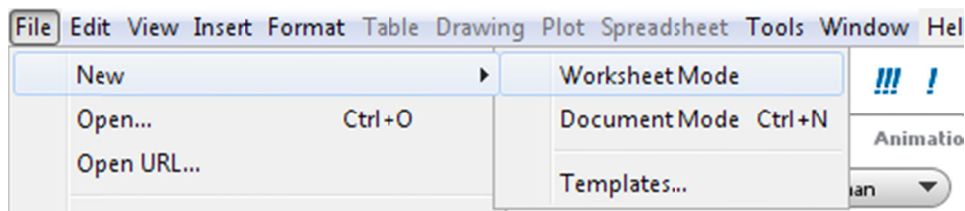
В той же час повний випуск сільськогосподарської продукції (у вартісній формі) був розподілений таким чином:

- 150 млн. грн. для виробничих потреб промисловості;
- 200 млн. грн. для виробничих потреб сільського господарства;
- 500 млн. грн. для споживання населення (згідно попиту на цю продукцію).

На наступний рік прогнозується зростання попиту населення на вітчизняну продукцію, в т. ч. на промислові вироби до 1100 млн. грн та на сільськогосподарську продукцію до 800 млн. грн. Який повний випуск промислової продукції та повний випуск сільськогосподарської продукції зможуть задовольнити новий попит?

##### Розв'язання.

Скористаємося пакетом Maple. Запускаємо застосунок Maple 13, для створення нового робочого файлу обираємо Worksheet Mode.



За допомогою # можемо писати коментарі. За допомогою := можна присвоювати імена відповідним розрахункам з подальшим їх використанням. Команда **restart** змушує ядро Maple очищати свою внутрішню пам'ять, щоб Maple

діяв (майже) так, ніби щойно запущений. Всі формули записуються без пробілів. Коли натиснути після формули Enter, то з'явиться формула синього кольору, що означає розпізнавання програмою відповідної формули.

Підключаємо бібліотеку *LinearAlgebra* за допомогою команди *with*: *with(LinearAlgebra)* для роботи з матрицями та векторами.

Ведемо відповідні значення згідно моделі Леонт'єва.

```

> restart;
> with(LinearAlgebra) :
> # ПРОМИСЛОВІСТЬ
> x11 := 500                                x11 := 500
> x12 := 300                                x12 := 300
> # Обсяг попиту на промислову продукцію
> y1 := 900                                  y1 := 900
> # Повний випуск x1
> x1 := x11 + x12 + y1                       x1 := 1700
> # СІЛЬСЬКЕ ГОСПОДАРСТВО
> x21 := 150                                x21 := 150
> x22 := 200                                x22 := 200
> # Обсяг попиту на с/г продукцію
> y2 := 500                                  y2 := 500
> # Повний випуск x2
> x2 := x21 + x22 + y2                       x2 := 850

```

Вводимо прогнозні значення попиту на наступний рік

```

> # Прогнозні значення на наступний рік (нові y1 та y2)
> c1 := 1100                                c1 := 1100
> c2 := 800                                  c2 := 800

```

Розрахуємо коефіцієнти технологічної матриці *A*:

```

> # Знаходимо технологічну матрицю A (a[i,j]=x[i,j]/x[j])
> A := 
$$\begin{bmatrix} \frac{x11}{x1} & \frac{x12}{x2} \\ \frac{x21}{x1} & \frac{x22}{x2} \end{bmatrix}$$


```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{5}{17} & \frac{6}{17} \\ \frac{3}{34} & \frac{4}{17} \end{bmatrix}$$

```

> #Потрібно знайти нові повні випуски x1 та x2, що зможуть задовольнити нові обсяги попиту
> #Новий повний випуск розраховуємо за матричною формулою  $x=B \cdot c$ , де  $B=(E-A)^{-1}$  - матриця повних витрат
>  $c := \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \end{bmatrix}$ 
>  $E := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 
>  $B := \text{MatrixInverse}(E - A)$ 
>  $x := \text{evalf}(\text{MatrixVectorMultiply}(B, c))$ 

```

$$c := \begin{bmatrix} 1100 \\ 800 \end{bmatrix}$$

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{221}{147} & \frac{34}{49} \\ \frac{17}{98} & \frac{68}{49} \end{bmatrix}$$

$$x := \begin{bmatrix} 2208.8435 \\ 1301.0204 \end{bmatrix}$$

## Приклад 2.

Економіка країни розбита на дві виробничі галузі (промисловість та сільське господарство). За минулий рік повний випуск промислових виробництв у вартісній формі був розподілений таким чином:

- 500 млн. грн. для виробничих потреб промисловості;
- 300 млн. грн. для виробничих потреб сільського господарства;
- 900 млн. грн. для споживання населення (згідно попиту на цю продукцію).

В той же час повний випуск сільськогосподарської продукції (у вартісній формі) був розподілений таким чином:

- 150 млн. грн. для виробничих потреб промисловості;
- 200 млн. грн. для виробничих потреб сільського господарства;
- 500 млн. грн. для споживання населення (згідно попиту на цю продукцію).

Розрахувати ціни на промислову та сільськогосподарську продукцію, якщо відомо, що додана вартість в цінах складає:

- 0.3 – для промисловості;
- 0.5 – для сільського господарства.

## Розв'язання.

Алгоритм розв'язування такий як і в попередньому прикладі, закінчуючи знаходженням технологічної матриці  $A$ . Далі потрібно використати модель ціноутворення:

```
> #МОДЕЛЬ ЦІН (коли маємо вектор доданої вартості)
> #Потрібно знайти ціни p1 та p2 на відповідний тип продукції
> # Вектор цін розрахуємо за матричною формулою  $p=s \cdot B$ , де  $s$  – вектор доданої вартості
> s1 := 0.3
> s2 := 0.5
> s := [ s1 s2 ]
> p := evalf( VectorMatrixMultiply(s, B) )
```

$s1 := 0.3000$   
 $s2 := 0.5000$   
 $s := [ 0.3000 \ 0.5000 ]$   
 $p := [ 0.5378 \ 0.9020 ]$

## Приклад 3.

Задано технологічну матрицю  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.5 \\ 0 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Знайти власні числа матриці, коефіцієнти характеристичного поліному, її число Фробеніуса, правий та лівий вектори Фробеніуса. Зробити висновок про продуктивність даної матриці  $A$ . Для цієї матриці знайти матрицю повних витрат  $B$ ; дослідити на збіжність суму ряду  $E + A + A^2 + \dots + A^k$  до матриці повних витрат (критерій збіжності – величини елементів відповідних матриць відрізняються менше, ніж на 0.01).

Розв'язання цієї задачі пропонуємо провести самостійно.

## Лабораторна робота 4.

### Моделі поведінки ізольованої популяції

#### Приклад 1.

Припустимо, що кількість кролів  $P(t)$  ( $t$  виражається в місяцях) у заповіднику задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dP}{dt} = -0.0004 \cdot P(t) \cdot (150 - P(t)).$$

Нехай спочатку в заповіднику нараховується 20 кролів. Розв'язати це диференціальне рівняння та визначити, що станеться з популяцією в майбутньому. Що станеться з популяцією кролів, якщо початкова чисельність тварин становитиме 300 особин? Визначити чисельність популяції в обох випадках в момент часу  $t = 40$ . Побудувати графіки чисельності популяцій для обох випадків.

#### Розв'язання.

Скористаємося середовищем MAPLE.

```
> #Приклад 1
> restart;
> # вводимо дифференціальне рівняння
> d1 := diff(P(t), t) = 0.0004 * P(t) * (150 - P(t))
```

$$d1 = \frac{d}{dt} P(t) = 0.0004 P(t) (150 - P(t))$$

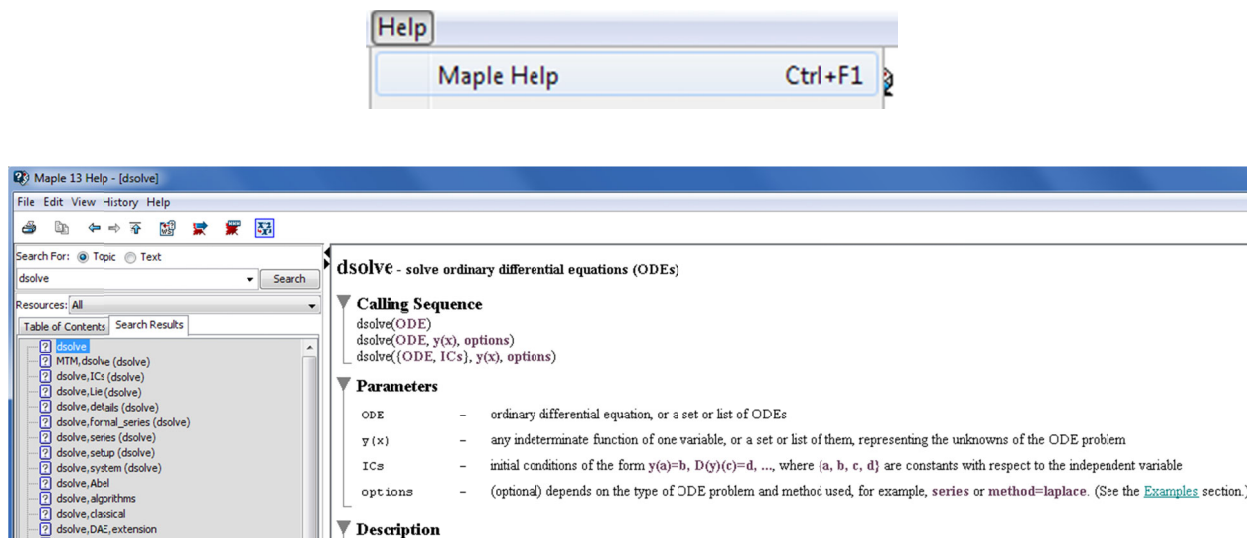
Команда **diff()** дозволяє ввести диференціальне рівняння.

```
> # розв'язуємо диф. рівняння при різних початкових умовах
> a1 := dsolve({d1, P(0) = 20}, P(t))
> a2 := dsolve({d1, P(0) = 300}, P(t))
```

$$a1 = P(t) = \frac{300}{2 + 13 e^{-\frac{3}{50}t}}$$
$$a2 = P(t) = -\frac{300}{-2 + e^{-\frac{3}{50}t}}$$

Для розв'язання диференціального рівняння при заданому початковому значенні використовується команда **dsolve()**. Особливість застосування запису ви

можете побачити на попередньому рисунку. Більш докладно про дану функцію можна почитати в Maple Help (вкладка Help):



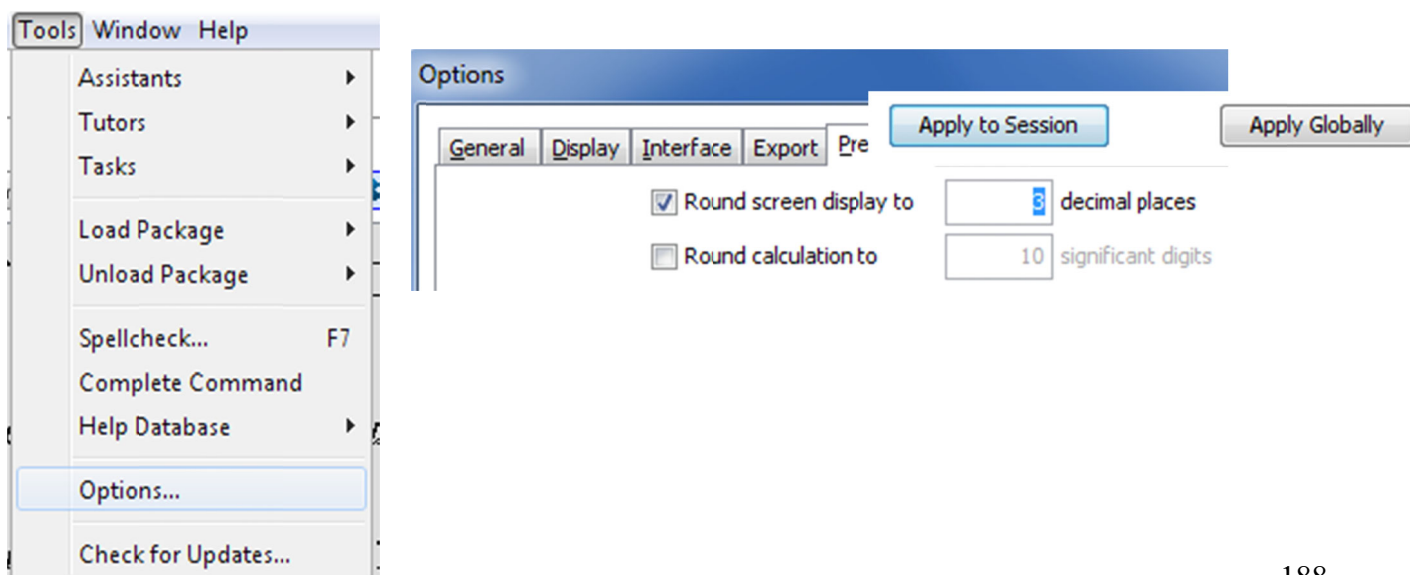
Кожному розв'язку диференціального рівняння ми присвоюємо ім'я, щоб потім можна було використовувати цей розв'язок при побудові графіку динаміки популяції.

Знаходимо стаціонарні точки диференціального рівняння, використовуючи функцію *solve* ():

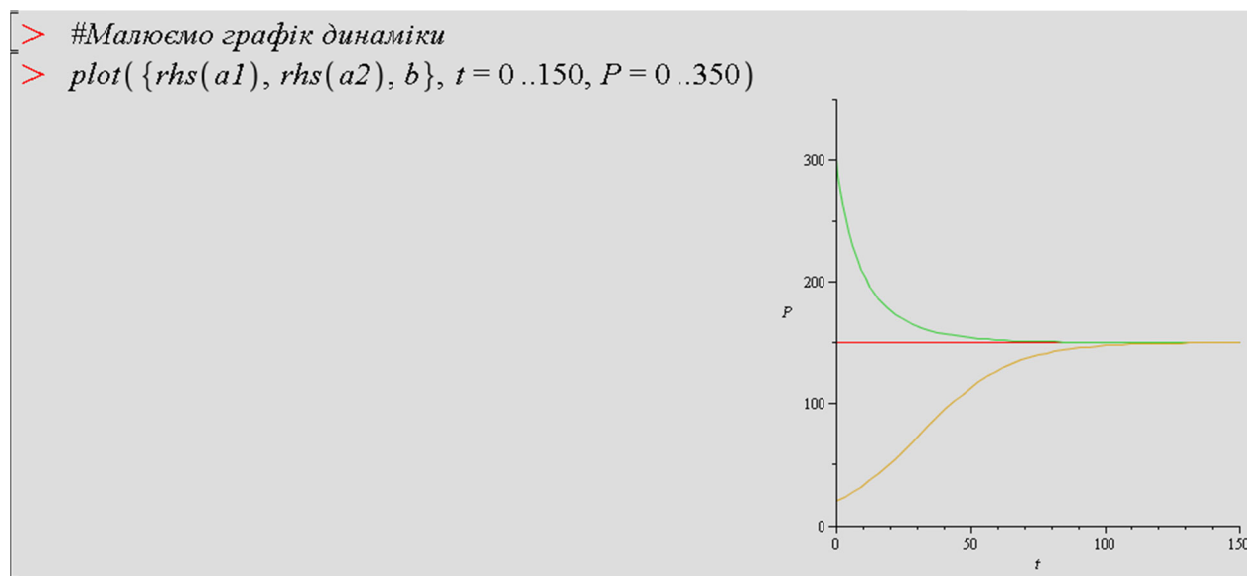
```
> # Знаходимо стаціонарні точки рівняння
> a, b := solve(rhs(d1) = 0, P(t))
```

$a, b := 0.0000, 150.0000$

По замовчанню, дійсні числа відображаються з 10-знаками після коми. За потреби цю кількість можна скоротити (застосувати до сесії або глобально):



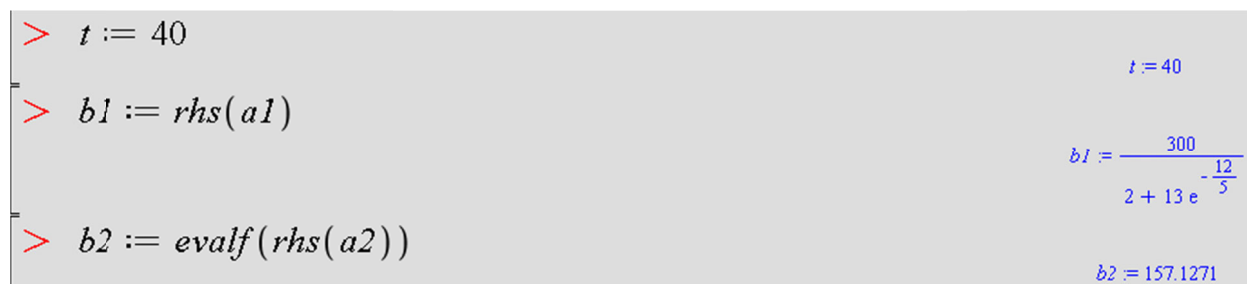
Команда *rhs* () дає змогу використовувати праву частину виразу.



Для побудови графіку динаміки використовуємо графічну функцію *plot()* з відповідним наповненням.

Стационарна точка 150 є стійкою, так як до неї прямують траєкторії поведінки популяції.

Тепер розрахуємо чисельність популяції в момент часу  $t = 40$ .



Для операцій розрахунку бажано використовувати команду *evalf* (), так як вона повертає вираз у вигляді дійсного числа. Інакше складеться ситуація як у випадку виразу  $b1$ . Чисельність популяції ми ніби то порахували, але яке числове значення при цьому вийшло, нам не зрозуміло.

## Приклад 2.

Припустимо, що кількість гризунів  $P(t)$  ( $t$  виражається в місяцях) в заповіднику задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dP}{dt} = 0.0005 \cdot P(t) \cdot (P(t) - 140).$$

Нехай спочатку в заповіднику нараховується 200 гризунів. Розв'язати це диференціальне рівняння та визначити, що станеться з популяцією в майбутньому. Що станеться з популяцією гризунів, якщо початкова чисельність тварин становитиме 100 особин? Визначити чисельність популяції в обох випадках в момент часу  $t = 15$ . Побудувати графіки чисельності популяцій для двох випадків.

### Розв'язання.

Алгоритм розв'язання даного прикладу такий самий, але враховуючи іншу поведінку ізольованої популяції, графік динаміки буде інший.

```

> # Приклад 2
> restart;
> # вводимо диф. рівняння
> d1 := diff(P(t), t) = 0.0005 * P(t) * ( P(t) - 140)
> #розв'язуємо р-ня при різних початкових умовах
> a1 := dsolve( {d1, P(0) = 200}, P(t) )
> a2 := dsolve( {d1, P(0) = 100}, P(t) )
> #знаходження стаціонарних точок (похідна рівна нулю)
> a, b := solve(rhs(d1) = 0, P(t) )

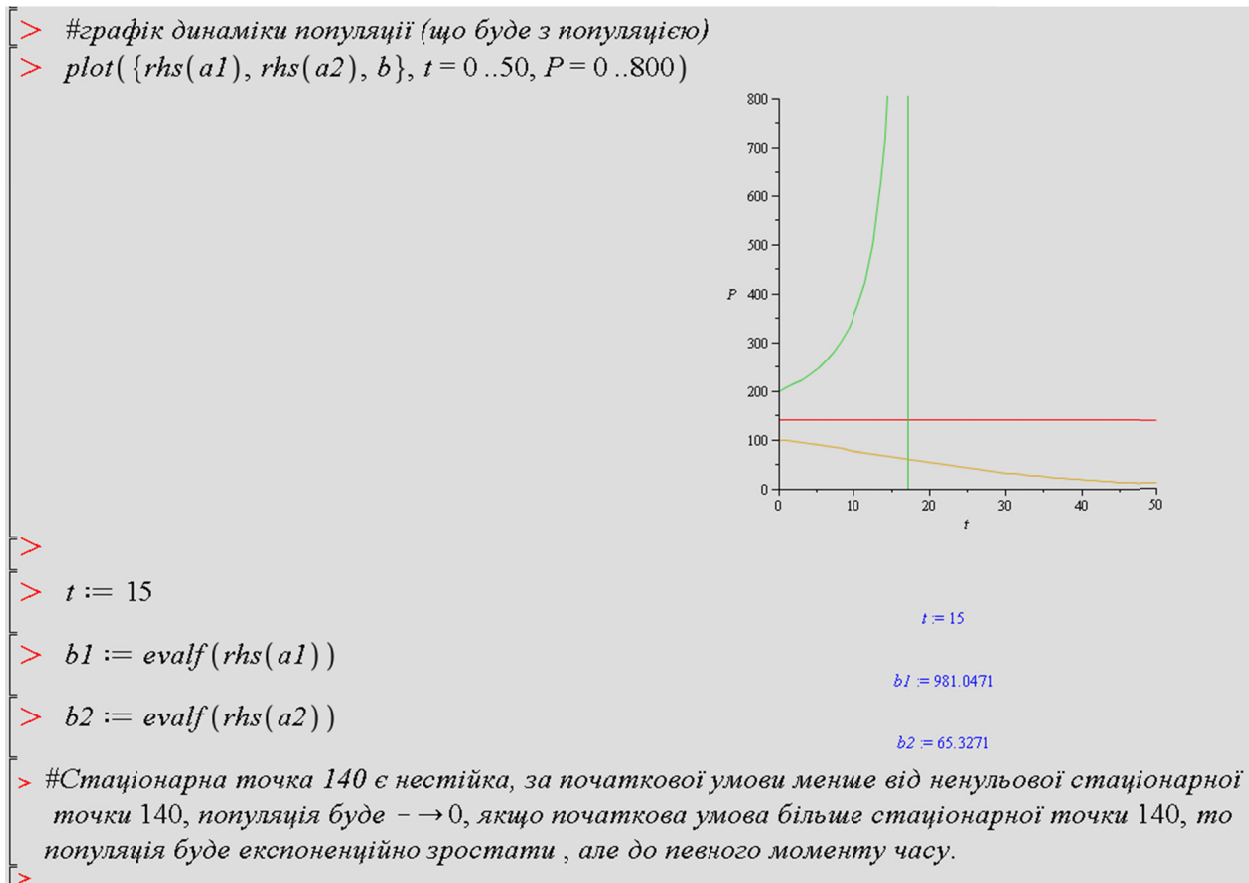
```

$$d1 = \frac{d}{dt} P(t) = 0.0005 P(t) (P(t) - 140)$$

$$a1 = P(t) = -\frac{1400}{-10 + 3e^{\frac{7}{100}t}}$$

$$a2 = P(t) = \frac{700}{5 + 2e^{\frac{7}{100}t}}$$

$$a, b = 0.0000, 140.0000$$



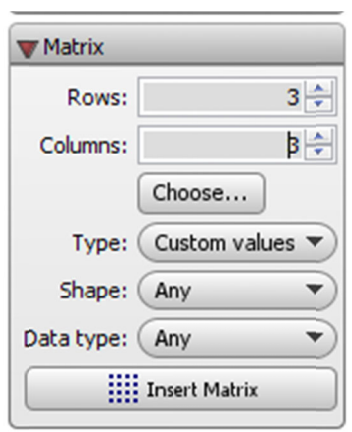
### Приклад 3.

Вихідна популяція складається з трьох вікових груп – молодшої, середньої та старшої. Коефіцієнти народжуваності в середній та старшій вікових групах відповідно дорівнюють 9 та 12 (самки молодшої вікової групи не народжують). Коефіцієнти переходу із молодшої вікової групи в середню дорівнюють  $\frac{1}{3}$ , із середньої вікової групи в старшу  $\frac{1}{2}$ . Коефіцієнт виживання в старшій віковій групі дорівнює нулю. У початковий момент часу ( $t = 0$ ) популяція складається з однієї самки старшого віку. Знайти вектор  $x(t = 15)$ . Знайти стійку вікову структуру популяції та швидкість зростання.

### Розв'язання.

Створюємо робочий документ. Підключаємо бібліотеку *LinearAlgebra* за допомогою команди *with*: *with(LinearAlgebra)* для роботи з матрицями та векторами.

Вводимо матрицю Леслі за допомогою панелі **Matrix**, що знаходиться зліва від робочої області



Присвоюємо ім'я  $L$  нашій матриці, щоб потім можна було використовувати у розрахунках. Шаблон матриці виглядатиме таким чином:

$$\begin{aligned} > L := \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} \\ > L \end{aligned}$$

За допомогою клавіші **Tab** переключаємось між елементами матриці і вводимо відповідні значення.

$$\begin{aligned} > L := \begin{bmatrix} 0 & 9 & 12 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

За допомогою тієї ж панелі **Matrix** вводимо початковий вектор-стовпчик  $x(0)$ :

```

>
> t := 15
t = 15
> # початкова чисельність популяції x0 (одна самка старшого віку, отже 1, молодшого і середнього - нулі)
> x0 := [ 0
         0
         1 ]
x0 = [ 0
       0
       1 ]

```

Далі знаходимо вектор популяції у момент часу  $t = 15$ . Це можна зробити в декілька способів: за допомогою функції *MatrixPower()* підносимо матрицю Леслі у 15 степінь, а потім можемо або напряму помножити отриману матрицю на вектор-стовпчик  $x_0$  за допомогою крапки, або використати функцію множення матриці на вектор *MatrixVectorMultiply()*:

```

> # розраховуємо за формулою  $x(t=15) = L^{15} \cdot x_0$ 
> x15 := MatrixPower(L, t) . x0
x15 = [ 87444
       14544
       3650 ]
> x151 := MatrixVectorMultiply(MatrixPower(L, t), x0)
x151 = [ 87444
        14544
        3650 ]

```

Для знаходження власних чисел та власних векторів використаємо функцію *Eigenvectors()*:

```

> # наступна функція Eigenvectors знаходить власні числа та власні вектори
> λ, x := evalf(Eigenvectors(L))
λ, x = [ 2.0000 ] [ 24.0000 6.0000 0.0000 ]
        [-1.0000 ] [ 4.0000 -2.0000 0.0000 ]
        [-1.0000 ] [ 1.0000 1.0000 0.0000 ]
> # знаходимо найбільше додатне серед власних чисел - швидкість росту популяції
> λL := max(λ)
λL = 2.0000
> # вектор стійкої вікової структури популяції (вектор, що відповідає власному числу 2)
> xL := Column(x, 1)
xL = [ 24.0000
      4.0000
      1.0000 ]
>

```

Вектор стійкої вікової структури – це розподіл усіх особин популяції по віковим групам у відповідних пропорціях.

## Лабораторна робота 5.

### Модель ізольованої популяції

#### з двома критичними рівнями чисельності

#### Приклад.

Ріст популяції описується таким рівнянням:

$$\frac{dN}{dt} = \beta \frac{N^2}{1 + N} - \delta N - pN^2.$$

Визначити величини верхньої та нижньої межі чисельності, якщо відомо, що коефіцієнт народжуваності дорівнює 1, смертності – 0.1, а внутрішньовидової конкуренції – 0.4. Побудувати графіки та зробити висновки щодо динаміки чисельності популяцій для початкових значень, які:

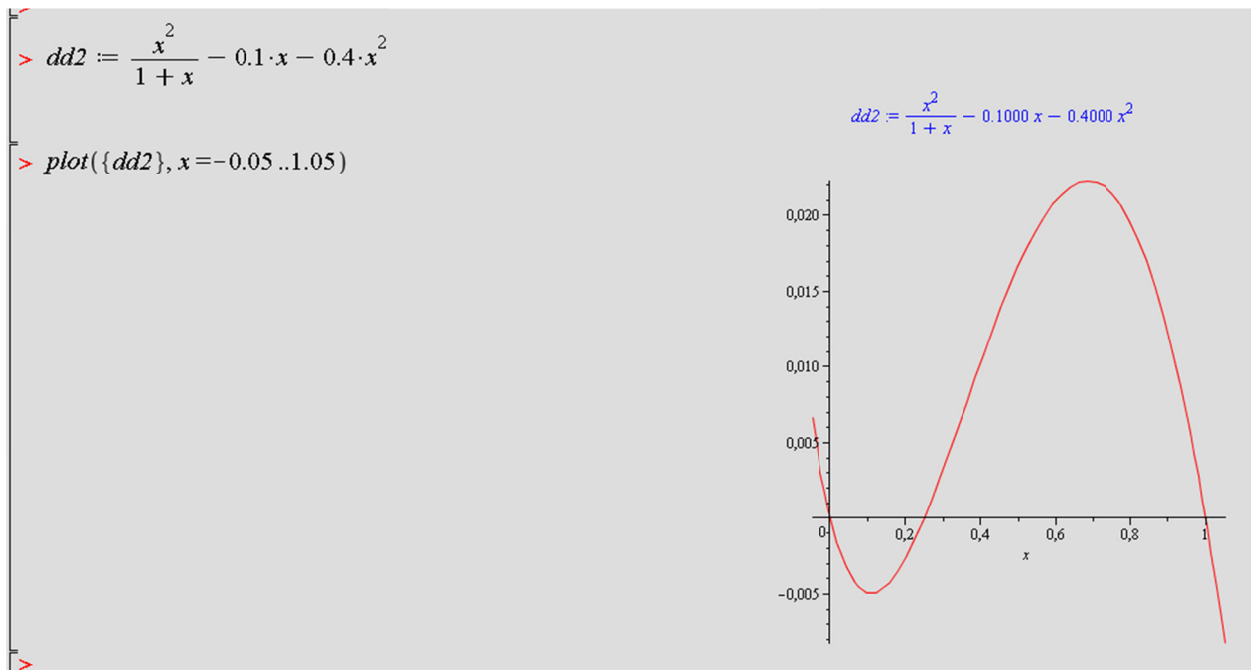
- 1) менші за половину нижньої критичної межі;
- 2) більші за половину нижньої критичної межі;
- 3) відповідають нижній критичній межі;
- 4) лежать в межах між нижньою та верхньою межею (менше та більше від половини різниці);
- 5) відповідають верхній критичній межі;
- 6) перевищують верхню межу.

#### Розв'язання:

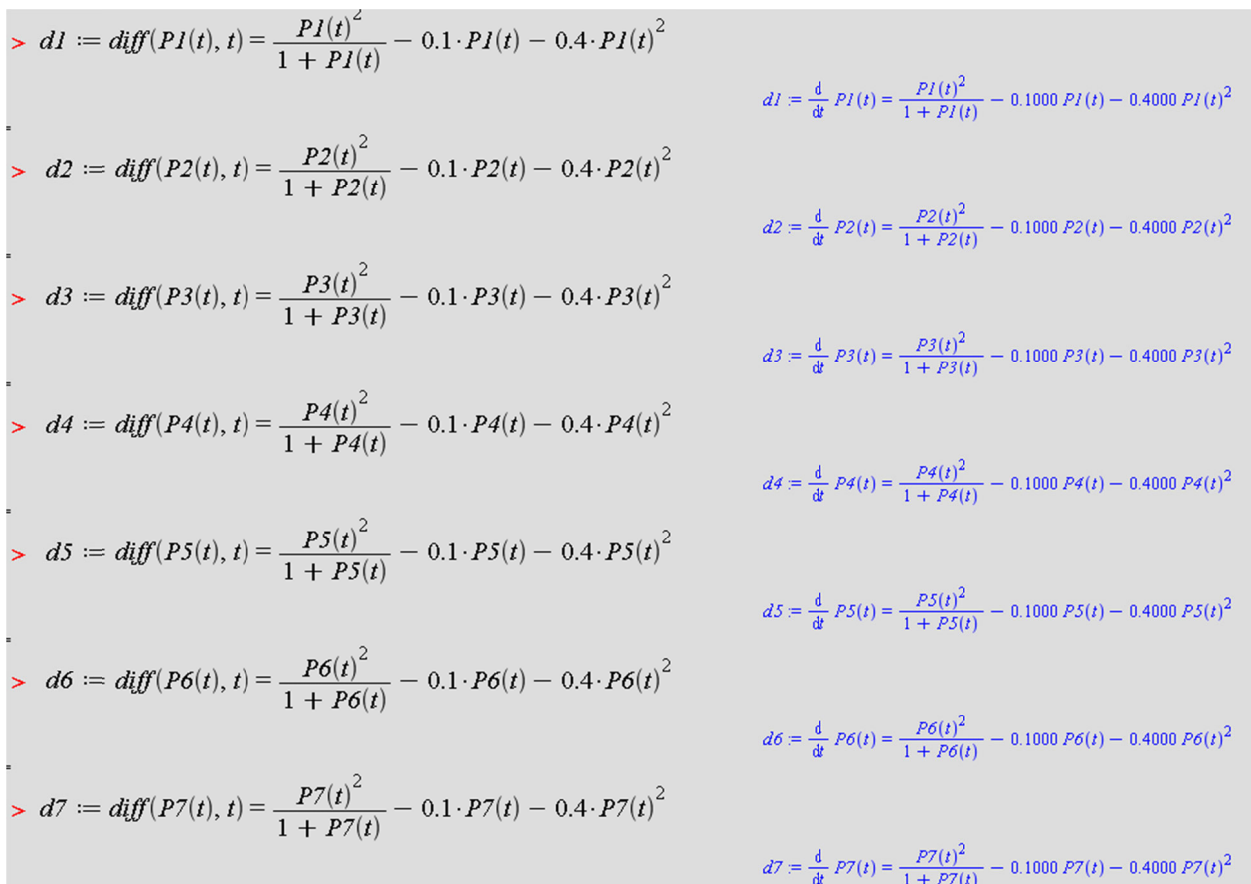
Знайдемо стаціонарні точки для диференціального рівняння:

```
> restart;
> dd1 := diff(P(t), t) =  $\frac{P(t)^2}{1 + P(t)} - 0.1 \cdot P(t) - 0.4 \cdot P(t)^2$ 
 $dd1 = \frac{d}{dt} P(t) = \frac{P(t)^2}{1 + P(t)} - 0.1000 P(t) - 0.4000 P(t)^2$ 
> a, b, c := solve(rhs(dd1) = 0, P(t))
a, b, c = 0.0000, 1.0000, 0.2500
```

Для побудови графіку зміни функції правої частини (функції  $dd2$ ) маємо таку ситуацію:

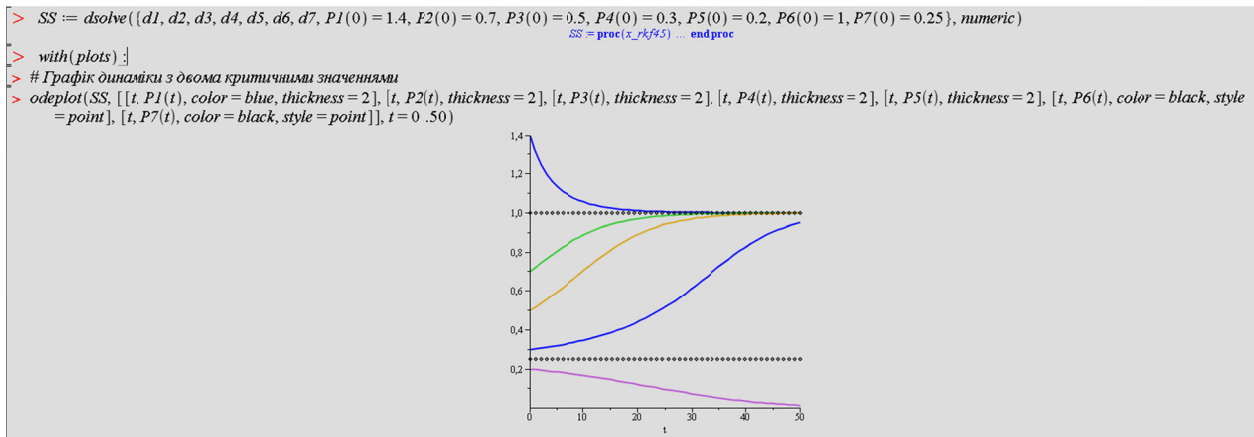


Для побудови графіку динаміки популяції з двома критичними рівнями за різних початкових умов відтворимо необхідну кількість диференціальних рівнянь:



Оскільки отримати розв'язок в аналітичному вигляді для даного диференціального рівняння досить складно, використаємо для розв'язання

чисельні методи (*numeric*), конкретно – метод Рунге-Кутти 4-го порядку (*x\_rkf45*):



## Лабораторна робота 6. Взаємодія двох популяцій

### Приклад.

1. Нехай  $x(t)$  – чисельність жертв,  $y(t)$  – чисельність хижаків. Коефіцієнт розмноження жертв за відсутності хижаків дорівнює 5, а коефіцієнт природної загибелі хижаків 3. При взаємодії двох популяцій, жертви зменшуються з інтенсивністю 2, при цьому хижаки нарощують свою біомасу з інтенсивністю 4. Дослідити:

- 1) Стаціонарні точки. Дати повний фазовий портрет та фазовий портрет нетривіальної стаціонарної точки.
- 2) Побудувати графік динаміки двох популяцій ( а)  $x_0 < y_0$ ; б)  $x_0 > y_0$ ).
- 3) Побудувати 3D графік.

2. Провести аналогічне дослідження (пункти 1) – 3)), якщо коефіцієнт внутрішньовидової взаємодії серед жертв дорівнює 1.

### Розв'язання:

Знову скористаємося середовищем MAPLE.

```
> restart;
> #Вводимо диф-ні рівняння
> d1 := diff(x(t), t) = x(t) · (e1 - g1 · y(t))
> d2 := diff(y(t), t) = y(t) · (-e2 + g2 · x(t))
```

$$d1 = \frac{d}{dt} x(t) = x(t) (e1 - g1 y(t))$$
$$d2 = \frac{d}{dt} y(t) = y(t) (-e2 + g2 x(t))$$

Можна ввести диференціальні рівняння, що описують поведінку жертви та хижака відповідно (модель Вольтерри), в загальному вигляді, а потім ввести значення змінних; або ж можна зразу ввести диференціальні рівняння із використанням заданих значень змінних:

```
> e1 := 5
> g1 := 2
>
> e2 := 3
> g2 := 4
```

$$e1 = 5$$
$$g1 = 2$$
$$e2 = 3$$
$$g2 = 4$$

## Знаходимо стаціонарні точки заданої системи диференціальних рівнянь

```
> # Знаходимо стаціонарні точки
> solve( {rhs(d1) = 0, rhs(d2) = 0}, {x(t), y(t)} )
```

$\{x(t) = 0, y(t) = 0\}, \left\{x(t) = \frac{3}{4}, y(t) = \frac{5}{2}\right\}$

Далі розв'язуємо систему диференціальних рівнянь за різних початкових умов, щоб побудувати графіки динаміки двох популяцій (пункт 2: а)  $x_0 < y_0$  та б)  $x_0 > y_0$ ). Оскільки досить часто не вдається отримати розв'язок системи диференціальних рівнянь а аналітичному вигляді, то використовують чисельні методи (наприклад, метод Рунге-Кутти):

```
> # Розв'язуємо систему диф-них р-нь чисельними методами при різних початкових умовах
> dsys1 := dsolve( {d1, d2, x(0) = 1, y(0) = 5}, numeric, method = rkf45)
> dsys2 := dsolve( {d1, d2, x(0) = 5, y(0) = 2}, numeric, method = rkf45)
```

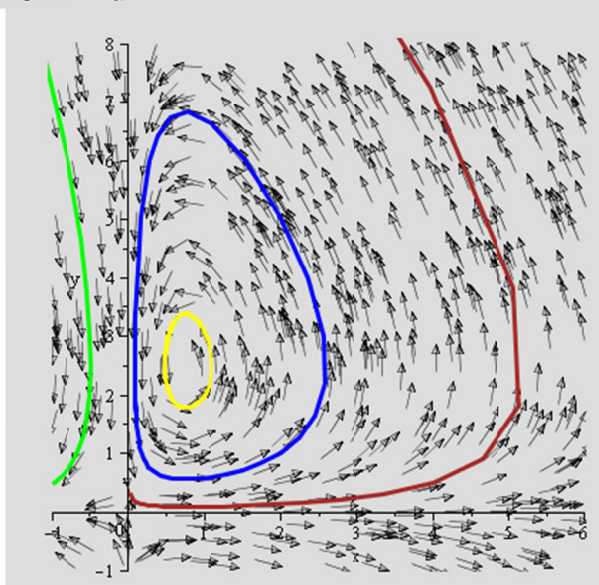
$dsys1 = \text{proc}(x\_rkf45) \dots \text{end proc}$   
 $dsys2 = \text{proc}(x\_rkf45) \dots \text{end proc}$

Для побудови фазового портрету та графіків динаміки підключаємо додатково бібліотеку **DEtools**:

```
> with( DEtools ) :
```

Отже, маємо:

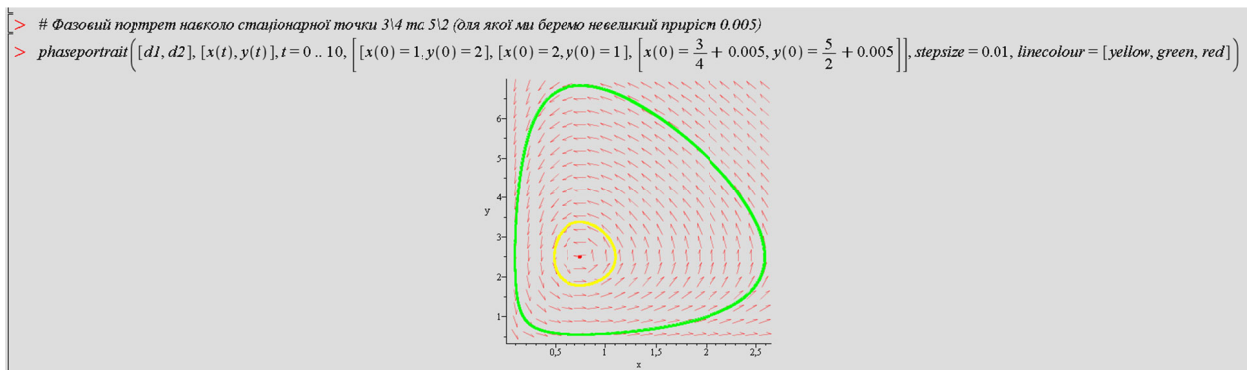
```
> # Повний фазовий портрет
> DEplot( [d1, d2], [x(t), y(t)], t = -1 .. 1, x = -1 .. 6, y = -1 .. 8, [[x(0) = 2, y(0) = 1], [x(0) = 1, y(0) = 2], [x(0) = -0.5, y(0) = 2], [x(0) = 4, y(0) = 0.5]], arrows = medium, dirfield = 700, color = black, linecolor = [blue, yellow, green, brown])
```



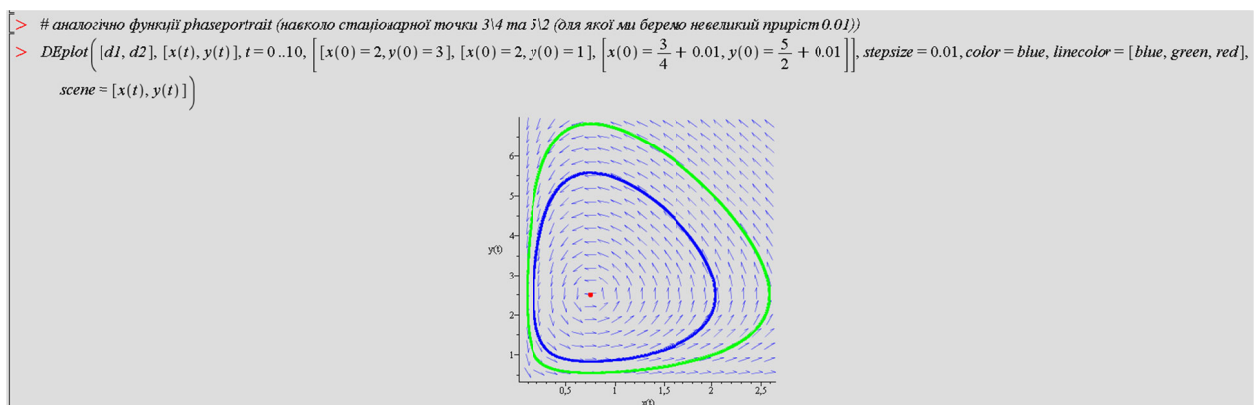
$arrows = medium$  – це вигляд траєкторій розв’язку системи,  $dirfield = 700$  – це щільність цих траєкторій на графіку. Повний опис команди **DEplot()** можна прочитати в **Maple Help**.

Стаціонарна точка  $(0, 0)$  – типу сідло, особлива точка  $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right)$  – типу центр; траєкторіями є замкнені криві, які у малому околі нетривіальної стаціонарної точки  $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right)$  близькі до еліпсів.

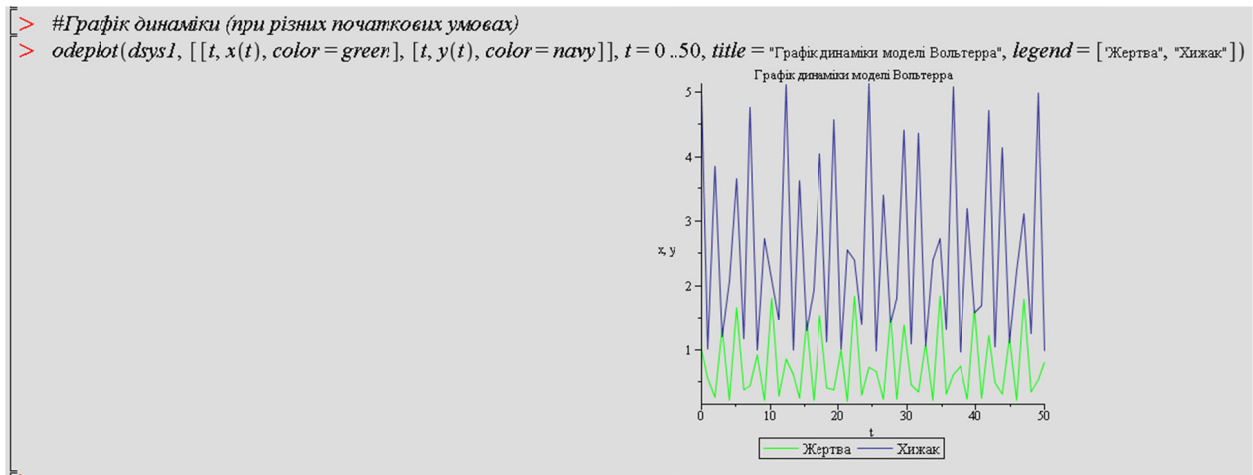
Окремо розглянемо фазовий портрет в околі особливої точки  $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right)$ , використовуючи команду **DEplot()** або аналогічну їй **phaseportrait()**:



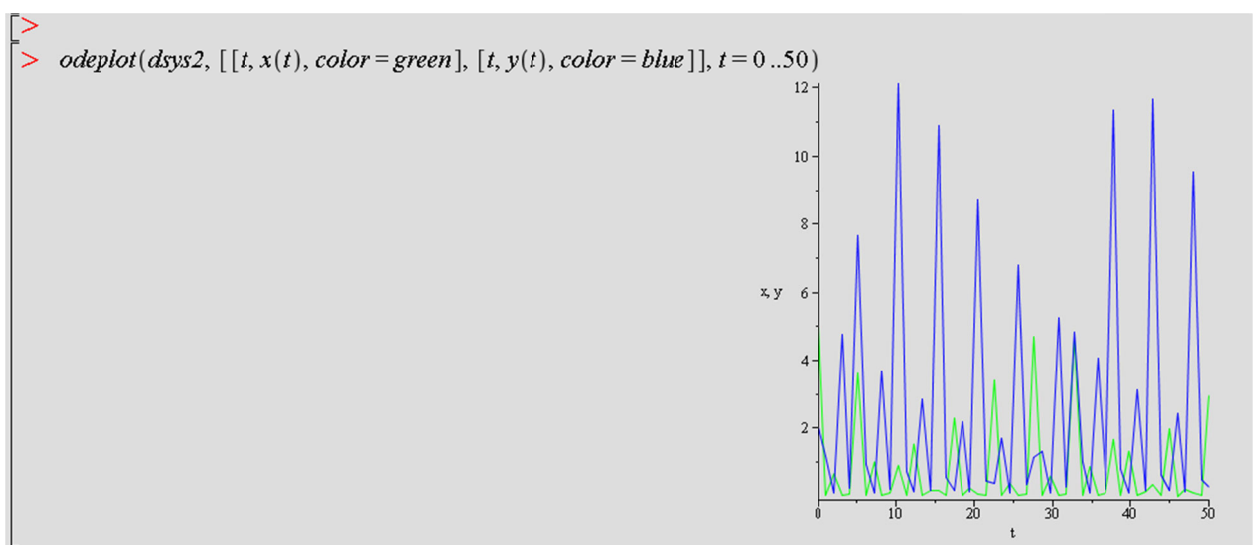
або



Далі будемо графік динаміки двох популяцій на одному графіку (два рисунки):

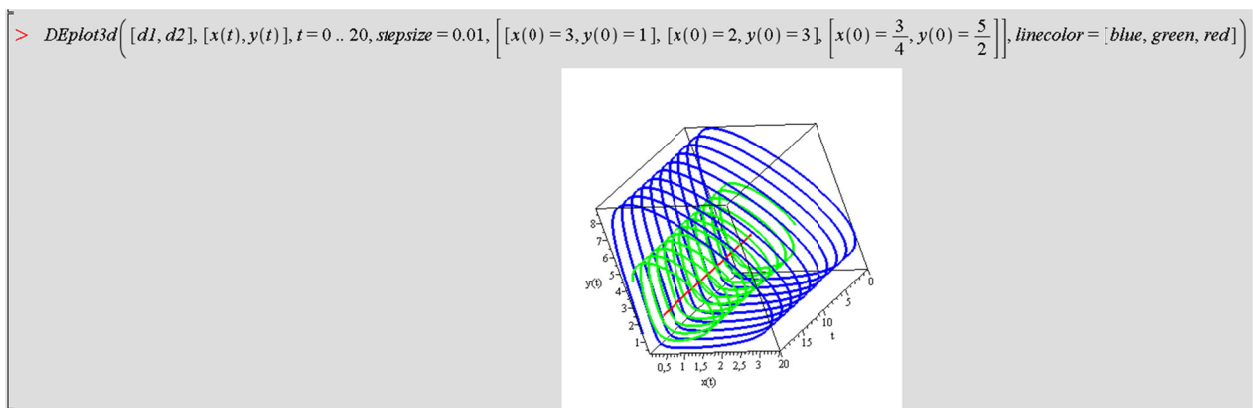


та



Графіки динаміки, із зростаючими та спадаючими коливаннями підтверджують замкнутий характер фазових траєкторій.

Насамкінець 3D графік, який об'єднує в собі як фазовий портрет нетривіальної точки, так і графіки динаміки для кожної популяції окремо. Цей графік можна обертати за допомогою мишки, щоб побачити відповідні типи графіків:



Аналогічні дослідження проводимо для пункту 2 прикладу – йдеться про модель Лоткі-Вольтерри.

В цій задачі вже три стаціонарні точки: два сідла та стійкий фокус.

```

> restart;
> #Вводимо диф-ні рівняння
> d1 := diff(x(t), t) = x(t) * (e1 - g1 * y(t) - b1 * x(t))
> d2 := diff(y(t), t) = y(t) * (-e2 + g2 * x(t))

# Значення змінних
> e1 := 5
> g1 := 2
> b1 := 1
> e2 := 3
> g2 := 4

# Знаходимо стаціонарні точки
> solve({rhs(d1) = 0, rhs(d2) = 0}, {x(t), y(t)})

#Розв'язуємо систему диф-них р-нь чисельними методами при різних початкових умовах
> dsys1 := dsolve({d1, d2, x(0) = 2, y(0) = 5}, numeric, method = rkf45)
> dsys2 := dsolve({d1, d2, x(0) = 3, y(0) = 1}, numeric, method = rkf45)

```

$$d1 = \frac{d}{dt} x(t) = x(t) (e1 - g1 y(t) - b1 x(t))$$

$$d2 = \frac{d}{dt} y(t) = y(t) (-e2 + g2 x(t))$$

$$\{x(t) = 0, y(t) = 0\}, \{x(t) = 5, y(t) = 0\}, \left\{x(t) = \frac{3}{4}, y(t) = \frac{17}{8}\right\}$$

```

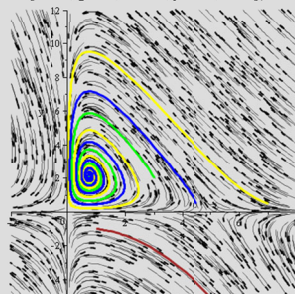
dsys1 = proc(x_rkf45) ... endproc
dsys2 = proc(x_rkf45) ... endproc

```

```

> with(DEtools):
> with(plots):
> #[[x(0)=1, y(0)=1], [x(0)=3, y(0)=2], [x(0)=1, y(0)=-1], [x(0)=7, y(0)=0.5], [x(0)=4.5, y(0)=0.5]], linecolor=[black, green, brown, yellow, blue]
> #Повний фазовий портрет
> DEplot([d1, d2], [x(t), y(t)], t=0..10, x=-2..8, y=-5..12, arrows=curve, color=black, dirfield=1000, stepsize=0.01, [[x(0)=1, y(0)=1], [x(0)=3, y(0)=2], [x(0)=1, y(0)=-1], [x(0)=7, y(0)=0.5], [x(0)=4.5, y(0)=0.5]], linecolor=[black, green, brown, yellow, blue])

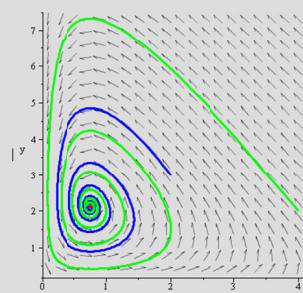
```



```

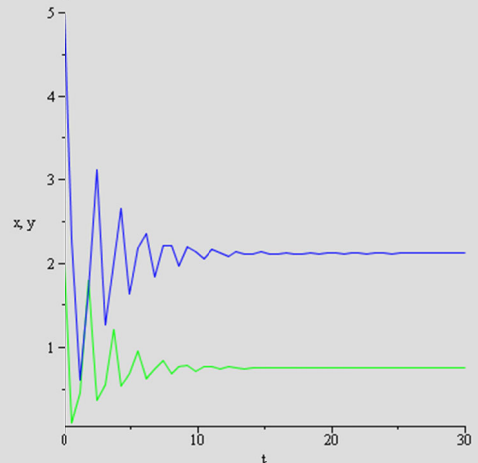
> #Фазовий портрет стаціонарної точки 3/4 та 17/8
> phaseportrait([d1, d2], [x(t), y(t)], t=0..10, [[x(0)=2, y(0)=3], [x(0)=4, y(0)=2], [x(0)=3/4 + 0.01, y(0)=17/8 + 0.01]], stepsize=0.01, linecolour=[blue, green, red], color=black)

```

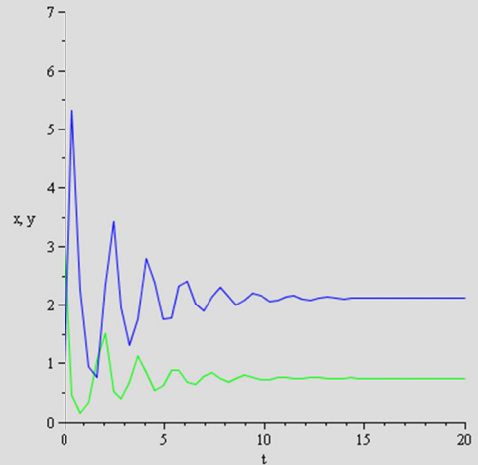


## Графіки динаміки чисельностей популяцій:

```
> #Графік динаміки (при різних початкових умовах)  
> odeplot(dsyst, [[t, x(t), color = green], [t, y(t), color = blue]], t = 0 .. 30)
```

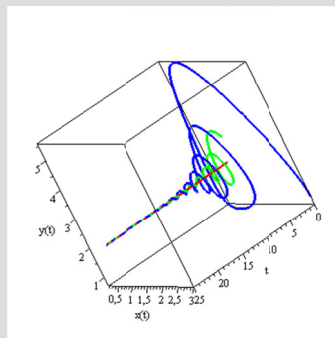


```
> odeplot(dsyst2, [[t, x(t), color = green], [t, y(t), color = blue]], t = 0 .. 20, view = [0 .. 20, 0 .. 7])
```



## 3D графік:

```
> DEplot3d({d1, d2}, {x(t), y(t)}, t = 0 .. 25, stepsize = 0.01, [[x(0) = 3, y(0) = 1], [x(0) = 1, y(0) = 3], [x(0) = 3/4, y(0) = 17/8]], linecolor = [blue, green, red])
```



## Лабораторна робота 7.

### Вплив керування у задачах динаміки популяцій

#### Приклад. Модель про вилов риби у ставку.

Розглянемо ізольовану популяцію та вивчимо зміну її чисельності. Для дослідження зміни чисельності використаємо логістичне рівняння у безрозмірних величинах:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x), \quad x(0) = x_0. \quad (1)$$

Стаціонарні точки цього рівняння  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 1$ . Розв'язок рівняння (1) матиме вигляд:

$$x(t) = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x_0}\right) e^{-t}}. \quad (2)$$

З розв'язку (2) видно, що при  $t \rightarrow +\infty$   $x(t) \rightarrow 1 = q_2$ . Таким чином, маємо стійкий стан рівноваги при довільному початковому значенні  $x_0 > 0$ .

Введемо деяку квоту  $p > 0$  на вилов популяції риби. Тоді вихідна модель матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x) - p, \quad x(0) = x_0. \quad (3)$$

Знайдемо стаціонарні точки рівняння (3):

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - p}. \quad (4)$$

Вигляд розв'язку (4) буде залежати від знаку дискримінанту:

4)  $D = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}$ , тоді  $x_{1,2} = \frac{1}{2}$ .

5)  $D > 0 \Leftrightarrow p < \frac{1}{4}$  (наприклад,  $p = \frac{1}{4} - \varepsilon^2$ ,  $\varepsilon > 0$ ), тоді  $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \varepsilon$ .

6)  $D < 0 \Leftrightarrow p > \frac{1}{4}$  (наприклад,  $p = \frac{1}{4} + \varepsilon^2$ ,  $\varepsilon > 0$ ), дійсних коренів немає.

Розглянемо всі наші випадки:

```

> restart;
> # Випадок 1
> dl := diff(x(t), t) = r·x(t)·(1 - x(t)/q) - p

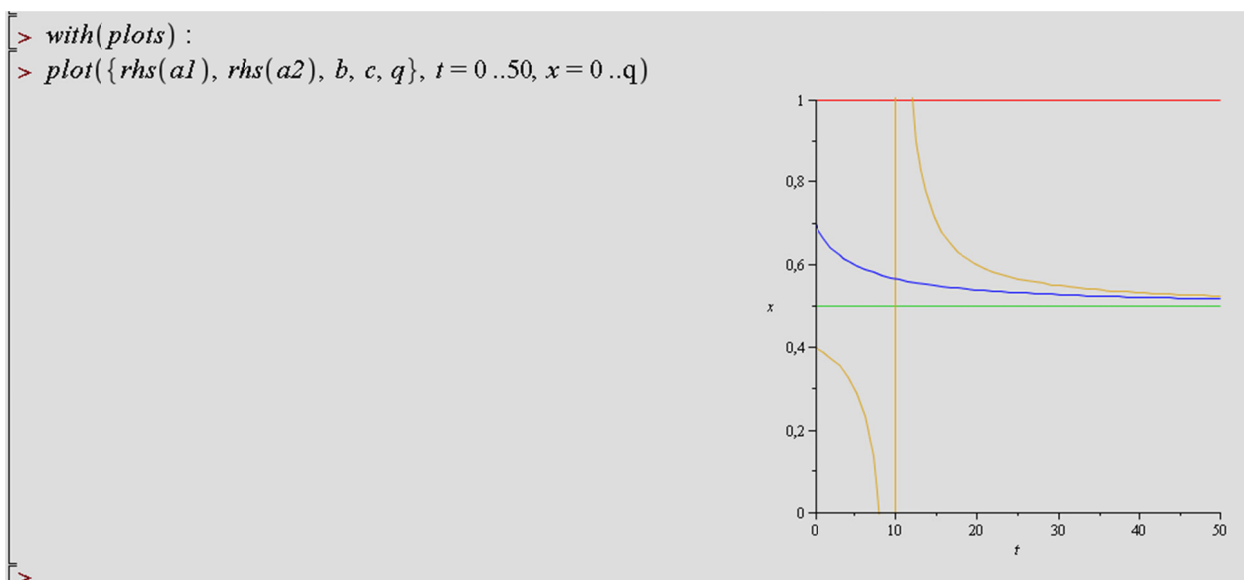
                                dl = d/dt x(t) = r x(t) (1 - x(t)/q) - p

> r := 1
                                r = 1
> q := 1
                                q = 1
> p := r·q/4
                                p = 1/4

> # Виллов риби коли квота p=1/4
> b, c := solve(rhs(dl) = 0, x(t))
                                b, c = 1/2, 1/2

> # Вибираємо початкові умови з двох проміжків: (0; 0.5) та (0.5; 1). Наприклад
> a1 := dsolve({dl, x(0) = 0.7}, x(t))
                                a1 = x(t) = 1/2 * (t+7)/(5+t)
> a2 := dsolve({dl, x(0) = 0.4}, x(t))
                                a2 = x(t) = 1/2 * (t-8)/(-10+t)

```



> # **Випадок 2**

> restart,

>  $d1 := \text{diff}(x(t), t) = r \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{q}\right) - p$

$$d1 := \frac{d}{dt} x(t) = r x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{q}\right) - p$$

>  $r := 1$

$$r = 1$$

>  $q := 1$

$$q = 1$$

>  $p := \frac{r \cdot q}{4} - a \cdot a$

$$p = \frac{1}{4} - a^2$$

> # **Виллов риби, коли квота  $p < 1/4$**

> # Після віднімання від  $p$  параметру  $a$  ( $a > 0$ ), параметр керування має бути додатнім

>  $a := 0.1$

$$a = 0.100$$

>  $b, c := \text{solve}(\text{rhs}(d1) = 0, x(t))$

$$b, c = 0.400, 0.600$$

> # Вибірємо початкові умови з трьох проміжків:  $(0; 0.4)$ ,  $(0.4; 0.6)$  та  $(0.6; 1)$ . Наприклад

>  $a1 := \text{dsolve}(\{d1, x(0) = 0.2\}, x(t))$

$$a1 = x(t) = \frac{1}{5} \frac{3e^{\frac{1}{5}t} - 4}{e^{\frac{1}{5}t} - 2}$$

>  $a2 := \text{dsolve}(\{d1, x(0) = 0.5\}, x(t))$

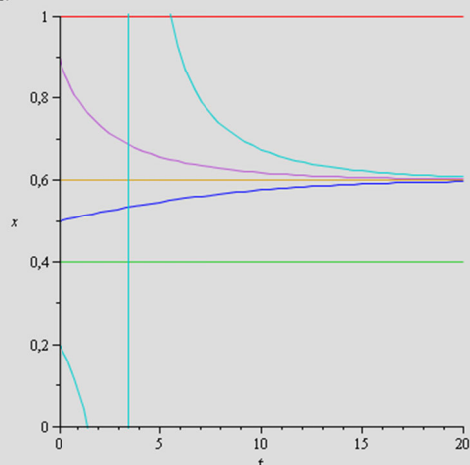
$$a2 = x(t) = \frac{1}{5} \frac{-2 + 3e^{\frac{1}{5}t - 1\pi}}{e^{\frac{1}{5}t - 1\pi} - 1}$$

>  $a3 := \text{dsolve}(\{d1, x(0) = 0.9\}, x(t))$

$$a3 = x(t) = \frac{3}{5} \frac{2e^{-\frac{1}{5}t} - 5}{3e^{-\frac{1}{5}t} - 5}$$

> with(plots) :

> plot({rhs(a1), rhs(a2), rhs(a3), b, c, q}, t = 0 .. 20, x = 0 .. q)



>

> # Винадох 3

> restart;

> dl := diff(x(t), t) = r·x(t) · (1 -  $\frac{x(t)}{q}$ ) - p

$$dl = \frac{d}{dt} x(t) = r x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{q}\right) - p$$

> r := 1

$$r = 1$$

> q := 1

$$q = 1$$

> p :=  $\frac{r \cdot q}{4} + a \cdot a$

$$p = \frac{1}{4} + a^2$$

> # Вилос риби, коли квота  $p > 1/4$

> a := 0.2

$$a = 0.200$$

> b, c := solve(rhs(dl) = 0, x(t))

$$b, c = 0.500 - 0.200 I, 0.500 + 0.200 I$$

> a1 := dsolve({dl, x(0) = 0.2}, x(t))

$$a1 = x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \tan\left(\frac{1}{5} t + \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

> a2 := dsolve({dl, x(0) = 0.5}, x(t))

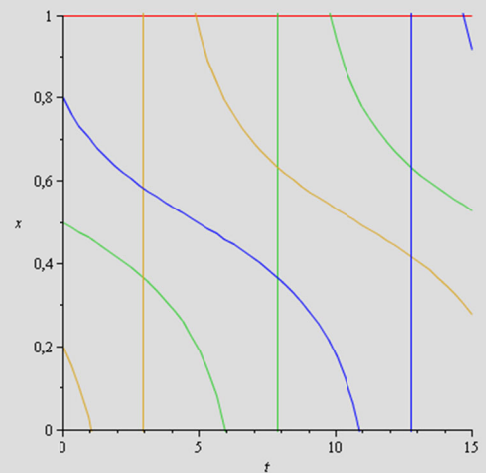
$$a2 = x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \tan\left(\frac{1}{5} t\right)$$

> a3 := dsolve({dl, x(0) = 0.8}, x(t))

$$a3 = x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \tan\left(-\arctan\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{5} t\right)$$

> with(plots):

> plot({rhs(a1), rhs(a2), rhs(a3), q}, t = 0..15, x = 0..q)



## Лабораторна робота 8.

### Динамічна модель Леонт'єва-Форда

#### Приклад.

Розглядається динамічна трьохгалузева модель еколого-економічного балансу (промисловість, сільське господарство, очисні споруди) з наступними параметрами:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,2 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = (0,2 \quad 0,3),$$

$$A_{22} = 0,5, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,7 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_1(0) = \begin{pmatrix} 5000 \\ 2400 \end{pmatrix}, \quad c_1(t) = \begin{pmatrix} 1000 \\ 400 \end{pmatrix} e^{0,05t}, \quad c_2 = 200.$$

Графічно дослідити динаміку векторів  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  для загальної та замкненої системи. Знайти технологічний темп зростання. Також у фазовому просторі вектора  $x_1(t)$  зобразити траєкторію з технологічним темпом зростання, траєкторію замкненої системи та загальну траєкторію системи.

#### Розв'язання

Вводимо відповідні дані у вигляді:

```
> A11 := Matrix([[0.4, 0.2], [0.1, 0.2]])
> A12 := Matrix([[0.3], [0.2]])
> A21 := Matrix([[0.2, 0.3]])
> A22 := Matrix([0.5])
> B1 := Matrix([[0.2, 0.3], [0.7, 0.8]])
> B2 := Matrix([[0.1], [0]])
> x10 := Matrix([[5000], [2400]])
> y10 := Matrix([[1000], [400]])
> tau := 0.05
> y1 := y10 * exp(tau * t)
> y2 := 200
```



$A_{11} := \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$	$A_{11} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$
$A_{12} := \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}$	$A_{12} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}$
$A_{21} := [0.2 \quad 0.3]$	$A_{21} = [0.2 \quad 0.3]$
$A_{22} := [0.5]$	$A_{22} = [0.5]$
$B_1 := \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$	$B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$
$B_2 := \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$x_{10} := \begin{bmatrix} 5000 \\ 2400 \end{bmatrix}$	$x_{10} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 2400 \end{bmatrix}$
$y_{10} := \begin{bmatrix} 1000 \\ 400 \end{bmatrix}$	$y_{10} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 400 \end{bmatrix}$
$\tau := 0.05$	$\tau = 0.05$
$y_1 := y_{10} \cdot \exp(\tau \cdot t)$	$y_1 = \begin{bmatrix} 1000 e^{0.05 t} \\ 400 e^{0.05 t} \end{bmatrix}$
$y_2 := 200$	$y_2 = 200$

Введемо допоміжні матриці та змінні, які використаємо при подальших обчисленнях:

```

> E1 := Matrix(2, shape = identity)
E1 =  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 

> E2 := Matrix(1, shape = identity)
E2 =  $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ 

> with(LinearAlgebra) :
> Inv2 := MatrixInverse(E2 - A22)
Inv2 =  $\begin{bmatrix} 2.0000 \end{bmatrix}$ 

> y := y1 - Multiply(A12, Inv2) . y2
y =  $\begin{bmatrix} 1000 e^{0.0500 t} - 120.0000 \\ 400 e^{0.0500 t} - 80.0000 \end{bmatrix}$ 

> A1 := Add(A11, Multiply(A12, Multiply(Inv2, A21)))
A1 =  $\begin{bmatrix} 0.5200 & 0.3800 \\ 0.1800 & 0.3200 \end{bmatrix}$ 

> A2 := Add(A22, Multiply(A21, Multiply(MatrixInverse(E1 - A11), A12)))
A2 =  $\begin{bmatrix} 0.7196 \end{bmatrix}$ 

> B := B1 + Multiply(B2, Multiply(Inv2, A21))
B =  $\begin{bmatrix} 0.2400 & 0.3600 \\ 0.7000 & 0.8000 \end{bmatrix}$ 

> Bnew := B-1
Bnew =  $\begin{bmatrix} -13.3333 & 6.0000 \\ 11.6667 & -4.0000 \end{bmatrix}$ 

> Bnew[2, 1] + Bnew[2, 2]
7.6667

> EA := E1 - A1
EA =  $\begin{bmatrix} 0.4800 & -0.3800 \\ -0.1800 & 0.6800 \end{bmatrix}$ 

```

Вводимо диференціальні рівняння (не у векторно-матричному вигляді, а як окремі рівняння системи). Розв'язуємо повну систему за вказаних початкових умов чисельними методами. Отримаємо:

```

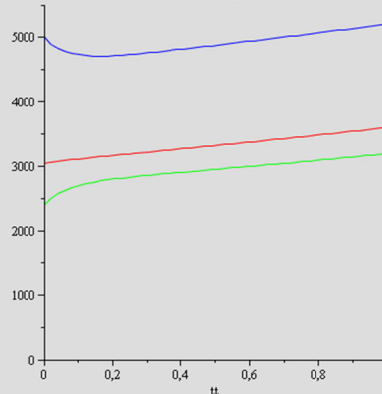
> ode1 := diff(x11(t), t) = Bnew[1, 1] . (EA[1, 1] . x11(t) + EA[1, 2] . x12(t) - (1000 . exp(0.05 . t) - 120)) + Bnew[1, 2] . (EA[2, 1] . x11(t) + EA[2, 2] . x12(t) - (400 . exp(0.05 . t) - 80))
ode1 =  $\frac{d}{dt} x11(t) = -7.4800 x11(t) + 9.1467 x12(t) + 10933.3333 e^{0.0500 t} - 1120.0000$ 

> ode2 := diff(x12(t), t) = Bnew[2, 1] . (EA[1, 1] . x11(t) + EA[1, 2] . x12(t) - (1000 . exp(0.05 . t) - 120)) + Bnew[2, 2] . (EA[2, 1] . x11(t) + EA[2, 2] . x12(t) - (400 . exp(0.05 . t) - 80))
ode2 =  $\frac{d}{dt} x12(t) = 6.3200 x11(t) - 7.1533 x12(t) - 10066.6667 e^{0.0500 t} + 1080.0000$ 

> F := dsolve({ode1, ode2, x11(0) = 5000, x12(0) = 2400}, {x11(t), x12(t)}, numeric)
F := proc(x_rkf45) ... end proc

> with(plot) :
> odeplot(F, [[t, x11(t), color = blue], [t, x12(t), color = green], [t, 0.4 . x11(t) + 0.6 . x12(t) - 400, color = red]], t = 0..1, view = [0..1, 0..5500])

```



Аналогічно виконуються обчислення для замкненої виробничої системи. Далі проводимо обчислення, які дозволяють визначити технологічний темп зростання та відповідний власний вектор:

```

> with(DTools):
> P1 := DEplot([ode1, ode2], [x11(t), x12(t)], t = 0..10, x11 = 0..10000, x12 = 0..10000, [[x11(0) = 5000, x12(0) = 2400]], linecolor = green, arrows = medium)
P1 = PLOT(...)

> charactValues := Re(Eigenvalues(Multiply(EA^-1, B)))
charactValues = [ -0.0670
                  3.4701 ]

> mu := max(charactValues)
mu = 3.4701

> lambda := 1/mu
lambda = 0.2882

> eigenv, L := EigenVectors(Multiply(EA^-1, B))
eigenv, L = [ -0.0670 + 0.0000 I | -0.7757 + 0.0000 I | -0.7622 + 0.0000 I ]
            [ 3.4701 + 0.0000 I | 0.6311 + 0.0000 I | -0.6473 + 0.0000 I ]

> i := ArrayTools[SearchArray](charactValues =~ max(charactValues));
i = [ 2 ]

> FrobVector := L(..., i)
FrobVector = [ -0.7622 + 0.0000 I ]
              [ -0.6473 + 0.0000 I ]

```

Насамкінець, у фазовому просторі компонент вектора  $x_1(t)$  будемо траєкторію з технологічним темпом зростання, траєкторію замкненої системи та загальну траєкторію системи:

```

> ode3 := diff(z11(t), t) = Bnew[1, 1] · (EA[1, 1] · z11(t) + EA[1, 2] · z12(t)) + Bnew[1, 2] · (EA[2, 1] · z11(t) + EA[2, 2] · z12(t))
ode3 = d/dt z11(t) = -7.4800 z11(t) + 9.1467 z12(t)

> ode4 := diff(z12(t), t) = Bnew[2, 1] · (EA[1, 1] · z11(t) + EA[1, 2] · z12(t)) + Bnew[2, 2] · (EA[2, 1] · z11(t) + EA[2, 2] · z12(t))
ode4 = d/dt z12(t) = 6.3200 z11(t) - 7.1533 z12(t)

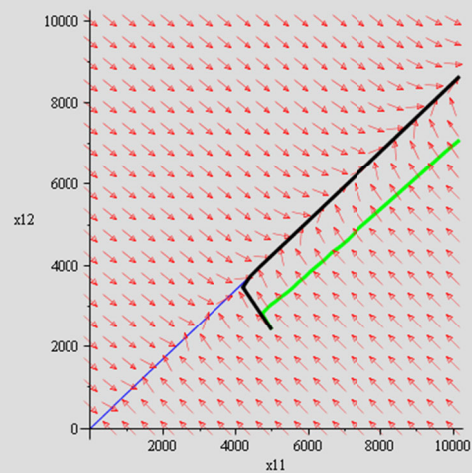
> F2 := dsolve({ode3, ode4, z11(0) = 5000, z12(0) = 2400}, {z11(t), z12(t)}, numeric)
F2 = proc(x_rkf45) ... end proc

> P2 := DEplot([ode3, ode4], [z11(t), z12(t)], t = 0..10, z11 = 0..10000, z12 = 0..10000, [[z11(0) = 5000, z12(0) = 2400]], linecolor = black, arrows = medium)
P2 = PLOT(...)

> P3 := plot(Vector(-10000 · [0, FrobVector(1)]), Vector(-10000 · [0, FrobVector(2)]), color = blue)
P3 = PLOT(...)

> display({P1, P2, P3})

```



Пропонуємо самостійно ідентифікувати траєкторії, зображені на останньому графіку.