ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Є.О. Лебєдєв, І.А. Макушенко, І.Я. Усар

МОДЕЛІ СИСТЕМ З ПОВТОРНИМИ ВИКЛИКАМИ ТА ЗМІННОЮ ІНТЕНСИВНІСТЮ ВХІДНОГО ПОТОКУ

Навчальний посібник

Київ 2022

УДК 519.21
ББК 22.171 я73
Л33

Рецензенти:

М. М. Савчук – член-кор. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук,
І. В. Самойленко – д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рекомендовано вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол №4 від 16 листопада 2022 року)

Лебєдєв Є. О., **Макушенко І. А., Усар І.Я.**

Л33 Моделі систем з повторними викликами та змінною інтенсивністю вхідного потоку: навчальний посібник / Лебєдєв Є.О., Макушенко І.А., Усар І.Я. – Київ: 2022. - 105 с.

У навчальному посібнику розглядаються моделі систем з повторними викликами та змінною інтенсивністю вхідного потоку без обмежень на ємність орбіти. Робота таких систем моделюється процесами міграції, для яких з'ясовано умови існування стаціонарних режимів та досліджено імовірнісні характеристики. Наведено варіанти постановок та розв'язки оптимізаційних задач для систем з повторними викликами при порогових та гістерезисних стратегіях керування вхідним потоком.

Для студентів освітніх програм «Прикладна математика» та «Системний аналіз».

УДК 519.21
ББК 22.171 я73

ЗМІСТ

Вступ

На сьогоднішній день дослідження систем з повторними викликами є одним з найактуальніших напрямків сучасної теорії масового обслуговування, який активно розвивається. Це пояснюється тим, що такі системи мають широке застосування в якості математичних моделей для реальних систем у практиці проектування комп'ютерних мереж, при дослідженні систем обробки інформації та сучасних систем зв'язку, для опису процесу посадки повітряних суден та інш. Характерна особливість ситем з повторними викликами полягає в тому, що у випадку зайнятості всіх обслуговуючих приладів вимоги попадають на віртуальну орбіту і потім знову через випадковий проміжок часу повторюють спробу потрапити на обслуговування.

У навчальному посібнику розглядаються моделі систем з повторними викликами та змінною інтенсивністю вхідного потоку без обмежень на ємність орбіти. Робота таких систем моделюється двовимірним та тривимірним марковськими процесами з неперервним часом, для яких з'ясовано умови існування стаціонарних режимів та досліджено імовірнісні характеристики. Метод дослідження базується на апроксимації вихідних систем системами з обмеженою орбітою. Для імовірнісних характеристик процесів знайдено явні векторно-матричні формули для стаціонарних ймовірностей. Підхід до знаходження стаціонарних ймовірностей полягає в прирівнюванні потоків ймовірностей у стаціонарному режимі через замкнені контури, які обираються спеціальним чином. Значна увага приділяється ілюстрації результатів. Для цього наведено варіанти постановок та розв'язки оптимізаційних задач для систем з повторними викликами при порогових та гістерезисних стратегіях керування вхідним потоком.

Навчальний посібник призначений для студентів освітніх програм «Прикладна математика» та «Системний аналіз».

1. Елементи теорії масового обслуговування

1.1. Класифікація систем масового обслуговування

Системи обслуговування відрізняються одна від одної структурою вхідного потоку вимог, складом і параметрами обслуговуючих приладів, алгоритмом обслуговування. Цим обумовлюється велике розмаїття СМО. Для того щоб перерахувати всі ознаки СМО, які найбільш часто зустрічаються, у стислому вигляді, використаємо кодування Д.Кендалла.

В цій системі кодування код СМО складається з п'яти символів, розділених вертикальними лініями. Перший символ задає вхідний потік, другий визначає час обслуговування, третій – кількість обслуговуючих приладів, четвертий – кількість місць очікування. П'ятий характеризує дисципліну вибору на обслуговування.

Букви M, D, E, GI на місці першого символу означають відповідно показниковий, вироджений, ерлангівський або довільний розподіл інтервалів часу між моментами надходження вимог. При цьому інтервали між моментами надходження незалежні і однаково розподілені.

Ті ж букви M, D, E, GI на місці другого символу аналогічним чином означають розподіл часу обслуговування вимог.

Третій символ – це число приладів, які обслуговують вимоги, четвертий символ – число місць для очікування. П'ятий визначає дисципліну обслуговування вимог і має вигляд f_i^j, $i = 0,1,2;$ $j = 0,2.$ При $i = 0$ СМО, яка розглядається, є безпріоритетна, при $i = 1$ у неї заданий відносний пріоритет, а при $i = 2$ - абсолютний пріоритет. Значення $j = 0$ вказує на те, що при відсутності вільних місць для очікування новоприбула вимога губиться, а $j = 2$ - при тих же умовах вона витісняє з черги вимогу з самим низьким пріоритетом.

При абсолютному пріоритеті в момент приходу вимоги обслуговування переривається, якщо пріоритет вимог на приладі нижче, ніж у новоприбулої. Вимога з більш низьким пріоритетом вертається в чергу, а її місце займає вимога, яка надійшла. При відносному пріоритеті перерва обслуговування не відбувається. У момент завершення обслуговування з черги на прилад надходить вимога з найвищим пріоритетом.

Перший і другий символи можуть мати векторний вигляд, наприклад, $\vec{M}, \vec{E}$, що вказує на наявність декількох потоків різних типів вимог, які мають різні розподіли часу обслуговування.

У кодуванні Д.Кенддала часто застосовуються спрощення. Так, якщо СМО безпріоритетна, то п'ятий символ опускається. У тих випадках, коли четвертий символ дорівнює 0 або ∞, його опускають, а СМО називають відповідно системою з втратами, або системою з чергою.

Приклад. Нехай в символіці Кендалла позначення системи має вид $GI \mid E \mid 2 \mid 3$. Це означає, що вимоги в систему надходять через незалежні однаково розподілені проміжки часу з деякою довільною функцією розподілу. Вимога, що надійшла, займає будь - який вільний прилад, кількість обслуговуючих приладів дорівнює двом. Час обслуговування не залежить від випадкових величин, пов'язаних з іншими вимогами, і має для деякого $r = 2,3,\ldots$ і $\lambda > 0$ щільність розподілу $f(x)$ наступного вигляду:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\lambda x}, x \geq 0, \\ 0, \qquad x < 0. \end{cases}$$

Якщо всі прилади зайняті, вимога стає в чергу, якщо зайняті всі три місця для очікування, вимога втрачається.

Час обслуговування η з щільністю розподілу $f(x)$ можна подати у вигляді

$$\eta = \eta_1 + \ldots + \eta_r,$$

де $\eta_{i,}$ $i = 1, 2, \ldots, r$ - незалежні однаково розподілені за показниковим законом з параметром λ випадкові величини. Таким чином обслуговування вимог розбивається на r етапів. Обслуговування на i-му етапі триває випадковий час η_i, $i = 1, 2, \ldots, r$. У зв'язку з цим іноді при кодуванні типу розподілу часу обслуговування замість E пишуть E_r.

Відмітимо, що як би у розглянутій СМО число місць для очікування було нескінченним (замість 3 стояв би символ ∞), то вона була б системою з чергою і її запис скоротився б до трьох символів.

Перерахуємо тепер деякі важливі особливості СМО, котрі не можуть бути враховані в системі кодування Д.Кендалла:

1) СМО можуть відрізнятися початковою кількістю вимог;

2) вимога може знаходитися в черзі до декількох або до усіх обслуговуючих пристроїв;

3) вимога може ставати в найкоротшу для швидкого обслуговування або в найдовшу чергу;

4) вимоги можуть бути "нетерплячими", їх час очікування або повний час перебування в системі обмежений;

5) вимоги можуть через випадковий час повторювати запит на обслуговування, якщо перед цим їм в обслуговуванні було відмовлено (системи з повторними викликами);

6) на обслуговування вимоги можуть обиратися згідно з пріоритетами, встановленими на весь час роботи СМО (прямий порядок - first come, first served, інверсний порядок - last come first served, випадковий вибір відповідно до заданого закону розподілу);

7) на обслуговування вимоги можуть обиратися згідно з

пріоритетами, які залежать від поточного стану СМО (системи з динамічними пріоритетами);

8) обслуговування вимог може бути згідно з дисципліною «розподілу процесора» (PS processor sharing) - граничній формі розподільного алгоритму кругового опитування, коли всі кванти часу, що виділяються вимогам для обслуговування на приладі, мають один розмір, який прямує до нуля;

9) прилади можуть бути спеціалізованими і обслуговувати вимоги різних типів з різною швидкістю;

10) обслуговуючі прилади можуть виходити з ладу і на їх ремонт необхідно витрачати деякий час. При кодуванні СМО в символіці
Д. Кендалла ці особливості необхідно додатково обумовлювати.

1.2. Найпростіший потік вимог

Множина моментів надходження в систему вимог називається вхідним потоком. Формально під випадковим потоком однорідних вимог розуміємо наступний стохастичний об'єкт.

Нехай (Ω, F, P) - ймовірнісний простір. Випадковим потоком однорідних подій називається випадкова послідовність

$t_n = t_n(\omega), n = 1, 2, ..., t_1 \le t_2 \le ... \le t_n \le ...$

з такими властивостями:

а) для довільного $x > 0$ та будь-якого натурального n визначена ймовірність $\mathrm{P}(t_n(\omega) < x)$, тобто $t_n(\omega)$ випадкова величина;

б) $\mathrm{P}(t_n(\omega) < x) \to 0$ при $n \to \infty$ для довільного $x > 0$.

Властивості а), б) виключають нереальні випадки, коли за скінченний час може з'явитися нескінченно багато подій, чи коли ймовірність появи n-ої події раніше моменту x не визначена.

Аналогічно можна визначити скінченний потік однорідних вимог

$$\{t_n = t_n(\omega), 1 \le n \le N(\omega)\}.$$

Однак у більшості задач масового обслуговування $N(\omega) = \infty$ з ймовірністю 1.

Позначимо через $X(t)$ число вимог, що надходять за проміжок часу $(0,t)$. $X(t)$ – це неспадний випадковий процес, що приймає цілочислові значення 0,1,2….

Стаціонарність випадкового потоку: випадковий потік називається стаціонарним, якщо для будь-якого $n \ge 1$ і проміжків часу $\Delta_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, що не перетинаються, розподіл вектора

$$(X(t+b_1) - X(t+a_1), X(t+b_2) - X(t+a_2), ..., X(t+b_n) - X(t+a_n))$$

не залежить від t.

Ординарність випадкового потоку: випадковий потік називається ординарним, якщо $P_{>1}(h) = o(h)$, $P_{>1}(h)$ - ймовірність появи двох і більше вимог у проміжку довжиною h.

Потік без післядії: якщо $X(t)$ – процес з незалежними приростами, то будемо казати, що потік вимог є потоком без післядії.

Найпростішим потоком називається стаціонарний ординарний потік без післядії.

Позначимо через

$$P_k(t) = \mathrm{P}(X(t) = k) = \mathrm{P}(X(t+t_0) - X(t_0) = k); k = 0, 1, 2, ...$$

Лема 1.1. Нехай потік однорідних вимог є стаціонарним та в ньому відсутня післядія. Тоді $P_0(t) = e^{-\lambda t}$.

Доведення. Позначимо через $\theta = P_0(1)$. Із відсутності післядії та стаціонарності випливає, що $\theta = \left[P_0\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n$ або $P_0\left(\frac{1}{n}\right) = \theta^{1/n}$. Отже $P_0\left(\frac{k}{n}\right) = \theta^{\frac{k}{n}}$.

Нехай t – деяке невід'ємне число. Для будь-якого t можна знайти таке ціле k, що при заданому n виконуються нерівності

$$\frac{k-1}{n} \le t \le \frac{k}{n}.$$

Так як ймовірність $P_0(t)$ – незростаюча функція часу, то

$$P_0\left(\frac{k-1}{n}\right) \ge P_0(t) \ge P_0\left(\frac{k}{n}\right).$$

Таким чином, $P_0(t)$ задовольняє нерівностям

$$\theta^{\frac{k-1}{n}} \ge P_0(t) \ge \theta^{\frac{k}{n}}.$$

Нехай тепер $n \to \infty$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k-1}{n} = t.$$

Значить $P_0(t) = \theta^t = e^{-\lambda t}$ при $\theta = e^{-\lambda}$.

Наслідок 1.1. Якщо потік найпростіший, то

$$P_1(t) = \lambda t + o(t).$$

Дійсно, $P_0(t) + P_1(t) + P_{>1}(t) = 1,$ при цьому $P_0(t) = 1 - \lambda t + o(t),$ так як $P_0(t) = e^{-\lambda t}$.

Знайдемо тепер вид $P_k(t)$ для будь-якого $k = 1, 2, \ldots$

Легко бачити, що

$$P_k(t+h) = P_k(t)P_0(h) + P_{k-1}(t)P_1(h) + \sum_{i=2}^{k} P_{k-i}(t)P_i(h).$$

$$\sum_{i=2}^{k} P_{k-i}(t)P_i(h) \le \sum_{i=2}^{k} P_i(h) = o(h),$$

$$P_0(h) = 1 - \lambda h + o(h),$$

$$P_1(h) = \lambda h + o(h).$$

Таким чином,

$$P_k(t+h)-P_k(t)=-\lambda h P_k(t)+\lambda h P_{k-1}(t)+o(h),$$

тобто

$$\begin{cases} P_k'(t)=-\lambda P_k(t)+\lambda P_{k-1}(t) \\ P_k(0)=0 \end{cases}, k=1,2,... \qquad (1.1)$$

Зробимо заміну $Q_k=P_k(t)e^{\lambda t}$, тобто $P_k(t)=e^{-\lambda t}Q_k(t),\ k=1,2,...$

$$\begin{cases} Q_k'(t)=\lambda Q_{k-1}(t), \\ Q_k(0)=0, \qquad k=1,2,... \\ Q_0(t)\equiv 1. \end{cases}$$

$$Q_1{}'(t)=\lambda, \Rightarrow Q_1(t)=\lambda t+C, \Rightarrow Q_1(t)=\lambda t,$$

$$Q_2{}'(t)=\lambda^2 t, \Rightarrow Q_2(t)=\frac{\lambda^2 t^2}{2}+C, \Rightarrow Q_2(t)=\frac{(\lambda t)}{2!},$$

$$\dots$$

$$Q_k{}'(t)=\frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}, \Rightarrow Q_k(t)=\frac{\lambda^k t^k}{k!}+C, \Rightarrow Q_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Остаточно отримаємо, що

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k=0,1,2,...,$$

тобто випадкова величина $X(t)$ має пуассонівський розподіл з параметром λt.

Розв’яжемо систему рівнянь (1.1) методом генератрис.

Нехай $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)x^k=\Phi(t,x)$. Помножуючи на x^k всі члени рівняння (1.1) та сумуючи по k від 0 до ∞, ми легко знаходимо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}=\lambda\sum_{k=0}^{\infty} P_{k-1}(t)x^k-\lambda\Phi=\lambda(x-1)\Phi,$$

або

$$\frac{\partial \ln \Phi}{\partial t} = \lambda(x-1).$$

Звідси

$$\ln \Phi(t,x) - \ln \Phi(0,x) = \lambda(x-1)t.$$

Проте для будь-якого x

$$\Phi(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k P_k(0) = P_0(0) = 1.$$

Таким чином

$$\Phi(t,x) = e^{\lambda(x-1)t} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t x} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{¥} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x^k .$$

Отже ми знову отримали,що

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0,1,2,....$$

Теорема 1.1. Найпростіший потік є процесом з незалежними приростами, у якого прирости розподілені за законом Пуассона.

Процес відновлення – це послідовність $\{\zeta_n, n = 0,1,...\}$, де $\zeta_0 = 0,\ \zeta_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, а $\{\xi_k, k = 1,2,...\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених невід'ємних випадкових величин.

Нескладно перевірити, що потік буде найпростішим тоді і тільки тоді, коли він побудований за процесом відновлення, де ξ_k мають показниковий розподіл.

$$X(t) = \max\{k : \zeta_k \le t\}.$$

1.3. Характеристики потоків

Нехай $X(t), t \ge 0$ – довільний стаціонарний потік. Позначимо ймовірність того, що на проміжку $(t', t'+t)$ з'явилася хоча б одна вимога, через $\pi_{\geq 1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t).$ Тоді ***параметром стаціонарного потоку*** будемо, за визначенням, вважати

$$\lim_{t \to 0} \frac{\pi_{\geq 1}(t)}{t} = \lambda. \qquad (1.2)$$

Інтенсивністю стаціонарного потоку μ назвемо математичне сподівання числа вимог за одиницю часу

$$\mu = MX(1) = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k(1). \qquad (1.3)$$

Розглянемо найпростіший потік. Для нього

$$\pi_{\geq 1}(t) = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t} = \lambda t + o(t).$$

Таким чином

$$\lim_{t \to 0} \frac{\pi_{\geq 1}(t)}{t} = \lambda.$$

З іншої боку

$$MX(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k(1) = e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t,$$

тобто,

$$\mu = MX(1) = \lambda.$$

Таким чином, в випадку найпростішого потоку параметр потоку співпадає з його інтенсивністю.

Покажемо коректність визначення (1.2).

Лема 1.2. Нехай функція $f(x)$ – невід'ємна і неспадна на відрізку $0 < x \leq a$,

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), \; x, y, x+y \in (0, a). \qquad (1.3)$$

Тоді $\dfrac{f(x)}{x}$ при $x \to 0$ або безмежно зростає, або прямує до деякої границі. Ця границя дорівнює 0 тільки в тривіальному випадку $f(a) = 0.$

Доведення. З нерівності (1.3) випливає, що

$$f(x) \le mf\left(\frac{x}{m}\right), \text{ для } 0 < x \le a \text{ і будь-якого натурального } m. \tag{1.4}$$

У частковому випадку $x = a$

$$\frac{f\left(\dfrac{a}{m}\right)}{\dfrac{a}{m}} \ge \frac{f(a)}{a}, m = 1, 2, \ldots.$$

З цього видно, що, за виключенням тривіального випадку $f(a) = 0,$

$$\alpha = \overline{\lim_{x \to 0}} \frac{f(x)}{x} \ge \frac{f(a)}{a} > 0.$$

Не виключається випадок $\alpha = +\infty.$

Припустимо спочатку, що $\alpha < +\infty.$ Нехай $c > 0$ таке, що

$$\frac{f(c)}{c} > \alpha - \varepsilon, \tag{1.5}$$

де $\varepsilon > 0$ скільки завгодно мале наперед задане число.

Нехай $0 < x < c$. Визначимо натуральне число $m \ge 2$ з нерівностей

$$\frac{c}{m} \le x \le \frac{c}{m-1}.$$

Тоді з (1.4) та припущень про монотонність $f(x)$ випливає

$$\frac{f(x)}{x} \ge \frac{f\left(\dfrac{c}{m}\right)}{\dfrac{c}{m-1}} = \frac{m-1}{m} \frac{mf\left(\dfrac{c}{m}\right)}{c} \ge \frac{m-1}{m} \frac{f(c)}{c}, \tag{1.6}$$

а, отже, в силу (1.5)

$$\frac{f(x)}{x} \ge \left(1 - \frac{1}{m}\right)(\alpha - \varepsilon).$$

Так як ε будь-яке мале число і $m \to \infty$ при $x \to \infty$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha .$$

Припустимо тепер, що $\alpha = +\infty$.

Візьмемо будь-яке велике $A > 0$ і оберемо число c так, щоб $\frac{f(c)}{c} > A.$ Тоді з (1.6) випливає, що для $x \in (0, c)$

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{m-1}{m} A,$$

а значить $\frac{f(x)}{x} \to +\infty$ при $x \to \infty$.

Теорема 1.2. Для будь-якого стаціонарного потоку існує

$$\lim_{t\to 0} \frac{\pi_{\geq 1}(t)}{t} = \lambda > 0,$$

причому випадок $\alpha = +\infty$ не виключається.

Доведення. $\pi_{\geq 1}(t) -$ неспадає, $\pi_{\geq 1}(t+\tau) \leq \pi_{\geq 1}(t) + \pi_{\geq 1}(\tau)$, а також для деякого $a > 0, \pi_{\geq 1}(a) > 0,$ оскільки інакше потоку не було б.

Застосовуючи лему 1.2, отримуємо доведення теореми.

Неважко помітити, що для стаціонарних потоків завжди $\lambda \leq \mu$.

Дійсно,

$$\mu t = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k(t) \geq \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) = \pi_{\geq 1}(t),$$

тобто $\frac{\pi_{\geq 1}(t)}{t} \leq \mu,$ а значить $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\pi_{\geq 1}(t)}{t} \leq \mu.$

Теорема 1.3. (В.С.Королюк) Якщо стаціонарний потік ординарний, то $\lambda = \mu$.

Доведення цієї теореми використовує апарат функцій Пальма-Хінчіна.

1.4. Функції Пальма

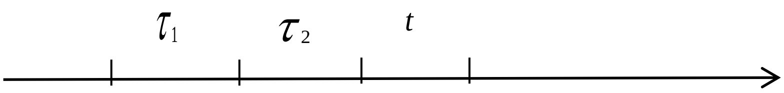
Пальм для будь-якого стаціонарного потоку визначав функцію $\varphi_0(t)$ як умовну ймовірність відсутності вимог у проміжку (t_0, t_0+t), якщо відомо, що в момент t_0 надійшла вимога.

Хінчин зробив це визначення строгим та ввів цілий ряд функцій $\varphi_k(t)$, $k = 0,1,...$– ймовірність мати k вимог у проміжку (t_0, t_0+t) при умові, що в момент t_0 надійшла вимога.

Нехай $P_{\geq 1, \leq k}(\tau, t)$ – ймовірність того, що в проміжку τ надійшла принаймні одна вимога, а в проміжку t надійшло не більше k вимог.

Тоді $\dfrac{P_{\geq 1, \leq k}(\tau, t)}{P_{\geq 1}(\tau)}$ - ймовірність появи не більше ніж k вимог у проміжку t за умови, що в проміжку τ з'явилась принаймні одна вимога.

Покажемо, що $\lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{P_{\geq 1, \leq k}(\tau, t)}{P_{\geq 1}(\tau)}$ завжди існує, якщо даний стаціонарний потік має скінченний параметр. У зв'язку з цим покажемо, що функція $P_{\geq 1, \leq k}(\tau, t)$ задовольняє умові леми 1.2 за змінною τ .



$A_{\geq t, \leq k}(\tau_1 + \tau_2, t)$ $A_{\geq t, \leq k}(\tau_2, t)$ $A_{\geq t, \leq k}(\tau_1, \tau_2 + t)$

$$A_{\geq t, \leq k}(\tau_1 + \tau_2, t) \subset A_{\geq t, \leq k}(\tau_2, t) \cup A_{\geq t, \leq k}(\tau_1, \tau_2 + t)$$

(та частина $A(\tau_1 + \tau_2, t)$, що міститься в $\overline{A}(\tau_2, t)$ обов'язково входить в $A(\tau_1, \tau_2 + t)$).

$$P_{\geq 1, \leq k}\left(\tau_1+\tau_2, t\right) \leq P_{\geq 1, \leq k}\left(\tau_2, t\right)+P_{\geq 1, \leq k}\left(\tau_1, \tau_2+t\right) \leq P_{\geq 1, \leq k}\left(\tau_2, t\right)+P_{\geq 1, \leq k}\left(\tau_1, t\right).$$

Застосовуючи лему 1.2, отримаємо, що $\dfrac{P_{\geq 1, \leq k}\left(\tau, t\right)}{\tau}$ при $\tau \to 0$ прямує до деякої скінченної границі або безмежно зростає.

Однак

$$\frac{P_{\geq 1, \leq k}\left(\tau, t\right)}{\tau} \leq \frac{P_{\geq 1}(\tau)}{\tau} \to \lambda < \infty.$$

Таким чином другий випадок неможливий.

Тепер з рівності

$$\frac{P_{\geq 1, \leq k}\left(\tau, t\right)}{P_{\geq 1}(\tau)} = \frac{\dfrac{P_{\geq 1, \leq k}\left(\tau, t\right)}{\tau}}{\dfrac{P_{\geq 1}(\tau)}{\tau}}$$

випливає існування функцій $\Phi_k(t) = \lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{P_{\geq 1, \leq k}\left(\tau, t\right)}{P_{\geq 1}(\tau)}$.

Нехай $P_{\geq 1, =k}(\tau, t) = P_{\geq 1, \leq k}(\tau, t) - P_{\geq 1, \leq k-1}(\tau, t)$ - ймовірність того, що в проміжку τ надійшла принаймні одна вимога, а в проміжку t надійшло рівно k вимог.

З тільки що доведеного випливає:

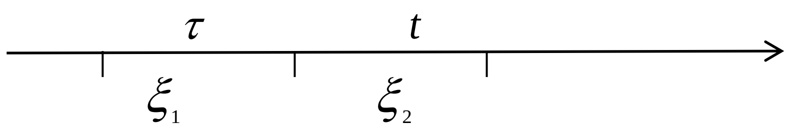
$\lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{P_{\geq 1, =k}\left(\tau, t\right)}{P_{\geq 1}(\tau)}$ існує і дорівнює $\Phi_k(t) - \Phi_{k-1}(t)$, причому

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{P_{\geq 1, =0}\left(\tau, t\right)}{P_{\geq 1}(\tau)} = \Phi_0(t).$$

Границі $\lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{P_{\geq 1, =k}\left(\tau, t\right)}{P_{\geq 1}(\tau)} = \varphi_k(t), k = 0,1,...$ називаються функціями Пальма-Хінчина.

Формули Пальма-Хінчина

Нехай $P_k(t) = P\left\{X(t+a) - X(a) = k\right\}$. Припустимо, що стаціонарний потік буде також ординарним і мати скінченний параметр.



$$P_k(\tau+t) = P\left\{\xi_1+\xi_2 = k\right\} = \sum_{r=0}^{k} P\left\{\xi_1 = r, \xi_2 = k-r\right\}$$

звідки в силу ординарності потоку при $\tau \to 0$

$$P_k(\tau+t) = P\left\{\xi_1 = 0, \xi_2 = k\right\} + P\left\{\xi_1 = 1, \xi_2 = k-1\right\} + o(\tau).$$

Однак,

$$P\left\{\xi_1 = 0, \xi_2 = k\right\} = P\left\{\xi_2 = k\right\} - P\left\{\xi_1 \geq 1, \xi_2 = k\right\} = P_k(t) - P_{\geq 1, =k}(\tau, t),$$

$$P\left\{\xi_1 = 1, \xi_2 = k-1\right\} =$$

$$= P\left\{\xi_1 \geq 1, \xi_2 = k-1\right\} - P\left\{\xi_1 \geq 2, \xi_2 = k-1\right\} = P_{\geq 1, =k-1}(\tau, t) + o(\tau).$$

Таким чином

$$P_k(\tau+t) = P_k(t) - P_{\geq 1, =k}(\tau, t) + P_{\geq 1, =k-1}(\tau, t) + o(\tau)$$

$$\frac{P_k(\tau+t) - P_k(t)}{\tau} = \frac{P_{\geq 1, =k-1}(\tau, t)}{P_{>1}(\tau)} \frac{P_{\geq 1}(\tau)}{\tau} - \frac{P_{\geq 1, =k}(\tau, t)}{P_{>1}(\tau)} \frac{P_{\geq 1}(\tau)}{\tau} + o(1).$$

Отже

$$\begin{cases} P_k'(t) = -\lambda[\varphi_{k-1}(t) - \varphi_k(t)], \; k = 1, 2, ... \\ P_0'(t) = -\lambda \varphi_0(t). \end{cases} \tag{1.6}$$

Нехай $V_m(t) = \sum_{k=0}^{m} P_k(t).$ Тоді система (1.6) буде мати вигляд

$$V_m{}'(t) = -\lambda \varphi_m(t), m = 0, 1, \ldots. \tag{1.7}$$

З (1.7) знаходимо

$$V_m(+0)-V_m(t)=\lambda\int_0^t \varphi_m(u)du, m=0,1,\dots .$$

Неважко перевірити, що $V_m(+0)=1$.

$(V_m(+0)\ge V_0(+0)=P_0(+0)=1-P_{\ge 1}(+0).$ Оскільки при $t\to 0$ $\dfrac{P_{\ge 1}(t)}{t}\to\lambda,$ то $P_{\ge 1}(+0)=0)$.

Значить для будь-якого $t>0$

$$1-V_m(t)=\lambda\int_0^t \varphi_m(u)du,\ m=0,1,\dots,$$

і

$$\begin{cases} P_0(t)=1-\lambda\int_0^t \varphi_0(u)du, \\ P_k(t)=\lambda\int_0^t\left[\varphi_{k-1}(u)-\varphi_k(u)\right]du\ ,\ k=1,2,\dots . \end{cases} \tag{1.8}$$

Доведення теореми В.С.Королюка.

Те, що $\mu\ge\lambda$ було доведено раніше. Покажемо обернену нерівність.

Нехай $V_m(t)=\sum_{k=0}^{m} P_k(t).$ Тоді

$$\mu=\sum_{k=1}^{\infty} kP_k(1)=\sum_{k=1}^{\infty}(P_k(1)+P_{k+1}(1)+P_{k+2}(1)+\dots)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-V_k(1)). \tag{1.9}$$

З (1.8) випливає, що

$$1-V_m(1)=\lambda\int_0^1 \varphi_m(u)du,\ m=0,1,\dots .$$

Підставляючи це в (1.9), отримаємо

$$\mu=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 \varphi_k(u)du.$$

Однак

$$\varphi_k(u) = \lim_{\tau \to 0} \frac{P_{\geq 1,=k}(\tau, u)}{P_{\geq 1}(\tau)} \qquad \text{і} \qquad \sum_{k=0}^{m} \frac{P_{\geq 1,=k}(\tau, u)}{P_{\geq 1}(\tau)} \leq 1, \ (0 < u \leq 1).$$

Це означає, що

$$\sum_{k=0}^{m} \varphi_k(u) \leq 1, \quad (0 < u \leq 1).$$

Звідси маємо, що для будь-якого натурального m

$$\sum_{k=0}^{m} \int_0^1 \varphi_k(u) du = \int_0^1 \{\sum_{k=0}^{m} \varphi_k(u)\} du \leq 1.$$

Граничним переходом отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \varphi_k(u) du \leq 1.$$

Тепер остаточно маємо, що $\mu \leq \lambda$. Теорему доведено.

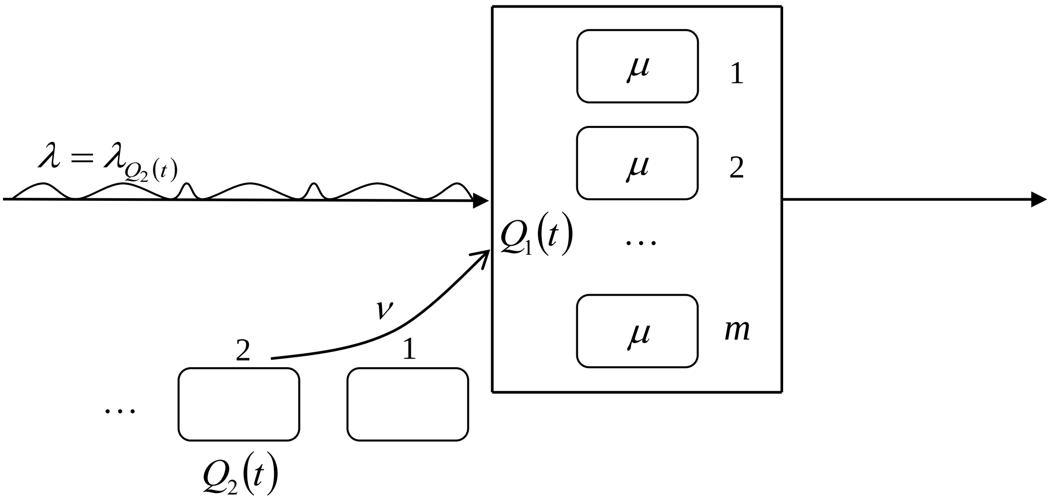
2. Основна модель системи з повторними викликами

2.1. Опис базової моделі

В цьому розділі опишемо систему обслуговування з повторними викликами, яка буде базовою для всіх подальших викладок. Також будемо розглядати системи, які відрізняються від базової моделі. але оскільки такі зміни не будуть, як правило, суттєвими, то про них будемо говорити лише тоді, коли будемо розглядати конкретні задачі для таких систем.

Отже, розглядається система обслуговування з повторними викликами, яка складається з "m" обслуговуючих приладів. Час обслуговування має показниковий розподіл з параметром μ. Вхідний потік містить дві складові – первинну і вторинну. Інтенсивність λ_j потоку первинних викликів залежить від числа j - джерел повторних викликів. Кожне джерело повторних викликів генерує пуассонівський потік повторних викликів інтенсивності ν.

В якості моделі процесу обслуговування розглянемо двовимірний марковський процес $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$ з неперервним часом у фазовому просторі $S = I \times J$, де $I = \{0,1,...,m\}$, $J = \{0,1,...\}$. Компонента $Q_1(t)$ вказує на число зайнятих приладів у момент часу t в системі, $Q_2(t)$ дорівнює числу джерел повторних викликів. Графічно така система може бути представлена наступним чином.



Р

ис. 2.1. Структура системи з повторними викликами.

Оскільки експоненціальний розподіл має властивість відсутності післядії, то процес $Q(t)=(Q_1(t),Q_2(t))$ є двовимірним ланцюгом Маркова зі зліченним фазовим простором. Як відомо, з роботи [1], такі ланцюги визначаються своїми інфінітезимальними характеристиками. Позначимо інфінітезимальні характеристики ланцюга $Q(t)$ через $q_{(i,j)(i',j')}$. Враховуючи алгоритм функціонування системи, вони визначаються наступним чином:

1) якщо $i=0,1,...,m-1,\ j\in J$, то

$$q_{(i,j)(i',j')}=\begin{cases} \lambda_j, & \text{при} \quad (i',j')=(i+1,j), \\ i\mu, & \text{при} \quad (i',j')=(i-1,j), \\ j\nu, & \text{при} \quad (i',j')=(i+1,j-1), \\ -(\lambda_j+i\mu+j\nu), & \text{при} \quad (i',j')=(i,j), \\ 0, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

2) якщо $i=m,\ j\in J$, то

$$q_{(m,j)(i',j')}=\begin{cases} \lambda_j, & \text{при} \quad (i',j')=(m,j+1), \\ m\mu, & \text{при} \quad (i',j')=(m-1,j), \\ -(\lambda_j+m\mu), & \text{при} \quad (i',j')=(m,j), \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Структуру інфінітезимальної матриці $Q = \left\| q_{(i,j)(i',j')} \right\|_{(i,j)(i',j') \in S}$ можна подати графічно

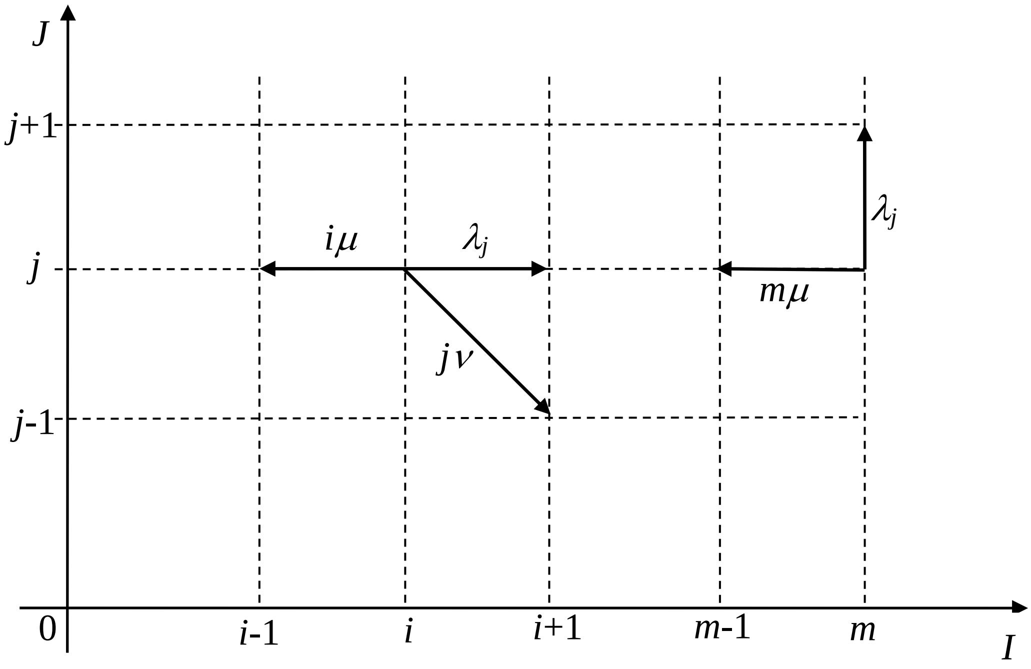


Рис. 2.2. Граф інтенсивностей переходів для ланцюга $Q(t)$.

Згідно з прийнятою в теорії масового обслуговування системою позначень таку модель будемо кодувати як $M_Q / M / m / \infty$. Символ "∞" на останній позиції означає відсутність обмежень на число повторних викликів.

Також будемо мати справу з системами, в яких кількість джерел повторних викликів буде обмеженою деяким числом N. Таку систему ми будемо позначати як $M_Q / M / m / N$.

Головне питання, яке завжди виникає при дослідженні систем обслуговування - це умови існування стаціонарного розподілу для кількості вимог у системі, тобто умови існування $\pi_{ij} = \lim_{t \to \infty} P(Q_1(t) = i, Q_2(t) = j) \quad (\sum_{ij} \pi_{ij} = 1)$, а також формули для цього розподілу. Якщо кількість джерел повторних викликів обмежена, то, як це випливає з загальної теорії ланцюгів Маркова, стаціонарний режим існує.

Для необмеженої черги повторних викликів для існування такого режиму потрібні додаткові умови.

2.2. Умови існування та векторно-матричне подання стаціонарного розподілу

В цьому підрозділі з'ясуємо умови існування стаціонарного режиму для процесу $Q(t), t \geq 0$ та знайдемо явні формули для стаціонарного розподілу у випадку системи $M_Q / M / m / N$.

Лема 2.1. Нехай $\lambda = \overline{\lim_{j \to \infty}} \lambda_j < \infty$. Якщо $\frac{\lambda}{m\mu} < 1$, то існують границі $\pi_{ij} = \lim_{t \to \infty} P(Q_1(t) = i, Q_2(t) = j)$, тобто ланцюг $Q(t)$ є ергодичним і його граничний розподіл співпадає з єдиним стаціонарним.

Доведення. Це твердження доведемо з використанням функцій Ляпунова, скориставшись теоремою Твіді ([2], ст. 97). Розглянемо в якості тест-функцій Ляпунова наступні функції

$$\varphi(i, j) = ai + j, \quad (i, j) \in S, \tag{2.1}$$

де параметр "a" буде визначено пізніше.

Для обраних тест-функцій, використовуючи написані вище співвідношення для інтенсивностей переходів, підрахуємо середній перенос

$$y_{ij} = \sum_{(i', j') \neq (i, j)} q_{(i, j)(i', j')} \left(\varphi(i', j') - \varphi(i, j) \right).$$

Через параметри системи y_{ij} можна подати у вигляді

$$y_{ij} = \begin{cases} \lambda_j a - i\mu a + j\nu(a-1), & 0 \leq i \leq m-1, \\ \lambda_j - m\mu a, & i = m. \end{cases}$$

При $\frac{\lambda}{m\mu}<1$ для будь-якого $a\in\left(\frac{\lambda}{m\mu},1\right)$ існує $\varepsilon>0$ таке, що $y_{ij}<-\varepsilon$ для всіх $(i,j)\in S$ за винятком скінченного числа станів (i,j). Таким чином для тест-функцій (2.1) при $a\in\left(\frac{\lambda}{m\mu},1\right)$ виконуються умови теореми Твіді ([2], ст. 97). Лему 2.1 доведено.

Перейдемо тепер до знаходження явних формул для стаціонарного розподілу при умові, що він існує. У випадку, коли інтенсивність вхідного потоку стала величина, головним методом побудови явних формул є метод генератрис. Він застосовується, щоб знайти розв'язок відповідної системи рівнянь Колмогорова для стаціонарного розподілу. У загальному випадку при довільній формі залежності інтенсивності вхідного потоку від числа повторних викликів теж може бути записана система рівнянь Колмогорова для стаціонарного розподілу, але застосування методу генератрис для знаходження її розв'язку є неможливим.

Для побудови розрахункових алгоритмів і явних формул будемо використовувати інший підхід. Спочатку розглянемо модель типу $M_Q/M/m/N$, в якій скінченне число N місць для повторних викликів. При умові, що всі N місць зайнято, повторний виклик губиться і не отримує обслуговування в системі. Для цієї системи напишемо рівняння Колмогорова для стаціонарного розподілу. Їх легко записати, якщо використати принцип рівності потоків імовірностей через замкнений контур при стаціонарному режимі. Після цього ми знаходимо розв'язок цих рівнянь, що дає нам стаціонарний розподіл для системи $M_Q/M/m/N$. Тепер переходимо до границі (в умовах леми 2.1) при $N\to\infty$. Цей підхід, як очікується, дасть нам формули для стаціонарного розподілу в системах типу $M_Q/M/m/\infty$. Реалізувати цю ідею для довільного числа обслуговуючих приладів поки що не вдається. У наступному підрозділі ми розглянемо випадки $m=1,2$, для яких цей підхід спрацьовує.

Отже, розглянемо модель типу $M_Q / M / m / N$ більш детально.

Інфінітезимальні характеристики $q^{(N)}_{(i,j)(i',j')}$ для процесу обслуговування $Q^{(N)}(t) = \left(Q_1^{(N)}(t), Q_2^{(N)}(t)\right)$ в системі $M_Q / M / m / N$ дорівнюють:

1) якщо $i = 0,1,..., m-1, \quad j = 0,1,..., N$, то

$$q^{(N)}_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j, \quad \text{при} \quad (i',j') = (i+1, j), \\ i\mu, \quad \text{при} \quad (i',j') = (i-1, j), \\ j\nu, \quad \text{при} \quad (i',j') = (i+1, j-1), \\ -\left(\lambda_j + i\mu + j\nu\right), \quad \text{при} \quad (i',j') = (i, j), \\ 0, \quad \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

2) якщо $i = m, \quad j = 0,1,..., N-1$, то

$$q^{(N)}_{(m,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j, \quad \text{при} \quad (i',j') = (m, j+1), \\ m\mu, \quad \text{при} \quad (i',j') = (m-1, j), \\ -\left(\lambda_j + m\mu\right), \quad \text{при} \quad (i',j') = (m, j), \\ 0, \quad \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

3) якщо $i = m, \quad j = N$, то

$$q^{(N)}_{(m,N)(i',j')} = \begin{cases} m\mu, \quad \text{при} \quad (i',j') = (m-1, N), \\ -m\mu, \quad \text{при} \quad (i',j') = (m, N), \\ 0, \quad \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Процес $Q^{(N)}(t)$ приймає значення в скінченній множині станів $S^{(N)} = I \times J^{(N)}, \quad J^{(N)} = \{0,1,..., N\}$, і для нього існує стаціонарний режим. Знайдемо його стаціонарний розподіл $\pi^{(N)}_{ij}, \quad (i,j) \in S^{(N)}$.

Нехай $A(j), \; j = 0,1,\ldots, N-1$ - тридіагональна матриця виду

$$A(j)=\begin{pmatrix} a_0^{(0)}(j) & a_0^{(+)}(j) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1^{(-)}(j) & a_1^{(0)}(j) & a_1^{(+)}(j) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-2}^{(-)}(j) & a_{m-2}^{(0)}(j) & a_{m-2}^{(+)}(j) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1}^{(-)}(j) & a_{m-1}^{(0)}(j) \end{pmatrix},$$

де

$$a_i^{(0)}(j)=\lambda_j+i\mu+j\nu, \quad i=0,1,\dots,m-1,$$

$$a_i^{(+)}(j)=-\lambda_j, \quad i=0,1,\dots,m-2,$$

$$a_i^{(-)}(j)=-i\mu, \quad i=1,2,\dots,m-1,$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- матриці розмірності $(m\times m)$.

Через $D(N)$ будемо позначати трикутну матрицю

$$D(N)=\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -(N\nu+\lambda_N) & 2\mu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -N\nu & -(N\nu+\lambda_N) & 3\mu & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ -N\nu & -N\nu & -N\nu & \dots & -(N\nu+\lambda_N) & (m-1)\mu \end{pmatrix}.$$

Нам також необхідні будуть вектори:

$$\pi'^{(N)}(j)=\left(\pi_{0j}^{(N)},\pi_{1j}^{(N)},\dots,\pi_{m-1j}^{(N)}\right),$$

$$G'^{(N)}(j)=\frac{\pi'^{(N)}(j)}{\pi_{0N}^{(N)}}=\left(G_{0j}^{(N)},G_{1j}^{(N)},\dots,G_{m-1j}^{(N)}\right),$$

$\overline{1}(m-1)-(m-1)-$вимірний вектор, що складається з одиниць,

$e_i(m-1)-(m-1)-$вимірний вектор, $i-$та компонента якого дорівнює одиниці, а інші дорівнюють нулю. Через $\overline{1}(m), e_i(m)$ будемо позначати такі ж вектори розмірності m.

Теорема 2.1. Якщо $\lambda_j > 0,\ j = 0,1,...,N$, то стаціонарні імовірності $\pi_{ij}^{(N)},\quad (i,j) \in S^{(N)}$ можна подати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \pi_{1N}^{(N)} \\ \pi_{2N}^{(N)} \\ \dots \\ \pi_{m-1N}^{(N)} \end{pmatrix} = \pi_{0N}^{(N)} D^{-1}(N)\left(N\nu\overline{1}(m-1)+\lambda_N e_1(m-1)\right),\ j = 0,1,...,N-1, \tag{2.2}$$

$$\pi_{mN}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)}}{m\mu} G'^{(N)}(N)\left(N\nu\bar{1}(m)+\lambda_N e_m(m)\right),\ j = 0,1,...,N-1,$$

(2.3)

$$\pi'^{(N)}(j) = \frac{\pi_{0N}^{(N)} N!\nu^{N-j}}{j!} G'^{(N)}(N) T(N-1) \times ... \times T(j),\ j = 0,1,...,N-1, \tag{2.4}$$

$$\pi_{mj}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)} N!\nu^{N-j}}{\lambda_j j!} G'^{(N)}(N) T(N-1) \times ... \times T(j+1)\bar{1}(m),\ j = 0,1,\dots,N-1, \tag{2.5}$$

де

$$\pi_{oN}^{(N)} = \left\{ G'^{(N)}(N)\left(\overline{1}(m) + N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}}{j!} T(N-1)\times ... \times T(j+1)\left[T(j)+\frac{1}{\lambda_j}\right]\overline{1}(m) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{m\mu}(N\nu\overline{1}(m)+\lambda_N e_m(m))\right)\right\}^{-1}, \tag{2.6}$$

$$G^{(N)}(N) = \begin{pmatrix} 1 \\ D^{-1}(N)\left(N\nu\overline{1}(m-1)+\lambda_N e_1(m-1)\right) \end{pmatrix},$$

(2.7)

$$T(j) = \left[B + \frac{m\mu}{\lambda_j} C\right] A^{-1}(j),\quad j = 0,1,...,N-1.$$

Доведення. Для зручності позначимо $\pi_{ij}^{(N)} = \widetilde{\pi}_{ij}$, $G_{ij}^{(N)} = \widetilde{G}_{ij}$, $(i, j) \in S^{(N)}$. Для кожного $k = 0,1,..., m-1$ розіб'ємо $S^{(N)}$ на дві підмножини $E_k = \{(0, N),(1, N),...,(k, N)\}$ та $\overline{E}_k = S^{(N)} \setminus E_k$. В силу рівності потоків імовірностей через замкнений контур у стаціонарному режимі ([3], стор.49), будемо мати

$$N\nu\widetilde{\pi}_{0N} + N\nu\widetilde{\pi}_{1N} + ... + N\nu\widetilde{\pi}_{k-1N} + (N\nu + \lambda_N)\widetilde{\pi}_{kN} =$$

$$= (k+1)\mu\widetilde{\pi}_{k+1N}, \quad k = 0,1,..., m-1. \tag{2.8}$$

Для $\tilde{G}_{ij} = \dfrac{\tilde{\pi}_{ij}}{\tilde{\pi}_{0N}}$, $(i, j) \in S^{(N)}$ перші $(m-1)$ рівняння із системи (2.8) мають вигляд

$$\begin{cases} \mu\widetilde{G}_{1N} = N\nu + \lambda_N \\ -(N\nu + \lambda_N)\widetilde{G}_{1N} + 2\mu\widetilde{G}_{2N} = N\nu \\ -N\nu\widetilde{G}_{1N} - (N\nu + \lambda_N)\widetilde{G}_{2N} + 3\mu\widetilde{G}_{3N} = N\nu \\ \dots \\ -N\nu\widetilde{G}_{1N} - \ldots - N\nu\widetilde{G}_{m-3N} - (N\nu + \lambda_N)\widetilde{G}_{m-2N} + (m-1)\mu\widetilde{G}_{m-1N} = N\nu \end{cases} \tag{2.9}$$

Відносно $\widetilde{G}_{1N}, \ldots, \widetilde{G}_{m-1N}$ розв'язком (2.9) буде

$$\begin{pmatrix} \widetilde{G}_{1N} \\ ... \\ \widetilde{G}_{m-1N} \end{pmatrix} = D^{-1}(N)\left(N\nu\overline{1}(m-1) + \lambda_N e_1(m-1)\right),$$

що дає нам (2.7).

З (2.8) при $k = m-1$ знаходимо

$$\tilde{G}_{mN} = \frac{1}{m\mu}\tilde{G}'(N)(N\nu\overline{1}(m) + \lambda_N e_m(m)). \tag{2.10}$$

Знайдемо тепер $\widetilde{G}_{mj}$, коли $j = 0,1,..., N-1$. Розіб'ємо $S^{(N)}$ на дві підмножини $S_j^{(N)} = \{(\alpha, \beta) \in S^{(N)} : \beta \le j\}$ і $\overline{S}_j^{(N)} = S^{(N)} \setminus S_j^{(N)}$. Знову використовуючи рівність потоків імовірностей через замкнений контур, маємо

$$\lambda_j \widetilde{\pi}_{mj} = (j+1)\nu\, \widetilde{\pi}_{0\,j+1} + \ldots + (j+1)\nu\, \widetilde{\pi}_{m-1\,j+1},$$

або

$$\lambda_j \widetilde{G}_{mj} = (j+1)\nu\, \widetilde{G}_{0\,j+1} + \ldots + (j+1)\nu\, \widetilde{G}_{m-1\,j+1}.$$

Звідки отримаємо

$$\tilde{G}_{mj} = \frac{(j+1)\nu}{\lambda_j} \tilde{G}'(j+1)\bar{1}(m), \quad j = 0,1,..,N-1.$$

(2.11)

Розглянемо тепер $m \times N$ замкнених контурів, які містять одну точку (i,j) з області $\widetilde{S}^{(N)} = \{0,1,\ldots,m-1\} \times \{0,1,\ldots N-1\}$. Відповідні рівняння для $G_{ij}, \quad (i,j) \in \widetilde{S}^{(N)}$ мають вигляд

$$(\lambda_j + j\nu)\widetilde{G}_{0j} = \mu \widetilde{G}_{1j}, \quad i = 0, \tag{2.12}$$

$$(\lambda_j + i\mu + j\nu)\widetilde{G}_{ij} = (j+1)\nu\, \widetilde{G}_{i-1\,j+1} +$$

$$+ \lambda_j \widetilde{G}_{i-1\,j} + (i+1)\mu \widetilde{G}_{i+1\,j}, \quad i = 1,2,\ldots,m-2. \tag{2.13}$$

При $i = m-1$ з урахуванням (2.11)

$$\left(\lambda_j + (m-1)\mu + j\nu\right)\tilde{G}_{m-1\,j} = (j+1)\nu\, \tilde{G}_{m-2\,j+1} +$$

$$+ \lambda_j \tilde{G}_{m-2\,j} + \frac{(j+1)m\mu\nu}{\lambda_j} \tilde{G}'(j+1)\bar{1}(m).$$

(2.14)

Систему (2.12) - (2.14) можна подати у векторно-матричному вигляді

$$\widetilde{G}'(j)A(j) = (j+1)\nu\, \widetilde{G}'(j+1)\left[B + \frac{m\mu}{\lambda_j} C\right]$$

або

$$\tilde{G}'(j) = (j+1)\nu\,\tilde{G}'(j+1)\left[B + \frac{m\mu}{\lambda_j}C\right]A^{-1}(j) =$$

$$= (j+1)\nu\,\tilde{G}'(j+1)T(j), \;\; j = 0,1,...,N-1. \qquad (2.15)$$

Розв’язком рекурентного співвідношення (2.15) буде послідовність векторів

$$\tilde{G}'(j) = \frac{N!\nu^{N-j}}{j!}\tilde{G}'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j), \;\; j = 0,1,...,N-1.$$

(2.16)

Підставляючи праву частину (2.16) в (2.11), маємо

$$\tilde{G}_{mj} = \frac{N!\nu^{N-j}}{j!\lambda_j}\tilde{G}'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j+1)\bar{1}(m), \;\; j = 0,1,...,N-1. \qquad (2.17)$$

Умова нормування для стаціонарних імовірностей $\tilde{\pi}_{ij}$, $(i,j)\in S$, яка виглядає так: $\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{N}\tilde{\pi}_{ij} = 1$, може бути переписана наступним чином

$$\sum_{i=0}^{m-1}\tilde{G}_{iN} + \tilde{G}_{mN} + \sum_{j=0}^{N-1}\tilde{G}_{mj} + \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{N-1}\tilde{G}_{ij} = \tilde{\pi}_{0N}^{-1}.$$

Підставляючи сюди вирази з формул (2.10), (2.16) та (2.17) отримаємо

$$\tilde{\pi}_{0N} = \left\{\tilde{G}'(N)\bar{1} + N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}}{j!\lambda_j}\tilde{G}'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j+1)\bar{1}(m) + \right.$$

$$\left. + N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}}{j!}\tilde{G}'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j)\bar{1}(m) + \frac{1}{m\mu}\tilde{G}'(N)(N\nu\bar{1}(m) + \lambda_N e_m(m))\right\}^{-1}$$

або

$$\tilde{\pi}_{0N} = \left\{\tilde{G}'(N)\left(\bar{1}(m) + N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}}{j!}T(N-1)\times\ldots\times T(j+1)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[T(j)\bar{1}(m) + \frac{1}{\lambda_j}\bar{1}(m)\right] + \frac{1}{m\mu}(N\nu\bar{1}(m) + \lambda_N e_m(m))\right)\right\}^{-1}. \qquad (2.18)$$

Співвідношення (2.2)-(2.6) є безпосереднім наслідком (2.10), (2.16)-(2.18). Теорему 2.1 доведено.

Очевидно, формули (2.2)-(2.6) представляють собою ефективну рекурентну процедуру для обчислення стаціонарного розподілу. Застосуємо отриманий результат до систем $M_Q/M/m/\infty$, $M_Q/M/m/N$ при $m=1,2$. У даному випадку можна провести більш детальний аналіз і отримати явні формули.

2.3. Явні формули для систем з одним та двома обслуговуючими приладами

Нехай тепер $m=1$. Таким чином маємо систему $M_Q/M/1/N$. В цьому випадку

$$A(j)=\lambda_j+j\nu,\quad j\ge 1,\quad B=0,\quad C=1,\quad G'(N)=1,$$

$$T(j)=\left[B+\frac{\mu}{\lambda_j}C\right]A^{-1}(j)=\frac{\mu}{\lambda_j\left(\lambda_j+j\nu\right)},$$

$$G'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j)=\mu^{N-j}\prod_{k=j}^{N-1}\frac{1}{\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right)}.$$

З теореми 2.1 отримаємо такий результат.

Наслідок 2.1. Стаціонарні ймовірності для системи $M_Q/M/1/N$ з повторними викликами мають вигляд

$$\pi_{0j}^{(N)}=\frac{\pi_{0N}^{(N)}N!\left(\nu\mu\right)^{N-j}}{j!}\prod_{k=j}^{N-1}\frac{1}{\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right)},\quad j=0,\ldots,N-1, \qquad (2.19)$$

$$\pi_{1j}^{(N)}=\frac{\pi_{0N}^{(N)}N!\left(\nu\mu\right)^{N-j}}{\lambda_j\mu\, j!}\prod_{k=j+1}^{N-1}\frac{1}{\lambda_k\left(\lambda_k+k\nu\right)},\quad j=0,\ldots,N-1, \qquad (2.20)$$

$$\pi_{1N}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)}\left(N\nu + \lambda_N\right)}{\mu},$$

$$\pi_{0N}^{(N)} = \left(1 + \frac{N!}{\mu}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{(\nu\mu)^{N-j}\left(\mu + \lambda_j + j\nu\right)}{j!}\prod_{k=j}^{N-1}\frac{1}{\lambda_k\left(\lambda_k + k\nu\right)} + \frac{N\nu + \lambda_N}{\mu}\right)^{-1}. \qquad (2.21)$$

Не порушуючи загальності покладемо $\mu = 1$ і нехай $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}\lambda_j < 1$. Позначимо

$$B(N) = \prod_{k=0}^{N-1}\frac{\nu}{\lambda_k\left(\lambda_k + k\nu\right)}.$$

З (2.19)-(2.21) маємо

$$\pi_{0j}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)}N!B(N)}{j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k\left(\lambda_k + k\nu\right), \; j = 0,\dots,N-1, \qquad (2.22)$$

$$\pi_{1j}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)}N!B(N)}{\lambda_j j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j}\lambda_k\left(\lambda_k + k\nu\right), \; j = 0,\dots,N-1, \qquad (2.23)$$

$$\pi_{1N}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)}\left(N\nu + \lambda_N\right)}{\mu},$$

$$\pi_{0N}^{(N)} = \left(1 + N!B(N)\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\left(1 + \lambda_j + j\nu\right)\prod\limits_{k=0}^{j-1}\lambda_k\left(\lambda_k + k\nu\right)}{j!\nu^j} + N\nu + \lambda_N\right)^{-1}. \qquad (2.24)$$

Розглянемо тепер систему $M_Q/M/1/\infty$, в якій черга повторних викликів необмежена. З леми 2.1 випливає, що вона буде мати стаціонарний режим, якщо $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}\lambda_j < 1$. Для того, щоб знайти явний вид стаціонарного розподілу, нам потрібно у формулах наслідку 2.1 перейти до границі при $N \to \infty$.

Покажемо, що при умові $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}\lambda_j < 1$ ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{k=0}^{j-1}\lambda_k\left(\lambda_k + k\nu\right)}{j!\nu^j}$ збігається.

Нехай $q<1$ буде таким, що $\overline{\lim_{j\to\infty}}\lambda_j \le q<1$. Оскільки $\lim_{k\to\infty}\frac{1+k\nu}{k}=\nu$, то завжди можна вибрати таке $\beta>1$, що $q\beta<1$ і $1+k\nu\le q\beta k\nu$ для достатньо великих k. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що остання нерівність виконується для всіх k. Маємо

$$\frac{\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k(\lambda_k+k\nu)}{j!\nu^j}\le\frac{\prod_{k=0}^{j-1}q\beta k\nu}{j!\nu^j}=\frac{(q\beta)^j}{j}.$$

А оскільки ряд $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(q\beta)^j}{j}$ збігається, то потрібне доведено.

Тепер з (2.24) випливає

$$\lim_{N\to\infty}\pi_{0N}^{(N)}N!B(N)=\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1+\lambda_j+j\nu)\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k(\lambda_k+k\nu)}{j!\nu^j}\right)^{-1}=R>0.$$

Тому з (2.22), (2.23) при $N\to\infty$ отримаємо.

Наслідок 2.2. Нехай для $M_Q/M/1/\infty$- системи виконуються умови леми 2.1. Якщо $\lambda_j>0$, $j=0,1,\dots$, то стаціонарні ймовірності мають вид

$$\pi_{0j}=\frac{R}{j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k(\lambda_k+k\nu),\qquad \pi_{1j}=\frac{R}{\lambda_j j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j}\lambda_k(\lambda_k+k\nu),\ j=0,1,\dots,$$

де
$$R=\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1+\lambda_j+j\nu)\prod_{k=0}^{j-1}\lambda_k(\lambda_k+k\nu)}{j!\nu^j}\right)^{-1}.$$

Розглянемо тепер випадок систем $M_Q/M/2/N$ та $M_Q/M/2/\infty$. Знову, не порушуючи загальності, будемо вважати, що $\mu=1$ (ця домовленість еквівалентна нормуванню параметрів системи на “μ” і спрощує формули).

Позначимо

$$A_i(j)=\begin{cases}\prod_{k=i}^{j-1}\dfrac{1+\rho_k+\lambda_{k+1}+(k+1)\nu}{\rho_k[(\lambda_k+k\nu)^2+k\nu]}, & i<j,\\ 1, \quad i=j,\end{cases}$$

де $\rho_k=\dfrac{\lambda_k}{2\mu}=\dfrac{\lambda_k}{2}$ - завантаження системи первинними викликами, коли черга $Q_2(t)=k$.

Наслідок 2.3. Якщо $\lambda_j>0, \quad j=0,1,...,$ то для будь-якого N стаціонарні ймовірності для $M_Q/M/2/N$ - системи з повторними викликами дорівнюють

$$\pi_{0j}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}\frac{N!\nu^{N-j}A_j(N)}{j!}, \quad \pi_{1j}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}\frac{N!\nu^{N-j}(\lambda_j+j\nu)A_j(N)}{j!}, \tag{2.25}$$

$$\pi_{2j}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}\frac{N!\nu^{N-j}(1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)A_{j+1}(N)}{\lambda_j j!}, \quad j=0,1,...,N-1, \tag{2.26}$$

$$\pi_{1N}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}(\lambda_N+N\nu), \qquad \pi_{2N}^{(N)}=\pi_{0N}^{(N)}\frac{(\lambda_N+N\nu)^2+N\nu}{2},$$

$$\pi_{0N}^{(N)}=\Bigg\{1+\lambda_N+N\nu+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}(1+\lambda_j+j\nu)A_j(N)}{j!}+$$

$$+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}(1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)A_{j+1}(N)}{\lambda_j j!}+\frac{1}{2}\left((\lambda_N+N\nu)^2+N\nu\right)\Bigg\}^{-1}.$$

Доведення. Для системи $M_Q/M/2/N$ з повторними викликами при умові $\mu=1$ маємо

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad A(j)=\begin{pmatrix}\lambda_j+j\nu & -\lambda_j\\ -1 & 1+\lambda_j+j\nu\end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\begin{vmatrix} \lambda_j + j\nu & -\lambda_j \\ -1 & 1+\lambda_j + j\nu \end{vmatrix} = (\lambda_j + j\nu)(1+\lambda_j + j\nu) - \lambda_j = (\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu,$$

то

$$A^{-1}(j) = \frac{1}{(\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu} \begin{pmatrix} 1+\lambda_j + j\nu & \lambda_j \\ 1 & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix}$$

і матриця $T(j)$ буде мати вигляд

$$T(j) = \left[B + \frac{2}{\lambda_j} C \right] A^{-1}(j) = \left[B + \rho_j^{-1} C \right] A^{-1}(j) =$$

$$= \frac{1}{\rho_j [(\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu]} \begin{pmatrix} 1+\rho_j & (1+\rho_j)(\lambda_j + j\nu) \\ 1 & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix}, \;\; j = 0,1,\dots,N-1.$$

Нехай

$$D(j) = \begin{pmatrix} 1+\rho_j & (1+\rho_j)(\lambda_j + j\nu) \\ 1 & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix}, \;\; j = 0,1,\dots.$$

Легко переконатись, що для будь-яких $j = 0,1,\dots$ виконується рівність

$$D(j+1)D(j) = \left(1+\rho_j + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu\right) \begin{pmatrix} 1+\rho_{j+1} & (1+\rho_{j+1})(\lambda_j + j\nu) \\ 1 & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що

$$D(m) \times \dots \times D(j+1)D(j) =$$

$$= \prod_{k=j}^{m-1} \left(1+\rho_k + \lambda_{k+1} + (k+1)\nu\right) \begin{pmatrix} 1+\rho_m & (1+\rho_m)(\lambda_j + j\nu) \\ 1 & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix}$$

для $m \geq j$, а тому

$$T(N-1) \times \dots \times T(j+1)T(j) = \frac{1}{1+\rho_{N-1} + \lambda_N + N\nu} \times$$

$$\times \prod_{k=j}^{N-1} \frac{1+\rho_k + \lambda_{k+1} + (k+1)\nu}{\rho_k [(\lambda_k + k\nu)^2 + k\nu]} \begin{pmatrix} 1+\rho_{N\text{-}1} & (1+\rho_{N\text{-}1})(\lambda_j + j\nu) \\ 1 & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{A_j(N)}{1+\rho_{N-1}+\lambda_N+N\nu}\begin{pmatrix} 1+\rho_{N\text{-}1} & (1+\rho_{N\text{-}1})(\lambda_j+j\nu) \\ 1 & \lambda_j+j\nu \end{pmatrix}, \quad j=0,1,\ldots,N-1. \qquad (2.27)$$

З перших двох рівнянь системи (2.9) з попереднього підрозділу маємо

$$\widetilde{G}'(N) = (\widetilde{G}_{0N}, \widetilde{G}_{1N}) = (1, \lambda_N + N\nu).$$

Неважко переконатись, що

$$\widetilde{G}'(N)\begin{pmatrix} 1+\rho_{N\text{-}1} & (1+\rho_{N\text{-}1})(\lambda_j+j\nu) \\ 1 & \lambda_j+j\nu \end{pmatrix} = (1+\rho_{N-1}+\lambda_N+N\nu)(1,\lambda_j+j\nu),$$

тому

$$\widetilde{G}'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j) = A_j(N)(1,\lambda_j+j\nu), \qquad (2.28)$$

$$\tilde{G}_{2j} = \frac{N!\nu^{N-j}}{j!\lambda_j}\tilde{G}'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j+1)\overline{1}(2) =$$

$$= \frac{N!\nu^{N-j}}{j!\lambda_j}A_{j+1}(N)(1,\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)\overline{1}(2). \qquad (2.29)$$

Тепер з формули (2.18) з попереднього підрозділу отримаємо

$$\tilde{\pi}_{0N} = \left\{\tilde{G}'(N)\left(\overline{1}(2) + N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}}{j!}T(N-1)\times\ldots\times T(j+1)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[T(j)\overline{1}(2)+\frac{1}{\lambda_j}\overline{1}(2)\right]+\frac{1}{2}(N\nu\overline{1}(2)+\lambda_N e_2(2))\right)\right\}^{-1} =$$

$$= \left\{(1,\lambda_N+N\nu)\overline{1}(2) + N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}}{j!}\Big(A_j(N)(1,\lambda_j+j\nu)\overline{1}(2)+\right.$$

$$\left.+\frac{A_{j+1}(N)(1,\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)\overline{1}(2)}{\lambda_j}\Big)+\frac{1}{2}\big(1,\lambda_N+N\nu\big)\big(N\nu\overline{1}(2)+\lambda_N e_2(2)\big)\right\}^{-1} =$$

$$= \left\{1+\lambda_N+N\nu+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}A_{j+1}(N)}{j!}\left(\frac{(1+\lambda_j+j\nu)(1+\rho_j+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)}{\rho_j[(\lambda_j+j\nu)^2+j\nu]}+\right.\right.$$

$$+\frac{1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu}{\lambda_j}\Bigg)+\frac{1}{2}\Big((\lambda_N+N\nu)^2+N\nu\Big)\Bigg\}^{-1}=$$

$$=\Bigg\{1+\lambda_N+N\nu+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}(1+\lambda_j+j\nu)A_j(N)}{j!}+$$

$$+N!\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\nu^{N-j}(1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)A_{j+1}(N)}{\lambda_j j!}+\frac{1}{2}\Big((\lambda_N+N\nu)^2+N\nu\Big)\Bigg\}^{-1}.$$

Співвідношення (2.25), (2.26) можуть бути отримані з формул (2.2)-(2.4) теореми 2.1 та (2.28)-(2.29). Наслідок 2.3 доведено.

Розглянемо тепер систему $M_Q/M/2/\infty$. З леми 2.1 випливає, що вона буде мати стаціонарний режим, якщо $\overline{\lim_{j\to\infty}}\lambda_j/2<1$ Для того, щоб знайти явний вид стаціонарного розподілу нам потрібно у формулах наслідку 2.3 перейти до границі при $N\to\infty$. При виконанні умов леми 2.1 і $N\to\infty$ стаціонарні імовірності $\pi_{ij}^{(N)}$ наближають відповідні ймовірності для системи $M_Q/M/2/\infty$. Результати роботи [4] щодо похибки такого наближення можуть бути поширені і на випадок моделей з керованою інтенсивністю вхідного потоку.

Тут нам буде необхідний наступний результат.

Лема 2.2. Нехай $\overline{\lim_{j\to\infty}}\lambda_j/2<1$. Тоді

$$\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{1+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^i A_j(i)}=\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{1+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^i}\prod_{k=j}^{i-1}\frac{\rho_k[(\lambda_k+k\nu)^2+k\nu]}{1+\rho_k+\lambda_{k+1}+(k+1)\nu}<\infty \qquad (2.30)$$

для довільного $j=1,2,\dots$.

Доведення. В наших умовах існує таке $\rho < 1$, що $\rho_k \le \rho$. Для довільного k маємо

$$\frac{\rho_k \left\lfloor (\lambda_k + k\nu)^2 + k\nu \right\rfloor}{1 + \rho_k + \lambda_{k+1} + (k+1)\nu} < \frac{\rho \left\lfloor (2 + k\nu)^2 + k\nu \right\rfloor}{(k+1)\nu} = \rho k\nu \frac{k\nu + 5 + 4/k\nu}{(k+1)\nu}. \qquad (2.31)$$

Оскільки $\frac{k\nu + 5 + 4/k\nu}{(k+1)\nu} \to 1$ якщо $k \to \infty$, то з (2.31) випливає, що знайдеться таке $\widehat{\rho} < 1$, що

$$\frac{\rho_k \left\lfloor (\lambda_k + k\nu)^2 + k\nu \right\rfloor}{1 + \rho_k + \lambda_{k+1} + (k+1)\nu} \le \widehat{\rho} k\nu$$

для всіх достатньо великих k. А тому ряд у лівій частині (2.30) буде збігатись, якщо буде збігатись наступний ряд

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1 + \lambda_i + i\nu}{i!\nu^i} \prod_{k=j}^{i-1} \widehat{\rho} k\nu .$$

Останній ряд можна переписати так

$$\frac{1}{(j-1)!(\widehat{\rho}\nu)^j} \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{(1 + \lambda_i + i\nu)\widehat{\rho}^i}{i},$$

і він, очевидно, збігається. Лему 2.2 доведено.

Неважко показати, що

$$R_j \equiv \lim_{N \to \infty} \pi_{0N}^{(N)} N! \nu^N A_j(N) = \left\{ \sum_{i=0}^{j} \frac{(1 + \lambda_i + i\nu) A_i(j)}{i!\nu^i} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1 + \lambda_i + i\nu}{i!\nu^i A_j(i)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(1 + \lambda_{i+1} + (i+1)\nu) A_{i+1}(j)}{\lambda_i i! \nu^i} + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1 + \lambda_{i+1} + (i+1)\nu}{\lambda_i i! \nu^i A_j(i+1)} \right\}^{-1} . \qquad (2.32)$$

Дійсно, використовуючи вираз для $\pi_{0N}^{(N)}$ з наслідку 2.3, маємо

$$\lim_{N \to \infty} \pi_{0N}^{(N)} N! \nu^N A_j(N) = \left\{ \lim_{N \to \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(1 + \lambda_i + i\nu) A_i(N)}{i!\nu^i A_j(N)} + \right.$$

$$+\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(1+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(N)}{\lambda_i i!\nu^i A_j(N)}\Bigg\}^{-1}. \qquad (2.33)$$

Легко переконатись, що коли $i, j < N$, то

$$\frac{A_i(N)}{A_j(N)}=\begin{cases} A_i(j) & \text{якщо} \quad i<j, \\ A_i(i)=1 & \text{якщо} \quad i=j, \\ A_j^{-1}(i) & \text{якщо} \quad i>j. \end{cases}$$

Тому

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(1+\lambda_i+i\nu)A_i(N)}{i!\nu^i A_j(N)}=\sum_{i=0}^{j}\frac{(1+\lambda_i+i\nu)A_i(j)}{i!\nu^i}+\lim_{N\to\infty}\sum_{i=j+1}^{N}\frac{1+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^i A_j(i)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{j}\frac{(1+\lambda_i+i\nu)A_i(j)}{i!\nu^i}+\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{1+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^i A_j(i)}.$$

Аналогічно можна показати, що

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(1+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(N)}{\lambda_i i!\nu^i A_j(N)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{j-1}\frac{(1+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(j)}{\lambda_i i!\nu^i}+\sum_{i=j}^{\infty}\frac{1+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu}{\lambda_i i!\nu^i A_j(i+1)}.$$

З цих співвідношень та (2.33) випливає (2.32).

З (2.32) та наслідку 2.3 маємо такий результат.

Наслідок 2.4. Нехай для $M_Q/M/2/\infty$- системи виконуються умови леми 2.1. Якщо $\lambda_j>0,\ j=0,1,...,$ то стаціонарні ймовірності мають вид

$$\pi_{0j}=\frac{R_j}{j!\nu^j}, \qquad \pi_{1j}=\frac{(\lambda_j+j\nu)R_j}{j!\nu^j},$$

$$\pi_{2j}=\frac{(1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)R_j}{\lambda_j j!\nu^j}\times\frac{\rho_j[(\lambda_j+j\nu)^2+j\nu]}{1+\rho_j+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu}, \quad j=0,1,...,$$

де

$$R_j = \left\{ \sum_{i=0}^{j} \frac{(1+\lambda_i + i\nu)A_i(j)}{i!\nu^i} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1+\lambda_i + i\nu}{i!\nu^i A_j(i)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(1+\lambda_{i+1} + (i+1)\nu)A_{i+1}(j)}{\lambda_i i!\nu^i} + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1+\lambda_{i+1} + (i+1)\nu}{\lambda_i i!\nu^i A_j(i+1)} \right\}^{-1} .$$

2.4. Приклади розрахунків стаціонарного розподілу

Перейдемо тепер до розрахунків стаціонарного розподілу для конкретних систем. Всі обчислення виконуються в пакеті MATHEMATICA. Параметри системи будемо вибирати так, щоб при відсутності обмежень на довжину черги повторних викликів існував стаціонарний режим. Обмежимось випадком $m = 2$. Для спрощення вважаємо, що інтенсивність обслуговування $\mu = 1$, що, як вказувалося раніше, не обмежує загальності.

Приклад 2.1. Розглянемо систему $M_Q / M / 2 / 20$.
Нехай $\nu = 0{,}1,\ \lambda_j = 1{,}1$.

Спочатку наведемо числові значення стаціонарного розподілу і їх графіки , а потім як цей розподіл виглядає на спільній діаграмі.

0.00734806, 0.0177823, 0.0264239, 0.0310369, 0.031622, 0.0292629, 0.0252561, 0.0206734, 0.0162316, 0.0123223, 0.00909825, 0.00656287, 0.00464089, 0.00322603, 0.00220929, 0.00149327, 0.000997633, 0.000659625, 0.000432092, 0.000280672, 0.00018093

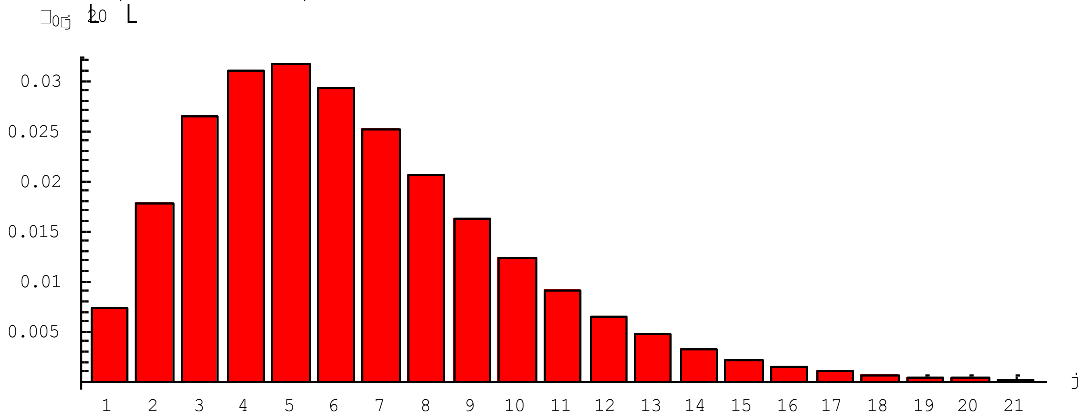


Рис. 2.3 Стаціонарні ймовірності $\pi_{0j}(20)$

0.00808286, 0.0213388, 0.034351, 0.0434516, 0.047433, 0.0468206, 0.0429354, 0.0372121, 0.0308401, 0.0246446, 0.0191063, 0.0144383, 0.010674, 0.00774247, 0.00552322, 0.00388249, 0.00269361, 0.00184695, 0.00125307, 0.000842016, 0.00056087

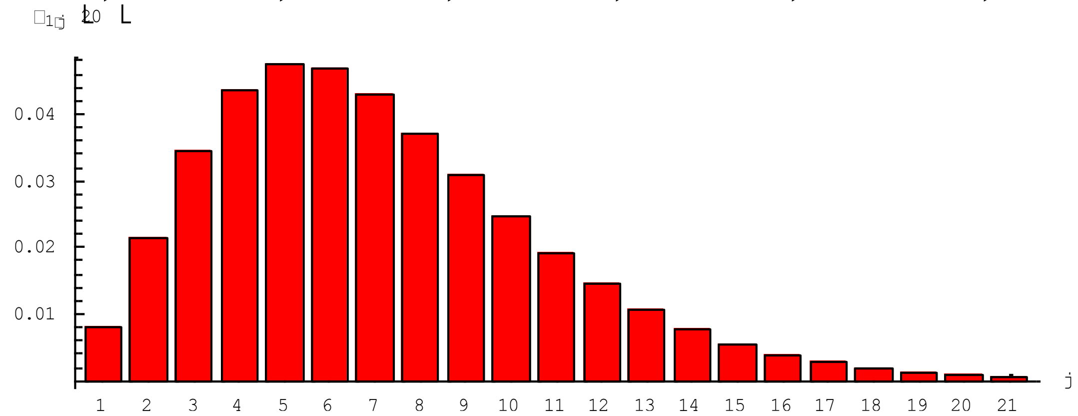


Рис. 2.4 Стаціонарні ймовірності $\pi_{1j}(20)$

0.00355646, 0.01105, 0.020315, 0.0287473, 0.0345834, 0.0371954, 0.0368362, 0.0342339, 0.0302457, 0.0256405, 0.0210012, 0.0167072, 0.0129628, 0.00984138, 0.00733058, 0.00536908, 0.0038738, 0.00275753, 0.00193919, 0.00134874, 0.00105029

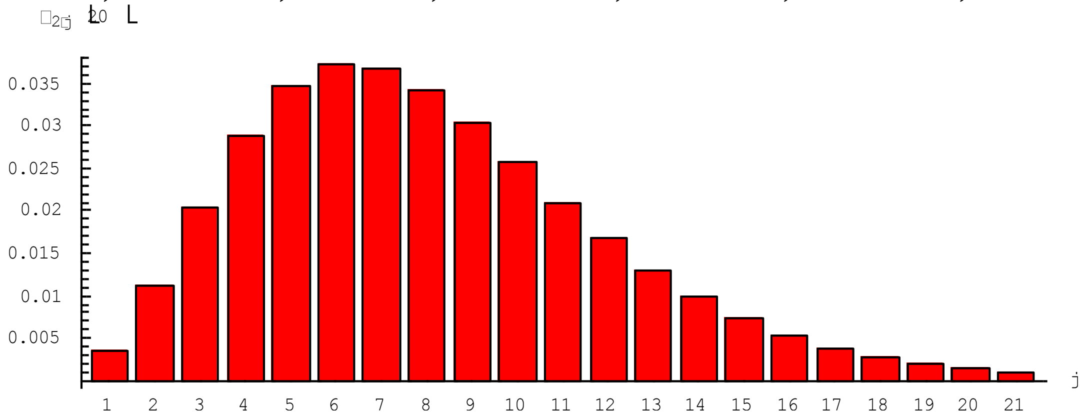
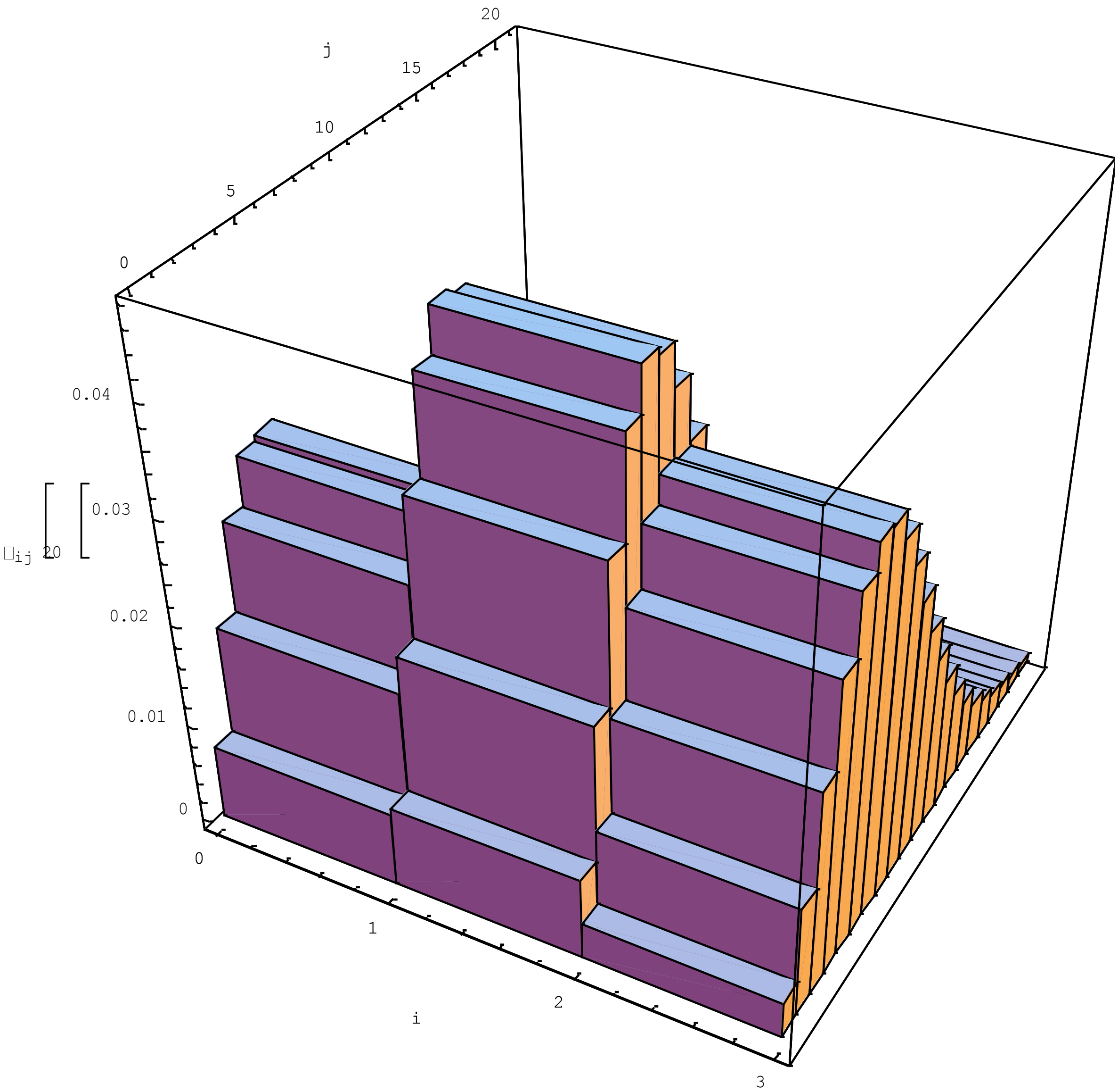


Рис. 2.5 Стаціонарні ймовірності $\pi_{2j}(20)$


j
0
5
10
15
20
0.04
0.03
0.02
0.01
0
i
0
1
2
3

2.5. Порогові стратегії та оптимізаційні задачі

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделях типу $M_Q/M/m/\infty$ дає можливість ставити і розв'язувати для них оптимізаційні задачі різного типу. В цьому параграфі ми розглянемо так звані порогові стратегії. Спочатку опишемо загальну постановку задачі, а потім конкретизуємо її для випадку одного порогу. В цій ситуації, використовуючи результати попередніх підрозділів, нам вдалося не лише записати замкнуту формулу для цільового функціоналу, а й довести справу до програмної реалізації в пакеті MATHEMATICA.

Розглянемо клас багатопорогових стратегій, які задаються порогами $0 = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_{N-1} < H_N = \infty,\ H' = (H_1, H_2, \ldots, H_{N-1}),\quad N$ - фіксоване число. Якщо в момент часу $t \ge 0$ число джерел повторних викликів $Q_2(t) \in [H_{i-1}, H_i),\ i = 1, \ldots, N$, то будемо казати, що система з повторними викликами функціонує в *i*-ому режимі і інтенсивність вхідного потоку дорівнює g_i. Інші параметри від режиму не залежать. Вибір порогової стратегії H означає фіксацію залежності λ_j від числа джерел повторних викликів: $\lambda_j = g_i,\ \ j \in [H_{i-1}, H_i),\ i = 1, \ldots, N$.

Відповідний процес обслуговування і його характеристики будемо наділяти індексом $H,\ Q(t) = Q(t, H), \ldots$.

Нехай $S_1(t, H)$ - число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t; $S_2(t, H)$ - число викликів, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами; $S_3(t, H)$ - число перемикань інтенсивності вхідного потоку. Якщо існують границі $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1} S_i(t, H)$, то будемо позначати їх через $S_i(H),\ i = 1, 2, 3$.

Розглянемо оптимізаційну задачу

$$W(H) = C_1 S_1(H) - C_2 S_2(H) - C_3 S_3(H) \to \max, \tag{2.34}$$

$$0 = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_{N-1} < H_N = \infty,\ H_i \in \{0,1,\ldots\},\ i = 1,2,\ldots,N-1,$$

де C_1 - прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику;

C_2 - штраф за відмову в обслуговуванні;

C_3 - штраф за перемикання інтенсивності вхідного потоку.

Розв'язком задачі (2.34) є така багатопорогова стратегія H, яка максимізує середній прибуток від роботи системи. Подібні оптимізаційні задачі для одноканальних систем з повторними викликами в сучасних умовах є досить актуальним.

В умовах існування стаціонарного режиму (умови леми 2.1) граничні функціонали $S_i(H),\quad i = 1,2,3$, теж існують і можуть бути виписані через стаціонарні імовірності $\pi_{ij},\quad (i,j) \in I \times J$,

$$S_1(H) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} i\mu\,\pi_{ij}(H),\quad S_2(H) = \sum_{i=1}^{N} g_i \sum_{j=H_{i-1}}^{H_i-1} \pi_{mj}(H), \tag{2.35}$$

$$S_3(H) = \sum_{i=1}^{N-1}\left(g_i \pi_{mH_i-1}(H) + \nu H_i \sum_{k=0}^{m-1} \pi_{kH_i} \right). \tag{2.36}$$

Таким чином, для розв'язку задачі (2.34) необхідні ефективні алгоритми розрахунку стаціонарного розподілу для системи $M_Q/M/m/\infty$. Такі алгоритми були отримані в попередніх підрозділах.

Розглянемо на конкретних прикладах порогову стратегію, коли зміна інтенсивності вхідного потоку пов'язана з пересуванням одного порогу $H_1 = H$. Тоді для інтенсивності вхідного потоку маємо

$$\lambda_j = \begin{cases} g_1, & 0 \le j < H, \\ g_2, & j \ge H. \end{cases}$$

Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що $\mu = 1$. Оскільки системи з обмеженою чергою апроксимують необмежені системи, то ми сконцентруємо увагу на системах першого типу. Будемо вважати, що число повторних викликів обмежено деяким числом $N < \infty$.

В умовах існування стаціонарного режиму граничні функціонали $S_i\left(H\right),\ i=1,2,3$ з (2.35), (2.36) можуть бути виписані через стаціонарні ймовірності наступним чином

$$S_1\left(H\right)=\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} i\,\pi_{ij}\ , \qquad S_2\left(H\right)=g_1\sum_{j=0}^{H-1}\pi_{mj}+g_2\sum_{j=H}^{N}\pi_{mj}\ ,$$

$$S_3\left(H\right)=g_1\pi_{mH-1}+H\nu\sum_{i=0}^{m-1}\pi_{iH}\ .$$

Тоді цільова функція буде мати вигляд

$$W(H)=C_1\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} i\,\pi_{ij}-C_2\left(g_1\sum_{j=0}^{H-1}\pi_{mj}+g_2\sum_{j=H}^{N}\pi_{mj}\right)-$$

$$-C_3\left(g_1\pi_{mH-1}+H\nu\sum_{i=0}^{m-1}\pi_{iH}\right). \qquad (2.37)$$

В цих формулах для зручності ми не будемо відображати залежність стаціонарного розподілу від N.

Розглянемо тепер наступні випадки.

1**)** Система $M_Q/M/1/N$**.**

У цьому випадку цільовий функціонал з (2.37) буде мати вигляд (для зручності ми не будемо писати індекс N в позначеннях для стаціонарного розподілу)

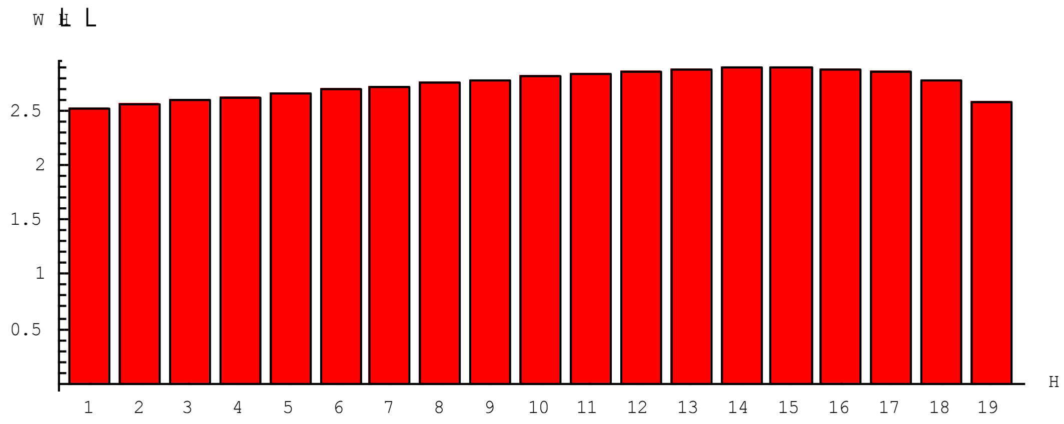
$$W(H)=C_1\sum_{j=0}^{N}\pi_{1j}-C_2\left(g_1\sum_{j=0}^{H-1}\pi_{1j}+g_2\sum_{j=H}^{N}\pi_{1j}\right)-C_3\left(g_1\pi_{1H-1}+H\nu\pi_{0H}\right),$$

де формули для стаціонарного розподілу були отримані в підрозділі 2.3 (формули (2.19)-(2.21)).

Приклад 2.3. Нехай параметри системи $M_Q/M/1/20$ будуть такими: $g_1=1,2,\ g_2=1/2,\ \mu=1,\ \nu=0,1,$

а коефіцієнти вартості: $C_1=6,\ C_2=2,\ C_3=1$.

Програма, написана на основі наведених вище формул та алгоритмів, дозволила отримати наступний графік для цільового функціоналу



Максимальне значення цільової функції є наступним 2,89265 і досягається воно при значені порога *H*=15.

2) Система $M/M/2/N$. Тоді цільова функція буде мати вигляд

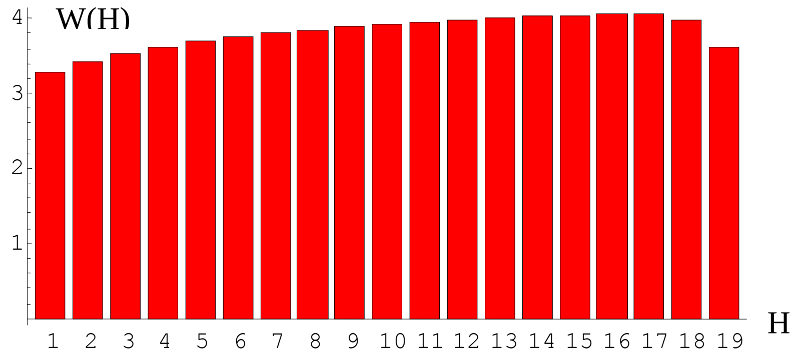
$$W(H) = C_1 \sum_{j=0}^{N} (\pi_{1j} + 2\pi_{2j}) - C_2 \left(g_1 \sum_{j=0}^{H-1} \pi_{2j} + g_2 \sum_{j=H}^{N} \pi_{2j} \right) -$$
$$-C_3 \left(g_1 \pi_{2H-1} + H\nu(\pi_{0H} + \pi_{1H}) \right),$$

де формули для стаціонарного розподілу були отримані в підрозділі 2.3 (формули (2.25)-(2.26)).

Приклад 2.4. Розглянемо випадок керування системою $M_Q/M/2/20$. Параметри системи дорівнюють $g_1 = 2{,}5$; $g_2 = 0{,}5$; $\mu = 1$; $\nu = 0{,}1$, а коефіцієнти вартості: $C_1 = 6$, $C_2 = 2$, $C_3 = 4$.

Підрахунок дає наступні значення:

$W(1) = 3.29487; W(2) = 3.42729; W(3) = 3.53285; W(4) = 3.61861;$
$W(5) = 3.68956; W(6) = 3.74924; W(7) = 3.80022; W(8) = 3.84437;$
$W(9) = 3.88309; W(10) = 3.91744; W(11) = 3.94823; W(12) = 3.97605;$
$W(13) = 4.00132; W(14) = 4.02418; W(15) = 4.04396; W(16) = 4.05742;$
$W(17) = 4.05189; W(18) = 3.97815; W(19) = 3.61672$.

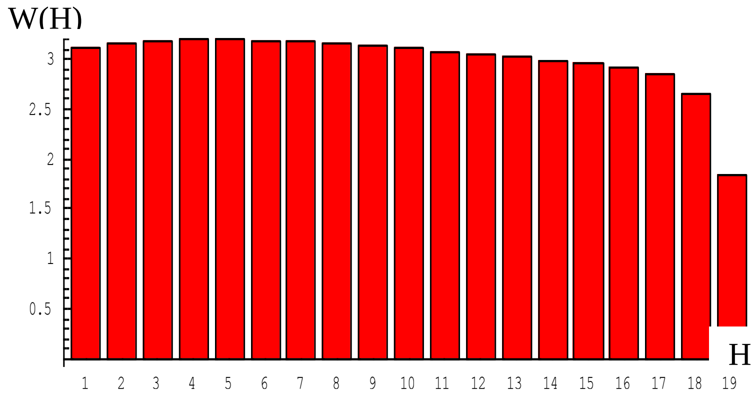


Отже, для $H = 16$ значення цільової функції буде максимальним і буде становити 4,05742.

Приклад 2.5. Розглянемо інший приклад. Параметри системи дорівнюють $N = 20,\ g_1 = 4;\ g_2 = 0,5;\ \mu = 1;\ \nu = 0,1$, а коефіцієнти вартості: $C_1 = 6,\ C_2 = 2,\ C_3 = 4$.

Графік показує значення цільової функції, а далі наведено її числові значення.

$W(1) = 3.10832;\ W(2) = 3.1579;\ W(3) = 3.18552;\ W(4) = 3.19712;$
$W(5) = 3.19702;\ W(6) = 3.18834;\ W(7) = 3.17337;\ W(8) = 3.15382;$
$W(9) = 3.13095;\ W(10) = 3.10571;\ W(11) = 3.07882;\ W(12) = 3.05079;$
$W(13) = 3.02192;\ W(14) = 2.99205;\ W(15) = 2.95971;\ W(16) = 2.91864;$
$W(17) = 2.84471;\ W(18) = 2.64105;\ W(19) = 1.83259$.



Тепер максимальне значення цільової функції буде для $H = 4$ буде наступним 3,19712.

3. Гістерезисні стратегії керування

3.1. Математична модель

В даному розділі розглядається система обслуговування типу $M_Q / M / m / \infty$ з повторними викликами, яка складається з "m" обслуговуючих приладів, які працюють незалежно. Час обслуговування має показниковий розподіл з параметром μ. На вхід обслуговуючого пристрою надходить пуассонівський потік вимог. Інтенсивність λ_j вхідного потоку залежить від числа j - джерел повторних викликів. Кожний повторний виклик через показниковий час з параметром ν повторює спробу потрапити на обслуговування. Отже, можемо вважати, що по відношенню до обслуговуючого пристрою всі вимоги діляться на дві групи: первинні та вторинні.

Модель, яка розглядається в цьому розділі відрізняється від моделі з попереднього розділу іншим алгоритмом керування роботою системи. Тепер він визначається на основі гістерезисної стратегії, яку можна описати наступним чином. Нехай $h_1 \le h_2$ будуть два натуральні числа, які ми будемо називати порогами. Якщо кількість повторних викликів $j \le h_1 - 1$, то система буде працювати в першому режимі і інтенсивність вхідного потоку дорівнює λ_1. Якщо $j \ge h_2$, то в другому режимі з інтенсивністю вхідного потоку λ_2. А якщо $h_1 \le j < h_2$, то система зберігає той режим, в якому вона працювала в попередній момент часу. Клас порогових стратегій є підмножиною класу гістерезисних стратегій, який можна отримати при $h_1 = h_2$. Такі системи розглядалися у попередньому розділі.

Процес обслуговування будемо моделювати тривимірним процесом Маркова $Q(t)=\left(Q_1(t),Q_2(t),Q_3(t)\right)$ з неперервним часом у фазовому просторі $S=S^{(1)}\cup S^{(2)},\ S^{(1)}\cap S^{(2)}=\varnothing,$

де

$$S^{(1)}=\left\{(i,j,1):i=0,1,\dots,m,\ j=0,1,\dots,h_2-1\right\},$$

$$S^{(2)}=\left\{(i,j,2):i=0,1,\dots,m,\ j=h_1,\dots\right\}.$$

$Q_1(t)$ – число зайнятих приладів у момент часу t, $Q_2(t)$ – число джерел повторних вимог, $Q_3(t)$ - режим роботи системи в момент часу t. Якщо $Q_3(t)=1$, то система працює в першому режимі, якщо $Q_3(t)=2$, то система працює у другому режимі. Інфінітезимальні характеристики $q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')}$ процесу $Q(t)$ визначаються наступним чином:

1) якщо

$\left(i=0,\dots,m-1,\ j=0,1,\dots,h_2-1,\ r=1\right)\vee\left(i=0,\dots,m-1,\ j=h_1+1,\dots,\ r=2\right)$, то

$$q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')}=\begin{cases}\lambda_r,\ \textit{при}\ (i',j',r')=(i+1,j,r),\\ i\mu,\ \textit{при}\ (i',j',r')=(i-1,j,r),\\ j\nu,\ \textit{при}\ (i',j',r')=(i+1,j-1,r),\\ -\left(\lambda_r+i\mu+j\nu\right),\ \textit{при}\ (i',j',r')=(i,j,r),\\ \qquad 0,\ \textit{в інших випадках};\end{cases}$$

2) якщо $\left(i=m,\ j=0,1,\dots,h_2-2,\ r=1\right)\vee\left(i=m,\ j=h_1+2,\dots,\ r=2\right)$, то

$$q_{(m,j,r)}^{(i',j',r')}=\begin{cases}\lambda_r,\ \textit{при}\ (i',j',r')=(m,j+1,r),\\ m\mu,\ \ \textit{при}\ (i',j',r')=(m-1,j,r),\\ -\left(\lambda_r+m\mu\right),\ \textit{при}\ (i',j',r')=(m,j,r),\\ 0,\ \textit{в інших випадках};\end{cases}$$

3) якщо $i=m,\ j=h_2-1,\ r=1$, то

$$q_{(m,h_2-1,1)}^{(i',j',r')} = \begin{cases} \lambda_1, \quad при \ (i',j',r') = (m,h_2,2), \\ m\mu, \quad при \ (i',j',r') = (m-1,h_2-1,1), \\ -(\lambda_1 + m\mu), \ при \ (i',j',r') = (m,h_2-1,1), \\ 0, \ в \ інших \ випадках; \end{cases}$$

4) якщо $i = 0,...,m-1, \ j = h_1, \ r = 2$, то

$$q_{(i,h_1,2)}^{(i',j',r')} = \begin{cases} \lambda_2, \ при \ (i',j',r') = (i+1,h_1,2), \\ i\mu, \ при \ (i',j',r') = (i-1,h_1,2), \\ h_1\nu, \ при \ (i',j',r') = (i+1,h_1-1,1), \\ -(\lambda_r + i\mu + j\nu), \ при \ (i',j',r') = (i,j,r), \\ \quad 0, \ в \ інших \ випадках. \end{cases}$$

3.2. Умови існування та явні формули для стаціонарного розподілу

З'ясуємо умови існування стаціонарного режиму для процесу $Q(t), \ t \geq 0$.

Лема 3.1. При $\frac{\lambda_2}{m\mu} < 1$ для процесу $Q(t)$ існує ергодичний розподіл і він збігається з єдиним стаціонарним.

Доведення. Доведення цієї леми базується на застосуванні теореми Твіді ([2], ст. 97), якщо в якості тест-функції Ляпунова взяти функції системи:

$$\phi(i,j,r) = ai + j + r, \quad (i,j,r) \in S,$$

де параметр "a" буде визначено пізніше.

Якщо ми покажемо, що параметр "a" можна вибрати так, щоб середній перенос для цих функцій, який визначається за формулою

$$y_{ijr} = \sum_{(i',j',r') \neq (i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} \left(\phi(i',j',r') - \phi(i,j,r) \right),$$

буде рівномірно менше нуля відносно (i,j,r), за винятком скінченної кількості точок (i,j,r), то з цього буде випливати наша лема.

Якщо врахувати співвідношення для інтенсивностей переходів, які записані вище, то нам достатньо обмежитись випадками 1) та 2), оскільки в решті випадків число точок (i, j, r) є скінченним.

Розглянемо випадок 1). Маємо

$$y_{ijr} = \sum_{(i',j',r') \neq (i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} \left(a(i'-i) + j' - j + r' - r\right) = a\left(\lambda_2 - i\mu\right) + j\nu\left(a-1\right),$$

$$i = 0,...m-1, \;\; j = h_1 + 1,..., \;\; r = 2.$$

Аналогічно у випадку 2) маємо

$$y_{ijr} = \sum_{(i',j',r') \neq (i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} \left(a(i'-i) + j' - j + r' - r\right) = \lambda_2 - am\mu,$$

$$i = 0,1,...,m-1, \;\; j = h_1 + 2,..., \;\; r = 2.$$

Оскільки за умовою леми 3.1 $\frac{\lambda_2}{m\mu} < 1$, то для будь-якого $a \in \left(\frac{\lambda_2}{m\mu}, 1\right)$ можна знайти таке $\varepsilon > 0$, що $y_{ijr} < -\varepsilon$ для всіх точок (i, j, r) за винятком скінченної їх кількості. Таким чином при $a \in \left(\frac{\lambda_2}{m\mu}, 1\right)$ виконуються умови теореми Твіді. Лему 3.1 доведено.

Як і в розділі 2 спочатку знайдемо стаціонарний розподіл для системи, в якій довжина черги повторних викликів обмежена числом $N < \infty$ (при умові, що всі N місць зайнято, виклик губиться і не отримує обслуговування в системі). Потім в умовах леми 3.1 перейдемо до границі при $N \to \infty$, якщо це буде можливим, і отримаємо цей розподіл без обмежень на довжину черги.

Для $M_Q / M / m / N$ стаціонарний розподіл завжди існує і будемо позначати його $\pi_{ij}^{(r)}\left(N\right) = \lim_{t \to \infty} P\left(Q_1\left(t\right) = i, Q_2\left(t\right) = j, Q_3\left(t\right) = r\right)$.

Перехідні ймовірності нашої системи співпадають з наведеними вище, крім випадку $i = m, \; j = N, r = 2$

$$q_{(m,N,2)}^{(i',j',r')}(N)=\begin{cases} m\mu, \quad \textit{при}\ (i',j',r')=(m-1,N,2), \\ -m\mu, \quad \textit{при}\ (i',j',r')=(m,N,2), \\ 0, \quad \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

Процес $Q(t,N)$ набуває значення в скінченній множині станів $S(N)$, і є ергодичним. Знайдемо його стаціонарний розподіл

$$\pi_{ij}^{(r)}(N),\ (i,j,r)\in S(N).$$

Введемо наступні позначення:

$$\pi_j^{(r)}(N)=\left(\pi_{0j}^{(r)}(N),...,\pi_{m-1j}^{(r)}(N)\right)^T, \quad E=\left\|\delta_{ij}\right\|_{i,j=0}^{m-1} - \text{ одинична матриця.}$$

Нехай $A_{rj}=\left\|a_{ik}^j(r)\right\|_{i,k=0}^{m-1}$, $j=0,1,...,N-1$ - тридіагональна матриця вигляду

$$a_{ik}^j(r)=\begin{cases} \lambda_r+i\mu+j\nu,\ k=i, i=0,1,...,m-1, \\ -\lambda_r,\ k=i-1, i=0,1,...,m-1, \\ -(i+1)\mu,\ k=i+1, i=1,2,...,m-2, \\ 0,\ \textit{в інших випадках,} \end{cases}$$

$B_{rj}=\left\|b_{ik}^j(r)\right\|_{i,k=0}^{m-1}$ має вигляд

$$b_{ik}^j(r)=\begin{cases} (j+1)\nu,\ k=i-1, i\neq m-1 \\ \dfrac{(j+1)\nu m\mu}{\lambda_r},\ k\neq m-2, i=m-1 \\ \dfrac{(j+1)\nu(\lambda_r+m\mu)}{\lambda_r},\ k=m-2, i=m-1, \\ 0,\ \textit{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$C_{rj}=\left\|c_{ik}^j(r)\right\|_{i,k=0}^{m-1}, \quad c_{ik}^j(r)=\begin{cases} \dfrac{h_1\nu m\mu}{\lambda_r},\ i=m-1, \\ 0,\ \textit{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$D=\left\|d_{ik}\right\|_{i,k=0}^{m-1}, \quad d_{ik}=\begin{cases} 1,\ k=0, i=0, \\ a_{i-1k}^N(2),\ \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$\Delta_{1j}^{(1)} = \left(\prod_{i=j}^{h_1-1} A_{1i}^{-1} B_{1i}\right)\left(\left[\left(\prod_{i=h_1}^{h_2-2} A_{1i}^{-1} B_{1i}\right) A_{1h_2-1}^{-1} C_{1h_2-1} + \sum_{k=h_1}^{h_2-2}\left(\prod_{i=h_1}^{k-1} A_{1i}^{-1} B_{1i}\right) A_{1k}^{-1} C_{1k}\right] + E\right) \times$$

$$\times \left[E + \sum_{k=h_1}^{h_2-1}\left(\prod_{i=h_1}^{k-1} A_{2i}^{-1} B_{2i}\right) A_{2k}^{-1} C_{2k}\right]^{-1} \left(\prod_{i=h_1}^{N-1} A_{2i}^{-1} B_{2i}\right) D^{-1} e_0(m), \;\; j = 0,1,\dots,h_1 - 1,$$

$$\Delta_{2j}^{(1)} = \left[\left(\prod_{i=j}^{h_2-2} A_{1i}^{-1} B_{1i}\right) A_{1h_2-1}^{-1} C_{1h_2-1} + \sum_{k=j}^{h_2-2}\left(\prod_{i=j}^{k-1} A_{1i}^{-1} B_{1i}\right) A_{1k}^{-1} C_{1k}\right] \times$$

$$\times \left[E + \sum_{k=h_1}^{h_2-1}\left(\prod_{i=h_1}^{k-1} A_{2i}^{-1} B_{2i}\right) A_{2k}^{-1} C_{2k}\right]^{-1} \left(\prod_{i=h_1}^{N-1} A_{2i}^{-1} B_{2i}\right) D^{-1} e_0(m), \;\; j = h_1,\dots,h_2 - 1,$$

$$\Delta_{1j}^{(2)} = \left(E - \left[\sum_{k=j}^{h_2-1}\left(\prod_{i=j}^{k-1} A_{2i}^{-1} B_{2i}\right) A_{2k}^{-1} C_{2k}\right]\left[E + \sum_{k=h_1}^{h_2-1}\left(\prod_{i=h_1}^{k-1} A_{2i}^{-1} B_{2i}\right) A_{2k}^{-1} C_{2k}\right]^{-1}\right) \times$$

$$\times \left(\prod_{i=j}^{N-1} A_{2i}^{-1} B_{2i}\right) D^{-1} e_0(m), \;\; j = h_1,\dots,h_2 - 1,$$

$$\Delta_{2j}^{(2)} = \left(\prod_{i=j}^{N-1} A_{2i}^{-1} B_{2i}\right) D^{-1} e_0(m), \;\; j = h_2,\dots,N-1 .$$

$$\Delta_j^{(1)} = \begin{cases} \Delta_{1j}^{(1)}, 0 \le j \le h_1 - 1, \\ \Delta_{2j}^{(1)}, h_1 \le j \le h_2 - 1, \end{cases} \qquad \Delta_j^{(2)} = \begin{cases} \Delta_{1j}^{(2)}, h_1 \le j \le h_2 - 1, \\ \Delta_{2j}^{(2)}, h_2 \le j \le N - 1, \end{cases}$$

$$\gamma_1(j) = \begin{cases} 1, \;\; j > h_1 - 2, \\ 0, \;\; j \le h_1 - 2, \end{cases} \qquad \gamma_2(j) = \begin{cases} 1, \;\; j < h_2, \\ 0, \;\; j \ge h_2. \end{cases}$$

Теорема 3.1. Якщо $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, то для довільного $N \ge 1$ справедливі наступні формули для стаціонарних імовірностей

$$\pi_j^{(1)}(N) = \Delta_j^{(1)} \pi_{0N}^{(2)}(N), \;\; j = 0,\dots,h_2 - 1,$$

$$\pi_j^{(2)}(N) = \Delta_j^{(2)} \pi_{0N}^{(2)}(N), \;\; j = h_1,\dots,N - 1,$$

$$\pi_N^{(2)}(N) = D^{-1} e_0(m) \pi_{0N}^{(2)}(N),$$

$$\pi_{mj}^{(1)}(N) = \frac{\nu}{\lambda_1} \overline{1}(m)' \left((j+1)\Delta_{j+1}^{(1)} + \gamma_1(j) h_1 \Delta_{h_1}^{(2)}\right) \pi_{0N}^{(2)}(N), \;\; j = 0,\dots,h_2 - 1,$$

$$\pi_{mj}^{(2)}(N)=\frac{\nu}{\lambda_2}\bar{1}(m)'\left((j+1)\Delta_{j+1}^{(2)}-\gamma_2(j)h_1\Delta_{h_1}^{(2)}\right)\pi_{0N}^{(2)}(N),\quad j=h_1,...,N-1,$$

$$\pi_{mN}^{(2)}(N)=\frac{\left(\lambda_2+N\nu+(m-1)\mu\right)e_{m-1}(m)'-\lambda_2 e_{m-2}(m)'}{m\mu}\times D^{-1}e_0(m)\pi_{0N}^{(2)}(N),$$

$$\pi_{0N}^{(2)}(N)=\left\{\sum_{j=0}^{h_2-1}\frac{\bar{1}(m)'\Delta_j^{(1)}\lambda_1+\nu\bar{1}(m)'\left((j+1)\Delta_{j+1}^{(1)}+\gamma_1(j)h_1\Delta_{h_1}^{(2)}\right)}{\lambda_1}+\right.$$

$$+\sum_{j=h_1}^{N-1}\frac{\bar{1}(m)'\Delta_j^{(2)}\lambda_2+\nu\bar{1}(m)'\left((j+1)\Delta_{j+1}^{(2)}-\gamma_2(j)h_1\Delta_{h_1}^{(2)}\right)}{\lambda_2}+$$

$$\left.+\frac{\bar{1}(m)'m\mu+\left(\lambda_2+N\nu+(m-1)\mu\right)e_{m-1}(m)'-\lambda_2 e_{m-2}(m)'}{m\mu}D^{-1}e_0(m)\right\}^{-1}.$$

Доведення. Для зручності позначимо $\pi_{ij}^{(r)}(N)=\bar{\pi}_{ij}^{(r)}$. Запишемо рівняння для стаціонарних імовірностей системи, використовуючи теорему про рівність потоків імовірностей через замкнений контур ([3], ст.49).

Для кожного $j=0,1,...,h_2-1$ розіб'ємо $S(N)=S_j^{(1)}(N)\cup\bar{S}_j^{(1)}(N)$ на дві підмножини $S_j^{(1)}(N)=\left\{(\alpha,\beta,1)\in S(N):\beta\le j\right\}$ та $\bar{S}_j^{(1)}(N)=S(N)\setminus S_j^{(1)}(N)$. Маємо рівняння:

$$\lambda_1\bar{\pi}_{mj}^{(1)}=(j+1)\nu\sum_{i=0}^{m-1}\bar{\pi}_{ij+1}^{(1)},\ \ j=0,...,h_1-2, \tag{3.1}$$

$$\lambda_1\bar{\pi}_{mj}^{(1)}=(j+1)\nu\sum_{i=0}^{m-1}\bar{\pi}_{ij+1}^{(1)}+h_1\nu\sum_{i=0}^{m-1}\bar{\pi}_{ih_1}^{(2)},\quad j=h_1-1,...,h_2-2, \tag{3.2}$$

$$\lambda_1\bar{\pi}_{mh_2-1}^{(1)}=h_1\nu\sum_{i=0}^{m-1}\bar{\pi}_{ih_1}^{(2)},\quad j=h_2-1.$$

Для $j = h_1,...,N-1$ розіб'ємо $S(N) = S_j^{(2)}(N) \cup \overline{S}_j^{(2)}(N)$ на дві підмножини $S_j^{(2)}(N) = \{(\alpha,\beta,2) \in S(N) : \beta \le j\}$ та $\overline{S}_j^{(2)}(N) = S(N) \setminus S_j^{(2)}(N)$. Маємо рівняння:

$$\lambda_2 \overline{\pi}_{mj}^{(2)} + h_1 \nu \sum_{i=0}^{m-1} \overline{\pi}_{ih_1}^{(2)} = (j+1)\nu \sum_{i=0}^{m-1} \overline{\pi}_{i\,j+1}^{(2)}, \;\; j = h_1,...,h_2 - 1, \tag{3.3}$$

$$\lambda_2 \overline{\pi}_{mj}^{(2)} + h_1 \nu \sum_{i=0}^{m-1} \overline{\pi}_{ih_1}^{(2)} = (j+1)\nu \sum_{i=0}^{m-1} \overline{\pi}_{i\,j+1}^{(2)} + \lambda_1 \overline{\pi}_{mh_2-1}^{(1)}, \;\; j = h_2,...,N-1. \tag{3.4}$$

Тепер для $i = 0,1,..,m-1,\; j = 0,1,...,h_2 - 1$ побудуємо розбиття фазового простору $S(N) = S_{ij}^{(1)}(N) \cup \overline{S}_{ij}^{(1)}(N)$ на $S_{ij}^{(1)}(N) = \{(i,j,1) \in S(N)\}$ та $\overline{S}_{ij}^{(1)}(N) = S(N) \setminus S_{ij}^{(1)}(N)$. Знову використовуючи рівність потоків імовірностей через замкнений контур, маємо

$$(\lambda_1 + i\mu + j\nu)\overline{\pi}_{ij}^{(1)} = \lambda_1 \overline{\pi}_{i-1\,j}^{(1)} + (i+1)\mu \overline{\pi}_{i+1\,j}^{(1)} + (j+1)\nu \overline{\pi}_{i-1\,j+1}^{(1)}, \tag{3.5}$$

$$j = 0,...,h_2 - 2, \;\; j \ne h_1 - 1,$$

$$(\lambda_1 + i\mu + (h_2 - 1)\nu)\overline{\pi}_{ij}^{(1)} = \lambda_1 \overline{\pi}_{i-1h_2-1}^{(1)} + (i+1)\mu \overline{\pi}_{i+1h_2-1}^{(1)}, \;\; j = h_2 - 1, \;\; j \ne h_1 - 1,$$

$$(\lambda_1 + i\mu + (h_1 - 1)\nu)\overline{\pi}_{ih_1-1}^{(1)} = \lambda_1 \overline{\pi}_{i-1h_1-1}^{(1)} + (i+1)\mu \overline{\pi}_{i+1h_1-1}^{(1)} + h_1\nu\left(\overline{\pi}_{i-1h_1}^{(1)} + \overline{\pi}_{i-1h_1}^{(2)}\right).$$

(3.6)

Для $i = 0,1,..,m-1,\; j = h_1,...,N$ $S(N) = S_{ij}^{(2)}(N) \cup \overline{S}_{ij}^{(2)}(N)$ побудуємо дві підмножини $S_{ij}^{(2)}(N) = \{(i,j,2) \in S(N)\}$ та $\overline{S}_{ij}^{(2)}(N) = S(N) \setminus S_{ij}^{(2)}(N)$. Отримаємо

$$(\lambda_2 + i\mu + j\nu)\overline{\pi}_{ij}^{(2)} = \lambda_2 \overline{\pi}_{i-1j}^{(2)} + (i+1)\mu \overline{\pi}_{i+1j}^{(2)} + (j+1)\nu \overline{\pi}_{i-1j+1}^{(2)}, \;\; j = h_1,...,N-1. \tag{3.7}$$

$$(\lambda_2 + i\mu + N\nu)\overline{\pi}_{iN}^{(2)} = \lambda_2 \overline{\pi}_{i-1N}^{(2)} + (i+1)\mu \overline{\pi}_{i+1N}^{(2)}, \;\; j = N.$$

Запишемо умову нормування

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{m}\left(\bar{\pi}_{ij}^{(1)}+\bar{\pi}_{ij}^{(2)}\right)=1.$$

Імовірність $\bar{\pi}_{mh_2-1}^{(1)}$ знаходимо з рівняння (3.2) при $j=h_2-1$

$$\bar{\pi}_{mh_2-1}^{(1)}=\frac{h_1\nu}{\lambda_1}\sum_{i=0}^{m-1}\bar{\pi}_{ih_1}^{(2)}=\frac{h_1\nu}{\lambda_1}\bar{1}(m)'\,\bar{\pi}_{h_1}^{(2)}.$$

Підставивши отриманий вираз для $\bar{\pi}_{mh_2-1}^{(1)}$ в рівняння (3.4), знаходимо

$$\lambda_2\bar{\pi}_{mj}^{(2)}+h_1\nu\sum_{i=0}^{m-1}\bar{\pi}_{ih_1}^{(2)}=(j+1)\nu\sum_{i=0}^{m-1}\bar{\pi}_{ij+1}^{(2)}+h_1\nu\sum_{i=0}^{m-1}\bar{\pi}_{ih_1}^{(2)},$$

$$\bar{\pi}_{mj}^{(2)}=\frac{(j+1)\nu}{\lambda_2}\sum_{i=0}^{m-1}\bar{\pi}_{ij+1}^{(2)}=\frac{(j+1)\nu}{\lambda_2}\bar{1}(m)'\,\bar{\pi}_{j+1}^{(2)},\ \ j=h_2,...,N-1.$$

Підставимо останній вираз для $\bar{\pi}_{mj}^{(2)}$ в рівняння (3.7) і запишемо його у векторно-матричному вигляді

$$A_{2j}\bar{\pi}_{j}^{(2)}=B_{2j}\bar{\pi}_{j+1}^{(2)},\ \ j=h_2,...,N-1,$$

звідки

$$\bar{\pi}_{j}^{(2)}=\left(\prod_{i=j}^{N-1}A_{2i}^{-1}B_{2j}\right)\bar{\pi}_{N}^{(2)},\ \ j=h_2,...,N-1.$$

Перепишемо (3.3) у наступній формі

$$\bar{\pi}_{mj}^{(2)}=\frac{(j+1)\nu}{\lambda_2}\bar{1}(m)'\,\bar{\pi}_{j+1}^{(2)}-\frac{h_1\nu}{\lambda_2}\bar{1}(m)'\,\bar{\pi}_{h_1}^{(2)},\ \ j=h_1,...,h_2-1.$$

Враховуючи вираз для $\bar{\pi}_{mj}^{(2)},\ j=h_1,...,h_2-1$, запишемо систему (3.7) в наступному вигляді

$$A_{2j}\bar{\pi}_{j}^{(2)}=B_{2j}\bar{\pi}_{j+1}^{(2)}-C_{2j}\bar{\pi}_{h_1}^{(2)},\ \ j=h_1,...,h_2-1,$$

звідки будемо мати

$$\overline{\pi}_j^{(2)} = \left(\prod_{i=j}^{N-1} A_{2i}^{-1} B_{2j} \right) \overline{\pi}_N^{(2)} - \left[\sum_{k=j}^{h_2-1} \left(\prod_{i=j}^{k-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) A_{2k}^{-1} C_{2k} \right] \overline{\pi}_{h_1}^{(2)}, \quad j = h_1, \dots, h_2 - 1 .$$

З останнього рівняння при $j = h_1$ знаходимо $\overline{\pi}_{h_1}^{(2)}$

$$\overline{\pi}_{h_1}^{(2)} = \left[E + \sum_{k=h_1}^{h_2-1} \left(\prod_{i=h_1}^{k-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) A_{2k}^{-1} C_{2k} \right]^{-1} \left(\prod_{i=h_1}^{N-1} A_{2i}^{-1} B_{2j} \right) \overline{\pi}_N^{(2)}.$$

Таким чином, для $\overline{\pi}_j^{(2)}, \ j = h_1, \dots, h_2 - 1$ будемо мати

$$\pi_j^{(2)} = \left(E - \left[\sum_{k=j}^{h_2-1} \left(\prod_{i=j}^{k-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) A_{2k}^{-1} C_{2k} \right] \left[E + \sum_{k=h_1}^{h_2-1} \left(\prod_{i=h_1}^{k-1} A_{2i}^{-1} B_{2i} \right) A_{2k}^{-1} C_{2k} \right]^{-1} \right) \times$$

$$\times \left(\prod_{i=h_1}^{N-1} A_{2i}^{-1} B_{2j} \right) \overline{\pi}_N^{(2)}, \quad j = h_1, \dots, h_2 - 1.$$

Запишемо рівняння (3.7) при $j = N$ у вигляді

$$D \overline{\pi}_N^{(2)} = e_0(m) \overline{\pi}_{0N}^{(2)},$$

звідки

$$\overline{\pi}_N^{(2)} = D^{-1} e_0(m) \overline{\pi}_{0N}^{(2)}.$$

Таким чином, врахувавши позначення для $\overline{\pi}_j^{(2)}$

$$\overline{\pi}_j^{(2)} = \Delta_j^{(2)} \overline{\pi}_{0N}^{(2)}, \quad j = h_1, \dots, N - 1.$$

Із співвідношення (3.2) отримаємо

$$\overline{\pi}_{mj}^{(1)} = \frac{(j+1)\nu}{\lambda_1} \overline{1}(m)' \, \overline{\pi}_{j+1}^{(1)} + \frac{h_1 \nu}{\lambda_1} \overline{1}(m)' \, \overline{\pi}_{h_1}^{(1)}, \quad j = h_1 - 1, \dots, h_2 - 1$$

і з (3.5) при $j = h_1, \dots, h_2 - 1$ знайдемо

$$\overline{\pi}_j^{(1)} = \left[\left(\prod_{i=j}^{h_2-2} A_{1i}^{-1} B_{1i} \right) A_{1h_2-1}^{-1} C_{1h_2-1} + \sum_{k=j}^{h_2-2} \left(\prod_{i=j}^{k-1} A_{1i}^{-1} B_{1i} \right) A_{1k}^{-1} C_{1k} \right] \overline{\pi}_{h_1}^{(2)}.$$

Врахувавши вираз для $\overline{\pi}_{h_1}^{(2)}$ та $\overline{\pi}_N^{(2)}$, знаходимо $\overline{\pi}_j^{(1)}$, $j = h_1, ..., h_2 - 1.$

Вектор $\overline{\pi}_{h_1-1}^{(1)}$ визначаємо з рівняння (3.6). В свою чергу з рівняння (3.1) випишемо ймовірність $\overline{\pi}_{mj}^{(1)}$

$$\overline{\pi}_{mj}^{(1)} = \frac{(j+1)\nu}{\lambda_1} \sum_{i=0}^{m-1} \overline{\pi}_{ij+1}^{(1)}, \quad j = 0,1,...,h_1 - 2 .$$

Підставивши отриманий вираз у рівняння (3.5), отримаємо подання для вектора $\overline{\pi}_j^{(1)}$ при $j = 0,1,...,h_1 - 2$

$$\overline{\pi}_j^{(1)} = \left(\prod_{i=j}^{h_1-2} A_{1i}^{-1} B_{1j} \right) \overline{\pi}_{h_1-1}^{(1)}.$$

Підставимо сюди вираз для $\overline{\pi}_{h_1-1}^{(1)}$ і остаточно отримаємо формулу для $\overline{\pi}_j^{(1)}$

$$\overline{\pi}_j^{(1)} = \Delta_j^{(1)} \overline{\pi}_{0N}^{(2)}, \quad j = 0,...,h_2 - 1.$$

Розглянемо рівняння (3.7) при $i = m-1, \; j = N$

$$\left(\lambda_2 + (m-1)\mu + N\nu\right) \overline{\pi}_{m-1N}^{(2)} = \lambda_2 \overline{\pi}_{m-2N}^{(2)} + m\mu \overline{\pi}_{mN}^{(2)},$$

звідки випишемо $\overline{\pi}_{mN}^{(2)}$

$$\overline{\pi}_{mN}^{(2)} = \frac{\left(\lambda_2 + N\nu + (m-1)\mu\right) e_{m-1}(m)' - \lambda_2 e_{m-2}(m)'}{m\mu} \times D^{-1} e_0(m) \overline{\pi}_{0N}^{(2)}.$$

Умова нормування для стаціонарних ймовірностей $\overline{\pi}_{ij}^{(r)}$ дозволяє знайти $\overline{\pi}_{0N}^{(2)}$, що і дає нам результат теореми.

3.3. Вибір оптимальної стратегії

Розглянемо застосування доведеної теореми для розв’язку наступної оптимізаційної задачі.

Нехай $S_1(t,h_1,h_2)$ - число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t;

$S_2(t,h_1,h_2)$ - число викликів, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами;

$S_3(t,h_1,h_2)$ - число перемикань інтенсивності вхідного потоку.

Якщо існують границі $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1} S_i(t,h_1,h_2)$, то будемо позначати їх через $S_i(h_1,h_2)$, $i=1,2,3$.

Розглянемо оптимізаційну задачу:

$$W(h_1,h_2)=C_1 S_1(h_1,h_2)-C_2 S_2(h_1,h_2)-C_3 S_3(h_1,h_2)\to \max, \tag{3.8}$$

де C_1 - прибуток, пов’язаний з обслуговуванням одного виклику;

C_2 - штраф за відмову в обслуговуванні;

C_3 - штраф за перемикання інтенсивності вхідного потоку.

Розв’язком задачі (3.8) є такі пороги h_1 і h_2, які максимізують середній прибуток від роботи системи. Подібні оптимізаційні задачі для систем з повторними викликами є дуже актуальними.

В умовах існування стаціонарного режиму (умови леми 3.1) граничні функціонали $S_i(h_1,h_2)$, $i=1,2,3$, теж існують і можуть бути виписані через стаціонарні ймовірності π_{ijr}, $(i,j,r)\in S$,

$$S_1(h_1,h_2)=\sum_{j=0}^{h_2-1}\sum_{i=1}^{m} i\mu\pi_{ij}^{(1)}+\sum_{j=h_1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} i\mu\pi_{ij}^{(2)},\ S_2(h_1,h_2)=\sum_{j=0}^{h_2-1}\lambda_1\pi_{mj}^{(1)}+\sum_{j=h_1}^{\infty}\lambda_2\pi_{mj}^{(2)},$$

$$S_3(h_1,h_2)=\lambda_1\pi_{mh_2-1}^{(1)}+h_1\nu\sum_{i=0}^{m-1}\pi_{ih_1}^{(2)}.$$

Разом з результатом теореми 3.1 вони дають алгоритм розв’язку задачі (3.8).

У випадку одного та двох обслуговуючих приладів одержано більш загальний результат. Знайдено явні формули скалярного типу для стаціонарних імовірностей, коли інтенсивності вхідного потоку $\lambda_1(j)$ та $\lambda_2(j)$ функціонально залежить від кількості джерел повторних викликів.

3.4 Явні формули для систем з одним обслуговуючим приладом

Згідно з прийнятою в теорії масового обслуговування системою позначень таку модель будемо кодувати як $M_Q / M / 1/\infty$.

Процес обслуговування будемо моделювати тривимірним процесом Маркова $Q(t)=\left(Q_1(t),Q_2(t),Q_3(t)\right)$ з неперервним часом у фазовому просторі $S = S^{(1)} \cup S^{(2)}, \quad S^{(1)} \cap S^{(2)} = \varnothing,$

де

$$S^{(1)} = \left\{(i,j,1): i=0,1,\ j=0,1,...,h_2-1\right\},$$

$$S^{(2)} = \left\{(i,j,2): i=0,1,\ j=h_1,...\right\}.$$

$Q_1(t)$ – число зайнятих приладів у момент часу t, $Q_2(t)$ – число джерел повторних вимог, $Q_3(t)$ - режим роботи системи в момент часу t. Якщо $Q_3(t)=1$, то система працює в першому режимі з інтенсивністю вхідного потоку $\lambda_1(j)$, якщо $Q_3(t)=2$, то система працює у другому режимі з інтенсивністю вхідного потоку $\lambda_2(j)$.

Графічно стохастичну поведінку процесу $Q(t)$ можна подати за допомогою діаграми переходів, яка представлена на рис.3.1.

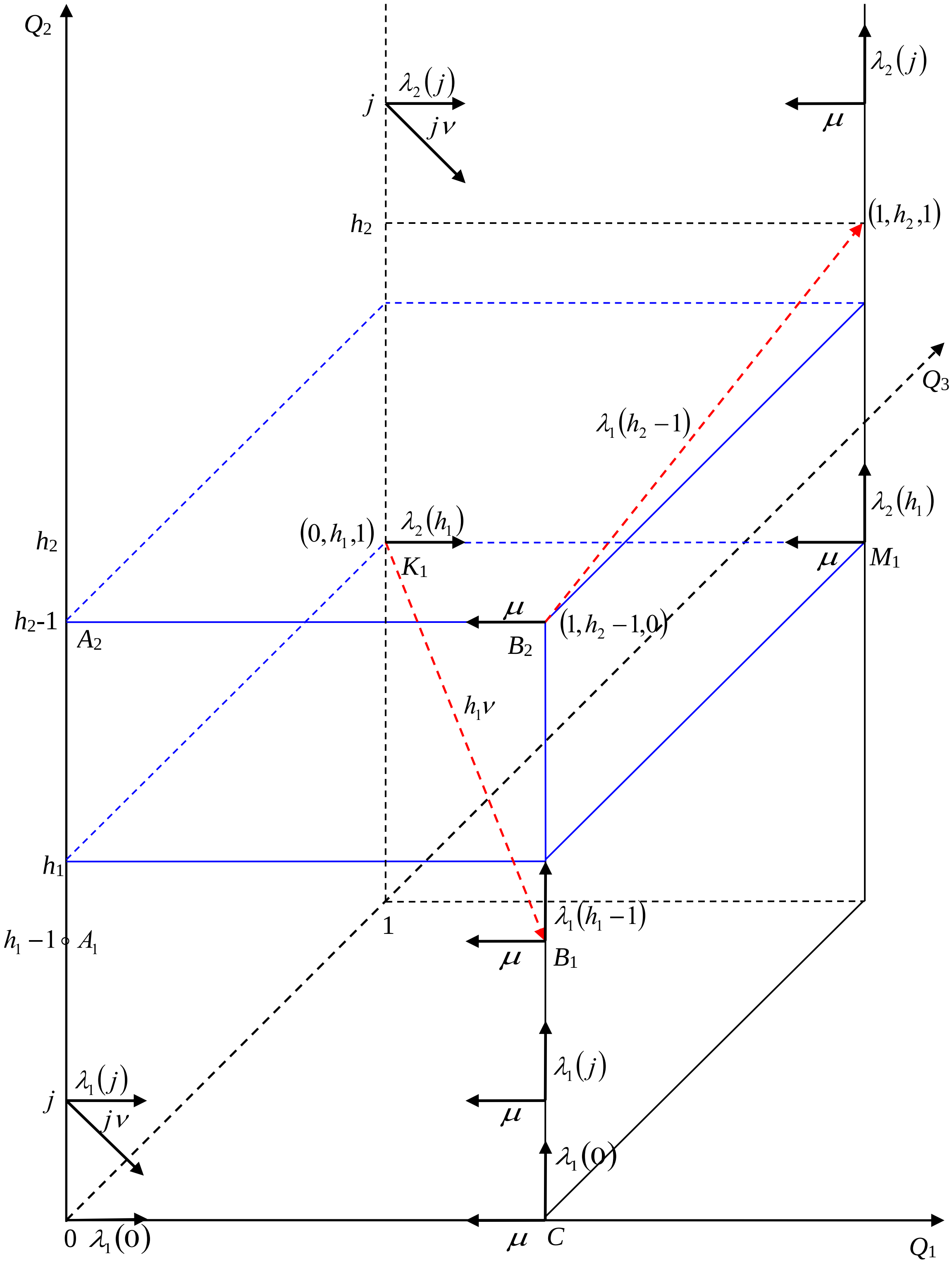


Рис. 3.1. Діаграма інтенсивностей переходів для $M_Q / M / 1 / \infty$-ситеми.

З’ясуємо умови існування стаціонарного режиму для процесу $Q(t),\ t \ge 0$.

Лема 3.3. Нехай $\lambda_2 = \overline{\lim_{j\to\infty}} \lambda_2(j) < \infty$. Тоді при $\dfrac{\lambda_2}{\mu} < 1$ існує стаціонарний режим для процесу $Q(t)$.

Доведення. Доведення цієї леми базується на застосуванні теореми Твіді ([2], ст. 97). Розглянемо наступні тест-функції Ляпунова:

$$\phi(i,j,r) = ai + j + r,\ (i,j,r) \in S,$$

де параметр "a" буде визначено пізніше.

Якщо ми покажемо, що параметр "a" можна вибрати так, щоб середній перенос для цих функцій, який визначається за формулою

$$y_{ijr} = \sum_{(i',j',r')\ne(i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} \left(\phi(i',j',r') - \phi(i,j,r) \right),$$

буде рівномірно менше нуля відносно (i,j,r), за винятком, можливо, скінченної кількості точок (i,j,r), то з цього буде випливати наша лема.

Не обмежуючи загальності будемо вважати, що $\lambda_2(j) \le \lambda_2$.

Маємо

$$y_{ijr} = \sum_{(i',j',r')\ne(i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} \left(ai' + j' + r' - j - 2 \right) =$$

$$= \lambda_2(j)(a + j + 2 - j - 2) + j\nu(a + j - 1 + 2 - j - 2) =$$

$$= \lambda_2(j)a + j\nu(a-1), \quad j = h_1 + 1, \ldots .$$

Отже, $y_{ijr} \le \lambda_2 a + j\nu(a-1) < 0$ для $a < \dfrac{j\nu}{j\nu + \lambda_2}$.

Аналогічно маємо

$$y_{ijr} = \sum_{(i',j',r')\ne(i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} \left(ai' + j' + r' - a - j - 2 \right) =$$

$$= \lambda_2(j)(a + j + 1 + 2 - a - j - 2) + \mu(j + 2 - a - j - 2) = \lambda_2(j) - a\mu,\ \ j = h_1, \ldots .$$

Отже, $y_{ijr} \le \lambda_2 - a\mu < 0$, якщо $a > \dfrac{\lambda_2}{\mu}$.

Оскільки за умовою леми 3.3 $\dfrac{\lambda_2}{\mu} < 1$, то для будь-якого $a \in \left(\dfrac{\lambda_2}{\mu}, 1\right)$ можна знайти $\varepsilon > 0$ таке, що $y_{ijr} < -\varepsilon$ для всіх точок (i, j, r) за винятком, можливо, скінченної їх кількості. Лему 3.3 доведено.

Як і в розділі 2 для побудови розрахункових алгоритмів і явних формул ми спочатку розглянемо модель типу $M_Q / M / 1 / N$, в якій скінченне число N місць для повторних викликів. а потім перейдемо до границі (в умовах леми 3.3) при $N \to \infty$. Це дасть нам формули для стаціонарного розподілу систем типу $M_Q / M / 1 / \infty$.

Позначимо

$$\pi_{ij}^{(r)}(N) = \lim_{t \to \infty} P(Q_1(t) = i, Q_2(t) = j, Q_3(t) = r) \; -$$

стаціонарний розподіл нашої системи. Введемо також наступні позначення:

$$\beta_i(j) = \lambda_i(j)(j\nu + \lambda_i(j)), \quad i = 1,2$$

$$B_1(j) = \frac{1}{j!(\nu\mu)^j} \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_1(k)(k\nu + \lambda_1(k)), \;\; j = 1, \ldots, h_1;$$

$$B_2(j) = \frac{h_1!}{j!(\nu\mu)^{j-h_1}} \prod_{k=h_1}^{j-1} \lambda_2(k)(k\nu + \lambda_2(k)), \;\; j = h_1 + 1, \ldots;$$

$$D(h, j) = \frac{h_1}{j!} \sum_{l=h_1+1}^{h} \frac{(l-1)!}{(\nu\mu)^{j-l}} \prod_{k=l}^{j-1} \lambda_2(k)(k\nu + \lambda_2(k));$$

$A(h_1, h_2)$ - тридіагональна матриця вигляду

$$A\left(h_1,h_2\right)=\begin{pmatrix} \widehat{\beta}\left(h_1\right) & -\left(h_1+1\right)\nu\mu & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -\beta_1\left(h_1\right) & \widehat{\beta}\left(h_1+1\right) & -\left(h_1+2\right)\nu\mu & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1\left(h_1+1\right) & \widehat{\beta}\left(h_1+2\right) & -\left(h_1+3\right)\nu\mu & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_1\left(h_1+2\right) & \widehat{\beta}\left(h_1+3\right) & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & \widehat{\beta}\left(h_2-2\right) & -\left(h_2-1\right)\nu\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -\beta_1\left(h_2-2\right) & \widehat{\beta}\left(h_2-1\right) \end{pmatrix}$$

де $\widehat{\beta}\left(j\right)=\beta_1\left(j\right)+j\nu\mu$.
$A\left(j\right)$ $-$ $j-$тий елемент першого стовпчика матриці $A^{-1}\left(h_1,h_2\right)$,
$j=1,...,h_2-h_1$. Позначимо також $Q(h_1)=B_1(h_1)\left(1-\nu\mu h_1A(1)\right)$.

Теорема 3.2. Для системи $M_Q/M/1/N$ справедливі наступні формули для стаціонарного розподілу:

$$\pi_{0j}^{(1)}(N)=B_1\left(j\right)\pi_{00}^{(1)}(N),\ \pi_{1j}^{(1)}=\frac{\left(j\nu+\lambda_1\left(j\right)\right)B_1\left(j\right)}{\mu}\pi_{00}^{(1)}(N),\quad 0\le j\le h_1-1,\quad (3.9)$$

$$\pi_{0j}^{(1)}(N)=\nu\mu h_1B_1\left(h_1\right)A(j+1-h_1)\pi_{00}^{(1)}(N),\quad h_1\le j\le h_2-1,\qquad (3.10)$$

$$\pi_{1j}^{(1)}(N)=\nu h_1B_1\left(h_1\right)\left(j\nu+\lambda_1\left(j\right)\right)A(j+1-h_1)\pi_{00}^{(1)}(N),\quad h_1\le j\le h_2-1,$$

(3.11)

$$\pi_{0j}^{(2)}\left(N\right)=Q\left(h_1\right)\left(B_2(j)+D(j,j)\right)\pi_{00}^{(1)}\left(N\right),\quad h_1\le j\le h_2-1,\qquad (3.12)$$

$$\pi_{1j}^{(2)}\left(N\right)=\frac{Q\left(h_1\right)\left(j\nu+\lambda_1\left(j\right)\right)}{\mu}\left(B_2(j)+D(j,j)\right)\pi_{00}^{(1)}\left(N\right),\quad h_1\le j\le h_2-1,\quad (3.13)$$

$$\pi_{1j}^{(2)}\left(N\right)=Q\left(h_1\right)\left(B_2(j)+D(h_2-1,j)\right)\pi_{00}^{(1)}\left(N\right),\quad h_2\le j\le N,\qquad (3.14)$$

$$\pi_{1j}^{(2)}\left(N\right)=\frac{Q\left(h_1\right)\left(j\nu+\lambda_1\left(j\right)\right)}{\mu}\left(B_2(j)+D(h_2-1,j)\right)\pi_{00}^{(1)}\left(N\right),\quad h_2\le j\le N,\ (3.15)$$

де

$$\pi_{00}^{(1)}\left(N\right)=\left(1+\mu^{-1}\left(\sum_{o=1}^{h_1-1}\left(j\nu+\lambda_1\left(j\right)+\mu\right)B_1(j)+\lambda_1\left(0\right)\right)+\right.$$

$$+\nu h_1 B_1(h_1)\sum_{j=h_1}^{h_2-1}(j\nu+\lambda_1(j)+\mu)A(j+1-h_1)+$$

$$+\mu^{-1}Q(h_1)\left[\sum_{j=h_1}^{h_2-1}(B_2(j)+D(j,j))(j\nu+\lambda_1(j)+\mu)+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=h_2}^{N}(B_2(j)+D(h_2-1,j))(j\nu+\lambda_1(j)+\mu)\right]\right)^{-1}.$$

Доведення. Запишемо рівняння для стаціонарних імовірностей системи, використовуючи теорему про рівність потоків імовірностей через замкнений контур ([3], ст.49). При цьому окремо розглянемо три області: область, де діє лише перший режим, тобто $0\le j\le h_1-1$; область де діє лише другий режим, тобто $h_2\le j\le N$ і область, де можуть діяти обидва режими, тобто $h_1\le j\le h_2-1$. Для спрощення позначень будемо вважати $\pi_{ij}^{(r)}(N)=\overline{\pi}_{ij}^{(r)}$. Маємо наступні рівняння:

$$\overline{\pi}_{0j}^{(1)}\left(j\nu+\lambda_1(j)\right)=\overline{\pi}_{1j}^{(1)}\mu,\ 0\le j\le h_1-1, \tag{3.16}$$

$$\overline{\pi}_{0\,j+1}^{(1)}(j+1)\nu=\overline{\pi}_{1j}^{(1)}\lambda_1(j),\ 0\le j\le h_1-2, \tag{3.17}$$

$$\overline{\pi}_{0j}^{(2)}\left(j\nu+\lambda_2(j)\right)=\overline{\pi}_{1j}^{(2)}\mu,\ h_2-1\le j\le N, \tag{3.18}$$

$$\overline{\pi}_{0\,j+1}^{(2)}(j+1)\nu=\overline{\pi}_{1j}^{(2)}\lambda_2(j),\ h_2-1\le j\le N-1. \tag{3.19}$$

Для області, де діють обидва режими, маємо систему:

$$\begin{cases}\overline{\pi}_{0\,j+1}^{(1)}(j+1)\nu-\overline{\pi}_{0j}^{(1)}\left(\dfrac{\left(j\nu+\lambda_1(j)\right)}{\mu}\lambda_1(j)+j\nu\right)+\\ +\overline{\pi}_{0\,j-1}^{(1)}\dfrac{\left((j-1)\nu+\lambda_1(j-1)\right)}{\mu}\lambda_1(j-1)=0,\ h_1\le j\le h_2-2\\ \overline{\pi}_{0h_2-2}^{(1)}\dfrac{\left((h_2-2)\nu+\lambda_1(h_2-2)\right)}{\mu}\lambda_1(h_2-2)-\\ -\overline{\pi}_{0h_2-1}^{(1)}\left(\dfrac{\left((h_2-1)\nu+\lambda_1(h_2-1)\right)}{\mu}\lambda_1(h_2-1)+(h_2-1)\nu\right)=0,\ h_1\le j\le h_2-2\end{cases}$$

Якщо $\overline{1}_{h_2-h_1}$ позначає вектор-стовпчик, перша координата якого дорівнює одиниці, а решта координат нулі, то ця система в термінах матриці $A(h_1,h_2)$ прийме вигляд

$$A(h_1,h_2)\overline{\pi}^{(1)}(h_1,h_2)=\overline{\pi}^{(1)}_{0h_1-1}\beta(h_1-1)\overline{1}_{h_2-h_1}, \qquad (3.20)$$

де

$$\overline{\pi}^{(1)}(h_1,h_2)=\begin{pmatrix}\overline{\pi}^{(1)}_{0h_1}\\ \overline{\pi}^{(1)}_{0h_1+1}\\ \ldots\\ \overline{\pi}^{(1)}_{0h_2-1}\end{pmatrix},$$

$$\overline{\pi}^{(1)}_{0j}\left(j\nu+\lambda_1(j)\right)=\overline{\pi}^{(1)}_{1j}\mu,\ h_1-1\le j\le h_2-1. \qquad (3.21)$$

З (3.20), (3.21) можемо знайти $\overline{\pi}^{(1)}_{0j},\overline{\pi}^{(1)}_{1j}$, $h_1\le j\le h_2-1$ через імовірність $\overline{\pi}^{(1)}_{0h_1-1}$, яка, в свою чергу, з формул (3.16), (3.21) записується через $\overline{\pi}^{(1)}_{00}$. Для того, щоб знайти $\overline{\pi}^{(2)}_{0j},\overline{\pi}^{(2)}_{1j}$, використаємо наступні рівняння:

$$\left(\overline{\pi}^{(1)}_{0j+1}+\overline{\pi}^{(2)}_{0j+1}\right)(j+1)\nu=\overline{\pi}^{(1)}_{1j}\lambda_1(j)+\overline{\pi}^{(2)}_{1j}\lambda_2(j),\quad h_1\le j\le h_2-2 \qquad (3.22)$$

$$\left(\overline{\pi}^{(1)}_{0h_1}+\overline{\pi}^{(2)}_{0h_1}\right)h_1\nu=\overline{\pi}^{(1)}_{1h_1-1}\lambda_1(h_1-1). \qquad (3.33)$$

Тепер з (3.16) - (3.23) маємо формули (3.9) - (3.15).

Сталу $\overline{\pi}^{(1)}_{00}$ знаходимо з умови нормування:

$$\overline{\pi}^{(1)}_{00}=\left(1+\mu^{-1}\left(\sum_{o=1}^{h_1-1}(j\nu+\lambda_1(j)+\mu)B_1(j)+\lambda_1(0)\right)+\right.$$

$$+\nu h_1B_1(h_1)\sum_{j=h_1}^{h_2-1}(j\nu+\lambda_1(j)+\mu)A(j+1-h_1)+$$

$$+\mu^{-1}Q(h_1)\left[\sum_{j=h_1}^{h_2-1}\bigl(B_2(j)+D(j,j)\bigr)\bigl(j\nu+\lambda_1(j)+\mu\bigr)+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=h_2}^{N}\bigl(B_2(j)+D(h_2-1,j)\bigr)\bigl(j\nu+\lambda_1(j)+\mu\bigr)\right]\right)^{-1}.$$

Теорему 3.2. доведено.

Якщо тепер $N\to\infty$, то в умовах теореми 3.2 ряд $\sum_{j=h_2}^{\infty}\bigl(B_2(j)+D(h_2-1,j)\bigr)\bigl(j\nu+\lambda_1(j)+\mu\bigr)$ є збіжним. Для цього достатньо показати, що

$$\sum_{j=h_2}^{\infty}\frac{B_2(j-1)\lambda_2(j)+B_2(j)}{\nu^{j-h_2+1}j!}<\infty. \tag{3.24}$$

Дійсно, розглянемо ряд

$$\sum_{j=h_2}^{\infty}\frac{B_2(j-1)\lambda_2(j)}{\nu^{j-h_2+1}j!}. \tag{3.25}$$

Використовуючи критерій збіжності ряду $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, де a_n- загальний член ряду, маємо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{B_2(j)\lambda_2(j+1)\nu^{j-h_2+1}j!}{B_2(j-1)\lambda_2(j)\nu^{j-h_2+2}(j+1)!}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\lambda_2(j)\bigl(j\nu+\lambda_2(j)\bigr)\lambda_2(j+1)}{\mu\lambda_2(j)\nu(j+1)}=$$

$$=\frac{1}{\mu}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\bigl(j\nu+\lambda_2(j)\bigr)\lambda_2(j+1)}{\nu(j+1)}\le\sup_j\frac{\lambda_2(j+1)}{\mu}<1$$

і отже, ряд (3.25) збігається. Аналогічно можна показати, що

$$\sum_{j=h_2}^{\infty}\frac{B_2(j)}{\nu^{j-h_2+1}j!}<\infty,$$

а тому (3.24) доведено.

Тепер, як наслідок теореми 3.2, маємо такий результат.

Наслідок 3.1. Нехай $\lambda_2 = \overline{\lim_{j\to\infty}}\lambda_2(j) < \infty$ і $\lambda_2/\mu < \infty$. Тоді для $M_Q/M/1/\infty$- системи, керованою гістерезисною стратегією, існує стаціонарний режим і стаціонарні імовірності можна подати у вигляді:

$$\pi_{0j}^{(1)} = B_1(j)\pi_{00}^{(1)}, \quad \pi_{1j}^{(1)} = \frac{j\nu + \lambda_1(j)}{\mu} B_1(j)\pi_{00}^{(1)}, \ j = 0,...,h_1 - 1,$$

$$\pi_{0j}^{(1)} = h_1\nu\mu B_1(h_1)A(j+1-h_1)\pi_{00}^{(1)}, \quad \pi_{1j}^{(1)} = h_1\nu B_1(h_1)\left(j\nu + \lambda_1(j)\right)A(j+1-h_1)\pi_{00}^{(1)},$$

$$j = h_1,...,h_2 - 1,$$

$$\pi_{0j}^{(2)} = Q(h_1)\left(B_2(j) + D(j,j)\right)\pi_{00}^{(1)}, \quad \pi_{1j}^{(2)} = \frac{j\nu + \lambda_2(j)}{\mu} Q(h_1)\left(B_2(j) + D(j,j)\right)\pi_{00}^{(1)},$$

$$j = h_1,...,h_2 - 1,$$

$$\pi_{1j}^{(2)} = Q(h_1)\left(B_2(j) + D(h_2 - 1, j)\right)\pi_{00}^{(1)},$$

$$\pi_{1j}^{(2)} = \frac{j\nu + \lambda_2(j)}{\mu} Q(h_1)\left(B_2(j) + D(h_2 - 1, j)\right)\pi_{00}^{(1)},$$

$$j = h_2,...,\infty,$$

де

$$\pi_{00}^{(1)} = \left(1 + \mu^{-1}\left(\sum_{j=1}^{h_1-1}\left(j\nu + \lambda_1(j) + \mu\right)B_1(j) + \lambda_1(0)\right) + \right.$$

$$+ h_1\nu B_1(h_1)\sum_{j=h_1}^{h_2-1}\left(j\nu + \lambda_1(j) + \mu\right)A(j+1-h_1) +$$

$$+ \mu^{-1}Q(h_1)\left[\sum_{j=h_1}^{h_2-1}\left(B_2(j) + D(j,j)\right)\left(j\nu + \lambda_2(j) + \mu\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j=h_2}^{\infty}\left(B_2(j) + D(h_2 - 1, j)\right)\left(j\nu + \lambda_2(j) + \mu\right)\right]\right)^{-1}.$$

Формули, які ми знайшли для стаціонарного розподілу, придатні до програмування з тим, щоб отримати ефективні алгоритми для знаходження стаціонарного розподілу.

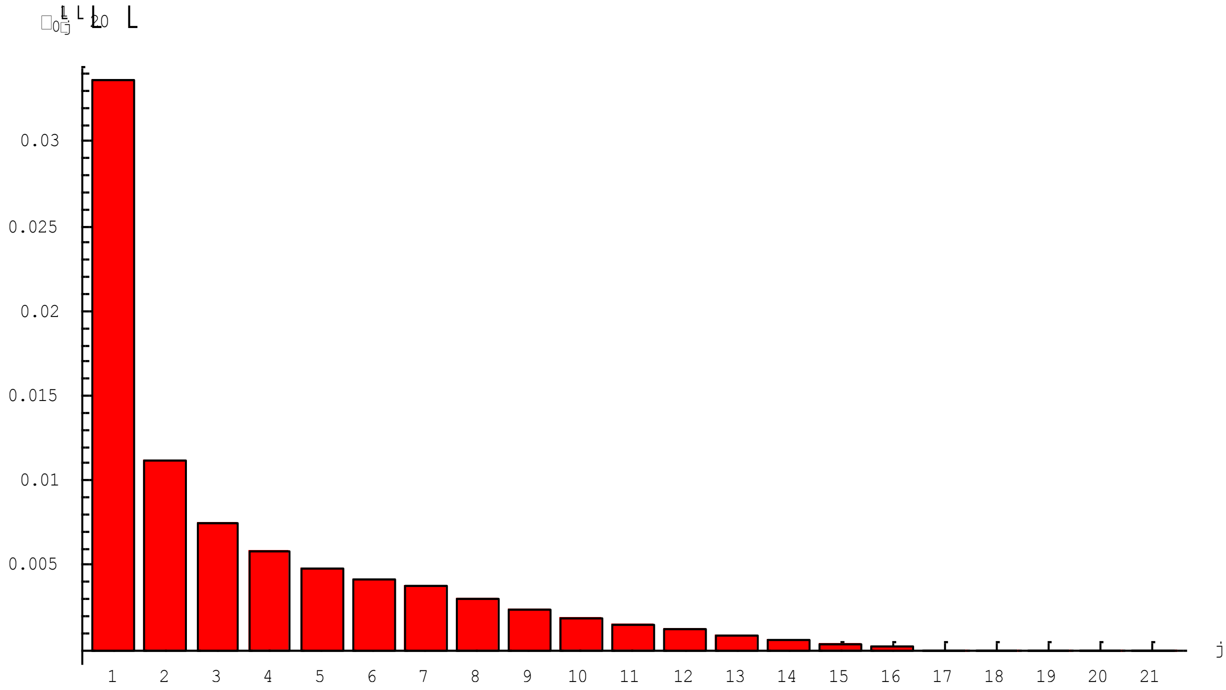
Приклад 3.1. Розглянемо систему $M/M/1/20$ з наступними параметрами:

$$h_1 = 7,\ h_2 = 16,\ \nu = 3,\ \mu = 1,\ \lambda_1(j) = 1,\ \ j \le 15,$$

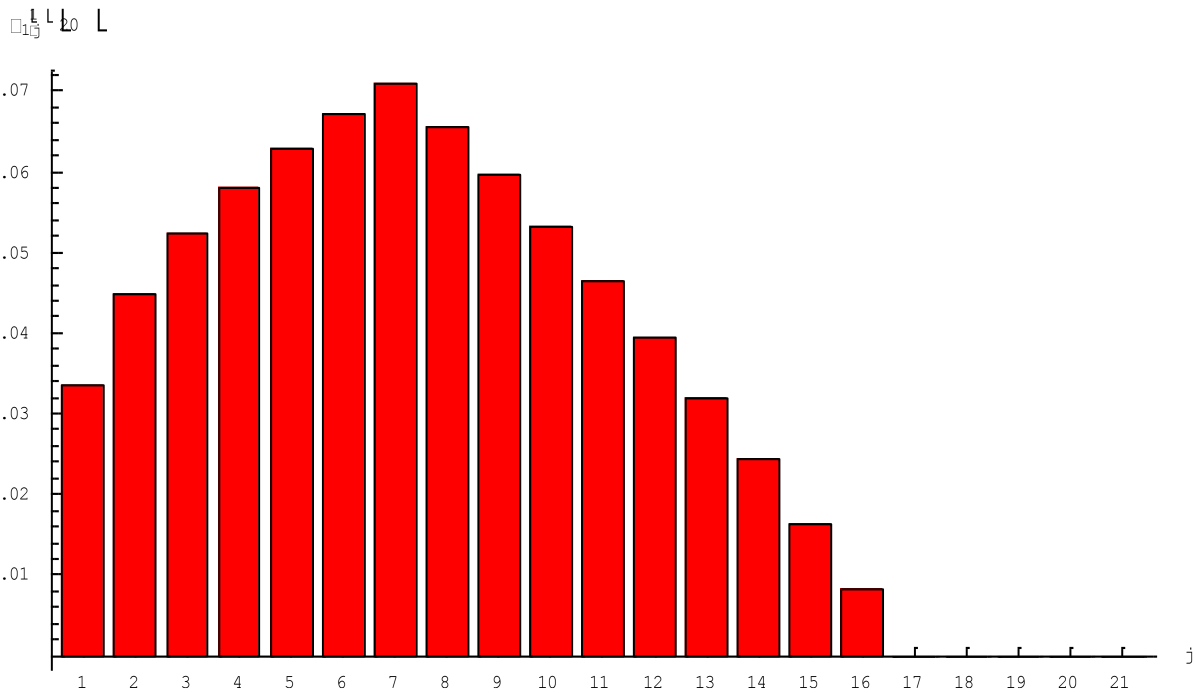
$$\lambda_2(j) = (j+2)/(2j+1),\ \ 6 \le j \le 20.$$

Наведемо числові значення отриманих розподілів, а потім їх графічне зображення.

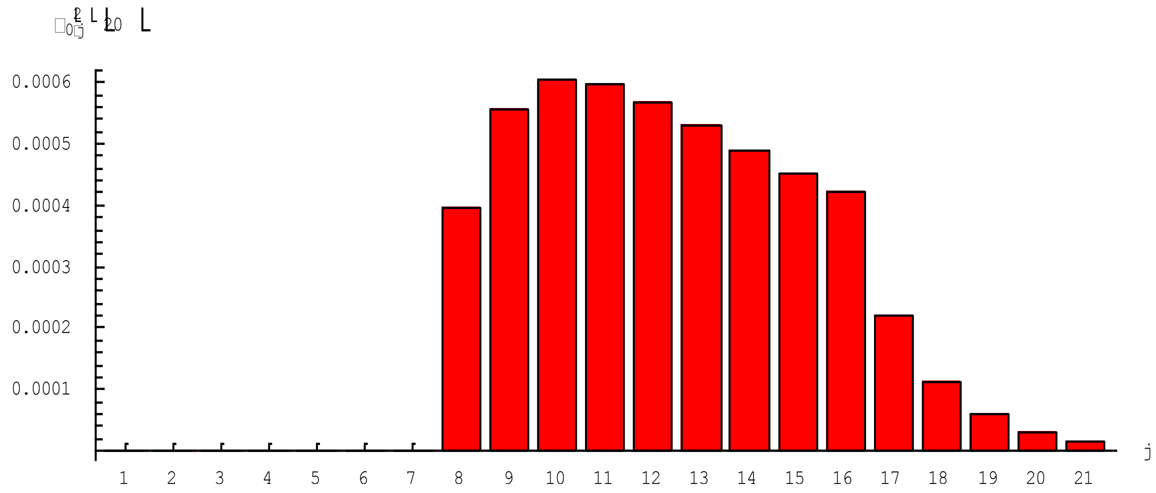
$\pi_{0j}^{(1)}(20) = \{0.0335846,\ 0.0111949,\ 0.00746324,\ 0.00580474,\ 0.00483729,\ 0.00419231,\ 0.0037265,\ 0.00297753,\ 0.0023846,\ 0.00190147,\ 0.00149886,\ 0.00115725,\ 0.000863086,\ 0.000606636,\ 0.000380717,\ 0.000179899,\ 0.,\ 0.,\ 0.,\ 0.,\ 0.\}$



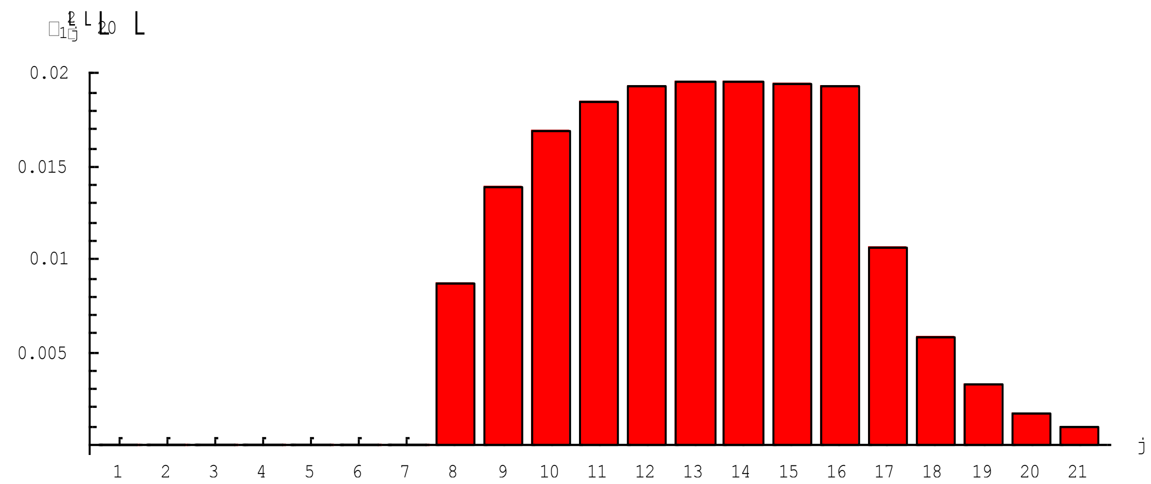
$\pi_{1j}^{(1)}(20) = \{0.0335846,\ 0.0447794,\ 0.0522427,\ 0.0580474,\ 0.0628847,\ 0.067077,\ 0.0708035,\ 0.0655057,\ 0.059615,\ 0.0532411,\ 0.0464646,\ 0.0393465,\ 0.0319342,\ 0.0242655,\ 0.0163708,\ 0.00827536,\ 0.,\ 0.,\ 0.,\ 0.,\ 0.\}$



$\pi_{0j}^{(2)}(20) = \{0., \; 0., \; 0., \; 0., \; 0., \; 0., \; 0., \; 0.000394065, \; 0.000557601, \; 0.000605197, \; 0.000597946, \; 0.000567307, \; 0.000528836, \; 0.000489809, \; 0.000453311, \; 0.000420392, \; 0.000218763, \; 0.000113582, \; 0.0000588533, \; 0.0000304399, \; 0.0000157183\}$



$\pi_{1j}^{(2)}(20) = \{0., \; 0., \; 0., \; 0., \; 0., \; 0., \; 0., \; 0.00866942, \; 0.01394, \; 0.0169455, \; 0.0185363, \; 0.0192884, \; 0.0195669, \; 0.0195923, \; 0.0194924, \; 0.019338, \; 0.0106199, \; 0.00585436, \; 0.00320989, \; 0.00175147, \; 0.000951532\}$



Розглянемо застосування теореми 3.2 для розв'язку оптимізаційної задачі (3.8). В умовах існування стаціонарного режиму (умови леми 3.3) граничні функціонали $S_i\left(h_1,h_2\right),\ i=1,2,3$, теж існують і можуть бути виписані через стаціонарні імовірності $\pi_{ij}^{(r)},\ \left(i,j,r\right)\in S$

$$S_1\left(H\right)=\mu\sum_{j=0}^{h_2-1}\pi_{1j}^{(1)}+\mu\sum_{j=h_1}^{\infty}\pi_{1j}^{(2)},\quad S_2\left(H\right)=\sum_{j=0}^{h_2-1}\lambda_1\left(j\right)\pi_{1j}^{(1)}+\sum_{j=h_1}^{\infty}\lambda_2\left(j\right)\pi_{1j}^{(2)},$$

$$S_3\left(H\right)=\lambda_1\left(h_2-1\right)\pi_{1h_2-1}^{(1)}+h_1\nu\pi_{0h_1}^{(2)}.$$

Разом з результатом теореми 3.2 вони дають алгоритм розв'язку оптимізаційної задачі (3.8).

Приклад 3.2. Розглянемо систему $M/M/1/15$ з такими параметрами

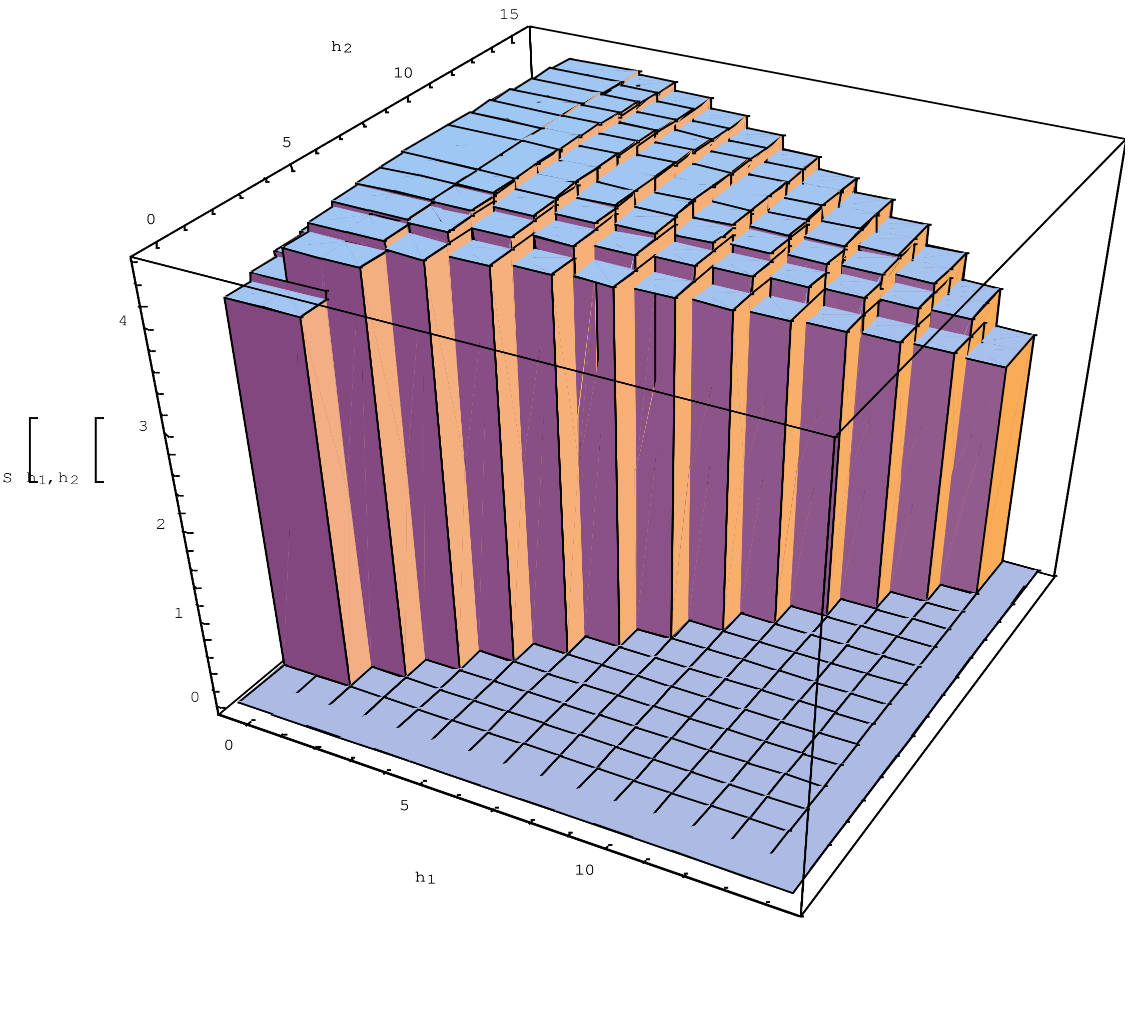
$$C_1=8,\ C_2=2,\ C_3=1{,}5=1.5,\ \mu=1{,}1,\ \nu=0{,}1,$$

$$\lambda_1(j)=1,\ \lambda_2(j)=(j+2)/(2j+1).$$

Підрахунки дали наступні оптимальні значення $h_1=2,\ h_2=9$, а відповідне значення цільової функції є наступними $W\left(2{,}9\right)=4{,}513$.

Наведемо всі значення цільової функції, а також її графік:

0	3.939	4.020	4.072	4.108	4.133	4.150	4.162	4.168	4.171	4.170	4.168	4.163	4.160
0	0	4.322	4.416	4.467	4.495	4.509	4.513	4.509	4.500	4.487	4.471	4.454	4.441
0	0	0	4.327	4.431	4.481	4.504	4.510	4.505	4.492	4.474	4.453	4.431	4.414
0	0	0	0	4.214	4.330	4.384	4.405	4.408	4.399	4.382	4.360	4.337	4.320
0	0	0	0	0	4.062	4.191	4.249	4.272	4.274	4.263	4.245	4.224	4.208
0	0	0	0	0	0	3.895	4.035	4.099	4.124	4.126	4.116	4.100	4.088
0	0	0	0	0	0	0	3.721	3.872	3.941	3.968	3.973	3.966	3.961
0	0	0	0	0	0	0	0	3.544	3.705	3.779	3.810	3.820	3.825
0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.365	3.536	3.617	3.654	3.676
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.188	3.368	3.458	3.505
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.011	3.202	3.300
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.831	3.029
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.622
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



3.5 Подання стаціонарного розподілу для систем з двома обслуговуючими приладами

Згідно з прийнятою в теорії масового обслуговування системою позначень таку модель будемо кодувати як $M_Q / M / 2 / \infty$. Символ "∞" позначає ємність орбіти.

З'ясуємо умови існування стаціонарного режиму для тривимірного процесу Маркова $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t))$ в цьому випадку.

Лема 3.4. Нехай $\lambda_2 = \overline{\lim_{j\to\infty}} \lambda_2(j) < \infty$. Тоді при $\frac{\lambda_2}{2\mu} < 1$ існує стаціонарний режим для процесу $Q(t)$.

Доведення. Доведення цієї леми базується на застосуванні теореми Твіді ([2], ст. 97). Розглянемо наступні тест-функції Ляпунова:

$$\phi(i, j, r) = ai + j + r, \ (i, j, r) \in S ,$$

де параметр "a" буде визначено пізніше.

Якщо ми покажемо, що параметр "a" можна вибрати так, щоб середній перенос для цих функцій, який визначається за формулою

$$y_{ijr} = \sum_{(i',j',r') \neq (i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} \left(\phi(i',j',r') - \phi(i,j,r) \right) =$$

$$= \sum_{(i',j',r') \neq (i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')} \left(a(i'-i) + j'-j + r'-r \right),$$

буде рівномірно менше нуля відносно (i, j, r), за винятком, можливо, скінченної кількості точок (i, j, r), то з цього буде випливати наша лема.

Не обмежуючи загальності будемо вважати, що $\lambda_2(j) \leq 2\mu\lambda_2$, де $\lambda_2 < 1$. Маємо

$$y_{ijr} = \sum_{(i',j',r')\neq(i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')}\left(ai' + j' - j\right) = \lambda_2(j)a + j\nu\left(a-1\right) \le 2\lambda_2\mu a + j\nu\left(a-1\right),$$

$$j = h_1 + 1, \dots .$$

$$y_{ijr} = \sum_{(i',j',r')\neq(i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')}\left(ai' + j' - a - j\right) = \lambda_2(j)a - \mu a + j\nu\left(a-1\right) =$$
$$= a\left(\lambda_2\left(j\right) - \mu\right) + j\nu(a-1)\Big) \le a\mu\left(2\lambda_2 - 1\right) + j\nu(a-1)\Big), \quad j = h_1 + 1, \dots .$$

$$y_{ijr} = \sum_{(i',j',r')\neq(i,j,r)} q_{(i,j,r)}^{(i',j',r')}\left(a(i'-i) + j'-j\right) = \lambda_2(j) - 2\mu a \le 2\mu(\lambda_2 - a), \quad j = h_1 + 1, \dots .$$

Умови теореми Твіді будуть виконані, якщо ми вкажемо таке $\varepsilon > 0$ та $a > 0$, що будуть виконуватись нерівності

$$\begin{cases} \lambda_2 a + j\nu\left(a-1\right) \le -\varepsilon; \\ a\mu\left(2\lambda_2 - 1\right) + j\nu(a-1)\Big) \le -\varepsilon; \\ 2\mu(\lambda_2 - a) \le -\varepsilon, \end{cases}$$

для всіх j за винятком, можливо, скінченної їх кількості. Нехай $\lambda_2 < a < 1.$

Тоді легко зрозуміти, що для таких a ліві частини нерівностей в системі будуть менші $-\varepsilon$ з деяким $\varepsilon > 0$ для всіх достатньо великих $j.$

Лему 3.4 доведено.

Для знаходження стаціонарного розподілу також спочатку розглянемо урізану систему, в якій кількість джерел повторних викликів буде обмеженою деяким числом N. Таку систему ми будемо позначати як $M_Q / M / 2 / N.$

Графічно стохастичну поведінку процесу $Q(t)$ можна подати за допомогою діаграми переходів, яка представлена на рис. 3.2.

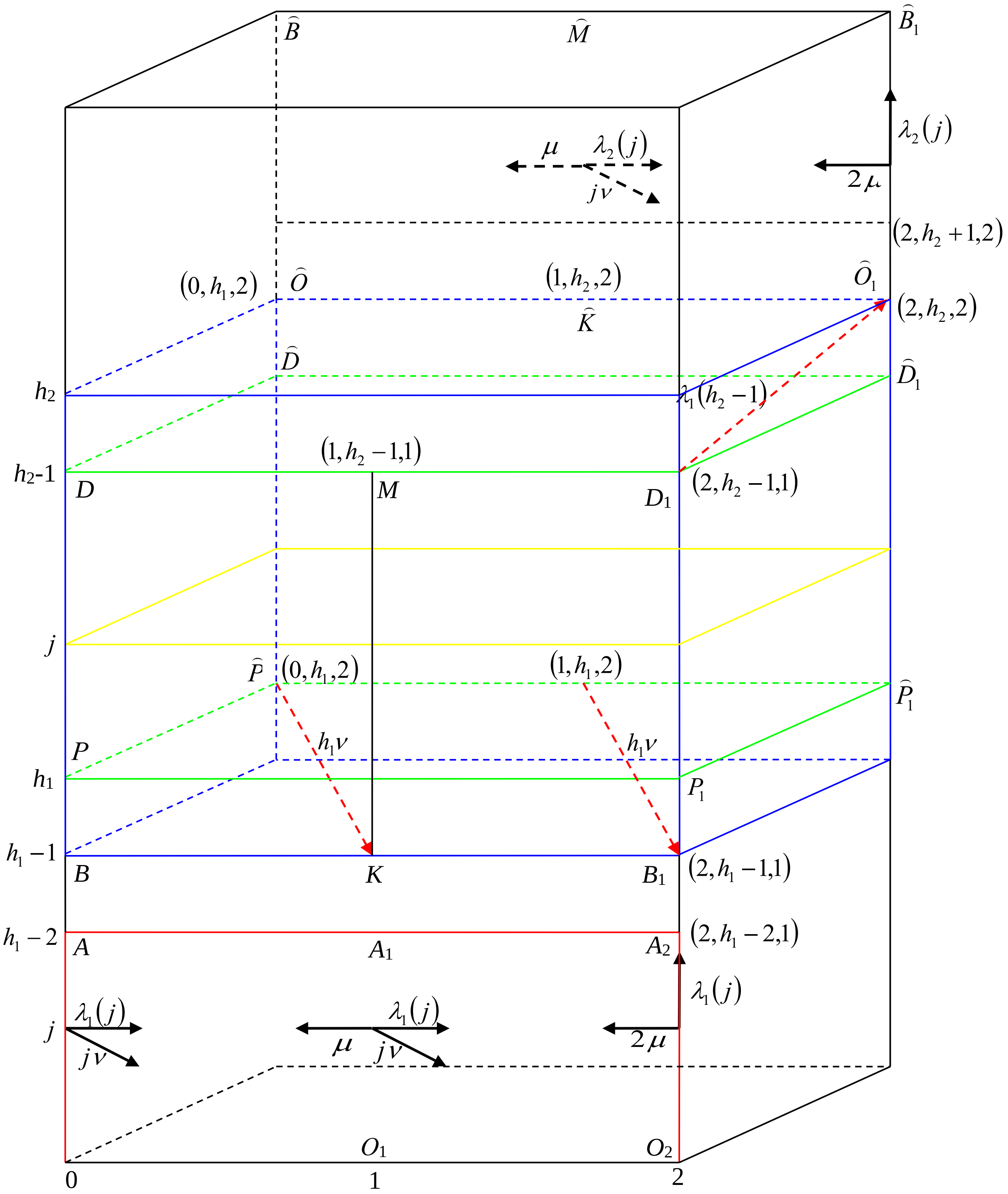


Рис.3.2. Діаграма інтенсивностей переходів ланцюга Маркова $Q(t)$.

Отже, розглянемо модель типу $M_Q / M / 2 / N$. Якщо $N < \infty$, то стаціонарний розподіл $\pi_{ij}^{(r)}(N) = \lim_{t\to\infty} P\left(Q_1(t) = i, Q_2(t) = j, Q_3(t) = r\right)$для процесу $Q^{(N)}(t)$ завжди існує.

Введемо наступні позначення:

$$\beta_i(j) = \lambda_i(j) + j\nu; \quad \alpha_i(j) = \lambda_i(j)\left[\beta_i^2(j) + j\nu\mu\right];$$

$$\gamma_i(j) = j\nu\mu\left(\lambda_i(j-1) + 2\beta_i(j) + 2\mu\right);$$

$$B_i(j) = \begin{cases} \prod\limits_{k=0}^{j-1} \dfrac{\alpha_1(k)}{\gamma_1(k+1)}, \ \textit{для} \ i = 1, \ j = 1, \dots, h_2 - 1, \\ \prod\limits_{k=h_1}^{j-1} \dfrac{\alpha_2(k)}{\gamma_2(k+1)}, \ \textit{для} \ i = 2, \ j = h_1 + 1, \dots. \end{cases}$$

Позначимо матрицю розміром $(h_2 - h_1) \times (h_2 - h_1)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{h_2-h_1-1\, h_2-h_1-2} & a_{h_2-h_1-1\, h_2-h_1-1} & a_{h_2-h_1-1\, h_2-h_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{h_2-h_1\, h_2-h_1-1} & a_{h_2-h_1\, h_2-h_1} \end{pmatrix},$$

де

$$a_{ij} = \begin{cases} \gamma_1(h_1 - 1 + i) + \alpha_1(h_1 - 1 + i), \ \textit{якщо} \ i = j, \\ -\alpha_1(h_1 - 2 + i), \ \textit{якщо} \ i = j + 1, \\ -\gamma_1(h_1 - 1 + j), \ \textit{якщо} \ j = i + 1, \\ 0, \ \textit{в інших випадках}. \end{cases}$$

Нехай $\hat{1}$ позначає вектор-стовпчик $\hat{1} = \underbrace{(1, 0, \dots, 0)'}_{h_2 - h_1}$.

Введемо величини $A(j)$, $j = h_1, \dots, h_2 - 1$ наступним чином

$$A^{-1}\hat{1}=\left(A(h_1),...,A(h_2-1)\right)'.$$

Покладемо

$$b(h_1)=\alpha_1(h_1)A(h_1)-\gamma_1(h_1+1)A(h_1+1),$$

$$Q(j)=\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)B_2(j)\left[\frac{1-\alpha_1(h_1)A(h_1)}{2\mu h_1\nu\left(\mu+\beta_2(h_1)\right)}+b(h_1)\sum_{l=h_1}^{j-1}\frac{1}{\gamma_2(l+1)B_2(l+1)}\right],$$

$$D(h_1,h_2)=\frac{\alpha_2(h_2-1)Q(h_2-1)+\alpha_1(h_1-1)\alpha_1(h_2-1)A(h_2-1)B_1(h_1-1)}{\gamma_2(h_2)}.$$

Теорема 3.3. Для системи $M_Q/M/2/N$ справедливі наступні формули для стаціонарного розподілу

$$\frac{\pi_{0j}^{(1)}}{\pi_{00}^{(1)}}=\begin{cases}B_1(j), \ \textit{при} \ \ j=1,...,h_1-1;\\ \alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)A(j), \ \textit{при} \ \ j=h_1,...,h_2-1;\end{cases}$$

$$\frac{\pi_{1j}^{(1)}}{\pi_{00}^{(1)}}=\begin{cases}\dfrac{\beta_1(j)B_1(j)}{\mu}, \ \textit{при} \ \ j=0,...,h_1-1;\\ \dfrac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)\beta_1(j)A(j)}{\mu}, \ \textit{при} \ \ j=h_1,...,h_2-1;\end{cases}$$

$$\frac{\pi_{2j}^{(1)}}{\pi_{00}^{(1)}}=\begin{cases}\dfrac{(j+1)\nu\left(\mu+\beta_1(j+1)\right)B_1(j+1)}{\mu\lambda_1(j)}, \textit{при} \ j=0,...,h_1-2;\\ \dfrac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)\left[1-h_1\nu\mu\lambda_1(h_1-1)A(h_1)\right]}{2\mu^2\lambda_1(h_1-1)}, \textit{при} \ j=h_1-1;\\ \dfrac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)\left[\alpha_1(j)A(j)-(j+1)\nu\mu\lambda_1(j)A(j+1)\right]}{2\mu^2\lambda_1(j)},\\ \textit{при} \ j=h_1,...,h_2-2;\\ \dfrac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)\alpha_1(h_2-1)A(h_2-1)}{2\mu^2\lambda_1(h_2-1)}, \textit{при} \ j=h_2-1;\end{cases}$$

$$\frac{\pi_{0j}^{(2)}}{\pi_{00}^{(1)}}=\begin{cases} Q(j),\ npu\ \ j=h_1,...,h_2-1; \\ \dfrac{B_2(j)D(h_1,h_2)}{B_2(h_2)},\ npu\ \ j=h_2,...,N; \end{cases}$$

$$\frac{\pi_{1j}^{(2)}}{\pi_{00}^{(1)}}=\begin{cases} \dfrac{\beta_2(j)Q(j)}{\mu},\ npu\ \ j=h_1,...,h_2-1; \\ \dfrac{\beta_2(j)B_2(j)D(h_1,h_2)}{\mu B_2(h_2)},\ npu\ \ j=h_2,...,N; \end{cases}$$

$$\frac{\pi_{2j}^{(2)}}{\pi_{00}^{(1)}}=\begin{cases} \dfrac{\alpha_2(j)Q(j)-(j+1)\nu\mu\lambda_2(j)Q(j+1)}{2\mu^2\lambda_2(j)},\ npu\ \ j=h_1,...,h_2-2; \\ \dfrac{\alpha_2(h_2-1)Q(h_2-1)-h_2\nu\mu\lambda_2(h_2-1)D(h_1,h_2)}{2\mu^2\lambda_2(h_2-1)},\ npu\ \ j=h_2-1; \\ \dfrac{(j+1)\nu\left(\mu+\beta_2(j+1)\right)B_2(j+1)D(h_1,h_2)}{\mu\lambda_2(j)B_2(h_2)},\ npu\ \ j=h_2,...N-1; \\ \dfrac{\alpha_2(N)B_2(N)D(h_1,h_2)}{2\mu^2\lambda_2(N)B_2(h_2)},\ npu\ \ j=N, \end{cases}$$

де

$$\pi_{00}^{(1)}=\Bigg[1+\mu^{-1}\beta_1(0)+\sum_{j=1}^{h_1-1}\left(1+\mu^{-1}\beta_1(j)\right)B_1(j)+$$

$$+\mu^{-1}\nu\sum_{j=0}^{h_1-2}\frac{(j+1)\left(\mu+\beta_1(j+1)\right)B_1(j+1)}{\lambda_1(j)}+$$

$$+\frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)}{2\mu^2}\Bigg\{2\mu^2\sum_{j=h_1}^{h_2-1}\left(1+\mu^{-1}\beta_1(j)\right)A(j)+$$

$$+\sum_{j=h_1}^{h_2-2}\frac{\left[\alpha_1(j)A(j)-(j+1)\nu\mu\lambda_1(j)A(j+1)\right]}{\lambda_1(j)}+$$

$$+\frac{1-h_1\nu\mu\lambda_1(h_1-1)A(h_1)}{\lambda_1(h_1-1)}+\frac{\alpha_1(h_2-1)A(h_2-1)}{\lambda_1(h_2-1)}\Bigg\}+\sum_{j=h_1}^{h_2-1}\left(1+\mu^{-1}\beta_2(j)\right)Q(j)+$$

$$+\frac{1}{2\mu^2}\sum_{j=h_1}^{h_2-2}\frac{\alpha_2(j)Q(j)-(j+1)\nu\mu\lambda_2(j)Q(j+1)}{\lambda_2(j)}+$$

$$+\frac{\alpha_2(h_2-1)Q(h_2-1)-h_2\nu\mu\lambda_2(h_2-1)D(h_1,h_2)}{2\mu^2\lambda_2(h_2-1)}+$$

$$+\frac{D(h_1,h_2)}{B_2(h_2)}\left\{\sum_{j=h_2}^{N}\left(1+\mu^{-1}\beta_2(j)\right)B_2(j)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\nu}{\mu}\sum_{j=h_2}^{N-1}\frac{(j+1)\left(\mu+\beta_2(j+1)\right)B_2(j+1)}{\lambda_2(j)}+\frac{\alpha_2(N)B_2(N)}{2\mu^2\lambda_2(N)}\right\}\right]^{-1}.$$

Доведення. Запишемо рівняння для стаціонарних імовірностей системи, використовуючи теорему про рівність потоків імовірностей через замкнений контур ([3], ст. 49). При цьому окремо розглянемо три області: область, де діє лише перший режим, тобто $0\le j\le h_1-1$; область де діє лише другий режим, тобто $h_2\le j\le N$ і область, де можуть діяти обидва режими, тобто $h_1\le j\le h_2-1$. Для спрощення позначень будемо вважати $\pi_{ij}^{(r)}(N)=\pi_{ij}^{(r)}$. Маємо наступні рівняння:

$$(j+1)\nu\left(\pi_{0\,j+1}^{(1)}+\pi_{1\,j+1}^{(1)}\right)=\lambda_1(j)\pi_{2\,j}^{(1)},\ \ j=0,1,...,h_1-2, \tag{3.26}$$

$$\left(\lambda_1(j)+j\nu\right)\pi_{0\,j}^{(1)}=\mu\pi_{1\,j}^{(1)},\ \ j=0,1,...,h_1-2, \tag{3.27}$$

$$\left(\lambda_1(j)+\mu+j\nu\right)\pi_{1\,j}^{(1)}=\lambda_1(j)\pi_{0\,j}^{(1)}+(j+1)\nu\pi_{0\,j+1}^{(1)}+2\mu\pi_{2\,j}^{(1)},\ \ j=0,1,...,h_1-2 \tag{3.28}$$

З рівнянь (3.26), (3.28) маємо

$$\left(\lambda_1(j)+\mu+j\nu\right)\pi_{1\,j}^{(1)}=\lambda_1(j)\pi_{0\,j}^{(1)}+\frac{(j+1)\nu\left(\lambda_1(j)+2\mu\right)}{\lambda_1(j)}\pi_{0\,j+1}^{(1)}+$$

$$+\frac{2\mu(j+1)\nu}{\lambda_1(j)}\pi_{1\,j+1}^{(1)},\ \ j=0,1,...,h_1-2.$$

Якщо тепер врахувати (3.27) та введені позначення, то останнє рівняння можемо переписати так

$$\alpha_1(j)\pi_{0j}^{(1)} = \gamma_1(j+1)\pi_{0\,j+1}^{(1)},\ \ j = 0,1,\ldots,h_1-2.$$

Позначимо $a(j) = \dfrac{\alpha_1(j)}{\gamma_1(j+1)}$. Тоді маємо рекурентне співвідношення

$$\pi_{0\,j+1}^{(1)} = a(j)\pi_{0j}^{(1)},\ \ j = 0,1,\ldots,h_1-2.$$

Звідки

$$\pi_{0j}^{(1)} = \prod_{k=1}^{j} a(j-k)\pi_{00}^{(1)} = \prod_{k=0}^{j-1} a(k)\pi_{00}^{(1)},\ \ j = 0,1,\ldots,h_1-2. \tag{3.29}$$

Тепер з (3.27) маємо

$$\pi_{1j}^{(1)} = \frac{\lambda_1(j)+j\nu}{\mu}\prod_{k=0}^{j-1} a(k)\pi_{00}^{(1)},\ \ j = 0,1,\ldots,h_1-2. \tag{3.30}$$

Аналогічно з (3.26) та (3.29), (3.30) випливає

$$\pi_{2j}^{(1)} = \frac{(j+1)\nu\left(\lambda_1(j+1)+\mu+(j+1)\nu\right)}{\lambda_1(j)\mu}\prod_{k=0}^{j} a(k)\pi_{00}^{(1)},\ \ j = 0,1,\ldots,h_1-2. \tag{3.31}$$

Враховуючи введені позначення, маємо

$$\pi_{0j}^{(1)} = B_1(j)\pi_{00}^{(1)},\ \ j = 1,\ldots,h_1-1,$$

$$\pi_{1j}^{(1)} = \frac{\beta_1(j)B_1(j)}{\mu}\pi_{00}^{(1)},\ \ j = 0,1,\ldots,h_1-2, \tag{3.32}$$

$$\pi_{2j}^{(1)} = \frac{(j+1)\nu\left(\mu+\beta_1(j+1)\right)B_1(j+1)}{\lambda_1(j)\mu}\pi_{00}^{(1)},\ \ j = 0,1,\ldots,h_1-2.$$

Напишемо рівняння для точок площини, де можуть діяти обидва режими.

$$\left(\lambda_1(j)+j\nu\right)\pi_{0j}^{(1)} = \mu\pi_{1j}^{(1)},\ j = h_1-1,\ldots,h_2-1. \tag{3.33}$$

$$\left(\lambda_1(j)+\mu+j\nu\right)\pi_{1j}^{(1)}=\lambda_1(j)\pi_{0j}^{(1)}+(j+1)\nu\pi_{0\,j+1}^{(1)}+2\mu\pi_{2j}^{(1)},\ \ j=h_1,...,h_2-2.$$
(3.34)

$$\left(\lambda_1(h_1-1)+\mu+(h_1-1)\nu\right)\pi_{1h_1-1}^{(1)}=\lambda_1(h_1-1)\pi_{0h_1-1}^{(1)}+$$

$$+h_1\nu\left(\pi_{0h_1}^{(1)}+\pi_{0h_1}^{(2)}\right)+2\mu\pi_{2h_1-1}^{(1)}, \qquad (3.35)$$

$$\left(\lambda_1(h_2-1)+\mu+(h_2-1)\nu\right)\pi_{1h_2-1}^{(1)}=\lambda_1(h_2-1)\pi_{0h_2-1}^{(1)}+2\mu\pi_{2h_2-1}^{(1)}, \qquad (3.36)$$

$$\left(\lambda_1(j)+2\mu\right)\pi_{2j}^{(1)}=\lambda_1(j)\pi_{1j}^{(1)}+\lambda_1(j-1)\pi_{2\,j-1}^{(1)}+(j+1)\nu\pi_{1\,j+1}^{(1)},\ j=h_1,...,h_2-2, \quad (3.37)$$

$$\left(\lambda_1(h_2-1)+2\mu\right)\pi_{2h_2-1}^{(1)}=\lambda_1(h_2-1)\pi_{1h_2-1}^{(1)}+\lambda_1(h_2-2)\pi_{2h_2-2}^{(1)}, \qquad (3.38)$$

$$\left(\lambda_1(h_1-1)+2\mu\right)\pi_{2h_1-1}^{(1)}=\lambda_1(h_1-1)\pi_{1h_1-1}^{(1)}+\lambda_1(h_1-2)\pi_{2h_1-2}^{(1)}+h_1\nu\left(\pi_{1h_1}^{(1)}+\pi_{1h_1}^{(2)}\right).$$

(3.39)

Другий режим задіяний лише в рівняннях (3.35) та (3.39). Тому спочатку розглянемо інші рівняння. З (3.33) маємо

$$\pi_{1j}^{(1)}=\frac{\beta_1(j)}{\mu}\pi_{0j}^{(1)},\ \ j=h_1-1,...,h_2-1 \qquad (3.40)$$

і, виключивши за допомогою (3.40) з решти рівнянь $\pi_{1j}^{(1)}$, після нескладних перетворень отримаємо наступні рівняння

$$\frac{\alpha_1(j)}{\lambda_1(j)\mu}\pi_{0j}^{(1)}=(j+1)\nu\pi_{0\,j+1}^{(1)}+2\mu\pi_{2j}^{(1)},\ \ j=h_1,...,h_2-2, \qquad (3.41)$$

$$\frac{\alpha_1(h_2-1)}{\lambda_1(h_2-1)\mu}\pi_{0h_2-1}^{(1)}=2\mu\pi_{2h_2-1}^{(1)}, \qquad (3.42)$$

$$\left(\lambda_1(j)+2\mu\right)\pi_{2j}^{(1)}=\frac{\lambda_1(j)\beta_1(j)}{\mu}\pi_{0j}^{(1)}+\lambda_1(j-1)\pi_{2\,j-1}^{(1)}+\frac{(j+1)\nu\beta_1(j+1)}{\mu}\pi_{0\,j+1}^{(1)},$$

$$j=h_1,...,h_2-2, \qquad (3.43)$$

$$\left(\lambda_1\left(h_2-1\right)+2\mu\right)\pi^{(1)}_{2h_2-1}=\frac{\lambda_1\left(h_2-1\right)\beta_1\left(h_2-1\right)}{\mu}\pi^{(1)}_{0h_2-1}+\lambda_1\left(h_2-2\right)\pi^{(1)}_{2h_2-2}. \qquad (3.44)$$

За допомогою формули (3.41) виключимо $\pi^{(1)}_{2j}$ з рівняння (3.43). Після відповідних перетворень отримаємо для $j=h_1,...,h_2-2$

$$\left(j+1\right)\nu\mu\left(\lambda_1\left(j\right)+2\mu+2\beta_1\left(j+1\right)\right)\pi^{(1)}_{0j+1}+$$

$$+\frac{2\mu\lambda_1^2\left(j\right)\beta_1\left(j\right)-\left(\lambda_1\left(j\right)+2\mu\right)\alpha_1\left(j\right)-j\nu\mu\lambda_1\left(j-1\right)\lambda_1\left(j\right)}{\lambda_1\left(j\right)}\pi^{(1)}_{0j}+\alpha_1\left(j-1\right)\pi^{(1)}_{0j-1}=0$$

і з врахуванням позначень перед теоремою 3.3 останнє рівняння перепишеться так

$$\gamma_1\left(j+1\right)\pi^{(1)}_{0j+1}-\left(\alpha_1\left(j\right)+\gamma_1\left(j\right)\right)\pi^{(1)}_{0j}+\alpha_1\left(j-1\right)\pi^{(1)}_{0j-1}=0,\ \ j=h_1,...,h_2-2,$$

що дає нам h_2-h_1-1 рівнянь для h_2-h_1+1 невідомих $\pi^{(1)}_{0h_1-1},...,\pi^{(1)}_{0h_2-2}$. Нам потрібно ще одне рівняння, яке ми отримаємо з (3.42), (3.44) та (3.41) при $j=h_2-2$. Після відповідних обчислень будемо мати:

$$\alpha_1\left(h_2-2\right)\pi^{(1)}_{0h_2-2}-\left(\alpha_1\left(h_2-1\right)+\gamma_1\left(h_2-1\right)\right)\pi^{(1)}_{0h_2-1}=0.$$

Отже, маємо наступну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases}\left(\alpha_1\left(h_1\right)+\gamma_1\left(h_1\right)\right)\pi^{(1)}_{0h_1}-\gamma_1\left(h_1+1\right)\pi^{(1)}_{0h_1+1}=\alpha_1\left(h_1-1\right)\pi^{(1)}_{0h_1-1},\\ -\alpha_1\left(j-1\right)\pi^{(1)}_{0j-1}+\left(\alpha_1\left(j\right)+\gamma_1\left(j\right)\right)\pi^{(1)}_{0j}-\gamma_1\left(j+1\right)\pi^{(1)}_{0j+1}=0;\ \ j=h_1+1,...,h_2-2,\\ -\alpha_1\left(h_2-2\right)\pi^{(1)}_{0h_2-2}+\left(\alpha_1\left(h_2-1\right)+\gamma_1\left(h_2-1\right)\right)\pi^{(1)}_{0h_2-1}=0,\end{cases} \qquad (3.45)$$

де $\pi^{(1)}_{0h_1-1}$ будемо вважати величиною відомою.

Позначимо матрицю

$$A\left(h_1,h_2\right)=\begin{pmatrix}\widehat{\alpha}\left(h_1\right) & -\gamma_1\left(h_1+1\right) & 0 & 0 & ... & 0 & 0\\ -\alpha_1\left(h_1\right) & \widehat{\alpha}\left(h_1+1\right) & -\gamma_1\left(h_1+2\right) & 0 & ... & 0 & 0\\ 0 & -\alpha_1\left(h_1+1\right) & \widehat{\alpha}\left(h_1+2\right) & \gamma_1\left(h_1+3\right) & ... & 0 & 0\\ & & & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -\alpha_1\left(h_2-2\right) & \widehat{\alpha}\left(h_2-1\right)\end{pmatrix},$$

де $\widehat{\alpha}\left(j\right)=\alpha_1\left(j\right)+\gamma_1\left(j\right)$.

Нехай $\overline{1}$ позначає вектор-стовпчик з $h_2 - h_1$ координатами, перша координата якого дорівнює одиниці, а решта нулю і нехай

$$A^{-1}(h_1,h_2)\overline{1} = \begin{pmatrix} A(h_1) \\ A(h_1+1) \\ \dots \\ A(h_2-1) \end{pmatrix}, \qquad \pi_0^{(1)} = \begin{pmatrix} \pi_{0h_1}^{(1)} \\ \pi_{0h_1+1}^{(1)} \\ \dots \\ \pi_{0h_2-1}^{(1)} \end{pmatrix}. \tag{3.46}$$

Тепер система (3.45) запишеться так

$$A(h_1,h_2)\pi_0^{(1)} = \alpha(h_1-1)\pi_{0h_1-1}^{(1)}\overline{1}.$$

Звідки

$$\pi_{0j}^{(1)} = \alpha_1(h_1-1)\pi_{0h_1-1}^{(1)}A(j) = \alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)A(j)\pi_{00}^{(1)} \quad j = h_1,\dots,h_2-1 \tag{3.47}$$

Отже, з урахуванням рівнянь (3.32) маємо

$$\pi_{0j}^{(1)} = \begin{cases} B_1(j)\pi_{00}^{(1)}, \ \textit{при} \ \ j = 1,\dots,h_1-1; \\ \alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)A(j)\pi_{00}^{(1)}, \ \textit{при} \ \ j = h_1,\dots,h_2-1; \end{cases} \tag{3.48}$$

З формул (3.32) та (3.40) отримаємо

$$\pi_{1j}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{\beta_1(j)B_1(j)}{\mu}\pi_{00}^{(1)}, \ \textit{при} \ \ j = 0,\dots,h_1-1; \\ \dfrac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)\beta_1(j)A(j)}{\mu}\pi_{00}^{(1)}, \ \textit{при} \ \ j = h_1,\dots,h_2-1. \end{cases} \tag{3.49}$$

Запишемо тепер формули для $\pi_{2j}^{(1)}$ при $j = h_1-1,\dots,h_2-2$.

З (3.41) та (3.48), (3.49) маємо

$$\pi_{2j}^{(1)} = \left[\frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)\alpha_1(j)A(j)}{2\mu^2\lambda_1(j)} - \frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)(j+1)\nu A(j+1)}{2\mu}\right]\pi_{00}^{(1)} =$$

$$= \frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)\left[\alpha_1(j)A(j)-(j+1)\nu\mu\lambda_1(j)A(j+1)\right]}{2\mu^2\lambda_1(j)}\pi_{00}^{(1)}, \ \ j = h_1,\dots,h_2-2.$$

Тепер залишилось знайти $\pi_{2h_1-1}^{(1)}$ та $\pi_{2h_2-1}^{(1)}$. З (3.43) при $j=h_1$ маємо

$$\pi_{2h_1-1}^{(1)}=\frac{\lambda_1(h_1)+2\mu}{\lambda_1(h_1-1)}\pi_{2h_1}^{(1)}-\frac{(h_1+1)\nu\beta_1(h_1+1)}{\mu\lambda_1(h_1-1)}\pi_{0h_1+1}^{(1)}-\frac{\lambda_1(h_1)\beta_1(h_1)}{\mu\lambda_1(h_1-1)}\pi_{0h_1}^{(1)}=$$

$$=\frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)}{2\mu^2\lambda_1(h_1-1)\lambda_1(h_1)}\{(\lambda_1(h_1)+2\mu)[\alpha_1(h_1)A(h_1)-(h_1+1)\nu\mu\lambda_1(h_1)A(h_1+1)]-$$

$$-2(h_1+1)\nu\mu\lambda_1(h_1)\beta_1(h_1+1)A(h_1+1)-2\mu\lambda_1^2(h_1)\beta_1(h_1)A(h_1)\}\pi_{00}^{(1)}=$$

$$=\frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)}{2\mu^2\lambda_1(h_1-1)\lambda_1(h_1)}\{[(\lambda_1(h_1)+2\mu)\alpha_1(h_1)-2\mu\lambda_1^2(h_1)\beta_1(h_1)]A(h_1)-$$

$$-(h_1+1)\nu\mu\lambda_1(h_1)A(h_1+1)[\lambda_1(h_1)+2\mu+2\beta_1(h_1+1)]\}\pi_{00}^{(1)}=$$

$$=\frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)}{2\mu^2\lambda_1(h_1-1)}\{[\gamma_1(h_1)+\alpha_1(h_1)-h_1\nu\mu\lambda_1(h_1-1)]A(h_1)-$$

$$-\gamma_1(h_1+1)A(h_1+1)\}\pi_{00}^{(1)}. \qquad (3.50)$$

З очевидної рівності

$$A(h_1,h_2)\begin{pmatrix} A(h_1) \\ A(h_1+1) \\ \dots \\ A(h_2-1)\end{pmatrix}=\bar{1}$$

отримаємо, що

$$[\gamma_1(h_1)+\alpha_1(h_1)]A(h_1)-\gamma_1(h_1+1)A(h_1+1)=1,$$

$$-\alpha_1(j-1)A(j-1)+(\alpha_1(j)+\gamma_1(j))A(j)-\gamma_1(j+1)A(j+1)=0,$$

$$j=h_1+1,\dots,h_2-2, \qquad (3.51)$$

$$-\alpha_1(h_2-2)A(h_2-2)+(\alpha_1(h_2-1)+\gamma_1(h_2-1))A(h_2-1)=0.$$

З врахуванням (3.51) можемо переписати (3.50) наступним чином

$$\pi_{2h_1-1}^{(1)}=\frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)}{2\mu^2\lambda_1(h_1-1)}(1-h_1\nu\mu\lambda_1(h_1-1))A(h_1)\pi_{00}^{(1)}. \qquad (3.52)$$

З (3.42) отримаємо

$$\pi_{2h_2-1}^{(1)} = \frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)\alpha_1(h_2-1)A(h_2-1)}{2\mu^2\lambda_1(h_2-1)}.$$

Отже, маємо

$$\pi_{2j}^{(1)} = \frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)}{2\mu^2}\begin{cases} \dfrac{1-h_1\nu\mu\lambda_1(h_1-1)A(h_1)}{\lambda_1(h_1-1)}\pi_{00}^{(1)}, \, при \;\; j=h_1-1; \\ \dfrac{\alpha_1(j)A(j)-(j+1)\nu\mu\lambda_1(j)A(j+1)}{\lambda_1(j)}\pi_{00}^{(1)}, \, при \;\; j=h_1,...,h_2-2; \\ \dfrac{\alpha_1(h_2-1)A(h_2-1)}{\lambda_1(h_2-1)}\pi_{00}^{(1)}, \, при \;\; j=h_2-1. \end{cases} \tag{3.53}$$

Перейдемо тепер до тієї частини фазового простору, де можуть бути задіяні обидва режими. З рис. 3.2 видно, що це будуть площини розміщені на висоті $j=h_1+1,...,h_2-2$ і з цих площин переходів, які змінюють режим немає. Зміна режиму відбувається з площини $j=h_1$ (зміна режиму з 2 на 1) і з площини $j=h_2-1$ (зміна режиму з 1 на 2). Враховуючи ці обставини, напишемо рівняння для потоків імовірностей.

$$(j+1)\nu\left(\pi_{0\,j+1}^{(1)}+\pi_{0\,j+1}^{(2)}+\pi_{1\,j+1}^{(1)}+\pi_{1\,j+1}^{(2)}\right)=\lambda_1(j)\pi_{2j}^{(1)}+\lambda_2(j)\pi_{2j}^{(2)}, \quad j=h_1,...,h_2-2 \tag{3.54}$$

$$(\lambda_2(j)+j\nu)\pi_{0j}^{(2)}=\mu\pi_{1j}^{(2)}, \quad j=h_1,...,h_2. \tag{3.55}$$

$$(\lambda_2(j)+\mu+j\nu)\pi_{1j}^{(2)}=\lambda_2(j)\pi_{0j}^{(2)}+2\mu\pi_{2j}^{(2)}+(j+1)\nu\pi_{0\,j+1}^{(2)}, \quad j=h_1,...,h_2. \tag{3.56}$$

Сюди ще потрібно долучити рівняння (3.35) та (3.39), в яких теж задіяний другий режим.

$$(\lambda_1(h_1-1)+\mu+(h_1-1)\nu)\pi_{1h_1-1}^{(1)}=\lambda_1(h_1-1)\pi_{0h_1-1}^{(1)}+h_1\nu\left(\pi_{0h_1}^{(1)}+\pi_{0h_1}^{(2)}\right)+2\mu\pi_{2h_1-1}^{(1)}, \tag{3.57}$$

$$(\lambda_1(h_1-1)+2\mu)\pi_{2h_1-1}^{(1)}=\lambda_1(h_1-1)\pi_{1h_1-1}^{(1)}+\lambda_1(h_1-2)\pi_{2h_1-2}^{(1)}+h_1\nu\left(\pi_{1h_1}^{(1)}+\pi_{1h_1}^{(2)}\right). \tag{3.58}$$

Відмітимо, що рівняння (3.57), (3.58) є залежними. Дійсно, якщо рівняння (3.57) та (3.58) додати, то отримаємо

$$h_1 \nu \left(\pi_{0h_1}^{(1)} + \pi_{0h_1}^{(2)} + \pi_{1h_1}^{(1)} + \pi_{1h_1}^{(2)} \right) = \left(\mu + \left(h_1 - 1 \right) \nu \right) \pi_{1h_1-1}^{(1)} -$$

$$-\lambda_1 \left(h_1 - 1 \right) \left(\pi_{0h_1-1}^{(1)} - \pi_{2h_1-1}^{(1)} \right) - \lambda_1 \left(h_1 - 2 \right) \pi_{2h_1-2}^{(1)} . \qquad (3.59)$$

З формул (3.48), (3.49) та (3.32) випливає, що

$$\left(\mu + \left(h_1 - 1 \right) \nu \right) \pi_{1h_1-1}^{(1)} = \lambda_1 \left(h_1 - 1 \right) \pi_{0h_1-1}^{(1)} + \lambda_1 \left(h_1 - 2 \right) \pi_{2h_1-2}^{(1)} ,$$

а отже (3.59) перепишеться так

$$h_1 \nu \left(\pi_{0h_1}^{(1)} + \pi_{0h_1}^{(2)} + \pi_{1h_1}^{(1)} + \pi_{1h_1}^{(2)} \right) = \lambda_1 \left(h_1 - 1 \right) \pi_{2h_1-1}^{(1)} . \qquad (3.60)$$

Але це є рівняння для рівності потоків імовірностей через пряму BB_1, яка ділить фазовий простір на дві частини. Отже, одне з рівнянь (3.57) та (3.58) можемо опустити, а замість нього розглядати (3.60). Все це разом дає наступні співвідношення для ймовірностей

$$h_1 \nu \left(\pi_{0h_1}^{(1)} + \pi_{0h_1}^{(2)} + \pi_{1h_1}^{(1)} + \pi_{1h_1}^{(2)} \right) = \lambda_1 \left(h_1 - 1 \right) \pi_{2h_1-1}^{(1)} , \qquad (3.61)$$

$$\left(j + 1 \right) \nu \left(\pi_{0j+1}^{(1)} + \pi_{0j+1}^{(2)} + \pi_{1j+1}^{(1)} + \pi_{1j+1}^{(2)} \right) = \lambda_1 \left(j \right) \pi_{2j}^{(1)} + \lambda_2 \left(j \right) \pi_{2j}^{(2)}, \quad j = h_1, ..., h_2 - 2 \qquad (3.62)$$

$$\left(\lambda_2 \left(j \right) + \mu + j \nu \right) \pi_{1j}^{(2)} = \lambda_2 \left(j \right) \pi_{0j}^{(2)} + 2 \mu \pi_{2j}^{(2)} + \left(j + 1 \right) \nu \pi_{0j+1}^{(2)}, \quad j = h_1, ..., h_2 \qquad (3.63)$$

$$\left(\lambda_1 \left(h_1 - 1 \right) + \mu + \left(h_1 - 1 \right) \nu \right) \pi_{1h_1-1}^{(1)} = \lambda_1 \left(h_1 - 1 \right) \pi_{0h_1-1}^{(1)} + h_1 \nu \left(\pi_{0h_1}^{(1)} + \pi_{0h_1}^{(2)} \right) + 2 \mu \pi_{2h_1-1}^{(1)}, \quad (3.64)$$

$$\left(\lambda_2 \left(j \right) + j \nu \right) \pi_{0j}^{(2)} = \mu \pi_{1j}^{(2)}, \quad j = h_1, ..., h_2 . \qquad (3.65)$$

За допомогою (3.65) виключаємо $\pi_{1j}^{(2)}$ з (3.63). Маємо

$$\frac{\left(\lambda_2 \left(j \right) + \mu + j \nu \right) \left(\left(\lambda_2 \left(j \right) + j \nu \right) \right)}{\mu} \pi_{0j}^{(2)} = \lambda_2 \left(j \right) \pi_{0j}^{(2)} + 2 \mu \pi_{2j}^{(2)} + \left(j + 1 \right) \nu \pi_{0j+1}^{(2)}$$

або

$$\alpha_2(j)\pi_{0j}^{(2)} = \lambda_2(j)2\mu^2\pi_{2j}^{(2)} + \lambda_2(j)\mu(j+1)\nu\pi_{0\,j+1}^{(2)}, \quad j = h_1,...,h_2. \qquad (3.66)$$

Розглянемо тепер рівняння (3.62). Після виключення $\pi_{1\,j+1}^{(2)}$ це рівняння перепишеться так

$$\frac{(\lambda_2(j+1)+\mu+(j+1)\nu)(j+1)\nu}{\mu}\pi_{0\,j+1}^{(2)} = \lambda_2(j)\pi_{2j}^{(2)} + \hat{b}(j), \quad j = h_1,...,h_2-2,$$

(3.67)

де

$$\hat{b}(j) = \lambda_1(j)\pi_{2j}^{(1)} - (j+1)\nu\left(\pi_{0\,j+1}^{(1)} + \pi_{1\,j+1}^{(1)}\right), \quad j = h_1,...,h_2-2. \qquad (3.68)$$

Спростимо тепер вираз для $\hat{b}(j)$. Маємо

$$\lambda_1(j)\pi_{2j}^{(1)} - (j+1)\nu\left(\pi_{0\,j+1}^{(1)} + \pi_{1\,j+1}^{(1)}\right) = \frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)}{2\mu^2}(\alpha_1(j)A(j) - \lambda_1(j)\mu(j+1)\nu A(j+1))\pi_{00}^{(1)} -$$
$$-(j+1)\nu\left(\frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)}{\mu}\beta_1(j+1)A(j+1) + \alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)A(j+1)\right)\pi_{00}^{(1)} =$$

$$= \frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)}{2\mu^2}\{\alpha_1(j)A(j) - \lambda_1(j)\mu(j+1)\nu A(j+1) - (j+1)\nu[2\mu\beta_1(j+1)A(j+1) +$$
$$+ 2\mu^2 A(j+1)]\}\pi_{00}^{(1)} = \frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)}{2\mu^2}(\alpha_1(j)A(j) - \gamma_1(j+1)A(j+1))\pi_{00}^{(1)}.$$

З (3.51) випливає, що

$\alpha_1(j-1)A(j-1) - \gamma_1(j)A(j) = \alpha_1(j)A(j) - \gamma_1(j+1)A(j+1)$, $j = h_1+1,...,h_2-2$,
а отже

$$\alpha_1(j)A(j) - \gamma_1(j+1)A(j+1) = \alpha_1(h_1)A(h_1) - \gamma_1(h_1+1)A(h_1+1) = b(h_1),$$

Тепер, враховуючи введені позначення, маємо

$$2\mu^2\hat{b}(j) = \alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)b(h_1)\pi_{00}^{(1)}, \quad j = h_1,...,h_2-2.$$

Помножимо (3.67) на $-2\mu^2$ та додамо до (3.66). Це дає

$$\alpha_2(j)\pi_{0j}^{(2)} - 2\mu(j+1)\nu(\lambda_2(j+1)+\mu+(j+1)\nu)\pi_{0\,j+1}^{(2)} = -2\mu^2\hat{b}(j) + \lambda_2(j)\mu(j+1)\nu\pi_{0\,j+1}^{(2)}$$
або

$$\alpha_2(j)\pi_{0j}^{(2)} - \gamma_2(j+1)\pi_{0\,j+1}^{(2)} = -\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)b(h_1)\pi_{00}^{(1)}.$$

Отже, маємо наступне рекурентне співвідношення для $\pi_{0j}^{(2)}$

$$\pi_{0\,j+1}^{(2)} = \frac{\alpha_2(j)}{\gamma_2(j+1)}\pi_{0j}^{(1)} + \frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)b(h_1)}{\gamma_2(j+1)}\pi_{00}^{(1)}, \quad j = h_1,\dots,h_2-2. \qquad (3.69)$$

Звідси, використовуючи (3.51), маємо

$$\pi_{0j}^{(2)} = \pi_{0h_1}^{(2)}\prod_{l=h_1}^{j-1}\frac{\alpha_2(l)}{\gamma_2(l+1)} + \alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)b(h_1)\sum_{l=h_1}^{j-1}\frac{1}{\gamma_2(l+1)}\prod_{p=l+1}^{j-1}\frac{\alpha_2(p)}{\gamma_2(p+1)}\pi_{00}^{(1)} =$$

$$= \pi_{0h_1}^{(2)}B_2(j) + \alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)B_2(j)b(h_1)\sum_{l=h_1}^{j-1}\frac{1}{\gamma_2(l+1)B_2(l+1)}\pi_{00}^{(1)}, \quad j = h_1,\dots,h_2-1$$

.(3.70)

Знайдемо тепер $\pi_{0h_1}^{(2)}$. Для цього скористаємось рівнянням (3.61), переписавши його так

$$\frac{(\lambda_2(h_1) + \mu + h_1\nu)h_1\nu}{\mu}\pi_{0h_1}^{(2)} = \lambda_1(h_1-1)\pi_{2h_1-1}^{(1)} - h_1\nu\left(\pi_{0h_1}^{(1)} + \pi_{1h_1}^{(1)}\right).$$

Якщо використати (3.53) та (3.48), (3.49), то праву частину цієї рівності можна переписати у вигляді

$$\frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)}{2\mu^2}\left[1 - \lambda_1(h_1-1)\mu h_1\nu A(h_1) - 2\mu h_1\nu\beta_1(h_1)A(h_1) - 2\mu^2 h_1\nu A(h_1)\right]\pi_{00}^{(1)} =$$

$$= \frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)}{2\mu^2}\left[1 - \gamma_1(h_1)A(h_1)\right]\pi_{00}^{(1)}.$$

Отже,

$$\pi_{0h_1}^{(2)} = \frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)(1-\gamma_1(h_1)A(h_1))}{2\mu h_1\nu(\mu + \beta_2(h_1))}\pi_{00}^{(1)}. \qquad (3.71)$$

Враховуючи введені перед формулюванням теореми 3.3 позначення, з формул (3.70), (3.71) отримаємо

$$\pi_{0j}^{(2)} = Q(j)\pi_{00}^{(1)}, \quad j = h_1,..., h_2 - 1,$$
(3.72)

а отже

$$\pi_{1j}^{(2)} = \frac{\lambda_2(j) + j\nu}{\mu} Q(j)\pi_{00}^{(1)} = \frac{\beta_2(j)Q(j)}{\mu}\pi_{00}^{(1)}, \quad j = h_1,..., h_2 - 1, \qquad (3.73)$$

а з (3.56) маємо для $j = h_1,..., h_2 - 2$

$$\pi_{2j}^{(2)} = \frac{1}{2\mu}\left[(\beta_2(j) + \mu)\pi_{1j}^{(2)} - \lambda_2(j)\pi_{0j}^{(2)} - (j+1)\nu\pi_{0\,j+1}^{(2)}\right] = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{\beta_2(j)(\beta_2(j) + \mu)Q(j)}{\mu} - \right.$$

$$\left. -\lambda_2(j)Q(j) - (j+1)\nu Q(j+1)\right]\pi_{00}^{(1)} = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{\alpha_2(j)Q(j)}{\lambda_2(j)\mu} - (j+1)\nu Q(j+1)\right]\pi_{00}^{(1)},$$

$$j = h_1,..., h_2 - 2. \qquad (3.74)$$

Тепер знайдемо ймовірності $\pi_{0j}^{(2)}$, $\pi_{1j}^{(2)}$, $\pi_{2j}^{(2)}$, $j = h_2,..., N$, $\pi_{2h_2-1}^{(2)}$. Аналогічно тому, як ми робили спочатку, напишемо рівняння для точок площини, які лежать там, де діє лише другий режим. Маємо

$$(j+1)\nu\left(\pi_{0\,j+1}^{(2)} + \pi_{1\,j+1}^{(2)}\right) = \lambda_2(j)\pi_{2j}^{(2)}, \quad j = h_2,..., N-1, \qquad (3.75)$$

$$(\lambda_2(j) + j\nu)\pi_{0j}^{(2)} = \mu\pi_{1j}^{(2)}, \quad j = h_2,..., N, \qquad (3.76)$$

$$(\lambda_2(j) + \mu + j\nu)\pi_{1j}^{(2)} = \lambda_2(j)\pi_{0j}^{(2)} + 2\mu\pi_{2j}^{(2)} + (j+1)\nu\pi_{0\,j+1}^{(2)}, \quad j = h_2,..., N-1, \qquad (3.77)$$

$$(\lambda_2(N) + \mu + N\nu)\pi_{1N}^{(2)} = \lambda_2(N)\pi_{0N}^{(2)} + 2\mu\pi_{2N}^{(2)}, \qquad (3.78)$$

$$\lambda_2(N)\pi_{1N}^{(2)} + \lambda_2(N-1)\pi_{1N-1}^{(2)} = 2\mu\pi_{2N}^{(2)}. \qquad (3.79)$$

За допомогою (3.76) виключаємо $\pi_{1j}^{(2)}$ з (3.75) та (3.77)

$$(j+1)\nu\left(1 + \frac{\lambda_2(j+1) + (j+1)\nu}{\mu}\right)\pi_{0\,j+1}^{(2)} = \lambda_2(j)\pi_{2j}^{(2)}, \quad j = h_2,..., N-1,$$

$$\frac{(\lambda_2(j) + \mu + j\nu)(\lambda_2(j) + j\nu)}{\mu}\pi_{0j}^{(2)} = \lambda_2(j)\pi_{0j}^{(2)} + 2\mu\pi_{2j}^{(2)} + (j+1)\nu\pi_{0\,j+1}^{(2)}, \quad j = h_2,..., N-1$$

або

$$\frac{(j+1)\nu(\lambda_2(j+1)+\mu+(j+1)\nu)}{\mu}\pi_{0\,j+1}^{(2)}=\lambda_2(j)\pi_{2\,j}^{(2)},\quad j=h_2,...,N-1,$$

$$\frac{\alpha_2(j)}{\lambda_2(j)\mu}\pi_{0\,j}^{(2)}=2\mu\pi_{2\,j}^{(2)}+(j+1)\nu\pi_{0\,j+1}^{(2)},\quad j=h_2,...,N-1.$$

Помноживши перше з цих рівнянь на 2μ, а друге на $-\lambda_2(j)$ та додавши їх, отримаємо

$$[2(j+1)\nu(\lambda_2(j+1)+\mu+(j+1)\nu)+\lambda_2(j)(j+1)\nu]\pi_{0\,j+1}^{(2)}=\frac{\alpha_2(j)}{\mu}\pi_{0\,j}^{(2)},\quad j=h_2,...,N-1.$$

Після спрощень маємо

$$\gamma_2(j+1)\pi_{0\,j+1}^{(2)}=\alpha_2(j)\pi_{0\,j}^{(2)},$$

що дає нам наступне рекурентне співвідношення

$$\pi_{0\,j+1}^{(2)}=\frac{\alpha_2(j)}{\gamma_2(j+1)}\pi_{0\,j}^{(2)},\quad j=h_2,...,N-1.$$

Звідси

$$\pi_{0\,j+1}^{(2)}=\prod_{l=j}^{j-k}\frac{\alpha_2(l)}{\gamma_2(l+1)}\pi_{0\,j-k}^{(2)},\quad k=0,...,j-h_2.$$

Отже,

$$\pi_{0\,j+1}^{(2)}=\prod_{l=j}^{h_2}\frac{\alpha_2(l)}{\gamma_2(l+1)}\pi_{0h_2}^{(2)}=\prod_{l=h_2}^{j}\frac{\alpha_2(l)}{\gamma_2(l+1)}\pi_{0h_2}^{(2)}$$

або

$$\pi_{0\,j}^{(2)}=\prod_{l=h_2}^{j-1}\frac{\alpha_2(l)}{\gamma_2(l+1)}\pi_{0h_2}^{(2)}=\frac{B_2(j)}{B_2(h_2)}\pi_{0h_2}^{(2)}.\quad j=h_{2,}...,N. \tag{3.80}$$

З рівняння (3.76) знаходимо

$$\pi_{1\,j}^{(2)}=\frac{(\lambda_2(j)+j\nu)B_2(j)}{\mu B_2(h_2)}\pi_{0h_2}^{(2)}=\frac{\beta_2(j)B_2(j)}{\mu B_2(h_2)}\pi_{0h_2}^{(2)},\quad j=h_2,...,N. \tag{3.81}$$

Аналогічно з рівняння (3.75) маємо

$$\pi_{2j}^{(2)} = \frac{(j+1)\nu(\mu+\beta_2(j+1))B_2(j+1)}{\lambda_2(j)\mu B_2(h_2)}\pi_{0h_2}^{(2)}, \quad j = h_2,..., N-1. \tag{3.82}$$

Залишилось знайти $\pi_{0h_2}^{(2)}$, $\pi_{2h_2-1}^{(2)}$, $\pi_{2N}^{(2)}$. З (3.78), (3.80) та (3.81) маємо $\pi_{2N}^{(2)}$

$$\pi_{2N}^{(2)} = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{(\lambda_2(N)+\mu+N\nu)(\lambda_2(N)+N\nu)}{\mu} - \lambda_2(N)\right]\pi_{0N}^{(2)} = \frac{\alpha_2(N)B_2(N)}{2\lambda_2(N)\mu^2 B_2(h_2)}\pi_{0h_2}^{(2)}. \tag{3.83}$$

Тепер знайдемо $\pi_{0h_2}^{(2)}$, $\pi_{2h_2-1}^{(2)}$. Для цього використаємо той факт, що площина $j = h_2 - 1$ ділить фазовий простір на дві частини. Це дає рівняння

$$h_2\nu\left(\pi_{0h_2}^{(2)} + \pi_{1h_2}^{(2)}\right) = \lambda_1(h_2-1)\pi_{2h_2-1}^{(1)} + \lambda_2(h_2-1)\pi_{2h_2-1}^{(2)}$$

або, врахувавши (3.65),

$$\frac{h_2\nu(\mu+\beta_2(h_2))}{\mu}\pi_{0h_2}^{(2)} = \lambda_1(h_2-1)\pi_{2h_2-1}^{(1)} + \lambda_2(h_2-1)\pi_{2h_2-1}^{(2)}. \tag{3.84}$$

Ще одне рівняння маємо з (3.66) при $j = h_2 - 1$

$$\alpha_2(h_2-1)\pi_{0h_2-1}^{(2)} = 2\mu^2\lambda_2(h_2-1)\pi_{2h_2-1}^{(2)} + \lambda_2(h_2-1)\mu h_2\nu\pi_{0h_2}^{(2)}. \tag{3.85}$$

Це рівняння та (3.84) дають

$$\gamma_2(h_2)\pi_{0h_2}^{(2)} = \alpha_2(h_2-1)\pi_{0h_2-1}^{(2)} + 2\mu^2\lambda_1(h_2-1)\pi_{2h_2-1}^{(1)} =$$

$$= [\alpha_2(h_2-1)Q_2(h_2-1) + \alpha_1(h_1-1)\alpha_1(h_2-1)A(h_2-1)B_1(h_1-1)]\pi_{00}^{(1)}.$$

Звідки

$$\pi_{0h_2}^{(2)} = D(h_1,h_2)\pi_{00}^{(1)}, \tag{3.86}$$

де $D(h_1,h_2)$ введено перед формулюванням теореми 3.3.

Підставивши (3.81) в (3.80) та врахувавши (3.72), отримаємо

$$\pi_{2h_2-1}^{(2)} = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{\alpha_2(h_2-1)}{\lambda_2(h_2-1)\mu}\pi_{0h_2-1}^{(2)} - h_2\nu\pi_{0h_2}^{(2)}\right] = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{\alpha_2(h_2-1)}{\lambda_2(h_2-1)\mu}Q(h_2-1) - h_2\nu D(h_1,h_2)\right]\pi_{00}^{(1)} =$$

$$= \frac{\alpha_2(h_2-1)Q(h_2-1) - \lambda_2(h_2-1)\mu h_2\nu D(h_1,h_2)}{2\lambda_2(h_2-1)\mu^2}\pi_{00}^{(1)}.$$

Для того, щоб знайти $\pi_{00}^{(1)}$ використовуємо умову нормування

$$\sum_{j=0}^{h_2-1}\pi_{0j}^{(1)}+\sum_{j=0}^{h_2-1}\pi_{1j}^{(1)}+\sum_{j=0}^{h_2-1}\pi_{2j}^{(1)}+\sum_{j=h_1}^{N}\pi_{0j}^{(2)}+\sum_{j=h_1}^{N}\pi_{1j}^{(2)}+\sum_{j=h_1}^{N}\pi_{2j}^{(2)}=1.$$

Підставляючи сюди отримані вище вирази для імовірностей, отримаємо

$$\pi_{00}^{(1)}\Bigg[1+\sum_{j=1}^{h_1-1}B_1(j)+\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)\sum_{j=h_1}^{h_2-1}\left(1+\mu^{-1}\beta_1(j)\right)A(j)+\mu^{-1}\sum_{j=0}^{h_1-2}\beta_1(j)B_1(j)+$$

$$+\mu^{-1}\nu\sum_{j=0}^{h_1-2}\frac{(j+1)(\mu+\beta_1(j+1))B_1(j+1)}{\lambda_1(j)}+\frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)[1-h_1\nu\mu\lambda_1(h_1-1)A(h_1)]}{2\mu^2\lambda_1(h_1-1)}+$$

$$+\frac{\alpha_1(h_1-1)B_1(h_1-1)}{2\mu^2}\left\{\sum_{j=h_1}^{h_2-2}\frac{[\alpha_1(j)A(j)-(j+1)\nu\mu\lambda_1(j)A(j+1)]}{\lambda_1(j)}+\frac{\alpha_1(h_2-1)A(h_2-1)}{\lambda_1(h_2-1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-h_1\nu\mu\lambda_1(h_1-1)A(h_1)}{\lambda_1(h_1-1)}\right\}+\sum_{j=h_1}^{h_2-1}\left(1+\mu^{-1}\beta_2(j)\right)Q(j)+$$

$$+\frac{1}{2\mu^2}\sum_{j=h_1}^{h_2-2}\frac{\alpha_2(j)Q(j)-(j+1)\nu\mu\lambda_2(j)Q(j+1)}{\lambda_2(j)}+\frac{\alpha_2(h_2-1)Q(h_2-1)-h_2\nu\mu\lambda_2(h_2-1)D(h_1,h_2)}{2\mu^2\lambda_2(h_2-1)}+$$

$$+\frac{D(h_1,h_2)}{B_2(h_2)}\left\{\sum_{j=h_2}^{N}\left(1+\mu^{-1}\beta_2(j)\right)B_2(j)+\frac{\nu}{\mu}\sum_{j=h_2}^{N-1}\frac{(j+1)(\mu+\beta_2(j+1))B_2(j+1)}{\lambda_2(j)}+\frac{\alpha_2(N)B_2(N)}{2\mu^2\lambda_2(N)}\right\}\Bigg]=1$$

Звідси знаходимо подання для $\pi_{00}^{(1)}$.

Теорему 3.3 доведено.

Якщо $N=\infty$, то при умові $\overline{\lim_{j\to\infty}}\dfrac{\lambda_2(j)}{2\mu}<1$ існує стаціонарний розподіл нашої системи. Щоб отримати формули для стаціонарного розподілу, потрібно в теоремі 3.3 перейти до границі при $N\to\infty$. У зв'язку з цим покажемо, що ряд

$$\sum_{j=h_2}^{\infty}\left(\mu+\beta_2(j)\right)B_2(j) \tag{3.87}$$

є збіжний. Маємо

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\left(\mu+\beta_2(j+1)\right)B_2(j+1)}{\left(\mu+\beta_2(j)\right)B_2(j)}=\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\lambda_2(j+1)+\mu+(j+1)\nu}{\lambda_2(j)+\mu+j\nu}\times$$

$$\times\frac{\lambda_2(j)\left[\left(\lambda_2(j)+j\nu\right)^2+\mu j\nu\right]}{\mu(j+1)\nu\left[2(j+1)\nu+2\mu+\lambda_2(j)+2\lambda_2(j)\right]}=\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\lambda_2(j)}{2\mu}<1,$$

що і означає збіжність ряду (3.87). Аналогічно доводиться збіжність ряду

$$\sum_{j=h_2}^{\infty}\frac{(j+1)\left(\mu+\beta_2(j+1)\right)}{\lambda_2(j)}B_2(j+1).$$

Тепер наведемо приклади розрахунків для конкретних систем. Всі обчислення виконуються в пакеті MATHEMATICA.

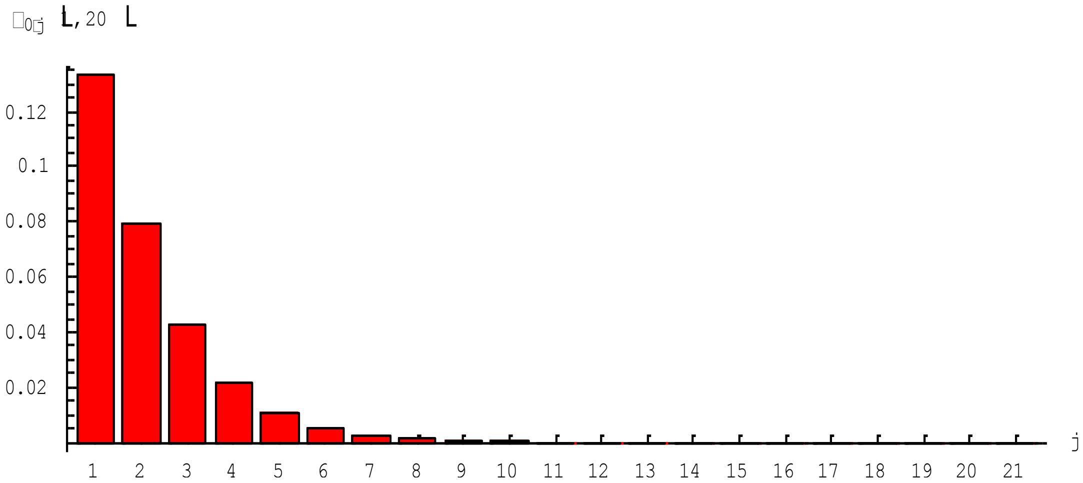
Приклад 3.3. Розглянемо систему $M/M/2/20$ з наступними параметрами:

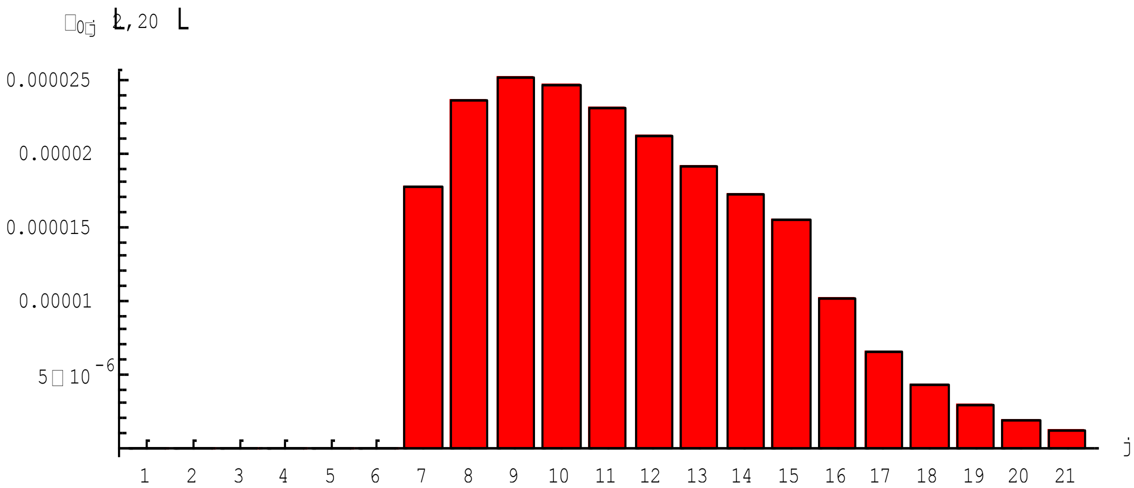
$$h_1=6,\ h_2=15,\ \mu=1,\ \nu=0{,}3,\ \lambda_1(j)=1,\ \lambda_2(j)=2j/(1+1{,}5j).$$

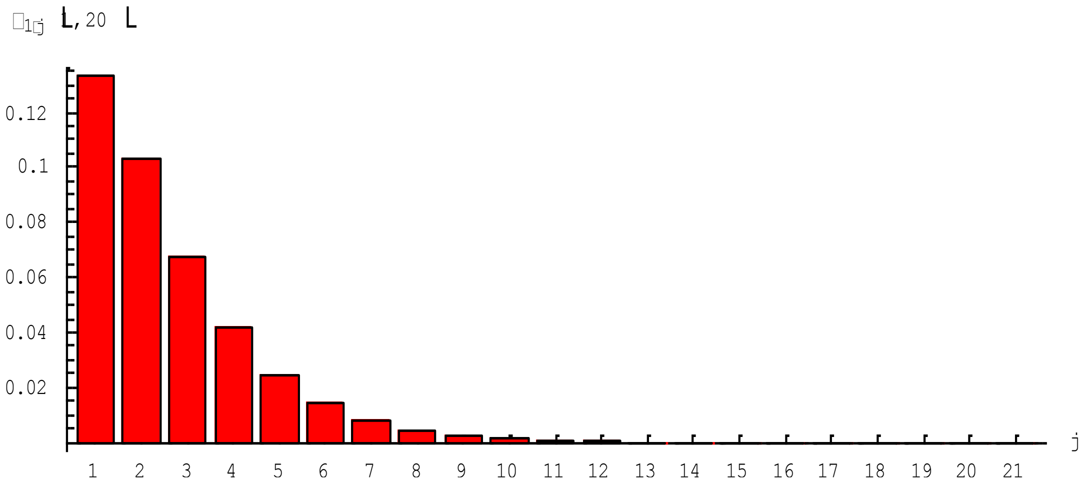
Наведемо графічне зображення та числові результати для стаціонарних імовірностей:

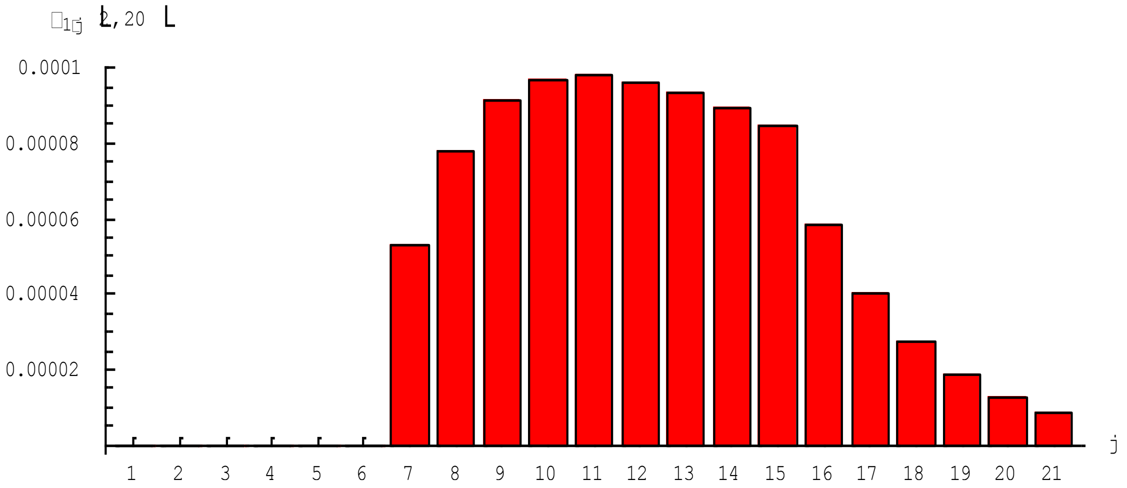
0.133	0.079	0.042	0.021	0.011	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.133	0.102	0.067	0.041	0.024	0.013	0.007	0.004	0.002	0.001	0.000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.054	0.066	0.057	0.042	0.029	0.019	0.011	0.007	0.004	0.002	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

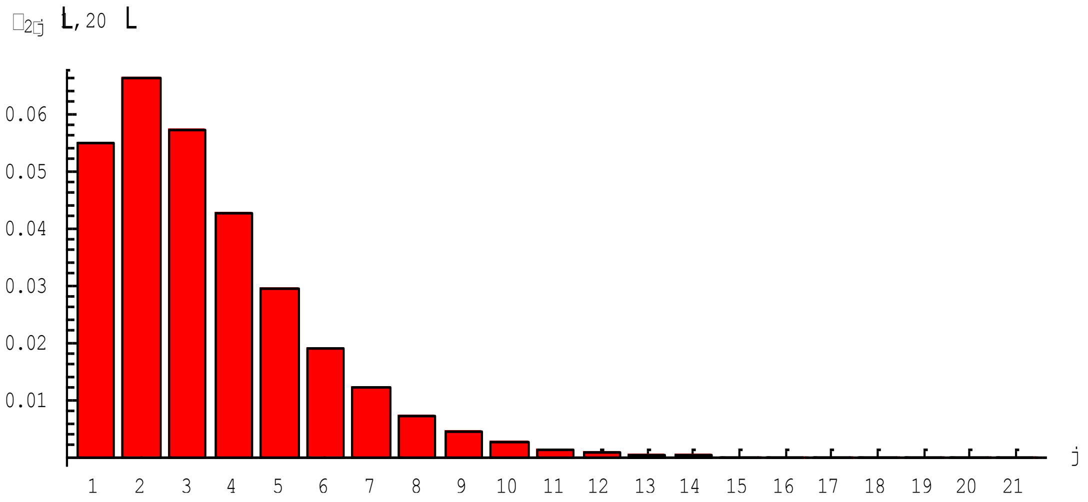
0	0	0	0	0	0	0.00001	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.00005	0.00007	0.00009	0.00009	0.00009	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00005	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.00007	0.00012	0.00016	0.00018	0.00020	0.00021	0.00022	0.00023	0.00024	0.00017	0	0	0	0	0

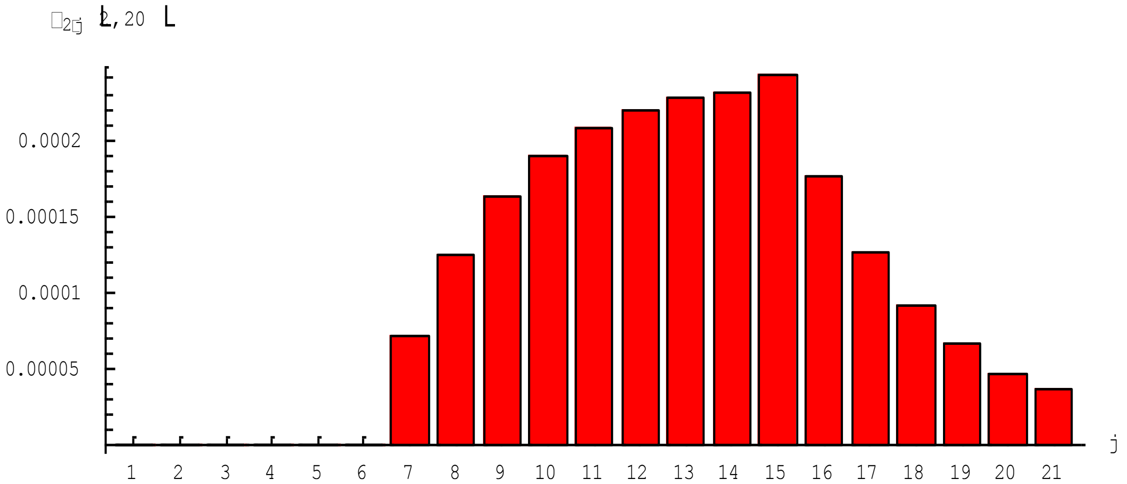

0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
j


0.000025
0.00002
0.000015
0.00001
5×10^{-6}
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
j


0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
j


0.0001
0.00008
0.00006
0.00004
0.00002
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
j


0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
j


0.0002
0.00015
0.0001
0.00005
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
j

Розглянемо застосування теореми 3.3 для розв'язку оптимізаційної задачі (3.8).

В умовах існування стаціонарного режиму (умови леми 3.4) граничні функціонали $S_i\left(h_1,h_2\right),\ i=1,2,3$, теж існують і можуть бути виписані через стаціонарні імовірності $\pi_{ij}^{(r)},\ \left(i,j,r\right)\in S$,

$$S_1\left(h_1,h_2\right)=\mu\sum_{j=0}^{h_2-1}(\pi_{1j}^{(1)}+2\pi_{2j}^{(1)})+\mu\sum_{j=h_1}^{\infty}(\pi_{1j}^{(2)}+2\pi_{2j}^{(2)}),$$

$$S_2\left(h_1,h_2\right)=\sum_{j=0}^{h_2-1}\lambda_1\left(j\right)\pi_{2j}^{(1)}+\sum_{j=h_1}^{\infty}\lambda_2\left(j\right)\pi_{2j}^{(2)},$$

$$S_3\left(h_1,h_2\right)=\lambda_1\left(h_2-1\right)\pi_{2h_2-1}^{(1)}+h_1\nu(\pi_{0h_1}^{(2)}+\pi_{1h_1}^{(2)}).$$

Розв'язком задачі (3.1) є такі пороги h_1 і h_2, які максимізують середній прибуток від роботи системи. Як ми вже говорили, подібні оптимізаційні задачі для одноканальних систем з повторними викликами в сучасних умовах є досить актуальними.

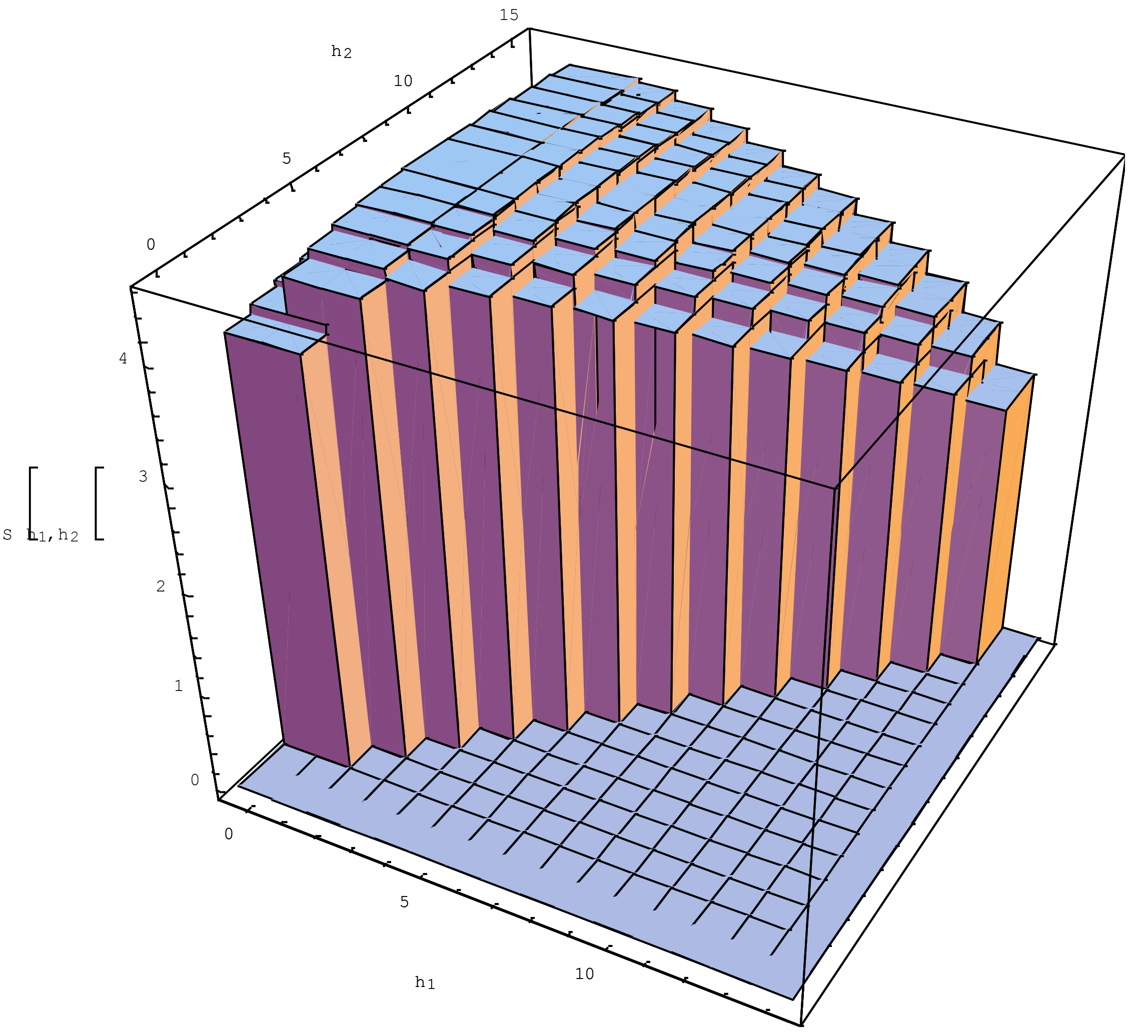
Приклад 3.4. Розглянемо систему $M/M/2/15$ з такими параметрами

$$C_1=8;\ C_2=2;\ C_3=1{,}5;\ \mu=1{,}1;\ \nu=0{,}1;$$

$$\lambda_1(j)=1+j/1{,}3,\ \lambda_2(j)=(j+2)/(2j+1).$$

Підрахунки дали такі оптимальні значення: $h_1=2,\ h_2=9$, а відповідне значення цільової функції є $W\left(2,9\right)=4{,}513$. Наведемо також всі значення цільової функції та її графік:

0	3.939	4.020	4.072	4.108	4.133	4.150	4.162	4.168	4.171	4.170	4.168	4.163	4.160
0	0	4.322	4.416	4.467	4.495	4.509	4.513	4.509	4.500	4.487	4.471	4.454	4.441
0	0	0	4.327	4.431	4.481	4.504	4.510	4.505	4.492	4.474	4.453	4.431	4.414
0	0	0	0	4.214	4.330	4.384	4.405	4.408	4.399	4.382	4.360	4.337	4.320
0	0	0	0	0	4.062	4.191	4.249	4.272	4.274	4.263	4.245	4.224	4.208
0	0	0	0	0	0	3.895	4.035	4.099	4.124	4.126	4.116	4.100	4.088
0	0	0	0	0	0	0	3.721	3.872	3.941	3.968	3.973	3.966	3.961
0	0	0	0	0	0	0	0	3.544	3.705	3.779	3.810	3.820	3.825
0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.365	3.536	3.617	3.654	3.676
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.188	3.368	3.458	3.505
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.011	3.202	3.300
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.831	3.029
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.622
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



ДОДАТОК

Ланцюги Маркова з неперервним часом

Нехай задано деякий імовірнісний простір $(\Omega, \Re, P)$. Дійснозначна функція двох аргументів $\xi(t,\omega)$, $t \in [0,\infty)$, $\omega \in \Omega$ називається випадковим процесом, якщо для кожного фіксованого t $\xi(t\ \omega$ є випадковою величиною. Для кожного фіксованого $\omega \in \Omega$ функція $\xi(t,\omega)$ називається траєкторією процесу $\xi(t,\omega)$. Аналогічно до того, як випадкову величину $\xi(\omega)$ часто позначають просто через ξ, так і випадковий процес $\xi(t,\omega)$ часто позначають через $\xi(t)$. Нехай надалі множина X = $\{x_1, x_2, \ldots\}$ можливих значень процесу $\xi(t)$ не більш ніж зліченна. Набір ймовірностей

$$P\left\{\xi\left(t_1\right) = x_{i_1}, \ldots, \xi\left(t_n\right) = x_{i_n}\right\}$$

представляє собою сумісний розподіл процесу $\xi(t)$. Випадковий процес $\xi(t)$ називається марковським (або ланцюгом Маркова з неперервним часом), якщо для довільної зростаючої послідовності моментів часу $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ послідовність $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n), \ldots$ є ланцюгом Маркова з дискретним часом.

Функція

$$p_{ij}\left(s,t\right) = P\left\{\xi(t) = x_j \,/\, \xi(s) = x_i\right\}$$

називається перехідною імовірністю процесу Маркова. Якщо ця функція залежить від різниці $t - s$, то такий процес Маркова називають однорідним. В цьому випадку для перехідних ймовірностей $p_{ij}\left(s, s+t\right) = p_{ij}\left(0,t\right) = P\left\{\xi(t) = x_j \,/\, \xi(0) = x_i\right\}$, $s,t > 0$ прийняті такі позначення:

$$p_{ij}(0,t) = p_{ij}(t).$$

Перехідні ймовірності мають наступні властивості:

а) $p_{ij}(t) \geq 0$,

б) $\sum\limits_j p_{ij}(t) = 1$,

в) $p_{ij}(t+s) = \sum\limits_k p_{ik}(t) p_{kj}(s)$, $i, j = 1, 2, \ldots,\ s, t \geq 0$.

Якщо розглянути матрицю перехідних ймовірностей $P(t) = \| p_{ij}(t) \|$, то остання властивість в матричному вигляді може бути подана так:

$$P(t+s) = P(t)P(s).$$

Будемо називати ланцюг Маркова $\xi(t)$ неперервним справа, якщо з ймовірністю 1 його траєкторії неперервні справа. Такий ланцю є стохастично неперервним, тобто для нього виконується:

г) $\lim\limits_{t \downarrow 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$.

Крім того, для неперервного справа ланцюга Маркова існують границі

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t} = a_{ij},$$

які називаються інфінітезимальними характеристиками (або інтенсивностями переходів) процесу $\xi(t)$, а матриця $A = \| a_{ij} \|$ називається інфінітезимальною матрицею (або матрицею інтенсивностей). Із визначення випливає, що $\forall i, j \quad a_{ij} = \frac{d}{dt} p_{ij}(t) \Big|_{t=0}$.

Властивості інтенсивностей:

1) $\forall i \neq j \quad a_{ij} \geq 0$ та $\forall i \quad a_{ii} \leq 0$;

2) $\forall i \quad \sum_j a_{ij} = 0$;

3) $\forall i \quad \dfrac{1}{-a_{ii}}$ є середнім часом перебування процесу в стані x_i;

4) $\forall i, j \quad \hat{p}_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{-a_{ii}}$ є ймовірністю того, що після виходу зі стану x_i процес перейде відразу в стан x_j ($x_i \neq x_j$). Якщо $a_{ii} = 0$, то стан x_i називається поглинаючим (із нього процес вже ніколи не вийде).

Позначимо через τ_k час перебування процесу в k-му за порядком відвідування стані. Ланцюг Маркова ξ_n, $n \geq 1$ з дискретним часом, називається вкладеним ланцюгом для процесу Маркова $\xi(t)$, якщо

$$\xi_n = \xi\left(\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n - 0\right).$$

Тоді $P = \left\| p_{ij} \right\|$ буде матрицею перехідних імовірностей для ξ_n, $n \geq 1$ (див. властивість 4).

Теорема 1. Для однорідного локально регулярного процесу Маркова має місце перша система рівнянь Колмогорова:

$$\forall i, j \quad \frac{d}{dt} p_{ij}(t) = \sum_k a_{ik} p_{kj}(t),\; p_{ij}(0) = \delta_{ij},$$

яка в матричному виді може бути подана так:

$$P'(t) = AP(t),\; P(0) = E.$$

Теорема 2. Якщо $\sup_i |a_{ii}| < \infty$, то перша система рівнянь Колмогорова має єдиний розв’язок за початкових умов $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

Теорема 3. Для однорідного неперервного справа процесу Маркова при умові $\sup_i |a_{ii}| < \infty$ має місце друга система рівнянь Колмогорова:

$$\forall i, j \quad \frac{d}{dt} p_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t) a_{kj}, \; p_{ij}(0) = \delta_{ij},$$

яка в матричному виді може бути подана так:

$$P'(t) = P(t)A, \; P(0) = E.$$

Із останньої теореми можна отримати систему диференціальних рівнянь для безумовних ймовірностей $p_j(t) = P\left\{\xi(t) = x_j\right\}$:

$$\forall j \quad \frac{d}{dt} p_j(t) = \sum_k p_k(t) a_{kj},$$

яка розв'язується за деяких початкових умов $p_j(0) = p_j^0$, де $\left\{p_j^0\right\}$ є початковим розподілом процесу, тобто $p_j^0 = P\left\{\xi(0) = x_j\right\}$.

Початковий розподіл $q = \left\{q_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ називається стаціонарним, якщо безумовні імовірності $p_j(t)$ не змінюються з перебігом часу *t*:

$$p_j(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i p_{ij}(t) \equiv q_j, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Він шукається як розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} q_i a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots \\ \sum_{i=1}^{\infty} q_i = 1 \quad (\textit{умова нормування}) \end{cases}.$$

Однорідний процес Маркова називається ергодичним, якщо існує імовірносний розподіл $\pi = \left(\pi_1, \ldots, \pi_j, \ldots\right)$, $\pi_j > 0$ такий, що для будь-яких $i, j = 1, 2, \ldots$ існує незалежна від i границя

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j .$$

В цьому випадку розподіл π називається ергодичним.

Теорема 4. (ергодична теорема для процесу Маркова)

Якщо для неперервного справа процесу Маркова вкладений ланцюг незвідний, то для будь-яких i, j існують

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j > 0 .$$

Якщо до того ж $p_{ij}(t)$ задовольняють другій системі рівнянь Колмогорова, а числа π_j такі, що

$$\sum_j \pi_j \left(-a_{jj}\right) < \infty ,$$

то для усіх i

$$\sum_j \pi_j a_{ji} = 0 ,$$

тобто ергодичний розподіл π співпадає із стаціонарним.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гихман И.И. Теория случайных процессов: в 3 т. / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука. – 1971. – Т. 1. – 1971. – 664 с.

2. Falin G.I. Retrial Queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton – London: Chapman and Hall. - 1997. – 317 p.

3. Уолрэнд Дж. Введение в теорию массового обслуживания / Дж. Уолрэнд // М.: Мир. - 1993. – 336 с.

4. Степанов С.Н. Численные методы расчета систем с повторными вызовами / С.Н. Степанов // М.: Наука. - 1983. – 232 с.

5. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко // Москва: КомКнига. - 2005. – 397 с.

6. Коваленко И.Н. К классификации систем массового обслуживания с повторением вызовов / И.Н. Коваленко, Е.В. Коба // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – №3. – С. 15-23.

7. Artalejo J. R. Retrial Queueing Systems A Computational Approach / J. R. Artalejo, A. Gomez-Corral // Springer. - 2008. – 317 p.

8. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями / Л. Клейнрок. – М.: Мир. - 1979. – 600 с.

9. Карлин С. Основы теории случайных процессов / С. Карлин // М.: Мир. - 1971. – 536 с.

10. Макушенко І.А. Гістерезисна стратегія для $M/M/m/\infty$ – систем з повторними викликами / І.А. Макушенко, І.Я. Усар // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. – Вип. №4. – С. 163-168.

11. Башарин Г.П. Анализ очередей в вычислительных сетях / Г.П. Башарин, П.П. Бочаров, Я.А. Коган. – М.: Наука. - 1989. – 336 с.

12. Анисимов В.В. Стохастические сети обслуживания. Марковские модели / В.В. Анисимов, Е.А. Лебедев. – К.: Лыбидь. - 1992. – 208 с.