

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ**



Кашпур О.Ф.

« 2019 року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Алгебра та геометрія

галузь знань	11 Математика та статистика
спеціальність	122 Інформатика
освітній рівень	бакалавр
освітня програма	Прикладна математика
спеціалізація	Дослідження операцій
вид дисципліни	нормативний курс

Форма навчання	денна
Навчальний рік	2019/2020
Семестр	1,2
Кількість кредитів ECTS	12
Мова викладання, навчання та оцінювання	українська
Форма заключного контролю	іспит

Викладачі: к. ф.-м. н., Рабанович В. І. (лекції і практичні заняття),
асистенти к. ф.-м. н., Заворотинський А. В., Рибалко І. С.,
(практичні заняття)

Пролонговано: на 20__/20__ н. р. _____ (_____) «__» 20__ р.

на 20__/20__ н. р. _____ (_____) «__» 20__ р.

КИЇВ – 2019

Розробник:

Рабанович Вячесла Іванович, к. ф.-м. н., викладач кафедри дослідження операцій.



ЗАТВЕРДЖЕНО

Завідувач кафедри дослідження операцій

 О.М. Іксанов

Протокол № 1 від « 30 » 08 2019 р.

Схвалено науково-методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Протокол від « 30 » серпня 2019 року № 1

Голова науково-методичної комісії  к.ф.-м. н., доцент Л.Л. Омельчук

« 30 » серпня 2019 року

1. Мета дисципліни – поглибити знання студентів з аналітичної геометрії, вивчення стандартних методів розв’язання систем лінійних рівнянь, теорії визначників і многочленів від однієї змінної, теорії лінійних просторів і базових властивостей лінійних перетворень на них.

2. Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни: шкільний курс математики в повному обсязі.

3. Анотація навчальної дисципліни. Навчальна дисципліна «Алгебра та геометрія» є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти галузі знань 11 «Математика та статистика» в рамках освітньо-професійної програми «Прикладна математика».

Дисципліна знайомить слухачів з основними поняттями аналітичної геометрії і лінійної алгебри, різними методами доведення тверджень, вчить використовувати алгебраїчні структури в абстрактних та прикладних задачах.

Дана дисципліна належить до переліку обов’язкових навчальних дисциплін. Викладається в перших двох семестрах в обсязі – 1 семестр 180 год., **(6 кредитів ECTS)** зокрема: лекції – 40 год., практичні заняття – 40, консультації – 2 год., самостійна робота – 98 год та 2 семестр 180 год., **(6 кредитів ECTS)** зокрема: лекції – 40 год., практичні заняття – 40, консультації – 4 год., самостійна робота – 96 год. У курсі передбачено 6 змістових частини та 6 контрольних робіт. В кінці кожного семестру проводиться **іспит**.

В результаті успішного навчання з дисципліни студенти повинні:

Знати:

1. Основні методи роботи з координатами в просторі.
2. Властивості різних інваріантів матриць (визначник, слід, ранг, власне число, власний вектор) і лінійних перетворень лінійних просторів.
3. Основні методи доведення теорем на прикладі теорем лінійної алгебри (доведення до абсурду, метод математичної індукції, пряма дедукція, доведення критеріїв, аналогія, формалізація і аксіоматичний метод).

Вміти:

1. Застосовувати набуті знання для розв’язання задач аналітичної геометрії
2. Використовувати матриці і оператори в задачах лінійної алгебри.

4. Завдання (навчальні цілі). Основними завданнями дисципліни «Алгебра та геометрія» є набуття знань, умінь та навичок (компетентностей) відповідно до кваліфікації «бакалавр прикладної математики». Зокрема, розвивати:

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань;
- здатність логічно формулювати математичні твердження і аргументовано їх доводити;
- здатність застосовувати методи лінійної алгебри для розв’язання систем лінійних рівнянь;
- здатність до алгоритмічного та логічного мислення.

5. Результати навчання за дисципліною.

Результат навчання (1. знати; 2. вміти; 3. комунікація; 4. автономність та відповідальність)		Форми (та/або методи і технології) викладання і навчання	Методи оцінювання та пороговий критерій оцінювання (за необхідності)	Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни
Код	Результат навчання			
ЗК1.2	Вміти переходити до абстрактного мислення в задачах геометрії і лінійної алгебри.	Лекції, самостійна робота, опрацювання	Поточне оцінювання, контрольна робота №	20 %

ЗК2.1	Знати застосовування систем рівнянь в різних задачах.	рекомендованої літератури, виконання домашніх завдань	1,2,3,4,5,6, Іспит семестр, Іспит, 2 семестр	1	5 %
ЗК3.1	Знання про використання методів аналітичної геометрії і лінійних перетворень в аналітичних і графічних задачах.				5 %
ЗК6.4	Здатність вчитися й оволодівати сучасними знаннями.				20 %
СК1	Вміти математично та логічно мислити, формулювати та досліджувати математичних результати, зокрема для дискретних математичних моделей, знаходити стандартні підходи для розв'язування теоретичних і прикладних задач.				30 %
СК3.1	Знати поняття розв'язаності, єдності, багатопараметричності систем розв'язків на прикладі систем лінійних рівнянь.				10%
СК3.2	Вміти будувати логічні висновки, виконувати і використовувати прості алгоритмічні обчислення з лінійної алгебри,				10 %

6. Співвідношення результатів навчання дисципліни із програмними результатами навчання.

Програмні результати навчання	Результати вивчення дисципліни						
	ЗК1.2	ЗК2.1	ЗК3.1	ЗК6.4	СК1.2	СК3.1	СК3.2
ПРН1. Застосовувати ґрунтовні знання основних форм і законів абстрактно-логічного мислення, основ методології наукового пізнання, форм і методів вилучення, аналізу, обробки та синтезу інформації в предметній області комп'ютерних наук.	+			+	+		+
ПРН2 Використовувати сучасний математичний апарат неперервного та дискретного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, в професійній діяльності для розв'язання задач теоретичного та прикладного характеру в процесі проектування та реалізації об'єктів інформатизації за галузями.		+	+			+	

7. Схема формування оцінки

7.1 Форми оцінювання студентів

Семестрове оцінювання (1 семестр):

Максимальна кількість балів які можуть бути отримані студентом: **60 балів:**

1. Контрольна робота №1: СК 1.2, ЗК 1.2, З.К.3.1, – **20/12 балів.**
2. Контрольна робота № 2: : СК 1.2, ЗК 1.2, З.К.2.1: ЗК 3.1, З.К.6.4 – **20/12 балів.**
3. Контрольна робота № 3: СК 1.2, СК 3.2, З.К.2.1, ЗК 3.1, З.К.6.4 **20/12 балів.**

Підсумкове оцінювання (у формі іспиту):

- Максимальна кількість балів, які можуть бути отримані студентом: **40 балів.**
- Результати навчання, які будуть оцінюватись: СК 1.2, ЗК 1.2, З.К.2.1: ЗК 3.1, З.К.6.4.
- Форма проведення: письмова.
- Види завдань: 4 письмових завдань (2 теоретичних питання та 2 практичних завдання).

Семестрове оцінювання (2 семестр):

Максимальна кількість балів які можуть бути отримані студентом: **60 балів**:

4. Контрольна робота №4: СК 1.2, СК 3.1, З.К.6.4 – **20/12 балів**.
5. Контрольна робота № 5: СК 1.2, СК 3.2, З.К.2.1, ЗК 3.1, З.К.6.4 **20/12 балів**.
6. Контрольна робота № 6: СК 1.2, СК 3.1, СК 3.2, З.К.2.1, ЗК 3.1, З.К.6.4 **20/12 балів**.

Підсумкове оцінювання (у формі іспиту):

- Максимальна кількість балів які можуть бути отримані студентом: **40 балів**.
- Результати навчання які будуть оцінюватись: СК 1.2, СК 3.1, СК 3.2, З.К.1.2, З.К.2.1, ЗК 3.1, З.К.6.4
- Форма проведення: письмова.
- Види завдань: 4 письмових завдань (2 теоретичних питання та 2 практичних завдання).

- **Студент отримує загальну позитивну оцінку з дисципліни**, якщо його оцінка за іспиті становить не менше ніж 24 (двадцять чотири) бали.
- **Студент допускається до іспиту**, якщо протягом семестру він:
 - o набрав не менше ніж 36 балів;
 - o виконав і вчасно здав мінімум 60% задач для самостійні роботи, з домашніх завдань, запропонованих під час практичних занять на закріплення матеріалу.

Критерії оцінювання на іспиті

Завдання	Тема завдання	Максимальний відсоток від 40 балів	Всього балів
Завдання 1	Питання по теоретичному матеріалу курсу	25%	10
Завдання 2		25%	10
Завдання 3	Практичне завдання на основі теоретичного матеріалу курсу	25%	10
Завдання 4		25%	10

Питання для підготовки до іспиту з алгебри та геометрії 1 семестр.

1. Поняття афінної площини. Теорема про вигляд рівняння прямої в афінній площині.
2. Поняття прямокутної системи координат. Скалярний добуток, його властивості, вираз через. Теорема про формули переходу від однієї системи координат до іншої (для повороту).
3. Проекція вектора на пряму, площину. Поняття рівняння кривої. Нормальні рівняння прямої та площини. Теорема про обчислення відстані від точки до прямої (площини) через її нормальне рівняння.
4. Векторний добуток двох векторів і його властивості. Формули для обчислення рівняння площини, що містить три данні точки і формули для векторного добутку через визначники.
5. Мішаний добуток, його властивості. Теорема про геометричне значення величини мішаного добутку.
6. Виведення канонічних рівнянь еліпса, параболи та гіперболи. Властивості цих кривих.
7. Поняття ексцентриситету та директриси, спряженого діаметра до напрямку. Теореми про зв'язок між тангенсами нахилу спряжених.
8. Твердження про визначення положення точки площини відносно еліпса за допомогою рівняння еліпса.
9. Рівняння дотичної до кривої другого порядку, коли рівняння кривої подається у канонічній. Формулювання оптичних властивостей кривих другого

порядку (доведення оптичної властивості еліпса).

10. Означення перестановки, підстановки, подвійної підстановки, інверсної пари. Поняття парності підстановки і перестановки. Твердження про співпадіння парності підстановки і оберненої до неї.

11. Поняття про визначник матриці, формули розкриття по стовпчику і по рядку.

12. Формула визначника як полілінійної функції елементів. Твердження і Наслідки про властивості визначника: 1) про визначник матриці з нульовим рядком (дов.), 2) про зміну знаку визначника при перестановці двох рядків (дов.), 3) про визначники з однаковими рядками (дов.).

13. Теорема про визначник суми матриць.

14. Транспонування матриці, визначник транспонованої.

15. Обернена матриця. Властивості оберненої матриці. Способи знаходження оберненої матриці. Формули для обчислення елементів оберненої матриці.

16. Теорема про визначник верхньотрикутної матриці (дов.).

17. Поняття про мінори матриці і алгебраїчні. Базова детермінантна тотожність (лінійна комбінація алгебраїчних доповнень) і ідея її доведення.

18. Поняття рангу матриці. Теорема про існування ненульового мінору k порядку у матриці рангу k .

19. Опис алгоритму Гауса приведення до трикутної форми. Елементарні перетворення рядків і стовпчиків матриці.

20. Критерій рівності нулеві визначника матриці через лінійну залежність.

21. Властивості добутку матриць.

22. Поняття матриці (розширеної матриці) системи лінійних рівнянь. Розв'язок системи, загальний розв'язок, рівносильні системи, фундаментальна система розв'язків однорідної системи, базисні і вільні.

23. Теорема Кронекера.

24. Теорема Крамера (дов.).

25. Теорема про властивості розв'язків однорідної системи та неоднорідної системи.

26. Теорема про властивості розв'язків однорідної системи та неоднорідної системи.

27. Поняття лінійної комбінації набору елементів. Поняття лінійної залежності елементів векторного простору. Теорема про властивості лінійно залежних систем.

28. Поняття лінійної незалежності елементів векторного простору. Теорема про властивості лінійно незалежних систем.

Теоретичні питання для підготовки до іспиту з алгебри та геометрії 2 семестр.

1. Аксиоми поля.

2. Корені з комплексного числа. Чотири властивості послідовності коренів з одиниці як степеней одного з коренів (дов.).

3. Оліноми від однієї змінної на полем. Властивості ділення поліномів. Теорема про ділення з остачею.

4. Теорема про характеристику кратного кореня через нульові значення формальних похідних полінома у відповідному корені.

5. Поняття кореня полінома. Теорема Безу про подільність полінома на двочлен (про остачу від ділення).

6. Наслідки з теореми Безу.

7. Послідовність Евкліда і теорема про властивості послідовності Евкліда (знаходження НСД многочленів).

8. Незвідні поліноми. Теорема про розклад полінома у добуток.

9. Основна теорема алгебри над полем комплексних чисел (без дов.)

10. Незвідні многочлени над \mathbf{R} . Теорема про розклад полінома на незвідні над \mathbf{R} .

11. Теорема про властивості раціональних коренів многочлена з цілими коефіцієнтами по відношенню до старшого і вільного членів.

12. Постановка задачі про інтерполяційний поліном (Лекція 7, 7-8 слайди).
13. Аксиоми векторного простору.
14. Приклади векторних просторів.
15. Теорема про властивості систем л. з. і теорема про властивості л. н. систем (дов.).
16. Означення базису, лінійної оболонки системи векторів і розмірності простору.
17. Теорема про єдиність розкладу вектора в лінійну комбінацію базисних векторів (про координати) (дов.).
18. Теорема про коректність означення розмірності (кількість елементів в різних базисах однакова).
19. Теорема про доповнення лінійно незалежної системи до базису (дов.).
20. Поняття матриці переходу від одного базису до іншого. Формула для координат вектора в різних.
21. Поняття підпростору, суми та перетину підпросторів.
22. Теорема Грасмана (дов.).
23. Поняття лінійного перетворення, приклади.
24. Означення ядра і образу лінійного перетворення.
25. Матриця дії оператора в заданому базисі.
26. Теорема про суму розмірностей ядра та образу.
27. Теорема про властивість оборотнього оператора як взаємно однозначного лінійного відображення.
28. Поняття власного числа та власного вектора матриці (оператора). Поняття характеристичного многочлена матриці. Теорема про властивості характеристичного многочлена.
29. Теорема про лінійну незалежність власних векторів.
30. Теорема про матрицю оператора простої структури (подібність до діагональної матриці).
31. Теорема про достатню умову на оператор, щоб він був оператором простої структури.
32. Поняття інваріантного підпростору. Доведення факту, що ядро і образ оператора є інваріантними підпросторами.
33. Технічна лема одночасну інваріантність простору для оператора і його лінійного зсуву.
34. Теорема про існування над \mathbb{C} інваріантного підпростору на 1 меншої розмірності, ніж розмірність вихідного простору.
35. Поняття мінімального анулюючого многочлена, його властивості і зв'язок з оператором простої.
36. Теорема Гамільтона-Келлі та теорема Жордана.
37. Норма вектора. Властивості.
38. Теорема про властивості ортогонального доповнення до підпростору.
39. Поняття ортонормованої системи. Твердження про лінійну незалежність ортонормованої системи (дов.).
40. Опис процедури ортогоналізації Грама-Шмідта (з формулами).
41. Теорема про формулу для обчислення значення скалярного добутку векторів через координати векторів в ортонормованому базисі (дов.).
42. Ознака (критерій) лінійної залежності системи векторів через визначник Грама, (дов.).
43. Лема про інваріантність ортогонального доповнення для спряженого оператора (дов.).
44. Теорема про канонічний вид матриці ортогонального оператора в евклідовому просторі.
45. Поняття самоспряженого оператора. Теорема про приведення над полем комплексних чисел самоспряженого оператора до діагонального виду (без дов.).
46. Теорема про ортогональність власних векторів самоспряженого оператора, що відповідають двом різним власним значенням.
47. Теорема про приведення ермітової матриці на \mathbb{R} до діагонального виду.
48. Поняття кореня з матриці. Теорема існування єдиного додатного кореня з додатної матриці.

49. Теорема про полярний розклад невиродженої матриці (дов.)
 50. Поняття квадратичної функції і квадратичної форми. Канонічна форма квадратичної функції, приведення до канонічної форми методом Лагранжа і теорема Якобі.
 51. Поняття рангу та інерції квадратичних форм. Закон інерції квадратичних форм.

7.2 Організація оцінювання

Терміни проведення форм оцінювання:

1. Контрольна робота № 1: до 6 тижня 1 семестру.
2. Контрольна робота № 2: до 11 тижня 1 семестру.
3. Контрольна робота № 3: до 14 тижня 1 семестру.
4. Контрольна робота № 4: до 7 тижня 2 семестру.
5. Контрольна робота № 5: до 14 тижня 2 семестру.
6. Контрольна робота № 6: до 21 тижня 2 семестру.

Студенти не мають право на перескладання модульної контрольної.

У випадку відсутності студентів з поважних причин відпрацювання та перездачі контрольних робіт здійснюються у відповідності до «Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу».

У випадку встановлення фактів порушення студентами академічної доброчесності передбачених пунктом 9.8.2 «Положення про організацію освітнього процесу у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка» що діє від 07.05.2018, вони будуть притягнуті до відповідальності передбаченої пунктом 9.8.3 цього положення.

7.3 Шкала відповідності оцінок

Відмінно / Excellent	90-100
Добре / Good	75-89
Задовільно / Satisfactory	60-74
Незадовільно / Fail	0-59

8. СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І СЕМІНАРСЬКИХ ЗАНЯТЬ

№ лекції	Назва лекції (теми)	Кількість годин		
		Лекції	Прак-тичні заняття	Самост. робота
СЕМЕСТР 1				
Частина 1. Метод координат і криві 2 порядку				
1-3	Тема 1. Векторна алгебра. Пряма і площина в просторі <i>Самостійна робота:</i> Прочитати про задачі на мінімальну відстань від кривих до прямої.	6	6	12
4-6	Тема 2. Криві та поверхні другого порядку <i>Самостійна робота:</i> Розібрати приклади кривих 3 порядку.	6	5	12
Контрольна робота № 1			2	
Частина 2. Властивості визначників матриць і систем лінійних рівнянь				
7-9	Тема 3. Визначники, властивості визначників, методи їх обчислення	6	6	12

<i>Самостійна робота:</i> Розібрати властивості визначників Вандермонда і Грама.				
10-12	Тема 4. Системи лінійних рівнянь. <i>Самостійна робота:</i> Розібрати цілочисельні системи рівнянь.	6	6	12
13-14	Тема 5. Інваріанти матриць, системи лінійних рівнянь в матричному виді і лінійно залежні системи. <i>Самостійна робота:</i> Розібрати найпростіші матричні рівняння.	4	4	12
Контрольна робота № 2				2
Частина 3. Поле комплексних чисел і многочлени				
15-16	Тема 7. Поле комплексних чисел <i>Самостійна робота:</i> Розібрати графічний метод множення комплексних чисел.	3	3	10
16-20	Тема 8. Кільце многочленів та раціональні функції. <i>Самостійна робота:</i> Самостійно розібрати розміщення дійсних коренів многочлена і поняття інтерполяційного полінома.	9	10	20
Контрольна робота № 3				2
20	ВСЬОГО	40	40	98
2 СЕМЕСТР				
Частина 4. Лінійні простори (теорія)				
1-3	Тема 6. Лінійні простори та підпростори. Розмірність та базис простору. <i>Самостійна робота:</i> Розібрати поняття лінійного многовиду і неортогонального проектування на многовид.	6	6	18
4-6	Тема 7. Лінійні перетворення. <i>Самостійна робота:</i> Розібрати перетворення повороту і зсуву. Афінні перетворення.	6	6	18
Контрольна робота № 4				2
Частина 5. Власні числа і теорема Жордана				
7-11	Тема 9. Власні вектори та власні числа. Теорема Жордана. <i>Самостійна робота:</i> Розібрати форму Фробеніуса.	10	12	24
Контрольна робота № 5				2
12-13	Тема 10. Евклідові простори. <i>Самостійна робота:</i> Розібрати формулу скалярного добутку через координати в довільному базисі.	4	3	6
14-18	Тема 11. Лінійні оператори на евклідових просторах. <i>Самостійна робота:</i> Прочитати про властивості ортопроекторів і відбиттів.	10	8	16
19-20	Тема 13. Білінійні та квадратичні форми. <i>Самостійна робота:</i> Розібрати класифікацію гіперповерхонь 2 порядку.	4	5	8
Контрольна робота 6				2
20	ВСЬОГО	40	40	96

Загальний обсяг 360 годин, з них:

Лекції – 80 год.,

Практичні заняття – 80 год.,

Самостійна робота – 194 год.

Консультації – 6 год.

9. Рекомендовані джерела

Основні:

1. Ефимов Н.В Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука, 1969. – 272с.
2. Курош А.Д Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1984.
3. Чарін В.С Лінійна алгебра. К: Техніка, 2003.
4. Кострикин А.И. Введение в алгебру, М: Физматлит, 2000.
5. Винберг Э.Б. Курс алгебры, М: Факториал, 2002.
6. Клетеник И.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1987. – 724с.
7. Проскураков И.В. Сборник задач по линейной алгебре . М: Наука. 1984.
8. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М: Наука, 1977.

Додаткові

1. Беклемишев Д.В.Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М: Наука, 1985.
2. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. М: Наука, 1975.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М: Наука, 1984.
4. Маринич О. В., Проскурін Д. П. Скінченновимірний лінійний аналіз. Теорія визначників (Δ).
5. Сборник задач по линейной алгебре/ Под ред. А.И. Кострикина М: МГУ, 1984.
6. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М: Наука, 1970.
7. Фадеев Д. К. Лекции по алгебре. . М: Наука, 1984.