**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

КОЛЯНОВА Т.В.

***Методичні рекомендації,
приклади та вправи з курсу***

ДИНАМІКА ПОПУЛЯЦІЙНИХ СИСТЕМ

Навчальний посібник
з напряму «Бізнес-інформатика»
для студентів вищих навчальних закладів

Київ – 2016

Зміст

Модуль 1. ***Дослідження стійкості.***

Тема 1. Стійкість нелінійних диференціальних рівнянь.

Тема 2. Стійкість розв'язків систем диференціальних рівнянь. Метод першого наближення.

Тема 3. Дослідження на стійкість розв'язків систем диференціальних рівнянь методом функцій Ляпунова.

Тема 4. Особливі точки диференціальних рівнянь на площині.

Модуль 2. Популяції та їх взаємодія.

Тема 5. Моделі динаміки ізольованої популяції.

Тема 6. Модель вікової структури Леслі.

Тема 7. Моделювання взаємодії біологічних видів. Модель Вольтерра «хижак – жертва».

Тема 8. Моделювання взаємодії біологічних видів. Модель Вольтерра «хижак – жертва» з врахуванням внутрішньовидової конкуренції серед жертв.

Тема 9. Керування у задачах динаміки популяцій.

§1. Модель знищення шкідників за скінченний час

§2. Модель про вирубку дерев.

§3. Модель про вилов риби у ставку.

Мета дисципліни: застосування теоретичних знань і набутих практичних навичок з використання фундаментальних алгоритмів та методів для дослідження, побудови та програмної реалізації моделей популяційних систем.

Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни. Для вивчення курсу «Динаміка популяційних систем» студент повинен знати поняття програмування, диференціальних рівнянь, загальної алгебри, математичного аналізу, обчислювальної математики, аналізу даних тощо.

Анотація навчальної дисципліни: Предметом навчальної дисципліни «Динаміка популяційних систем» є вивчення застосовуваних у біології та екології математичних моделей, їхніх специфіки та взаємозв'язку між складовими моделі та аналізу отриманих результатів.

Навчальна дисципліна «Динаміка популяційних систем» є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за другим (*магістерським*) рівнем вищої освіти *галузі знань* 12 «Інформаційні технології» зі *спеціальності 122* «Компютерні науки», *освітньо-професійної програми* – «Бізнес інформатика».

Завдання (навчальні цілі):

Сформувати у здобувача вищої освіти освітнього ступеня «Магістр» ряд загальних компетентностей, які достатні для виконання професійних обов'язків за обраною спеціальністю, зокрема:

- Здатність спілкуватися іноземною мовою та працювати в міжнародному контексті.

- Здатність застосовувати математичні моделі та методи, засоби організації масивів даних для розробки та аналізу складних систем та критичних інфраструктур, консолідації ресурсів, зберігання, дослідження та захисту інформації, розв'язання завдань моделювання та прогнозування стратегічних напрямків розвитку бізнесу, бізнес процесів та інновацій.
- Здатність враховувати соціальні і етичні аспекти професійної діяльності та спілкуватися з представниками інших професійних груп різного рівня (з експертами з інших галузей знань/видів економічної діяльності)
- Творчість у застосуванні знань, здатність критично переосмислювати наявні інформаційні технології та відстежувати тенденції їх розвитку, що необхідно при реалізації бізнес процесів.
- Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях, які пов’язані із інформаційними технологіями, складними системами та бізнес процесами.
- Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел

Тема 1. Стійкість нелінійних диференціальних рівнянь

Математичні моделі екологічних та біологічних процесів досить складні. Диференціальні рівняння, що описують динаміку цих процесів, мають високий порядок. У ці рівняння входить багато параметрів, які в багатьох випадках можуть здійснюватись в певних межах. Тому дослідження таких моделей вимагає застосування нових методів і нових підходів до них.

Оскільки математичні моделі екології досить складні, а кількість невідомих досить велика, то на практиці часто використовують метод декомпозиції, який полягає в розкладі вихідної задачі на ряд окремих задач. Використовується також метод агрегування, що означає заміну групи змінних, які характеризують стан системи, однією змінною, що іменується агрегатом.

Найпершим об'єктом математичної біології та екології була популяція. Ще в 1202 р. Леонардо Пізанський (Фібоначчі) мав чітке уявлення про ріст популяції. Так, виходячи з кількості кролів (два), він підрахував їх кількість через наступні послідовні покоління: 2, 4, 6, 10, … Ця послідовність пов'язана з так званими числами Фібоначчі, що вираховується за рекурентною формулою

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, \;\; x_0 = 1, x_1 = 1.$$

Цим питанням цікавився також Джованні Бореллі (1780). Відомий також закон росту народонаселення Мальтуса (1795). Мабуть початком сучасної математичної біології, як стверджують деякі вчені, можна вважати книгу Д'Арсі Томпсона «Про ріст та форму» (1917). Інші дослідники вважають, що витоки математичної науки про екологію і біологію беруть початок від робіт А. Лоткі (Lotki A., 1925) і В. Вольтерра (Volterra V., 1931). Хоча одна з найбільш поширених моделей популяції – логістичне рівняння або рівняння Верхюльста – було відоме ще за 100 років до цього.

Тепер математична екологія та біологія мають великий арсенал для дослідження часових закономірностей та циклічностей в екосистемах.

Спочатку математичному моделюванню піддавалась така біологічна одиниця як популяція, далі пішло узагальнення на групи популяцій і спільноти. Особлива увага приділялась популяціям типу «хижак-жертва». В останні півстоліття розглядалося моделювання просторових та просторово-часових структур, які мають застосування в біохімічних процесах. Таким об'єктом, зокрема, є фітопланктон, кінетичні процеси росту якого добре вивчені кількісно.

Однією з перших у математичній екології робіт з вивчення просторової неоднорідності була робота Дж.

Скелламі (Skellam J.G., 1951), який для опису величини популяції X використовував дифузійне рівняння типу

$$X_t = K_g X_{ZZ} + F(X),$$

функція $F(X)$ – нелінійна функція джерела.

Такі диференціальні рівняння називають квазілінійними. Зокрема, квазілінійні рівняння теплопровідності (дифузії) описують процеси різних фізичних та екологічних явищ.

Широке поширення квазілінійних параболічних рівнянь пояснюється, насамперед тим, що ці рівняння виводяться з фундаментальних законів збереження (енергії, маси, імпульсу тощо). Тому немає нічого дивного, коли різні процеси описуються одними й тими ж нелінійними рівняннями дифузії, але з різними числовими коефіцієнтами.

Як зазначалося вище, дифузійні рівняння екологічних моделей – нелінійні. Результати отримані при розв'язанні квазілійних параболічних рівнянь досить різні. Перерахувати їх – безнадійна справа. Для широких класів задач доведені питання існування, розв'язності, єдності розв'язків. Досконало вивчені властивості точних розв'язків для деяких нелінійних задач.

У багатьох нелінійних задачах при певних значеннях параметрів виникає таке явище як біфуркація

(буквально – роздвоєння). Дослідженню біфуркацій них процесів присвячено досить чисельна література. В екологічних та біологічних моделях таке явище зустрічається досить часто.

При викладенні більшості питань розв'язання модельних рівнянь потрібно багато допоміжних відомостей з різних розділів математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь із звичайними і частинними похідними, теорії нелінійних коливань, теорії біфуркацій, чисельних методів тощо.

Стійкість нелінійних диференціальних рівнянь.

Поняття стійкості визначається по-різному.

Стійкість за Пуанкаре: маємо стан рівноваги, в якому знаходиться система. В момент часу $t = t_0$ система виводиться з цього стану і залишається сама собою. Якщо система повертається в стан рівноваги, то рівновага стійка.

Стійкість за Ляпуновим: стан системи вважається стійким, якщо при деяких початкових збуреннях система залишається в певному околі стану рівноваги.

Стійкість за Лагранжем: трактується як обмеженість траєкторій, тобто система не повинна вийти

за межі деякої області. Це поняття стійкості системи. Концепція стійкості за Лагранжем збігається з концепцією екологічної стабільності.

Звідси видно, що термін «стійкість» дуже переванжанений.

Для визначення стійкості розв'язків в точках спокою користуються теоремами Ляпунова.

Рівняння динаміки популяцій, як правило, мають вигляд:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in H, \ H \subseteq R^n, \ f \in R^n \qquad (1)$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)^T -$ вектор-стовпчик, область H – фазовий простір, при $n=2$ – H – фазова площина, якщо $n=1$ – маємо ізольовану популяцію.

Оскільки права частина рівняння (1) явно не залежить від часу t, то систему рівнянь такого типу називають *автономною* (або динамічною). Як правило, функції f_i, що входять в праву частину вектору f, нелінійні. Для більшості функцій f_i не можна знайти аналітичні розв'язки рівнянь (1). Далі будемо вважати, що $f_i(x)$ –неперервно диференційовані функції своїх аргументів.

Озн.1. Розв'язок $x = \varphi(t)$ системи диференціальних рівнянь (1), визначений для всіх $t > t_0$, називається *стійким за Ляпуновим*, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,$$

що для всіх розв'язків $x = x(t)$, що задовольняють умову

$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta$$

буде виконуватись нерівність

$$\|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$$

для всіх $t \geq t_0$.

Озн.2. Розв'язок $x = \varphi(t)$ системи диференціальних рівнянь (1), визначений для всіх $t > t_0$, називається *асимптотично стійким за Ляпуновим*, якщо він стійкий і виконується умова

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0.$$

для всіх $t \geq t_0$.

Таким чином, якщо розв'язок стійкий, то близькі за початковими значеннями розв'язки залишаються близькими для всіх $t \geq t_0$.

Приклад.

Нехай $\dot{y} = -a^2 y,\ \ a \neq 0,\ y(t_0) = y_0.$

Отже, дослідимо на стійкість

►

$$\frac{dy}{dt} = -a^2 y, \qquad \frac{dy}{y} = -a^2 dt, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int a^2 dt,$$

$$\ln y = -a^2 t + \ln C\,, \quad y = Ce^{-a^2 t}.$$

$$y_0 = Ce^{-a^2 t_0}, \text{тоді } C = y_0 e^{a^2 t_0}.$$

Отже,

$$y(t) = y_0 e^{-a^2 (t - t_0)}.$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, \tilde{y} = y(t),$ що задовольняє умову $|y_0 - \tilde{y}_0| < \delta$ буде виконуватись

$$\left|y_0 e^{-a^2 (t - t_0)} - \tilde{y}_0 e^{-a^2 (t - t_0)}\right| = e^{-a^2 (t - t_0)} |y_0 - \tilde{y}_0| < \varepsilon$$

при всіх $t \geq t_0$. Отже,

$$\lim_{t \to \infty} e^{-a^2 (t - t_0)} |y_0 - \tilde{y}_0| = 0.$$

Розв'язок асимптотично стійкий.◄

Тема 2. Стійкість розв'язків систем диференціальних рівнянь.

Нехай маємо спочатку лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь зі сталою матрицею A:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad (1)$$

Умови стійкості розв'язків системи (1) визначаються властивостями власних значень матриці A.

Теорема.

Розв'язки лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь зі сталою матрицею A тоді і лише тоді є:

1) *стійкими*, коли $\forall\, Re\lambda \leq 0$, при чому власним значенням $Re\lambda = 0$ відповідають одновимірні клітини Жордана в жордановій формі матриці (кожному власному значенню $\lambda_j (Re\lambda_j = 0)$ кратністю p має відповідати рівно p лінійно незалежних власних векторів матриці A);
2) *асимптотично стійкими*, коли дійсні частини всіх власних значень матриці A від'ємні, тобто $Re\lambda < 0$;
3) *нестійкими*, коли серед власних значень матриці A є хоча б одне λ_k $(Re\lambda_k > 0)$ або якщо хоча б одному власному значенню з нульовою дійною частиною відповідає неодновимірна клітина

Жордана в жордановій формі матриці (кожному власному значенню λ_m $(Re\lambda_m = 0)$ кратністю p відповідає рівно s $(s < p)$ лінійно незалежних власних векторів матриці A), усі інші власні значення мають від'ємну дійсну частину.

Умови, в разі виконання яких $\forall\lambda_A$ $Re\lambda_A < 0$, визначаються наступною теоремою:

Теорема Рауса-Гурвіця.

Дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння

$$\lambda^n + a_1\lambda_{n-1} + a_2\lambda_{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda_1 + a_n = 0$$

є від'ємні, тоді і тільки тоді, коли будуть додатні всі головні діагональні мінори матриці Гурвіця:

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 0 \\ & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

тобто коли $\Delta_1 = a_1 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3 > 0$, …,$\Delta_n = a_n\Delta_{n-1} > 0$.

Приклад 1.

Дослідити на стійкість розв'язки системи. Графічно зобразити траєкторії розв'язків цієї системи і показати напрям руху вздовж цих траєкторій.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

► Запишемо матрицю коефіцієнтів

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Отримаємо характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Корені якого

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm i$$

Дійсна частина більше нуля, отже розв'язок нестійкий.

Траєкторії знайдемо наступним чином.

Перейдемо до полярної системи координат, де $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тоді отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt}\cos\varphi - r\sin\varphi\dfrac{d\varphi}{dt} = 2r\cos\varphi - r\sin\varphi, \\ \dfrac{dr}{dt}\sin\varphi + r\cos\varphi\dfrac{d\varphi}{dt} = r\cos\varphi + 2r\sin\varphi. \end{cases}$$

Домножимо перше рівняння на $cos\varphi$, а друге на $sin\varphi$, та додамо їх. Отримаємо

$$\frac{dr}{dt} = 2r.$$

Тепер домножимо перше рівняння на $-sin\varphi$, а друге на $cos\varphi$,та додамо їх. Отримаємо

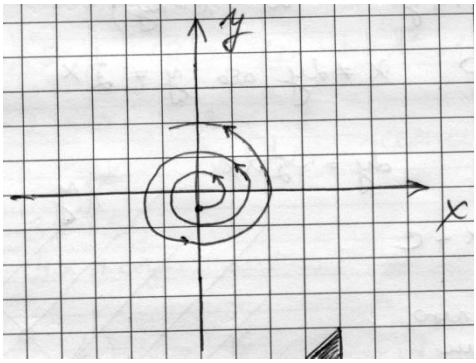
$$\frac{d\varphi}{dt} = 1.$$

Звідси маємо $d\varphi = dt$, отже $\varphi = t$.

$$\frac{dr}{r} = 2dt \Rightarrow \ln r = 2t + \ln C \Rightarrow r = Ce^{2t} \Rightarrow$$

$$r(\varphi) = Ce^{2\varphi}.$$

Маємо нестійкий фокус (спіраль), що розкручується проти годинникової стрілки.



◀

Приклад 2.

Дослідити на стійкість розв'язки системи. Графічно зобразити траєкторії розв'язків цієї системи і показати напрям руху вздовж цих траєкторій.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$$

► Запишемо матрицю коефіцієнтів

$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Отримаємо характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda = 0.$$

Корені якого

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -4.$$

Дійсна частина менше нуля, отже розв'язок стійкий.

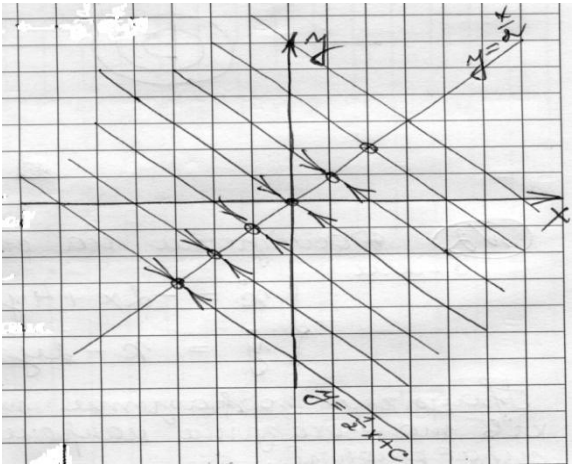
Траєкторії знайдемо наступним чином.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y}{-2x + 4y} = -\frac{1}{2}\frac{(x - 2y)}{(x - 2y)}.$$

$$x - 2y \neq 0, \quad y \neq \frac{1}{2}x.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}, \quad dy = -\frac{1}{2}dx, \;\; y = -\frac{1}{2}x + C.$$

Як бачимо, що траєкторіями розв'язків даної системи є множина точок прямої $x - 2y = 0$, а також промені, які можна дістати х прямих $y = -\frac{1}{2}x + C$, вилучивши точки перетину з прямою $x = 2y$.



◄

Приклад 3.

Дослідити на стійкість розв'язки системи. Графічно зобразити траєкторії розв'язків цієї системи і показати напрям руху вздовж цих траєкторій.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 5y. \end{cases}$$

► Запишемо матрицю коефіцієнтів

$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Отримаємо характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = det\begin{pmatrix} -4-\lambda & 6 \\ -3 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Корені якого

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1.$$

Оскільки маємо один додатній корінь, тоді розв'язок нестійкий. Особлива точка сідло.

Траєкторії знайдемо наступним чином.

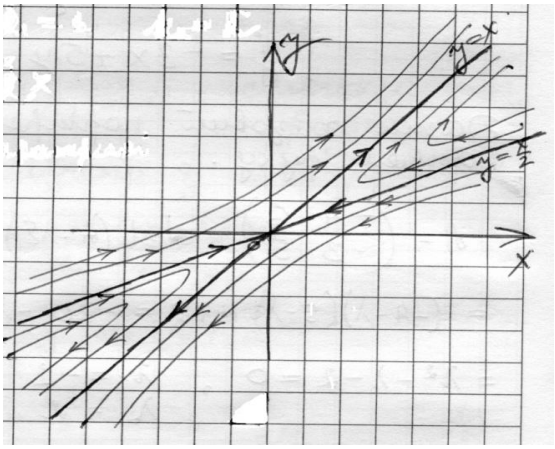
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x + 5y}{-4x + 6y} \Rightarrow (-4x + 6y)dy = (-3x + 5y)dx.$$

Знайдемо для сідла сепаратриси у вигляді $y = kx$. Отже,

$$k = \frac{-3 + 5k}{-4 + 6k} \Rightarrow k_1 = 1, \qquad k_2 = 1/2.$$

Сепаратриси мають вигляд

$$y_1 = x, \qquad y_2 = \frac{1}{2}x.$$



◄

Приклад 4.

Дослідити на стійкість розв'язки системи. Графічно зобразити траєкторії розв'язків цієї системи і показати напрям руху вздовж цих траєкторій.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

► Запишемо матрицю коефіцієнтів

$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Отримаємо характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 3 = 0.$$

Корені якого

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}.$$

Оскільки дійсна частина уявна, тоді розв'язок нестійкий. Особлива точка центр.

Траєкторії знайдемо наступним чином.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x-4y} \Rightarrow (x-4y)dy = (x-y)dx.$$

Згадаємо:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

$$M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad u(x,y) = C, \quad du = 0,$$

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y).$$

Маємо

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1.$$

Тоді можемо записати

$$u(x,y) = \int (x-y)dx + \varphi(y),$$

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy + \varphi(y).$$

Оскільки,

$$N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} = -x + 4y,$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x + \varphi'(y).$$

Отже маємо,

$$-x + 4y = -x + \varphi'(y),$$

$$\varphi'(y) = 4y \Rightarrow \varphi(y) = 2y^2.$$

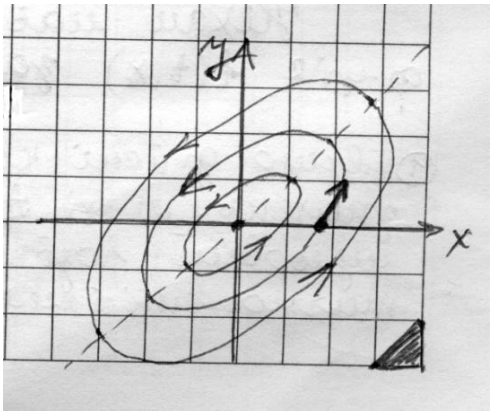
Тоді,

$$\frac{x^2}{2} - xy + 2y^2 = \text{C}.$$

Після відповідних перетворень отримаємо вираз

$$(x-y)^2 + 3y^2 = C_1.$$

Це не що інше, як сімейство еліпсів.


y
x

◀

Метод першого наближення.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t,x) \qquad (2)$$

$f(t,x) -$ неперервна по *x* та *t* ($t \geq t_0,\ \|x\| < h$) функція, така що $f(t,0) \equiv 0$, і задовольняє умову

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} = 0 \qquad (3)$$

рівномірно по $t \geq t_0$. Тоді систему рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = Ax \qquad (4)$$

називають системою першого наближення для системи (2).

Теорема.

Нехай маємо систему рівнянь (2) та функція $f(t,x)$ задовольняє умову (3). Тоді:

1) якщо дійсні частини всіх власних значень матриці *A* від'ємні, то нульовий розв'язок системи (2) асимптотично стійкий;

2) Якщо серед власних значень матриці A є хоча б одне з додатньою дійсною частиною, то нульовий розв'язок системи (2) нестійкий;
3) Якщо серед власних значень матриці А є хоча б одне з нульовою дійсною частиною, а інші мають від'ємні дійсні частини, то в цьому випадку з факту стійкості або нестійкості нульового розв'язку системи (4) НЕ можна зробити висновок про стійкість нульового розв'язку системи (2).

Заув. коли вектор функція $f(t,x)$ така, що $f(t,0) \equiv 0$ та $\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) = 0$, то вона задовольняє умову (3).

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь при $n=2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y), \\ \dot{y} = Q(x,y). \end{cases} \qquad (2)$$

Із (2) можна отримати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}. \qquad (3)$$

Розв'язок рівняння (3) дає нам так звані фазові криві або траєкторії. Можливі три типи фазових кривих (траєкторій):

1. точка;
2. замкнена крива;
3. незамкнена крива.

Замкненим кривим відповідають періодичні рухи, незамкненим кривим – неперіодичні.

Під додатнім напрямком на фазовій кривій L розуміємо напрямок руху фазової точки $(x(t), y(t))$ по кривій L в сторону зростання t.

Для того, щоб вияснити якісну картину для системи рівнянь (2), необхідно знати поведінку НЕ всіх фазових кривих, а лише деяких з них, які називаються особливими: положення рівноваги (спокою), граничні цикли, незамкнені криві, у яких хоча б одна напівтраєкторія є сепаратрисою якого-небудь стану рівноваги.

Сепаратриса – це лінія, що проходить через особливу точку «сідло» і, оскільки таких ліній дві, ділить площину на 4 частини.

Сепаратриси і криві граничних циклів ділять фазову площину на під області, в середині яких ці криві ведуть себе однаково.

Нехай (x_0, y_0) – особлива точка (точка спокою, стаціонарна точка) для системи диференціальних рівнянь (2). Досліджувати стійкість системи диференціальних рівнянь (2) в околі точки (x_0, y_0) можна за допомогою методу першого наближення. Для цього праві частини (функції) системи диференціальних рівнянь (2) розвинемо за формулою Тейлора в околі точки (x_0, y_0):

$$\begin{cases} P(x,y) = P(x_0,y_0) + \dfrac{\partial P(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \dfrac{\partial P(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0), \\ Q(x,y) = Q(x_0,y_0) + \dfrac{\partial Q(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \dfrac{\partial Q(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0). \end{cases}$$

Приклад 1.

Дослідити на стійкість положення рівноваги математичного маятника з тертям:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \sin x = 0, \quad k > 0.$$

►Нехай

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

тоді маємо

$$\frac{dy}{dt} = -2ky - \sin x.$$

Положення рівноваги визначається з умови

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ -2ky - \sin x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi n. \end{cases}$$

У наслідок періодичності x достатньо дослідити дві точки

$$(0,0), \qquad (\pi, 0).$$

Лінеаризуємо систему в околі точки $(0,0)$, для цього виділимо лінійну частину

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$\sin x$: $\sin 0 = 0$, але $\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|\sin x\|}{\|x\|} = 1$.

Отже,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2ky. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2k \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2k - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - 1}.$$

Оскільки $k > 0$, то $Re\lambda < 0$, отже даний розв'язок астмптотично стійкий.

Лінеаризуємо систему в околі точки $(\pi, 0)$, для цього виділимо лінійну частину

$$\sin x = \sin(x_1 + \pi) = -\sin x_1.$$

Отже,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x_1 - 2ky. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2k \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -2k - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2k\lambda - 1 = 0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 + 1}.$$

Оскільки $k > 0$, то виходить $Re\lambda_1 < 0$, а $Re\lambda_2 > 0$.

Отже даний розв'язок нестійкий.◄

Приклад 2.

Довести, що коли $\alpha\beta > -1$, то нульовий розвязок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\sin(x + \alpha y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x + \ln(1 - y). \end{cases}$$

асимптотично стійкий?

► Лінеаризуємо систему в околі точки $(0,0)$, отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - \alpha y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x - y. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ \beta & -1 \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -\alpha \\ \beta & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + (1 + \alpha\beta) = 0.$$

Застосуємо теорему Рауса-Гурвіця.

Матриця Гурвіця має вигляд:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 + \alpha\beta \end{pmatrix}.$$

Головні діагональні мінори:

$$\Delta_1 = 2 > 0,$$

$$\Delta_2 = 2(1 + \alpha\beta) > 0 \Rightarrow \alpha\beta > -1.$$

Тоді $Re\lambda < 0$, а отже нульовий розв'язок асимптотично стійкий.◄

Приклад 3.

Дослідити на стійкість усі положення рівноваги системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y + x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + 3x^5. \end{cases}$$

►Знайдемо усі положення рівноваги системи

$$\begin{cases} -2x + y + x^3 = 0, \\ -x - 2y + 3x^5 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$A(0,0),\ \ B(1,1),\ \ C(-1,-1).$$

Лінеаризуємо систему в околі точки $A(0,0)$, отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm i.$$

$Re\lambda < 0$, отже даний розв'язок астмптотично стійкий.

Лінеаризуємо систему в околі точки $B(1,1)$, отримаємо (зробимо заміну змінних $x = x_1 + 1,\ \ y = y_1 + 1$)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2(x_1 + 1) + (y_1 + 1) + (x_1 + 1)^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -(x_1 + 1) - 2(y_1 + 1) + 3(x_1 + 1)^5. \end{cases}$$

Після спрощення отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + y_1, \\ \dfrac{dy}{dt} = 14x_1 - 2y_1. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 14 & -2 \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 14 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 16 = 0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{65}}{2}.$$

Виходить $Re\lambda_1 < 0$, а $Re\lambda_2 > 0$. Отже даний розв'язок нестійкий.

Лінеаризуємо систему в околі точки $C(-1,-1)$, отримаємо (зробимо заміну змінних $x = x_1 - 1,\ y = y_1 - 1$)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2(x_1 - 1) + (y_1 - 1) + (x_1 - 1)^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -(x_1 - 1) - 2(y_1 - 1) + 3(x_1 - 1)^5. \end{cases}$$

Після спрощення отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + y_1, \\ \dfrac{dy}{dt} = 14x_1 - 2y_1. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 14 & -2 \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 14 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 16 = 0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{65}}{2}.$$

Виходить $Re\lambda_1 < 0$, а $Re\lambda_2 > 0$. Отже даний розв'язок нестійкий.◄

Приклад 4.

Дослідити на стійкість усі положення рівноваги системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy + 4, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 17. \end{cases}$$

►Знайдемо усі положення рівноваги системи

$$\begin{cases} xy + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 - 17 = 0. \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-4}{y}.$$

$$A(-4,1),\ \ B(4,-1),\ \ C(1,-4),\ \ \ D(-1,4).$$

Лінеаризуємо систему в околі точки (x_0, y_0), отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0), \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0). \end{cases}$$

Нехай $u = (x - x_0), v = (y - y_0)$.

Тоді лінеаризована система в околі точки $A(-4,1)$ має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u - 4v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -8u + 2v. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -4 \\ -8 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 30 = 0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{129}}{2}.$$

Виходить $Re\lambda_1 < 0$, а $Re\lambda_2 > 0$. Отже даний розв'язок нестійкий.

Лінеаризована система в околі точки $B(4,-1)$ має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -u + 4v, \\ \dfrac{dv}{dt} = 8u - 2v. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 4 \\ 8 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 30 = 0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{129}}{2}.$$

Виходить $Re\lambda_1 < 0$, а $Re\lambda_2 > 0$. Отже даний розв'язок нестійкий.

Лінеаризована система в околі точки $C(1, -4)$ має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -4u + v, \\ \dfrac{dv}{dt} = 2u - 8v. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & 1 \\ 2 & -8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda + 30 = 0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{24}}{2}.$$

Виходить $Re\lambda_{1,2} < 0$. Отже даний розв'язок асимптотично стійкий.

Лінеаризована система в околі точки $D(-1,4)$ має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 4u - v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -2u + 8v. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}4-\lambda & -1\\ -2 & 8-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-12\lambda+30=0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{24}}{2}.$$

Виходить $Re\lambda_{1,2}>0$. Отже даний розв'язок нестійкий.◄

Тема 3. Дослідження на стійкість розв'язків систем диференціальних рівнянь методом функцій Ляпунова.

Часто для визначення стійкості системи диференціальних рівнянь використовується інший підхід – метод функцій Ляпунова.

Нехай $V(x) = V(x_1, \dots, x_n) -$ скалярна функція змінної $x = (x_1, \dots, x_n)$, визначена і диференційована в кулі

$$J_h = \{x \in R^n : \|x\| < h, h > 0\}$$

і така, що $V(0) = 0$.

Функція $V(x)$ називається *функцією Ляпунова*.

Означення 1. Функцію $V(x)$ називають додатньо (від'ємно) визначеною в кулі J_h, якщо $\forall x \in J_h, x \neq 0$ виконується нерівність

$$V(x) > 0 \ (V(x) < 0).$$

В обох цих випадках функція $V(x)$ є знаковизначеною.

Означення 2. Функція $V(x)$ називається додатньо (від'ємно) сталою в кулі J_h, якщо $\forall x \in J_h$ виконується нерівність

$$V(x) \geq 0 \ (V(x) \leq 0).$$

В обох цих випадках функцію $V(x)$ називають знакосталою.

Означення 3. Якщо функція $V(x)$ набуває в кулі J_h як додатніх так і відємних значень, то її називають знакозмінною.

Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \qquad (1)$$

Припустимо, що функція $f(x)$ визначена і неперервна в кулі J_h при деякому $h > 0$, задовольняє умову Ліпшиця в кулі J_h та $f(0) = 0$.

Умова Ліпшиця.

Функція $f(x)$ визначена в деякій підмножині $D \subset R^2$, $(x_0, y_0) \in D$ при чому $y(x_0) = y_0$. Тоді $\exists C > 0$ така, що для $\forall (x_1, y_1), (x_1, y_2) \in D$ виконується нерівність

$$|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|.$$

Нехай $x = x(t) -$ деякий розв'язок системи (1). Вздовж цього розв'язку функція $V(x) = V(x(t))$ як функція змінної t неперервно диференційована і її похідна визначається за формулою:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x).$$

Теорема Ляпунова (про стійкість)

Якщо для системи рівнянь (1) існує знаковизначена в кулі J_h функція $V(x)$, похідна якої вздовж траєкторії системи (1) є знакосталою функцією, зі знаком протилежним знаку самої функції $V(x)$, або тотожно дорівнює нулю, то нульовий розв'язок системи (1) стійкий за Ляпуновим. Тобто

$$V(x) > 0 \quad \text{та} \quad \frac{dV(x)}{dt} \leq 0, \quad \text{або} \quad \frac{dV(x)}{dt} \equiv 0,$$

або ж

$$V(x) < 0 \quad \text{та} \quad \frac{dV(x)}{dt} \geq 0, \quad \text{або} \quad \frac{dV(x)}{dt} \equiv 0.$$

Теорема Ляпунова (про асимптотичну стійкість)

Якщо для системи рівнянь (1) існує знаковизначена в кулі J_h функція $V(x)$, похідна якої вздовж траєкторії системи (1) є знаковизначеною функцією, зі знаком протилежним знаку самої функції $V(x)$, то нульовий

розв'язок системи (1) асимптотично стійкий за Ляпуновим. Тобто

$$V(x) > 0 \quad \text{та} \quad \frac{dV(x)}{dt} < 0,$$

або ж

$$V(x) < 0 \quad \text{та} \quad \frac{dV(x)}{dt} > 0.$$

Теорема Ляпунова (про нестійкість)

Якщо для системи рівнянь (1) існує в кулі J_h функція $V(x)$, похідна якої вздовж траєкторії системи (1) є знаковизначеною функцією, а сама функція $V(x)$ у будь-якому околі точки $x = 0$ не є знакосталою зі знаком протилежним знаку похідної, то нульовий розв'язок системи (1) нестійкий за Ляпуновим.

Приклад 1.

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x^3 - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y^3. \end{cases}$$

► Функція Ляпунова $V(x) = x^2 + y^2$ задовольняє умови

$V(x,y) > 0$, причому $V(0,0) = 0$;

$$\frac{dV(x)}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2x(-x^3 - y) + 2y(x - y^3) =$$

$$= -2(x^4 + y^4) \leq 0,$$

тоді нульовий розв'язок системи асимптотично стійкий.◄

Приклад 2.

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -xy^4, \\ \dfrac{dy}{dt} = yx^4. \end{cases}$$

► Функція Ляпунова $V(x) = x^4 + y^4$ задовольняє умови

$V(x,y) > 0$, причому $V(0,0) = 0$;

$$\frac{dV(x)}{dt} = 4x^3\frac{dx}{dt} + 4y^3\frac{dy}{dt} = 4x^3(-xy^4) + 4y^3yx^4 =$$

$$= -4x^4y^4 + 4x^4y^4 \equiv 0,$$

тоді нульовий розв'язок системи стійкий.◄

Приклад 3.

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^5 + y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^3 + y^5. \end{cases}$$

► Функція Ляпунова $V(x) = x^4 - y^4$ задовольняє умови

$V(x, y) > 0, |x| > |y|$, причому $V(0,0) = 0$;

$$\frac{dV(x)}{dt} = 4x^3\frac{dx}{dt} - 4y^3\frac{dy}{dt}$$
$$= 4x^3(x^5 + y^3) - 4y^3(x^3 + y^5) =$$

$= 4(x^8 - y^8) > 0$, при $|x| > |y|$,

тоді нульовий розв'язок системи нестійкий.◄

Приклад 4.

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax^3 + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + my^5. \end{cases}$$

► Скористаємось методом стійкості за першим наближенням:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & b \\ c & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - bc = 0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{bc}.$$

1) Якщо $bc > 0$, то $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{bc}$ дійсні різні різних знаків ⇒ розв'язок нестійкий.
2) Якщо $bc < 0$, то $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{bc}$, тоді $Re\lambda_{1,2} = 0$ ⇒ немає відповіді про характер стійкості або нестійкості розв'язку.⇒ Метод функцій Ляпунова.

Оскільки права частина кожного з цих рівнянь складається з двох доданків, один з яких залежить від x, а другий від y, то функцію Ляпунова $V(x, y)$ будемо шукати у вигляді

$$V(x, y) = A(x) + B(y),$$

де $A(x)$ та $B(y)$ неперервно диференційовані в околі початку координат і такі, що $A(0) = 0$ та $B(0) = 0$, тоді

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = \frac{dA(x)}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dB(y)}{dy}\frac{dy}{dt}.$$

Отже,

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = \frac{dA(x)}{dx}(ax^3 + by) + \frac{dB(y)}{dy}(cx + my^5) =$$

$$= \frac{dA(x)}{dx}ax^3 + \frac{dB(y)}{dy}my^5 + \frac{dA(x)}{dx}by + \frac{dB(y)}{dy}cx.$$

Функції $A(x)$ та $B(y)$ виберемо так, щоб похідна $\frac{dV(x,y)}{dt}$ мала ту саму структуру, що і функція $V(x, y)$. Тоді для цього має виконуватись рівність

$$\frac{dA(x)}{dx}by + \frac{dB(y)}{dy}cx = 0.$$

Звідси отримаємо

$$\frac{by}{\frac{dB(y)}{dy}} = -\frac{cx}{\frac{dA(x)}{dx}} = const.$$

Нехай $const = \frac{1}{2}$. Тоді отримаємо

$$\frac{dB(y)}{dy} = 2by, \quad \frac{dA(x)}{dx} = -2cx.$$

Тоді

$$A(x) = -cx^2, \quad B(y) = by^2,$$

а отже

$$V(x, y) = -cx^2 + by^2.$$

Тоді похідна

$$\frac{dV(x, y)}{dt} = -2acx^4 + 2bmy^4.$$

При $bc < 0$ функція $V(x, y)$ є знаковизначена, тоді

1) $a \leq 0, m \leq 0$ нульовий розв'язок стійкий;
2) $a < 0, m < 0$ нульовий розв'язок асимптотично стійкий;

3) $a > 0, m > 0$ нульовий розв'язок нестійкий.

Побудова функції Ляпунова $V(x, y)$ методом відокремлення змінних.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by} \quad \Rightarrow \quad cxdx = bydy \quad \Rightarrow$$

$$cxdx + (-by)dy = 0 \quad (M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0).$$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

$$M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad u(x,y) = C, \quad du = 0,$$

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y).$$

Маємо

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Тоді можемо записати

$$u(x,y) = \int cxdx + \varphi(y) = \frac{cx^2}{2} + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(y) = -by \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -\frac{by^2}{2}.$$

Тоді,

$$V(x,y) = \frac{cx^2}{2} - \frac{by^2}{2}.$$

А похідна тоді

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = acx^4 - bmy^4.$$

◄

Приклад 5.

Дослідити на стійкість положення рівноваги математичного маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\sin x = 0, \;\; k > 0.$$

►Нехай

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

тоді маємо

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -k\sin x\,. \end{cases}$$

Положення рівноваги визначається з умови

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ -k\sin x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0, \\ \sin x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (0,0), \\ (\pi,0). \end{matrix}$$

Будуємо перший інтеграл

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-k\sin x}{y} \quad \Rightarrow \quad ydy = -k\sin x\,dx.$$

$$\frac{y^2}{2} = k\cos x + C.$$

Для точки $(0,0)$ маємо

$$V(x,y) = \frac{y^2}{2} - k\cos x + k,$$

$$V(0) = 0,\ \ V(x,y) > 0\ \ \forall x, y \neq 0,$$

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
$$= k\sin x \cdot y + y \cdot (-k\sin x) \equiv 0,$$

розв'язок стійкий.

Для точки $(\pi, 0)$ маємо

$$x_1 = x - \pi, \quad \Rightarrow \quad x = x_1 + \pi,$$

$$\sin x = \sin(x_1 + \pi) = -\sin x_1.$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = k\sin x_1\,. \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx_1} = \frac{k\sin x_1}{y} \Rightarrow ydy$$
$$= k\sin x_1\, dx_1.$$

$$\frac{y^2}{2} = -k\cos x_1 + C.$$

$$V(x,y) = \frac{y^2}{2} - k\cos x_1 + k,$$

$$V(0) = 0, \;\; V(x_1, y) \text{ знакозмінна } \forall x, y \neq 0,$$

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
$$= -k\sin x_1 \cdot y + y \cdot k\sin x_1 \equiv 0,$$

розв'язок нестійкий. ◄

Тема 4. Особливі точки диференціальних рівнянь на площині.

Розглянемо лінійну та однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases} \qquad (1)$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

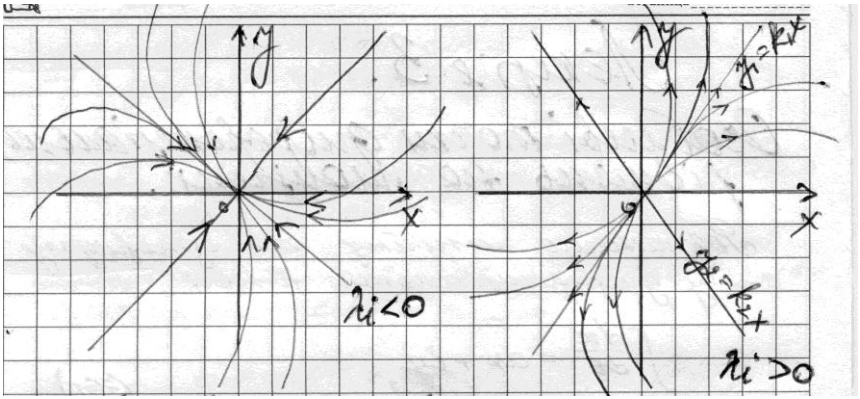
Якщо $detA = ad - bc \neq 0$, то система (1) має єдине положення рівноваги – точка (0, 0).

Якісна поведінка фазових кривих (тип положення рівноваги) визначається власними значеннями матриці А, тобто коренями характеристичного рівняння.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0.$$

1) Якщо $\lambda_1, \lambda_2 \in R -$ дійсні різні одного знаку, то особлива точка носить назву – вузол.
   $\lambda_i > 0 -$ нестійкий вузол,
   $\lambda_i < 0 -$ стійкий вузол.



Сепаратриси для вузла знаходяться з рівняння $y_i = k_i x$, або з власних векторів, які відповідають власним числам.

2) Якщо система (1) має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax, \\ \dfrac{dy}{dt} = ay, \end{cases}$$

то особлива точка називається дикритичний вузол.

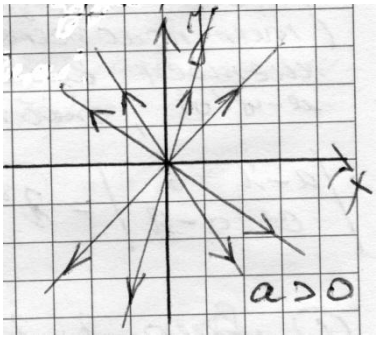
$\lambda_i > 0 -$ нестійкий дикритичний вузол,
$\lambda_i < 0 -$ стійкий дикритичний вузол.

$\lambda_1 = \lambda_2 = a -$ кратні корені.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln y = \ln x + \ln C \quad \Rightarrow y = Cx$$

сім'я прямих, що проходять через точку (0, 0).



3) Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda -$ та

$$rang \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1,$$

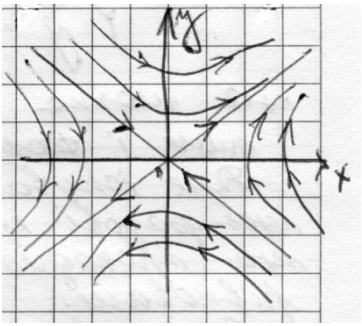
то особлива точка називається вироджений вузол.

$\lambda > 0 -$ нестійкий вироджений вузол,
$\lambda < 0 -$ стійкий вироджений вузол.

У даного виродженого вузла лише одна сепаратриса, що є дотичною до графіка функції.

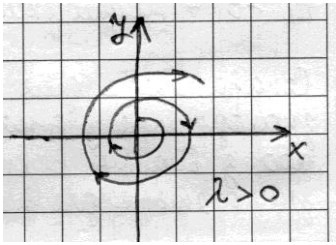
4) Якщо $\lambda_1, \lambda_2 \in R,\ \lambda_1\lambda_2 < 0 -$ дійсні різні різних знаків, то особлива точка називається сідло.

Фазовий портрет має дві сепаратриси, одна з яких стійка, а інша – нестійка.



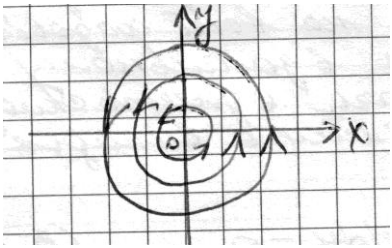
5) Якщо $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, та якщо $Re\lambda = \alpha \neq 0 -$ особлива точка називається фокус.
   $\alpha > 0 -$ нестійкий фокус,
   $\alpha < 0 -$ стійкий фокус.

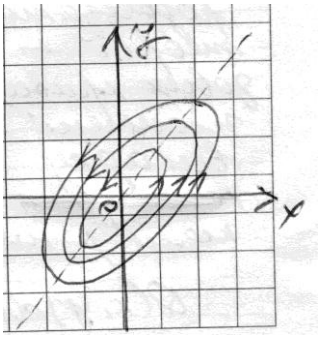
Це сімейство спіралей.



6) Якщо Якщо $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, та якщо $Re\lambda = 0 -$ особлива точка називається центр.

Це сімейство еліпсів. Напрям руху по траєкторіям буде залежати від вихідної системи диференціальних рівнянь.





Зауваження 1. У випадку вузла, фазові криві дотикаються до тієї прямої, що напрямлена вздовж власного вектора, що відповідає меншому за модулем значенню власного числа λ.

Зауваження 2. Якщо для системи (1) особлива точка є центр, то для системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \qquad (2)$$

ця точка може бути як центр, так і фокус.

Для існування центру достатньо, щоб фазові криві мали вісь симетрії, що проходить через дане положення рівноваги.

Якщо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

Не змінюється вразі заміни *x* на –*x*, або/та у на –у, то така вісь симетрії очевидно існує.

Іноді з'ясувати поведінку фазових кривих системи рівнянь (2) в околі кожного положення рівноваги, можна розв'язавши глобальну задачу якісної теорії – дослідити поведінку фазових кривих системи на всій фазовій площині. Проте в загальному вигляді ця задача є досить складною.

Приклад 1.

Дослідити поведінку фазових кривих системи диференціальних рівнянь в околі положень рівноваги, а також у всій фазовій площині.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3x^2. \end{cases}$$

►Знайдемо усі положення рівноваги системи

$$\begin{cases} -y = 0, \\ x - 3x^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (0,0) \\ \left(\frac{1}{3}, 0\right). \end{matrix}$$

Лінеаризуємо систему в околі точки (x_0, y_0), отримаємо

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(y - y_0), \\ \frac{dy}{dt} = (1 - 6x_0)(x - x_0). \end{cases}$$

Нехай $u = (x - x_0), v = (y - y_0)$.

Тоді лінеаризована система в околі точки $A(0,0)$ має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 0 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2}=\pm i.$$

Виходить $Re\lambda=0$. Отже даний розв'язок нестійкий. Чи буде ця особлива точка центром?

Лінеаризована система в околі точки $A\left(\frac{1}{3},0\right)$ має вигляд:

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=-v,\\ \dfrac{dv}{dt}=-u.\end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1=0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2}=\pm 1.$$

Виходит, що корені дійсні різні різних знаків. Отже даний розв’язок нестійкий. Ця особлива точка є сідлом.

Шукаємо сепаратриси для сідла через власні вектори.

Для $\lambda_1 = -1$ маємо

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$v_1 = u.$$

Для $\lambda_1 = 1$ маємо

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$v_2 = -u.$$

Тепер перевіримо, чи буде точка (0, 0) – центром.

Розглянемо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{-y}$$

Так, дійсно існує вісь симетрії.

$$xdx + ydy = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Отримали коло.

В загальному випадку, цієї інформації недостатньо для побудови загального фазового портрету на всій площині.

Отже, розглянемо наступне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 3x^2}{-y} \Rightarrow -ydy = (x - 3x^2)dx$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - x^3 = C.$$

Перетворимо рівняння до наступного вигляду

$$y^2 = -x^2 + 2x^3 + C.$$

Нехай $y^2 = z$. тоді

$$z = -x^2 + 2x^3 + C.$$

Досліджуємо. Нехай $C = 0$. Тоді

$$z = -x^2 + 2x^3.$$

$$z = 0: -x^2(1 - 2x) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_{1,2} = 0 \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$x_{1,2} = 0 -$ точка дотику.

$z' = 0 -$ шукаємо точки підозрілі на extr.

$$z'_x = -2x + 6x^2 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{matrix}$$

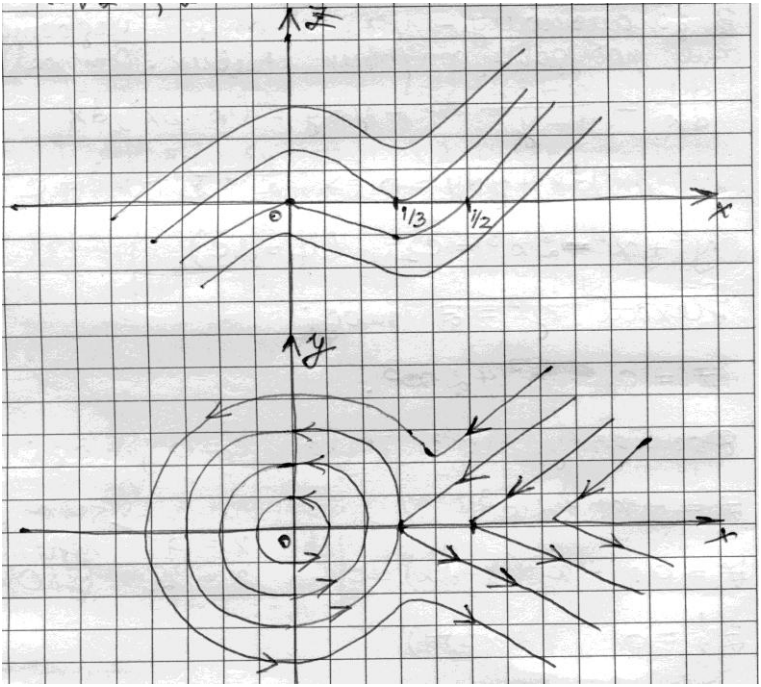
$z'' = 0 -$ шукаємо точки підозрілі на max/min.

$$z''_x = -2 + 12x$$

$$z''_x(0) = -2 < 0 \;\Rightarrow\; max$$

$$z''_x\left(\frac{1}{3}\right) = 2 > 0 \;\Rightarrow\; min$$

$$y = \pm\sqrt{z}, \qquad z > 0.$$



◀

Приклад 2.

Дослідити поведінку фазових кривих системи диференціальних рівнянь в околі положень рівноваги, а також у всій фазовій площині.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 4x^3. \end{cases}$$

►Знайдемо усі положення рівноваги системи

$$\begin{cases} 2y = 0, \\ 4x(1 - x^2) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A(0,0) \\ B(1,0) \\ C(-1,0) \end{matrix}$$

Лінеаризуємо систему в околі точки (x_0, y_0), отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2(y - y_0), \\ \dfrac{dy}{dt} = (4 - 12x_0^2)(x - x_0). \end{cases}$$

Нехай $u = (x - x_0), v = (y - y_0)$.

Тоді лінеаризована система в околі точки $A(0,0)$ має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8 = 0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}.$$

Виходит, що корені дійсні різні різних знаків. Отже даний розв'язок нестійкий. Ця особлива точка є сідлом.

Шукаємо сепаратриси для сідла через власні вектори.

Для $\lambda_1 = -2\sqrt{2}$ маємо

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 2 \\ 4 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$y_1 = -\sqrt{2}x.$$

Для $\lambda_1 = 2\sqrt{2}$ маємо

$$\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 2 \\ 4 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$y_2 = \sqrt{2}x.$$

Лінеаризована система в околі точки $A(1,0)$ має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 2v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -8u. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -8 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 16 = 0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = \pm 4i.$$

Виходить $Re\lambda = 0$. Отже даний розв'язок нестійкий. Чи буде ця особлива точка центром?

Тепер перевіримо, чи буде точка (1, 0) – центром.

Розглянемо рівняння

$$\frac{dv}{du} = \frac{-8u}{2v} = -4\frac{u}{v}$$

Так, дійсно існує дві вісі симетрії.

$$4udu + vdy = 0 \;\Rightarrow 2u^2 + \frac{v^2}{2} = C.$$

Отримали еліпс.

В загальному випадку, цієї інформації недостатньо для побудови загального фазового портрету на всій площині.

Отже, розглянемо наступне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 4x^3}{2y} \;\Rightarrow\; 2ydy = (4x - 4x^3)dx$$

$$y^2 = 2x^2 - x^4 + C.$$

Нехай $y^2 = z$. тоді

$$z = 2x^2 - x^4 + C.$$

Досліджуємо. Нехай $C = 0$. Тоді

$$z = 2x^2 - x^4.$$

$$z = 0\colon x^2(2 - x^2) = 0 \;\Rightarrow \begin{matrix} x_{1,2} = 0 \\ x_{3,4} = \pm\sqrt{2} \end{matrix}$$

$\mathrm{x}_{1,2} = 0 -$ точка дотику.

$z' = 0$ – шукаємо точки підозрілі на extr.

$$z'_x = 4x(1 - x^2) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{matrix}$$

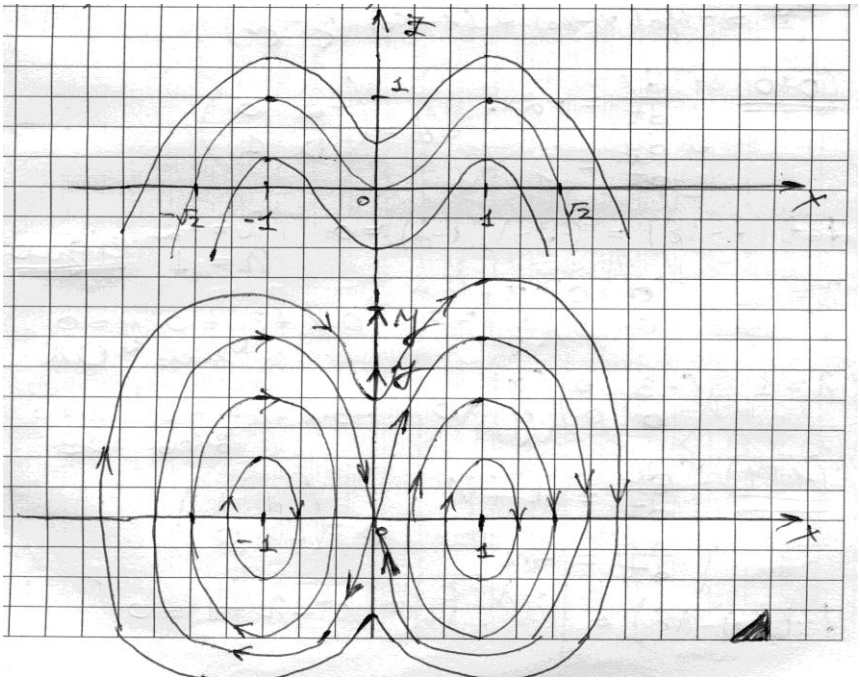
$z'' = 0$ – шукаємо точки підозрілі на max/min.

$$z''_x = 4 - 12x^2$$

$$z''_x(0) = 4 > 0 \;\Rightarrow\; min$$

$$z''_x(1) = -8 < 0 \;\Rightarrow\; max$$

$$z''_x(-1) = -8 < 0 \;\Rightarrow\; max$$



◄

Приклад 3.

Дослідити поведінку фазових кривих системи диференціальних рівнянь в околі положень рівноваги, а також у всій фазовій площині.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 1. \end{cases}$$

►Знайдемо усі положення рівноваги системи

$$\begin{cases} -2xy = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow\ x^2 - 2xy + y^2 - 1 = (x-y)^2 = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} A(0,1) \\ B(0,-1) \\ C(1,0) \\ D(-1,0) \end{array}$$

Лінеаризуємо систему в околі точки (x_0, y_0), отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2y_0(x - x_0) - 2x_0(y - y_0), \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0). \end{cases}$$

Характеристичне рівняння в загальному вигляді

$$\begin{vmatrix} -2y_0 - \lambda & -2x_0 \\ 2x_0 & 2y_0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4(x_0^2 - y_0^2) = 0.$$

Нехай $u = (x - x_0), v = (y - y_0)$.

Тоді характеристичне рівняння в околі точки $A(0,1)$ має вигляд:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = \pm 2.$$

Виходит, що корені дійсні різні різних знаків. Отже даний розв'язок нестійкий. Ця особлива точка є сідлом.

Шукаємо сепаратриси для сідла через власні вектори.

Для $\lambda_1 = -2$ маємо

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$y = 0$. Це буде вісь OX.

Для $\lambda_1 = 2$ маємо

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$x = 0$. Це буде вісь OY.

Характеристичне рівняння в околі точки $B(0,-1)$ має вигляд:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0\\ 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4=0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2}=\pm 2.$$

Виходит, що корені дійсні різні різних знаків. Отже даний розв'язок нестійкий. Ця особлива точка є сідлом.

Шукаємо сепаратриси для сідла через власні вектори.

Для $\lambda_1=-2$ маємо

$$\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow$$

$x=0$. Це буде вісь OY

Для $\lambda_1=2$ маємо

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow$$

$y=0$. Це буде вісь OX

Характеристичне рівняння в околі точки $C(1,0)$ має вигляд:

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Виходить $Re\lambda = 0$. Отже даний розв'язок нестійкий. Чи буде ця особлива точка центром?

Тепер перевіримо, чи буде точка (1, 0) – центром.

Розглянемо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{-2xy}$$

Так, дійсно існує вісь симетрії.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -2v, \\ \frac{dv}{dt} = 2u. \end{cases}$$

$$2udu + 2vdy = 0 \ \Rightarrow u^2 + v^2 \ = C.$$

Отримали коло.

Характеристичне рівняння в околі точки $D(-1,0)$ має вигляд:

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Виходить $Re\lambda = 0$. Отже даний розв'язок нестійкий. Чи буде ця особлива точка центром?

Тепер перевіримо, чи буде точка $D(-1,0)$ – центром.

Розглянемо рівняння

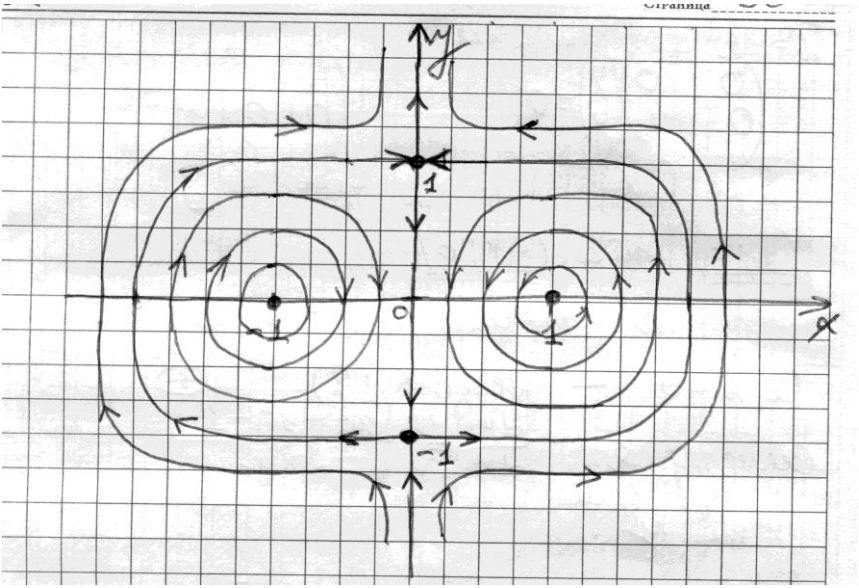
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{-2xy}$$

Так, дійсно існує вісь симетрії.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = 2v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -2u. \end{cases}$$

$$2udu + 2vdy = 0 \;\Rightarrow u^2 + v^2 = C.$$

Отримали коло.


y
1
-1
O
1
x
-1

◀

Тема 5. Моделі динаміки ізольованої популяції.

Найпростіші математичні моделі динаміки популяцій

Неперервні моделі

Літерою N будемо позначати чисельність (кількість, густину, щільність, обсяг і т.п.) популяції.

Найпростіша модель росту популяції організмів задається рівнянням Бернуллі (1760):

$$\frac{dN}{dt} = \mu N, \qquad (1)$$

де t – час, $\mu = B - D$.

Розв'язком рівняння (1) при $\mu = const$ та $N(0) = N_0$ є

$$N(t) = N_0 e^{\mu t}. \qquad (2)$$

Із розв'язку (2) видно, що при

$$\mu > 0, \;\; t \to +\infty \quad N(t) \to +\infty,$$

$$\mu < 0, \;\; t \to +\infty \quad N(t) \to 0.$$

При $\mu = const > 0$ закон розвитку (2) відомий як закон Мальтуса.

У природі для багатьох популяцій при $t \to +\infty$ виконується умова $N(t) \to K$ $(K = const)$. Вченими були запропоновані моделі, що відповідають цій умові.

Модель Гемпертца (1825):

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N\left(1 - \frac{lnN}{lnK}\right) \qquad (3)$$

Розв'язок рівняння (3) за початкової умови $N(0) = N_0$ має вигляд

$$N(t) = K \cdot exp\left(ln\frac{N_0}{K} \cdot e^{-\frac{\varepsilon t}{lnK}}\right) \qquad (4)$$

Модель Верхюльста (1838, частинний випадок рівняння Бернуллі)

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N\left(1 - \frac{N}{K}\right) \qquad (5)$$

називається рівнянням логістичного росту, де ε – коефіцієнт росту, а K – ємність середовища. Ця модель враховує внутрішньовидову конкуренцію (нестача їжі, світла, площі тощо).

Розв'язок рівняння (5) за початкової умови $N(0) = N_0$ має вигляд

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\varepsilon t}} \qquad (6)$$

Дискретні моделі

У багатьох випадках потрібно враховувати дискретність величини *N*. Замінивши похідну $\dot{N}$ в точці *i* її дискретним аналогом

$$\dot{N}|_{t=i} \cong \frac{1}{\Delta t}(N_{i+1} - N_i) \qquad (7)$$

для рівняння (6) отримаємо модель Ріккера

$$N_{i+1} = N_i exp\left(\varepsilon\left(1 - \frac{N_i}{K}\right)\right) \qquad (8)$$

Розглядалися також рівняння виду

$$N_{i+1} = \frac{\alpha N_i}{(1 + \beta N_i)^{\gamma}} \qquad (9)$$

де параметри α, β, γ визначаються експериментально.

У загальному вигляді дискретні моделі динаміки популяцій мають вигляд

$$N_{i+1} = N_i F(N_i) \qquad (10)$$

де на функцію $F(N_i)$ накладають певні умови, враховуючи особливості поведінки популяції.

Тема 6. Модель Леслі вікової структури

У деяких популяціях врахування вікової структури популяції має істотне значення. Можна виділити кілька стадій розвитку або вікових груп. Вважатимемо, що популяція складається з n вікових груп; спосіб розбиття визначається біологічними особливостями організмів та специфікою задачі. Вікові групи мають різну ймовірність виживання та народжуваності для кожного часового періоду.

Нехай $x_i(t),\ i = \overline{1,n}$ – чисельність $i^{\text{ої}}$ вікової групи (або чисельність самок $i^{\text{ої}}$ вікової групи). Змінна t враховує лише дискретні зміни часу, при переході від однієї вікової групи до наступної.

Введемо вектор вікової структури $X = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Вважатимемо, що функції народжуваності та виживання є лінійними:

$$b_i(x) = b_i x_i, \quad s_i(x) = s_i x_i, \ \ i = \overline{1,n}.$$

Чисельність кожної з вікових груп описується співвідношеннями

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i(t), \quad \overline{i=1,n}, \\ x_{i+1}(t+1) = s_i x_i(t), \quad i = \overline{1,n-2}, \\ x_n(t+1) = s_{n-1} x_{n-1}(t) + s_n x_n(t). \end{cases} \qquad (1)$$

Коефіцієнти b_i називаються коефіцієнтами народжуваності, s_i $(0 < s_i \leq 1)$ визначають частку осіб і^{ого} віку, що доживають до і+1ого віку.

Але в цій моделі не враховується зміна параметрів від умов довкілля та загальної чисельності вікових груп.

Введемо матрицю Леслі

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & s_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Дуже часто в багатьох випадках $s_n = 0$.

Систему рівнянь (1) можна записати в матричному вигляді

$$X(t+1) = LX(t) \qquad (3)$$

Якщо відомий початковий розподіл популяції $X(0)$, то для дискретного часу маємо рівняння

$$X(t) = L^t X(0) \qquad (4)$$

Оскільки величини b_i та s_i невід'ємні, то матриця L також невід'ємна. Для невід'ємних матриць справедлива теорема Перона-Фробеніуса. Матриця L нерозкладна ($b_n \neq 0$), тому вона має найбільше власне число (число Фробеніуса), що означає швидкість росту популяції, та додатній власний вектор (вектор Фробеніуса), що відповідає цьому власному числу, та визначає стійку вікову структуру популяції.

Приклад.

Побудувати модкль Леслі, що складається з трьох вікових груп – молодшої, середньої та старшої, якщо відома народжуваність 9 особин від однієї самки середнього віку, 12 особин – від однієї самки старшого віку. Коефіцієнт переходу з молодшої вікової групи у середню дорівнює $^1/_3$, із середньої в старшу - $^1/_2$, коефіцієнт виживання в старшій групі дорівнює нулю.

Знайти темп (швидкість) росту популяції та її стійку вікову структуру.

► Запишемо матрицю Леслі

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 12 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 9 & 12 \\ \frac{1}{3} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Корені рівняння цього рівняння

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = -1.$$

$\lambda_L = \lambda_1 = 2 -$ темп росту популяції.

Стійку вікову структуру знайдемо із системи рівнянь

$$\begin{cases} -2x_1 + 9x_2 + 12x_3 = 0, \\ \frac{1}{3}x_1 - 2x_2 = 0, \\ \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Нехай $x_3 = 1$, тоді отримаємо наступний вектор-стовпчик стійкої вікової структури

$$x = (24, 4, 1)^T.$$

◄

Тема 7. Моделювання взаємодії біологічних видів. Модель Вольтерра «хижак – жертва»

Стосунки з умовною характеристикою «хижак – жертва» є найістотнішими для функціонування екосистем. В основу відповідної моделі покладені «ідеалізовані» уявлення про характер внутрішньо- та міжвидових стосунків у спільноті, що складається з виду «хижак» і виду «жертва»:

1) за умови відсутності хижака жертва розвивається експоненціально;

2) за умови відсутності жертви хижак експоненціально вимирає;

3) сумарна кількість біомаси жертв, що споживається популяцією хижака за одиницю часу, лінійно залежить від густини популяції жертви та від щільності популяції хижака;

4) біомаса жертви, що споживається хижаком, перетворюється на його біомасу з певним коефіцієнтом;

5) будь-які додаткові фактори, що впливають на динаміку популяції жертви та хижака, відсутні.

За цих припущень дана модель може бути описана у наступному вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x - \gamma_1 xy = x(\varepsilon_1 - \gamma_1 y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -\varepsilon_2 y + \gamma_2 xy = y(-\varepsilon_2 + \gamma_2 x), \end{cases} \quad (1)$$

де x – густина популяції жертви, y – густина популяції хижака, ε_1 – швидкість розмноження жертви за відсутності хижака, ε_2 – природна смертність хижака, γ_1 – питома швидкість споживання хижаком жертви за одиничної густини обох популяцій, γ_2 – коефіцієнт перетворення біомаси жертви, що була спожита хижаком, на його біомасу.

Для знаходження рівноваги системи (1) потрібно розв'язати систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x(\varepsilon_1 - \gamma_1 y) = 0, \\ y(-\varepsilon_2 + \gamma_2 x) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

з якої маємо

$$x_1^* = 0, y_1^* = 0,$$

$$x_2^* = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, y_2^* = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}.$$

Проаналізуємо знайдені стани рівноваги на стабільність. Для цього лінеаризуємо систему (1) в околі кожної із стаціонарних точок. Запишемо спочатку в загальному вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 y^*)(x - x^*) - \gamma_1 x^*(y - y^*), \\ \dfrac{dy}{dt} = \gamma_2 y^*(x - x^*) + (-\varepsilon_2 + \gamma_2 x^*)(y - y^*), \end{cases} \quad (3)$$

Матриця коефіцієнтів системи (3)

$$A = \begin{pmatrix} (\varepsilon_1 - \gamma_1 y^*) & -\gamma_1 x^* \\ \gamma_2 y^* & (-\varepsilon_2 + \gamma_2 x^*) \end{pmatrix}$$

Для першої точки $x_1^* = 0, y_1^* = 0$ маємо

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ матиме вигляд

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 - \lambda & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 - \lambda \end{vmatrix} = (\varepsilon_1 - \lambda)(-\varepsilon_2 - \lambda) = 0$$

Звідси маємо $\lambda_1 = \varepsilon_1, \lambda_2 = -\varepsilon_2$. Особлива точка сідло, нестійка рівноважна точка.

Для другої точки $x_2^* = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, y_2^* = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$ маємо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тоді характеристичне рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ матиме вигляд

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\varepsilon_1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$$

Звідси маємо $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \quad Re\lambda_{1,2} = 0.$

Особлива точка центр. Маємо нескінченну сім'ю концентричних замкнених кривих.

Тема 8. Моделювання взаємодії біологічних видів. Модель Лоткі-Вольтерра, «хижак – жертва» з врахуванням внутрішньовидової конкуренції серед жертв.

Як зазначалось вище, модель Вольтерра має певні недоліки. Наприклад, за відсутності хижаків чисельність жертви може необмежено зростати. Насправді цього не відбувається завдяки конкуренції всередині популяції.

Модель Лоткі-Вольтерра пропонує враховувати внутрішньовидову конкуренцію серед жертв:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_1 - \gamma_1 y - \beta x), \\ \frac{dy}{dt} = y(-\varepsilon_2 + \gamma_2 x), \end{cases} \quad (1)$$

де β – коефіцієнт внутрішньовидової конкуренції серед жертв

Система (1) має три рівноважні точки:

$$\begin{cases} x(\varepsilon_1 - \gamma_1 y - \beta x) = 0, \\ y(-\varepsilon_2 + \gamma_2 x) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1^* = 0, y_1^* = 0,$$

$$x_2^* = \frac{\varepsilon_1}{\beta}, y_2^* = 0,$$

$$x_3^* = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, y_3^* = \frac{\varepsilon_1\gamma_2 - \beta\varepsilon_2}{\gamma_1\gamma_2}.$$

Проаналізуємо знайдені стани рівноваги на стабільність. Для цього лінеаризуємо систему (1) в околі кожної із стаціонарних точок.

Запишемо спочатку в загальному вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 y^* - 2\beta x^*)(x - x^*) - \gamma_1 x^*(y - y^*), \\ \dfrac{dy}{dt} = \gamma_2 y^*(x - x^*) + (-\varepsilon_2 + \gamma_2 x^*)(y - y^*), \end{cases} \quad (3)$$

Матриця коефіцієнтів системи (3)

$$A = \begin{pmatrix} (\varepsilon_1 - \gamma_1 y^* - 2\beta x^*) & -\gamma_1 x^* \\ \gamma_2 y^* & (-\varepsilon_2 + \gamma_2 x^*) \end{pmatrix}$$

Для першої точки $x_1^* = 0, y_1^* = 0$ результат дослідження такий як для моделі Вольтерра.

Для другої точки $x_2^* = \frac{\varepsilon_1}{\beta}, y_2^* = 0$ маємо

$$A = \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 & -\dfrac{\gamma_1}{\beta}\varepsilon_1 \\ 0 & -\varepsilon_2 + \dfrac{\gamma_2}{\beta}\varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

Тоді характеристичне рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ матиме вигляд

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon_1 - \lambda & -\dfrac{\gamma_1}{\beta}\varepsilon_1 \\ 0 & -\varepsilon_2 + \dfrac{\gamma_2}{\beta}\varepsilon_1 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\varepsilon_1 - \lambda)\left(-\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{\beta}\varepsilon_1 - \lambda\right) = 0$$

Звідси маємо

$$\lambda_1 = -\varepsilon_1 < 0,$$

$$\lambda_2 = \frac{\varepsilon_1\gamma_2 - \beta\varepsilon_2}{\beta} > 0 \quad \text{в силу додатності } y_3^*.$$

Особлива точка – сідло. Отже, друга стаціонарна точка є нестійкою.

Розглянемо третій випадок. Для стаціонарної точки $x_3^* = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, y_3^* = \frac{\varepsilon_1\gamma_2 - \beta\varepsilon_2}{\gamma_1\gamma_2}$ маємо

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon_2\beta}{\gamma_2} & -\frac{\varepsilon_2\gamma_1}{\gamma_2} \\ \frac{\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\beta}{\gamma_1} & 0 \end{pmatrix}$$

Тоді характеристичне рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ матиме вигляд

$$\begin{vmatrix} -\frac{\varepsilon_2\beta}{\gamma_2} - \lambda & -\frac{\varepsilon_2\gamma_1}{\gamma_2} \\ \frac{\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\beta}{\gamma_1} & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda)\left(-\frac{\varepsilon_2\beta}{\gamma_2} - \lambda\right) + \frac{\varepsilon_2\gamma_1}{\gamma_2}\left(\frac{\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\beta}{\gamma_1}\right) =$$

$$= \lambda^2 + \frac{\varepsilon_2\beta}{\gamma_2}\lambda + \frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\beta)}{\gamma_2} = 0.$$

Корені характеристичного рівняння мають вигляд

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\varepsilon_2\beta}{\gamma_2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_2^2\beta^2}{\gamma_2^2} - 4\frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\beta)}{\gamma_2}}\right).$$

Все залежить від знаку дискримінанту *D*.

Якщо $D<0$, отримаємо стійкий фокус,

якщо $D\geq 0$ – стійкий вузол.

Тема 9. Керування у задачах динаміки популяцій.

Складність задач оптимального керування є такою, що побудова розв’язків у явній аналітичній формі виявляється можливою лише у виняткових випадках.

Більше того, не існує універсальних обчислювальних процедур з гарантією збіжності. Як правило, у задачах керування ми встановлюємо необхідні і дуже рідко достатні умови оптимальності. Знаходження оптимальних керувань та траєкторій, що задовольняють усі умови, залишається значною справою мистецтва.

Зрозуміло, що в деяких випадках, ми вміємо розв'язувати так звані стандартні задачі. Збурені задачі, тобто такі, в яких рівняння відрізняються від стандартних на деяке мале ε, в окремих випадках розв'язуються методом збурення.

Питання дослідження вказаних задач давно хвилює дослідників. Йому присвячено досить багато публікацій. Та поки ця проблема ще повністю не розв'язана.

§1. Модель знищення шкідників за скінченний час

Як відомо деякі шкідники (наприклад, колорадський жук) розвиваються спонтанно і на малому проміжку часу підпорядковуються закону Мальтуса:

$$\frac{dN}{dt} = \mu N, \;\; N(0) = N_0 \qquad (1)$$

Нехай $u(t) \geq 0$ – інтенсивність знищення шкідників.

Модель процесу керування знищенням шкідників запишеться у наступному вигляді

$$\frac{dN}{dt} = \mu N - u(t), \;\; N(0) = N_0 \qquad (2)$$

Розв'язок рівняння (2) має вигляд

$$N(t) = N_0 e^{\mu t} - \int_0^t u(\tau) e^{\mu(t-\tau)} d\tau \qquad (3)$$

Оскільки ми хочемо знищити шкідників за скінченний час, то будемо вимагати, щоб при $t = T$ виконувалась умова $N(T) = 0$.

Тоді з рівняння (3) матимемо:

$$N_0 = \int_0^T u(\tau) e^{-\mu\tau} d\tau \qquad (4)$$

Наприклад, при $u(t) = u_0 = const$ з рівняння (4) знаходимо:

$$N_0 = \frac{u_0}{\mu}(1 - e^{-\mu T}) \qquad (5)$$

Отже, можна підібрати таку функцію керування $u(t)$, що за скінченний час T популяція шкідників буде знищена.

§2. Модель про вирубку дерев.

Дерева в лісі класифікують, як правило, за розміром, а не за віком.

Основна складність при побудові моделі лісу – знайти аналог членів плодовитості основної моделі Леслі. Якщо припустити, що ліс відновлюється природним шляхом, то вільний простір, що утворився в результаті вирубки дерев, буде заповнюватись або природним відновленням, або кронами сусідніх дерев. Тому елементи матриці, що описують плодовитість, – залежать від числа вирубаних дерев.

Якщо в класі j в момент часу t маємо n_j дерев, то при стійкій віковій структурі популяції в момент часу $t+1$ у цьому класі буде λn_j дерев та $(\lambda - 1)n_j$ з них буде вирубано, щоб звести чисельність до n_j. У цьому випадку вихідна матриця Леслі матиме вигляд $L = \{l_{ij}\}$, ненульові елементи якої визначаються наступним чином:

$$\begin{cases} l_{11} = a_1 + c_1(\lambda - 1), \\ l_{1j} = c_j(\lambda - 1), \ \ j = \overline{2, n-1}, \\ l_{1n} = c_n(\lambda - a_n), \\ l_{jj} = a_j, \ \ j = \overline{2, n}, \\ l_{j+1,j} = b_j, \ \ j = \overline{1, n-1}. \end{cases} \quad (1)$$

де:

$a_j -$ ймовірність того, що дерево залишається в $j^{\text{ому}}$ розмірному класі,

$b_j -$ ймовірність того, що дерево перейде в наступний розмірний клас,

$c_j -$ число дерев розмірного класу нуль, що заповнює вільний простір, що утворився в результаті вирубки одного дерева $j^{\text{ого}}$ розмірного класу.

Величина a_n – керуючий розв'язок, що залежить від числа дерев, які необхідно залишити в самому великому розмірному класі. Дуже часто $a_n = 0$, причому $a_n = 1 - b_n$.

Доведено, що ця модель має лише одне власне значення більше одиниці, та відповідний йому додатній власний вектор.

Приклад. *Задача про вирубку сосни звичайної*

Нехай дерева в лісі розбиті на 6 розмірних класів. Матриця Леслі має вигляд:

$$L = \begin{pmatrix} 0.72 & 0 & 0 & 3.6(\lambda-1) & 5.1(\lambda-1) & 7.5\lambda \\ 0.28 & 0.69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.31 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.23 & 0.63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.37 & 0 \end{pmatrix}$$

Використовуючи обчислювальні засоби, можна знайти швидкість росту $\lambda_L = 1.204$, та відповідну величину для вирубки дерев, що складає $H = \left(1 - \frac{1}{\lambda_L}\right) \approx 17\%$.

§3. Модель про вилов риби у ставку.

Розглянемо ізольовану популяцію та вивчимо зміну її чисельності. Для дослідження зміни чисельності використаємо логістичне рівняння у безрозмірних величинах:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x), \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

Стаціонарні точки цього рівняння $q_1 = 0,\ \ q_2 = 1.$

Розв'язок рівняння (1) матиме вигляд:

$$x(t) = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x_0}\right) e^{-t}} \qquad (2)$$

З розв'язку (2) видно, що при $t \to +\infty \quad x(t) \to 1 = q_2.$

Таким чином, маємо стійкий стан рівноваги при довільному початковому значенні $x_0 > 0.$

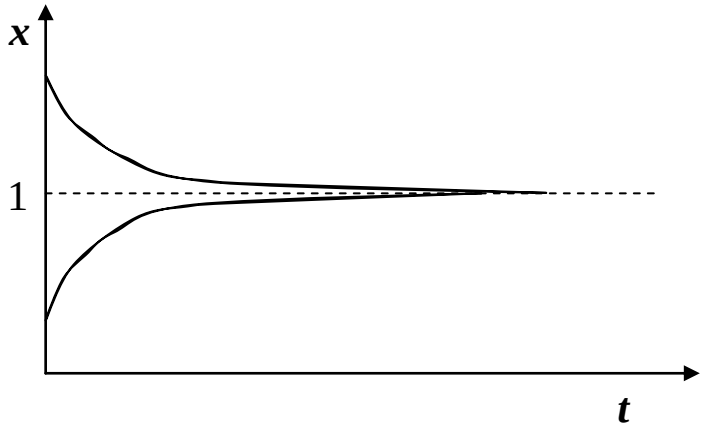


Рис. 1. Стійкий стан рівноваги

Введемо деяку квоту $p > 0$ на вилов популяції риби. Тоді вихідна модель матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - p, \quad x(0) = x_0 \qquad (3)$$

Знайдемо стаціонарні точки:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - p} \qquad (4)$$

Все буде залежати від знаку дискримінанту:

1) $D = 0 <=> p = \frac{1}{4}$, тоді $x_{1,2} = \frac{1}{2}$.

2) $D > 0 <=> p < \frac{1}{4}$ (нехай $p = \frac{1}{4} - \varepsilon^2, \varepsilon > 0$), тоді $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \varepsilon$.

3) $D < 0 <=> p > \frac{1}{4}$ (нехай $p = \frac{1}{4} + \varepsilon^2, \varepsilon > 0$), тоді дійсних коренів немає.

Розглянемо всі наші випадки.

1) Нехай $p = \frac{1}{4}$, тоді $x_{1,2} = \frac{1}{2}$.

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{1}{4}, \quad x(0) = x_0 \qquad (5)$$

Перепишемо в іншому вигляді

$$\frac{dx}{dt} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2, \quad x(0) = x_0 \qquad (6)$$

Розв’язавши рівняння (6), знайдемо, що

$$-\frac{1}{x-\frac{1}{2}} = t + C$$

Константа

$$C = -\frac{1}{x_0 - \frac{1}{2}}$$

Отже, розв’язок має вигляд

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{t + C}, \qquad x_0 \neq \frac{1}{2} \qquad (7)$$

При $x_0 > \frac{1}{2}$ $x(t) \to \frac{1}{2}$.

При $x_0 < \frac{1}{2}$ $x(t) \to 0$.

2) Нехай $p < \frac{1}{4}$ (тоді $p = \frac{1}{4} - \varepsilon^2, \varepsilon > 0$), $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \varepsilon$.

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{1}{4} + \varepsilon^2, \quad x(0) = x_0 \qquad (8)$$

Перепишемо в іншому вигляді

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \varepsilon^2\right), \quad x(0) = x_0 \qquad (9)$$

Рівняння (9) – це табличний інтеграл виду $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

Отже,

$$\frac{1}{2\varepsilon} ln \left|\frac{x - \frac{1}{2} - \varepsilon}{x - \frac{1}{2} + \varepsilon}\right| = -t + lnC \qquad (10)$$

Все залежить від початкового значення x_0, а це в свою чергу визначає з яким знаком розкривається модуль.

Перепишем рівняння (10)

$$\left|\frac{x - \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)}{x - \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)}\right| = Ce^{-2\varepsilon t} \qquad (11)$$

Константа має вигляд

$$C = \left|\frac{x_0 - \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)}{x_0 - \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)}\right|$$

Нехай $x_0 < \frac{1}{2} - \varepsilon$. Тоді розкриваємо модуль зі знаком «+»:

$$x - \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) = Ce^{-2\varepsilon t}\left(x - \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\right) \qquad (12)$$

Після відповідних перетворень отримаємо

$$x(t) = \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon - Ce^{-2\varepsilon t}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)}{1 - Ce^{-2\varepsilon t}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon - Ce^{-2\varepsilon t}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) + 2\varepsilon}{1 - Ce^{-2\varepsilon t}}$$

$$= \frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{1 - Ce^{-2\varepsilon t}}.$$

$$x(t) = \frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{1 - Ce^{-2\varepsilon t}} \to ? \qquad (13)$$

Припустимо, що $x_0 = \frac{1}{2} - \varepsilon - a$ $(a > 0)$. Підставимо в похідну, отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\left(\frac{1}{2} - \varepsilon - a - \frac{1}{2}\right)^2 - \varepsilon^2\right) = -((-\varepsilon - a)^2 - \varepsilon^2)$$

$$= -(\varepsilon^2 + 2a\varepsilon + a^2 - \varepsilon^2) < 0$$

Отже, похідна падає, тому $x(t) = \frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{1 - Ce^{-2\varepsilon t}} \to 0$ (14)

Нехай $\frac{1}{2}-\varepsilon < x_0 < \frac{1}{2}+\varepsilon$. Тоді розкриваємо модуль зі знаком «-»:

$$x-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) = -Ce^{-2\varepsilon t}\left(x-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\right) \qquad (15)$$

Після відповідних перетворень отримаємо

$$x(t) = \frac{\frac{1}{2}+\varepsilon+Ce^{-2\varepsilon t}\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}{1+Ce^{-2\varepsilon t}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+\varepsilon+Ce^{-2\varepsilon t}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)-2\varepsilon Ce^{-2\varepsilon t}}{1+Ce^{-2\varepsilon t}}$$

$$= \frac{1}{2}+\varepsilon-\frac{2\varepsilon Ce^{-2\varepsilon t}}{1+Ce^{-2\varepsilon t}}.$$

$$x(t) = \frac{1}{2}+\varepsilon-\frac{2\varepsilon}{Ce^{2\varepsilon t}+1} \to ? \qquad (16)$$

Припустимо, що $x_0 = \frac{1}{2}$. Підставимо в похідну, отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-\varepsilon^2\right) = -(-\varepsilon^2) = \varepsilon^2 > 0$$

Отже, похідна зростає, тому

$$x(t) = \frac{1}{2} + \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{1 - Ce^{-2\varepsilon t}}$$
$$\to \frac{1}{2} + \varepsilon - o. \qquad (17)$$

Нехай $x_0 > \frac{1}{2} + \varepsilon$. Тоді розкриваємо модуль зі знаком «+»:

$$x - \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) = Ce^{-2\varepsilon t}\left(x - \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\right) \qquad (18)$$

Після відповідних перетворень отримаємо

$$x(t) = \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon - Ce^{-2\varepsilon t}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)}{1 - Ce^{-2\varepsilon t}}$$
$$= \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon - Ce^{-2\varepsilon t}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) + 2\varepsilon Ce^{-2\varepsilon t}}{1 - Ce^{-2\varepsilon t}}$$
$$= \frac{1}{2} + \varepsilon + \frac{2\varepsilon Ce^{-2\varepsilon t}}{1 - Ce^{-2\varepsilon t}}.$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{Ce^{2\varepsilon t} - 1} \to ? \qquad (19)$$

Нехай $x_0 = \frac{1}{2} + \varepsilon + a$ $(a > 0)$. Підставимо в похідну, отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon + a - \frac{1}{2}\right)^2 - \varepsilon^2\right) = -((\varepsilon + a)^2 - \varepsilon^2)$$
$$= -(\varepsilon^2 + 2a\varepsilon + a^2 - \varepsilon^2) < 0$$

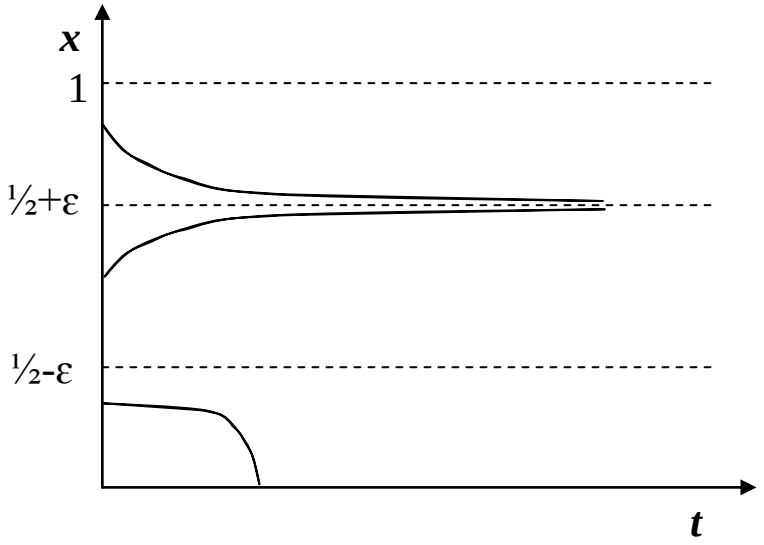
Отже, похідна падає, тому

$$x(t) = \frac{1}{2} + \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{Ce^{2\varepsilon t} - 1} \to \frac{1}{2} + \varepsilon + o. \qquad (20)$$

При $x_0 > \frac{1}{2} + \varepsilon$ $\quad x(t) \to \frac{1}{2} + \varepsilon.$

При $\frac{1}{2} - \varepsilon < x_0 < \frac{1}{2} + \varepsilon$ $\quad x(t) \to \frac{1}{2} + \varepsilon.$

При $x_0 < \frac{1}{2} - \varepsilon$ $\quad x(t) \to 0.$



3) Нехай $p > \frac{1}{4}$ (тоді $p = \frac{1}{4} + \varepsilon^2, \varepsilon > 0$), $x_{1,2}$ не є дійсними.

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{1}{4} - \varepsilon^2, \quad x(0) = x_0 \qquad (21)$$

Перепишемо в іншому вигляді

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \varepsilon^2\right), \quad x(0) = x_0 \qquad (22)$$

Рівняння (22) – це табличний інтеграл виду $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\, arctg\, \frac{x}{a} + C$.

Тоді,

$$\frac{1}{\varepsilon}\, arctg\, \frac{x - \frac{1}{2}}{\varepsilon} = -t + C$$

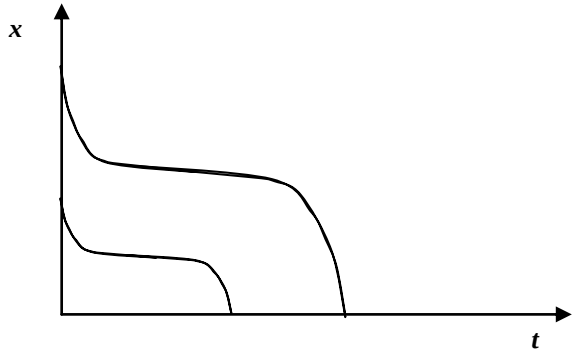
Константа має вигляд

$$C = \frac{1}{\varepsilon}\, arctg\, \frac{x_0 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}.$$

Після перетворень отримаємо

$$x(t) = \frac{1}{2} + \varepsilon tg(-\varepsilon t + C_1) \qquad (23)$$

Оскільки дійсних коренів немає, то маємо наступний графік динаміки



РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА

1. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 286 с.
2. Щепетова В.А. Основы математического моделирования в экологии: моногр. / В.А. Щепетова. – Пенза: ПГУАС, 2015. – 122 с.
3. Математическое моделирование в экологии: курс лекций / сост. Н.Е. Горковенко – Краснодар : КубГАУ, 2015. – 45 с.
4. *Горстко А.Б., Угольницкий Г.А.* Введение в моделирование эколого-экономических систем. – Ростов/на Д.: Изд-во Рост.ун-та, 1990. – 112 с.
5. *Ляшенко І.М., Мукоєд А.П.* Моделювання біологічних та екологічних процесів. – К.: ВПЦ «Київський ун-т», 2002. – 340 с.
6. *Самойленко А.І., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. – 360 с.
7. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. – М.: Изв-во Моск.ун-та, 1983. – 80с.*Моисеев Н.Н.* Экология человечества глазами математика. – М.: Молодая гвардия, 1988. – 254 с.
8. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост. – М.: Мир, 1972. – 297 с.
9. Аюпов, В.В. Математическое моделирование технических систем: учебное пособие / В.В.Аюпов; М-во с.-х. РФ, федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего образования «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д.Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокростъ», 2017. – 242 с.