КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ
ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Ю.В.КРАК

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ
ТА РОБОТОТЕХНІКИ

Навчальний посібник
для студентів спеціальності "Інформатика"

КИЇВський ВПЦ УНІВЕРСИТЕТ 2003

УДК 681.5.01

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. Д.Я.Хусаїнов,
д-р техн. наук, с.н.с. Л.Ф.Гуляницький

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики (протокол № 5 від 13 жовтня 2020 року)

Крак Ю.В.

К78 Основи теорії керування та робототехніки: Навчальний посібник для студентів спеціальності "Інформатика". – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2021. – 152с. Електронне видання

У посібнику викладено основні поняття теорії керування, постановки задач теорії керування та основні підходи до їх розв'язання, сформульовано основні теореми. Особливу увагу приділено методам варіаційного числення, принципу максимуму Понтрягіна та динамічного програмування. Досліджено задачі як із неперервним, так і з дискретним часом. Розглянуто алгоритм фільтрації Калмана-Б'юсі, вказано на зв'язок між задачами оцінювання та оптимального керування. Для кожної теми приводяться приклади задач з їх розв'язками, на яких студентам демонструються застосовані методи та підходи. У посібнику наведено розділ з постановками задач та методами вирішення основних проблем робототехніки, зокрема, прямих та обернених задач кінематики, планування траєкторій, побудови рівнянь динаміки та керування рухами маніпуляційних роботів.

Для студентів спеціальності "Інформатика", аспірантів, наукових працівників та інженерів, які спеціалізуються в галузі досліджень із теорії керування, робототехніки, оцінювання, моделювання та оптимізації складних систем.

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник підготовлено на основі семестрового курсу лекцій для студентів спеціальності "Інформатика" факульте'ту компютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Викладено основні поняття теорії керування, постановки задач теорії керування та основні підходи до їх розв'язання, сформульовано основні теореми. Особливу увагу приділено методам варіаційного числення, принципу максимуму Понтрягіна, динамічного програмування. У першому розділі наведено змістовні приклади систем керування, структурні схеми для опису систем керування, математичні постановки задач оптимального керування. У другому розділі розглянуто проблеми керованості, спостережуваності та ідентифікації систем керування. Показано зв'язок між спостережуваністю та керованістю. Третій розділ посібника присвячено питанням дослідження стійкості та аналітичного конструювання регуляторів систем керування. Дослідження задач керування як задач варіаційного числення розглянуто в четвертому розділі. У п'ятому розділі сформульовано теореми принципу максимуму Понтрягіна для різних постановок задач, показано зв'язок принципу максимуму з класичним варіаційним численням, обговорено методи розв'язання крайової задачі принципу максимуму, наведено принцип максимуму для дискретних систем. Метод динамічного програмування для задач оптимального керування наведено у шостому розділі посібника. Розглянуто постановки задач та їх розв'язання даним методом як для дискретних, так і для неперервних систем. У сьомому розділі розглянуто алгоритм фільтрації Калмана – Б'юсі, вказано на зв'язок між задачами оцінювання та оптимального керування. У восьмому розділі викладено аналіз стану проблеми в дослідженні складних маніпуляційних систем, зокрема, маніпуляційних роботів, вказано на переваги та недоліки тих чи інших підходів. Наведено різні формалізми опису маніпуляційних систем, оптимізаційні постановки задач планування станів, кінематики, статики, динаміки маніпуляційних систем та запропоновано методи їх вирішення. Наведено постановки та методи вирішення задач моделювання та керування маніпуляційними системами.

РОЗДІЛ 1

1.1. ПРО ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ідеї та основні принципи теорії керування рухомими об'єктами, в основному військового призначення, виникли в 30-і роки минулого сторіччя. Було поставлено задачі розрахунку траєкторій для досягнення заданої висоти чи дальності, планування рухів за умов обмежених ресурсів тощо. Поява кібернетики та електронно-обчислювальних машин (ЕОМ) дозволила значно прискорити й покращити розрахунки, увести поняття оптимальності. Здебільшого використовувався підхід, пов'язаний із варіаційним численням. У 50-х рр. було розроблено новий підхід: принцип максимуму Понтрягіна [1], який дозволив складну задачу оптимального керування звести до простішої задачі з диференціальних рівнянь та оптимізації.

Іншим потужним методом теорії керування став метод динамічного програмування Белмана [2]. Ідея методу динамічного програмування полягає в тому, що оптимізаційна задача великої розмірності зводиться до послідовності задач оптимізації меншої розмірності. Це дає можливість побудувати досить прості рекурентні формули для знаходження керування на всьому інтервалі часу. Утім, у дискретному випадку для значної кількості точок розбиття інтервалу в пам'яті ЕОМ треба зберігати дуже велику кількість варіантів, що призвело до так званого "прокляття розмірності" для цього методу.

У межах цих трьох основних підходів (варіаційне числення, принцип максимуму Понтрягіна, динамічне програмування) розроблено багато методів знаходження керувань для різних класів задач: технічних, економічних, соціальних та інших.

Для постановки задач оптимального керування необхідно, у першу чергу, визначити цільову функцію оптимізаційного процесу. З цією метою треба з'ясувати фізичний зміст задачі та записати її формальною мовою математичних співвідношень. Для здійснення ефективного керування процесом потрібно вибрати адекватну математичну модель, яка враховувала б різноманітні зовнішні впливи, що діють на систему. За умови, що вибрані математична модель та цільова функція, відомі параметри системи та її поточний стан, можна ставити задачу знаходження найкращого керування, яке оптимізувало б цільову функцію.

Для ілюстрації постановок задач теорії керування наведемо найбільш прості та наочні приклади.

Приклад 1.1.[3, 5]. Розглянемо рух у площині маятника, підвішеного до точки опори за допомогою жорсткого невагомого стержня. Рівняння руху маятника після певних перетворень можна призвести до вигляду:

$$\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + \sin x(t) = u(t)\,, \tag{1.1}$$

де $x(t)$ – кут відхилення маятника, $\dot{x}(t)$ – швидкість маятника, β – параметр, $u(t)$ – керування, вибір якого може впливати на рух маятника.

Позначимо $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$. Тоді рівняння (1.1) можна переписати у вигляді еквівалентної системи двох диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\beta x_2(t) - \sin x_1(t) + u(t) \end{cases}. \tag{1.2}$$

Нехай у початковий момент часу t_0 маятник відхилено на певний кут із певною початковою швидкістю, тобто

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_1^0 \\ x_2(t_0) &= x_2^0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Будемо вважати також, що на керуючий параметр накладені обмеження

$$|u(t)| \le u^*,\ u^* = const > 0,\ t_0 \le t \le t_1\,. \tag{1.4}$$

Маючи математичний опис фізичної задачі, можемо поставити задачу оптимального керування, наприклад, зупинити маятник у точці стійкої рівноваги за мінімальний час, тобто мінімізувати функціонал

$$T_{\min} = \min_u (t_1 - t_0) = \min_u \int_{t_0}^{t_1} dt, \tag{1.5}$$

за умови, що

$$x_1(t_1) = 2\pi$$
$$x_2(t_1) = 0. \tag{1.6}$$

Приклад 1.2.[4]. Нехай математична точка A масою m рухається уздовж прямої. На неї діє сила u. Положення точки A характеризується координатою: $x = x(t)$.

Нехай також виконуються умови:

$$x(t_0) = x_0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = 0, \tag{1.7}$$

$$|u| \le \bar{u}, \ (\bar{u} > 0). \tag{1.8}$$

Ставиться задача: визначити силу $u = u_0(t)$, під дією якої точка A рухається так, що із заданого початкового стану (1.7) переміщується в інший заданий стан на момент $t = t_1$:

$$x(t_1) = x_1 \ , \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_1} = 0 \tag{1.9}$$

за мінімально можливий час (1.5).

Для розв'язання задачі треба записати рівняння руху точки A. Згідно з другим законом Ньютона це рівняння можна подати у вигляді:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = u \tag{1.10}$$

Точку A, рух якої змінюється за рахунок зовнішньої сили u, розглядаємо як приклад керованої системи. Величину u називають керуючим впливом, функцією керування або просто керуванням. Поставлена задача у теорії кеування називається задачею швидкодії.

При розв'язуванні таких задач використовують поняття фазових координат та фазового простіру. У даному прикладі фазовими координатами є дві змінні - $x_1(t)$, $x_2(t)$, пов'язані зі змінною $x(t)$ рівностями: $x_1 = x(t), x_2 = \frac{dx}{dt}$; фазовим простором є координатна площина.

Тоді рівняння (1.10) можна записати у вигляді двох диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$m\frac{dx_2}{dt} = u \tag{1.11}$$

а граничні умови (1.7), (1.9) у вигляді:

$$x_1(t_0) = x_1^0 = x^0 \qquad x_1(t_1) = x_1^1 = x^1$$
$$x_2(t_0) = 0 \qquad x_2(t_1) = 0 \tag{1.12}$$

Точку A_1 з координатами $(x_1(t), x_2(t))$ на площині $X_1 0 X_2$ називають фазовою точкою системи. Площину (див. рис. 1.1) називають фазовою площиною, або, взагалі кажучи, - фазовим простором, елементами якого є вектори фазових координат.

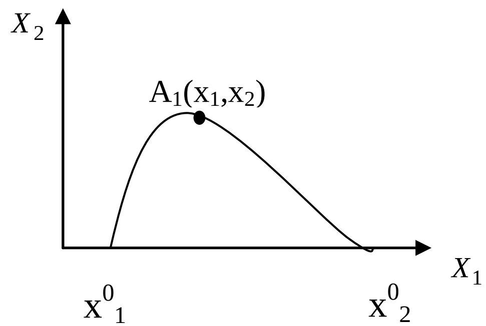

Рис. 1.1.

Із зміною часу t точка змінює своє положення і утворює фазову траєкторію системи.

Поставлену задачу можна сформулювати так: знайти керування u з допустимої області (1.8), за допомогою якого система (1.11) з однієї заданої точки простору x_1^0 переходить у іншу задану точку x_2^0 за мінімальний час.

Приклад 1.3. Нехай рух об'єкта описується системою рівнянь

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad (1.13)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = u$$

Модель (1.13) можна інтерпретувати як математичну модель польоту літаючого об'єкта (наприклад, ракетоносія) сталої потужності.

Відомо:

$$x_1(t_0) = x_1^0 \qquad x_1(t_1) = x_1^1$$
$$x_2(t_0) = x_2^0 \qquad x_2(t_1) = x_2^1. \qquad (1.14)$$

Початковий та кінцевий моменти часу – відомі.

Керування обмежене:

$$|u| \le \bar{u}. \qquad (1.15)$$

Ставиться задача: знайти керування $u^0(t)$ на відрізку $[t_0, t_1]$, яке переводить систему з початкової точки (x_1^0, x_2^0) у точку (x_1^1, x_2^1) за фіксований час $T = t_1 - t_0$ і забезпечує мінімум цільової функції:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} u(t)dt \to \min_u$$

Таке керування $u^0(t)$ називається оптимальним керуванням.

Приклад 1.4. Наведемо одну із задач оптимального розподілу ресурсів у динамічних системах на прикладі моделі бою двох сторін. Динаміку бою можна описати такою системою рівнянь [4]:

$$\frac{dx_1}{dt} = -bx_2 + u(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -ax_1 + v(t),$$

де $x_1(t)$ – кількість бойових одиниць із боку A, що залишились боєздатними на момент часу $t \in [t_0, t_1]$, $x_2(t)$ – кількість бойових одиниць, що залишились боєздатними на момент часу t для сторони B; $u(t)$, $v(t)$ – темпи надходження бойових одиниць із резерву для сторін A та B відповідно на момент часу t; a, b – середні ефективності швидкості стрільби бойових одиниць сторін A та B відповідно; $T = t_1 - t_0$ – заданий час бою.

Нехай відомі:

$$x_1(t_0) = x_1^0$$

$$x_2(t_0) = x_2^0$$

а також величина $v(t)$.

Задача оптимального керування боєм: знайти керування $u^0(t)$ за обмежень: $0 \le u(t) \le \bar{u}$, $\int_{t_0}^{t_1} u(t)dt \le \bar{\bar{u}}$, щоб досягався екстремум вибраного функціонала якості $Q(u(t))$. Тут $\bar{u}$, $\bar{\bar{u}}$ – задані величини.

Критерієм найкращого керування може бути вибрана певна мета бою, наприклад:

$Q = x_2(t_1) \to \min\limits_u$ – на кінець бою сторона B має менше бойових одиниць;

$Q = x_1(t_1) \to \max\limits_u$ – мета сторони A: максимальне збереження своїх бойових одиниць на кінець бою.

Можна ввести й інші критерії оптимальності.

Приклад 1.5. Система з випадковими збуреннями:

$$\frac{dx_1}{dt} = u \tag{1.16}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + \xi(t) \tag{1.17}$$

Тут $\xi(t)$ – випадковий процес, $|u(t)| \le k = const, t \in [t_0, t_1]$.

Мета керованої системи (1.16) – відтворити рух некерованої системи (1.17). Оскільки $x_2(t)$ – випадковий процес, то критерій оптимальності записується через математичне сподівання:

$$Q = M\{Q_1\} = M\{\int_{t_0}^{t_1}[(x_1 - x_2)]^2 + u^2\} \to \min_u \qquad (1.18)$$

1.2. СТРУКТУРНІ СХЕМИ ОПИСУ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Систему керування в загальному випадку можна зобразити у вигляді структурної схеми:

$$B \xrightarrow{u} A \xrightarrow{x}$$

Рис. 1.2.

Тут: A – об'єкт керування; B – пристрій керування (або керуючий пристрій), $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ – вектор фазових координат або фазовий стан системи, T – знак транспонування; $x(t) \in X$, X – фазовий простір, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ – векторна функція керування.

Вектор $x(t)$ називають вихідним сигналом. Вектор $u(t)$ називають вхідним сигналом (входом до об'єкта A).

Будемо вважати, що фазовий стан $x(t)$ об'єкта керування A в довільний момент часу $t > t_0$ визначається повністю й однозначно за його відомим початковим станом $x(t_0)$ та керуванням $u(t)$ при $t > t_0$. Пару векторних функцій $(u(t), x(t))$ називають процесом керування. Для різних систем керування внутрішні характеристики об'єкта керування описуються відповідними залежностями різної природи – алгебраїчними, диференціальними, інтегральними та ін.

Правила (закон) перетворення вхідних сигналів у вихідні називають рівнянням об'єкта.

Широко розповсюджені неперервні системи керування, об'єкти яких описуються звичайними диференціальними рівняннями (див. приклади 1.1 – 1.3). Такі системи називають системами із зосередженими параметрами. Системи керування, об'єкти яких описуються за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних, називаються системами з розподіленими параметрами.

Критеріями оптимальності керування (критеріями якості об'єкта керування) є функції або функціонали на екстремум.

Зміст оптимальності в різних задачах може бути різним:

– приведення системи до заданого стану за найкоротший проміжок часу, тобто найшвидше;

– мінімізація енергетичних витрат на керування;

– мінімізація відхилення фазового стану системи від заданої траєкторії тощо.

Процес керування, що забезпечує екстремум (мінімум або максимум) функціонала якості об'єкта керування, називається оптимальним процесом керування.

Наприклад, системи керування, для яких критерієм якості є мінімум часу переходу системи з однієї множини станів до іншої, називають системами, оптимальними за швидкодією.

Розглянемо тепер, які функції виконує пристрій керування B (рис. 1.2).

Розглянемо два суттєво різних типи систем керування.

1) Системи програмного керування або незамкнені системи (системи без оберненого зв'язку).

У таких системах об'єкти керування A мають точно визначені наперед рівняння, що описують їх функціонування. Ці об'єкти керування позбавлені впливу випадкових збурень. Критерій якості для них є детермінованою величиною. Усі канали зв'язку, як пристрою керування так і об'єкта керування, захищені від будь-яких випадкових зовнішніх впливів та збурень.

Оптимальне керування $u^O(t)$ можна обчислити наперед для всіх t ще до початку функціонування системи. Керуючий пристрій B має забезпечити тільки подачу розрахованого наперед керування $u^0(t)$ на вхід об'єкта керування A. За цим принципом можна керувати системою, наведеною у прикладі 1.1.

Утім, системи програмного керування мають обмежене застосування на практиці. Як правило, система керування має додаткові лінії зв'язку, за якими надходить інформація про стан об'єкта A на вхід керуючого пристрою B.

2) Системи керування з оберненим зв'язком (замкнені системи керування).

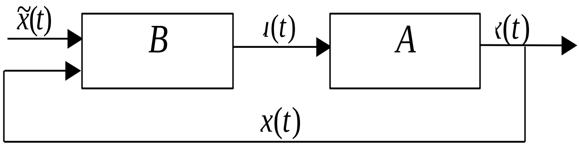

Рис. 1.3.

Тут $\tilde{x}(t)$ – заданий (програмний) вплив, що визначає роботу пристрою B. Для програмних систем цей сигнал можна вважати частиною внутрішньої структури пристрою B. На практиці, зазвичай, системи без оберненого зв'язку не мають суттєвого практичного значення. Обернений зв'язок необхідний, оскільки динамічні характеристики систем можуть бути відомі лише наближено і, крім того, на систему можуть впливати зовнішні збурення, як правило, випадкового характеру. Контур оберненого зв'язку дозволяє керуючому пристрою враховувати відхилення й робити відповідну корекцію руху.

Системи з випадковими збуреннями, що діють на об'єкт керування, можна зобразити у вигляді структурної схеми:

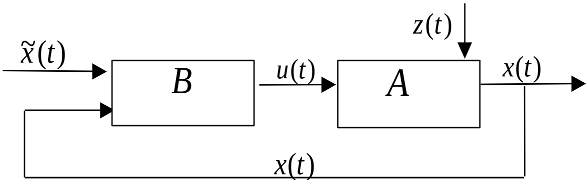

Рис. 1.4.

Тут $z(t)$ – вектор випадкових збурень.

Критерій оптимальності для таких систем: знайти мінімум (максимум) функціонала

$$Q = M\{\int_{t_0}^{t_1} G(\tilde{x}(t), x(t), u(t), z(t), t)dt\}$$

де $M\{\cdot\}$ – математичне сподівання.

Параметри керування реальних систем не можуть приймати довільні значення, тобто завжди $u(t) \in \Omega(U)$. Множину $\Omega(U)$ називають областю допустимих керувань (або областю керування), де U – простір змінних $u_1, \ldots, u_r$. Множина $\Omega(U)$ задається, як правило, системою рівностей або нерівностей.

Аналогічно $x(t) \in \Omega(X)$, де $\Omega(U)$ – область можливих станів системи, X – простір змінних $x_1, \ldots, x_n$.

У загальному випадку можуть бути обмеження на функціонали від вектор-функцій $u(t)$, $x(t)$, $z(t)$:

$$L_\mu[x(t), u(t), z(t)] \in \Omega_\mu(L), \ \mu = \overline{1, m},$$

де $\Omega_\mu(L)$ – допустима область зміни функціонала.

Зауваження 1.1. У теорії керування вважають, що керування є кусково-неперервними або вимірними функціями. Вважають також, що функції $u_i(t)$ у точках розриву неперервні справа; крім того, $u_i(t)$ неперервні на кінцях відрізку, де $i = 1, \bar{k}$, $\bar{k}$ – кількість точок розриву. Чому так? Тому, що оптимальні керування $u^0(t)$ для багатьох систем є кусково-неперервними, а розв'язку задачі у класі неперервних функцій не існує. Наприклад, припустимо, що розривна функція $u^0(t)$ – єдине оптимальне керування деякої системи керування. Побудуємо іншу функцію, близьку до $u^0(t)$, але неперервну. Тоді, яку б близьку до оптимального керування неперервну функцію ми не взяли, завжди можна побудувати іншу неперервну функцію, яка буде ще ближчою до оптимального керування, але буде відрізнятися від $u^0(t)$. Тобто у класі неперервних функцій оптимального керування просто не існує, тому задача оптимізації у класі неперервних функцій не буде мати розв'язку. Кусково-неперервні керування дозволяють для широкого класу систем отримати точний математичний розв'язок задачі оптимізації.

Термінологія, наведена вище, справедлива не тільки для неперервних систем, а й для дискретно-неперервних та дискретних систем керування.

Класифікація систем керування можлива також і за іншими ознаками:

1) Системи з повною інформацією про об'єкт керування. Такі системи – математична абстракція. Це тому, що в керуючий пристрій B введена повна апріорна інформація: рівняння об'єкта, усі обмеження, інформація про критерій оптимальності, про сигнал $x(t)$, збурення $z(t)$, про стан $x(t)$ у кожний момент часу t, що в реальних системах зробити майже неможливо.

Утім, ця абстракція часто з достатньою точністю відповідає реальним системам керування, коли неповнотою інформації можна знехтувати.

2) Системи з неповною інформацією про об'єкт керування й пасивним її накопиченням у процесі керування. Нехай неповнота інформації – це неповнота заданого сигналу $x(t)$: тобто на вхід надходить сигнал $y(t): y(t) \neq \tilde{x}(t)$. Процес накопичення інформації про $x(t)$ не залежить від алгоритму (стратегії) керуючого пристрою B. Накопичення інформації полягає у спостереженні й побудові прогнозу про сигнал $x(t)$. Сам процес спостереження не залежить від того, яке рішення прийме пристрій B про характер $x(t)$. Інформацію, отриману в результаті спостережень, можна тільки використати, але її не можна збільшити.

3) Системи з неповною інформацією про об'єкт керування, але з активним накопиченням її в процесі керування (системи дуального керування). Пристрій B подає на A деяку послідовність керувань $\{u_i(t)\}$, (тут i – індекс послідовності) і по оберненому зв'язку отримує реакції $\{y_i(t)\}$, які аналізуються керуючим пристроєм B. Пристрій B робить висновки про характеристики об'єкта керування, зокрема, про сигнал $x(t)$. Мета цих дій об'єкта B – сприяти більш точному вивченню

характеристик об'єкта керування A для більш ефективного керування цим об'єктом, тобто для генерації необхідних керувань. Системи з неповною інформацією виникають через те, що на систему впливають випадкові, непередбачені збурення.

1.3. МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Для математичної постановки задачі оптимального керування розглянемо фазові координати системи як функції часу $x = x(t)$ на деякому проміжку $t_0 \le t \le t_1$. У початковий момент t_0 потрібно задати початкову умову $x(t_0) = x_0$, а також керування як функції часу $u = u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ при $t \in [t_0, t_1]$. Тоді фазові координати $x = x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ визначатимуться як розв'язок задачі Коші:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$x(t_0) = x_0,$$

де $f(x(t), u(t), t) = (f^1(x(t), u(t), t), \ldots, f^n(x(t), u(t), t))^T$ – відома вектор-функція, $f^j(x(t), u(t), t)$, $j = \overline{1, n}$ – компоненти вектора $f(x(t), u(t), t)$, t – час. Функція $f(x(t), u(t), t)$ описує внутрішні характеристики об'єкта керування та враховує зовнішні впливи на об'єкт.

Означення 1.1. Неперервна функція $x = x(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, що задовольняє рівність

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + x_0, \quad t_0 \le t \le t$$

називається розв'язком даної задачі Коші або траєкторією, що відповідає початковій умові $x(t_0) = x_0$ та керуванню $u = u(\cdot)$ і позначається через $x = x(\cdot, u, x_0)$ або $x = x(t, u, x_0)$. Початкова точка траєкторії $x(t_0, u, x_0)$ називається лівим кінцем траєкторії, t_0 – початковим моментом часу, $x(t_1, u, x_0)$ називається правим кінцем траєкторії, t_1 – кінцевим моментом часу.

Перейдемо до постановки задачі оптимального керування в загальному випадку.

Нехай

$$x(t) = x(t, u(\cdot), x_0) \in G(t), t_0 \le t \le t_1 \qquad (1.19)$$

$$t_0 \in \Theta_0, t_1 \in \Theta_1 \qquad (1.20)$$

де $G(t)$ – деяка задана множина з $E^n : G(t) \subset E^n$, а Θ_0, Θ_1 – задані множини на числовій осі $R = \{t : -\infty < t < +\infty\}$.

Не виключено, що $\Theta_0 = R, \Omega_1 = R$.

Обмеження вигляду (1.19) часто називають фазовими обмеженнями.

Функції керування $u = u(t)$ мають задовольняти певні вимоги неперервності та гладкості, оскільки при надто розривних функціях $u(t)$ поставлена задача та керування $u(t)$ можуть не мати сенсу. У більшості прикладних задач керування $u(t)$ вибираються у вигляді кусково-неперервних функцій (див. зауваження 1.1.). Нагадаємо, що функція $u(t)$ називається кусково-неперервною на відрізку $[t_0, t_1]$, якщо $u(t)$ неперервна в усіх точках $t \in [t_0, t_1]$ за винятком, можливо, лише скінченної кількості точок $\tau_1, \ldots, \tau_p \in [t_0, t_1]$, в яких функція $u(t)$ може мати розриви першого роду, тобто існують скінченні границі

$$\lim_{t \to \tau_i - 0} u(t) = u(\tau_i - 0)\,, \quad \lim_{t \to \tau_i + 0} u(t) = u(\tau_i + 0)\,, \quad i = \overline{1, p}\,.$$

Є класи задач керування, в яких від функцій $u(t)$, крім неперервності, вимагається існування їх кусково-неперервних похідних. Такі керування називають кусково-гладкими.

Керування $u(t)$, узагалі кажучи, задовольняють певні обмеження, які запишемо у вигляді

$$u(t) \in V(t)\,, \quad t_0 \le t \le t_1\,,$$

де $V(t)$ – задана множина: $V(t) \subseteq E^r$ при кожному $t \in [t_0, t_1]$.

Наприклад, в обмеженнях (1.4) прикладу 1.1. множина $V(t)$ має вигляд

$$V(t)=\{u:u\in E^1,|u(t)|\le u^*,\forall t\in[t_0,t_1]\}.$$

Обмеження (1.20) потрібні, бо початковий та кінцевий моменти часу можуть залежати від керування (напр., у задачах швидкодії) і не завжди можуть бути задані наперед. Тоді вказують обмеження типу (1.20).

Розглянемо умови на кінцях траєкторії $x(t)$. З обмеження (1.19) випливає при $t=t_0$ і $t=t_1$: $x(t_0)\in G(t_0)$, $x(t_1)\in G(t_1)$ відповідно.

Утім, бувають ситуації, наприклад, при $G(t)=E^n$, $t_0\le t\le t_1$, коли обмеження на кінцях зручніше виділяти й розглядати окремо.

Будемо вважати, що в E^n при кожному $t_0\in\Theta_0$ задана множина $S_0(t_0)$ і при кожному $t_1\in\Theta_1$ задана множина $S_1(t_1)$.

Умови на кінцях траєкторії будемо записувати у вигляді:

$$\begin{aligned}&x(t_0)\in S_0(t_0),t_0\in\Theta_0\\&x(T)\in S_1(T),T\in\Theta_1\end{aligned}\qquad(1.21)$$

У задачах оптимального керування прийнята така класифікація умов (1.20), (1.21): якщо множина Θ_0 складається з єдиної точки, то початковий момент часу називають фіксованим; якщо Θ_1 складається з єдиної точки T, то кінцевий момент часу називають фіксованим.

Якщо множина $S_0(t_0)$ (або $S_1(t_1)$) складається з однієї точки й не залежить від t_0: $S_0(t_0)=\{x_0\},t_0\in\Theta_0$ (або відповідно $S_1(T)=\{x_1\},T\in\Theta_1$), то кажуть: лівий (або правий) кінець траєкторії закріплений.

Якщо $S_0(t_0)\equiv E^n,t_0\in\Theta_0$, або $S_1(t_1)\equiv E^n,t_1\in\Theta_1$, то лівий (або правий) кінець траєкторії називають вільним.

В інших випадках лівий (або правий) кінець траєкторії називають рухомим (може рухатись по заданій кривій).

Наприклад:

$$S_0(t_0)=\left\{\begin{array}{c}y:y\in G(t_0),h_i(y,t_0)\le 0,i=\overline{1,m},\\ h_i(y,t_0)=0,i=\overline{m_0+1,s_0}\end{array}\right\}\qquad(1.22)$$

де функції $h_i(y,t_0)$ визначені при $y \in G(t), t \in \Theta_0$.

У прикладних застосуваннях часто виникають задачі, в яких лівий і правий кінці траєкторії вибираються залежно один від одного. Це можна записати так:

$$(x(t_0), x(t_1)) \in S(t_0,t_1), t_0 \in \Theta_0, t_1 \in \Theta_1, \tag{1.23}$$

де $S(t_0,t_1)$ – при кожному $(t_0,t_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$ – є задана множина з $E^n \times E^n$.

Приклад такої множини:

$$S_0(t_0,t_1) = \left\{ \begin{array}{c} (x,y) \in E^n \times E^n, g_i(x,y,t_0,t_1) < 0, i = \overline{1,m}, \\ g_i(x,y,t_0,t_1) = 0, i = \overline{m+1,s} \end{array} \right\} \tag{1.24}$$

де $g_i(x,y,t_0,t_1), \quad i = \overline{1,s}$ – задані функції змінних

$$(x,y,t_0,t_1) \in E^n \times E^n \times \Theta_0 \times \Theta_1.$$

Зрозуміло, що множини $S_0(t_0)$ та $S_1(t_1)$ з умов (1.21) – частинний випадок множини $S(t_0,t_1)$ з умови (1.23), коли $S(t_0,t_1) = S_0(t_0) \times S_1(t_1)$, а множина (1.22) – частинний випадок множини (1.24).

Далі, нехай задані множини Θ_0, Θ_1 на числовій осі R і $\sup \Theta_0 < \inf \Theta_1$; $V(t) \subseteq E^r$, $G(t) \subseteq E^n$ при всіх t: $\sup \Theta_0 < t < \inf \Theta_1$.

Нехай також задані множини $S_0(t_0)$, $S_1(t_1)$, причому $S_0(t_0) \subseteq G(t_0), \quad t_0 \in \Theta_0$, $S_1(t_1) \subseteq G(t_1), \quad t_1 \in \Theta_1$.

Нехай рух фазової точки $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ описується системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x,u,t) \tag{1.25}$$

де функція $f(x,u,t)$ визначена при $x \in G(t)$, $u \in V(t)$, $t_0 \le t \le t_1$.

Означення 1.2. Набір $(t_0, t_1, x_0, u(\cdot), x(\cdot))$ називається допустимим набором, якщо керування $u = u(\cdot) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T$ визначене й кусково-неперервне на $t_0 \le t \le t_1$ і задовольняє обмеження $u(t) \in V(t)$, $t_0 \le t \le t_1$; $t_0 \in \Theta_0$, $t_1 \in \Theta_1$, $t_0 \le t_1$; $x = x(\cdot) = x(\cdot, u(t), x_0)$ – траєкторія задачі Коші:

$$\dot{x} = f(x,u,t),\ t_0 \le t \le t_1,\ x(t_0) = x_0, \tag{1.26}$$

яка визначена на відрізку $[t_0, t_1]$ і задовольняє фазове обмеження (1.19), а $x(t_0) = x_0 \in S_0(t_0)$ $x(t_1) \in S_1(t_1)$.

Будемо вважати, що множина допустимих наборів $(t_0, t_1, x_0, u(\cdot), x(\cdot))$ непорожня.

Зауваження 1.2. Позначення, наприклад, $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_m(t))^T$, означає значення функції z у точці t. Саму ж функцію будемо позначати $z(\cdot)$, або просто z. Сама функція – це відображення області визначення функції в простір E^m, яке ставить у відповідність кожній точці t з області визначення деяку точку з E^m.

Обмеження в задачах можуть бути обмеженнями на значення функції, наприклад, $u(t) \in V(t)$. Якщо ж обмеження накладається на всю функцію $u(\cdot)$ у цілому й не є обмеженням на значення функції в конкретних точках t, то тоді використовується позначення $u(\cdot)$. Обмеження на всю функцію $u(\cdot)$ у цілому означає, що функція $u(\cdot)$, яка задовольняє це обмеження, в окремих точках або проміжках як завгодно малої довжини може приймати довільні значення.

Зміст обмежень визначається також і згідно з контекстом.

Нехай на множині допустимих наборів задана функція (або цільова функція, функціонал)

$$J(x_0, u(\cdot), x(\cdot), t_0, t_1) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt + g_0(x_0, x(t_1), t_0, t_1), \tag{1.27}$$

де $f^0(x(t), u(t), t)$, $g_0(x_0, x(t_1), t_0, t_1)$ – задані функції при $x \in G(t)$, $u \in V(t)$, $\sup \Theta_0 < \inf \Theta_1$, $S_0(t_0) \subseteq G(t_0)$, $t_0 \in \Theta_0$, $S_1(t_1) \subseteq G(t_1)$, $t_1 \in \Theta_1$.

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб мінімізувати або максимізувати функціонал (1.27) на множині допустимих наборів вигляду $(t_0, t_{1,} x_0, u(\cdot), x(\cdot))$.

Зауваження 1.3. Обмежимося розглядом задач на мінімум, оскільки задача на максимум функціонала J завжди може бути зведена до еквівалентної задачі на мінімум функціонала (- J).

Позначимо $J_* = \inf(t_0, t_{1,} x_0, u(\cdot), x(\cdot))$, де нижня грань береться за всіма допустимими наборами.

Означення 1.3. Допустимий набір $(t_{0^*}, t_{1^*,} x_{0^*}, u_*(\cdot), x_*(\cdot))$ називається розв'язком задачі оптимального керування, $u_*(\cdot)$ – оптимальним керуванням, $x_*(\cdot)$ – оптимальною траєкторією системи, якщо

$$J(t_{0^*}, t_{1^*,} x_{0^*}, u_*(\cdot), x_*(\cdot)) = J_* .$$

Тоді задачу оптимального керування можна записати у вигляді:

$$J(x_0, u(\cdot), x(\cdot), t_0, t_1) = \\ = \int_{t0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt + g_0(x_0, x(t_1), t_0, t_1) \to \inf \tag{1.28}$$

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad t_0 \le t \le t_1 \tag{1.29}$$

$$x \in G(t), t_0 \le t \le t_1 \tag{1.30}$$

$$x(t_0) = x_0 \in S_0(t_0) \;\; x(t_1) \in S_1(t_1), \;\; t_0 \in \Theta_0, \; t_1 \in \Theta_1 \tag{1.31}$$

$$u \in V(t), t_0 \le t \le t_1 . \tag{1.32}$$

Вважаємо тут керування $u = u(\cdot)$ кусково-неперервним на $[t_0, t_1]$ (якщо не сказане інше).

Зокрема, якщо $f^0 \equiv 1, g_0 \equiv 0$, то тоді $J(t_0, t_{1,} x_0, u(\cdot), x(\cdot)) = t_1 - t_0$, тобто маємо задачу швидкодії. Якщо початковий момент часу закріплений, тобто $\Theta_0 = \{t_0\}$, то в задачі (1.28) – (1.32) включення $t_0 \in \Theta_0$ опускають, замість $J(t_0, t_{1,} x_0, u(\cdot), x(\cdot))$ пишуть $J(t_{1,} x_0, u(\cdot), x(\cdot))$, а замість $S_0(t_0)$ – S_0.

Аналогічно роблять, якщо закріплений кінцевий момент часу t_1 або один із кінців траєкторії. Якщо $V(t) = E^r$, $G(t) = E^n$, $t_0 \le t \le t_1$ або $S_0(t_0) \equiv E^n$, або $S_1(t_1) \equiv E^n$, то відповідні обмеження в постановці задачі (1.28) – (1.32) опускають.

На практиці зустрічаються задачі оптимального керування більш загального вигляду, ніж задача (1.28) – (1.32). У теорії керування розглядаються також задачі, що враховують запізнення інформації, задачі з параметрами, з дискретним часом, з більш загальним виглядом цільової функції, задачі для інтегро-диференціальних рівнянь, для рівнянь із частинними похідними, для стохастичних рівнянь тощо.

РОЗДІЛ 2

2.1. ПОСТАНОВКА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ КЕРОВАНОСТІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Розглянемо систему керування, що описується лінійними диференціальними рівняннями

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t)\,, \tag{2.1}$$

де $x(t)$ – n-мірний, $u(t)$ – m-мірний вектор-стовпці, $A(t)$, $B(t)$ – відомі матриці відповідних розмірностей, елементи яких залежать від часу t. Такі системи називаються нестаціонарними системами керування.

Означення 2.1. Система (2.1) називається цілком керованою, якщо для двох довільних точок x^0, x^1 із фазового простору X і двох довільних значень t_0, t_1 аргументу t існує така функція керування $u(t)\,, t \in [t_0, t_1]$, при якій розв'язок системи рівнянь (2.1) задовольняє умови $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$.

Позначимо: $X(t,\xi)$ – фундаментальна матриця для однорідних рівнянь, що відповідають рівнянням (2.1), нормована в точці ξ. Позначимо матрицю $W(t,\xi) = X(t,\xi)B(\xi)$. Матрицю $W(t,\xi)$ називають матрицею імпульсних перехідних функцій.

Вважаємо $W(t,\xi) = \begin{pmatrix} w_1(t,\xi) \\ \vdots \\ w_n(t,\xi \end{pmatrix}$, де $w_i(t,\xi)$ – вектор-рядок:

$$w_i(t,\xi) = (w_{i1}(t,\xi)\,, \ldots, w_{in}(t,\xi))\,,\ i = \overline{1,n} \tag{2.2}$$

Теорема 2.1.[4]. Для того, щоб система (2.1) була цілком керованою, необхідно й досить, щоб вектор-функції $w_1(t,\xi)\,, \ldots, w_n(t,\xi)$ були лінійно-незалежними на довільному проміжку $[t_0, t_1]$.

Зауважимо, що умови, наведені в теоремі 2.1, практично важко використовувати, бо матриця $W(t,\xi)$ наперед не задаєтьсяся і її треба кожного разу обчислювати для різних значень t і ξ. Тому бажано знайти умови цілком керованості, що виражаються через матриці $A(t), \quad B(t)$.

Розглянемо це питання для систем керування, в яких A, B – матриці зі сталими елементами. Такі системи будемо називати лінійними стаціонарними системами:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t). \tag{2.3}$$

Теорема 2.2. Для цілком керованості стаціонарної системи (2.3) n -го порядку необхідно й досить, щоб

$$rangS_n = rang(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n. \tag{2.4}$$

Наслідок 2.1. Якщо в системі (2.3) вектор керування $u(t)$ одномірний, а $B = b$ – стовпчик, то необхідна й достатня умова цілком керованості має вигляд:

$$\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq 0. \tag{2.5}$$

Співвідношення (2.4) і (2.5) називаються критеріями цілком керованості Калмана для лінійних стаціонарних систем.

Означення 2.2. *(Цілком керованість на заданому проміжку*). Нестаціонарна система (2.1) називається цілком керованою на заданому проміжку $[t_0, t_1]$, якщо для 2-х довільних значень $x^0, x^1 \in X$ фазового простору можна вказати таку функцію керування $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, що розв\`язок цієї системи задовольняє крайові умови: $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$.

Теорема 2.3. Якщо для деякого t із заданого проміжку $[t_0, t_1]$ виконується умова

$$rang\left[z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)\right] = n, \tag{2.6}$$

де $z_1(t) = B(t), \quad z_k(t) = A(t)z_{k-1}(t) - \dfrac{dz_{k-1}}{dt}, \; k = \overline{2, n}$,

то система (2.1) – цілком керована на заданому проміжку.

Якщо вектор-функції $w_i(t,\xi)$, $i=\overline{1,n}$ при $t=t_1$ лінійно-залежні на заданому проміжку $[t_0,t_1]$, то

$$rang\left[z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)\right] < n. \tag{2.7}$$

2.2. СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЬ У ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

У теорії керування розглядаються задачі про спостережуваність. Зміст цих задач: встановити алгоритм визначення частини або всіх фазових координат системи за умови, що відома друга частина фазових координат або деякі функції від цих координат, а також відома математична модель системи керування у вигляді системи диференціальних рівнянь.

Розглянемо задачу спостережуваності для лінійних систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \tag{2.8}$$

де $x(t)$ – n-мірний вектор стану системи, $A(t)$ – відома матриця $n\times n$.

Означення 2.3. Задачу знаходження вектора $x(t)$ стану системи (2.8) або окремих його компонент за відомою на деякому проміжку $[t_0,t_1]$ функцією

$$y(t) = q^T(t)x(t), \tag{2.9}$$

де $q(t)$ – відома n -мірна вектор-функція, будемо називати задачею спостережуваності лінійної системи (2.8). Функцію $y(t)$ називають функцією (сигналом) виходу системи (2.8).

Зауваження 2.1. Узагальнення означення 2.3: знайти вектор $x(t)$ або окремі його компоненти за відомою вектор-функцією виходу

$$y(t) = G^T(t)x(t), \tag{2.10}$$

де $G(t)$ – відома матриця $n\times m$.

Означення 2.4. Якщо задача спостережуваності (2.8), (2.9) (або (2.8), (2.10)) має розв`язок, то система називається цілком спостережуваною або частково спостережуваною залежно від того, усі чи частину компонент вектора $x(t)$ вдається встановити.

Означення 2.5. Пара матриць $A(t), G(t)$ називається спостережуваною, якщо можна розв`язати задачу спостережуваності для системи (2.8) за вектором виходу (2.10).

Розглянемо найбільш прості розв’язки задач спостережуваності.

Теорема 2.4. Нехай для кожного $t \in [t_0, t_1]$ існують і відомі $n-1$ похідні від вектора виходу (2.10) системи (2.8). Тоді для існування розв`язку задачі спостережуваності для системи (2.8) у фіксованій точці t у вигляді лінійної комбінації значень $y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)$ досить, щоб

$$rang\tilde{S}_n = n, \tag{2.11}$$

де $$\tilde{S}_n(t) = (G_1(t), G_2(t), \ldots, G_n(t)), \tag{2.12}$$

$$G_1^T(t) = G^T(t),\ G_{\nu+1}^T(t) = G_\nu^T(t)A(t) + \frac{dG_\nu^T(t)}{dt},\ \nu = \overline{1, n-1}. \tag{2.13}$$

Доведення. Продиференціюємо $n-1$ разів співвідношення (2.10) та отримаємо n рівностей

$$\begin{aligned}
&y(t) = G_1^*(t)x(t),\\
&y'(t) = \left[\frac{dG_1^*(t)}{dt} + G_1^*(t)A(t)\right]x(t) = G_2^*(t)x(t),\\
&\vdots\\
&y^{(n-1)}(t) = \left[\frac{dG_{n-1}^*(t)}{dt^{n-1}} + G_{n-1}^*(t)A(t)\right]x(t) = G_n^*(t)x(t).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Розглянемо (2.14) як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно компонент вектора $x(t)$. Її розв`язок існує, якщо ранг матриці системи дорівнює n (достатня умова). Оскільки ранг матриці системи дорівнює рангу $\tilde{S}_n$, то теорема доведена.

Зауваження 2.2. Коли $G_1(t) = q(t)$, то умова (2.11) має вигляд:

$$\det \tilde{S}_n(t) = \det(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)) \neq 0 , \tag{2.15}$$

де

$$q_1^T(t) = q^T(t),\; q_\nu^T(t) = q_{\nu-1}^T(t)A(t) + \frac{dq_{\nu-1}^T(t)}{dt},\; \nu = 1,2,\ldots,n.$$

Тоді для фіксованого t маємо:

$$x(t) = \tilde{S}_n^{*-1}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

(це випливає із системи (2.14)).

Зауваження 2.3. Якщо система рівнянь (2.8) стаціонарна, тобто $A(t) = A = const$ і $G_1(t) = const\,(або\, q(t) = const)$, то тоді матриця $\tilde{S}_n$, умови (2.11), (2.15) і формула (2.16) набудуть відповідно вигляду:

$$\tilde{S}_n(t) = (G, A^T G, \ldots, A^{T^{n-1}} G) .$$

$$rang \tilde{S}_n = rang(G, A^T G, \ldots, A^{T^{n-1}} G) = n . \tag{2.17}$$

$$\det \tilde{S}_n(t) = \det\,(q, A^T q, \ldots, A^{T^{n-1}} q) \neq 0 . \tag{2.18}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} q^T \\ q^T A \\ \vdots \\ q^T A^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Відзначимо, що розв’язок задачі спостережуваності через вектор виходу та його похідні буває незручним на практиці, що пов’язано з необхідністю чисельно знаходити похідні заданої функції виходу $y(t)$.

2.3. ЗВ'ЯЗОК МІЖ СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЮ ТА КЕРОВАНІСТЮ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

Нехай маємо умову цілком керованості:

$$rang(\, z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)) = n\,, \qquad (2.20)$$

де

$$z_1(t) = B(t), \quad z_k(t) = A(t)z_{k-1}(t) - \frac{dz_{k-1}(t)}{dt},\, k = \overline{2,n}$$

для лінійної системи керування

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)\,.$$

Запишемо також умову цілком спостережуваності для лінійної системи $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x(t)$ з виходом $y(t) = G^T(t)x(t)$:

$$rang(G_1(t), G_2(t), \ldots, G_n(t)) = n\,, \qquad (2.21)$$

де

$$G_1^T(t) = G^T(t),\; G_{\nu+1}^T(t) = G_\nu^T(t)A(t) + \frac{dG_\nu^T(t)}{dt}, \quad \nu = \overline{1, n-1}\,.$$

Зміст позначень тут той самий, що й вище в цьому розділі. Умови (2.20), (2.21) подібні між собою за формою. Утім, існує зв`язок між ними й за змістом.

Теорема 2.5. Якщо виконується умова цілком керованості системи

$$\frac{dx}{dt} = -A^T(t)x(t) + G(t)u(t) \qquad (2.22)$$

то виконується умова (2.21) цілком спостережуваності системи $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x(t)$ з виходом $y(t) = G^T(t)x(t)$.

Систему (2.22) називають спряженою до системи керування (2.1). Таким чином, дана теорема дозволяє зводити дослідження задач спостережуваності лінійних систем до дослідження задач керованості спряжених систем. Це дає можливість використовувати результати, що стосуються керованості, при розв`язуванні задач спостережуваності.

Розглянемо випадок, коли елементи матриць A, G не залежать від t і перенесемо результати з теорії керованості на задачу спостережуваності.

Теорема 2.6. Для того щоб існував розв'язок задачі спостережуваності системи

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{2.23}$$

з вектором виходу (вимірів)

$$y = G^T x \tag{2.24}$$

необхідно й досить, щоб виконувалась умова:

$$rang\tilde{S}_n = rang(G, A^T G, \dots, A^{T^{n-1}} G) = n\,. \tag{2.25}$$

Зауваження 2.4. Найчастіше задачі спостережуваності виникають у системах керування, тому вони розв'язуються паралельно із задачею керування рухом системи. Щодо лінійних систем, це означає, що задача спостережуваності виникає не для системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$ а для системи керування $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$, де $u(t)$ – m-мірний вектор керування. При цьому вектор виходу $y(t) = G^T(t)x(t)$ має розмірність m.

2.4. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

У багатьох випадках дослідникам невідомі як сама структура математичних моделей системи керування, так і параметри моделей. Це призводить до необхідності оцінки або самої структури й параметрів математичної моделі, або значень окремих параметрів при заданій наперед структурі моделі. Розглянемо задачу знаходження невідомих параметрів математичної моделі, якщо її структура визначена у вигляді системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь. Задача знаходження (оцінки) невідомих параметрів математичної моделі об'єкта дослідження називається задачею ідентифікації.

Для ілюстрації підходів до розв'язання проблем такого типу розглянемо найпростішу задачу ідентифікації.

Нехай стан системи визначається вектором $x(t)$ із n-мірного евклідового простору і для деякого значення аргументу t у результаті вимірів отримані вектори

$$x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n x(t)}{dt^n}. \tag{2.26}$$

У цьому випадку задача ідентифікації полягає в необхідності знайти таку матрицю A розмірності $n \times n$, щоб виконувались умови:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = Ax, \\ &\frac{d^2x}{dt^2} = A\frac{dx}{dt}, \\ &\dots \\ &\frac{d^n x}{dt^n} = A\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Якщо для відомих вимірів (2.26) існує матриця A, яка задовольняє співвідношення (2.27), то задача ідентифікації системи має розв'язок.

Позначивши рядки матриці A через $a_1^T, a_2^T, \dots, a_n^T$, рівняння (2.27) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} &\frac{dx_j}{dt} = a_j^T x, \\ &\dots\dots \qquad\qquad , \qquad (j = 1, 2, \dots, n). \\ &\frac{d^n x_j}{dt^n} = a_j^T \frac{d^n x}{dt^n} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Розглядаючи співвідношення (2.28) при кожному значенні j як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно елементів рядка $a_j^T = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$, можна записати

$$\begin{bmatrix} x^T \\ \dfrac{dx^T}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}x^T}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} a_j = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_j}{dt} \\ \dfrac{d^2 x_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^n x_j}{dt^n} \end{bmatrix}. \quad (j = 1, 2, \dots, n). \tag{2.29}$$

Умова існування розв'язку системи (2.29) має вигляд:

$$\det\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \right) \neq 0 . \tag{2.30}$$

Якщо умова (2.30) виконується, то це означає, що параметри a_j математичної моделі у цьому випадку визначаються за формулами:

$$a_j = \begin{bmatrix} x^T \\ \dfrac{dx^T}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}x^T}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \dfrac{dx_j}{dt} \\ \dfrac{d^2 x_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^n x_j}{dt^n} \end{bmatrix}, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \tag{2.31}$$

У результаті підстановки співвідношень (2.27) в умову (2.30) неважко отримати

$$\det(x, Ax, \dots A^{n-1}x) \neq 0 . \tag{2.32}$$

Порівнявши (2.32) з умовою (2.5) цілком керованості системи (2.3), можна сформулювати зв'язок між задачами ідентифікації та керованості: для існування розв'язку задачі ідентифікації у вигляді математичної моделі $\frac{dx}{dt} = Ax$ за умови спостереження вектора стану $x(t)$ достатньо, щоб матриця A та вектор $x(t)$ задовольняли умову (2.5) цілком керованості системи (2.3), де $b = x(t)$.

Подібну аналогію можна встановити також між умовами ідентифікації та цілком спостережуваності.

Оскільки матриця A наперед невідома, то на практиці умову ідентифікації перевіряють за допомогою умови (2.30).

Зауважимо, що необхідна й достатня умова поставленої задачі ідентифікації полягає в тому, щоб збігалися ранги основної та розширеної матриць у системі (2.29).

2.5. КЕРОВАНІСТЬ, СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЬ ТА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИСКРЕТНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Важливим розділом теорії керування є дослідження дискретних систем керування, тобто систем, які змінюють свій стан у дискретні моменти часу. Зауважимо, що системи керування, в яких у керуючому пристрої використовуються процесори, за своєю природою є дискретними системами, оскільки процесор змінює свій стан (проводить обчислення) з певною тактовою частотою.

Не вдаючись до детального опису процесу дискретизації неперервних систем, будемо вважати, що рівняння руху дискретної лінійної системи керування задаються у вигляді:

$$x(k) = A(k)x(k-1) + B(k)u(k-1), \tag{2.33}$$

де $x(k) = x(t_k)$ – n-мірний вектор стану системи в момент часу (у точці) t_k, $u(k-1) = u(t_{k-1})$ – m-мірний вектор керування в момент часу t_{k-1}, $A(k), B(k)$ – матриці відповідних розмірностей, елементи яких залежать від моменту часу t_k. Дискретний аргумент t_k приймає значення із заданої послідовності моментів часу

$t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_N < \ldots$.

Розглянемо рух системи (2.33) на деякому інтервалі часу $[t^{(0)}, t^{(1)}]$.

Означення 2.6. Лінійну дискретну систему керування (2.33) будемо називати цілком керованою на заданому інтервалі від $t^{(0)} = t_k$ до $t^{(1)} = t_{k+N}$, якщо для двох довільних станів $x^{(0)} \in X$, $x^{(1)} \in X$, де X – множина допустимих станів системи (2.33), існує така послідовність керувань $u(k), u(k+1), \ldots, u(k+N-1)$, за допомогою якої система (2.33) переходить із стану $x^{(0)} \in X$ у стан $x^{(1)} \in X$, тобто $x(k) = x^{(0)}$, $x(k+N) = x^{(1)}$.

Теорема 2.8. Необхідною й достатньою умовою цілком керованості лінійної дискретної системи (2.33) є умова:

$$\begin{aligned} &rang(A(k+N)A(k+N-1)\ldots A(k+2)B(k+1), \\ &A(k+N)A(k+N-1)\ldots A(k+3)B(k+2), \ldots, B(k+N)) = n. \end{aligned} \qquad (2.34)$$

Зауваження 2.5. Постановка задачі про керованість дискретних систем має сенс за умови $Nm \geq n$.

Наслідок 2.2. Для лінійної стаціонарної дискретної системи (елементи матриць $A(k) = A, \ B(k) = B$ не залежать від дискретного аргументу t_k, тобто є сталими) умова цілком керованості (2.34) набуває вигляду

$$rang(B, AB, A^{n-1}B) = n \qquad (2.35)$$

а у випадку, коли матриця B є стовпцем b, умова цілком керованості набуває вигляду

$$\det(b, Ab, A^{n-1}b) \neq 0 .$$

Розглянемо задачу спостережуваності для лінійних дискретних систем.

Нехай задана дискретна система

$$x(k+1) = A(k+1)x(k) \qquad (2.36)$$

і відомий m-мірний вектор виходу (вимірів) системи

$$y(k) = G^T(k)x(k) \tag{2.37}$$

у дискретні моменти часу t_k, t_{k+1}, t_{k+N-1}.

Означення 2.7. Якщо за відомою дискретною системою (2.36) і відомим m-мірним вектором виходу (2.37) у дискретні моменти часу t_k, t_{k+1}, t_{k+N-1} можна відновити стан системи, то така система називається спостережуваною дискретною системою.

Теорема 2.9. Для спостережуваності системи (2.36) за відомим виходом (2.37) необхідно й досить виконання умови

$$\begin{aligned} &rang(G(k), A^T(k)G(k+1), \ldots \\ &\ldots, A^T(k)A^T(k+1)\ldots A^T(k+n-2)G^T(k+n-1)) = n. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Наслідок 2.3. Якщо для матриць виконується умова $A(k) = A,\ \ G(k) = G$, де матриці A і G не залежать від дискретного аргументу t_k, то умова спостережуваності (2.38) набуває вигляду

$$rang(G, A^T G, A^{T^{n-1}} G) = n.$$

Наслідок 2.4. Якщо виконуються умови наслідку 2.3 і матриця G є стовпцем g, то умова спостережуваності записується так:

$$\det(g, A^T g, A^{T^{n-1}} g) \neq 0.$$

Тоді відновлений вектор стану дискретної системи $x(k)$ буде визначатися за формулою:

$$x(k) = \begin{pmatrix} g^T \\ g^T A \\ \vdots \\ g^T A^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+n-1) \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Розглянемо задачу ідентифікації для лінійних дискретних систем. Нехай задана лінійна стаціонарна дискретна система

$$x(k+1) = Ax(k)\,, \qquad (2.40)$$

де A – невідома стала матриця розмірності $n \times n$.

Означення 2.8. Якщо за відомими значеннями векторів $x(k), x(k+1), \ldots, x(k+n)$ стану лінійної стаціонарної системи (2.40) можна відновити (знайти) матрицю A, то система називається такою, що може бути ідентифікованою, а процес знаходження матриці A – ідентифікацією системи (2.40).

Теорема 2.10. Якщо виконується умова

$$\det(x(k), x(k+1), \ldots, x(k+n-1)) \neq 0\,, \qquad (2.41)$$

то задача ідентифікації для лінійної дискретної системи (2.40) за відомими значеннями векторів виходу має розв’язок.

РОЗДІЛ 3

3.1. ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РУХУ ТА АНАЛІТИЧНЕ КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Нехай система керування описується рівнянням

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), u(t)) \tag{3.1}$$

де $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ – відповідно вектори стану та керувань, $F(t, x(t), u(t))$ $-n$-мірна вектор-функція, що описує рух системи.

Для постановки задач дослідження стійкості та конструювання регуляторів потрібно задати певний бажаний рух системи (3.1). Будемо вважати, що траєкторія $x(t)$ на інтервалі $[t_0, \infty)$ змінюється згідно із заданим програмним режимом:

$$x(t) = x_{np}(t), \quad t \in [t_0, \infty). \tag{3.2}$$

Нехай у момент часу $t^{(0)}$ система задовольняє умову $x(t) = x_{np}(t)$. Тоді задачу програмного керування можна сформулювати так: знайти програмне керування $u_{np}(t)$, при якому розв'язок системи (3.1) забезпечує умову (3.2).

Задача дослідження стійкості програмного руху $x_{np}(t^{(0)})$ полягає у визначенні властивостей розв'язку системи (3.1) під дією програмного керування $u(t) = u_{np}(t)$ для $t > t^{(0)}$, якщо в початковий момент часу $t^{(0)}$ вектор стану системи отримує деяке збурення $\Delta x(t^{(0)})$:

$$x(t^{(0)}) = x_{np}(t^{(0)}) + \Delta x(t^{(0)}). \tag{3.3}$$

Означення 3.1. Програмний рух $x_{np}(t)$ системи (3.1) називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що, якщо для початкових умов системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), u_{np}(t)) \tag{3.4}$$

виконується нерівність $\left\|\Delta x(t^{(0)})\right\| = \left\|x(t^{(0)}) - x_{np}(t^{(0)})\right\| \leq \delta$, то при $t > t^{(0)}$ для розв’язку системи (3.4) справедлива оцінка $\left\|\Delta x(t)\right\| \leq \varepsilon$, де $\Delta x(t) = x(t) - x_{np}(t)$.

Програмний рух системи (3.4) називається асимптотично стійким, якщо до умов стійкості додається гранична умова: $\lim\limits_{t \to \infty} \left\|\Delta x(t)\right\| = 0$.

Під дією початкових збурень траєкторія збуреного руху буде мати вигляд $x(t) = x_{np}(t) + \Delta x(t)$. Запишемо рівняння для $\Delta x(t)$ згідно із системою (3.4):

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x(t)}{dt} &= F(t, x_{np}(t) + \Delta x(t), u_{np}(t)) - F(t, x_{np}(t), u_{np}(t)) = \\ &= \Phi(t, \Delta x(t), u_{np}(t)). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Очевидно, що стійкість за Ляпуновим програмного руху системи (3.4) означає стійкість за Ляпуновим незбуреного руху $\Delta x(t) \equiv 0$ для системи (3.5). Надалі будемо досліджувати на стійкість незбурений рух $\Delta x(t) \equiv 0$.

Зазвичай, програмний рух системи (3.4) і відповідний незбурений рух системи (3.5) є нестійкими. Тому будемо розглядати задачу забезпечення стійкості цих систем шляхом уведення додаткового керування $\Delta u(t, \Delta x(t))$, яке разом із програмним керуванням становить закон керування системою:

$$u(t) = u_{np}(t) + \Delta u(t, \Delta x(t)) \tag{3.6}$$

Тоді задача аналітичного конструювання регулятора системи (3.1) полягає у виборі такої залежності $\Delta u(t, \Delta x(t))$, за якої розв’язок $\Delta x(t) \equiv 0$ системи рівнянь

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = X(t, \Delta x(t), \Delta u(t, \Delta x(t))), \tag{3.7}$$

де $X(t, \Delta x(t), \Delta u(t, \Delta x(t))) = \Phi(t, \Delta x(t), u_{пр}(t) + \Delta u(t, \Delta x(t)))$, був би стійким (асимптотично стійким) за Ляпуновим.

Якщо задати наперед структуру залежності $\Delta u(t, \Delta x(t))$ з точністю до значень деяких параметрів, то задача аналітичного конструювання регулятора зводиться до вибору значень цих параметрів системи (3.7) згідно з умовами стійкості за Ляпуновим розв'язку $\Delta x(t) \equiv 0$.

3.2. СТІЙКІСТЬ У ЗАСТОСУВАННІ ДО АНАЛІТИЧНОГО КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Нехай система (3.7) є лінійною:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t, \Delta x(t)). \tag{3.8}$$

Позначивши $\Delta x(t) = x(t)$, $\Delta u(t) = u(t)$, перепишемо систему (3.8) у вигляді:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t, x(t)). \tag{3.9}$$

Задачу аналітичного конструювання регулятора для лінійної системи (3.9) сформулюємо таким чином: знайти матрицю $C(t)$ розмірності $m \times n$ таку, що при керуванні $u(t, x(t)) = C(t)x(t)$ нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (3.9), тобто системи рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A(t) + B(t)C(t))x(t) \tag{3.10}$$

буде асимптотично стійким за Ляпуновим.

Розглянемо спочатку лінійні стаціонарні системи

$$\frac{dx}{dt} = (A + BC)x. \tag{3.11}$$

Скористаємось відомими результатами дослідження стійкості розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь [16].

Теорема 3.1. Для асимптотичної стійкості за Ляпуновим лінійної стаціонарної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{3.12}$$

необхідно й досить, щоб усі корені λ_j характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{3.13}$$

мали від'ємні дійсні частини:

$$\operatorname{Re}\lambda_j < 0, \quad j = \overline{1, n}\,. \tag{3.14}$$

Тут і далі E – одинична матриця.

Застосуємо цю теорему до задачі аналітичного конструювання регулятора системи (3.11). Запишемо для цієї системи характеристичне рівняння

$$\det(A + BC - \lambda E) = 0\,. \tag{3.15}$$

Корені даного рівняння будуть залежати від невідомих елементів матриці C, тобто $\lambda_j = \lambda_j(C)$.

Згідно з теоремою 3.1, невідомі елементи матриці C вибираємо з умови $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, $j = \overline{1, n}$, що й забезпечить асимптотичну стійкість системи (3.11).

Теорема 3.2 (Критерій Рауса-Гурвиця). Нехай характеристичне рівняння (3.13) має вигляд:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0\,. \tag{3.16}$$

Тоді для того, щоб усі корені характеристичного рівняння (3.16) мали від'ємні дійсні чистини: $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, $j = \overline{1, n}$, необхідно й досить виконання умови додатності всіх головних мінорів матриці:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n+1} & a_2 \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

де $a_j = 0$ при $j > n$, $a_0 > 0$.

Тобто має виконуватись система нерівностей:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{тощо.} \tag{3.18}$$

Якщо застосувати критерій Рауса-Гурвиця до задачі аналітичного конструювання регулятора системи (3.11), то отримаємо головні мінори, які будуть залежати від невідомих елементів матриці C. У результаті маємо систему нерівностей

$$\Delta_j(C) > 0, \; j = \overline{1, n}. \tag{3.19}$$

Матриця C, що знаходиться з цієї системи нерівностей, згідно з теоремою 3.2 забезпечує від'ємність дійсних частин коренів характеристичного рівняння, тобто виконання умови (3.14). Тоді згідно з критерієм асимптотичної стійкості (теорема 3.1) лінійна стаціонарна система (3.11) буде асимптотично стійкою за Ляпуновим.

На основі результатів про керованість та спостережуваність розглянемо як приклад конструктивний спосіб знаходження керування $u(x)$ у лінійних стаціонарних системах і дослідимо умови існування матриці C, за яких система $\frac{dx}{dt} = (A + BC)x$ ($A, B, C - const$) буде асимптотично стійкою.

Розглянемо систему зі скалярним керуванням

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu\,,\ \ A, b - const. \tag{3.20}$$

Тут A - $n \times n$ матриця, b – n-вектор-стовпчик, u – скаляр.

Теорема 3.3. Якщо система (3.20) цілком керована, тобто виконується умова

$$\det(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) \neq 0 \tag{3.21}$$

то існує функція керування

$$u = c^T x\,, \tag{3.22}$$

де $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$, при якій система

$$\frac{dx}{dt} = (A + bc^T)x \tag{3.23}$$

має наперед задані довільні корені характеристичного рівняння

$$\det(A + bc^T - \lambda E) = 0\,. \tag{3.24}$$

Доведення цієї теореми можна знайти, зокрема, у [4]. Доведення побудовано так, що одночасно вказано алгоритм знаходження величин $c_1, \ldots, c_n$ за відомими значеннями коренів $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристичного рівняння (3.24). У процесі доведення отримано явний вигляд вектора c:

$$c = (S^{-1})^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ p_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \ldots & 1 \end{bmatrix}^{-1} (p - a) \tag{3.25}$$

Тут $\quad S = (b, Ab, \ldots, A^{n-1}b)\,, \quad \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = S^{-1}A^n b\,, \quad a - n$-вектор стовбчик, що знаходиться через відомі значення коренів $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристичного рівняння (3.24), фактично це значення коефіцієнтів відповідного характеристичного поліному.

Для того, щоб розв'язати задачу аналітичного конструювання одномірного (відзначимо, що такий спосіб можна застосувати до конструювання багатомірного) регулятора, потрібно вибрати вектор a таким, щоб він забезпечував від'ємність дійсних частин коренів характеристичного рівняння (3.24) системи керування (3.20). За цієї умови вектор c, отриманий через вектор a згідно з формулою (3.25), і забезпечить асимптотичну стійкість лінійної системи. Тоді керування, за теоремою 3.3, буде визначатися формулою (3.22).

3.3. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ЛЯПУНОВА ДО ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ПРОГРАМНИХ РУХІВ

Розглянемо систему керування:

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(t, x(t), u(t, x(t))) \tag{3.26}$$

яка відповідає системі (3.7) при $\Delta x(t) = x(t)$, $\Delta u(t) = u(t)$.

Як відомо з теорії стійкості [23], найбільш загальним методом дослідження систем на стійкість є так званий метод функцій Ляпунова (або прямий метод, або другий метод Ляпунова). Цей метод не вимагає знання загального розв'язку системи диференціальних рівнянь (3.26) і дозволяє зробити висновок про характер стійкості нульового розв'язку системи, використовуючи функції Ляпунова, що мають бути спеціально побудовані. За характером поведінки функцій Ляпунова згідно із системою (3.26) і робиться висновок про стійкість або нестійкість нульового розв'язку.

Наведемо означення та формулювання основних теорем другого методу Ляпунова. Нехай для системи (3.26) існує така сукупність керувань $u(t, x(t))$, при яких у деякій області

$$\|x\| \le H \tag{3.27}$$

виконуються умови існування розв'язків рівнянь (3.26). Тут H – деяке задане число, $H > 0$.

Нехай функція $X(t,x(t),u(t,x(t)))$ – аналітична (неперервна й диференційована) в області (3.27) і задовольняє умову $X(t,0,u(t,0))=0$.

Розглянемо стаціонарну систему, тобто частинний випадок системи (3.26), коли права частина рівнянь явно не залежить від часу:

$$\frac{dx}{dt} = X(x,u(x)) \tag{3.28}$$

Введемо до розгляду неперервну функцію $v(x)$, яка задовольняє умови:

а) $v(0)=0$;

б) $v(x)$ – однозначна в області (3.27);

в) $\dfrac{\partial v(x)}{\partial x_j}$, $j=\overline{1,n}$ - неперервні в області (3.27).

Означення 3.2. Функція $v(x)$ називається додатно-визначеною, якщо для деякого заданого числа $H>0$ в області $\|x\|\le H$ виконується умова: $v(x)>0$, $\|x\|\ne 0$.

Означення 3.3. Функція $v(x)$ називається додатно-сталою, якщо для деякого заданого числа $H>0$ в області $\|x\|\le H$ виконується умова $v(x)\ge 0$.

Аналогічно вводяться поняття від'ємно-визначеної та від'ємно-сталої функцій.

Означення 3.4. Функція $v(x)$ називається знакозмінною, якщо в області $\|x\|\le H$ для як завгодно малого заданого числа $H>0$ вона приймає як додатні, так і від'ємні значення.

Функції $v(x)$ називаються функціями Ляпунова.

Прикладом додатно-визначеної функції Ляпунова є функція $v(x)=x^T Dx$, де D – квадратна симетрична матриця, для якої виконуються нерівності Сільвестра:

$$d_{11} > 0\,,\ \det\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} > 0\,,\ \ldots,\ \det\begin{pmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix} > 0\,. \quad (3.29)$$

Теорема 3.4. Якщо для системи керування (3.28) можна визначити таку додатно-визначену функцію $v(x)$, щоб її повна похідна по t згідно з цією системою

$$\frac{dv}{dt} = grad^T v(x)\frac{dx}{dt} = grad^T v(x) X(x, u(x)) = w(x) \qquad (3.30)$$

була від'ємно-сталою функцією $w(x) \le 0$, то програмний рух $x(t) \equiv 0$ системи (3.28) стійкий за Ляпуновим.

Теорема 3.5. Якщо для системи (3.28) можна визначити таку додатно-визначену функцію $v(x)$, щоб її повна похідна по t згідно з цією системою

$$\frac{dv}{dt} = grad^T v(x)\frac{dx}{dt} = grad^T v(x) X(x, u(x)) = w(x)$$

була від'ємно-визначеною функцією $w(x) < 0$, то програмний рух $x(t) \equiv 0$ системи (3.28) асимптотично стійкий за Ляпуновим.

Теорема 3.6. Якщо для системи (3.28) можна знайти таку функцію $v(x)$, щоб її повна похідна (3.30) згідно з цією системою була від'ємно-визначеною функцією $w(x) < 0$, а сама функція $v(x)$ при цьому не була додатно-сталою, тобто в як завгодно малій області $\|x\| \le H$ (H - задане число, $H > 0$) $v(x)$ може приймати від'ємні значення, то програмний рух $x(t) \equiv 0$ системи (3.28) нестійкий за Ляпуновим.

Зауваження 3.1. Можна дослідити на стійкість систему керування (3.26), права частина якої явно залежить від t. Тоді використовується поняття функції Ляпунова, параметрично залежної від t: $v(t, x)$ – диференційована за своїми аргументами функція при $t > t_0$ в області $\|x\| \le H$ (H - задане число, $H > 0$) така, що $v(t,0) \equiv 0$.

Тут і далі t_0 – початковий момент часу.

Розглянемо метод дослідження на стійкість за першим (лінійним) наближенням системи керування (3.28). Цей метод називають ще першим методом Ляпунова. При його застосуванні з правої частини рівнянь нелінійної системи виділяється лінійна по x частина. Потім окремо досліджується на стійкість система, у рівнянні якої справа стоїть тільки виділена лінійна функція. Це система першого або лінійного наближення. Тоді характер стійкості розв'язку початкової нелінійної системи буде таким самим, як і розв'язку системи першого наближення. Формулювання основних теорем цього методу наведені нижче.

Зобразимо систему (3.28) у вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu(x) + \widetilde{X}(x, u(x)), \tag{3.31}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} | x=0 & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} | x=0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} | x=0 & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} | x=0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} | x=0 & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial u_m} | x=0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_n}{\partial u_1} | x=0 & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial u_m} | x=0 \end{pmatrix},$$

функція $\widetilde{X}(x, u(x))$ при $x \to 0$ має порядок малості не нижче другого. Права частина системи (3.28) – n-мірна вектор-функція:

$$X(x, u(x)) = (X_1(x, u(x)), \dots, X_n(x, u(x)))^T .$$

.

Нехай керування задається у вигляді $u(x) = Cx$. Тоді система першого наближення має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = (A + BC)x. \qquad (3.32)$$

Теорема 3.7. Якщо програмний рух $x(t) \equiv 0$ для системи першого наближення $\frac{dx}{dt} = (A + BC)x$ є асимптотично стійким за Ляпуновим, то такий рух асимптотично стійкий також і для нелінійної системи (3.31) незалежно від вигляду нелінійних функцій $\tilde{X}(x, u(x))$.

Теорема 3.8. Якщо серед коренів характеристичного рівняння системи першого наближення (3.32) $\det(A + BC - \lambda E) = 0$ знайдеться хоча б один із додатною дійсною частиною, то програмний рух $x(t) \equiv 0$ нелінійної системи (3.31) буде нестійкий за Ляпуновим незалежно від вигляду нелінійних функцій $\tilde{X}(x, u(x))$.

Теорема 3.9. Якщо характеристичне рівняння $\det(A + BC - \lambda E) = 0$ системи першого наближення (3.32) не має коренів із додатними дійсними частинами, то, залежно від характеру нелінійності функцій $\tilde{X}(x, u(x))$, програмний рух $x(t) \equiv 0$ нелінійної системи (3.31) може бути як стійким, так і нестійким за Ляпуновим.

Означення 3.5. Програмний рух системи $x(t) \equiv 0$ системи

$$\frac{dx}{dt} = X(x, u(x)) + R(t, x) \qquad (3.33)$$

називається стійким за умови постійно діючих збурень, якщо для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0, \exists \delta_2 > 0$ такі, що, як тільки

$$\|x(t_0)\| \le \delta_1, \ \|R(t_0, x)\| \le \delta_2,$$

то при $t \ge t_0$ для траєкторії системи виконується нерівність $\|x(t)\| \le \varepsilon, \ t \ge t_0$.

Теорема 3.10. Якщо для системи $\frac{dx}{dt} = X(x, u(x))$ можна знайти таку додатно-визначену функцію $v(x)$, щоб її повна похідна по t згідно з цією системою $\frac{dv}{dt} = grad^T v(x) X(x, u(x)) = w(x)$ була від'ємно-сталою функцією $w(x) \le 0$ (тобто виконувалися умови теореми 3.4), то програмний рух $x(t) \equiv 0$ системи (3.33) буде стійким за умови постійно діючих збурень.

РОЗДІЛ 4

4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ ЯК ЗАДАЧ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Варіаційне числення, як відомо, вивчає методи, що дозволяють знаходити мінімальні та максимальні значення функціоналів. Задачі, в яких потрібно дослідити функціонал на екстремум, називають варіаційними задачами [33].

Даний розділ спрямовано на дослідження можливостей застосування відомих методів варіаційного числення до задач оптимізації систем керування.

Для того, щоб показати, як і в яких випадках задачі теорії керування можна звести до задач варіаційного числення, запишемо окремо постановки задач теорії керування та варіаційного числення.

Задача теорії керування полягає в тому, що для системи

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x,u,t),\; i=\overline{1,n}, \tag{4.1}$$

де $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))^T$, $u(t)=(u_1(t),\dots,u_r(t))^T$ – відповідно вектор стану та вектор керувань, з початковим станом

$$x_i(t_0)=x_{0i}\quad i=\overline{1,n}, \tag{4.2}$$

на фіксованому проміжку часу $[t_0,t_1]$ треба знайти такий вектор керувань $u(t)$ і відповідну (4.1), (4.2) траєкторію $x(t)$, які б забезпечували мінімум функціонала

$$Q=\int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt. \tag{4.3}$$

Наведемо **задачу Лагранжа варіаційного числення**. Потрібно знайти таку вектор-функцію $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))^T$ з початковою умовою (4.2), щоб функціонал

$$Q=\int_{t_0}^{t_1} G^1(x,\frac{dx}{dt},t)dt \tag{4.4}$$

приймав своє мінімальне значення.

Для того, щоб показати, як задачу теорії керування можна звести до задачі варіаційного числення, будемо вимагати, щоб керування в системі (4.1) знаходились у вигляді

$$u_i = \varphi_i(x, \frac{dx}{dt}, t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.5}$$

Підставивши (4.5) в (4.3), отримаємо функціонал $Q = \int\limits_{t_0}^{t_1} G^1(x, \frac{dx}{dt}, t)dt$, який є функціоналом (4.4) задачі Лагранжа.

Таким чином, за умов (4.5) задача оптимізації (4.1) – (4.3) системи керування полягає у знаходженні оптимальної траєкторії, на якій досягається мінімум функціонала (4.4), що повністю збігається із задачею Лагранжа. Отже, коли в системах керування вектор керувань можна зобразити у вигляді (4.5), то задачу оптимального керування можна звести до задачі варіаційного числення.

Наведемо постановки основних задач варіаційного числення в термінах теорії керування.

Задача Майера. Нехай задані рівняння руху системи у вигляді (4.1), початковий і кінцевий стани

$$x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1, \tag{4.6}$$

функціонал

$$Q = g(x, u, t)\,|_{t=t_1}, \tag{4.7}$$

де $g(x, u, t)$ – функція, визначена на множині кінцевих станів системи.

Необхідно знайти таку вектор-функцію керувань $u(t)$ і відповідну до (4.1), (4.6) траєкторію $x(t)$, щоб функціонал (4.7) набував свого мінімального значення.

Задача Больця. Нехай задані рівняння руху системи у вигляді (4.1), початковий і кінцевий стани (4.6), функціонал

$$Q = \int\limits_{t_0}^{t_1} G(x, u, t)dt + g(x, u, t)\,|_{t=t_1}. \tag{4.8}$$

Задача Больця полягає у знаходженні такої вектор-функції керувань $u(t)$, щоб задовольнялись умови (4.1), (4.6) і функціонал (4.8) набував свого мінімального значення.

Відмітимо, що остання задача є найбільш загальною, але шляхом уведення додаткових змінних завжди можна одну з наведених задач звести до іншої й навпаки.

4.2. НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІОНАЛІВ

Для дослідження необхідних і достатніх умов екстремуму функціоналів наведемо деякі означення.

Означення 4.1. Змінна величина Q називається функціоналом, що залежить від функції $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ і позначається $Q[x(t)]$, якщо кожній функції $x(t)$ з деякого класу відповідає число $Q[x(t)]$.

Означення 4.2. Функція

$$\delta x(t) = x(t) - x^O(t) \tag{4.9}$$

називається варіацією аргументу $x(t)$.

Означення 4.3. Якщо приріст $\Delta Q[x(t)] = Q[x(t)] - Q[x^O(t)]$ функціонала $Q[x(t)]$ можна записати у вигляді

$$\Delta Q[x(t)] = Q[x(t)] - Q[x^O(t)] = Q[x^O(t) + \delta x(t)] - Q[x^O(t)] =$$

$$= L[x(t), \delta x(t)] + \beta[x(t), \delta x(t)] \times \max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \delta x(t) \right\|, \tag{4.10}$$

то $L[x(t), \delta x(t)]$ – лінійна відносно варіації аргументу $\delta x(t)$ частина приросту функціонала $Q[x(t)]$ – називається варіацією функціонала й позначається

$$\delta Q[x(t) =]L[x(t), \delta x(t)]. \tag{4.11}$$

Тут $\beta[x(t), \delta x(t)] \to 0$ при $\max_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \delta x(t) \right\| \to 0$.

Теорема 4.1. Якщо функціонал $Q[x(t)]$ має варіацію (4.11) і досягає екстремуму (мінімуму чи максимуму) на $x^0(t)$, де $x^0(t)$ – внутрішня точка області визначення функціонала, то $\delta Q[x^0(t)] = 0$.

Наведемо необхідні й достатні умови екстремуму функціонала залежно від постановок задач варіаційного числення.

Задача із закріпленими (нерухомими) кінцями траєкторії.

Теорема 4.2. Необхідними умовами екстремуму функціонала

$$Q[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} G(x, \dot{x}, t) dt \tag{4.12}$$

для $x(t) \in C^1_{[t_0, t_1]}$ із закріпленими кінцями $x(t_0) = x_0$ $x(t_1) = x_1$ за умови, що функція $G = G(x, \dot{x}, t)$ – двічі диференційована за всіма своїми аргументами, є рівняння **Ейлера-Лагранжа**:

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.13}$$

тобто, якщо функціонал (4.12) досягає екстремуму на кривій $x^0(t)$, то ця крива є розв'язком рівняння (4.13).

Зауваження 4.1. Рівняння (4.13) завжди є диференціальними рівняннями другого порядку. Для одномірного $x(t)$ рівняння (4.13) можна аналітично проінтегрувати в таких випадках:

– G не залежить явно від $\dot{x}$: $G = G(x, t)$;

– G не залежить явно від t: $G = G(x, \dot{x})$;

– G не залежить явно від x: $G = G(\dot{x}, t)$;

– G лінійна відносно $\dot{x}$: $G = g_1(x, t) + \dot{x} \cdot g_2(x, t)$.

Розв'язок рівнянь (4.13) визначає цілу множину кривих, на яких функціонал (4.12) може досягати свого екстремуму, а може й не досягати. Щоб визначити, чи досягається екстремум на окремих кривих і дослідити характер екстремуму, треба перевірити виконання достатніх умов екстремуму.

Умова Якобі в аналітичній формі [33].

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку відносно функції $w = w(t)$:

$$\left(G_{xx} - \frac{d}{dt} G_{x\dot{x}}\right) w - \frac{d}{dt}\left(G_{\dot{x}\dot{x}} w'\right) = 0.$$

Це рівняння називається рівнянням Якобі. Якщо існує розв'язок рівняння $w(t)$ такий, що при $t = t_0$: $w(t_0) = 0$ і не дорівнює нулю в жодній іншій точці проміжку $w(t) \neq 0$, $t_0 < t \leq t_1$, то існує поле, що складається з кривих – розв'язків (4.13), яке включає досліджувану криву $x(t)$.

Теорема 4.3. Нехай крива $x(t)$ – розв'язок рівняння (4.13), що задовольняє умову Якобі. Тоді достатньою умовою досягнення функціоналом $Q[x(t)]$ вигляду (4.12) мінімуму на кривій $x(t)$ є **умова Вейєрштраса**:

$$E(x, \dot{x}, t, v) \geq 0 \qquad (4.14)$$

для довільних значень v, $t_0 \leq t \leq t_1$,

де $E(x, \dot{x}, t, v) = G(x, v, t) - G(x, \dot{x}, t) - (v - \dot{x})^T G_{\dot{x}}(x, \dot{x}, t)$ – функція Вейєрштраса.

Зауваження 4.2. Умова Вейєрштраса має й необхідний характер у тому смислі, що, якщо в точках досліджуваної кривої $x(t)$ – розв'язку рівняння (4.13), яка задовольняє умову Якобі, для деяких значень v функція $E(x, \dot{x}, t, v)$ має протилежні знаки, то екстремум не досягається.

Теорема 4.4. Якщо на кривій $x(t)$ досягається мінімум функціонала (4.12) для задачі із закріпленими кінцями траєкторії, то виконується **умова Лежандра**:

$$G_{\dot{x}\dot{x}}(x, \dot{x}, t) \geq 0 \qquad (4.15)$$

для довільних значень $\dot{x}$, $t_0 < t \leq t_1$.

Теорема 4.5. Нехай досліджувана крива $x(t)$ – розв'язок рівняння (4.13) для задачі із закріпленими кінцями траєкторії. Тоді умова Лежандра (4.15) у поєднанні з умовою Якобі є достатніми умовами досягнення мінімуму функціоналом (4.12) на кривій $x(t)$.

Зауваження 4.2. Наведені вище достатні умови є достатніми умовами так званого сильного мінімуму функціонала (4.12) для задачі із закріпленими кінцями траєкторії. Детальніше про сильний та слабкий екстремуми функціонала можна прочитати в книзі [33]. Щоб отримати умови максимуму функціонала, треба в наведених вище умовах мінімуму (4.14), (4.15) взяти знаки нерівностей протилежними.

Розглянемо варіаційну задачу з рухомим кінцем траєкторії. Нехай один кінець траєкторії закріплено в точці $x(t_0)=x_0$, а інший – на кривій $x(t)=\varphi(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, тобто $x(t_1)=\varphi(t_1)$.

Теорема 4.6. Необхідними умовами екстремуму функціонала (4.12) на множині неперервно-диференційованих функцій $x(t)$ таких, що один кінець траєкторії закріплено в точці $x(t_0)=x_0$, а інший – на кривій $x(t)=\varphi(t)$, тобто $x(t_1)=\varphi(t_1)$, є рівняння Ейлера-Лагранжа $\dfrac{\partial G}{\partial x_i}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial G}{\partial \dot{x}_i}=0$, $i=\overline{1,n}$ і умова трансверсальності:

$$G\Big|_{t=t_1}-\sum_{i=1}^{n}[\dot{x}_i(t_1)-\dot{\phi}_i(t_1)]\frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t=t_1}=0. \qquad (4.16)$$

Тут, як і раніше, $G(x,\dot{x},t)$ – двічі диференційована за всіма аргументами функція.

Умову (4.16) можна записати в компактнішій формі:

$$[G+(\dot{\phi}-\dot{x})^T G_{\dot{x}}]\Big|_{t=t_1}=0.$$

Дослідимо варіаційні задачі для функціоналів із вищими похідними:

$$Q=\int_{t_0}^{t_1}G(x(t),\dot{x}(t),x''(t),\ldots,x^{(n)}(t),t)dt. \qquad (4.17)$$

Теорема 4.7. Необхідною умовою екстремуму функціонала (4.17) на множині $2n$ разів неперервно-диференційованих функцій $x(t)$, заданих разом із своїми похідними до $(n-1)$-го порядку включно в початковий і кінцевий моменти часу за умови, що функція G за всіма аргументами $n+2$ рази диференційована, є рівняння **Ейлера – Пуасона**:

$$G_x-\frac{d}{dt}G_{\dot{x}}+\frac{d^2}{dt^2}G_{\ddot{x}}-\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dt^n}G_{x^{(n)}}=0. \qquad (4.18)$$

Відзначимо, що диференціальне рівняння (4.18) є рівнянням порядку $2n$.

Теорема 4.8. Якщо на кривій $x(t)$, на якій може досягатися екстремум функціонала (4.17), виконана умова

$$G_{x^{(n)}x^{(n)}} \geq 0 (\leq 0) \tag{4.19}$$

і відрізок $[t_0, t_1]$ не містить точок, спряжених із точкою t_0 [33], то на цій кривій досягається мінімум (максимум) функціонала (4.17).

4.3. ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА НА УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ ІЗ ЗАКРІПЛЕНИМИ КІНЦЯМИ ТРАЄКТОРІЙ

Розглянемо задачу мінімізації функціонала

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x, \dot{x}, t)dt, \tag{4.20}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, у випадку, коли змінні $x_1, \ldots, x_n$ – залежні.

Вигляд залежності будемо визначати трьома типами співвідношень:

кінцеві: $\varphi_j(x, t) = 0$, (4.21)

диференціальні: $\phi_j(x, \dot{x}, t) = 0$, (4.22)

інтегральні: $\psi_j = \int_{t_0}^{t_1} \phi_j(x, \dot{x}, t)dt$, $j = 1, 2, \ldots, m < n$. (4.23)

Задача мінімізації функціонала (4.20) з урахуванням однієї з умов (4.21) – (4.23) називається варіаційною задачею на умовний екстремум. Задача мінімізації функціонала (4.20) із залежностями диференціального типу (4.22) називається загальною задачею Лагранжа. До неї зводяться всі інші задачі на умовний екстремум.

Розв’язок задачі (4.20), (4.22) збігається з розв’язком задачі на безумовний екстремум функціонала:

$$Q' = \int_{t_0}^{t_1} G'(x, \dot{x}, t)dt, \text{ де } G' = G + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\varphi_j. \tag{4.24}$$

Тут $\lambda_j(t)$, $j=\overline{1,m}$ – деякі невизначені функції, які разом із функціями $x_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ є незалежними аргументами функціонала (4.24).

Рівняння Ейлера-Лагранжа для функціонала (4.24):

$$\frac{\partial G'}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial G'}{\partial \dot{x}}=0$$

разом з обмеженнями (4.22) утворюють замкнену систему $n+m$ рівнянь із невідомими $x_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ і $\lambda_j(t)$, $j=\overline{1,m}$.

Сталі інтегрування вказаної системи знаходяться із заданих умов $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$.

4.4. ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ З ОБМЕЖЕННЯМИ НА КЕРУВАННЯ

Розглянемо задачу керування з обмеженнями на керування типу нерівностей. Ідея розв'язування такої задачі методами варіаційного числення полягає в тому, щоб звести початкову задачу до близької задачі, яка розв'язувалася б простіше.

Нехай система керування описується рівняннями

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x,u,t),\ i=\overline{1,n}. \tag{4.25}$$

На керування задані обмеження:

$$\psi(u)=\psi(u_1,\ldots,u_r)\le 0. \tag{4.26}$$

Кінці траєкторії закріплені: $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$; час t_1-t_0 – не фіксований.

Треба знайти керування, на якому досягається мінімум функціонала:

$$Q=\int_{t_0}^{t_1}G(x,u,t)dt. \tag{4.27}$$

Одним із підходів до розв'язання такої задачі є накладення "штрафу" у випадку, коли керування виходять із заданої області. Уведемо так звану функцію штрафу:

$$L(u)=\begin{cases}0, & \psi(u)\le 0\\ K\psi^2(u), \psi(u)>0, & K-const>>0.\end{cases}$$

Тоді задачу знаходження керування можна звести до задачі знаходження мінімуму функціонала

$$Q'=\int_{t_0}^{t_1}[G(x,u,t)+L(u)]dt. \qquad (4.28)$$

Отже, початкова задача зведена до задачі на безумовний екстремум функціонала (4.28). Розв'язок цієї задачі може бути знайдений відомими варіаційними методами.

4.5. КАНОНІЧНА ФОРМА РІВНЯНЬ ЕЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА

Отримаємо рівняння Ейлера-Лагранжа $G_x-\frac{d}{dt}G_{\dot{x}}=0$ у канонічній формі для функціонала $Q=\int_{t_0}^{t_1}G(x,\dot{x},t)dt$ Не обмежуючи загальності викладення матеріалу, будемо розглядати випадок, коли $x(t)$ – скалярна функція.

Введемо нові змінні p і H :

$$p=G_{\dot{x}}=\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}, \qquad (4.29)$$

$$H=-G+\dot{x}G_{\dot{x}}=-G+\dot{x}p. \qquad (4.30)$$

Продиференціювавши рівність (4.30) по всім змінним, отримаємо:

$$\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{\partial G}{\partial x}, \qquad (4.31)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}=-\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}+p, \qquad (4.32)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\dot{x}=\frac{dx}{dt}. \qquad (4.33)$$

Покажемо, що функція H не залежить від $\dot{x}$. Дійсно, з урахуванням рівності (4.32) та вигляду змінної p (4.29), маємо: $\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial G}{\partial \dot{x}} + p \equiv 0$. Таким чином, H є функцією змінних x, p, t: $H = H(x, p, t)$.

Враховуючи це, маємо систему

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{dp}{dt} \\ \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dx}{dt} \end{cases}. \qquad (4.34)$$

Ця система називається гамільтоновою або канонічною формою рівняння Ейлера-Лагранжа.

У випадку, коли $x(t)$ n-мірна функція, зведення рівняння Ейлера-Лагранжа до канонічної форми проводиться аналогічно [4].

Теорема 4.9. Функція $H = H(x, p, t)$ досягає екстремуму по $x(t)$ за тих самих умов, що й функціонал Q, тобто з рівнянь Ейлера-Лагранжа випливають умови екстремуму функції $H = H(x, p, t)$.

Наведена канонічна форма рівнянь Ейлера-Лагранжа (4.34) важлива як при розв'язуванні задач варіаційного числення, так і при розв'язуванні задач теорії керування.

РОЗДІЛ 5

5.1. МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Розглянемо задачу оптимального керування: знайти керування та траєкторії, на яких функціонал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt + \Phi(x(t_1)) \tag{5.1}$$

досягає свого екстремального (мінімального) значення для системи

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t), \tag{5.2}$$

де

$$x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))^T \in \Omega_t(X) \subseteq X, \tag{5.3}$$

$$u(t) = (u_1(t),\ldots,u_r(t))^T \in \Omega_t(U) \subseteq U. \tag{5.4}$$

Тут X – фазовий простір, U – простір керувань, $t \in [t_0, t_1]$.

У задачі (5.1) – (5.4) моменти часу t_0, t_1 у загальному випадку вважаються невідомими й підлягають визначенню. Ці моменти після їх визначення будемо позначати через t_0^0, t_1^0.

Метод динамічного програмування є наслідком принципу оптимальності, який був сформульований Р.Белманом [2]. Принцип оптимальності справедливий для досить широкого класу задач оптимального керування, але не для всіх. Для задачі (5.1) – (5.4) принцип оптимальності може бути сформульований таким чином: якщо деяка траєкторія AC керованої системи (5.2) є оптимальною траєкторією задачі (5.1) – (5.4), то траєкторія BC також буде оптимальною при будь-якому виборі точки B на оптимальній траєкторії AC.

Наведемо інше формулювання принципу оптимальності. Нехай $u^0(t), x^0(t),\ t_0 \le t \le t_1$ – розв'язок задачі (5.1) – (5.4), де $u^0(t)$ – оптимальне керування, $x^0(t)$ – оптимальна траєкторія, і нехай t' – довільний фіксований момент часу, $t' \in [t_0, t_1]$. Тоді розв'язок задачі (5.1) – (5.4) для $t \ge t'$ визначається фіксованим значенням $x^0(t')$ і не залежить від $u^0(t), x^0(t)$ для $t < t'$, тобто

$$\inf_{u\in\Omega(U(x^0(t')))}\{\int_{t'}^{t_1} G(x,u,t)dt+\Phi(x(t_1))\}=\int_{t'}^{t_1} G(x^0,u^0,t)dt+\Phi(x^0(t_1)).$$

Для задачі (5.1)–(5.4) принцип оптимальності Белмана доводиться на основі властивості адитивності визначеного інтеграла [4].

Доведення принципу оптимальності можна провести наступним чином. Нехай:

$$Q^0=\inf_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U)\\ x(t)\in\Omega_t(X)\\ t_0^0\le t\le t_1^0}} Q(u)=\int_{t_0^0}^{t_1^0} G(x^0,u^0,t)dt+\Phi(x^0(t_1^0))=$$

$$=\int_{t_0^0}^{t^*} G(x^0,u^0,t)dt+\int_{t^*}^{t_1^0} G(x^0,u^0,t)dt+\Phi(x^0(t_1^0))=Q_1^0+Q_2^0.$$

Тут t^* – довільна точка з $[t_0^0,t_1^0]$.

Розглянемо задачу (5.1)-(5.4) за умови, що:

$$t_0^0=t^*, x(t^*)=x^0(t^*).$$

Розв’язок цієї задачі позначимо через $\tilde{u}(t),\tilde{x}(t),t^*\le t\le t_1^0$.

Припустимо, всупереч принципу оптимальності, що цей розв’язок не співпадає з $u^0(t),x^0(t)$ при $t>t^*$. Тоді

$$\tilde{Q}=\int_{t^*}^{\tilde{t}_1} G(\tilde{x},\tilde{u},t)dt+\Phi(\tilde{x}(\tilde{t}_1))<Q_2^0.$$

Побудуємо допустиме керування для задачі (5.1)-(5.4) у вигляді кусково-неперервної функції

$$u_*(t)=\begin{cases} u^0(t), & t_0^0\le t<t^*,\\ \tilde{u}(t), & t^*\le t<t_1^0.\end{cases}$$

Відповідна цьому керуванню траєкторія буде мати вигляд:

$$x_*(t)=\begin{cases} x^0(t), & t_0^0 \le t < t^*, \\ \tilde{x}(t), & t^* \le t \le t_1^0. \end{cases}$$

Для розв'язку $u_*(t), x_*(t)$ задачі (5.1)-(5.4) будемо мати

$$Q(u_*) = Q_1^0 + \tilde{Q} < Q_1^0 + Q_2^0 = Q^0.$$

Остання нерівність вказує на те, що розв'язок $u^0(t), x^0(t)$ не є оптимальним, оскільки $u_*(t)$ дає менше значення функціоналу Q.

Протиріччя доводить справедливість принципу оптимальності.

5.1.1. Рівняння Белмана для неперервних систем в інтегральній формі

Наведемо дискретний аналог задачі оптимального керування (5.1)-(5.4). Розіб'ємо заданий інтервал часу рівномірно точками: $t_0^0 = t_0, t_1, t_2, \ldots t_k, \ldots, t_1^0 = t_N$.

Позначимо підінтервали часу через $\Delta t_k = \Delta t = t_{k+1} - t_k$, стан системи в моменти часу t_k через $x(t_k) = x_k, k = \overline{0, N}$, і керування відповідно $u(t_k) = u_k, k = \overline{0, N-1}$.

Тоді дискретний аналог функціоналу (5.1) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} Q = Q(x_0, t_0, \{u_k\}_{k=0}^{k=N-1}) &= \sum_{k=0}^{N-1} G(x_k, u_k, t_k)\Delta t_k + \Phi(x_N) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} F_0(x_k, u_k, t_k) + \Phi(x_N) \longrightarrow \inf \end{aligned} \tag{5.5}$$

Дискретний аналог для системи (5.2) отримаємо наступним чином:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t_k} = f(x_k, u_k, t_k), \text{ звідки}$$

$$x_{k+1} - x_k = f(x_k, u_k, t_k)\Delta t_k = F(x_k, u_k, t_k),\ k = \overline{0, N-1}, \tag{5.6}$$

Множини (5.3), (5.4) у випадку дискретного часу будуть мати вигляд, відповідно:

$$x_k \in \Omega_k(X), \ \ k=\overline{0,N} \ , \tag{5.7}$$

$$u_k \in \Omega_k(U), \ \ k=\overline{0,N-1} \ . \tag{5.8}$$

Для постановки задачі оптимального керування дискретною системою (5.6) припускається, що множини (5.7), (5.8) непорожні та обмежені. Задача оптимального керування (5.5) – (5.8) має сенс лише в тому випадку, коли з точок множини $\Omega_0(X)$ можна перейти в точки множини $\Omega_N(X)$ через точки множин $\Omega_k(X)$, $k=\overline{1,N-1}$.

Означення 5.1. Множина $\Omega_N(X)$ називається **досяжною** з точок $x_k \in \Omega_k(X)$, $k=\overline{0,N-1}$, якщо існують такі допустимі керування $\{u_j\}, j=\overline{k,N-1}$, що відповідна їм згідно з рівнянням (5.6) траєкторія $\{x_j\}, j=\overline{k,N}$ з початковою точкою x_k з'єднує цю точку з деякою точкою множини $\Omega_N(X)$.

Якщо множина початкових значень $\Omega_0(X)$ складається не з одного елементу, то задача (5.5) – (5.8) розбивається на дві задачі:

а) знаходження допустимих керувань, які доставляють мінімум функціонала (5.5) при фіксованому значенні $x_0 \in \Omega_0(X)$, тобто

$$\min_{\{u_k\}_{k=0}^{k=N-1}} Q(x_0,t_0,\{u_k\}_{k=0}^{k=N-1}) = Q(x_0,t_0);$$

б) знаходження мінімуму $Q(x_0,t_0)$ як функції змінної x_0 на множині $\Omega_0(X)$, тобто

$$Q^0 = \min_{x_0 \in \Omega_0(X)} Q(x_0,t_0) = Q^0(t_0).$$

Для фіксованого моменту часу t_k, $k=\overline{0,N-1}$ введемо деяку функцію $S_k(x_k,t_k)$, яку будемо називати **функцією Белмана**, у вигляді:

$$S_k(x_k,t_k) = \min_{\{u_j\}_{j=k}^{j=N-1}} \{\sum_{j=k}^{N-1} F_0(x_j,u_j,t_j) + \Phi(x_N)\} =$$

$$= \sum_{j=k}^{N-1} F_0(x_j, u_j^0(x_k), t_j) + \Phi(x_N) \ , \qquad (5.9)$$

де $u_j^0(x_k)$, $k = \overline{j, N-1}$, – послідовність керувань, що відповідає оптимальному руху системи (5.6) з деякої точки $x_k \in \Omega_k(X)$, узятої в момент t_k, у точки множини $\Omega_N(X)$.

Виокремо у формулі (5.9) перший член. Маємо

$$S_k(x_k, t_k) = F_0(x_k, u_k^0(x_k), t_k) + \sum_{j=k+1}^{N-1} F_0(x_j, u_j^0(x_k), t_j) + \Phi(x_N) \ .$$

Далі візьмемо $j = k+1$ і для керувань $u_k^0(x_k)$, під дією яких система (5.6) переходить у точку x_{k+1}: $x_{k+1} = F_0(x_k, u_k^0(x_k), t_k)$, розглянемо функцію Белмана

$$S_{k+1}(x_{k+1}, t_{k+1}) = \min_{\{u_k\}_{j=k+1}^{j=N-1}} \{ \sum_{j=k+1}^{N-1} F_0(x_j, u_j, t_j) + \Phi(x_N) \} =$$

$$= \sum_{j=k+1}^{N-1} F_0(x_j, u_j^0(x_{k+1}), t_j) + \Phi(x_N), \qquad (5.10)$$

де $u_j^0(x_{k+1})$, $j = \overline{k+1, N-1}$ – послідовність керувань, які відповідають оптимальному руху системи (5.6) із вказаної точки $x_{k+1} \in \Omega_{k+1}(X)$ у точки множини $\Omega_N(X)$.

З принципу оптимальності Белмана випливає, що розв’язок задачі (5.5)-(5.8) на проміжку $[t_k, t_N]$ збігається з розв’язком відповідної задачі на $[t_{k+1}, t_N]$, якщо перехід від x_k до x_{k+1} здійснено згідно з оптимальним керуванням $u_k^0(x_k)$ для системи керування (5.6). Звідси будуть збігатися керування:

$$u_k^0(x_k) = u_j^0(x_{k+1}) \ , \ \ j = \overline{k+1, N-1} \ .$$

Отже, враховуючи це та формулу (5.10), вираз для функції $S_k(x_k, t_k)$ можна записати у вигляді:

$$S_k(x_k, t_k) = F_0(x_k, u_k^0(x_k), t_k) + S_{k+1}(x_{k+1}, t_{k+1}) \ .$$

Оскільки $x_{k+1} = F_0(x_k, u_k^0(x_k), t_k)$, остаточно отримаємо:

$$S_k(x_k,t_k)=\min_{u_k\in\Omega_k(U)}\{F_0(x_k,u_k,t_k)+S_{k+1}(F(x_k,u_k,t_k),t_{k+1})\} \quad (5.11)$$

для всіх $k=\overline{0,N-1}$.

При цьому $S_N(x_N,t_N)=\Phi(x_N)$.

Рівняння (5.11) називається **різницевим рівнянням Белмана.**

Отримане рівняння Белмана лежить в основі **методу динамічного програмування.**

5.2. АЛГОРИТМ МЕТОДУ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Алгоритм методу динамічного програмування розв'язування задачі вигляду (5.5) – (5.8) для дискретних систем керування складається з двох частин: знаходження керувань як функцій від станів системи (прямий хід) та обчислення оптимальних керувань і оптимальної траєкторії (зворотний хід).

<u>А: Прямий хід.</u>

Крок 1. Покладемо в рівнянні Белмана (5.11) $k=N-1$ і розв'яжемо задачу

$$S_{N-1}(x_{N-1},t_{N-1})=$$
$$=\min_{u_{N-1}\in\Omega_{N-1}(U)}\{F_0(x_{N-1},u_{N-1},t_{N-1})+\Phi(F(x_{N-1},u_{N-1},t_{N-1}))\}$$

для всіх точок множини $\Omega_{N-1}(X)$, з яких досяжна множина $\Omega_N(X)$, тобто для точок $x_N=F(x_{N-1},u_{N-1}(x_{N-1}),t_{N-1})\in\Omega_N(X)$.

Знаходимо $u^0_{N-1}(x_{N-1})$ як функцію точок $x_{N-1}\in\Omega_{N-1}(X)$.

Крок 2. Для $k=N-2$ розв'яжемо задачу

$$S_{N-2}(x_{N-2},t_{N-2})=$$
$$=\min_{u_{N-2}\in\Omega_{N-2}(U)}\{F_0(x_{N-2},u_{N-2},t_{N-2})+S_{N-1}(x_{N-1},t_{N-1})\}=$$
$$=\min_{u_{N-2}\in\Omega_{N-2}(U)}\{F_0(x_{N-2},u_{N-2},t_{N-2})+$$
$$+S_{N-1}(F(x_{N-2},u_{N-2},t_{N-2}),t_{N-1})\}$$

для всіх $x_{N-2}\in\Omega_{N-2}(X)$, з яких досяжна множина $\Omega_N(X)$.

Звідси знаходимо $u^0_{N-2}(x_{N-2})$ для $x_{N-2}\in\Omega_{N-2}(X)$.

Продовжуємо далі процес, поки не дійдемо до $k=0$.

Крок N. Для $k=0$ розв'яжемо задачу

$$S_0(x_0,t_0)=\min_{u_0\in\Omega_0(U)}\{F_0(x_0,u_0,t_0)+S_1(F(x_0,u_0,t_0),t_1)\}$$

для всіх $x_0\in\Omega_0(X)$, з яких досяжна множина $\Omega_N(X)$.

Одержимо $u_0^0(x_0), x_0\in\Omega_0(X)$.

<u>В: Зворотній хід.</u>

Якщо множина $\Omega_0(X)$ складається більш ніж з одного елементу, то потрібно розв'язати задачу:

$$\min_{x_0\in\Omega_0(X)} S_0(x_0,t_0)=S_0(x_0^0,t_0)=Q^0(t_0).$$

Знайшовши x_0^0, отримаємо оптимальне керування $u_0^0(x_0^0)=u_0^0$ у момент часу $t=t_0$.

Крок 1. Підставимо знайдені оптимальні x_0^0, $u_0^0(x_0^0)$ у рівняння (5.6):

$$x_1^0=F(x_0^0,u_0^0,t_0).$$

Знайшли x_1^0 у момент $t=t_1$. Підставляючи значення x_1^0 у функцію $u_1^0(x_1^0)$, отриману на прямому ході алгоритму, знаходимо оптимальне керування $u_1^0(x_1^0)=u_1^0$.

Продовжуємо цей процес.

$\vdots$

Крок N. Аналогічно знаходимо керування $u_{N-1}^0(x_{N-1}^0)=u_{N-1}^0$ і точку $x_N^0=F(x_{N-1}^0,u_{N-1}^0,t_{N-1})$.

Таким чином, знайшли $\{u_j^0\}, j=\overline{0,N-1}, \{x_j^0\}, j=\overline{0,N}$ – оптимальне керування та оптимальну траєкторію для задачі (5.5)-(5.8).

Зауваження 5.1. До переваг методу динамічного програмування можна віднести зведення початкової задачі великої розмірності до послідовного розв'язання однотипних задач меншої розмірності. Таким чином, замість одночасного знаходження всіх $N\cdot r$ невідомих керувань для задачі оптимального керування (5.5)-(5.8) послідовно розв’язуємо N задач умовної мінімізації по $u_k, k = \overline{0, N-1}$ і кожна з цих задач має r невідомих.

Зауваження 5.2. Метод динамічного програмування завжди дає розв'язок задачі синтезу оптимального керування, яка полягає у знаходженні оптимального керування як функції фазових координат системи. Зокрема, для дискретних систем синтезуючі керування отримуємо на прямому ході алгоритму.

5.3. РІВНЯННЯ БЕЛМАНА ДЛЯ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

5.3.1. Рівняння Белмана для неперервних систем в інтегральній формі

Розглянемо задачу оптимального керування з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторій. Потрібно знайти мінімум функціонала

$$Q = Q(u) = \int_{t_0}^{t_1} G(x,u,t)dt + \Phi(x(t_1)) \tag{5.12}$$

для системи

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t) \tag{5.13}$$

з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ і з обмеженнями на керування

$$u = u(t) \in \Omega_t(U) \tag{5.14}$$

та на траєкторії

$$x = x(t) \in \Omega_t(X)\,, \tag{5.15}$$

для всіх $t_0 \le t \le t_1$.

Вважаємо, що моменти часу t_0, t_1 фіксовані, функції $G(x,u,t), \Phi(x(t))$, вектор-функції $f(x,u,t)$ – неперервні за змінними x,u і кусково-неперервні за t на проміжку $[t_0, t_1]$. Крім того, для функції $f(x,u,t)$ виконуються умови Ліпшиця за змінною керування, тобто для довільних w,v з множини (5.14):

$$\left| f(x,w,t) - f(x,v,t) \right| \le \alpha \left| w - v \right|,$$

де $\alpha > 0$ – деяка стала величина.

Припускаємо, що $u(t)$ – кусково-неперервна функція змінної t на проміжку $[t_0, t_1]$.

Візьмемо для довільного фіксованого $t \in [t_0, t_1]$ деяку точку $x = x(t) \in \Omega_t(X)$. Для цих t і $x(t)$, які візьмемо за t_0 та $x(t_0)$ відповідно, розглянемо задачу (5.12)-(5.15). Розв'язок цієї задачі запишемо як $u^0(\tau, x)$, $x^0(\tau)$, $t_0 \le \tau \le t_1$. Мінімум відповідного функціонала для даного розв'язку позначимо через $S(x,t)$.

$$S(x,t) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t\le\tau\le t_1 \\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \{\int_t^{t_1} G(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \Phi(x(t_1))\} =$$

$$= \int_t^{t_1} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + \Phi(x^0(t_1)).$$

Візьмемо на інтервалі $[t, t_1]$ довільний момент часу $t + \Delta t$ і точку $x(t+\Delta t) \in \Omega_{t+\Delta t}(X)$. Розглянемо задачу (5.12)-(5.15) для цих $t + \Delta t$, $x(t+\Delta t)$, які візьмемо за t_0 та $x(t_0)$ відповідно. Відзначимо, що ця задача відрізняється від попередньої лише початковими даними.

Мінімум відповідного функціонала позначимо через $S(x(t+\Delta t), t+\Delta t)$.

$$S(x(t+\Delta t), t+\Delta t) =$$

$$= \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t+\Delta t\le\tau\le t_1 \\ x(t+\Delta t)\in\Omega_{t+\Delta t}(X)}} \{\int_{t+\Delta t}^{t_1} G(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \Phi(x(t_1))\} =$$

$$= \int_{t+\Delta t}^{t_1} G(\tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau, x(t+\Delta t), \tau) d\tau + \Phi(\tilde{x}(t_1)),$$

де $\tilde{u}(\tau, x(t+\Delta t))$, $\tilde{x}(\tau)$ – розв'язок задачі (5.12)-(5.15) на проміжку $[t+\Delta t, t_1]$.

Виберемо за $x(t+\Delta t)$ той стан системи (5.13), в який вона потрапляє в момент $t + \Delta t$, рухаючись із точки $x(t)$ по оптимальній траєкторії $x^0(\tau)$, тобто за стан $x(t+\Delta t)$ візьмемо стан $x^0(t+\Delta t)$. Тоді, згідно з принципом оптимальності, розв'язки наведених вище двох задач збігаються на проміжку $t+\Delta t \le \tau \le t \le t_1$. Тому

$$S(x(t+\Delta t), t+\Delta t) = \int_{t+\Delta t}^{t_1} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + \Phi(x^0(t_1)).$$

Повернемося до значення функціонала $S(x,t)$. Використовуючи властивість адитивності інтеграла можемо записати

$$S(x,t) = \int_{t}^{t+\Delta t} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau +$$

$$+ \int_{t+\Delta t}^{t_1} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + \Phi(x^0(t_1)).$$

Звідси

$$S(x,t) = \int_{t}^{t+\Delta t} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + S(x^0(t+\Delta t), t+\Delta t),$$

де траєкторія $x^0(t+\Delta t)$ системи (5.13) отримана під дією керування $u^0(\tau)$.

Отже,

$$S(x,t) = \int_{t}^{t+\Delta t} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + S(x^0(t+\Delta t, u^0(\tau)), t+\Delta t).$$

Ця рівність виконується лише для оптимального керування $u^0(\tau)$. Якщо брати інші керування з множини допустимих керувань згідно з (5.14), то права частина останньої рівності може тільки збільшитись.

Отже, отримаємо **рівняння Белмана в інтегральній формі**

$$* \qquad S(x,t) =$$

$$= \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t\le\tau\le t+\Delta t\le t_1 \\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \left\{ \int_{t}^{t+\Delta t} G(x(\tau), u(\tau, x), \tau) d\tau + S(x(t+\Delta t, u(\tau, x)), t+\Delta t) \right\}.$$

Позначимо це рівняння через $*$.

Розглянемо задачу із закріпленими кінцями траєкторій та вільним часом для автономної системи й запишемо рівняння Белмана. Потрібно знайти керування й траєкторії, на яких функціонал

$$Q = Q(u) = \int_{t_0}^{t_1} G(x,u)dt + \Phi(x(t_1)) \tag{5.16}$$

досягає свого мінімального значення для системи

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{5.17}$$

із закріпленими кінцями $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$, та обмеженнями на керування й траєкторію

$$u = u(t) \in \Omega_t(U),\ x = x(t) \in \Omega_t(X),\ t \in [t_0, t_1]. \tag{5.18}$$

Зауважимо, що, оскільки моменти часу не фіксовані, то мінімум функціонала (5.16) буде функцією лише початкового стану x_0.

Позначимо це значення через $S(x_0)$:

$$S(x_0) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t_0 \le \tau \le t_1 \\ x = x(t)\in\Omega_t(X)}} \{\int_{t_0}^{t_1} G(x,u)d\tau + \mathit{\Phi}(x(t_1))\}.$$

Аналогічно попередній задачі отримаємо

$$S(x_0) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t_0 \le \tau \le t_0+\Delta t \\ x = x(t)\in\Omega_t(X)}} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} G(x,u)d\tau + $$

$$+ \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t_0+\Delta t \le \tau \le t_1 \\ x = x(t)\in\Omega_t(X)}} \{ \int_{t_0+\Delta t}^{t_1} G(x,u)d\tau + \mathit{\Phi}(x(t_1))\}.$$

З принципу оптимальності маємо

$$S(x_0) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t_0 \le \tau \le t_0+\Delta t \\ x = x(t)\in\Omega_t(X)}} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} G(x,u)d\tau + S(x(t_0 + \Delta t, u(\tau))) \right\}.$$

Оскільки це можна застосувати до довільної точки x фазової траєкторії, то отримаємо **рівняння Белмана в інтегральній формі** для задачі з вільним часом для автономної системи (яке позначимо через **)

$$** \qquad S(x) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U)\\ t_0\le t\le\tau\le t+\Delta t\le t_1\\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} G(x,u)d\tau + S(x(t+\Delta t, u(\tau))) \right\}.$$

Розглянемо задачу швидкодії для автономної системи. Знайти мінімум функціонала

$$T = t_1 - t_0 \tag{5.19}$$

для системи

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{5.20}$$

із закріпленими кінцями $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ і обмеженнями на керування та траєкторії

$$u = u(t) \in \Omega_t(U),\ x = x(t) \in \Omega_t(X),\ t \in [t_0, t_1]. \tag{5.21}$$

Відзначимо, що за умови $G(x,u) \equiv 1, \varPhi(x) \equiv 0$ у (5.16) ця задача є частковим випадком попередньої задачі (5.16)-(5.18) і функція $S(x)$ буде мати зміст мінімального часу досягнення системою (5.20) точки x_1 з точки x. Позначимо цей мінімальний час через $T(x)$. Тоді з рівняння ** отримаємо **рівняння Белмана в інтегральній формі** для задачі швидкодії для автономної системи (це рівняння позначимо через *****):

$$*** \qquad T(x) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U)\\ t_0\le t\le\tau\le t+\Delta t\le t_1\\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \left\{ \Delta t + T(x(t+\Delta t, u(\tau))) \right\}.$$

5.3.2. Рівняння Белмана в диференціальній формі для неперервних систем

Для задач (5.12)-(5.15), (5.16)-(5.18), (5.19)-(5.21) запишемо рівняння Белмана в диференціальній формі. Для цього скористаємося отриманими вище рівняннями Белмана в інтегральній формі. Додатково до наведених у цих задачах умов будемо вважати: керування $u(t)$ неперервні за t, для задачі (5.12)-(5.15) функція $S(x,t)$ має неперервні частинні похідні

$\dfrac{\partial S(x,t)}{\partial x} = grad_x^T S(x,t) = (\dfrac{\partial S(x,t)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial S(x,t)}{\partial x_n})$, $\dfrac{\partial S(x,t)}{\partial t}$ **;** для задачі (5.16)-(5.18) функція $S(x)$ має неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial S(x)}{\partial x} = grad_x^T S(x) = (\dfrac{\partial S(x)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial S(x)}{\partial x_n})$; для задачі (5.19)-(5.21) функція $T(x)$ має неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial T(x)}{\partial x} = grad_x^T T(x) = (\dfrac{\partial T(x)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial T(x)}{\partial x_n})$.

За цих припущень, розклавши рівняння Белмана в інтегральній формі ***,**,***** в ряди Тейлора й знехтувавши членами другого порядку й вище, можна записати ці рівняння у вигляді:

для задачі з фіксованим часом і вільним правим кінцем

$$S(x,t) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t_0 \le t \le \tau \le t+\Delta t \le t_1 \\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \{G(x(\tau),u(\tau),\tau)\Delta t + S(x,t) +$$

$$+\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\Delta t + grad_x^T S(x,t)(x(t+\Delta t,u(\tau)) - x) + o(\Delta t)\};$$

для задачі із закріпленими кінцями і вільним часом

$$S(x) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t_0 \le t \le \tau \le t+\Delta t \le t_1 \\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \{G(x(\tau),u(\tau))\Delta t + S(x) +$$

$$+ grad_x^T S(x)(x(t+\Delta t,u(\tau)) - x) + o(\Delta t)\};$$

для задачі швидкодії

$$T(x) = \min_{\substack{u(\tau)\in\Omega_\tau(U) \\ t_0 \le t \le \tau \le t+\Delta t \le t_1 \\ x=x(t)\in\Omega_t(X)}} \{\Delta t + T(x) + \quad .$$

$$+ grad_x^T Tx)(x(t+\Delta t,u(\tau)) - x) + o(\Delta t)\}.$$

Тут τ – деяке фіксоване значення, $o(\Delta t)$ – нескінченно мала більш високого порядку малості, ніж Δt. Зауважимо, що величини $S(x,t)$,

$S(x)$, $T(x)$ зліва і справа взаємно знищуються. При переході до границі при $\Delta t \to 0$ матимемо:

$$\tau \to t, u(\tau) \to u(t), x(\tau) \to x(t), x(t+\Delta t, u(\tau)) \to x(t),$$

$$\frac{x(t+\Delta t, u(\tau)) - x(t)}{\Delta t} \to \dot{x}(t).$$

Отже, одержимо рівняння:

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \min_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U) \\ t_0 \le t \le t_1}} \{G(x,u,t) + \operatorname{grad}_x^T S(x,t)\dot{x}(t)\},$$

$$\min_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U) \\ t_0 \le t \le t_1}} \{G(x,u) + \operatorname{grad}_x^T S(x)\dot{x}(t)\} = 0,$$

$$\min_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U) \\ t_0 \le t \le t_1}} \{\operatorname{grad}_x^T T(x)\dot{x}(t)\} = -1.$$

Ці рівняння мають виконуватись у кожній точці оптимальної траєкторії систем $\dot{x} = f(x,u,t)$ або $\dot{x} = f(x,u)$.

В результаті **рівняння Белмана в диференціальній формі** приймуть вигляд (позначимо їх символами **+** відповідно до *****):

+

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \min_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U) \\ t_0 \le t \le t_1}} \{G(x,u,t) + \operatorname{grad}_x^T S(x,t)\dot{x}(t)\},$$

$$S(x,t_1) = \Phi(x(t_1)).$$

++

$$\min_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U) \\ t_0 \le t \le t_1}} \{G(x,u) + \operatorname{grad}_x^T S(x)\dot{x}(t)\} = 0,$$

$$S(x_1) = \Phi(x_1).$$

+++ $$\min_{\substack{u(t)\in\Omega_t(U)\\ t_0\le t\le t_1}} \{\mathrm{grad}_x^T T(x)\dot{x}(t)\} = -1,$$

$$T(x_1) = 0.$$

Початкові умови, які записані для кожного з рівнянь Белмана, випливають із вигляду функцій $S(x,t)$, $S(x)$, $T(x)$ відповідно.

Зауваження 5.3. Рівняння Белмана для дискретних і неперервних систем є необхідними й достатніми умовами оптимальності [4, 16], що дає повне обґрунтування методу динамічного програмування.

Зауваження 5.4. Для неперервних систем, що описуються диференціальними рівняннями, застосування відповідних рівнянь Белмана, які є нелінійними рівняннями в частинних похідних, вимагає додаткових досліджень [16].

5.4. МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Нехай об’єкт керування описується рівняннями:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \tag{5.22}$$

де $x(t) = (x_1,\ldots,x_n)^T$ – вектор стану системи, $A(t)$ – $n\times n$ матриця, $u(t) = (u_1,\ldots,u_r)^T$ – вектор керувань, $B(t)$ $B(t)$ – матриця розмірності $n\times r$, $t\in[t_0,t_1]$.

Початковий стан заданий $x(t_0) = x_0$, час t_1 – фіксований, стан $x(t_1)$ – вільний.

Задача полягає в тому, щоб для системи (5.22) знайти керування й траєкторію, на яких функціонал

$$Q(x,u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u)dt + \frac{1}{2}x^T(t_1)Fx(t_1) \tag{5.23}$$

досягає свого мінімального значення.

Тут $Q(t), R(t), F$ – симетричні додатно-визначені матриці.

Задача оптимального керування лінійною системою (5.22) з мінімізацією квадратичного функціонала (5.23) у теорії керування називається задачею **аналітичного конструювання оптимального регулятора** для лінійної системи.

Розв'яжемо цю задачу за допомогою рівняння Белмана в диференціальній формі, яке для даної задачі набуває вигляду:

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} =$$

$$= \min_{u(t)}\{\frac{1}{2}x^T Q(t)x + \frac{1}{2}u^T R(t)u + \mathrm{grad}_x^T S(x,t)(A(t)x + B(t)u)\},$$

де $grad_x^T S(x,t) = \frac{\partial S^T(x,t)}{\partial x} = (\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_n})$.

Знайдемо керування з необхідної умови екстремуму:

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial u} = R(t)u + B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} = 0,$$

$$R(t)u = -B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}.$$

Звідси $u^0 = -R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}.$

Підставимо це керування в рівняння Белмана для $S(x,t)$. Маємо

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}x^T Q(t)x +$$

$$+\frac{1}{2}(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x})^T B(t)R^{-1}(t)R(t)R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} +$$

$$+(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x})^T(A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x})\},$$

Звідки

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}x^T Q(t)x-$$
$$-\frac{1}{2}(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x})^T B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}+$$
$$+(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x})^T A(t)x,$$
$$S(x,t_1)=\frac{1}{2}x^T(t_1)Fx(t_1).$$

Розв'язок цього рівняння – функцію $S(x,t)$ – будемо шукати у вигляді квадратичної форми $S(x,t)=\frac{1}{2}x^T P(t)x$, де $P(t)$ – симетрична матриця, що підлягає визначенню. Знайдемо похідні за часом і за станами цієї функції. Маємо $\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}=P(t)x, \frac{\partial S(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}x^T\frac{dP(t)}{dt}x.$

Підставимо ці вирази в рівняння й отримаємо:

$$-\frac{1}{2}x^T\frac{dP(t)}{dt}x=\frac{1}{2}x^T Q(t)x-\frac{1}{2}x^T P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x+$$
$$+x^T P(t)A(t)x.$$

Це буде виконуватися для довільних значень x тоді й тільки тоді, коли матриця $P(t)$ задовольняє рівняння

$$-\frac{1}{2}\frac{dP(t)}{dt}=\frac{1}{2}Q(t)-\frac{1}{2}P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)+P(t)A(t).$$

Скористаємось тим, що для матриць справедливо: $CD=\frac{1}{2}CD+\frac{1}{2}C^T D$.

Остаточно отримаємо

$$\frac{dP(t)}{dt} = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) - Q(t) + \tag{5.24}$$
$$+ P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t).$$

$$P(t_1) = F. \tag{5.25}$$

Диференціальні рівняння (5.24) називаються **матричним рівняннямРіккаті**.

Таким чином, матрична функція $P(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ є розв'язком задачі Коші (5.24), (5.25) із зворотним напрямком зміни аргументу t.

Розв’язавши цю задачу Коші, знайдемо $P(t)$, а значить і функцію $S(x,t)$. Тоді оптимальне керування

$$u^0 = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x$$

і система керування прийме вигляд

$$\frac{dx}{dt} = \left[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)\right]x.$$

Разом з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ маємо задачу Коші розв’язавши яку отримаємо оптимальну траєкторію.

Таким чином, використовуючи метод динамічного програмування, для лінійної нестаціонарної системи (5.22) знайшли оптимальне керування і оптимальну траєкторію на яких функціонал (5.23) досягає свого мінімального значення.

РОЗДІЛ 6

6.1. ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА ДЛЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ІЗ ЗАКРІПЛЕНИМИ КІНЦЯМИ ТРАЄКТОРІЙ ТА ФІКСОВАНИМИ ПОЧАТКОВИМ І КІНЦЕВИМ МОМЕНТАМИ ЧАСУ

Розглянемо задачу оптимального керування із закріпленими кінцями траєкторій та фіксованим часом (відповідні термінологія та позначення введені у п. 1.3).

Треба мінімізувати функціонал

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),u(t),t)dt \to \inf \tag{6.1}$$

для системи

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), \quad t_0 \le t \le t_1 \tag{6.2}$$

за умов

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \tag{6.3}$$

$$u(t) \in V, t_0 \le t \le t_1, \tag{6.4}$$

де $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))^T$ – фазові координати, $u(t) = (u_1(t),\ldots,u_r(t))^T$ – керування, що вважаються кусково-неперервними функціями на $[t_0,t_1]$, моменти часу t_0,t_1 і точки x_0,x_1 – задані, множина $V \subseteq E^r$ (E^r - Евклідів r-вимірний простір) не залежить від часу, фазові обмеження для $t \in [t_0,t_1]$ відсутні, $f(x(t),u(t),t) = (f^1(x(t),u(t),t),\ldots,f^n(x(t),u(t),t))^T$.

Відзначимо, що керування у точках розриву не впливають на розв'язок рівняння (6.2) (згідно з означенням 1.1.) і на значення інтеграла (6.1), а значить, і на задачу (6.1)-(6.4). Тому в точках розриву керування можна довизначити довільно, аби не порушувалось обмеження $u(t) \in V$, $t_0 \le t \le t_1$.

Для формальної постановки задачі введемо деякі позначення та будемо вважати виконаними певні припущення. Залежність від t та інших аргументів у формулах, де це не викликатиме непорозумінь, будемо опускати. Вважаємо, що $u(t) = u(t+0) = \lim\limits_{t \to t+0} u(t)$ при

$t_0 \le t \le t_1$ та $u(t_1) = u(t_1 - 0)$.

Припустимо, що функції $f^j(x(t),u(t),t)$, $j = \overline{0,n}$ мають частинні похідні (для спрощення записів аргументи функцій будемо опускати в тих випадках, які не викликають непорозумінь):

$$\frac{\partial f^j(x(t),u(t),t)}{\partial x_i} = \frac{\partial f^j}{\partial x_i} = f^j_{x_i},\ i = \overline{1,n}.$$

Аналогічно позначимо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \cdots & f^1_{x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ f^n_{x_1} & \cdots & f^n_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1_x \\ \vdots \\ f^n_x \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial f^0}{\partial x} = f^0_x = (f^0_{x_1}, \quad \ldots, \quad f^0_{x_n})^T. \tag{6.5}$$

Вважаємо: функції $f^j(x(t),u(t),t)$, $j = \overline{0,n}$ та частинні похідні f_x, f^0_x з формул (6.5) – неперервні за сукупністю аргументів $(x,u,t) \in E^n \times E^r \times [t_0,t_1]$.

Далі, уведемо n допоміжних змінних $\psi(t) = (\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t))^T \in E^n$ та сталу ψ_0. Для цих змінних і сталої визначимо функцію:

$$\begin{aligned} &H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0) = \\ &= \psi_0 f^0(x(t),u(t),t) + \psi_1(t) f^1(x(t),u(t),t) + \\ &+ \ldots + \psi_n(t) f^n(x(t),u(t),t) = \\ &= \psi_0 f^0(x(t),u(t),t) + \psi^T(t) f(x(t),u(t),t). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Функція $H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0)$ називається **функцією Гамільтона – Понтрягіна.**

Нехай $u = u(t)$ – кусково-неперервне керування, що задовольняє умову (6.4), а $x(t) = x(t,u,x_0)$ – розв'язок системи (6.2), що відповідає цьому керуванню $u(t)$, початковій умові x_0 і визначений на всьому відрізку $[t_0,t_1]$.

Парі $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ поставимо у відповідність систему лінійних диференціальних рівнянь відносно змінних $\psi(t) = (\psi_1(t), ..., \psi_n(t))^T$:

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)}{\partial x_i}\Bigg|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t)}} =$$

$$= -\sum_{j=0}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial f^j(x(t), u(t), t)}{\partial x_i}\Bigg|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t)}}, i = \overline{1, n}, \tag{6.7}$$

де $\psi_0(t) = \psi_0$ – стала величина.

Систему лінійних диференціальних рівнянь (6.7) називають **спряженою системою**, що відповідає парі $(u(t), x(t, u, x_0))$, $t_0 \le t \le t_1$.

Запишемо систему (6.7) у векторній формі:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -H_x(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)\Bigg|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t)}} =$$

$$= -\psi_0 f_x^0(x(t), u(t), t) - (f_x(x(t), u(t), t)^T \psi(t),$$

для всіх $t_0 \le t \le t_1$.

Теорема 6.1. (<u>Принцип максимуму</u> – необхідна умова оптимальності. Закріплені кінці траєкторій, початковий і кінцевий моменти часу фіксовані).

Нехай $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ – розв'язок задачі (6.1)-(6.4).

Тоді необхідно існує неперервна вектор-функція $\psi(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ і стала ψ_0 такі, що:

1) $\psi_0 \le 0, |\psi_0| + \|\psi(t)\| \ne 0,\ t_0 \le t \le t_1$; (6.8)

2) $\psi(t)$ є розв'язком спряженої системи (6.7), яка відповідає розв'язку $(u(t), x(t))$;

3) при кожному $t \in [t_0, t_1]$ функція Гамільтона – Понтрягіна $H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ як функція змінної $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ досягає своєї верхньої грані на множині V при $u = u(t)$, тобто:

$$\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)\,. \tag{6.9}$$

Центральне місце в теоремі 6.1 займає умова максимуму. Тому теорему 6.1 і наступні аналогічні теореми прийнято називати <u>принципом максимуму</u>. Умова (6.8) гарантує, що функція не перетвориться на тотожний нуль і робить умову максимуму (6.9) змістовною.

Як користуватися теоремою 6.1 на практиці?

Знаходять функцію $u = u(x, t, \psi, \psi_0)$, що дає $\sup\limits_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$. При цьому змінні x, t, ψ і стала ψ_0 вважаються параметрами.

Відзначимо, що

$$u = u(x, t, \psi, \psi_0) \in V\,. \tag{6.10}$$

Якщо початкова задача (6.1)-(6.4) має розв'язок, то функція (6.10) визначена на непорожній множині, що випливає з умови максимуму (6.9).

Далі складають систему з $2n$ диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, u(x, t, \psi, \psi_0), t) \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -H_x(x, u(x, t, \psi, \psi_0), t, \psi, \psi_0) \end{cases} \tag{6.11}$$

для всіх $t \in [t_0, t_1]$ відносно невідомих функцій $x(t), \psi(t)$.

Загальний розв'язок системи (6.11) містить $2n$ довільних сталих. Для їх визначення треба мати $2n$ умов. У задачі (6.1) – (6.4) ці умови такі:

$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$.

Система (6.11) містить ще один невідомий параметр $\psi_0 \le 0$. Як його визначити? Зауважимо, що функція $H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)$, яка визначається співвідношенням (6.6), лінійна й однорідна відносно змінних $\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n$, тобто $H(x(t), u(t), t, \alpha\psi(t), \alpha\psi_0) = \alpha H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)$ для $\forall \alpha$.

Звідси та з умови

$$H(x(t), u(x, t, \psi(t), \psi_0), t, \psi(t), \psi_0) = \\ = \sup_{u \in V} H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0) \tag{6.12}$$

маємо

$$u(x, t, \alpha\psi(t), \alpha\psi_0) \equiv u(x, t, \psi(t), \psi_0) \tag{6.13}$$

для $\forall \alpha$.

Звідси випливає, що теорема 6.1 визначає $\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n$ лише з точністю до додатного множника, і цим множником можна скористатися на свій розсуд.

На практиці, враховуючи умови теореми 6.1, зокрема, обмеження (6.8), найчастіше покладають

$$|\psi_0|^2 + \|\psi(\bar{t})\|^2 = 1, \psi_0 \le 0, \tag{6.14}$$

де $\bar{t}$ – деякий момент часу, $t_0 \le \bar{t} \le t_1$, наприклад, $\bar{t} = t_0$ або $\bar{t} = t_1$.

У тих задачах, у яких вдається заздалегідь показати, що $\psi_0 < 0$, замість умови нормування (6.14) часто покладають $\psi_0 = -1$.

Тобто для визначення $2n+1$ невідомих параметрів системи (6.11) ($2n$ сталих із загального розв’язку цієї системи плюс параметр ψ_0) маємо $2n+1$ умову (6.3), (6.14). Як правило, можна очікувати, що існують лише окремі ізольовані функції $x(t), \psi(t)$ $t \in [t_0, t_1]$ і значення ψ_0, які задовольняють умови (6.11), (6.3), (6.14).

Крайову задачу, що складається з умови максимуму (6.12), системи диференціальних рівнянь (6.11), крайових умов (6.3) та умови нормування (6.14), називають крайовою задачею принципу максимуму для задачі оптимального керування (6.1) – (6.4).

Нехай вдалося визначити з умов (6.11), (6.3), (6.14) деякі $x(t),\psi(t),\psi_0$, $t_0 \le t \le t_1$. Підставимо їх у (6.10) і отримаємо функцію:

$$u = u(x(t),t,\psi(t),\psi_0) \in V \ , t_0 \le t \le t_1 . \qquad (6.15)$$

Нехай ця функція виявилася кусково-неперервною функцією. З (6.10), (6.12), (6.15) випливає, що отримане керування $u(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ задовольняє умову максимуму (6.9), тобто згідно з теоремою 6.1 може претендувати на роль оптимального керування задачі (6.1)-(6.4), а відповідна до нього траєкторія $x(t) = x(t,u(t),x_0)$, $t_0 \le t \le t_1$ – на роль оптимальної траєкторії цієї задачі. Тобто вони є розв’язком, підозрілим на оптимальний. Чи буде знайдена пара $(u(t),x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ насправді розв’язком задачі (6.1)-(6.4), тобто оптимальним розв’язком, теорема 6.1 не гарантує, оскільки ця теорема дає лише необхідну умову оптимальності. Може бути, що пара $(u(t),x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ задовольняє умови теореми 6.1, але не є розв'язком задачі (6.1)-(6.4).

Утім, якщо з якихось міркувань відомо (зазвичай, з фізичного змісту задачі), що дана задача (6.1)-(6.4) має розв'язок, а з крайової задачі принципу максимуму знайдені $x(t),\psi(t),\psi_0$, $t_0 \le t \le t_1$ однозначно, то знайдене керування (6.15) і буде оптимальним. Якщо ж інформації про існування розв’язку задачі (6.1)-(6.4) наперед немає, або крайовій задачі принципу максимуму задовольняє кілька знайдених керувань, підозрілих на оптимальне, то для з’ясування питання про їх оптимальність потрібні додаткові й часом досить складні дослідження.

Отже, схема використання принципу максимуму описана.

6.2. ФОРМУЛЮВАННЯ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА ДЛЯ ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ АБО РУХОМИМИ КІНЦЯМИ ТРАЄКТОРІЙ ТА ФІКСОВАНИМ ЧАСОМ

Розглянемо задачу оптимального керування з більш загальними умовами на кінцях траєкторій; початковий і кінцевий моменти часу, як і раніше, фіксовані:

$$J(x_0,u(t))=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),u(t),t)dt+\Phi(x(t_1)) \to \inf , \qquad (6.16)$$

$$\dot{x}(t)= f(x(t),u(t),t), \;\; t_0 \le t \le t_1 , \qquad (6.17)$$

$$x(t_0) \in S_0, x(t_1) \in S_I , \qquad (6.18)$$

$$u(t) \in V , \; t_0 \le t \le t_1 , \qquad (6.19)$$

де керування $u(t)$ – кусково-неперервні на $t \in [t_0,t_1]$, $u(t)=u(t+0)$ при $t_0 \le t \le t_1$, а при $t=t_1$: $u(t_1)=u(t_1-0)$; початковий і кінцевий моменти часу t_0,t_1 – фіксовані; $f(x(t),u(t),t)=(f^1(x(t),u(t),t),\ldots, f^n(x(t),u(t),t))^T$.

Вважаємо, що правий кінець траєкторій або вільний: $S_I \equiv E^n$, або рухомий:

$$S_I =\{x \in E^n : g_j(x)=0, \, j=\overline{1,s_I}\}, \qquad (6.20)$$

чи

$$S_I =\{x \in E^n : g_j(x) \le 0, \, j=\overline{1,m_I}, g_j(x)=0, \, j=\overline{m_I+1,s_I}\}, \; (6.21)$$

Зокрема, якщо в умові (6.20) покладемо: $g_j(x)=x_j-x_{jI}$ і $s_I=n$, то отримаємо випадок закріпленого правого кінця: $x(t_1)=x_I$.

Аналогічно для лівого кінця. Вважаємо, що лівий кінець траєкторій або вільний: $S_0 \equiv E^n$, або рухомий:

$$S_I =\{x \in E^n : h_j(x)=0, \, j=\overline{1,s_0}\}, \qquad (6.22)$$

чи

$$S_0 =\{x \in E^n : h_j(x) \le 0, \, j=\overline{1,m_0}, h_j(x)=0, \, j=\overline{m_0+1,s_0}\}. \qquad (6.23)$$

Далі будемо вважати: функції $f^j(x(t),u(t),t)$, $j=\overline{0,n}$, $g_j(x), j=\overline{1,s_I}$, $h_j(x), j=\overline{1,s_0}$, $\Phi(x)$ мають частинні похідні за змінними $x_1,\ldots,x_n$ і неперервні разом із цими похідними за сукупністю своїх аргументів при всіх $x \in E^n$, $u(t) \in V$, $t \in [t_0, t_1]$

Також позначимо:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_x = (\Phi_{x_1}, \ldots, \Phi_{x_n})^T,$$

$$\frac{\partial g_j}{\partial x} = g_{j_x} = (g_{j_{x_1}}, \ldots, g_{j_{x_n}})^T,\ j = \overline{1, s_I},$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial x} = h_{j_x} = (h_{j_{x_1}}, \ldots, h_{j_{x_n}})^T,\ j = \overline{1, s_0}.$$

Теорема 6.2 (Принцип максимуму – необхідна умова оптимальності. Кінці траєкторій не закріплені – вільні або рухомі, початковий і кінцевий моменти часу фіксовані).

Нехай $(u(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$ – розв'язок задачі (6.16)-(6.19).

Тоді необхідно існує неперервна вектор-функція $\psi(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ і стала ψ_0 такі, що:

1) $\psi_0 \le 0, |\psi_0| + \|\psi(t)\| \ne 0,\ t_0 \le t \le t_1$;(6.8)

2) $\psi(t)$ є розв'язком спряженої системи (6.7), яка відповідає розв’язку $(u(t), x(t))$, який розглядається;

3) при кожному $t \in [t_0, t_1]$ функція Гамільтона – Понтрягіна $H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ як функція змінної $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))^T$ досягає своєї верхньої грані на множині V при $u = u(t)$, тобто:

$$\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)\ .(6.9)$$

4) на лівому і правому кінцях траєкторії $x(t)$ виконуються умови трансверсальності, які у випадку задачі (6.16)-(6.19) означають, що вектор $\psi(t_1) - \psi_0 \Phi_x(x(t_1))$ ортогональний до множини S_I у точці $x(t_1) \in S_I$, а вектор $\psi(t_0)$ ортогональний до множини S_0 у точці $x(t_0) \in S_0$.

Якщо $u(t)$ є обмеженою вимірною функцією, то формулювання теореми 6.2 зберігається, лише умова максимуму вигляду (6.9) і включення (6.19) будуть виконуватись майже всюди на $[t_0, t_1]$.

Зауважимо, що умова (6.13) однорідності функції $u(t)$ зберігає силу й у цій задачі, а властивість ортогональності вектора $\psi(t_1)-\psi_0\Phi_x(x(t_1))$ до множини S_I і вектора $\psi(t_0)$ до множини S_0 не порушиться, якщо величини $\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_n$ помножити на одне й те ж саме число $\alpha>0$.

Тому і тут можна прийняти умову нормування (6.14), або умову $\psi_0=-1$, якщо відомо, що $\psi_0<0$.

Ще треба вказати $2n$ умов для визначення $2n$ сталих, від яких залежатиме загальний розв'язок системи (6.11). Для цього розглянемо <u>умови трансверсальності</u> на кінцях траєкторії $x(t)$.

Наведемо ці умови на правому кінці траєкторії.

1) Правий кінець вільний: $S_I\equiv E^n$.

Тоді умова ортогональності вектора $\psi(t_1)-\psi_0\Phi_x(x(t_1))$ до всього простору E^n означає:

$$\psi(t_1)-\psi_0\Phi_x(x(t_1))=0. \qquad (6.24)$$

Це дає n граничних умов для системи (6.11).

2) Правий кінець рухомий:

а) Нехай множина S_I задається у вигляді (6.20) і $g_{j_x}(x(t_1))\neq 0,\ j=\overline{1,s_I},$.

Тоді гіперплощина

$$g_{j_x}^T(x(t_1))(x-x(t_1))=0$$

– це дотична площина до поверхні, яка визначається рівнянням $g_j(x)=0$ у точці $x(t_1)$, а множина

$$\Gamma=\{x\in E^n : g_{j_x}^T(x(t_1))(x-x(t_1))=0,\ j=\overline{1,s_I}\}$$

– дотична площина до множини S_I у точці $x(t_1)$.

Умова ортогональності вектора a до множини S_I у точці $x(t_1)$ означає ортогональність a до дотичної площини Γ, тобто скалярний добуток $(a,x-x(t_1))=0$ при $\forall x\in\Gamma$ – за означенням.

Тоді з умови трансверсальності маємо:

$$(\psi(t_1)-\psi_0\Phi_x(x(t_1)))^T(x-x(t_1))=0$$

для всіх x : $g_{j_x}^T(x(t_1))(x - x(t_1)) = 0,\ j = \overline{1, s_I}$.

За теоремою Фаркаша [5] існують числа $a_1, \ldots, a_{s_I}$ такі, що

$$\psi(t_1) - \psi_0 \Phi_x(x(t_1)) = \sum_{j=1}^{s_I} a_j g_{j_x}(x(t_1)) . \tag{6.25}$$

Сюди ж додамо умову $x(t_1) \in S_I$, тобто:

$$g_j(x(t_1)) = 0,\ j = \overline{1, s_I} . \tag{6.26}$$

Усього умови трансверсальності (6.25), (6.26) дають $n + s_I$ умов, з яких s_I умов можна використати для визначення додаткових параметрів $a_1, \ldots, a_{s_I}$, а решту n умов – приєднати до системи (6.11).

б) Нехай множина S_I задається у вигляді (6.21) і $g_{j_x}(x(t_1)) \neq 0,\ j = \overline{1, s_I}$, . Тоді умова трансверсальності означає, що існують числа $a_1, \ldots, a_{s_I}$:

$$\psi(t_1) - \psi_0 \Phi_x(x(t_1)) = \sum_{j=1}^{s_I} a_j g_{j_x}(x(t_1)) , \tag{6.27}$$

$a_j g_j(x(t_1)) = 0, a_j \geq 0,\ j = \overline{1, m_I}$, $g_j(x(t_1)) = 0,\ j = \overline{m_I + 1, s_I}$.(6.28)

Таким чином, співвідношення (6.27), (6.28) також дають $n + s_I$ умов, з яких s_I умов використовується для визначення параметрів $a_1, \ldots, a_{s_I}$, а решту n умов приєднується до системи (6.11). Зауважимо, що для всіх тих $j, 1 \leq j \leq m_I$, для яких $g_j(x(t_1)) < 0$ (неактивні обмеження), з (6.28) випливає, що $a_j = 0$. Тоді невизначеними залишаються лише a_j з індексами j , для яких $g_j(x(t_1)) = 0$ (активні обмеження).

3) Правий кінець закріплений:

$$x(t_1) = x_I . \tag{6.29}$$

Тоді умову трансверсальності можна розглядати як умову ортогональності вектора $\psi(t_1) - \psi_0 \Phi_x(x(t_1))$ до вектора нульової довжини – тобто до точки x_I. Це завжди тривіально виконується. Значить, у випадку закріпленого кінця умова трансверсальності вироджується й не несе в собі ніякої інформації.

У цьому випадку маємо n граничних умов, які треба приєднати до системи (6.11).

Розглянемо умови трансверсальності на лівому кінці траєкторії $x(t)$.

1) Лівий кінець вільний: $S_0 \equiv E^n$.

Тоді умова трансверсальності записується так:

$$\psi(t_0) = 0. \tag{6.30}$$

2) Лівий кінець рухомий.

Якщо множина S_0 має вигляд (6.22) і $h_{j_x}(x(t_0)) \neq 0,\ j = \overline{1, s_0}$, то умова трансверсальності запишеться у наступним чином: існують числа $b_1, \ldots, b_{s_0}$ такі, що

$$\psi(t_0) = -\sum_{j=1}^{s_0} b_j h_{j_x}(x(t_0)), \tag{6.31}$$

і до (6.31) треба додати умову $x(t_0) \in S_0$, що означає:

$$h_j(x(t_0)) = 0,\ j = \overline{1, s_0}. \tag{6.32}$$

Якщо множина S_0 має вигляд (6.23) і $h_{j_x}(x(t_0)) \neq 0,\ j = \overline{1, s_0}$, то умова трансверсальності:

$$\psi(t_0) = -\sum_{j=1}^{s_0} b_j h_{j_x}(x(t_0)), \tag{6.33}$$

і до (6.31) треба додати умову $x(t_0) \in S_0$, що означає:

$$b_j h_j(x(t_0)) = 0,\ b_j \geq 0,\ j = \overline{1, m_0}, \tag{6.34}$$

$$h_j(x(t_0)) = 0,\ j = \overline{m_0 + 1, s_0}.$$

3) Лівий кінець закріплений:

$$x(t_0) = x_0. \tag{6.35}$$

Умова трансверсальності тривіально виконується.

Співвідношення (6.30) – (6.35) дають n граничних умов для системи (6.11).

6.3. ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА ДЛЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ З НЕВІДОМИМИ ПОЧАТКОВИМ І КІНЦЕВИМ МОМЕНТАМИ ЧАСУ

Розглянемо задачу оптимального керування, в якій початковий і кінцевий моменти часу невідомі та підлягають визначенню:

$$J(t_0,t_1,x_0,u(t))=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),u(t),t)dt+\Phi(x(t_1),t_1)\to \inf , \quad (6.36)$$

$$\dot{x}(t)= f(x(t),u(t),t), \ \ t_0\le t\le t_1 , \quad (6.37)$$

$$x(t_0)\in S_0, x(t_1)\in S_I , \quad (6.38)$$

$$u(t)\in V , t_0\le t\le t_1 \quad (6.39)$$

де керування $u(t)$ – кусково-неперервні на $t\in[t_0,t_1]$, $u(t)=u(t+0)$ при $t_0\le t\le t_1$, а при $t=t_1$: $u(t_1)=u(t_1-0)$; початковий і кінцевий моменти часу невідомі; $f(x(t),u(t),t)=(f^1(x(t),u(t),t),\ldots, f^n(x(t),u(t),t))^T$.

Задача (6.36) – (6.39) – частинний випадок загальної задачі оптимального керування (1.28) – (1.32).

Вважаємо, що правий кінець траєкторій або вільний:

$$S_I(t_1)\equiv E^n,\ t_1\in R,$$

або рухомий:

$$\begin{aligned} S_I(t_1)=\{x\in E^n :g_j(x,t_1)\le 0,\ j=\overline{1,m_I},\\ g_j(x,t_1)=0,\ j=\overline{m_I+1,s_I}\},t_1\in R. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Аналогічно вважаємо, що лівий кінець траєкторій або вільний:

$$S_0(t_0)\equiv E^n,\ t_0\in R,$$

або рухомий:

$$S_0(t_0) = \{x \in E^n : h_j(x, t_0) \le 0,\ j = \overline{1, m_0},$$
$$h_j(x, t_0) = 0,\ j = \overline{m_0 + 1, s_0}\}, t_0 \in R. \qquad (6.41)$$

Відзначимо, що випадки $m_I = 0$ або $s_I = m_I$, а також $m_0 = 0$ або $s_0 = m_0$ у (6.40), (6.41) не виключаються.

Нехай функції $f^j(x,u,t),\ j = \overline{0,n}$, та їх частинні похідні $f_x^j(x,u,t),\ j = \overline{0,n}$, – неперервні за сукупністю аргументів $(x,u,t) \in E^n \times V \times R$, а функції $\Phi(x,t), g_j(x,t),\ j = \overline{1, s_I}$, $h_j(x,t), j = \overline{1, s_0}$ та їх частинні похідні за x і t – $\Phi_x, \Phi_t, g_{j_x}, g_{j_t}, h_{j_x}, h_{j_t}$ – неперервні за сукупністю $(x,t) \in E^n \times R$.

Теорема 6.3 (<u>Принцип максимуму</u> – необхідна умова оптимальності. Кінці траєкторій – або вільні, або рухомі, або закріплені. Початковий і кінцевий моменти часу невідомі та підлягають визначенню).

Нехай набір $(t_0, t_1, u(t), x(t))$ є розв’язком задачі (6.36) – (6.39).

Тоді необхідно існує неперервна вектор-функція $\psi(t)$ **,** $t_0 \le t \le t_1$ і стала ψ_0 такі, що:

1) $\psi_0 \le 0, |\psi_0| + \|\psi(t)\| \ne 0,\ t_0 \le t \le t_1$;(6.8)

2) $\psi(t)$ є розв'язком спряженої системи (6.7), яка відповідає розв’язку $(u(t), x(t))$, який розглядається;

3) при кожному $t \in [t_0, t_1]$ функція Гамільтона – Понтрягіна $H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ як функція змінної u досягає своєї верхньої грані на множині V при $u = u(t)$**,** тобто:

$$\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)\ .(6.9)$$

4) на лівому і правому кінцях траєкторії $x(t)$ виконуються умови трансверсальності.

Розглянемо умови трансверсальності на кінцях траєкторії $x(t)$.

1) Правий кінець вільний: $S_I(t_1) \equiv E^n, t_1 \in R$.

Умови трансверсальності:

$$\psi(t_1) - \psi_0 \Phi_x(x(t_1), t_1) = 0, \tag{6.24}$$

$$H(x(t_1), u(t_1), t_1, \psi(t_1), \psi_0) - \psi_0 \Phi_t(x(t_1), t_1) = 0. \tag{6.42}$$

2) Правий кінець рухомий.

Нехай множина $S_I(t_1)$ має вигляд (6.40), причому функції $g_{j_x}(x(t_1), t_1), g_{j_t}(x(t_1), t_1)$ не дорівнюють нулю одночасно для всіх $j = \overline{1, s_I}$.

Тоді умови трансверсальності означають:

існують числа $a_1, \ldots, a_{s_I}$ такі, що

$$\psi(t_1) - \psi_0 \Phi_x(x(t_1), t_1) = \sum_{j=1}^{s_I} a_j g_{j_x}(x(t_1), t_1) \tag{6.27}$$

$$\begin{aligned} &a_j g_j(x(t_1), t_1) = 0, a_j \geq 0, j = \overline{1, m_I}, \\ &g_j(x(t_1)) = 0, j = \overline{m_I + 1, s_I}. \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned} &H(x(t_1), u(t_1), t_1, \psi(t_1), \psi_0) - \psi_0 \Phi_t(x(t_1), t_1) = \\ &= -\sum_{j=1}^{s_I} a_j g_{j_t}(x(t_1), t_1). \end{aligned} \tag{6.43}$$

3) Правий кінець закріплений.

Умови трансверсальності:

$$x(t_1) = x_I \text{ ,(6.29)}$$

$$H(x_I, u(t_1), t_1, \psi(t_1), \psi_0) - \psi_0 \Phi_t(x(t_I), t_1) = 0. \tag{6.44}$$

Лівий кінець траєкторії.

1) Лівий кінець вільний: $S_0 \equiv E^n, t_0 \in R$.

Умови трансверсальності:

$$\psi(t_0) = 0, \tag{6.30}$$

$$H(x(t_0), u(t_0), t_0, \psi(t_0), \psi_0) = 0. \tag{6.45}$$

2) Лівий кінець рухомий.

У випадку, коли множина $S_0(t_0)$ має вигляд (6.41), причому функції $h_{j_x}(x(t_0), t_0), h_{j_t}(x(t_0), t_0)$ не дорівнюють нулю одночасно для всіх

$j=\overline{1,s_0}$, то умови трансверсальності означають: існують числа $b_1,\ldots,b_{s_0}$ такі, що

$$\psi(t_0)=-\sum_{j=1}^{s_0} b_j h_{j_x}(x(t_0),t_0), \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned} & b_j h_j(x(t_0),t_0)=0,\ b_j\geq 0,\ j=\overline{1,m_0}, \\ & h_j(x(t_0),t_0)=0,\ j=\overline{m_0+1,s_0}. \end{aligned} \tag{6.34}$$

$$H(x(t_0),u(t_0),t_0,\psi(t_0),\psi_0)=\sum_{j=1}^{s_0} b_j h_{j_t}(x(t_0),t_0). \tag{6.46}$$

1) Лівий кінець закріплений.

Умови трансверсальності:

$$x(t_0)=x_0, \tag{6.35}$$

$$H(x_0,u(t_0),t_0,\psi(t_0),\psi_0)=0. \tag{6.47}$$

Наявність у задачі невідомих моментів часу t_0,t_1 призвела до появи додаткових умов (6.42) – (6.47), з яких знаходяться t_0,t_1.

6.4. ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ ДО ЗАДАЧІ ШВИДКОДІЇ

Для системи керування

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=u(t) \end{cases}$$

із закріпленими кінцями траєкторій

$$\begin{cases} x_1(t_0)=x_{10} \\ x_2(t_0)=x_{20} \end{cases}, \begin{cases} x_1(t_1)=0 \\ x_2(t_1)=0 \end{cases},$$

та за умови обмеження на керування $|u(t)|\leq 1$ знайти керування й траєкторії, які мінімізують час руху системи із заданої початкової точки в початок координат.

У даній задачі критерій оптимальності буде мати вигляд

$$T=\int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 \to \min.$$

Розв’язування. Застосовуємо принцип максимуму Понтрягіна.

Будуємо функцію Гамільтона-Понтрягіна (відразу покладаємо $\psi_0 = -1$)

$$H(x(t),u(t),t,\psi(t)) = \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)u(t) - 1.$$

Записуємо спряжену систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1(t)}{dt} = \dfrac{dH(x(t),u(t),t,\psi(t))}{dx_1} = 0 \\ \dfrac{d\psi_2(t)}{dt} = \dfrac{dH(x(t),u(t),t,\psi(t))}{dx_2} = -\psi_1(t) \end{cases}.$$

Шукаємо керування $u^0(t)$, при якому функція Гамільтона-Понтрягіна $H(x(t),u(t),t,\psi(t))$ досягає максимуму: $\max\limits_u H(x(t),u,t,\psi(t))$. Зауважимо, що в даній задачі функція $H(x(t),u(t),t,\psi(t))$ лінійна за керуванням $u(t)$ на замкненому проміжку $|u(t)| \le 1$, а значить, може досягати свого максимуму лише на кінцях цього відрізка.

Якщо $\psi_2(t) > 0$, то функція $H(x(t),u(t),t,\psi(t))$ зростає із зростанням $u(t)$, тому її максимум досягається на правому кінці відрізка, тобто $u^0 = 1$. Аналогічно, при $\psi_2(t) < 0$ отримуємо $u^0 = -1$. Якщо $\psi_2(t) = 0$ то $H(x(t),u(t),t,\psi(t))$ від $u(t)$ не залежить і його можна покласти довільним із допустимої області, зокрема: $u^0 = 0$.

Значить, $u^0 = sign\psi_2(t)$ для $\psi_2(t) \ne 0$.

Знаходимо $\psi_1(t)$ та $\psi_2(t)$ як розв’язок спряженої системи:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1(t)}{dt} = 0 \\ \dfrac{d\psi_2(t)}{dt} = -\psi_1(t) \end{cases}$$

Отримаємо

$$\psi_1(t) = C_1$$
$$\psi_2(t) = -C_1 t + C_2.$$

Таким чином, оптимальне керування визначається за формулою: $u^0 = sign(-C_1 t + C_2)$.

Оскільки знайдена функція $\psi_2(t)$ лінійна, то вона може змінювати свій знак на довільному замкненому проміжку не більш ніж в одній точці. Значить, керування $u^0(t)$ буде змінюватися з *+1* на *–1* (або з *–1* на *+1*) теж не більш ніж в одній точці на проміжку $[t_0, t_1]$. Цю точку називають <u>точкою перемикання</u>.

Таким чином, незалежно від вибору початкової точки x_0, $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T$, відповідне оптимальне керування є кусково-сталою функцією, яка приймає значення *+1* або *–1* та має не більше двох інтервалів сталості.

Розглянемо можливі випадки.

а) $u^0 = 1$ Система керування набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 1 \end{cases}.$$

Знайдемо звідси $x_1(t)$ як функцію від $x_2(t)$:

$$dx_2(t) = dt \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dx_2(t)} = x_2 \Rightarrow dx_1(t) = x_2 dx_2(t).$$

Звідси маємо:

$$x_1(t) = \frac{1}{2} x_2^2(t) + C,$$

де C – стала інтегрування.

Таким чином отримали сім'ю парабол. Серед них є тільки одна, що проходить через початок координат. У цьому випадку стала величина $C = 0$. Нехай початкова точка x_0 траєкторії лежить на цій параболі. Тоді система потрапляє в початок координат під дією тільки керування $u^0 = 1$.

Знайдемо час руху системи з урахуванням того, що $dx_2(t) = dt$. Для цього проінтегруємо друге рівняння:

$$T = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{x_2(t_0)}^{x_2(t_1)} dx_2(t) = x_2(t_1) - x_2(t_0) = -x_2(t_0) = -x_{20}.$$

б) $u^0 = -1$ Тоді система керування набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -1 \end{cases}.$$

Знайдемо, як і вище, залежність $x_1(t)$ від $x_2(t)$:

$$dx_2(t) = -dt \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dx_2(t)} = -x_2 \Rightarrow dx_1(t) = -x_2 dx_2(t).$$

Звідси маємо:

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} x_2^2(t) + D,$$

де D – стала інтегрування.

Аналогічно отримали сім'ю парабол, серед яких є тільки одна, що проходить через початок координат у випадку, коли $D = 0$. Нехай початкова точка x_0 траєкторії вибрана на цій параболі. Тоді система потрапляє в початок координат під дією тільки керування $u^0 = -1$.

Знайдемо час руху системи:

$$T=-\int_{t_0}^{t_1}dt=-\int_{x_2(t_0)}^{x_2(t_1)}dx_2(t)=-x_2(t_1)+x_2(t_0)=x_2(t_0)=x_{20}.$$

Позначимо дуги, по яких система може потрапити в початок координат, через L_1 і L_{-1} для керувань $u^0=1$ і $u^0=-1$ відповідно (рис. 6.1.). Очевидно, що при $x_0\in L_1$ оптимальна траєкторія є частиною дуги L_1, а у випадку $x_0\in L_{-1}$ – частиною дуги L_{-1}. Напрямок руху за кривими – до початку координат.

Крива $L_{-1}L_1$ називається лінією перемикання. Лінія перемикання $L_{-1}L_1$ поділяє всю фазову площину на дві частини: $X_{-1}X_1$.

в) Нехай оптимальне керування змінюється з $u^0=-1$ на $u^0=1$ Для цього випадку початкова точка буде належати частині X_{-1} фазової площини: $x_0\in X_{-1}$ (див. рис. 6.1). Тоді траєкторія руху системи складається з двох частин: від x_0 до точки B під дією керування $u^0=-1$ і від точки B до початку координат під дією керування $u^0=1$.

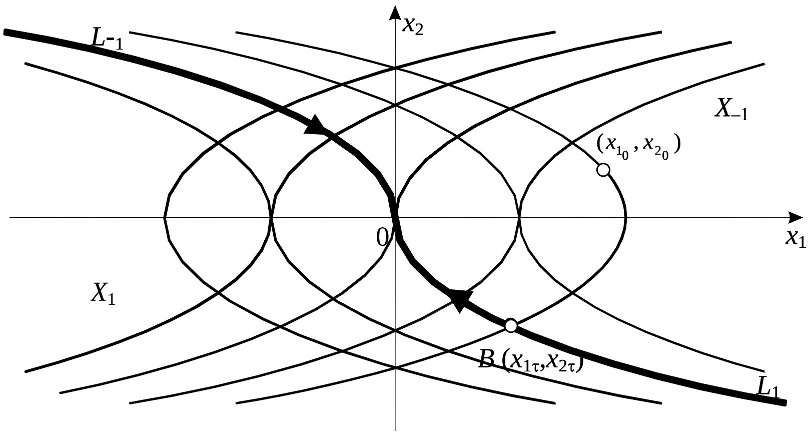

Рис. 6.1.

Рух від початкової точки x_0 до точки B буде проходити по параболі: $x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) + D$. Знайдемо сталу D за умови, що дана парабола проходить через точку $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T$. Маємо

$$x_{10} = -\frac{1}{2}x_{20}^2 + D \Rightarrow D = x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2.$$

Від точки B до початку координат система буде рухатись під дією керування $u^0 = 1$ по частині L_1 лінії перемикання $L_{-1}L_1$. У цьому випадку стала величина $C = 0$.

Знайдемо координати $(x_{1\tau}, x_{2\tau})$ точки B як точки перетину двох парабол:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2 \\ x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 \end{cases}.$$

Отримаємо:

$$\begin{array}{l} x_{1\tau} = \frac{1}{2}(x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2) \\ x_{2\tau} = -\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}} \end{array}.$$

Знайдемо тепер час руху системи керування з початкової точки x_0 у початок координат. Він буде складатися з часу руху з точки x_0 у точку B і з часу руху з точки B у початок координат. Позначимо момент часу, в який система попадає в точку B, через τ. Тоді загальний час руху системи буде дорівнювати: $(\tau - t_0) + (t_1 - \tau)$.

Знайдемо час руху системи з точки x_0 у точку B під дією керування $u^0 = -1$.

$$\int_{t_0}^{\tau} dt = \tau - t_0 = -\int_{x_2(t_0)}^{x_2(\tau)} dx_2(t) = x_{20} - x_{2\tau}.$$

Час руху системи від точки B у початок координат по частині L_1 лінії перемикання $L_{-1}L_1$ під дією керування $u^0 = 1$ буде:

$$t_1 - \tau = -x_{2\tau} = \sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}}$$

Отже, загальний час руху системи з точки x_0 у початок координат для випадку, коли керування спочатку є , а потім у точці B перемикається на $u^0 = 1$, буде

$$T = (\tau - t_0) + (t_1 - \tau) = x_{20} + 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}}\ .$$

г) Нехай оптимальне керування змінюється з $u^0 = 1$ на $u^0 = -1$. Для цього випадку початкова точка буде належати частині X_1 фазової площини: $x_0 \in X_1$. Тоді траєкторія руху системи складається з двох частин: від точки x_0 – під дією керування $u^0 = 1$ – до точки перемикання, і далі по дузі L_{-1} лінії перемикання – під дією керування $u^0 = -1$ – до початку координат.

Виконавши аналогічні пункту в) дії й перетворення, знайдемо час руху системи в цьому випадку:

$$T = -x_{20} + 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 - x_{10}}\ .$$

Таким чином, із розглянутих випадків випливає, що мінімальний час переводу системи із заданої точки x_0 у початок координат визначається лише координатами початкової точки траєкторії:

$$T = 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}} + x_{20}, \quad x_0 \in X_{-1}\,,$$

$$T = 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 - x_{10}} - x_{20}, \quad x_0 \in X_1\,.$$

Відзначимо, що для лінійних систем керування принцип максимуму для задачі швидкодії є необхідною й достатньою умовами оптимальності [4]. Отже, знайдені керування та траєкторія є оптимальними.

6.5. ПРО МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ

Для чисельного розв'язування крайової задачі принципу максимуму можуть бути використані відомі чисельні методи, такі як метод стрільби, метод прогонки, різні ітераційні методи.

Крайова задача принципу максимуму (див., наприклад, задачу (6.12), (6.11), (6.3), (6.14)) має ряд специфічних особливостей, які ускладнюють застосування стандартних методів розв'язування крайових задач. Розглянемо деякі з особливостей.

1) Функція $u = u(x(t), t, \psi(t), \psi_0)$, що визначається з умови максимуму, взагалі кажучи, нелінійно залежить від своїх аргументів. Тому диференціальні рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, u(x, t, \psi, \psi_0), t) \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -H_x(x, u(x, t, \psi, \psi_0), t, \psi, \psi_0) \end{cases}, \qquad (6.11)$$

які входять до крайової задачі, також будуть нелінійними, навіть тоді, коли система керування $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ лінійна відносно $x(t), u(t)$.

2) Функція $u = u(x(t), t, \psi(t), \psi_0)$ може бути не всюди диференційованою й навіть розривною (напр., $u = sign\psi$ у задачі оптимальної швидкодії для лінійних систем). Унаслідок цього можуть порушуватися, зокрема, певні аналітичні властивості правих частин системи рівнянь, які входять до крайової задачі.

3) Крайова задача принципу максимуму ускладнюється в тих випадках, коли з умови $\sup\limits_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ функція $u = u(x(t), t, \psi(t), \psi_0)$ визначається неоднозначно.

Ці та інші обставини ускладнюють дослідження проблем існування, єдиності, стійкості розв'язку крайової задачі принципу максимуму, збіжності чисельних методів, що застосовуються. За умови чисельного розв'язування прикладних задач оптимального керування вказані проблеми долаються, як правило, шляхом урахування специфіки конкретної задачі та її фізичного змісту.

6.6. ЗВ'ЯЗОК МІЖ МЕТОДОМ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ ТА КЛАСИЧНИМ ВАРІАЦІЙНИМ ЧИСЛЕННЯМ

Розглянемо основну задачу варіаційного числення: серед неперервних функцій $x = x(t), t_0 \le t \le t_1$, що мають кусково-неперервні похідні $\dot{x}(t)$ і задовольняють умови $x(t_0) \in S_0$, $x(t_1) \in S_I$ знайти таку, на якій функціонал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

досягає екстремуму (мінімального значення), де $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$, S_0, S_1 – задані множини з E^n .

Для простоти обмежимося випадком:

лівий кінець траєкторій закріплений: $x(t_0) = x_0, t_0$ – задане;

правий кінець $x(t_1)$ або закріплений: $x(t_1) = x_I, t_1$ – задане, або вільний: $S_I \equiv E^n, t_1$ – задане, або рухомий і лежить на заданій гладкій кривій:

$$S_I = S_I(t_1) = \{x \in E^n : g(x, t_1) = x - \phi(t_1) = 0$$
$$t_1 \in R = \{-\infty < t < \infty\} .$$

Позначимо $\dot{x}(t) = u(t)$ і запишемо задачу в еквівалентному вигляді як задачу оптимального керування:

$$Q(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt \to \inf ,$$
$$\dot{x}(t) = u(t), \quad t_0 \le t \le t_1,$$
$$x(t_0) = x_0, \; x(t_1) \in S_I(t_1).$$

Тут $f^0(x(t), u(t), t)$ – неперервна функція, що має неперервні похідні: $f_x^0(x(t), u(t), t)$, $f_u^0(x(t), u(t), t)$, $f_t^0(x(t), u(t), t)$, $f_{ut}^0(x(t), u(t), t)$, $f_{ux}^0(x(t), u(t), t)$, $f_{uu}^0(x(t), u(t), t)$ для всіх $(x(t), u(t), t) \in E^n \times E^n \times [t_0, \infty)$

Скористаємось принципом максимуму Понтрягіна. Згідно з теоремою 6.3 маємо:

$$H(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=\psi_0 f^0(x(t),u(t),t)+\psi^T(t)u\,, \qquad (6.48)$$

$$\frac{d\psi}{dt}=-H_x(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=-\psi_0 f_x^0(x(t),u(t),t)\,. \qquad (6.49)$$

Для розв'язку $(x(t),u(t))$, $t_0\le t\le t_1$ даної задачі оптимального керування має виконуватись необхідна умова:

$$\sup_{u\in E^n} H(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0)\,, \qquad (6.50)$$

де $\psi(t)$ – розв'язок системи (6.49) при $x=x(t,u(t)),u=u(t)$, $t_0\le t\le t_1$. Тут $V=E^n$.

Умова (6.50) може виконуватись лише в стаціонарній точці, тобто $H_u(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=\psi_0 f^0(x(t),u(t),t)+\psi(t),\;\; t_0\le t\le t_1$.(6.51)

Звідси: $\psi_0\ne 0$, бо інакше при $\psi_0=0$ з (6.51) отримаємо $\psi(t)\equiv 0$, що протирічить умові (6.8) з теореми 6.3. Значить, можна вважати: $\psi_0=-1$.

Тоді співвідношення (6.48) – (6.51) набудуть вигляду:

$$H(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=-f^0(x(t),u(t),t)+\psi^T(t)u\,, \qquad (6.52)$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\psi_0 f_x^0(x(t),u(t),t)\,, \qquad (6.53)$$

$$\sup_{u\in E^n} H(x(t),u,t,\psi(t),\psi_0)=H(x(t),u(t),t,\psi(t),\psi_0)\,, \qquad (6.54)$$

$$\psi(t)=f_u^0(x(t),u(t),t)\,. \qquad (6.55)$$

З рівняння (6.53): $\psi(t)=\int\limits_{t_0}^{t} f_x^0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau+\psi(t_0)$.

Звідси, з урахуванням (6.55) випливає, що

$$f_u^0(x(t),u(t),t)=\int\limits_{t_0}^{t} f_x^0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau+\psi(t_0)\,. \qquad (6.56)$$

Це рівняння називається рівнянням Ейлера в інтегральній формі. Тут $u(t)=\dot{x}(t),\;\; t_0\le t\le t_1$. Якщо (6.56) продиференціювати за t, то отримаємо рівняння Ейлера-Лагранжа класичного варіаційного числення в диференціальній формі:

$$\frac{d}{dt}(f_u^0(x(t),u(t),t)) - f_x^0(x(t),u(t),t)) = 0$$

$$u(t) = \dot{x}(t), \quad t_0 \le t \le t_1.$$

Необхідною умовою досягнення функцією $H(x(t),u,t,\psi(t))$ максимуму при $u = u(t)$ є недодатність квадратичної форми:

$$\sum_{i,j=1}^{n} H(x(t),u,t,\psi(t))\xi_i\xi_j \le 0$$

для довільних $\xi_1,\ldots,\xi_n$, які одночасно не дорівнюють нулю, $t_0 \le t \le t_1$.

Звідси, ураховуючи вираз (6.51), отримаємо:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{u_i u_j}^0(x(t),u,t)\xi_i\xi_j \ge 0, \ \ t_0 \le t \le t_1. \tag{6.57}$$

Це необхідна умова Лежандра. Зокрема, при n=1 маємо:

$$f_{uu}^0(x(t),u,t) \ge 0, \quad t_0 \le t \le t_1 \ .$$

Виведемо тепер умову Вейєрштраса. Перепишемо (6.54) з урахуванням (6.51), (6.55):

$$\begin{aligned} &0 \le H(x(t),u(t),t,\psi(t)) - H(x(t),v,t,\psi(t)) = \\ &= f^0(x(t),v,t) - f^0(x(t),u(t),t) - (v-u(t))^T f_u^0(x(t),u(t),t) \end{aligned} \tag{6.58}$$

для $\forall v \in E^n$ за умови, що $(x(t),u(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, – розв’язок початкової задачі.

Уведемо функцію:

$$\begin{aligned} &E(x(t),u(t),t,v) = \\ &= f^0(x(t),v,t) - f^0(x(t),u(t),t) - (v-u(t))^T f_u^0(x(t),u(t),t) \end{aligned} . \tag{6.59}$$

Це функція Вейєрштраса. Тоді відома умова Вейєрштраса:

$$E(x(t),u(t),t,v) \ge 0, \ \forall v \in E^n, \ \ t_0 \le t \le t_1$$

випливає з нерівності (6.58).

Далі, з принципу максимуму Понтрягіна (теореми 6.1 – 6.3) випливає неперервність спряжених функцій $\psi(t)$ та $H(x(t),u(t),t,\psi(t)) = \sup\limits_{u \in E^n} H(x(t),u,t,\psi(t))$ на відрізку $[t_0, t_1]$.

Тому з урахуванням співвідношень (6.51), (6.54), (6.55) маємо:

$$[f_u^0(x(t),u(t),t)]_t = 0,$$

$$[u^T(t) f_u^0(x(t),u(t),t) - f^0(x(t),u(t),t)]_t = 0, \qquad (6.60)$$

Тут позначено: $[z(t)]_t = z(t+0) - z(t-0)$.

Оскільки рівності (6.60) виконані для всіх $t: \ t_0 \le t \le t_1$, то вони виконуються, зокрема, і в ті моменти t, коли функція $x(t)$ може мати злам, тобто коли похідна $\dot{x}(t)$ має розрив. Якщо врахувати, що $u(t) \equiv \dot{x}(t)$, то умови (6.60) переходять у відомі умови Вейєрштраса – Ердмана [33].

Розглянемо умови на правому кінці траєкторії $x(t)$, $t_0 \le t \le t_1$. Якщо цей кінець вільний, то згідно з умовою трансверсальності (6.24) виконується: $\psi(t_1) = 0$.

Тоді, згідно з (6.55), маємо:

$$\psi(t_1) = f_u^0(x(t),u(t_1),t_1)0. \qquad (6.61)$$

Якщо правий кінець рухомий, тобто

$$x(t_1) \in S_I(t_1) = \{x \in E^n : g_j(x,t_1) = x_j - \phi_j(t_1) = 0, \ j = \overline{1,n},$$

$$t_1 \in R = \{-\infty < t < \infty\}.$$

то згідно з умовами трансверсальності (6.27), (6.43) існують сталі $a_1, \ldots, a_n$ такі, що

$$\psi_i(t_1) = \sum_{j=1}^{n} a_j g_{j_x}(x(t_1),t_1) = a_i, \qquad (6.27)$$

$$\begin{aligned} H(x(t_1),u(t_1),t_1,\psi(t_1)) &= -\sum_{j=1}^{n} a_j g_{j_t}(x(t_1),t_1) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(t_1) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t_1)\varphi_j(t_1) = \psi^T(t_1)\varphi(t_1). \end{aligned} \qquad (6.28)$$

Оскільки $H(x(t),u,t,\psi(t)) = -f^0(x(t),u(t),t) + \psi^T(t)u$ і $\psi(t)$ виражається формулою (6.55), то з останньої рівності маємо:

$$f^0(x(t_1),u(t_1),t_1) + (f_u^0(x(t_1),u(t_1),t_1))^T(\varphi(t_1) - u(t_1)) = 0\,. \quad (6.62)$$

Умови (6.61), (6.62), де $u(t) \equiv \dot{x}(t)$, є відомими умовами трансверсальності для вільного та рухомого правого кінця відповідно [33].

Таким чином, для $V \equiv E^n$ з принципу максимуму випливають усі основні необхідні умови екстремуму, відомі в класичному варіаційному численні. Утім, якщо $V \neq E^n$, то співвідношення (6.51) не виконується, і умова Вейєрштраса теж може не виконуватись. Умова максимуму є узагальненням умови Вейєрштраса з варіаційного числення. Перевага умови максимуму перед умовою Вейєрштраса полягає в тому, що вона може застосовуватись для будь-якої множини $V \subseteq E^n$, зокрема, замкненої, та для більш загальних задач. Випадок замкненої множини V є більш важливим для прикладних досліджень, оскільки значення оптимальних керувань найчастіше лежать на границі множини V.

6.7. ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ДЛЯ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Розглянемо дискретний керований процес, що описується системою рівнянь вигляду

$$x(k+1) = f_k(x(k),u(k)), k = \overline{0, N-1}, \quad (6.63)$$

$$x(0) = a\,. \quad (6.64)$$

Тут $x(k) = (x_1(k),\ldots,x_n(k))^T$, $k = \overline{0,N}$ вектор-стовпчик із простору E^n, який визначає стан процесу в момент k, поточні керування

$$u(k) = (u_1(k),\ldots,u_m(k))^T, u(k) \in G_k \subset E^m, k = \overline{0, N-1}\,. \quad (6.65)$$

G_k- деяка множина, яка залежить від k, вектор-функції $f_k = f_k(x(k),u(k)) = (f_k^1,\ldots,f_k^n)^T$, $k = \overline{0,N}$ визначені на $E^n \times G_k$, a – заданий вектор, число N – фіксоване.

Позначимо набір $x=\{x(0),x(1),\dots,x(N)\}$, який будемо називати фазовою траєкторією процесу, а набір $u=\{u(0),u(1),\dots,u(N-1)\}$ – керуванням процесу.

Задача оптимального керування формулюється таким чином: знайти такі керування u та фазову траєкторію x, які задовольняють систему рівнянь (6.63), початкову умову (6.64), обмеження (6.65) і мінімізують функціонал

$$Q(x,u)=\sum_{k=0}^{N-1} f_k^0(x(k),u(k))+f_N^0(x(N)), \tag{6.66}$$

де $f_k^0(x(k),u(k))$, $k=\overline{0,N}$ – скалярні функції.

Керування та траєкторію, які є розв’язком задачі (6.63) – (6.66), позначимо $\tilde{u}$ та $\tilde{x}$ і будемо називати оптимальним керуванням та оптимальною фазовою траєкторією відповідно.

Введемо функцію Гамільтона:

$$H_k(\psi(k+1),x(k),u(k))=\sum_{k=0}^{n}\psi_{k+1}^i f_k^i(x(k),u(k))-f_k^0(x(k),u(k))=$$

$$=\psi^T(k+1)f_k(x(k),u(k))-f_k^0(x(k),u(k)),$$

де функції $\psi(k)$ такі, що

$$\begin{aligned}\psi(k)&=-\frac{\partial f_k^0}{\partial x(k)}+\psi(k+1)\frac{\partial f_k}{\partial x(k)}=\\&=\frac{\partial H(\psi(k+1),x(k),u(k))}{\partial x(k)},k=\overline{N-1,0}\end{aligned} \tag{6.67}$$

$$\psi(N=-\frac{\partial f_N^0}{\partial x(N)}. \tag{6.68}$$

Теорема 6.4. (<u>Дискретний принцип максимуму</u>). Нехай $\tilde{x}$, $\tilde{u}$ – відповідно оптимальні фазова траєкторія та керування для задачі (6.63) – (6.66), $\tilde{\psi}(1),\dots,\tilde{\psi}(N)$ – розв’язок рівнянь (6.67), (6.68) при $x=\tilde{x}$, $u=\tilde{u}$.

Нехай

1) f_k^0, $k=\overline{0,N}$, f_k, $k=\overline{0,N-1}$ – неперервно-диференційовані за своїми аргументами.

Також для всіх $k = \overline{0, N-1}$ виконуються обмеження:

2) f_k^0 – опуклі за $u(k)$;

3) f_k – лінійні за $u(k)$;

4) G_k – опуклі замкнені множини, що мають внутрішні точки.

Тоді для довільних $k = \overline{0, N-1}$ гамільтоніан $H_k(\tilde{\psi}(k+1), \tilde{x}(k), u(k))$ досягає свого максимуму по $u(k) \in G_k$ в точці $\tilde{u}(k)$.

Зауваження 6.1. Якщо в задачі (6.63) – (6.66) функції f_k^0 опуклі, а f_k лінійні не тільки по керуванням, але й по фазовим змінним $x(k)$, то умови теореми 6.4 будуть і достатніми [7].

Зауваження 6.2. Функція Гамільтона H_k уздовж оптимальної траєкторії відрізняється від свого максимального значення на величину порядку $O(h)$, де h – крок різницевої схеми. Чим менше крок різницевої схеми, тим точніше виконується дискретний принцип максимуму. Якщо ж дискретна система не пов'язана з різницевою апроксимацією неперервних процесів, то принцип максимуму, взагалі кажучи, може не виконуватися.

Зауваження 6.3. У дискретних задачах оптимальні керування $\tilde{u}(k)$ при кожному k, $k = \overline{0, N-1}$ завжди є стаціонарними точками функції Гамільтона H_k, тобто

$$\left. \frac{\partial H_k}{\partial u(k)} \right|_{\tilde{u}(k) = u(k)} = 0.$$

РОЗДІЛ 7

7.1. ДВОЇСТІСТЬ ЗАДАЧ ОЦІНЮВАННЯ СТАНІВ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ ТА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДЕТЕРМІНОВАНИХ СИСТЕМ

З теорією оптимального керування тісно пов'язані задачі теорії оцінювання, яка є окремим досить повно розробленим напрямом. Обмежимося розглядом задачі оцінювання стану стохастичних систем із неперервним часом [4, 8].

Нехай стохастичний процес із неперервним часом задається співвідношеннями [8]:

$$dx = A(t)x(t)dt + d\upsilon \quad , \tag{7.1}$$

$$dy = C(t)x(t)dt + de, \tag{7.2}$$

де $x(t)$ – n-мірний вектор стану, $y(t)$ – p-мірний вектор спостережень. Вважаємо: $x(t_0)$ – початковий стан, математичне сподівання $Mx(t_0) = m$ – відомий сталий вектор, R_0 – коваріаційна матриця стану $x(t_0)$.

Припустимо, що $\{\upsilon(t), t \in T\}$, $\{e(t), t \in T\}$ – стохастичні процеси з некорельованими приростами та з коваріаційними функціями $R_1(s,t)$ і $R_2(s,t)$ відповідно, $s \in T, t \in T, T = \{t : -\infty < t < \infty\}$, процеси $\{\upsilon(t), t \in T\}$, $\{e(t), t \in T\}$ – взаємно некорельовані й не корельовані з випадковим вектором $x(t_0)$.

Вважаємо, що $A(t), C(t)$ – задані матриці відповідних розмірностей, елементи яких є неперервними функціями часу t.

Припустимо, що вихідний сигнал $y(t)$ спостерігається на інтервалі (t_0, t_1). Треба знайти найкращу оцінку вектора стану в момент часу t_1. Для повної постановки задачі потрібно задати вигляд допустимих оцінок та вказати, яка оцінка вважається найкращою.

За спостереженнями $y(t)$ на (t_0, t_1) будемо шукати оцінку скалярного добутку $a^T x(t_1)$ у вигляді, лінійному по $y(t)$:

$$a^T \hat{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} u^T(t) dy(t) + b^T m \ , \tag{7.3}$$

де a – довільний заданий сталий вектор, b – сталий вектор, що визначається з умови незміщенності оцінки, $u(t)$ – p-мірна вектор-функція, що вважається неперервною по t і є невідомою. Знак "–" у формулі (7.3) поставлений із метою отримання кінцевого результату в більш компактній формі.

Таким чином, оцінки вигляду (7.3) вважаються допустимими.

Найкращу оцінку будемо шукати з критерію:

$$M[a^T \hat{x}(t_1) - a^T x(t_1)]^2 \to \inf \ , \tag{7.4}$$

де $\inf$ береться за всіма допустимими оцінками. Отже, задача оцінювання поставлена.

У такій постановці задача оцінювання зводиться до знаходження функції $u(t)$ та сталого вектора b, які є невідомими.

Покажемо, що задача оцінки стану стохастичної системи є двоїстою до задачі керування детермінованою системою.

Для цього перепишемо критерій в іншому вигляді. З (7.2) і (7.3) отримаємо:

$$\begin{aligned} a^T \hat{x}(t_1) &= -\int_{t_0}^{t_1} u^T(t) dy(t) + b^T m = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [u^T(t) C x(t) dt + u^T(t) de(t)] + b^T m. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Надалі залежність величин від t там, де це не викликатиме непорозумінь, будемо опускати.

Уведемо вектор z як розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dz}{dt} = -A^T z - C^T u \tag{7.6}$$

з початковою умовою

$$z(t_1)=a\,. \tag{7.7}$$

Тоді матимемо:

$$a^T x(t_1)=z^T(t_1)x(t_1)=z^T(t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t_1} d[z^T(t)x(t)]\,. \tag{7.8}$$

Ураховуючи (7.1), (7.7), можемо записати:

$$\begin{aligned} d[z^T x] &= dz^T x+z^T dx= \\ &= -z^T Axdt-u^T Cxdt+z^T Axdt+z^T d\upsilon= \\ &= -u^T Cxdt+z^T d\upsilon. \end{aligned}$$

Підставимо отриманий вираз у (7.8):

$$a^T x(t_1)=z^T(t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t_1} d[-u^T Cx(t)dt+z^T d\upsilon(t)]\,. \tag{7.9}$$

З (7.5) і (7.9) знаходимо:

$$\begin{aligned} &a^T[x(t_1)-\hat{x}(t_1)]= \\ &=z^T(t_0)x(t_0)-b^T m+\int_{t_0}^{t_1} d[u^T(t)de(t)+z^T(t)d\upsilon(t)]\,. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Знайдемо математичне сподівання:

$$Ma^T[x(t_1)-\hat{x}(t_1)]=[z(t_0)-b]^T m\,.$$

Звідси, якщо покласти $z(t_0)=b$, то оцінка (7.5) буде незміщеною при всіх a та при довільному виборі u.

Піднесемо вираз (7.10) до квадрата та візьмемо математичне сподівання:

$$\begin{aligned} &M[a^T \hat{x}(t_1)-a^T x(t_1)]^2=[(z(t_0)-b)^T m]^2+z^T(t_0)R_0 x(t_0)+ \\ &+\int_{t_0}^{t_1}[z^T(t)R_1 z(t)+u^T(t)R_2 u(t)]dt \end{aligned} \tag{7.11}$$

Таким чином, знаходження функції u такої, що лінійна оцінка (7.3) є оптимальною в середньоквадратичному розумінні, еквівалентне задачі оптимального керування для лінійної детермінованої системи (7.6) з початковою умовою (7.7) та критерієм, в якому мінімізується квадратичний по u функціонал:

$$z^T(t_0)R_0x(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}[z^T(t)R_1z(t)+u^T(t)R_2u(t)]dt\to\inf_u . \quad (7.12)$$

Отже, довели теорему:

Теорема 7.1 (теорема двоїстості). Задача оцінювання стану системи, яка описується співвідношеннями (7.1) і (7.2) за умови, що найкраща оцінка шукається у класі лінійних оцінок вигляду (7.3) за середньоквадратичним критерієм (7.4), еквівалентна задачі знаходження оптимального керування для лінійної детермінованої системи (7.6), (7.7) з критерієм оптимальності (7.12).

Задача керування, що розглянута в теоремі двоїстості, дещо відрізняється в позначеннях від звичайного формулювання її в теорії лінійного оптимального керування. Щоб полегшити порівняння, сформулюємо спочатку відомі результати у стандартній формі.

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+B(t)u , \quad (7.13)$$

із заданою початковою умовою $x(t_0)=x_0$, для якої потрібно знайти керування, що мінімізує функціонал

$$x^T(t_1)Q_0x(t_1)+\int_{t_0}^{t_1}[z^T(t)Q_1x(t)+u^T(t)Q_2u(t)]dt . \quad (7.14)$$

Припускаємо, що матриці Q_0,Q_1 – додатно напіввизначені, Q_2 – додатно визначена. Елементи всіх матриць у задачі є неперервними функціями часу. Розв’язок такої задачі відомий [3,7]:

$$u=-Lx , \quad (7.15)$$

де

$$L=Q_2^{-1}B^TS , \quad (7.16)$$

де матриця S – розв’язок матричного рівняння Ріккаті

$$-\frac{dS}{dt}=A^T S+SA+Q_1-SBQ_2^{-1}B^T S \qquad (7.17)$$

з початковою умовою

$$S(t_1)=Q_0. \qquad (7.18)$$

Тобто, (7.15) – лінійний по x закон керування.

Якщо рівняння Ріккаті (7.17) з умовою (7.18) має розв'язок, то розв'язок (7.15), (7.16) наведеної задачі оптимального керування існує та є єдиним [7, 10].

Таким чином, із порівняння зі стандартним формулюванням випливає, що задача (7.6), (7.7), (7.12), яка розглянута в теоремі 7.1, має розв'язок:

$$u(t)=-K^T z(t), \qquad (7.19)$$

де

$$K=PC^T R_2^{-1}, \qquad (7.20)$$

матриця P – розв'язок матричного рівняння Ріккаті:

$$\frac{dP}{dt}=AP+PA^T+R_1-PC^T R_2^{-1}CP \qquad (7.21)$$

з початковою умовою

$$P(t_0)=R_0.$$

Нижче еквівалентність задачі оцінювання стану (7.6), (7.7), (7.12) і стандартної задачі оптимального керування (7.13), (7.14) проілюстрована таблицею, в якій указана відповідність позначень:

Стандартна задача оптимального керування	Задача оцінювання стану
t	$-t$
t_0	t_1
t_1	t_0
A	A^T

B	C^T
Q_0	R_0
Q_1	R_1
Q_2	R_2
S	P
L	K^T

7.2. ФІЛЬТР КАЛМАНА – Б'ЮСІ

У реальних системах керування часто використовується фільтр Калмана – Б'юсі, який дає оцінки поточних фазових координат, а тому входить до складу оберненого зв'язку системи. Для побудови фільтра Калмана – Б'юсі скористаємося результатами, отриманими вище.

Отже, за допомогою детермінованої теорії керування була визначена функція u у вигляді (7.19), яка дає найкращу оцінку. Запишемо цей результат так, щоб отримати для оцінки стохастичне диференціальне рівняння.

Оцінка задається формулою (7.5):

$$a^T \hat{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)dy(t) + b^T m$$

де u визначається за (7.19), (7.20).

З метою отримання стохастичного диференціального рівняння продиференціюємо вираз (7.5). Зауважимо, що u і b неявно залежать від t_1. Тому перепишемо (7.5) у такому вигляді, в якому ця залежність буде явною.

З рівняння (7.6) з урахуванням (7.19) знаходимо:

$$\frac{dz}{dt} = -A^T z - C^T u = -(A - KC)^T z\,. \tag{7.22}$$

Нехай матриця $\psi(t, t_1)$ – розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{d\psi}{dt} = A - KC)^T \psi \tag{7.23}$$

з умовою

$$\psi(t_1,t_1)=I, \qquad (7.24)$$

де I – одинична матриця відповідної розмірності.

Тоді розв'язок рівняння (7.22) з початковою умовою (7.7): $z(t_1)=a$ дорівнює:

$$z(t)=\psi^T(t_1,t)a. \qquad (7.25)$$

Отже,

$$u(t)=-K^T\psi^T(t_1,t)a, \qquad (7.26)$$

$$b=z(t_0)=\psi^T(t_1,t_0)a. \qquad (7.27)$$

Тоді вираз (7.5) для оцінки набуде вигляду:

$$a^T\hat{x}(t_1)=a^T\int_{t_0}^{t_1}\psi(t_1,t)Kdy(t)+a^T\psi(t_1,t_0)m \qquad (7.28)$$

Значить, якщо виберемо

$$\hat{x}(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\psi(t_1,t)Kdy(t)+\psi(t_1,t_0)m, \qquad (7.29)$$

то отримаємо оцінку $\hat{x}$ таку, що середньоквадратична похибка оцінювання буде мінімальною при всіх a.

Диференціюємо вираз (7.29) і отримуємо

$$\begin{aligned} d\hat{x}(t_1) &= \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial\psi(t_1,t)}{\partial t_1}Kdy(t)+\frac{\partial\psi(t_1,t_0)}{\partial t_1}m\right]dt_1+Kdy(t_1)= \\ &=(A-KC)\hat{x}(t_1)dt_1+Kdy(t_1)= \qquad (7.30) \\ &=A\hat{x}(t_1)dt_1+K[dy(t_1)-C\hat{x}(t_1)dt_1]. \end{aligned}$$

Таким чином, лінійна оцінка, що мінімізує середньоквадратичну похибку оцінювання, задовольняє лінійне стохастичне диференціальне рівняння (7.30). Початкове значення оцінки отримаємо з урахуванням умови (7.29):

$$\hat{x}(t_0)=m.$$

Віднімемо (7.30) із (7.1) і знайдемо, що вектор похибки оцінювання $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ задовольняє лінійне стохастичне диференціальне рівняння:

$$d\tilde{x} = (A - KC)\tilde{x}dt_1 + d\upsilon - Kde\,. \qquad (7.31)$$

Для коваріації похибки оцінювання можна отримати диференціальне рівняння [8]:

$$\frac{dQ}{dt} = AQ + QA^T + R_1 - KCQ \_ QC^T K^T + KR_2K^T = \\ = AQ + QA^T + R_1 - PC^T R_2^{-1} CQ - QC^T R_2^{-1} CP + PC^T R_2^{-1} CP \qquad (7.32)$$

з початковою умовою

$$Q(t_0) = R_0 \quad . \qquad (7.33)$$

Віднімемо рівняння (7.32) з рівняння (7.21) і отримаємо:

$$\frac{d(Q-P)}{dt} =$$

$$= A(Q-P) + (Q-P)A^T - (Q-P)C^T R_2^{-1} CP - PC^T R_2^{-1} C(Q-P).$$

Оскільки $Q(t_0) = P(t_0) = R_0$, то $Qt) = P(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ [8].

Таким чином, коваріація похибки оцінювання визначається рівнянням (7.21) з початковою умовою $P(t_0) = R_0$.

Отже, ураховуючи, що момент часу t_1 може вибиратися довільно, довели теорему.

Теорема 7.2 (Калмана – Б'юсі). Лінійна оцінка вектора стану для системи, яка описується співвідношеннями (7.1), (7.2), задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$d\hat{x}(t) = A\hat{x}dt + K[dy - C\hat{x}dt]\,, \qquad (7.34)$$

$$\hat{x}(t_0) = Mx(t_0) = m\,, \qquad (7.35)$$

де $K = PC^T R_2^{-1}$, P – коваріація похибки оцінювання, що задовольняє рівняння:

$$\frac{dP}{dt} = AP + PA + R_1 - PC^T R_2^{-1} CP,$$

$$P(t_0) = R_0\,.$$

Зауваження 7.1. Оскільки рівняння (7.34) є стохастичним диференціальним рівнянням, то його розв'язок можна зобразити лише за допомогою стохастичних інтегралів [8].

Зауваження 7.2. За умови, що стохастичні процеси $\{x(t), t \in T\}$ і $\{y(t), t \in T\}$ мають гаусів розподіл, умовний розподіл $x(t)$ відносно відомого $y(s), t_0 \le s \le t$ також буде гаусів з умовним математичним сподіванням $M\, x/y = \hat{x}$ та умовною коваріацією P [8].

РОЗДІЛ 8

8.1. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС КІНЕМАТИЧНИХ СХЕМ МАНІПУЛЯЦІЙНИХ РОБОТІВ.

Від математичного опису об’єкту дослідження значною мірою залежать можливості розробки нових постановок задач, а значить, і встановлення та вивчення нових специфічних або загальних властивостей даного об’єкту. Використання певного формалізму опису обмежується рамками того класу задач, які за його допомогою можна поставити і дослідити. На базі такого формалізму будуються відповідні математичні моделі, які кладуться в основу створення підходів і методів розв’язування теоретичних і прикладних задач. Відзначимо, що маніпуляційні роботи складаються з твердих тіл (ланок), послідовно з’єднаних між собою керовними кінематичними парами V класу, тобто кожне тіло (елементарна ланка) системи в контакті з іншими може мати тільки одну ступінь рухливості, якою можна керувати. Крім роботів до класу маніпуляційних систем можна віднести, наприклад, підвіски автомобілів, екскаватори з багатоланковими виконуючими механізмами, протези кінцівок людини та багато інших.

Одним із перших і досить ефективних формалізмів опису багатоланкових маніпуляційних систем був запропонований в 1955р. Денавітом і Нартенбергом, який основувався на застосуванні матриць однорідних координат розміру 4×4. Широке використання даного формалізму в подальшому і, особливо для задач робототехніки, пов’язане з високою універсальністю опису та можливостями на його основі розробки постановок і вирішення проблем геометрії, кінематики, динаміки маніпуляційних систем, а також ефективного використання матриць однорідних координат для графічного відображення об’єкту дослідження. До недоліків наведеного опису слід віднести значну обчислювальну складність побудови математичних моделей та надмірність опису (не всі елементи матриць однорідних перетворень несуть інформаційне навантаження).

Математичний опис складних розімкнених маніпуляційних систем був запропонований Є.П.Поповим та ін., який базувався на використанні блочних матриць. Рівняння кінематики та динаміки записувались за допомогою блочних квазідіагональних та квазітрикутних матриць розміру $3n \times 3n$, де n - розмірність системи. До переваг такого підходу слід віднести компактність запису таких моделей та можливість їхнього подальшого використання для синтезу систем керування, до недоліків - велику обчислювальну складність, нераціональне використання ресурсів обчислювальних пристроїв (необхідність зберігання великих масивів інформації).
Значний вклад в розробку формалізмів опису складних механічних систем був зроблений В.Г.Кореньовим. Модель системи подається у вигляді агрегату твердих тіл. Кожне з твердих тіл описується рівняннями руху, а для утворення системи (агрегату) записуються рівняння зв’язку між цими тілами. Для опису об’єктів дослідження вводиться множина “індексних позначень”, які розділяються на класи і цим класам приписуються різні властивості та вводяться основні дії над ними. В рамках індексних позначень записуються основні теореми механіки, які використовуються для створення математичних моделей об’єкту.

Серед інших формалізмів опису складних маніпуляційних систем можна вказати на формалізм опису методом зв’язаних графів, застосування теорії гвинтів, теорії кватерніонів та ін. Для наведених вище формалізмів опису маніпуляційних систем характерна складність їхньої алгоритмічної та програмної реалізації для комп’ютерного дослідження таких систем. Враховуючи переваги і недоліки різних формалізмів з орієнтацію на компютерне моделювання будемо розглядати структурований підхід до представлення такого класу систем, який ефективно вписується в концепції сучасного об’єктно-орієнтованого програмування. Маніпуляційний робот як система описується структуровано на основі використання опису структур базисних об’єктів, операцій над цими структурами та їх елементами, які визначають структуру системи в цілому. У загальному випадку об’єкт через структури його підсистем подається у вигляді дерева або графу. На цій основі генерується математична модель об’єкту, яка включає в себе встановлення залежностей між певними елементами системи на рівні геометричних переміщень підсистем(ланок), розрахунку кінематичних та силових співвідношень, побудови рівнянь руху, виходячи з того чи іншого принципу класичної механіки. Для організації системи керування об’єктом виділені структури керуючих вхідних сигналів та керованих вихідних векторів стану створюваної системи.

Отже, для об’єкта вибирається зв’язана з ним декартова система координат $OXYZ$ (O - одна з можливих точок приєднання з іншими об’єктами (ланками) або центр мас, вісі OX, OY, OZ з спрямними ортами e_1, e_2, e_3 орієнтовані узгоджено з напрямками початкового з’єднання або, наприклад, вздовж осей інерції. Структура базисного об’єкта (елементарної ланки) задається трійкою параметрів

$$STRP = \{\{b\}, \{C\}_b, \Omega\}, \tag{8.1}$$

де $\{b\}$- множина точок можливого приєднання інших об’єктів до даного;

$\{C\}_b$ - множина матриць $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ розмірності 3x3 з властивостями унітарності: $CC^T = E,$ правої впорядкованості: $c_3 = c_1 \times c_2,$ - для означення можливих напрямків c_1 та орієнтації c_2 приєднання об’єктів до даного об’єкта в точці b; Ω - множина точок об’єкту.

Наведемо деякі операції, які можна виконувати над об’єктами. Множину точок об’єкту Ω у системі координат OXYZ представимо у вигляді: $\Omega = \{r : \Phi_j(r) \le d_j, j = \overline{1,N}\}$ де $\Phi_j(r)$- задана функція; r - довільна точка об’єкту.

Нехай $O_1X_1Y_1Z_1$ - деяка система координат, а точка O_1 - координати її початку, $K_1 = \{k_1, k_2, k_3\}$ - матриця ортів (e_1, e_2, e_3). Тоді множину Ω в цій системі координат можна отримати за формулами

$$\Omega = \{r : \Phi_j(K_1(r - O_1)) \le d_j, j = \overline{1,N}\} \tag{8.2}$$

$$b_1 = O_1 + K_1 b, C_1 = K_1 C.$$

Операція масштабування об’єкту заключається у перетворенні всіх точок з деяким коеффіцієнтом z :

$$\Omega=\left\{r:\Phi_j\left(K_1\frac{(r-O_1)}{z}\right)\le d_j,\ j=\overline{1,N}\right\}, \tag{8.3}$$

$b_1=O_1+K_1bz.$

При цьому матриця спрямних ортів системи залишається незмінною.

Для здійснення розрахунку положень точок об’єкту після повороту навколо осі p на певний кут α, необхідно знайти матрицю спрямних ортів після повороту. Для цього скористаємось формулою скінченних приростів (формулою Родріга):

$$A(\alpha,p)=\cos\alpha E+(1-\cos\alpha)p\,p^T+\sin\alpha\begin{bmatrix} O & -p_3 & p_2 \\ p_3 & O & p_1 \\ -p_2 & p_1 & O \end{bmatrix}. \tag{8.4}$$

Маємо $K=K_1\cdot A(\alpha,P)$.

Операцію об’єднання двох структур запишемо у вигляді структури

$$\{STRP1,(b_1,C_1),\Delta,STRP2,(b_2,C_2),\}, \tag{8.5}$$

де (b_j,C_j) - точка та матриця приєднання в системі об’єкта p_j з приєднуваним об’єктом; $\Delta(j)$ - тип з’єднання (обертання навколо чи переміщення вздовж осі C_{1j}): $\Delta=1$ - обертання; $\Delta=0$ -переміщення вздовж осі (надалі також будем користуватись позначенням Δ_j для задання типу послідовного з’єднання структур).

Для частинного випадку, коли $b_2=O_2, C_2=(e_1,e_2,e_3)$, правило об’єднання цих структур буде: $C_1=K_2C_2$.

Між структурами базисних об’єктів може бути взаємодія на рівні вищевказаних операцій. При збірці об’єкта виділяються його вхідні параметри та визначаються параметри керування підсистемами, а також вихідні параметри для системи керування.

На основі структурованого подання можна навести опис геометричних, кінематичних та динамічних взаємозв’язків між елементами об’єкту. Положення точок s та відповідні матриці ортів J_S -ї системи координат у J-й через відповідні структури об’єктів визначатиметься наступними формулами:

$$O(J_S)=O(J)+K(J)\left[b(J_S)+(1-\Delta(J_S))C(J_S)e_1\theta(J_S)\right], \qquad (8.6)$$

$$K(J_S)=K(J)C(J_S)\left[\Delta(J_S)A^T(\theta e_1)+(1-\Delta(J_S))E\right], \qquad (8.7)$$

де J відповідає відносній кореневій позиції; J_S - s-му відгалудженню для кореневої позиції; $\theta(J_S)$- параметр вхідного сигналу; θ - узагальнена координата.

Кінематичний рівень взаємодії двох об'єктів системи які представлені своїми структурами, включає встановлення залежностей для розрахунку кутових та лінійних швидкостей та прискорень:

$$\omega(J_S)=\omega(J)+\Delta(J_S)k_1(J_S)\dot{\theta}(J_S),$$

$$\varepsilon(J_S)=\varepsilon(J)+\Delta(J_S)k_1(J_S)\ddot{\theta}(J_S)+\Delta(J_S)\omega(J)k_1(J_S)\dot{\theta}(J_S),$$

$$\begin{gathered}V(J_S)=V(J)-\omega(J)\times[K(J)(b(J_S)-b(J))]+\\+\omega(J_S)\times[K(J_S)(b(J_S)+(1-\Delta(J_S))e_1)]+\\+(1-\omega(J_S))k_1(J_S)\dot{\theta}(J_S),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}W(J_S)=W(J)-\varepsilon(J)\times[K(J)(b(J_S)-b(J))]-\\-\varepsilon(J)\times[K(J_S)(b(J_S)+(1-\Delta(J_S))e_1\theta(J_S))]+\\+\omega(J_S)\times[\omega(J_S)\times(K(J)(b(J_S)+(1-\Delta(J_S))e_1\theta(J_S)))]+\quad+(1-\Delta(J_S))k_1(J_S)\theta(J_S)+\\+2(1-\Delta(J_S))\omega(J)\times k_1(J_S)\dot{\theta}(J_S),\end{gathered}$$

де $\theta(J_S),\dot{\theta}(J_S),\ddot{\theta}(J_S),$- вхідні сигнали, $w(\cdot),\varepsilon(\cdot)$- відповідно кутові швидкість і прискорення, $V(\cdot),W(\cdot)$ - лінійні швидкість та прискорення.

На основі стуктурованого опису елементарних ланок об'єкту зв'язок між реакціями сил та моментів сил взаємодії двох об'єктів буде розраховуватись за наступними формулами:

$$\sum_{i=1}^{m} R(J_S)=R(J)-G(J_S)e_3,$$

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{m} Q(J_S)=Q(J)-K(J_S)b(J_S)\times G(J_S)e_3-\\-K(J_S)[b(J_S)+(1-\Delta(J_S))e_1\theta(J_S)]\times R(J_S).\end{gathered}$$

Тут за вхідний сигнал береться узагальнена сила прикладена до J_S-ї підсистеми:- $k_1^T(J_S)[\Delta(J_S)Q(J_S)+(1-\Delta(J_S))R(J_S)]$; за вихідний -

$R(J_S), Q(J_S)$ - відповідно реакції сили та моменту сил J_S-ї підсистеми; $G(J_S)$ - маса J_S-ї підсистеми.

Динамічна модель взаємодії в силових співвідношеннях з урахуванням сил та моментів інерції

$$F(J) = m(J)W(J),$$

$$M(J) = K(J)\left[I(J)K^T(J)\varepsilon(J) + \left(K^T(J)\omega(J)\right)\times\left(I(J)K^T(J)\omega(J)\right)\right],$$

де вхідний сигнал: $K(J_S)[\Delta(J_S)Q(J_S) + (1-\Delta(J_S))R(J_S)]$; вихідний: $F(j)$ -сила, $M(j)$ - момент сил; $m(j)$, $I(j)$ - відповідно маса і матриця інерції j-ї підсистеми.

Таким чином, структурований підхід дозволяє досить ефективно описувати складну механічну систему через її елементарні складові частини, встановлювати залежності між елементами структур та досліджувати вплив цих елементів на всю систему в цілому.

Нехай дві сусідні ланки розімкненого просторового ланцюга, що складається з твердих недеформовних тіл (ланок), утворюють кінематичну пару обертального чи телескопічного типу, кількість ступенів рухливості якої визначається можливими незалежними рухами однієї ланки пари відносно іншої. Будемо вважати, що кожна кінематична пара має один ступінь рухливості, а якщо це не так, то вводяться фіктивні пари з ланками нульової довжини. За такого способу опису маніпуляційної системи кількість ступенів рухливості і кількість ланок маніпуляційної системи співпадають. Послідовність з'єднань кінематичних пар утворює кінематичну схему маніпуляційної системи.

Пов'яжемо з кожною ланкою системи свою декартову систему координат з центром на початку ланки O_i (умовний центр i-ї кінематичної пари, вибраний на вісі з'єднання) і віссю O_iX_i, спрямованою до центру $(i+1)$-ї кінематичної пари O_{i+1}. В силу такого формалізму одну з вісей, що залишились, можна накласти на вісь e_i обертання чи поступального переміщення, а третю вісь вибрати таким чином, щоб система координат була правою. Систему координат i-ї ланки будемо називати зв'язаною або відносною. За абсолютну (інерціальну) систему координат вибиремо, якщо інше не буде оговорено спеціально, систему координат, зв'язану з початковою (нульовою) ланкою кінематичної схеми.

Тоді стан елементарної ланки маніпуляційної системи визначається через стани ланок в системах координат, зв'язаних з ними, по відношенню до фіксованої абсолютної системи координат. Стан кожної ланки маніпуляційної системи визначається деякими характерними величинами, до яких відносяться вектори положення, підходу і орієнтації.

Означення 8.1. Вектором $s(j) = (s_1, s_2, s_3)^T$ стану j-ї ланки маніпуляційної системи будемо називати відповідний радіус-вектору $A_j(l_j, 0, 0)$ вектор в абсолютній системі координат.

Означення 8.2. Вектором $k(j) = (k_1, k_2, k_3)^T$ підходу j-ї ланки маніпуляційної системи будемо називати відповідний вектору $e_{j_1} = (1,0,0)^T$ вектор в абсолютній системі координат.

Означення 8.3. Вектором $r(j) = (r_1, r_2, r_3)^T$ орієнтації j-ї ланки маніпуляційної системи назвемо відповідний вектору $e_{j_2} = (0,1,0)^T$ вектор в абсолютній системі координат.

Означення 8.4. Трійку $(s(j), k(j), r(j))$ назвемо повним станом j-ї ланки в абсолютній системі координат.

При цьому вектори $k(j), r(j)$ узгоджені умовами:

$$k^T(j) r(j) = k_1 r_1 + k_2 r_2 + k_3 r_3 = 0,$$
$$\|k(j)\| = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{\frac{1}{2}} = 1, \tag{8.8}$$
$$\|r(j)\| = (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

За допомогою спеціального вибору координатних осей зв'язаних з ланками систем координат можна добитись задання відносного стану сусідніх ланок за допомогою чотирьох параметрів (формалізм Денавіта-Хартенберга), три з яких фіксовані, а четвертий параметр є змінним і визначає лінійне чи кутове зміщення наступної ланки відносно вісі кінематичної пари.

Зазвичай, при конструюванні кінематичних схем сучасних маніпуляційних систем застосовуються пари, вісі з'єднання яких перпендикулярні чи паралельні між собою. Ефективність таких схем підверджується, насамперед, вирішенням задач кінематики (особливо в явному аналітичному вигляді), можливістю розгляду певного скінченного параметризованого класу кінематичних схем і вибору серед них оптимальних відносно заданих критеріїв якості, а також аналогіями з схемами для локомоцій та маніпуляцій в природі. Стан наступної ланки відносно попередньої для таких схем може визначатися за допомогою двох параметрів - змінною величиною, яка характеризує зміщення відносно вісі кінематичної пари, та сталим вектором, що з`єднує центри сусідніх кінематичних пар. Це зміщення називається узагальненою координатою маніпуляційної системи, яка відповідає ступеню рухливості пари. Відзначимо, що додатнє значення узагальненої координати визначається наступним чином: для обертальних пар це поворот проти годинникової стрілки, для поступальних зміщень - рух в напрямку системи координат, пов'язаної з попередньою ланкою. Норма сталого вектора, що з'єднує центри сусідніх кінематичних пар визначає довжину ланки кінематичної схеми.

Таким чином, кінематична схема може бути описана за допомогою послідовності двопараметричних перетворень (іноді шляхом введення фіктивних ланок та сталих матриць ортогонального повороту).

Введемо відображення $\xi:\{1,2,\ldots,n\}\rightarrow\{1,2,3,4\}$, яке кожній ($i$ -й) кінематичній парі ставить у відповідність її тип за правилом: $\xi(i)=k$, де $k\in\{1,2,3\}$ означає обертальний тип відносно певної вісі: 1 - поворот навколо вісі O_iX_i; 2 - поворот навколо вісі O_iY_i; 3 - поворот навколо вісі O_iZ_i зв`язаної з ланкою системи координат;

$\xi(i)=4$ означає поступальний тип з'єднання кінематичної пари i -ї та $(i+1)$ -ї ланок.

Згідно до введеного формалізму, для довільної n -ланкової мапіпуляційної системи положення ланки в системах координат інших ланок можна знайти за допомогою системи рекурентних співвідношень:

$$\begin{cases} a(i-1,j) = P_i^T(\theta_i)a(i,j) + p(\theta_i, l_{i-1}), \\ \quad a(j,j) = r_j, j = \overline{1,n}, i = \overline{j,1} \end{cases} \tag{8.9}$$

де $a(i,j)$ - довільний радіус-вектор деякої точки r_j j-ї ланки в i-й системі координат; $l_0 = 0$; $P_i(\theta) \in \mathrm{P} = \{P^1, P^2, P^3, P^4\}$ - множина матриць ортогонального повороту відносно координатних осей $P^k, k = \overline{1,3}$ та $P^4 = E$ - матриця тотожнього перетворення:

$$P^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, P^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{8.10}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$p_i(\theta_i, l_{i-1}) = l_{i-1_X} e_{i-1_1} + (1-\Delta(i))\theta_i b_i = l_{i-1} + (1-\Delta(i))\theta_i b_i, \tag{8.11}$$

$b_i = \left\{ \tilde{P}_i^T e_{i_1}, -e_{i-1_1} \right\}$ - перше значення, якщо i-та ланка рухається вздовж вісі e_{i_1}, а друге - якщо вздовж вісі e_{i-1_1}, $\tilde{P}_i$ - стала ортонормована матриця, яка може бути одною з матриць повороту при конкретному значенні узагальненої координати θ, зокрема, може співпадати з матрицею тотожнього перетворення E.

Відзначимо, що всі описані вище вектори є векторами-стовпчиками, наприклад, $r_i = (x_i, y_i, z_i)^T = x_i e_{i_1} + y_i e_{i_2} + z_i e_{i_3}$, де $e_{i_1} = (1{,}0{,}0)^T$, $e_{i_2} = (0{,}1{,}0)^T$, $e_{i_3} = (0{,}0{,}1)^T$.

Довжину i-ї ланки позначатимемо через l_i. Очевидно, що $l_i = l_{i_X} e_{i_1}$ в i-й системі координат, де $l_{i_X} = |O_i O_{i+1}|$.

8.2.ПРОБЛЕМИ ПЛАНУВАННЯ СТАНІВ МАНІПУЛЯЦІЙНИХ РОБОТІВ.

Розглянемо задачі планування станів маніпуляційних систем, які виникають через необхідність перерахування положень системи з трьохмірного евклідового простору в значення узагальнених координат і навпаки. Це пов’язано з тим, що об’єкт дослідження задається у абсолютній системі координат, а керуючі діяння формуються по значеннях узагальнених координат. Технічно набагато простіше отримати значення узагальнених координат, використовуючи перетворювачі для вимірювання, а потім, розв’язавши пряму задачу кінематики, знайти реальне положення маніпуляційної системи в абсолютній системі координат. Знаходження значень узагальнених координат, які будуть відповідати певному (заданому) стану маніпуляційної системи в абсолютній системі координат (обернена задача кінематики) є набагато складнішою задачою, яка не завжди має розв’язок в силу недосяжності даного положення або таких розв’язків може бути ціла множина. Одержати розв’язок оберненої задачі кінематики в явному (аналітичному) вигляді вдається тільки для дуже обмеженої кількості кінематичних схем, причому, як правило, це схеми в яких вісі кінематичних пар взаємопаралельні або взаємоперпендикулярні.

Для постановок задач планування станів введемо певні означення. За початковий стан виберемо такий, при якому ланки маніпуляційної системи витягнуті вздовж певної осі (наприклад, *OX*), інші осі узгоджені так, щоб система координат була правою. Цього можна досягти поворотами на відповідний кут, вводячи додаткові фіктивні кінематичні пари. Упорядкована по зростанню від основи послідовність узагальнених координат утворює вектор узагальнених координат $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n)$. В подальшому будемо вважати, що $\theta \in R^n$, де R^n - n-мірний простір, наділений стандартною евклідовою структурою. Кожному такому вектору відповідає конкретна конфігурація маніпуляційної системи в трьохмірному просторі, тобто, за допомогою перетворень (8.1)-(8.4) існує відображення $\theta \in \Omega \subseteq R^n$ в $a \in \mathrm{A} \subseteq R^3$.

Задачу знаходження повного стану (s,k,r) n-тої ланки маніпуляційної системи за відомим вектором узагальнених координат $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n)$ будемо інтерпретувати як задачу Коші для дискретної системи керування, якщо номер ланки розглядати як дискретний момент часу, стан кожної ланки в базовій системі координат - як фазовий стан системи, а узагальнені координати - як параметри керування.

Отримаємо

$$s = a_1(0), k = a_2(0), r = a_3(0), \tag{8.12}$$

де $a_1(0), a_2(0), a_3(0)$ - є розв'язками наступних задач Коші:

$$a_1(j) = P_{j+1}^T(\theta_{j+1})a_1(j+1) + p(\theta_{j+1}, l_j), \tag{8.13}$$

$$a_2(j) = P_{j+1}^T(\theta_{j+1})a_2(j+1), \tag{8.14}$$

$$a_3(j) = P_{j+1}^T(\theta_{j+1})a_3(j+1), j = \overline{n-1,0}, \tag{8.15}$$

за початкових умов відповідно:

$$a_1(n) = l_n e_{n_1}, \tag{8.16}$$

$$a_2(n) = e_{n_1}, \tag{8.17}$$

$$a_3(n) = e_{n_2}. \tag{8.18}$$

Задачу оберненого планування станів (обернену задачу кінематики) запишемо як задачу оптимального керування дискретних систем (8.13)-(8.15) з граничними умовами (8.16)-(8.18) за наступного критерію якості:

$$F = \arg\min_{\theta\in\Theta}\left\{\alpha_1\left\|a_1(0) - s'\right\|^2 + \alpha_2\left\|a_2(0) - k'\right\|^2 + \alpha_3\left\|a_3(0) - r'\right\|^2\right\}, \tag{8.19}$$

де Θ - множина допустимих значень узагальнених координат:

$$\Theta = \left\{\theta_i : \theta_{i\min} \le \theta_i \le \theta_{i\max}, i = \overline{1,n}\right\}, \tag{8.20}$$

$\theta_{i\min}, \theta_{i\max}$ - задані значення; $\alpha_i \ge 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ вагові коефіцієнти; $\left(s', k', r'\right)$ - заданий цільовий стан n-ї ланки маніпуляційної системи в абсолютній системі координат.

Використовуючи принцип максимуму Понтрягіна, для знаходження вектора узагальнених координат θ^*, який доставляє мінімум функціоналу (8.19) і задовольняє системам (8.13)-(8.18), застосуємо градієнтну процедуру:

$$\theta_i(k) = \Pi_\Theta\left\{\theta_i(k-1) + \frac{\gamma_k}{\left\|gradH(\cdot)\right\|_{\theta_i(k-1)}} \times \right. \tag{8.21}$$

$$\times \frac{\partial}{\partial\theta_i(k-1)} H\big(a_1(i), a_2(i), a_3(i), \theta_i(k-1), \varphi_1(i-1), \varphi_2(i-1), \varphi_3(i-1), i\big)\ \Big\},$$

де $H(\cdot)$ - функція Гамільтона-Понтрягіна, яка має вигляд

$$\begin{aligned} &H(a_1(i), a_2(i), a_3(i), \theta_i(k-1), \varphi_1\ (i-1), \varphi_2\ (i-1), \varphi_3\ (i-1), i) = \\ &= \varphi_1{}^T(i-1)\left[P_i^T(\theta_i(k-1))a_1(i) + p_i(\theta_i(k-1), l_{i-1})\right] + \\ &+ \varphi_2{}^T(i-1)P_i^T(\theta_i(k-1))a_2(i) + \\ &+ \varphi_3{}^T(i-1)P_i^T(\theta_i(k-1))a_3(i), \end{aligned} \qquad (8.22)$$

а функції $\varphi_j(i), j = \overline{1,3}$, є розв'язками наступних спряжених систем

$$\begin{aligned} &\varphi_1(i) = P_i(\theta_i(k-1))\varphi_1(i-1), \varphi_1(0) = \alpha_1(s' - a_1(0, \theta(k-1))), \\ &\varphi_3(i) = P_i(\theta_i(k-1))\varphi_3(i-1), \varphi_3(0) = \alpha_3(k' - a_3(0, \theta(k-1))), \\ &\varphi_3(i) = P_i(\theta_i(k-1))\varphi_3(i-1), \varphi_3(0) = \alpha_3(r' - a_3(0, \theta(k-1))), \\ &i = \overline{1, n}; k = \overline{1, N}; \theta(0) = \theta, \theta(N) = \theta^*; \end{aligned}$$

γ_k - крок ітерації; N - кількість ітерацій, яка задається або визначається з умов точності; Π_Θ - операція проектування на множину (8.20); $a_1(0, \theta(k-1))$, $a_2(0, \theta(k-1)), a_3(0, \theta(k-1))$ - відповідно розв'язки задач (8.13)-(8.18) при $\theta(k-1) = (\theta_1(k-1), \ldots \theta_n(k-1))$.

Відзначимо, що вагові множники, які входять до функціоналу, дають можливість управляти послідовністю зміни узагальнених координат, забезпечуючи, цим самим, певну "якість" траєкторії. Зрозуміло, що коли вектор узагальнених координат θ^* доставляє мінімум функціоналу (8.19), то величина $I = \sum_{i=1}^{n} \left|\theta_i - \theta_i^*\right|$, яка називається об'ємом руху, приймає мінімальне значення.

Аналогічну процедуру чисельного розв'язання оберненої задачі планування станів можна записати в рамках формалізму, основаному на структурованому підході. Для цього досить скористатись рівняннями (8.6), (8.7) в яких покласти $J_S = J + 1$ і задати початкові умови: $O(0) = 0,\ K(0) = E.$

Функціонал (8.19) в цьому випадку можна подати наступним чином:

$$F = \underset{\theta \in \Theta}{\arg\min} \Big\{ \left\| O(n+1) - s' \right\|^2 +$$

$$+ tr\Big[(K(n+1) - (k', r', k' \times r')^T (K(n+1) - (k', r', k' \times r') \Big] \Big\}.$$

Таким чином, використання формалізму опису маніпуляційних систем (8.9)-(8.11) дозволило задачі планування станів інтерпретувати як задачі теорії керування дискретними системами і, отже, для їх вирішення скористатися ефективними методами, розробленими для дослідження таких систем.

Зазначимо, що інтерпретація задачі оберного планування станів як задачі оптимального керування дискретних систем і використання функції Гамільтона-Понтрягіна дозволили знаходити градієнт функціоналу (8.19) кількістю арифметичних операцій, яка лінійно залежить від кількості узагальнених координат маніпуляційної системи, що важливо для розв'язання цих задач в режимі реального часу.

До переваг вказаного формалізму слід віднести простоту і наглядність опису та мінімальність необхідних для побудови моделей параметрів. Дане спрощене подання дозволяє робити постановки задач по дослідженню певних властивостей маніпуляційної системи, використовуючи тільки необхідні для вирішення цієї задачі параметри. Наприклад, для дослідження та оптимізації областей досяжності станів маніпуційної системи використовуються тільки параметри, що характеризують довжини ланок та типи кінематичних з'єднань; для побудови рівнянь динаміки використовуються знання про типи з'єднань та динамічні характеристики ланок такі як маса, статичні та динамічні моменти розподілу мас і т.п.

8.3.ПОБУДОВА ПРОГРАМНИХ РУХІВ МАНІПУЛЯЦІЙНИХ РОБОТІВ.

Нехай є деяка скінченна послідовність точок - значень узагальнених координат, отриманих на етапі вирішення оберненої задачі планування станів. Потрібно побудувати неперервну за часом залежність узагальнених координат, яка у відомі дискретні моменти часу збігається з заданими значеннями. Іншими словами, потрібно побудувати інтерполяційний поліном за його відомими значеннями у вузлах.

Припустимо, що кожна ступінь свободи маніпуляційного робота і відповідна їй узагальнена координата керується незалежним приводом, так що інтерполювання можна зробити окремо по кожній з узагальнених координат. Серед значної кількості методів вирішення задачі побудови інтерполяційних поліномів велике застосування отримала інтерполяція за допомогою сплайнів, що має певні зручності в порівнянні з традиційними поліномами Лагранжа, Ньютона, Гауса та ін. при реалізації на комп'ютері.

Відзначимо, що для інтерполяції механічних рухів широко використовуються кубічні сплайни - алгебраїчні поліноми третього ступеня з постійними коефіцієнтами на кожному з інтервалів.

Нехай $t_1, t_2, ..., t_n$ - задані інтервали часу (вузли), а $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ - значення інтерпольованої функції в цих вузлах, тобто $\theta(t_i) = \theta_i,\ i = \overline{1,n}$ - одна із узагальнених координат. Тоді для планування траєкторії руху цієї узагальненої координати будемо у вигляді поліному третього ступеня

$$Q(q,t) \overset{\Delta}{=} q_i(t) = \sum_{l=0}^{3} a_i^{(l)} (t_{i+1} - t)^l, \tag{8.23}$$

тобто поліном Q на кожному із інтервалів $[t_i, t_{i+1}]$ дорівнює $q_i(t)$.

Відзначимо, що поліноми $q_i(t)$ неперервні на $[t_i, t_{i+1}]$ разом зі своїми першою і другою похідними, тобто $q_i(t) \in C^2[t_i, t_{i+1}]$.

Для однозначного знаходження коефіцієнтів $a_i^{(l)}$, кількість які дорівнює 4(n-1), необхідно задати стільки ж умов. Ними є:

1. Вимога проходження полінома через задані значення у вузлах (n).
2. Неперервність полінома Q у внутрішніх вузлах (n-2).
3. Неперервність першої і другої похідних у внутрішніх вузлах 2(n-2).

Далі потрібно задати ще дві умови для однозначного визначення коефіцієнтів $a_i^{(l)}$. Такими умовами можуть, наприклад, бути

$$\dot{q}_i(t_1) = \dot{\theta}(t_1);\ \dot{q}_{n-1}(t_n) = \dot{\theta}(t_n) \tag{8.24}$$

$$\ddot{q}_i(t_1) = \ddot{\theta}(t_1);\ \ddot{q}_{n-1}(t_n) = \ddot{\theta}(t_n) \tag{8.25}$$

$$q_1^{(r)}(t_1) = q_{n-1}^{(r)}(t_n),\ r = 1{,}2 \tag{8.26}$$

Остання умова задається, коли θ - періодична функція з періодом $[t_n, t_1]$. Можна задавати і інші умови.

Запишемо поліном $Q(q,t)$ в явному вигляді та обчислимо його похідні

$$q_i(t) = a_i^{(0)} + a_i^{(1)}(t_{i+1} - t) + a_i^{(2)}(t_{i+1} - t)^2 + a_i^{(3)}(t_{i+1} - t)^3$$

$$\dot{q}_i(t) = -a_i^{(1)} - 2a_i^{(2)}(t_{i+1} - t) - 3a_i^{(3)}(t_{i+1} - t)^2\ ,$$

$$\ddot{q}_i(t) = 2a_i^{(2)} + 6a_i^{(3)}(t_{i+1} - t)\ .$$

Тоді умови 2, 3 приводять до наступних співвідношень між шуканими коефіцієнтами на сусідніх інтервалах

$$\begin{cases} a_{i+1}^{(1)} h_{i+1} + a_{i+1}^{(2)} h_{i+1}^2 + a_{i+1}^{(3)} h_{i+1}^3 = \theta_i - \theta_{i+1} \\ a_{i+1}^{(1)} + 2a_{i+1}^{(2)} h_{i+1} + 3a_{i+1}^{(3)} h_{i+1}^2 = a_i^{(1)} \\ a_{i+1}^{(2)} + 6a_{i+1}^{(3)} h_{i+1} = a_i^{(2)} \end{cases} \tag{8.27}$$

де $h_{i+1} = t_{i+2} - t_{i+1}$.

Система (8.27) разом з умовами $q_1(t_1) = \theta_1$ і (8.24) (або (8.25), або (8.26)), утворюють лінійну систему алгебраїчних рівнянь, яка завжди має рішення. Воно знаходиться одним з методів лінійної алгебри, найчастіше методом прогонки зважаючи на специфіку матриці системи. Для побудови сплайна потрібно $16n$ арифметичних операцій в неперіодичному випадку і $22n$ в періодичному. Слід відзначити, що вимога гладкості функції і її похідних однозначно визначає значення останніх.

На практиці є клас задач, в яких для виконання технологічних операцій потрібне проходження по заданій траєкторії із заданою швидкістю, наприклад, при зварюванні. В цьому випадку для однозначного визначення кубічного сплайна досить задати умови в вузлах вигляду

$$q_i(t_i) = \theta_i;\ q_i(t_{i+1}) = \theta_{i+1};$$

$$\dot{q}_i(t_i) = v_i;;\ \dot{q}_i(t_{i+1}) = v_{i+1};\ i = \overline{1, n-1}\,. \tag{8.28}$$

Сплайни, що задовольняють умовам (8.28), називаються Ермітовими.

Розв'язуючи систему (8.27), одержимо

$$q_i(t) = \varphi_1(t)\theta_i + \varphi_2(t)\theta_{i+1} + \varphi_3(t)h_i v_i + \varphi_4(t)h_i v_{i+1},$$

де

$$\varphi_1(t) = (1-t)^2(1+2t);\ \varphi_2(t) = t^2(3-2t);$$

$$\varphi_3(t) = t(1-t)^2;\ \varphi_4(t) = -t^2(1-t);\ t = {(\theta-\theta_i)}\big/{h_i}\ .$$

Відзначимо, що Ермітів кубічний сплайн не задовольняє вимогу неперервності другої похідної у вузлах сітки. Усунути цей недолік можна різними способами:

- Вважати вузли інтерполяції невідомими і знаходити їх в процесі вирішення.
- Додати на кажному інтервалі два додаткові вузли.
- Підвищити порядок сплайна.

Перший спосіб найбільш природний з точки зору постановки задачі. Однак його реалізація зводиться до вирішення нелінійної системи алгебраїчних рівнянь з усіма труднощами, що випливають. Тому розглянемо третій спосіб - інтерполяцію сплайнами четвертого порядку.

Сформулюємо математичну постановку задачі. Побудувати функцію четвертого порядку, неперервну на інтервалі $[t_n, t_1]$ разом зі своїми першими і другими похідними, що проходить через задані вузли із заданою швидкістю, тобто задовольняє умовам:

$$q_i(t_{i+1}) = \theta_{i+1},$$

$$q_i'(t_{i+1}) = v_{i+1},$$

$$q_i(t_{i+1}) = q_{i+1}(t_{i+1}),$$

$$q_i'(t_{i+1}) = \dot{q}_{i+1}(t_{i+1}),$$

$$\ddot{q}_i(t_{i+1}) = \ddot{q}_{i+1}(t_{i+1})$$

Додамо умови на кінцях інтервалу t_n, t_1:

$$q_1(t_1) = \theta_1;\ q_{n-1}(t_n) = \theta_n;$$

Сплайн будемо шукати у вигляді полінома

$$Q(q,t) \overset{\Delta}{=} q_i(t) = \sum_{l=0}^{4} a_i^{(l)} (t_{i+1} - t)^l, \tag{8.29}$$

Таким чином, для визначення 5(n-1) коефіцієнтів $a_i^{(l)}$ маємо 5n-8 умов з (8.24)-(8.26). Решту три умови можна задати різними способами залежно від конкретної задачі.

Із (8.26) маємо $a_i^{(0)} = \theta_{i+1}$, а із (8.24) - $-a_i^{(1)} = -v_{i+1}$. При цьому v_n може бути або відомим, або ні.

З урахуванням цих значень, отримаємо

$$q_i(t) = \theta_{i+1} - v_{i+1}(t_{i+1} - t) + a_i^{(2)}(t_{i+1} - t)^2 + a_i^{(3)}(t_{i+1} - t)^3 + a_i^{(4)}(t_{i+1} - t)^4 \tag{8.30}$$

Обчислимо похідні

$$\dot{q}_i(t) = v_{i+2} - 2a_{i+1}^{(2)}(t_{i+2} - t) - 3a_{i+1}^{(3)}(t_{i+1} - t)^2 - 4a_{i+1}^{(4)}(t_{i+1} - t)^3,$$

$$\ddot{q}_{i+1}(t) = 2a_{i+1}^{(2)} + 6a_{i+1}^{(3)}(t_{i+1} - t) + 12a_{i+1}^{(4)}(t_{i+1} - t)^2,$$

Звідси можна отримати систему, яка повязує коефіцієнти $a_{i+1}^{(2)}, a_{i+1}^{(3)}, a_{i+1}^{(4)}$ з відомими значеннями $\theta_{i+1}, \theta_{i+2}, v_{i+1}, v_{i+2}$ і коефіцієнтом $a_i^{(2)}$ із попереднього інтервалу. Перепишемо її у вигляді

$$\begin{pmatrix} h_{i+1}^2 & h_{i+1}^3 & h_{i+1}^4 \\ 2h_{i+1} & 3h_{i+1}^2 & 4h_{i+1}^3 \\ 1 & 3h_{i+1} & 6h_{i+1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+1}^{(2)} \\ a_{i+1}^{(3)} \\ a_{i+1}^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{i+2}h_{i+1} + \theta_{i+1} - \theta_{i+2} \\ v_{i+2} - v_{i+1} \\ a_i^{(2)} \end{pmatrix} \tag{8.31}$$

Визначник системи (8.31) дорівнює

$$D = \begin{vmatrix} h_{i+1}^2 & h_{i+1}^3 & h_{i+1}^4 \\ 2h_{i+1} & 3h_{i+1}^2 & 4h_{i+1}^3 \\ 1 & 3h_{i+1} & 6h_{i+1}^2 \end{vmatrix} = h_{i+1}^6 \neq 0.$$

Отже, розв'язок системи завжди існує. Для його знаходження за правилом Крамера обчислимо

$$D_2 = 6h_{i+1}^4(v_{i+2}h_{i+1} + \theta_{i+1} - \theta_{i+2}) - 3h_{i+1}^5(v_{i+2} - v_{i+1}) + h_{i+1}^6 a_i^{(2)}.$$

$$D_3 = -8h_{i+1}^3(v_{i+2}h_{i+1} + \theta_{i+1} - \theta_{i+2}) + 5h_{i+1}^4(v_{i+2} - v_{i+1}) - 2h_{i+1}^5 a_i^{(2)}.$$

$$D_4 = 3h_{i+1}^2(v_{i+2}h_{i+1} + \theta_{i+1} - \theta_{i+2}) - 2h_{i+1}^3(v_{i+2} - v_{i+1}) + h_{i+1}^4 a_i^{(2)}.$$

Звідси, розвязок системи (8.31) буде

$$a_{i+1}^{(2)} = a_i^{(2)} + \frac{3(v_{i+2} - v_{i+1})}{h_{i+1}} + \frac{6(\theta_{i+2} - \theta_{i+1})}{h_{i+1}^2},$$

$$a_{i+1}^{(3)} = -\frac{2}{h_{i+1}} a_i^{(2)} + \frac{5(v_{i+2} - v_{i+1})}{h_{i+1}^2} - \frac{8(v_{i+2}h_{i+1} + \theta_{i+2} - \theta_{i+1})}{h_{i+1}^3},$$

$$a_{i+1}^{(4)} = \frac{1}{h_{i+1}^2} a_i^{(2)} - \frac{2(v_{i+2} - v_{i+1})}{h_{i+1}^3} + \frac{3(v_{i+2}h_{i+1} + \theta_{i+2} - \theta_{i+1})}{h_{i+1}^4}.$$

Рекурентні співвідношення даютьможливість виразити $a_{n-1}^{(2)}, a_{n-1}^{(3)}, a_{n-1}^{(4)}$ через $a_1^{(2)}$:

$$a_{n-1}^{(2)} = a_1^{(2)} + S(n),$$

$$a_{n-1}^{(3)} = -\frac{2}{h_{n-1}} a_1^{(2)} - \frac{2}{h_{n-1}} S(n) + \frac{3v_n + v_{n+1}}{h_{n-1}^2} + \frac{4(\theta_{n-1} - \theta_n)}{h_{n-1}^3},$$

$$a_{n-1}^{(4)} = \frac{1}{h_{n-1}^2} a_1^{(2)} + \frac{1}{h_{n-1}^2} S(n) - \frac{v_{n-1} + 2v_n}{h_{n-1}^3} + \frac{3\theta_n - \theta_{n-1})}{h_{n-1}^4}, \qquad (8.32)$$

$$S(n) = 3\sum_{k=3}^{n} \left(\frac{v_k + v_{k-1}}{h_{k-1}} + \frac{2(\theta_{k-1} - \theta_k)}{h_{k-1}^2}\right).$$

Відзначимо, що у виразі, де зустрічається v_n, якщо воно не задано, то його потрібно замінити на $-a_{n-1}^{(1)}$.

Розглянемо можливі наступні варіанти крайових умов.

А. Задані швидкості на обох кінцях інтервалу та прискорення на одному з них

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t_1) = v_1; \dot{q}_{n-1}(t_n) = v_n; \\ \alpha\ddot{q}_1(t_1) + \beta\ddot{q}_{n-1}(t_n) = 2\gamma,\ \alpha + \beta \neq 0. \end{cases} \qquad (8.33)$$

Б. Задані швидкість або прискорення на одному з кінців інтервалу та умова плавності руху на всьому інтервалі

$$\begin{cases} \alpha_1 \dot{q}_1(t_1) + \beta_1 \ddot{q}_1(t_1) = \gamma_1 \\ \alpha_2 \dot{q}_{n-1}(t_n) + \beta_2 \ddot{q}_{n-1}(t_n) = \gamma_2 \\ \int_{t_1}^{t_n} [\ddot{q}(t)]^2 dt \to \min \end{cases} \tag{8.34}$$

В. Задані швидкість або прискорення на одному з кінців інтервалу та умова мінімуму енергії

$$\begin{cases} \alpha_1 \dot{q}_1(t_1) + \beta_1 \ddot{q}_1(t_1) = \gamma_1 \\ \alpha_2 \dot{q}_{n-1}(t_n) + \beta_2 \ddot{q}_{n-1}(t_n) = \gamma_2 \\ \int_{t_1}^{t_n} [\dot{q}(t)]^2 dt \to \min \end{cases} \tag{8.35}$$

Відзначимо, що для кожної з цих умов існує єдиний сплайн четвертого порядку.

Продемонструємо, як побудувати такий сплайн для краєвих умов А. В цьому випадку v_n задано, тому $a_{n-1}^{(1)} = -v_n$. З першої умови отримаємо $v_2 - 2h_1 a_1^{(2)} - 3h_1^2 a_1^{(3)} - 4h_1^3 a_1^{(4)} = v_1$.

Для запису третьої умови (8.33) запишем вирази другої похідної на кінцях інтервалу

$$\ddot{q}_1(t_1) = 2a_1^{(2)} + 6h_1 a_1^{(3)} + 12h_1^2 a_1^{(4)},$$

$$\ddot{q}_{n-1}(t_n) = 2a_{n-1}^{(2)} = 2a_1^{(2)} + 2S(n).$$

Добавимо невикористану умову $q_1(t_1) = \theta_1$. Отримаємо систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \theta_2 - v_2 h_1 + h_1^2 a_1^{(2)} + h_1^3 a_1^{(3)} + h_1^4 a_1^{(4)} = \theta_1 \\ v_2 - 2h_1 a_1^{(2)} - 3h_1^2 a_1^{(3)} - 4h_1^3 a_1^{(4)} = v_1 \\ 2(\alpha+\beta) a_1^{(2)} + 6h_1 \alpha a_1^{(3)} + 12h_1^2 \alpha a_1^{(4)} = 1\gamma - 2\beta S(n). \end{cases} \tag{8.36}$$

Знайдемо визначник даної системи: $D = (\alpha+\beta) h_1^6$.

Отже, при $(\alpha+\beta) \neq 0$ система (8.36) має єдиний розвязок:

$$a_1^{(2)} = \frac{1}{\alpha+\beta} \left\{ \gamma - \beta S(n) + \frac{3\alpha(v_1+v_2)}{h_1} + \frac{6\alpha(\theta_1-\theta_2)}{h_1^2} \right\}$$

$$a_1^{(3)} = \frac{1}{h_1(\alpha+\beta)}\left\{2\beta S(n) - 2\gamma + \frac{3(\beta-\alpha)v_2 + (\beta-5\alpha)v_1}{h_1} + \frac{4(\beta-2\alpha)(\theta_1-\theta_2)}{h_1^2}\right\}$$

$$a_1^{(4)} = \frac{1}{h_1^2(\alpha+\beta)}\left\{\frac{3(\alpha-\beta)(\theta_1-\theta_2)}{h_1^2} + \frac{3(\alpha-2\beta)v_2 + (2\alpha-\beta)v_1}{h_1} + \gamma - \beta S(n)\right\}.$$

Для часткового випадку, коли є рух з нульовим початковим прискоренням ($\beta = \gamma = 0$) будемо мати:

$$a_1^{(2)} = \frac{3}{h_1}\left\{v_1 + v_2 + \frac{2(\theta_1-\theta_2)}{h_1}\right\},$$

$$a_1^{(3)} = \frac{1}{h_1^2}\left\{\frac{8(\theta_2-\theta_1)}{h_1} - 5v_1 - 3v_2\right\},$$

$$a_1^{(4)} = \frac{1}{h_1^3}\left\{\frac{3(\theta_1-\theta_2)}{h_1} + 2v_1 + v_2\right\}.$$

При русі з кінцевим нульовим прискоренням ($\alpha = \gamma = 0$) отримаємо

$$a_1^{(2)} = -S(n).$$

$$a_1^{(3)} = \frac{1}{h_1}\left\{\frac{4(\theta_1-\theta_2)}{h_1^2} + \frac{3v_2+v_1}{h_1} + 2S(n)\right\}.$$

$$a_1^{(4)} = \frac{1}{h_1^2}\left\{\frac{3(\theta_1-\theta_2)}{h_1^2} + \frac{2v_1+v_2}{h_1} - S(n)\right\}.$$

а решта коефіцієнтів визначаються рекурентними співвідношеннями (8.31).

Побудувати сплайни можна подібним способом для умов Б і В.

8.4.ПОБУДОВА РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ МАНІПУЛЯЦІЙНИХ РОБОТІВ.

В задачах керування складними маніпуляційними системами доводиться робити оптимальний, в певному розумінні, вибір між суперечливими вимогами - адекватністю математичної моделі об'єкту керування і необхідністю обчислення керуючих діянь у режимі реального часу за цією моделлю. Остання задача, а саме, формування математичних моделей маніпуляційних систем у реальному часі виявляється надзвичайно важкою і складною. При такому способі керування, обчислення у відповідності до рівнянь моделі, для того, щоб не втратити плавності та неперервності руху, повинні повторюватись з великою частотою, не нижче 50 Гц, а для цього потрібно використовувати більш потужні обчислювальні засоби, що, в кінцевому рахунку, призводить до подорожчання систем керування, а економічний фактор має чи не найосновнішу роль при впровадженні таких систем. Таким чином, приходимо до необхідності використання математичних моделей різної складності в залежності від типу поставлених технологічних завдань, швидкодії обчислювальних засобів та інших чинників. Наприклад, при русі маніпуляційного робота у вільному робочому просторі перевага може надаватися збільшенню швидкості переміщення на шкоду точності дотримання заданої траєкторії, тоді як для операцій зварювання чи в зборочному виробництві більш важливою є вимога точності виконання.

Отже, для ефективного керування бажано мати множину моделей, різних за адекватністю опису об'єкта, складністю та ін., і в залежності від прикладних застосувань, використовувати ті чи інші методи керування, побудовані на різних моделях.

Однією з основних задач в побудові математичних моделей маніпуляційних систем є побудова математичних моделей динаміки, або рівнянь динаміки маніпуляційних систем, або динамічних моделей. Динамічна модель дозволяє встановити залежності між заданим законом руху, тобто правилами зміни в часі узагальнених координат, їх перших і других похідних і законом керування, тобто правилами зміни в часі узагальнених керуючих діянь.

В загальному вигляді динамічна модель подається у вигляді системи:

$$u = P(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \xi)\,, \tag{8.37}$$

де $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$ - узагальнені керуючі сили; $P(\cdot)$ - нелінійна вектор-функція розмірності n, яка залежить від узагальнених координат

$\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n)^T$, їх перших і других похідних, а також від масомоментних параметрів маніпулятора ξ; n - кількість ступенів рухливості системи, яка згідно формалізмів, наведених у попередньому параграфі, співпадає з кількістю ланок маніпуляційної системи.

Для маніпуляційних систем узагальненими керуючими силами виступають моменти сил для кінематичних пар поворотного типу і сили - для пар телескопічного(поступального) типу. Оскільки розглядаються керовані кінематичні з'єднання, тобто кожна ступінь рухливості управляється через свій керуючий пристрій, то розмірності векторів узагальнених координат і узагальнених керуючих сил будуть співпадати, причому узагальненій координаті θ_i відповідає узагальнена сила u_i.

Рівняння динаміки вигляду (8.37), без уточнення структури вектор-функції $P(\cdot)$, дають змогу розв`язувати лише обернену задачу динаміки, тобто визначати узагальнені керуючі сили, які необхідні для виконання заданого руху. Але такого узагальненого представлення недостатньо для реалізації значної кількості способів керування, тому існує ще декілька форм представлення рівнянь динаміки маніпуляційної системи, в яких явно виділені перші і другі похідні від узагальнених координат:

$$u=H(\theta,\xi)\ddot{\theta}+h(\theta,\dot{\theta},\xi). \tag{8.38}$$

$$u=H(\theta,\xi)\ddot{\theta}+\dot{\theta}^T Q(\theta,\xi)\dot{\theta}+g(\theta,\xi). \tag{8.39}$$

Тут $H(\theta,\xi)$– $n\times n$ матриця, $Q(\theta,\xi)$– $n\times n\times n$ матриця, $g(\theta,\xi)$ - $n\times 1$ вектор.

Якщо за допомогою динамічної моделі вигляду (8.37) можна розв'язати тільки обернену задачу динаміки - знаходження узагальнених керуючих сил, які необхідно реалізувати системою керування для відслідкування заданого закону зміни узагальнених координат, їх перших і других похідних, то моделі вигляду (8.38), (8.39) дозволяють розв'язати як обернену, так і пряму задачу динаміки- знаходження траєкторії руху за заданими законами зміни керуючих діянь, тобто являються більш універсальними.

Відзначимо, що пряма задача динаміки є більш складнішою задачою порівняно з оберненою.

Динамічна модель вигляду (8.39) є найбільш універсальною, оскільки в ній в явному вигляді виділені всі динамічні складові маніпуляційної системи - матриці інерції, центробіжних та Коріолісових сил, гравітаційні сили. Знання фізичного смислу елементів рівнянь руху дозволяє більш ефективно використовувати ці рівняння або їх окремі складові частини для розробки нових підходів та методів керування такими системами. Тому подальші дослідження будуть спрямовані на формування динамічних моделей у вигляді (8.39).

Існує декілька підходів до проблеми побудови математичних моделей динаміки маніпуляційних систем. Їх можна систематизувати з врахуванням різних критеріїв. Наприклад, методи можна класифікувати згідно з законами механіки, на основі яких формуються рівняння динаміки, а саме методи, основані на рівняннях Лагранжа, Ньютона-Ейлера, Аппеля, принципі Даламбера та ін.

Важливим критерієм при порівнянні методів побудови моделей вигляду (8.37)-(8.39) є кількість арифметичних операцій множення(ділення), додавання(віднімання) з плаваючою точкою, необхідних для формування моделі. Цей критерій найбільш суттєвий з точки зору застосування відповідного методу для задач аналізу та синтезу систем керування в реальному часі.

Одним із перших результатів побудови математичних моделей маніпуляційних роботів, які використовувались для розв`язку як прямої, так і оберненої задач динаміки, були отримані за допомогою методу Лагранжа. Кількість операцій множення/додавання в цих методах має порядок $O(n^4)$ і такі алгоритми мають дуже велику кількість обчислень щоб використовувати їх в реальному часі.

Методи, основані на рівняннях Ньютона-Ейлера для моделювання шарнірно-зв'язаних твердих тіл також мають алгоритмічну реалізацію, яка дозволяє розв'язувати як пряму, так і обернену задачу динаміки з використанням виразів в замкненій формі для елементів матриць математичної моделі. Кількість операцій множення/додавання в цих методах має порядок $O(n^3)$, тобто значно менше, ніж для методів, заснованих на рівняннях Лагранжа.

Наведемо основні рекурентні співвідношення для побудови рівнянь динаміки маніпуляційної системи у формі (8.37). При побудові рівнянь використаємо такі припущення: а) ланки системи є однорідними твердими тілами з масою m_i і матрицею моментів інерції ланок J_i відносно головних осей інерції; б) осі системи координат, зв'язаної з ланкою, збігаються з головними осями інерції; в) вектори $\tilde{e}_i, \tilde{r}_{ii}, \tilde{r}_{ii+1}$, задаються у пов`язаних з ланкою системах координат (всі величини, позначені ~ будемо вважати заданими чи обчисленими у зв'язаних (відносних) системах координат).

Теорема 8.1. Динамічна модель у формі (8.37) у випадку, коли всі величини визначаються у зв'язаних з ланками системах координат, задається наступними рекурентними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} u_i &= (\tilde{Q}_i, \tilde{e}_i)\Delta_i + (\tilde{R}_i, \tilde{e}_i)(1-\Delta_i), \\ \tilde{R}_i &= \tilde{R}_{i+1} - \tilde{G}_i - \tilde{F}_i, \\ \tilde{Q}_i &= \tilde{Q}_{i+1}^{(i)} + \tilde{r}_i \times \tilde{R}_i - \tilde{r}_{ii+1} \times \tilde{R}_{i+1}^{(i)} - \tilde{M}_i, \end{aligned} \tag{8.40}$$

де

$$\tilde{M}_i = -J_i\tilde{\varepsilon}_i + \tilde{\omega}_i \times J_i\tilde{\omega}_i,$$

$$\tilde{F}_i = -m_i\tilde{w}_i,$$

$$\tilde{\varepsilon}_i = B_i^T \varepsilon_i, \tilde{\omega}_i = B_i^T \omega_i, \tilde{w}_i = B_i^T w_i,$$

$$B_i = B_{i-1}P_i^T(\theta_i), B_0 = E.$$

$$\tilde{G}_i = B_i^T G_i, \tilde{R}_{i+1}^{(i)} = P_{i+1}^T(\theta_{i+1})\tilde{R}_{i+1}, \tilde{Q}_{i+1}^{(i)} = P_{i+1}^T(\theta_{i+1})\tilde{Q}_{i+1},$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + e_i\dot{\theta}_i\Delta_i,$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1} + (e_i\ddot{\theta}_i + \omega_{i-1} \times e_i\dot{\theta}_i)\Delta_i,$$

$$w_i = w_{i-1} - \varepsilon_{i-1} \times r_{i-1i} - \omega_{i-1} \times (\omega_{i-1} \times r_{i-1i}) +$$

$$+ \varepsilon_i \times (r_{ii} + e_i\theta_i(1-\Delta_i)) + (e_i\ddot{\theta}_i + 2\omega_{i-1} \times e_i\dot{\theta}_i)(1-\Delta_i),$$

$$\tilde{r}_i = \tilde{r}_{ii} + \tilde{e}_i\theta_i, e_i = B_i\tilde{e}_i, r_{ii+1} = B_i\tilde{r}_{ii+1}, \tag{8.41}$$

$\widetilde{R}_i, \widetilde{Q}_i, \widetilde{R}_{i+1}, \widetilde{Q}_{i+1}$ – відповідно вектори реакцій в'язей на "лівому" і "правому" кінцях ланки, $\widetilde{G}_i$ – вектор сили ваги.

Теорема 8.2. Динамічна модель у формі (8.37) у випадку, коли всі величини визначаються в абсолютній системі координат, задається наступними рекурентними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} u_i &= (Q_i, e_i)\Delta_i + (R_i, e_i)(1 - \Delta_i), \\ R_i &= R_{i+1} - G_i - F_i, \\ Q_i &= Q_{i+1} + r_i \times R_i - r_{ii+1} \times R_{i+1} - M_i. \\ F_i &= -m_i w_i, \\ M_i &= -J_i \ \varepsilon_i + \omega_i \times J_i \omega_1. \end{aligned} \qquad (8.42)$$

де $\varepsilon_i, w_{i,} \omega_i$ - обчислюються за формулами (8.41).

Відзначимо, що кількість арифметичних операцій необхідних для побудови рівнянь динаміки у форму (8.37) лінійно залежить від кількості ступенів рухливості маніпуляційної системи і не відрізняється суттєво в якій системі координат формується така модель.

Наведемо формули для побудови рівнянь динаміки у формі (8.38), тобто з явним виділенням матриці інерції ланок.

Теорема 8.3. Динамічна модель у формі (8.38) у випадку, коли всі величини визначаються в абсолютній системі координат, задається наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} & H_{ij} = (e_i, \varphi_{ij}), h_i = (e_i, \phi_i), i, j = \overline{1, n}, \\ & \varphi_{ij} = \mu_{ij}\Delta_i + \eta_{ij}(1 - \Delta_i), \\ & \phi_i = g_i \Delta_i + p_i(1 - \Delta_i); \end{aligned} \qquad (8.43)$$

$$\varphi_{ij} = \mu_{ij}\Delta_i + \eta_{ij}(1 - \Delta_i)$$

$$\eta_{ij} = \eta_{i+1j} - b_{ij}, \eta_{n+1j} = 0, b_{ij} = 0, i > j;$$

$$\mu_{ij} = \mu_{i+1j} + (r_{ii} - r_{ii+1}) \times \eta_{ij} - r_{ii+1} \times b_{ij} - a_{ij},$$

$$\mu_{n+1j} = 0, b_{ij} = a_{ij} = 0, i > j;$$

$$p_i = p_{i+1} - b_i - G_i, p_{n+1} = R_{n+1};$$

$$g_i = g_{i+1} + (r_{ii} - r_{ii+1}) \times p_i - r_{ii+1} \times (b_i + G_i) - a_i,$$

$$g_{n+1} = Q_{n+1} + (r_{nn} - r_{nn+1}) \times R_{n+1};$$

$$b_{ij} = -m_i \beta_{ij},$$
$$\beta_{ij} = \beta_{i-1j} + \alpha_{i-1j} \times (r_{ii} - r_{i-1i}), i > j,$$
$$\beta_{ii} = e_i \times r_i \Delta_i + e_i (1 - \Delta_i),$$
$$a_{ij} = -B_i J_i B_i^T \alpha_{ij},$$
$$\alpha_{ij} = \beta_{i-1j}, \alpha_{ii} = e_i \Delta_i, b_i = -m_i \beta_i,$$
$$\beta_i = \beta_{i-1} + \alpha_{i-1} \times (r_i - r_{i-1i}) - \omega_{i-1} \times (\omega_{i-1} \times r_{i-1i}) +$$
$$+ \omega_i \times (\omega_i \times r_i) + \dot{\theta}_i (\omega_{i-1} \times e_i) \times r_i \Delta_i + 2\dot{\theta}_i (\omega_{i-1} \times e_i)(1 - \Delta_i),$$
$$a_i = -B_i J_i B_i^T \alpha_i + \omega_i \times B_i J_i B_i^T \omega_i,$$
$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + \dot{\theta}_i (\omega_{i-1} \times e_i) \Delta_i.$$

Аналогічні результати можна отримати для формування рівнянь динаміки коли всі величини задаються у відносних системах координат. Більш ефективним за кількістю арифметичних операцій є метод формування моделі в абсолютній системі координат.

Таким чином, використовуючи рекурентну природу взаємозв'язків між ланками системи, отримані математичні моделі маніпуляційних систем мають кількість необхідних обчислень порядка $O(n^2)$.

Відзначимо, що метод чисельної побудови рівнянь динаміки, який базується на принципі найменшої дії Гауса кількість обчислень лінійно залежить від кількості ступенів рухливості маніпулятора.

Спільним для наведених вище методів є те, що всі вони дозволяють будувати рівняння динаміки чисельно, тобто всі елементи в результаті по-будови будуть деякими числами. При зміні параметрів чи стану системи треба знову робити обчислення. До того ж ці методи не дозволяють враховувати специфіку кінематичних схем, масомоментних характеристик маніпуляційної системи, тому для цілих класів таких систем кількість обчислень буде однаковою, оскільки залежить тільки від кількості узагальнених координат.

Формування рівнянь динаміки маніпуляційних систем в явному аналітичному вигляді є альтернативою чисельному підходу і має ряд переваг над комп’ютерно-орієнтованими чисельними методами:

- вони дають можливість записати явний вигляд залежностей елементів рівнянь динаміки від узагальнених координат та масомоментних параметрів маніпулятора;
- значно - на 1-2 порядки зменшити кількість арифметичних операцій для побудови рівнянь руху;
- дозволяють відокремити етап формування рівнянь динаміки від використання останніх в задачах аналізу і синтезу;
- оскільки рівняння динаміки отримуються в аналітичному вигляді, то вони більш точно описують природу процесів що протікають в системі в силу відсутності накопичення похибок комп’ютерного представлення чисел і операцій над ними;
- дозволяють виписати і дослідити вплив і вклад кожного з елементів рівнянь динаміки на поведінку системи в цілому;
- розробляти нові некласичні підходи до аналізу та синтезу систем керування (методи навчального типу, тощо).

З огляду на перераховані вище переваги, формування математичних моделей маніпуляційних систем в аналітичному вигляді є більш прийнятним для побудови алгоритмів керування рухом в режимі реального часу з врахуванням динаміки.

Можливість використання символьних перетворень для побудови рівнянь динаміки в аналітичній формі пов’язана з розробкою спеціальних програмних засобів (наприклад, системи символьних перетворень REDUCE, MACSYMA, MATHEMATICA) та розвитком методів комп’ютерної алгебри.

До недоліків такого підходу слід віднести те, що одержані рівняння динаміки мають надмірність обчислень, яку важко обійти алгоритмічно, оскільки це веде до процедур переборного характеру (в загальному випадку це проблема факторизації поліномів від багатьох змінних). До того ж, такі моделі в розгорнутому вигляді займають іноді десятки сторінок. Зрозуміло, що таку модель важко досліджувати з метою її використання для розв’язування практичних задач.

Як уже відзначалось вище, використання універсальних систем символьних перетворень для формування математичних моделей маніпуляційних систем призводить до надмірності обчислень, яку можна зменшити використовуючи специфіку задачі. Один з таких підходів, який використовує специфіку маніпуляційної системи, був розроблений М.Вукобратовичем на основі принципу Даламбера. Для визначення залежності елементів рівнянь руху від узагальнених координат і масомоментних параметрів введено поняття змінної як функції узагальнених координат і параметра - як числової константи. Змінну $a_j \in R^m, j \in N = \{1,\ldots,n\}$ (m=1 для скаляра і m=3 для вектора) можна зобразити так

$$a_j = \sum_k a_{jk} (\cos\theta_1)^{c_1} \ldots (\cos\theta_n)^{c_n} (\sin\theta_1)^{s_1} \ldots (\sin\theta_n)^{s_n} \theta_1^{k_1} \ldots \theta_n^{k_n},$$

де показники степені $c_i, s_i, k_i \in \{0,1,2\}$ залежать від $k, a_{jk} \in R^m, k \in K,$ К - множина індексів $\{1,\ldots,k_r\}$, причому певні k_r залежать від конкретної змінної a_j.

Складна змінна a_j представляється вектором $A_j = \{a_{j1},\ldots,a_{jk_r}\} \in R^{k_r \times m}$ і матрицею показників степенів

$$E_j = \begin{bmatrix} c_1(1)\ldots c_n(1) s_1(1)\ldots s_n(1) k_1(1)\ldots k_n(1) \\ \vdots \\ c_1(k_r)\ldots c_n(k_r) s_1(k_r)\ldots s_n(k_r) k_1(k_r)\ldots k_n(k_r) \end{bmatrix}$$

розміру $k_r \times 3$.

Таким чином, змінна a_j задається впорядкованою множиною (A_j, E_j), яка називається структурною матрицею змінної a_j. З іншої сторони, цю змінну можна розглядати як поліном від узагальнених координат і їх тригонометричних функцій.

Побудовані таким методом елементи моделі мають надмірність обчислень. Тому, коли ставиться питання про мінімальну кількість арифметичних операцій, то воно в цьому підході також веде до факторизації поліному від багатьох змінних з усіма властивими їй складностями.

Розглядаючи різні підходи до побудови рівнянь динаміки маніпуляційних роботів та використання для цього різних спеціальних програмних засобів слід звернути увагу на розробку методів, які допускають реалізацію на багатопроцесорних системах, оскільки пристрої керування маніпуляційними роботами, як правило, багатопроцесорні. Дослідження в цій області велось, в основному, тільки на використанні чисельних процедур побудови рівнянь динаміки.

Таким чином, для керування в режимі реального часу з врахуванням динаміки перспективним і актуальним є розробка чисельно-аналітичних методів з можливістю їх подальшого використання на багатопроцесорних системах.

8.5.МЕТОДИ КЕРУВАННЯ РУХОМ МАНІПУЛЯЦІЙНИХ РОБОТІВ.

Для побудови керування рухом маніпуляційними системами використовуються, як правило, два підходи — технічний і біонічний. Перший базується на використанні відомих методів дослідження систем керування, які можна розділити на дві групи за ознакою використання рівнянь динаміки маніпуляційних систем. Першу групу складають методи, які базуються на використанні рівнянь динаміки системи - оптимального керування, нелінійного керування, лінеаризації, керування зі змінною структурою тощо. У другу групу входять методи, які не використовують в явному вигляді точні рівняння динаміки системи - адаптивного рекурентного оцінювання та адаптивного керування з еталонною моделлю, керування навчального типу та ін. Особливістю систем керування маніпуляційними системами є робота в режимі реального часу, а також можливість використання інформації про реальний стан системи шляхом вимірювання дійсного положення, швидкостей та прискорень, сил та моментів сил. Отже, можна розробляти методи побудови рухів з можливостями корекції руху в залежності від реальної ситуації. Як вже відзначалось вище, в процесі руху відбувається зміна математичних моделей, що описують цей рух. Так, наприклад, рух в задачах позиціювання складається з трьох частин: розгін, рух зі сталою швидкістю, гальмування. На етапах розгону і гальмування необхідно використовувати повні математичні моделі, тоді як при русі з сталою швидкістю досить обчислювати відцентрові та Коріолісові складові. При русі з малими швидкостями вклад цих складових буде незначним і їх можна не обчислювати. Формування математичних моделей в чисельно-аналітичному вигляді дозволяє ефективно використовувати ці властивості, обчислюючи тільки ті елементи моделей, за якими визначається даний рух.

Наведемо приклади побудови регуляторів для керування маніпуляційними системами з використанням динамічних моделей:

$$\begin{aligned} u(t) = H(\theta(t),\xi)\big[\ \ddot{\theta}^{pr}(t) + K_v\big[\ \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}^{pr}(t))\ \big] + \\ + K_p\big[\ \theta(t) - \theta^{pr}(t))\ \big]\big] + \dot{\theta}^T(t) Q_i(\theta(t),\xi)\dot{\theta}(t) + g(\theta(t),\xi), \end{aligned} \tag{8.44}$$

де $\theta^{pr}(t)$ - програмна траєкторія руху; K_v, K_p задані матриці; $Q_i(\theta(t),\xi)$ - діагональні матриці;

$$\begin{aligned} u(t) = H(\theta(t),\xi)\big[\ \ddot{\theta}^{pr}(t) + K_v\big[\ \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}^{pr}(t))\ \big] + \\ + K_p\big[\ \theta(t) - \theta^{pr}(t))\ \big]\big] + g(\theta(t),\xi); \end{aligned} \tag{8.45}$$

$$\begin{aligned} u(t) = H_i(\theta(t),\xi)\big[\ \ddot{\theta}^{pr}(t) + K_v\big[\ \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}^{pr}(t))\ \big] + \\ + K_p\big[\ \theta(t) - \theta^{pr}(t))\ \big]\big] + g(\theta(t),\xi), \end{aligned} \tag{8.46}$$

де $H_i(\theta(t),\xi)$ діагональні елементи матриці інерції;

$$\begin{aligned} u(t) = \ddot{\theta}^{pr}(t) + K_v\big[\ \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}^{pr}(t))\ \big] + \\ + K_p\big[\ \theta(t) - \theta^{pr}(t))\ \big] + g(\theta(t),\xi). \end{aligned} \tag{8.47}$$

Можливі і різні комбінації наведених вище законів керування. Якщо використовувати вимірювачі зусиль в шарнірах, то обчисливши прискорення і елементи матриці інерції, можна уникнути знаходження вектора $h(\theta(t),\dot{\theta}(t),\xi)$, обчисливши його за формулою $h(\theta(t),\dot{\theta}(t),\xi) = u(t) - H(\theta(t),\xi)\ddot{\theta}(t)$, що дозволяє суттєво зменшити кількість обчислень.

Таким чином, через значну складність і нелінійність рівнянь динаміки використання класичних методів керування рухом маніпуляційних систем, як показано вище, в режимі реального часу викликає суттєві ускладнення. Тому велику увагу привертає підхід, який дозволяє дослідити природу процесів керування рухом маніпулятора з метою спрощення і виділення самих вагомих елементів руху і їх використання в технічних рішеннях побудови систем керування.

Для побудови ефективних методів керування складними маніпуляційними системами потрібні не тільки точні знання параметрів, які входять в математичну модель, а і адекватність самої моделі об’єкту. Що стосується параметрів моделі, то їхні точні значення знайти або оцінити досить складно. Більш того, на систему в цілому впливають такі важкоконтрольовані дії як люфти в з’єднаннях, тертя і, як наслідок, нагрівання елементів виконавчої системи, завади в каналах зворотнього зв’язку, тощо, що може призвести до втрати необхідної якості керування. Тому одним з ефективних підходів до організації керування маніпуляційними роботами є синтез глобального керування, побудованого на основі динаміки системи і локального, побудованого на основі нескладних (як правило, лінійних) моделей. Важливо, щоб останні були прості в реалізації, використовували інформацію про поточний стан і з достатньою мірою адекватності описували процес руху. Для реалізації локального керування можуть бути використані адаптивні математичні моделі. Дослідимо більш детально методи адаптивного керування рухом, основані на лінійних моделях з невідомими параметрами. За спостереженнями стану маніпуляційної системи в процесі руху будуємо оцінки невідомих параметрів моделі. За цими оцінками, оптимізуючи певний функціонал якості, визначаємо керування.

Оскільки динаміка описується системою рівнянь другого порядку, то дискретну лінійну модель представимо таким чином:

$$\theta(i+2) = A_1\theta(i+1) + A_2\theta(i) + A_3 + A_4u(i+1) + \varepsilon(i+2)\,, \qquad (8.48)$$

де $u(i)$ n-вимірний вектор керування в i-й момент часу; A_1, A_2, A_4 - невідомі матриці розміру $n \times n$, A_3 - невідомий вектор розмірності $n \times 1$; $\varepsilon(i+2)$ - n-вимірний вектор похибок моделювання в $(i+2)$-й момент часу.

Нехай траєкторія руху системи задається послідовністю точок у просторі узагальнених координат:

$$\theta^{pr}(i) \in R^n, i = \overline{1, p}, p < \infty\,. \qquad (8.49)$$

За функціонал якості візьмемо дотримання системою програмної траєкторії

$$I_{i+1} = \left\| \theta^{pr}(i+2) - \theta(i+2) \right\|^2 + \delta \left\| u(i+1) \right\|^2, \qquad (8.50)$$

де $\delta > 0$ - певна стала величина.

Позначимо

$$A = (A_1, A_2, A_3, A_4) = (A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(n)}),$$

$$A_{(k)} = (a_{k1}^{(1)}, \ldots, a_{kn}^{(1)}, a_{k1}^{(2)}, \ldots, a_{kn}^{(2)}, a_{k1}^{(3)}, a_{k1}^{(4)}, \ldots, a_{kn}^{(4)})^T,$$

$$\varphi(i+1) = (\theta^T(i+1), \theta^T(i), 1, u^T(i+1))^T.$$

Тоді систему (3.5) можна переписати таким чином:

$$\theta(i+2) = A^T \varphi(i+1) + \varepsilon(i+2). \qquad (8.51)$$

Алгоритм адаптивного керування складається з двох етапів. Спочатку за заміряними станами системи будуються оцінки невідомих параметрів, потім за цими оцінками обчислюються керування на наступному такті руху. Тому вважатимемо, що маніпуляційна система перебуває в стані $\theta(i+1)$ і будемо шукати керування $u(i+1)$, яке на $(i+1)$-у такті переведе маніпулятор у стан $\theta(i+2)$ за умови, що всі попередні стани і керування відомі. Оцінки невідомих параметрів матриці A знаходяться шляхом мінімізації похибки моделювання по методу найменших квадратів. Процедуру оцінювання запишемо в рекурентній формі:

$$\hat{A}_{(k)}(i+2) = \hat{A}_{(k)}(i+1) + R(i+2)\varphi(i+1)\left[\theta_k(i+2) - \hat{A}_{(k)}(i+1)\varphi(i+1)\right],$$

$$\begin{aligned} R(i+2) &= R(i+1) - R(i+1)\varphi(i+1)\varphi^T(i+1)R(i+1) \times \\ &\times \left[1 + \varphi^T(i+1)R(i+1)\varphi(i+1)\right]^{-1}, \end{aligned} \qquad (8.52)$$

де $R(1) = E, k = \overline{1,n}, R(i) - (3n+1) \times (3n+1)$ - симетрична матриця.

Використовуючи оцінки $\hat{A}(i+2)$ матриці A знаходимо оцінку керування на одному такті виходячи з умови:

$$\begin{aligned} &\left\| \theta^{pr}(i+2) - \hat{A}_1(i+2)\theta(i+1) - \hat{A}_2(i+2)\theta(i) - \right. \\ &\left. - \hat{A}_3(i+2) - \hat{A}_4(i+2)u \right\|^2 + \delta \left\| u \right\|^2 \Rightarrow \min_u. \end{aligned} \qquad (8.53)$$

Звідси

$$u(i+1)=\left(\hat{A}_4^T(i+2)\hat{A}_4(i+2)+\delta E\right)^{-1}\hat{A}_4^T(i+2)\times$$
$$\times(\theta^{pr}(i+2)-\hat{A}_1(i+2)\theta(i+1)-\hat{A}_2(i+2)\theta(i)-\hat{A}_3(i+2)). \qquad (8.54)$$

Зауважимо, що кількість обчислень, необхідних для реалізації процедури (8.52),(8.54) досить велика, але, на відміну від методів керування з використанням рівнянь динаміки, тут не потрібно обчислювати тригонометричні функції узагальнених координат. Таким чином, аналіз методів опису, формування рівнянь динаміки та керування складними маніпуляційними системами показує наявні проблеми у побудові ефективних формалізмів подання таких систем та створення, на основі цих подань, їх математичних моделей та у розробці нових методів керування, які б використовували нелінійність та складність об’єкта дослідження.

ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М., 1983.

2. Беллман Р. Динамическое программирование. – М., 1960.

3. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. – М., 1972.

4. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К., 1975.

5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М., 1980.

6. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М., 1975.

7. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М., 1975.

8. Острем К. Введение в стохастическую теорию оптимального управления. – М., 1973.

9. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. – М., 1968.

10. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М., 1978.

11. Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л. Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. – М.: Наука, 1978.

12. Кривонос Ю.Г., Крак Ю.В., Кириченко М.Ф. Моделювання, аналіз і синтез маніпуляційних систем. – К.: Наук. думка, 2006.

Додаткова

13. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М., 1979.

14. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными обьектами. – М., 1976.

15. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. – М., 1971.

16. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана. – М., 1984.

17. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К., 1983.

18. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М., 1969.

19. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К., 1985.

20. Бублик Б.Н., Данилов В.Я., Наконечный А.Г. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах / Учеб. пособие. – К., 1988.

21. Левошич О.Л., Крак Ю.В. Елементи теорії керування. Навчально-методичний осібник для студентів факультету кібернетики спеціальності "Інформатика". – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2002.

22. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. – М., 1971.

23. Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. – М., 1969.

24. Зайцев Г.Ф., Костюк В.И., Чинаев П.И. Основы автоматического управления и регулирования. – К., 1977.

25. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автоматического регулирования. – М., 1981.

26. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М., 1971.

27. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М., 1973.

28. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М., 1972.

29. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск, 1974.

30. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М., 1981.

31. Пропой А.И. Элементы теории дискретных оптимальных процессов. – М., 1973.

32. Растригин Л.А. Современные принципы управления сложными системами. – М., 1980.

33. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. III. Оптимальное управление системами. – М., 1982.

34. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М., 1978.

35. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. – М., 1977.

36. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М., 1969.

37. Кириченко Н.Ф., Сорока Р.А., Крак Ю.В. Манипуляционные роботы. Алгоритмическое и программное обеспечение средств управления движением. Київ.:КГУ, 1987.

38. Кириченко М.Ф., Сорока Р.О., Крак Ю.В. Оптимізація маніпуляційних роботів. К.: Либідь, 1990.

39. Кривонос Ю.Г., Крак Ю.В., Бармак О.В. Системи жестової комунікації: моделювання інформаційних процесів. – К.: Наук. думка. – 2014. – 228 с.

ЗМІСТ

Н а в ч а л ь н е   в и д а н н я

КРАК Юрій Васильович

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ
ТА РОБОТОТЕХНІКИ

Навчальний посібник для студентів спеціальності "Інформатика"

Електронне видання