МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Маринич Олександр Віталійович

УДК 519.21

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З РЕГЕНЕРАЦІЄЮ

01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства Освіти і Науки України

Науковий консультант:	доктор фізико-математичних наук, професор **Іксанов Олександр Маратович**, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, завідувач кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики.
Офіційні опоненти:	доктор фізико-математичних наук, професор **Єлейко Ярослав Іванович**, Львівський національний університет імені Івана Франка, завідувач кафедри теоретичної та прикладної статистики;
	доктор фізико-математичних наук, професор **Іванов Олександр Володимирович**, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей;
	доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник **Пилипенко Андрій Юрійович**, Інститут математики НАН України, провідний науковий співробітник відділу теорії випадкових процесів.

Захист відбудеться 23 жовтня 2017 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 03022 м. Київ, проспект Глушкова 4-Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці ім. М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий 20 вересня 2017 р.

В. о. вченого секретаря

спеціалізованої вченої ради Станжицький О. М.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Основним об'єктом досліджень дисертаційної роботи є *випадкові процеси з регенерацією* або, більш загально, *випадкові регенеративні структури*. Під випадковою регенеративною структурою ми розуміємо випадковий об'єкт або їх родину, з підхожим чином визначеним поняттям «розміру», такий що ймовірнісні характеристики об'єктів різного розміру узгоджені, а їх розподіли є інваріантними відносно фіксованої операції видалення частини. Випадковий процес з регенерацією – це стохастичний процес, що визначений на такій структурі та індексований неперервною або дискретною змінною, що задає її розмір.

Класичним прикладом випадкової регенеративної структури є *випадкова рівномірна перестановка*. Нехай $\mathfrak{S}_n$ – симетрична група множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, а σ_n – елемент $\mathfrak{S}_n$, вибраний навмання. Випадкова рівномірна перестановка σ_n, або більш точно сім'я перестановок $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє такі дві властивості[1]:

- за умови, що цикл, який містить 1, має довжину $m \in \{1, \ldots, n\}$, його видалення з перестановки σ_n та перенумерація решти елементів дає рівномірну перестановку множини $\{1, 2, \ldots, n-m\}$, тобто випадковий елемент множини $\mathfrak{S}_{n-m}$ з тим же розподілом, що й σ_{n-m};
- видалення елемента $n+1$ з σ_{n+1} дає випадкову перестановку з тим же розподілом, що й σ_n.

Перша властивість відповідає регенеративності як рисі збереження розподілу відносно операції «видалення частини» – в даному випадку видалення першого циклу. Друга властивість демонструє, що рівномірні перестановки $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ узгоджені для різних розмірів n. Випадковим процесом з регенерацією на випадковій рівномірній перестановці може бути, наприклад, число циклів, число нерухомих точок, порядок перестановки, довжина найдовшого циклу тощо. Аргументом таких процесів виступає, зазвичай, дискретний параметр n – кількість елементів множини, на якій розглядається симетрична група. Строгі визначення випадкової регенеративної структури та випадкового процесу з регенерацією наводяться на с. 8 автореферату.

Поняття регенерації у випадкових комбінаторних структурах вперше виникло в контексті робіт О. Гнєдіна, Дж. Пітмена та М. Йора по регенеративним композиціям та розбиттям. Запропонована згаданими авторами модель композицій та поняття регенеративності, що лежить в її основі, виявились надзвичайно вдалими, а відповідні ідеї знайшли застосування в багатьох інших областях прикладної ймовірності, включаючи теорію коалесцентів, теорію випадкових перестановок, в задачах випадкового розміщення, аналізі процедур вибору лідера тощо. Подальший розвиток відповідних теорій вимагав розробки асимптотичного апарату процесів дробового ефекту, а також розробки теорії збурених випадкових блукань. В даному дисертаційному дослідженні згадані моделі та внесок автора до відповідних теорій

[1]Нагадаємо, що кожна перестановка може бути записана у вигляді диз'юнктного об'єднання циклів.

представлені з єдиної точки зору за допомогою поняття випадкової регенеративної структури. У роботі докладно досліджено такі моделі:

- випадкові процеси з імміграцією в моменти відновлення (поняття було вперше введено у статті автора [14]) та, зокрема, процеси дробового ефекту, побудовані за процесом відновлення;
- випадкові регенеративні композиції;
- випадкові регенеративні перестановки (поняття було вперше введено у статті автора [6], як узагальнення згаданих вище рівномірних перестановок);
- переставні коалесценти;
- випадкові блукання з бар'єром та збурені випадкові блукання;
- процедури випадкового просіювання (поняття було вперше введено у статтях автора [2,23]) та процедури вибору лідера.

Як вже зазначалось, існує тісний взаємозв'язок між наведеними класами регенеративних структур, при цьому дослідженню таких взаємозв'язків в роботі приділяється особлива увага. Наприклад, теореми про асимптотику збурених випадкових блукань та процесів дробового ефекту (розділ 2) використовуються для доведення результатів для регенеративних композицій (підрозділ 3.1) та випадкових перестановок (підрозділ 3.2). В свою чергу, випадкові композиції застосовуються для вивчення асимптотики переставних коалесцентів з множинними злиттями (підрозділ 3.3). Процедури випадкового просіювання, введені в розділі 5, виявляються корисними при дослідженні коалесцентів з одночасними множинними злиттями (підрозділ 5.2.2).

Крім аналізу вищезгаданих головних об'єктів дослідження роботи, запропоновані підходи можуть бути застосовані для вивчення схем випадкового розташування, семплінгу видів, процесів фрагментації, моделей розкладних структур таких, як розбиття та відображення, а також вивчення їх компонентних спектрів. Перелічені класи випадкових структур повсякчас виникають у прикладних задачах та застосовуються для моделювання найрізноманітніших явищ природи. Більш детально про можливі застосування буде сказано нижче, окремо для кожної зі згаданих структур.

Широкий клас прикладних та теоретичних проблем, в яких виникають випадкові регенеративні структури та випадкові процеси з регенерацією, сприяв появі помітної кількості публікацій, присвячених їх дослідженню, що свідчить про високу актуальність та популярність цієї проблематики. Серед найважливіших робіт згадаємо серію статей К. Клюппельберг, Т. Мікоша та співавторів про процеси дробового ефекту, побудовані за процесом Пуассона; низку робіт А. Барбура, О. Гнєдіна, М. Йора, О. Іксанова, Дж. Пітмена та інших про регенеративні композиції та розбиття; статті Ж. Берестикі, Н. Берестикі, О. Гнєдіна, О. Іксанова, В. Лімік, М. Мьолє, С. Сагітова, Дж. Пітмена та Дж. Швайнсберга по коалесцентам з множинними злиттями; дослідження Л. Девроє, М. Дрмоти, О. Іксанова, Х. Махмуда, М. Мьолє, Х. Хвана пов'язані з випадковими деревами; статті Т. Брюсса, Р. Грюбеля, Х. Продінгера, В. Шпанковскі про процедури вибору лідера; публікації Р. Арратія, А. Вершика, П. Ердеша, С. Керова, В. Колчіна, С. Таваре, П. Турана, А. Якиміва по випадковим перестановкам.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась у відповідності до плану наукових досліджень кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка в межах науково-дослідної теми «Проблеми теорії прийняття рішень та системного аналізу стохастичних мереж» (2011-2015 рр.), НДР №11БФ015-06, номер держреєстрації О116U002529.

Підготовка дисертаційної роботи була частково підтримана грантом Free Competition Grant of NWO (організація наукових досліджень Нідерландів), грантом Президента України Ф47/012, грантом Фонду Олександра фон Гумбольдта (проект UKR/1159481).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є побудова асимптотичної теорії випадкових регенеративних структур, зокрема, побудова класифікації режимів слабкої збіжності випадкових процесів з регенерацією, що описують такі структури, коли їх розмір стає великим. Умовно, завдання цього дослідження можна поділити на два класи. Перший клас задач – отримання функціональних граничних теорем у просторі неперервних функцій або просторі Скорохода, або доведення збіжності скінченновимірних розподілів для випадкових процесів з регенерацією. Другий клас задач – вивчення властивостей траєкторій граничних процесів (локальна обмеженість; неперервність та, зокрема, гельдеровість; локальні закони повторного логарифму тощо) та аналіз їх розподілів (незалежність приростів; стаціонарність; самоподібність; моменти; великі та малі відхилення).

Об'єкт дослідження – випадкові регенеративні структури та випадкові процеси з регенерацією.

Предмет дослідження – асимптотика випадкових регенеративних структур та випадкових процесів з регенерацією.

Методика дослідження. У дисертаційній роботі використовується як стандартний апарат теорії ймовірностей, так і більш специфічні методи

1) теорії відновлення та теорії випадкових блукань (усі розділи);

2) теорії правильної зміни (усі розділи);

3) теорії точкових процесів (розділи 2, 5);

4) теорії мартингалів з дискретним часом (усі розділи);

5) теорії екстремальних процесів (розділи 2 та 5);

6) теорії ймовірнісних метрик (розділ 4);

7) теорії функцій комплексної змінної (підрозділ 6.4);

8) метод неперервного відображення (усі розділи).

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати дисертаційної роботи є новими. Зокрема,

- побудовано класифікацію режимів слабкої збіжності деяких випадкових процесів з імміграцією у моменти стрибків процесу відновлення, зокрема, процесів дробового ефекту з функціями відгуку, що не зростають.

- Вперше отримано функціональну граничну теорему для числа ненульових блоків регенеративних композицій, породжених узагальненими процесами Пуассона.

- Описано режими слабкої збіжності числа нульових блоків регенеративних композицій, породжених узагальненими процесами Пуассона.

- Введено поняття регенеративних випадкових перестановок та отримано граничні теореми для порядку таких перестановок.

- Запропоновано конструкцію каплінгу випадкових регенеративних композицій та переставних коалесцентів з множинними злиттями, що дозволило встановити низку граничних теорем для функціоналів, заданих на коалесцентах з пиловою компонентою.

- Отримано достатні умови слабкої збіжності часу поглинання спадних ланцюгів Маркова до стійких розподілів.

- Встановлено граничну теорему для числа нульових декрементів у випадкових блуканнях з бар'єром.

- Доведено низку граничних теорем для числа злиттів та повної довжини дерева переставних коалесцентів без пилової компоненти.

- Запропоновано та досліджено процедури випадкового просіювання; встановлено їх зв'язок з процесами Гальтона-Ватсона та переставними коалесцентами.

- Вперше введено поняття точкового процесу, стійкого відносно просіювання, та отримано характеризацію точкових процесів, стійких відносно просіювання випадковими блуканнями.

- Досліджено узагальнені процедури вибору лідера та встановлено граничні теореми для числа раундів, початкових позицій гравців та числа гравців після n раундів.

- Досліджено властивості розподілів та властивості траєкторій процесів, що є граничними для випадкових процесів з регенерацією. Зокрема, перевірено гельдеровість та встановлено локальні закони повторного логарифма для дробово інтегровних обернених стійких субординаторів.
- Доведено локальну універсальність для дійсних коренів тригонометричних поліномів.
- Встановлено збіжність степеневих та показникових моментів у граничних теоремах для процесу відновлення.

Теоретичне і практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи носять в основному теоретичний характер і є внеском до теорії дискретних випадкових структур з регенерацією. Основні результати, а також ідеї та методи, що використовуються в роботі, можуть бути корисними у різних розділах теорії ймовірностей та математичної статистики. З іншого боку, поняття регенерації, самоподібності та рекурсивності у стохастичних системах, притаманні об'єктам даного дослідження, виникають у багатьох прикладних задачах. Запропонована у роботі методологія аналізу таких систем має вагоме прикладне значення. Наведемо короткий перелік можливих застосувань. Більш повний опис може бути знайдений в огляді літератури.

Випадкові процеси з імміграцією та процеси дробового ефекту є математичною моделлю електричного струму у вакуумних трубках, дробового ефекту в іонних каналах, затримок у врегулюванні страхових претензій, сейсмічної активності регіону та багатьох інших процесів у різних областях науки. Фактично, будь-який процес, який описує кумулятивний ефект однотипних імпульсів, що поступають у систему у випадкові, але регулярно розподілені моменти часу, є випадковим процесом з імміграцією. Теорія переставних коалесцентів та регенеративних композицій є складовою математичного апарату генетики популяцій. Випадкові дерева та процедури вибору лідера (випадкові просіювання) повсякчас застосовуються в комп'ютерних науках, зокрема у аналізі алгоритмів.

Матеріали, подані у дисертаційному дослідженні, частково увійшли до спеціальних курсів, які читалися автором на кафедрі дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, представлені у дисертації, отримані автором особисто. Із статей, написаних у співавторстві, до дисертації включені лише результати автора.

В статті [1] О. М. Іксанову (науковому консультанту автора) належить доведення теореми 3.2. Оформлення робіт [1,2,3,23] було виконано Г. Альсмаєром. Представлені в дисертації результати цих статей отримані автором особисто. З. Каблучко належать твердження 2.6, 2.13, 2.22 та розділ 2.5 роботи [23] та моделювання в статті [2]. Розділ 1 роботи [5] написаний О. В. Гнєдіним, О. М. Іксанову належить доведення теореми 5.1. В статті [6] автором було отримано першу версію доведення теорем 3.1 та 3.2. В оглядовій статті [7] автором написані підрозділи 2.4, 4.1, 4.2 та розділ 8. Теорема 3.2 та твердження 3.1 роботи [19] належать М. Мьолє, О. М. Іксанову належать наслідки 3.1 та 3.2, оформлення роботи виконано О. В. Гнєдіним. Теорема 1.1 роботи [10] вперше доведена О. М. Іксановим та З. Каблучко для окремого випадку, загальне формулювання та доведення належать автору. В роботі [9] О. М. Іксановим та З. Каблучко доведено основний результат у випадку скінченної дисперсії, решта результатів отримана автором. В роботі [4] О. М. Іксанову належить доведення теореми 2.6, З. Каблучко проведені моделювання, розділ 3 написаний Г. М. Шевченко. В роботах [12,13,14,22] М. Майнерсом написані вступні частини, перші доведення теореми 2.9 у [12] та теореми 2.4 у [14], а також розділ 4 в [22] належать О. М. Іксанову. Наслідок 1.6 в [13] сформульовано і доведено О. М. Іксановим. Зауваження 2.2 та приклад 2.5 роботи [16] належать З. Каблучко. В роботі [11] О. М. Іксановим написано розділ 2. Вступ статті [8] написано О. В. Гнєдіним.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися на міжнародній конференції «Modern Stochastics: Theory and Applications III» (м. Київ, Україна, 2012 р.), міжнародній конференції «German Open Conference on Probability and Statistics 2014» (м. Ульм, Німеччина, 2014 р.), міжнародній конференції «German Probability and Statistics Days 2016» (м. Бохум, Німеччина, 2016 р.), міжнародній конференції «Probability, Reliability and Stochastic Optimization» (м. Київ, Україна, 2015 р.), серії міжнародних конференцій «Probabilistic Aspects of Harmonic Analysis» (м. Бендлєво, Польща, 2014 та 2016 рр.), міжнародній конференції «Stochastic Processes in Abstract Spaces» (м. Київ, Україна, 2015 р.) та серії конференцій «Problems of Decision Making under Uncertainties» (Україна, 2011 та 2012 рр.); на воркшопах «Spatial Models in Statistical Mechanics» та «Geometric Models in Probability» (м. Дармштадт, Німеччина, 2014 та 2016 рр.); на воркшопі «International Workshop on Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory, and Mathematical Statistics» (м. Київ, Україна, 2016 р.).

Також матеріали дисертаційного дослідження доповідалися та обговорювалися на наукових семінарах:

- відділу випадкових процесів Інституту математики НАН України;
- кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»;
- кафедри дослідження операцій Київського національного університету імені Тараса Шевченка;
- кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка;
- Інституту математики університету міста Утрехт (Нідерланди);

- кафедри стохастики факультету математики та комп'ютерних наук технічного університету міста Ейндховен (Нідерланди);
- Інституту математичної статистики Університету м. Мюнстер (Німеччина);
- при відділі теорії ймовірностей Інституту математики університету міста Кіль (Німеччина);
- з прикладної ймовірності при Інституті математики м. Вроцлав (Польща);
- відділення стохастики Інституту математики університету м. Тюбінген (Німеччина);
- відділення стохастики технічного університету м. Дармштадт (Німеччина);
- кафедри стохастики університету королеви Марії м. Лондон (Великобританія).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи викладено у 20 статтях [1-20], надрукованих у провідних наукових фахових виданнях України та інших країн. Частина результатів викладена у розділі 3.1 монографії [21]. До праць, які відображають наукові результати дисертації та не увійшли до переліку основних публікацій, належать статті [22-23]. Додатково основні результати роботи представлено в 12 матеріалах конференцій [24-35]. З 21 статті [1-20,22] 20 опубліковано в журналах, що індексуються в наукометричній базі Scopus.

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, 6-ти розділів, висновків, списку використаних джерел та трьох додатків. Кожен розділ розбито на підрозділи, які, в свою чергу, поділяються на пункти. Розділи мають власну нумерацію формул. Теореми, леми, твердження, зауваження мають наскрізну нумерацію. Робота містить 11 рисунків та 4 таблиці, список використаних джерел містить 276 позицій. В додатку A зібрано ряд допоміжних лем, а також менш важливі результати, що не увійшли в основний текст дисертації внаслідок обмежень на його розмір. В короткому додатку B стисло викладено найбільш важливі для розуміння основного тексту поняття: конструкція топологій на просторах Скорохода, основи теорії маркованих точкових процесів, властивості мінімальних L_p метрик та результати про сильну апроксимацію процесів відновлення. В додатку C зібрано декілька суто технічних результатів. Загальний обсяг дисертації становить 440 сторіноку, основний текст займає 312 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Наведемо формальне визначення випадкової регенеративної структури. Нехай $(\mathfrak{A}, \preceq)$ – довільна направлена множина (частково впорядкована множина в якій довільна пара елементів має верхню межу), елементи якої будемо ототожнювати з розмірами регенеративної структури. Найчастіше, $(\mathfrak{A}, \preceq) = (\mathbb{N}_0, \leq)$ або $(\mathfrak{A}, \preceq) = (\mathbb{R}_+, \leq)$. Далі, для кожного $\alpha \in \mathfrak{A}$, нехай $\mathfrak{B}_\alpha$ – гаусдорфовий топологічний простір, елементи якого називатимемо структурами розміру α, $\mathcal{F}_\alpha$ – деяка σ-алгебра в $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathbb{P}_\alpha$ – ймовірнісна міра на $\mathcal{F}_\alpha$. Елемент $\mathfrak{F}_\alpha \in \mathfrak{B}_\alpha$, вибраний відповідно до міри $\mathbb{P}_\alpha$, називатимемо *випадковою структурою* розміру α з розподілом $\mathbb{P}_\alpha$.

Припустимо, що для довільних $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, $\alpha \preceq \beta$, задані відображення (операції проектування) $\pi_{\alpha,\beta} : \mathfrak{B}_\beta \mapsto \mathfrak{B}_\alpha$, що є неперервними, $(\mathcal{F}_\beta, \mathcal{F}_\alpha)$-вимірними та задовольняють умови:

- $\pi_{\alpha,\alpha} = \mathrm{Id}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$;
- $\pi_{\alpha,\gamma} = \pi_{\alpha,\beta} \circ \pi_{\beta,\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{A}$, $\alpha \preceq \beta \preceq \gamma$.

Узгоджена випадкова структура – це сім'я $(\mathfrak{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ така, що $\mathfrak{F}_\alpha$ має розподіл $\mathbb{P}_\alpha$ та для довільних $\alpha \preceq \beta$

$$\mathfrak{F}_\alpha \stackrel{\mathrm{d}}{=} \pi_{\alpha,\beta}(\mathfrak{F}_\beta). \tag{1}$$

Зауважимо, що за досить загальних умов на сім'ю $(\mathfrak{B}_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ з теореми Колмогорова про продовження міри випливає існування проективної границі $(\mathfrak{B}_\infty, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}_\infty)$ послідовності $(\mathfrak{B}_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \mathbb{P}_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ та існування відповідних операцій проектування $\pi_{\alpha,\infty} : \mathfrak{B}_\infty \mapsto \mathfrak{B}_\alpha$. В такій ситуації елемент $\mathfrak{F}_\infty \in \mathfrak{B}_\infty$ з розподілом $\mathbb{P}_\infty$ можна вважати випадковою структурою нескінченного розміру для якої має місце $\pi_{\alpha,\infty}(\mathfrak{F}_\infty) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathfrak{F}_\alpha$.

Розглянемо довільне відображення

$$\pi_\alpha = (\pi_\alpha^{(1)}, \pi_\alpha^{(2)}) : \mathfrak{B}_\alpha \mapsto \{(\beta, \mathfrak{B}_\beta) : \beta \preceq \alpha\},$$

яке будемо інтерпретувати як операцію видалення частини зі структури розміру $\alpha \in \mathfrak{A}$. Таким чином, якщо $\mathfrak{F}_\alpha$ є випадковою структурою розміру $\alpha \in \mathfrak{A}$, то $\pi_\alpha^{(2)}(\mathfrak{F}_\alpha)$ є випадковою структурою розміру $\pi_\alpha^{(1)}(\mathfrak{F}_\alpha) \preceq \alpha$.

Означення 1. *Випадковою регенеративною структурою* називається узгоджена випадкова структура $(\mathfrak{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ така, що виконується умова

$$\pi_\alpha^{(2)}(\mathfrak{F}_\alpha) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \widehat{\mathfrak{F}}_{\pi_\alpha^{(1)}(\mathfrak{F}_\alpha)}, \quad \alpha \in \mathfrak{A}, \tag{2}$$

де $\widehat{\mathfrak{F}}_\beta$ є копією $\mathfrak{F}_\beta$, яка не залежить від $\mathfrak{F}_\alpha$ для кожного $\beta \preceq \alpha$.

Означення 2. *Випадковим процесом з регенерацією*, що визначений на випадковій регенеративній структурі $(\mathfrak{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$, називається довільна сім'я випадкових величин $(\mathfrak{R}_\alpha(\mathfrak{F}_\alpha))_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ таких, що $\mathfrak{R}_\alpha : \mathfrak{B}_\alpha \to \mathbb{R}$ є $(\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-вимірним відображенням для кожного $\alpha \in \mathfrak{A}$.

У наведеному на початку прикладі випадкових рівномірних перестановок: $(\mathfrak{A}, \preceq) = (\mathbb{N}_0, \leq)$, $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{S}_n$ з дискретною топологією, $\mathcal{F}_n = \mathrm{bool}(\mathfrak{S}_n)$ та $\mathbb{P}_n$ – рівномірна міра на $\mathfrak{S}_n$. При $0 \leq m \leq n$ проектування $\pi_{m,n} : \mathfrak{S}_n \mapsto \mathfrak{S}_m$ є видаленням елементів $\{m+1, m+2, \ldots, n\}$ з циклів, в які ці елементи потрапили, з подальшим видаленням порожніх циклів, якщо такі з'явились. В якості операції π_n ми взяли видалення циклу, що містить 1 з подальшою перенумерацією решти елементів зі збереженням порядку. В якості відображення $\mathfrak{R}_n$ можна взяти довільну функцію, що визначена на $\mathfrak{S}_n$, наприклад: число циклів, кількість циклів довжини 1, найменше спільне кратне довжин циклів і т. д.

Наведемо тепер скорочену вибірку основних результатів роботи.

Випадкові процеси з імміграцією. Позначимо через $D[0,\infty)$, $D(0,\infty)$ та $D(\mathbb{R})$ простори Скорохода неперервних справа дійснозначних функцій, що визначені на $[0,\infty)$, $(0,\infty)$ та $\mathbb{R}$ відповідно та мають скінченні границі зліва в кожній внутрішній точці області визначення. Нехай $X := (X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ є випадковим процесом з траєкторіями у $D(\mathbb{R})$, який задовольняє умову $X(t) = 0$ для всіх $t < 0$, та нехай ξ є додатною випадковою величиною, яка може залежати від X.

Нехай $(X_1,\xi_1),(X_2,\xi_2),\ldots$ є послідовністю незалежних копій (X,ξ), а $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ є стандартним випадковим блуканням з кроками ξ_j, що стартує в нулі, тобто

$$S_0 := 0, \qquad S_k := \xi_1 + \cdots + \xi_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Випадковий процес $Y := (Y(t))_{t\in\mathbb{R}}$, що визначений рівністю

$$Y(t) := \sum_{k\geq 0} X_{k+1}(t - S_k), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

називається *випадковим процесом з імміграцією*.

Припустимо, що $\mu := \mathbb{E}\xi < \infty$, та що розподіл ξ неарифметичний, тобто не зосереджений на ґратці вигляду $d\mathbb{Z}$ для деякого $d > 0$. Припустимо, що на ймовірнісному просторі, де задана послідовність $(X_k,\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, визначені такі об'єкти:

- незалежна копія $(X_{-k},\xi_{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ послідовності $(X_k,\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$;
- пара (X_0,ξ_0), яка не залежить від $(X_k,\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ та має спільний розподіл
$$\mathbb{P}\{\xi_0 \leq x, X_0 \in \cdot\} = \frac{1}{\mu}\int_{[0,\,x]} y\mathbb{P}\{\xi \in \mathrm{d}y, X \in \cdot\}, \quad x \geq 0;$$
- в.в. U, яка не залежить від $(X_k,\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ та має рівномірний розподіл на $[0,1]$.

Покладемо

$$S_{-k} := -(\xi_{-1} + \cdots + \xi_{-k}), \quad k \in \mathbb{N}$$

та

$$S_0^* := U\xi_0, \quad S_{-1}^* := -(1-U)\xi_0, \quad S_k^* := S_0^* + S_k, \quad S_{-k-1}^* := S_{-1}^* + S_{-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Нехай $(Y^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$ є стаціонарним процесом з імміграцією, що задається формулою

$$Y^*(u) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k(u + S_k^*) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k(u + S_k^*)\mathbb{1}_{\{S_k^* \geq -u\}}.$$

Теорема 3. *Припустимо, що $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$, та що розподіл ξ неарифметичний.*

(а) *Якщо функція $G(t) := \mathbb{E}[|X(t)| \wedge 1]$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0, \infty)$, то для довільного $n \in \mathbb{N}$ та довільних точок $u_1 < u_2 < \dots < u_n$, в яких процес Y^* майже напевно неперервний, маємо*

$$\big(Y(t+u_1), \dots, Y(t+u_n)\big) \ \xrightarrow{\mathrm{d}} \ \big(Y^*(u_1), \dots, Y^*(u_n)\big), \quad t \to \infty. \tag{4}$$

(б) *Якщо для деякого $\varepsilon > 0$ функція $H_\varepsilon(t) := \mathbb{E}[\sup_{u \in [t,\, t+\varepsilon]} |X(u)| \wedge 1]$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0, \infty)$, та розподіл ξ неперервний, то*

$$Y(t+u) \ \Rightarrow \ Y^*(u), \quad t \to \infty, \tag{5}$$

у просторі Скорохода $D(\mathbb{R})$ з J_1-топологією.

У наступних теоремах покладемо $h(t) := \mathbb{E}[X(t)]$, $v(t) := \mathbb{D}[X(t)]$ та припустимо, що ці функції локально інтегровні за Ріманом на $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$.

Нагадаємо, що додатна вимірна функція ℓ, яка визначена в деякому околі ∞, *повільно змінюється* на ∞, якщо $\lim_{t\to\infty} \frac{\ell(ut)}{\ell(t)} = 1$ для всіх $u > 0$. В подальшому $\ell, \ell^*, \ell', \dots$ завжди позначають функцій, що повільно змінюються на нескінченності.

Означення 20. Функція $r : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *правильно змінюється* в $\mathbb{R}_+^2 := (0, \infty) \times (0, \infty)$, якщо існує функція $C : \mathbb{R}_+^2 \to (0, \infty)$, яка називається *граничною функцією*, така, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{r(ut, wt)}{r(t,t)} = C(u, w), \quad u, w > 0.$$

Означення 21. Функція $r : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *фіктивно правильно змінюється в $\mathbb{R}_+^2$ з індексом β*, якщо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{r(ut, wt)}{r(t,t)} = C(u, w), \quad u, w > 0,$$

де $C(u, u) = u^\beta$ для $u > 0$ та $C(u, w) = 0$ при $u, w > 0$, $u \neq w$. Функція r *правильно змінюється в $\mathbb{R}_+^2$ з індексом β у широкому сенсі*, якщо вона правильно змінюється або фіктивно правильно змінюється в $\mathbb{R}_+^2$ з індексом β.

Функція C, що фігурує в означенні функцій, які фіктивно правильно змінюються, також називається *граничною функцією*.

Означення 22. Функція $r : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *рівномірно правильно змінюється з індексом β в смугах в $\mathbb{R}_+^2$* якщо вона правильно змінюється в $\mathbb{R}_+^2$ з індексом β та

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{a \le u \le b} \left| \frac{r\big(ut, (u+w)t\big)}{r(t,t)} - C(u, u+w) \right| \ = \ 0$$

для кожного $w > 0$ та всіх $0 < a < b < \infty$.

Теорема 29. *Припустимо, що*

- *$\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty)$;*
- *$f(u, w) = \operatorname{Cov}[X(u), X(w)]$ рівномірно правильно змінюється в смугах в $\mathbb{R}^2_+ := (0, \infty) \times (0, \infty)$ або фіктивно правильно змінюється в $\mathbb{R}^2_+$, в обох випадках з індексом $\beta \in (-1, \infty)$ та граничною функцією C; якщо $\beta = 0$, також припустимо, що існує додатна монотонна функція u така, що $v(t) = \mathbb{D}[X(t)] \sim u(t)$ при $t \to \infty$;*
- *для всіх $y > 0$*

$$v_y(t) := \mathbb{E}\Big[(X(t) - h(t))^2 \mathbb{1}_{\{|X(t)-h(t)|>y\sqrt{tv(t)}\}}\Big] = o(v(t)), \quad t \to \infty. \quad (6)$$

Тоді

$$\left(\frac{Y(ut) - \sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}}}{\sqrt{\mu^{-1} tv(t)}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (V_\beta(u))_{u>0}, \quad t \to \infty, \quad (7)$$

де процес V_β є центрованим гауссівським процесом з коваріацією

$$\mathbb{E}[V_\beta(u)V_\beta(w)] = \int_0^u C(u - y, w - y)\,\mathrm{d}y, \quad 0 < u \leq w.$$

Нагадаємо означення оберненого стійкого субординатора.

Означення 20. Для $\alpha \in (0, 1)$, нехай $W_\alpha := (W_\alpha(t))_{t\geq 0}$ є α-стійким субординатором (процесом Леві, що не спадає) з експонентою Лапласа

$$-\ln \mathbb{E}[\exp(-zW_\alpha(t))] = \Gamma(1 - \alpha)tz^\alpha, \quad z \geq 0.$$

Обернений α-стійкий субординатор $W_\alpha^{\leftarrow} := (W_\alpha^{\leftarrow}(s))_{s\geq 0}$ визначається рівністю

$$W_\alpha^{\leftarrow}(s) := \inf\{t \geq 0 : W_\alpha(t) > s\}, \quad s \geq 0.$$

Означення 27. Для $\rho \in \mathbb{R}$ покладемо

$$J_{\alpha,\rho}(0) := 0, \quad J_{\alpha,\rho}(u) := \int_{[0,\,u]} (u - y)^\rho \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y), \quad u > 0.$$

Процес $(J_{\alpha,\rho}(u))_{u\geq 0}$ називається *дробово інтегровним оберненим стійким субординатором*.

Означення 28. Нехай $W_\alpha^{\leftarrow}$ є оберненим α-стійким субординатором, а C є граничною функцією для функції, що правильно змінюється в $\mathbb{R}^2_+$ у широкому сенсі з індексом $\beta \in \mathbb{R}$. Визначимо випадковий процес $Z_{\alpha,\beta} := (Z_{\alpha,\beta}(u))_{u>0}$ як центрований умовно гауссівський процес (при фіксованій траєкторії $W_\alpha^{\leftarrow}$) з умовною коваріацією

$$\mathbb{E}\big[Z_{\alpha,\beta}(u)Z_{\alpha,\beta}(w)\big|W_\alpha^{\leftarrow}\big] = \int_{[0,u]} C(u - y, w - y)\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y), \quad 0 < u \leq w,$$

у випадку $C(s,t) \neq 0$ для деяких $s,t > 0$, $s \neq t$, або центрований умовно гауссівський процес з умовно незалежними значеннями та умовною дисперсією $\mathbb{E}[Z^2_{\alpha,\beta}(u)|W^{\leftarrow}_\alpha] = \int_{[0,u]}(u-y)^\beta \, \mathrm{d}W^{\leftarrow}_\alpha(y)$ у протилежному випадку.

Коректність визначень $J_{\alpha,\rho}$ та $Z_{\alpha,\beta}$, а також властивості цих процесів розглянуто в підрозділах 6.2 та 6.3 дисертації.

Теорема 30. *Припустимо, що*

- *X не залежить від ξ;*
- *для деякого $\alpha \in (0,1)$ та деякої ℓ^*, що повільно змінюється на нескінченності*[2]
$$\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim t^{-\alpha}\ell^*(t), \quad t \to \infty; \tag{8}$$
- *$f(u,w) = \mathrm{Cov}[X(u), X(w)]$ рівномірно правильно змінюється в смугах в $\mathbb{R}^2_+$ або фіктивно правильно змінюється в $\mathbb{R}^2_+$, в обох випадках з індексом $\beta \in [-\alpha, \infty)$ та граничною функцією C; якщо $\beta = -\alpha$, також припустимо, що існує додатна монотонна функція u така, що $\lim_{t\to\infty} \frac{v(t)}{\mathbb{P}\{\xi>t\}u(t)} = 1$;*
- *для всіх $y > 0$*
$$v_y(t) := \mathbb{E}\Big[(X(t)-h(t))^2 \mathbb{1}_{\{|X(t)-h(t)|>y\sqrt{v(t)/\mathbb{P}\{\xi>t\}}\}}\Big] = o(v(t)), \quad t \to \infty.$$

Тоді
$$\left(\sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{v(t)}}\Big(Y(ut) - \sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}}\Big)\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (Z_{\alpha,\beta}(u))_{u>0}$$

при $t \to \infty$, де умовно гауссівський процес $Z_{\alpha,\beta}$ був введений в означенні 28.

Покладемо $\sigma^2 := \mathbb{D}\xi$. Нехай додатна функція c визначається таким чином:

(i) якщо $\sigma^2 < \infty$, то
$$c(t) = \sigma\sqrt{t}; \tag{9}$$

(ii) якщо $\sigma^2 = \infty$ та виконується умова
$$\mathbb{E}[\xi^2 \mathbb{1}_{\{\xi \leq t\}}] \sim \ell^*(t), \quad t \to \infty,$$
то c вибирається довільною додатною функцією такою, що
$$\lim_{t\to\infty} t\ell^*(c(t))/c^2(t) = 1; \tag{10}$$

[2]Нагадаємо, що ℓ, $\widehat{\ell}$, ℓ^* тощо завжди в цій роботі позначають функції повільної зміни, тому надалі в подібних місцях фраза «що повільно змінюється на нескінченності» не пишеться.

(iii) якщо виконується умова

$$\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim t^{-\alpha}\ell^*(t), \quad t \to \infty,$$

з $\alpha \in (1, 2)$, то c вибирається довільною додатною функцією такою, що

$$\lim_{t\to\infty} t\ell^*(c(t))/c^\alpha(t) = 1. \tag{11}$$

Нагадаємо, що розподіл ξ належить області притягання нормального (2-стійкого) розподілу, якщо виконується одна з умов: (i) або (ii); і належить області притягання α-стійкого закону, $\alpha \in (1, 2)$, якщо виконується умова (iii).

Теорема 40. *Припустимо, що розподіл ξ належить області притягання α-стійкого закону, $\alpha \in (1, 2]$, функція h є монотонною для великих значень аргументу та не дорівнює нулю тотожно, а границя*

$$p := \lim_{t\to\infty} \frac{c^2(t)h^2(t)}{\int_0^t v(y)\mathrm{d}y + c^2(t)h^2(t)} \in [0, 1],$$

існує. Припустимо також, що

- *якщо $p < 1$, то виконуються умови теореми 29;*
- *якщо $p > 0$, то $h(t) \sim t^\rho \widehat{\ell}(t)$ при $t \to \infty$ для деякого $\rho > -1/\alpha$ та деякої $\widehat{\ell}$;*
- *якщо $p = 1$, то $\lim_{t\to\infty} \int_0^t v(y)\mathrm{d}y = \infty$ та існує додатна монотонна функція u така, що $v(t) \sim u(t)$ при $t \to \infty$, або v є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0, \infty)$;*
- *якщо $p \in (0, 1)$, то X не залежить від ξ.*

Тоді

$$\left(\frac{Y(ut) - \frac{1}{\mu}\int_0^{ut} h(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{\int_0^t v(y)\mathrm{d}y + c^2(t)h^2(t)}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}$$
$$\left(\sqrt{\frac{(1-p)(1+\beta)}{\mu}} V_\beta(u) + \sqrt{p}\mu^{-(\alpha+1)/\alpha} \int_0^u (u-y)^\rho \, \mathrm{d}\mathcal{S}_\alpha(y)\right)_{u>0}, \ t \to \infty,$$

де процес V_β такий, як в теоремі 29, а $\mathcal{S}_\alpha$ не залежить від V_β і є спектрально негативним α-стійким процесом Леві з характеристичною функцією

$$\mathbb{E}[\exp(iz\mathcal{S}_\alpha(1))] = \exp\{-|z|^\alpha\Gamma(1-\alpha)(\cos(\pi\alpha/2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sign}(z)\sin(\pi\alpha/2))\}, \quad z \in \mathbb{R} \tag{12}$$

(при $\alpha < 2$) або стандартним броунівським рухом (при $\alpha = 2$).

Теорема 41. *Припустимо, що співвідношення* (8) *виконується з*[3] $\alpha \in (0,1)$ *та* h *не дорівнює нулю тотожно. Припустимо, що границя*

$$q := \lim_{t\to\infty} \frac{h^2(t)}{v(t)\mathbb{P}\{\xi > t\} + h^2(t)} \in [0,1]$$

існує та

- *якщо* $q < 1$, *то виконуються умови теореми 30 (з тим же* α*);*
- *якщо* $q = 1$, *то* $h(t) \sim t^{\rho}\widehat{\ell}(t)$, $t \to \infty$ *для деякого* $\rho \geq -\alpha$ *та деякої* $\widehat{\ell}$*; якщо* $\rho = -\alpha$, *то припустимо також, що існує додатна зростаюча функція* w *така, що* $\lim_{t\to\infty} w(t) = \infty$ *та* $\lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{\mathbb{P}\{\xi>t\}w(t)} = 1$.

Покладемо $\rho := (\beta - \alpha)/2$, *якщо* $q \in (0,1)$. *Тоді*

$$\left(\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}Y(ut)}{\sqrt{v(t)\mathbb{P}\{\xi > t\} + h^2(t)}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(\sqrt{1-q}Z_{\alpha,\beta}(u) + \sqrt{q}\int_{[0,u]} (u-y)^{\rho}\, \mathrm{d}W_{\alpha}^{\leftarrow}(y)\right)_{u>0}, \quad t \to \infty,$$

де процес $Z_{\alpha,\beta}$ *такий же, як в теоремі 30, а обернений* α*-стійкий субординатор* $W_{\alpha}^{\leftarrow}$ *під знаком інтеграла той же, що й в означенні процесу* $Z_{\alpha,\beta}$. *Зокрема, доданки, що визначають граничний процес, залежні.*

Випадкові регенеративні композиції та перестановки, ґратки Бернуллі. Ґратка Бернуллі – це схема випадкового розміщення «куль» по зліченному набору «комірок», в якій кулі представлені послідовністю незалежних в.в. $U_1, U_2, \ldots$ з рівномірним на $(0,1)$ розподілом, а комірки – це інтервали $(V_i, V_{i-1}]$, $i \in \mathbb{N}$, утворені послідовними точками мультиплікативного випадкового блукання $(V_j)_{j\geq 0}$, яке задається рівностями:

$$V_0 := 1, \quad V_n := \prod_{i=1}^{n} W_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

для послідовності $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ незалежних копій в.в. W зі значеннями в інтервалі $(0,1)$. Послідовність $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ припускається незалежною від послідовності $U_1, U_2, \ldots$. Вважається, що куля U_k потрапила в комірку $(V_i, V_{i-1}]$ тоді і тільки тоді, коли $V_i < U_k \leq V_{i-1}$.

Введемо випадкові величини

$$Z_{n,i}^* \; := \; \#\{1 \leq j \leq n : U_j \in (V_i,\, V_{i-1}]\}, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

[3]Нагадаємо, що ця умова еквівалентна тому, що розподіл ξ нележить області притягання α-стійкого розподілу, $\alpha \in (0,1)$.

тобто $Z^*_{n,i}$ є кількістю куль в комірці з номером i (комірки нумеруються справа наліво) за умови, що всього розміщується n куль. Також покладемо

$$K^*_{n,r} := \sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{Z^*_{n,i}=r\}}, \quad r = 1, \dots, n,$$

та $K^*_n := \sum_{r=1}^n K^*_{n,r}$. Таким чином, $K^*_{n,r}$ є кількістю комірок в яких міститься рівно r куль за умови, що всього розміщується n куль, а K^*_n є кількістю зайнятих комірок.

В підрозділі 3.1 розділу 3 отримано граничні теореми для таких процесів:

- $(K^*_n(t))_{t\in[0,1]} = (\sum_{r=1}^{[n^t]} K^*_{n,r})_{t\in[0,1]}$ – кількість зайнятих комірок, що містять не більше n^t куль за умови, що всього розміщується n куль;
- $(L^*_{[e^{ut}]})_{u\geq 0}$ – кількість порожніх комірок з номерами, що не перевищують номер останньої зайнятої комірки за умови, що всього розміщується $[e^{ut}]$ куль;
- $(O^*_{[e^{ut}]})_{u\geq 0} = (\text{НСК}\{Z^*_{[e^{ut}],i} : i \in \mathbb{N}\})_{u\geq 0}$ – найменше спільне кратне[4] елементів послідовності $(Z^*_{[e^{ut}],i})_{i\in\mathbb{N}}$.

Нехай процес $(\mathcal{S}_\alpha(t))_{t\geq 0}$, $\alpha \in (1, 2]$ визначений як в теоремі 40, зокрема $(\mathcal{S}_2(t))_{t\geq 0}$ є стандартним броунівським рухом.

Теорема 71. *Припустимо, що* $\mathbb{E}|\ln(1-W)|^a < \infty$ *для деякого* $a > 0$. *Покладемо*

$$u_n(t) := \mu^{-1} \int_{(1-t)\ln n}^{\ln n} \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| \leq s\}\mathrm{d}s,$$
$$v_n(t) := \mu^{-1} \int_{(1-t)\ln n}^{\ln n} \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > s\}\mathrm{d}s = \mu^{-1} t \ln n - u_n(t)$$

при $t \in [0, 1]$, *де* $\mu = \mathbb{E}|\ln W|$.

(D1) Якщо $\sigma^2 := \mathbb{D}|\ln W| < \infty$, *то*

$$\frac{K^*_n(t) - u_n(t)}{\sqrt{\mu^{-3}\sigma^2 \ln n}} \Rightarrow \mathcal{S}_2(t), \quad n \to \infty,$$

та

$$\sqrt{\mu\sigma^{-2}\ln n}\left(\frac{K^*_n(t)}{K^*_n} - t + \frac{v_n(t) - t v_n(1)}{u_n(1)}\right) \Rightarrow \mathcal{S}_2(t) - t\mathcal{S}_2(1), \quad n \to \infty,$$

у просторі Скорохода $D[0, 1]$ *з* J_1*-топологією.*

[4]Цей функціонал задає порядок регенеративної випадкової перестановки, породженої ґраткою Бернуллі.

(D2) Якщо $\sigma^2 = \infty$ *та* $\mathbb{E}[(\ln W)^2 \mathbb{1}_{\{|\ln W| \le x\}}] \sim \ell(x)$, $x \to \infty$, *то*

$$\frac{K_n^*(t) - u_n(t)}{\mu^{-3/2} c(\ln n)} \Rightarrow \mathcal{S}_2(t), \quad n \to \infty,$$

та

$$\frac{\sqrt{\mu} \ln n}{c(\ln n)} \left(\frac{K_n^*(t)}{K_n^*} - t + \frac{v_n(t) - t v_n(1)}{u_n(1)} \right) \Rightarrow \mathcal{S}_2(t) - t\mathcal{S}_2(1), \quad n \to \infty$$

у просторі Скорохода $D[0,1]$ *з* J_1*-топологією, де* c *є довільною додатною функцією такою, що* $\lim_{x\to\infty} c^{-2}(x) x \ell(c(x)) = 1$.

(D3) Якщо $\mathbb{P}\{|\ln W| > x\} \sim x^{-\alpha}\ell(x)$, $x \to \infty$ *для деякого* $\alpha \in (1,2)$, *то*

$$\frac{K_n^*(t) - u_n(t)}{\mu^{-(\alpha+1)/\alpha} c(\ln n)} \Rightarrow \mathcal{S}_\alpha(t), \quad n \to \infty,$$

та

$$\frac{\mu^{1/\alpha} \ln n}{c(\ln n)} \left(\frac{K_n^*(t)}{K_n^*} - t + \frac{v_n(t) - t v_n(1)}{u_n(1)} \right) \Rightarrow \mathcal{S}_\alpha(t) - t\mathcal{S}_\alpha(1), \quad n \to \infty,$$

у просторі Скорохода $D[0,1]$ *з* M_1*-топологією, де* c *є довільною додатною функцією такою, що* $\lim_{x\to\infty} c^{-\alpha}(x) x \ell(c(x)) = 1$.

Теорема 79. *Припустимо, що існують* $\alpha \in (0,1)$ *та* $\beta \ge -\alpha$, *а також функції* ℓ *та* $\widehat{\ell}$ *такі, що*

$$\mathbb{P}\{|\ln W| > x\} \sim x^{-\alpha}\ell(x) \quad \text{та} \quad \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\} \sim x^{\beta}\widehat{\ell}(x), \quad x \to \infty.$$

У випадку $\alpha = -\beta$ *припустимо також, що*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{|\ln W| > x\}}{\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\}} = 0$$

та існує неспадна функція u *така, що*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{|\ln W| > x\} u(x)}{\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\}} = 1.$$

Тоді

$$\left(\frac{\mathbb{P}\{|\ln W| > t\}}{\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > t\}} L^*_{[e^{ut}]} \right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(\int_{[0,u]} (u-y)^\beta \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y) \right)_{u>0}, \quad t \to \infty.$$

Теорема 80. *Нехай* $\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > t\} \sim t^\beta \widehat{\ell}(t)$ *при* $t \to \infty$ *для деякого* $\beta \in (-1, 0]$, *а розподіл* $|\ln W|$ *належить області притягання деякого стійкого розподілу з* $\alpha \in (1,2]$. *Нехай функція* c *визначається формулами* (9)-(11) *з* $\xi := |\ln W|$.

(a) Якщо $\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>t\}=o(t/c^2(t))$ *при* $t\to\infty$*, то*

$$\left(\frac{L^*_{[e^{ut}]}-\frac{1}{\mu}\int_0^{ut}\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>y\}\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{1}{\mu}\int_0^t\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>y\}\mathrm{d}y}}\right)_{u>0}\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}(V_\beta(u))_{u>0},\quad t\to\infty,$$

де V_β *є центрованим гауссівським процесом з коваріацією*

$$\mathbb{E}[V_\beta(u)V_\beta(w)]=w^{1+\beta}-(w-u)^{1+\beta},\quad 0\le u\le w.$$

(b) Якщо $t/c^2(t)=o(\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>t\})$ *при* $t\to\infty$*, то*

$$\left(\frac{L^*_{[e^{ut}]}-\frac{1}{\mu}\int_0^{ut}\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>y\}\mathrm{d}y}{\mu^{-1-1/\alpha}c(t)\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>t\}}\right)_{u>0}\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}\left(\int_{[0,u]}(u-y)^\beta\mathrm{d}\mathcal{S}_\alpha(y)\right)_{u>0}.$$

Теорема 88. *Припустимо, що розподіл* W *є абсолютно неперервним з щільністю* f.

(i) Якщо існують $\delta_1\ge 0$ *та* $\delta_2\ge 0$ *такі, що* f *не зростає* $(0,\delta_1)$*, обмежена на* $[\delta_1,1-\delta_2]$ *та не спадає на* $(1-\delta_2,1)$*, а* $|\ln W|$ *належить області притягання деякого* α*-стійкого розподілу з* $\alpha\in(1,2]$*, то при* $t\to\infty$ *маємо*

$$\left(\frac{\ln O^*_{[e^{ut}]}-\frac{1}{\mu}\int_0^{ut}\int_0^y\mathbb{P}\{|\ln(1-W)\le z\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y}{\mu^{-1-1/\alpha}tc(t)}\right)_{u\ge 0}\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}\left(\int_0^u\mathcal{S}_\alpha(y)\mathrm{d}y\right)_{u\ge 0},$$

де функція c визначається формулами (9)-(11) *з* $\xi:=|\ln W|$.

(ii) Якщо $\sup_{x\in[0,1]}x^\alpha(1-x)^\alpha f(x)<\infty$ *для деякого* $\alpha\in[0,1)$*, то* $\sigma^2<\infty$ *та*

$$\left(\frac{\ln O^*_{[e^{ut}]}-\frac{1}{\mu}\int_0^{ut}\int_0^y\mathbb{P}\{|\ln(1-W)\le z\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y}{\sigma\mu^{-3/2}t^{3/2}}\right)_{u\ge 0}\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}\left(\int_0^u\mathcal{S}_2(y)\mathrm{d}y\right)_{u\ge 0}.$$

Переставні коалесценти з множинними злиттями та пилом. Переставний коалесцент з множинними злиттями є марковським процесом $\mathfrak{P}_n=(\mathfrak{P}_n(t))_{t\ge 0}$ зі значеннями в множині розбиттів $\{1,2,3,\dots,n\}$, який стартує з тривіального розбиття $\{1\},\{2\},\dots,\{n\}$ та має динаміку, що описується правилом: якщо в деякий момент часу $t\ge 0$ розбиття має $m\ge 2$ блоків, то кожні k з них зливаються в один блок з інтенсивністю

$$\lambda_{m,k}=\int_0^1 x^{k-2}(1-x)^{m-k}\Lambda(\mathrm{d}x),\quad 2\le k\le m,\quad m\ge 2,$$

де Λ є деякою скінченною мірою на $[0, 1]$. Нехай $N_n(t)$ є кількістю блоків в розбитті $\mathfrak{P}_n(t)$ в момент часу $t \geq 0$ і нехай X_n є кількістю стрибків процесу $N_n(t)$ до моменту поглинання в стані 1, та $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : N_n(t) = 1\}$. У підрозділі 3.3 розглянуто коалесценти, що задовольняють умову

$$\int_0^1 y^{-1}\Lambda(\mathrm{d}y) < \infty. \tag{14}$$

Такі коалесценти носять назву *коалесцентів з пиловою компонентою*.

У наведених нижче теоремах $(S_t)_{t\geq 0}$ є субординатором без зсуву, без поглинання та з експонентою Лапласа

$$\Phi(z) = -\ln \mathbb{E}e^{-zS_1} = \int_0^1 (1-(1-y)^z)y^{-2}\Lambda(\mathrm{d}y), \quad z \geq 0,$$

а $T_t := \inf\{y \geq 0 : S_y > t\}$, $t \geq 0$ є моментом першого проходження рівня t субординатором $(S_t)_{t\geq 0}$. В подальшому вважаємо, що $\Lambda(\{1\}) = 0$, що виключає можливість злиття всіх наявних блоків в один через показниковий час.

Теорема 96. *Припустимо, що виконується умова*

$$\int_0^1 y^{-1}|\ln y|\Lambda(dy) < \infty.$$

Якщо для деяких констант $a_n > 0$ та $b_n \in \mathbb{R}$, одна з послідовностей випадкових величин $(\tau_n - b_n)/a_n$ або $(T_{\ln n} - b_n)/a_n$ слабко збігається при $n \to \infty$ до невиродженого власного розподілу, то інша також збігається до цього розподілу. Кожне з цих тверджень еквівалентне тому, що S_1 належить області притягання деякого стійкого розподілу.

У наступній теоремі величина $K_n^*(1)$ є кількістю зайнятих комірок в ґратці Бернуллі, породженій мультиплікативним випадковим блуканням з кроком W таким, що

$$\mathbb{P}\{W \leq x\} = \frac{\int_{1-x}^1 y^{-2}\Lambda(\mathrm{d}y)}{\int_0^1 y^{-2}\Lambda(\mathrm{d}y)}, \quad x \in [0, 1],$$

де припускається $\int_0^1 y^{-2}\Lambda(\mathrm{d}y) < \infty$.

Теорема 99. *Припустимо, що $\int_0^1 y^{-2}\Lambda(\mathrm{d}y) < \infty$. Якщо для деяких констант $a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ та $b_n \in \mathbb{R}$, одна з послідовностей випадкових величин $(K_n^*(1) - b_n)/a_n$ або $(X_n - b_n)/a_n$ слабко збігається при $n \to \infty$ до деякого невиродженого власного розподілу, то інша також слабко збігається до цього розподілу. Зокрема, $\frac{K^*(1)-b_n}{a_n}$ слабко збігається, якщо розподіл $|\ln W|$ належить області притягання деякого стійкого розподілу.*

Теорема 100. *Припустимо, що*

$$\int_x^1 y^{-2}\Lambda(\mathrm{d}y) \sim x^{-\gamma}\ell_1(1/x), \quad x \downarrow 0,$$

для деякого $0 < \gamma < 1$. *Тоді*

$$\frac{X_n}{\Gamma(2-\gamma)n^{\gamma}\ell_1(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} \int_0^{\infty} \exp(-\gamma S_t)\mathrm{d}t, \quad n \to \infty.$$

Ймовірнісні метрики та ланцюги Маркова, що не зростають. Нехай $(M_n)_{n\geq 0}$ є однорідним ланцюгом Маркова з фазовим простором $\mathbb{N}_0$, поглинаючим станом 0 та матрицею перехідних ймовірностей $P = (p_{i,j})_{i,j\geq 0}$ такою, що $p_{i,j} = 0$ при $1 \leq i < j$ та $p_{i,i} < 1$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. Ці умови означають, що ланцюг не зростає м.н., тобто

$$\mathbb{P}\{M_{n+1} \leq M_n | M_n \geq 1\} = 1, \quad n \geq 0.$$

Для таких ланцюгів Маркова випадкові величини

$$T_n := \inf\{k \geq 0 : M_k = 0 \text{ за умови } M_0 = n\}$$

є майже напевно скінченним для всіх $n \geq 0$.

Найрізноманітніші функціонали на випадкових регенеративних структурах мають представлення у вигляді T_n з підхожою матрицею перехідних ймовірностей P. Зокрема, такі, або дуже близькі, представлення мають число $K_n^*(1)$ зайнятих комірок у ґратці Бернуллі та число X_n злиттів у коалесцентах з множинними злиттями, про які йшла мова вище.

У наступних теоремах $I_n := n - M_1$ є величиною першого декременту $(M_n)_{n\geq 0}$, а d_p позначає мінімальну L_p-метрику.

Теорема 102. *Припустимо, що* $I_n \xrightarrow{\mathrm{d}} \xi$ *при* $n \to \infty$, *та розподіл* ξ *належить області притягання деякого* α*-стійкого розподілу з* $\alpha \in (1, 2]$ *та* $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$, $\mu := \mathbb{E}\xi$. *Нехай функція* c *визначена формулами* (9)-(11) *та*

$$d_p(I_n, \xi \wedge n) \;=\; o(n^{-1}c(n)), \quad n \to \infty, \tag{15}$$

де $p = 2$, *якщо* $\mathbb{D}\xi < \infty$ *та* $p = 1$ *інакше. Тоді*

$$d_p\left(\frac{T_n - \mu^{-1}n}{\mu^{-(\alpha+1)/\alpha}c(n)}, \mathcal{S}_\alpha(1)\right) \to 0, \quad n \to \infty,$$

з тим же p, *що й в* (15). *Зокрема,*

$$\frac{T_n - \mu^{-1}n}{\mu^{-(\alpha+1)/\alpha}c(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_\alpha(1), \quad n \to \infty.$$

Теорема 103. *Припустимо, що*

$$\frac{I_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{d}} 1 - \eta, \quad n \to \infty,$$

та розподіл $|\ln\eta|$ *належить області притягання деякого* α*-стійкого розподілу з* $\alpha\in(1,2]$, $\mu_0 := \mathbb{E}|\ln\eta|$. *Нехай функція c визначена формулами* (9)-(11) *з* $\xi := |\ln\eta|$, *та*

$$d_1(\ln^+(n-I_n), \ln^+(n\eta)) = o\left(\frac{c(\ln n)}{\ln n}\right), \quad n\to\infty.$$

Тоді

$$d_1\left(\frac{T_n - \mu_0^{-1}\ln n}{\mu_0^{-(\alpha+1)/\alpha}c(\ln n)}, \mathcal{S}_\alpha(1)\right)\to 0, \quad n\to\infty,$$

зокрема

$$\frac{T_n - \mu_0^{-1}\ln n}{\mu_0^{-(\alpha+1)/\alpha}c(\ln n)} \overset{\mathrm{d}}{\to} \mathcal{S}_\alpha(1), \quad n\to\infty.$$

За допомогою цих теорем або їх модифікацій автору вдалось розв'язати ряд відкритих проблеми в теорії коалесцентів з множинними злиттями та теорії випадкових блукань з бар'єром.

Нехай міра Λ, яка фігурує в означенні коалесцентів з множинними злиттями є бета-мірою з параметрами $a, b>0$, тобто

$$\Lambda(\mathrm{d}x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\mathrm{B}(a,b)}\mathbb{1}_{\{x\in(0,1)\}}\mathrm{d}x.$$

Такі коалесценти називаються бета-коалесцентами. Бета-коалесценти мають пилову компоненту тоді і тільки тоді, коли $a>1$.

Теорема 104. *Число* X_n *злиттів у бета-коалесцентах задовольняє:*

(i) *при* $0<a<1$ *та* $b>0$

$$\frac{X_n-(1-a)n}{(1-a)n^{1/(2-a)}} \overset{\mathrm{d}}{\to} \left(\frac{1-a}{\Gamma(a)}\right)^{1/(2-a)}\mathcal{S}_{2-a}(1), \quad n\to\infty,$$

(ii) *при* $a=1$ *та* $b>0$*,*

$$\frac{\ln^2 n}{n}X_n - \ln n - \ln\ln n \overset{\mathrm{d}}{\to} \mathcal{S}_1(1), \quad n\to\infty,$$

де $\mathcal{S}_1(1)$ *є спектрально негативним* 1*-стійким розподілом з характеристичною функцією*

$$z\mapsto \exp\left\{-|z|\left(\frac{\pi}{2} - i\ln|z|\mathrm{sgn}(z)\right)\right\}, \quad z\in\mathbb{R}. \tag{16}$$

У наступному результаті $L_n := \int_0^{\tau_n} N_n(t)\mathrm{d}t$ є повною довжиною дерева коалесцента.

Теорема 105. *Для повної довжини L_n дерева в бета-коалесцентах з $a = 1$ та $b > 0$ маємо*

$$\frac{b \ln^2 n}{n} L_n - \ln n - \ln\ln n \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_1(1), \quad n \to \infty.$$

Випадкові блукання з бар'єром. Нехай $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями в.в. $\xi \in \mathbb{N}$ з розподілом $p_k = \mathbb{P}\{\xi = k\}$, $k \in \mathbb{N}$, таким, що $p_1 > 0$. Випадкове блукання з бар'єром $n \in \mathbb{N}$ – це послідовність $(R_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}_0}$, що визначена рівностями

$$R_0^{(n)} := 0, \quad R_k^{(n)} := R_{k-1}^{(n)} + \xi_k \mathbb{1}_{\{R_{k-1}^{(n)} + \xi_k < n\}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Покладемо

$$T_n^{(0)} := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : R_k^{(n)} = n-1\} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{R_l^{(n)} < n-1\}} \tag{18}$$

та

$$V_n^{(0)} := \#\{i \le T_n^{(0)} : R_{i-1}^{(n)} = R_i^{(n)}\} = \sum_{l=0}^{T_n^{(0)}-1} \mathbb{1}_{\{R_l^{(n)} + \xi_{l+1} \ge n\}}. \tag{19}$$

Теорема 106. *Припустимо, що $\mathbb{P}\{\xi \ge n\} = cn^{-\alpha} + O(n^{-(\alpha+\varepsilon)})$ при $n \to \infty$, для деяких $c > 0$, $\alpha \in (0,1)$ та $\varepsilon > 0$. Якщо $\alpha \in (0, 1/2]$ припустимо додатково, що $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ з деякого місця не зростає. Тоді*

$$\frac{V_n^{(0)} - \mu_\alpha^{-1} \ln n}{\sqrt{\sigma_\alpha^2 \mu_\alpha^{-3} \ln n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_2(1) \quad n \to \infty,$$

де $\mu_\alpha = \Psi(1) - \Psi(1-\alpha)$ та $\sigma_\alpha^2 = \Psi'(1-\alpha) - \Psi'(1)$, а $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ – логарифмічна похідна гамма-функції.

Процедури випадкового просіювання. Нехай R є довільною випадковою нескінченною підмножиною $\mathbb{N}$. Процедура випадкового просіювання множини $\mathbb{N}$ за допомогою R визначається як нескінченна послідовність «раундів» $1, 2, \ldots$ така, що в раунді k:

- ще не просіяні точки $\mathbb{N}$ (в кожному раунді їх нескінченна кількість) перенумеровуються зі збереженням порядку;
- після перенумерації, визначається незалежна від всіх попередніх раундів копія R_k множини R і з непросіяних точок видаляються точки з номерами, що *не* лежать в R_k.

В розділі 5 досліджено два типи процедур випадкового просіювання. В першому типі множина R є областю значень деякого випадкового блукання на $\mathbb{N}$, в другому типі множина R є множиною індексів рекордів у нескінченній послідовності незалежних однаково розподілених в.в. з неперервним розподілом.

Нехай ξ є довільною невиродженою в.в. зі значеннями в $\mathbb{N}$ та нехай $R = (R(n))_{n\in\mathbb{N}}$ є випадковим блуканням з кроком розподіленим як ξ. Покладемо:

- $N_M^{(n)}$ – число точок множини $\{1, 2, \dots, M\}$, що не були просіяні в перших n раундах, $M \in \mathbb{N}_0$ та $n \in \mathbb{N}$.
- $1 \le S_1^{(n)} < S_2^{(n)} < S_3^{(n)} < \cdots$ – початкові номери точок, які після n раундів та перенумерації мають номери $1, 2, \dots$, тобто $S_j^{(n)} := \inf\{i \in \mathbb{N} : N_i^{(n)} = j\}$ при $j \in \mathbb{N}$ та $n \in \mathbb{N}_0$.
- $T(M)$ – число раундів, доки всі точки з (початковими) номерами $1, 2, \dots, M$ не будуть просіяні, тобто $T(M) := \inf\{n \in \mathbb{N} : N_M^{(n)} = 0\}$ при $M \in \mathbb{N}$.

Покладемо $\mu := \mathbb{E}\xi$ та нехай $(Z_n)_{n\ge0}$ є процесом Гальтона-Ватсона таким, що число нащадків одного індивіда розподілене як ξ. Припустимо, що $\mu < \infty$. Тоді нормований процес $(\mu^{-n}Z_n)_{n\ge0}$ є невід'ємним мартингалом і збігається м.н. до границі Z_∞, яка м.н. додатна, якщо $\mathbb{E}\xi \ln \xi < \infty$, або дорівнює нулю, інакше.

Теорема 108. *Припустимо, що $\mu \in (1, \infty)$. Тоді*

$$\left(\frac{S_1^{(n)}}{\mu^n}, \frac{S_2^{(n)}}{\mu^n}, \frac{S_3^{(n)}}{\mu^n} \dots\right) \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (Z_\infty^{(1)}, Z_\infty^{(1)} + Z_\infty^{(2)}, Z_\infty^{(1)} + Z_\infty^{(2)} + Z_\infty^{(3)}, \dots), \quad n \to \infty, \tag{20}$$

де $Z_\infty^{(1)}, Z_\infty^{(2)}, \dots$ є незалежними копіями Z_∞. Розподіл граничного вектора в (20) *задовольняє стохастичне рівняння нерухомої точки в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*

$$\Big(\mu X_1, \mu X_2, \dots\Big) \overset{\text{d}}{=} \Big(X_{R(1)}, X_{R(2)}, \dots\Big), \tag{21}$$

де випадкове блукання $(R(j))_{j\ge0}$ у правій частині є незалежним від $(X_j)_{j\ge0}$.

Теорема 109. *Нехай $\mu \in (1, \infty)$ та $\mathbb{E}\xi \ln \xi < \infty$. Тоді при $n \to \infty$*

$$N_{\lfloor \mu^n t\rfloor}^{(n)} \Rightarrow N'(t), \quad n \to \infty$$

у просторі Скорохода $D[0, \infty)$ з J_1-топологією, де $N'(t) := \#\{k \in \mathbb{N} : Z_\infty^{(1)} + \cdots + Z_\infty^{(k)} \le t\}$ при $t \ge 0$.

Теорема 110. *Нехай $\mu \in (1, \infty)$ та $\mathbb{E}\xi \ln \xi < \infty$. Для довільного фіксованого $x > 0$, маємо*

$$T(\lfloor \mu^n x\rfloor) - n \overset{\text{d}}{\to} T'(x), \quad n \to \infty,$$

де $T'(x)$ *має розподіл* $\mathbb{P}\{T'(x) \le k\} = \mathbb{P}\{Z_\infty > \mu^{-k}x\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 112. *Нехай* $(X_1, X_2, \dots)$ *є випадковим елементом* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *таким, що* $0 \le X_1 \le X_2 \le \cdots$ *та виконується* (21) *з* $(R(j))_{j\ge 0}$, *що не залежить від* $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *та* $\mu = \mathbb{E}R(1) = \mathbb{E}\xi$. *Припустимо також, що*

$$\mathbb{E}\xi \ln \xi \ < \ \infty,$$

тобто $\mathbb{P}\{Z_\infty > 0\} = 1$. *Нехай* $(Z_\infty^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *є незалежними копіями* Z_∞. *Тоді знайдеться випадковий процес* $(G(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, *що не залежить від* $(Z_\infty^{(j)})_{j\ge 1}$ *та задовольняє*

$$(G(\mu t))_{t\in\mathbb{R}_+} \overset{\text{f.d.}}{=} (\mu G(t))_{t\in\mathbb{R}_+},$$

такий, що

$$(X_j)_{j\ge 1} \overset{\text{d}}{=} \big(G(Z_\infty^{(1)} + \cdots + Z_\infty^{(j)})\big)_{j\ge 1}.$$

Аналогічні результати у випадку нескінченного середнього наведено в розділі 5.1.2.

Нехай тепер R є множиною індексів рекордів (тобто елементів, що більші за всі попередні елементи) у нескінченній послідовності незалежних однаково розподілених в.в. з деяким неперервним розподілом, який, не зменшуючи загальності, можна вважати рівномірним на $[0, 1]$.

Нехай функціонали $N_M^{(n)}, S_k^{(n)}, T(M)$ визначені так само, як для просіювань випадковими блуканнями, з єдиною відмінністю, що у визначенні функціонала $T(M)$ під знаком інфімума стоїть подія $\{N_M^{(n)} = 1\}$ (при просіюванні рекордами елемент $1 \in \mathbb{N}$ завжди залишається непросіяним, оскільки перший елемент вибірки завжди є рекордом: $\mathbb{P}\{1 \in R\} = 1$).

Для формулювання результатів нам знадобиться поняття модифікованої *тетрації та повторного логарифма*. При $\rho \ge 1$ покладемо

$$E_0(\rho) := \rho, \quad E_n(\rho) := e^{E_{n-1}(\rho)-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$L_0(\rho) := \rho, \quad L_n(\rho) := 1 + \ln L_{n-1}(\rho), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 119. *Має місце збіжність*

$$(T([E_n(\rho)]) - n)_{\rho>1} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (T^*(\rho))_{\rho>1}, \quad n \to \infty,$$

де $(T^*(\rho))_{\rho>1}$ *є неперервним за ймовірністю випадковим процесом з неспадними траєкторіями. Випадкові величини* $T^*(\rho)$, $\rho > 1$, *є цілозначними та* $\mathbb{P}\{T^*(\rho) = k\} > 0$ *для всіх* $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 121. *Знайдуться в.в.* $1 = S_1^* \le S_2^* \le \cdots$ *такі, що*

$$(L_n(S_1^{(n)}), L_n(S_2^{(n)}), L_n(S_3^{(n)}), \dots) \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (S_1^*, S_2^*, S_3^*, \dots), \quad n \to \infty.$$

Теорема 123. *Послідовність* $(S_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ *в теоремі 121 задовольняє*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{S_k^*}{k} \;=\; 1 \quad \text{м.н.}, \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{\mathbb{E}S_k^*}{k}=1, \qquad \frac{S_k^*-k}{\sqrt{k}}\xrightarrow{\mathrm{d}}\mathcal{S}_2(1), \quad k\to\infty.$$

Нехай $N^*(\rho)$ позначає лічильний процес для послідовності $(S_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ в теоремі 121:

$$N^*(\rho):=\#\{k\in\mathbb{N}\colon S_k^*\le\rho\}, \quad \rho\ge 1. \tag{22}$$

Теорема 126. *Процес* $(N^*(\rho))_{\rho\ge1}$ *є неперервним за ймовірністю та*

$$(N^{(n)}_{[E_n(\rho)]})_{\rho\ge1}\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}(N^*(\rho))_{\rho\ge1}, \quad n\to\infty.$$

Розглянемо при $m\in\mathbb{N}$ функціонал $T_0(M):=\sum_{j=0}^{T(M)-1}\mathbb{1}_{\{N_M^{(j)}\neq N_M^{(j+1)}\}}$, який характеризує кількість *результативних раундів*, у яких хоча б одна точка з $\{1,2\ldots,M\}$ видаляється.

Теорема 130. *Має місце збіжність*

$$(T_0([E_n(\rho)])-n)_{\rho>1}\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}(T_0^*(\rho))_{\rho>1}, \quad n\to\infty,$$

де $(T_0^*(\rho))_{\rho>1}$ *є деяким невиродженим випадковим процесом (його конструкція та інтерпретація наведена в розділі 5.2).*

Результати, наведені вище для випадкового просіювання рекордами, дозволили розв'язати відкриту проблему теорії коалесцентів. Нехай X_n позначає число злиттів у коалесценті Пуассона-Діріхле.

Теорема 131. *Для довільного фіксованого* $\rho>1$*,*

$$X_{[E_n(\rho)]}-n\xrightarrow{\mathrm{d}}T_0^*(\rho), \quad n\to\infty,$$

де $T_0^*(\rho)$*,* $\rho>1$ *є цілозначною невиродженою в.в., що визначена в теоремі 130.*

Властивості граничних процесів для випадкових процесів з імміграцією. В останньому розділі дисертації вивчаються властивості граничних процесів:

$$I_{\alpha,\rho}(u)=\int_{[0,u]}(u-y)^\rho\mathrm{d}\mathcal{S}_\alpha(y), \quad u>0, \quad \rho>-1/\alpha, \quad \alpha\in(1,2];$$

$$J_{\alpha,\rho}(u)=\int_{[0,u]}(u-y)^\rho\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y), \quad u>0, \quad \rho\in\mathbb{R}, \quad \alpha\in(0,1);$$

$Z_{\alpha,\beta}(u)$ – центрованого умовно гауссівського процесу з умовною коваріацією

$$\mathbb{E}\big[Z_{\alpha,\beta}(u)Z_{\alpha,\beta}(w)\big|W_\alpha^{\leftarrow}\big]=\int_{[0,u]}C(u-y,w-y)\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y), \quad 0<u\le w,$$

які фігурували в якості границь випадкових процесів з імміграцією.

В представленій нижче таблиці 1 підсумовано властивості трьох наведених процесів. Під стохастичною неперервністю ми розуміємо неперервність за ймовірністю в кожній точці $u > 0$. Необмеженість траєкторій означає, що для довільного інтервалу $(a, b) \subset (0, \infty)$ з додатною ймовірністю супремум процесу на (a, b) дорівнює ∞.

Табл. 1: Властивості процесів $I_{\alpha,\rho}$, $J_{\alpha,\rho}$ та $Z_{\alpha,\beta}$

Процес	Неперервність траєкторій	Стохастична неперервність	Необмеженість траєкторій	Одновимірні розподіли	Показник самоподібності
$I_{\alpha,\rho}$	$\rho > 0$ або $\alpha = 2$	Так	$\alpha \in (1, 2)$ та $\rho \in (-1/\alpha, 0)$	α-стійкі	$\rho + 1/\alpha$
$J_{\alpha,\rho}$	$\rho > -\alpha$	Так	$\rho \le -\alpha$	Експ. функ. субординатора	$\rho + \alpha$
$Z_{\alpha,\beta}$	невідомо	$\beta > -\alpha$ $C \not\equiv 0$	$\beta \le -\alpha$ або $C \equiv 0$	Суміш нормальних	$(\beta - \alpha)/2$

Теорема 137. *Якщо $\rho > -\alpha$, то при $u \downarrow 0$ або $u \to \infty$,*

$$\overline{\lim} \frac{J_{\alpha,\rho}(u)}{u^{\alpha+\rho}(\ln|\ln u|)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(\alpha+\rho)^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}} \quad \text{м.н.}$$

та

$$\underline{\lim} \frac{J_{\alpha,\rho}(u)}{u^{\alpha+\rho}(\ln|\ln u|)^{1-\alpha}} = 0 \quad \text{м.н.}$$

Нулі тригонометричних поліномів. Нехай $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots$ є послідовністю незалежних копій пари в.в. (ξ, η). Покладемо

$$\mathcal{T}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k \sin(kt) + \eta_k \cos(kt)\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для дійсної аналітичної функції $f \not\equiv 0$ позначимо через $\mathbf{Zeros}_{\mathbb{R}}(f)$ локально скінченну точкову міру на $\mathbb{R}$, яка рахує дійсні нулі f з кратностями.

Теорема 144. *Припустимо, що $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 0$, $\mathbb{E}\xi^2 = \mathbb{E}\eta^2 = 1$ та $\mathbb{E}[\xi\eta] = 0$, а s є довільним дійсним числом. Тоді*

$$\mathbf{Zeros}_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{T}_n\left(s + \frac{\cdot}{n}\right)\right) \Rightarrow \mathbf{Zeros}_{\mathbb{R}}(Z(\cdot)), \quad n \to \infty$$

у просторі $M_p(\mathbb{R})$ локально скінченних точкових мір на $\mathbb{R}$ з грубою топологією, де $(Z(t))_{t\in\mathbb{R}}$ є центрованим стаціонарним гауссівським процесом з коваріацією $\mathrm{Cov}[Z(s), Z(t)] = \sin(t-s)/(t-s)$ та $\mathbb{D}[Z(t)] = 1$.

Зв'язок цієї теореми та стохастичних інтегралів по стійким процесам розглянуто у підрозділі 6.4, де також доведено аналогічні результати без припущень про скінченність других моментів або некорельованість ξ та η.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі побудовано елементи асимптотичної теорії випадкових процесів з регенерацією як класу стохастичних процесів, що визначені на випадкових самоподібних структурах регенеративної природи. Розроблена у даному комплексному дослідженні теорія слабкої збіжності випадкових процесів з імміграцією та процесів дробового ефекту, виявилась потужним апаратом вивчення випадкових процесів з регенерацією та, зокрема, процесів зі значеннями на розбиттях, що виникають при аналізі випадкових композицій та в теорії коалесцентів з множинними злиттями. Створена теорія істотно ґрунтується на вперше встановлених в цій роботі взаємозв'язках між процесами з імміграцією, збуреними випадковими блуканнями, регенеративними композиціями, коалесцентами з множинними злиттями та процедурами випадкового просіювання.

Основні результати, отримані в дисертації такі:

1. Введено поняття випадкового процесу з імміграцією в моменти стрибків процесу відновлення та побудовано класифікацію режимів слабкої збіжності деяких випадкових процесів з імміграцією. Зокрема,
   - отримано умови збіжності до стаціонарних процесів з імміграцією;
   - встановлено умови збіжності з центруванням процесів дробового ефекту;
   - доведено граничні теореми для процесів дробового ефекту з функціями відгуку, що не зростають, у випадках правильної зміни та повільної зміни нормування;
   - отримано граничні теореми для випадкових процесів з імміграцією у випадку правильної зміни нормування.
2. Доведено граничні теореми для низки функціоналів, що діють на збурених випадкових блуканнях. Зокрема,
   - встановлено функціональну граничну теорему для числа візитів збуреного випадково блукання в інтервал $[0, x]$, при $x \to \infty$;
   - встановлено ряд граничних теорем для різниці між числом візитів в інтервал $[0, x]$ збуреним та звичайним випадковими блуканнями.
3. Отримано низку результатів для випадкових регенеративних композицій, породжених узагальненими процесами Пуассона. Зокрема,
   - отримано функціональну граничну теорему для числа ненульових блоків регенеративних композицій;

- описано режими слабкої збіжності числа нульових блоків регенеративних композицій,
- отримано граничні теореми для логарифмічної сепарабельної статистики.

4. Введено поняття регенеративної випадкової перестановки та отримано граничні теореми для порядку таких перестановок, що узагальнило відомий результат П. Ердеша та П. Турана 1967 року.

5. Запропоновано конструкцію каплінгу випадкових регенеративних композицій та переставних коалесцентів з множинними злиттями. За його допомогою розв'язано низку відкритих проблем теорії коалесцентів та встановлено ряд граничних теорем для коалесцентів з пиловою компонентою. Зокрема,

   - доведено критерій слабкої збіжності часу поглинання в коалесцентах з пиловою компонентою;
   - отримано умови слабкої збіжності числа злиттів в коалесцентах з пиловою компонентою;
   - встановлено ряд граничних теорем, які характеризують еволюцію пилової компоненти.

6. З використанням техніки ймовірнісних метрик, отримано достатні умови слабкої збіжності часу поглинання у спадних ланцюгах Маркова до стійких розподілів. За допомогою отриманих результатів розв'язано низку відкритих проблем:

   - встановлено граничну теорему для числа злиттів у бета-коалесцентах без пилової компоненти;
   - доведено збіжність повної довжини дерева бета$(1, b)$-коалесцентів до 1-стійкого розподілу;
   - отримано центральну граничну теорему для числа нульових декрементів у випадковому блуканні з бар'єром.

7. Запропоновано та досліджено процедури випадкового просіювання. Встановлено їх зв'язок з процесами Гальтона-Ватсона та переставними коалесцентами. Зокрема,

   - вперше введено поняття точкового процесу, стійкого відносно просіювання, та отримано характеризацію точкових процесів, стійких відносно просіювання випадковими блуканнями;
   - досліджено узагальнені процедури вибору лідера та встановлено граничні теореми для числа раундів, початкових позицій гравців та числа гравців після n раундів;

- вивчено процедуру випадкового просіювання процесом рекордів та побудовано каплінг з коалесцентом Пуассона-Діріхле, що дозволило розв'язати відкриту проблему про асимптотику числа злиттів у згаданому коалесценті.

8. Досліджено властивості розподілів та властивості траєкторій процесів, що є граничними для випадкових процесів з регенерацією. Зокрема, досліджено гельдеровість та встановлено локальні закони повторного логарифма для дробово інтегровних обернених стійких субординаторів.

9. Доведено локальну універсальність для дійсних коренів тригонометричних поліномів.

10. Доведено збіжність моментів у граничних теоремах для процесів відновлення.

Автор дисертації висловлює щиру вдячність своєму науковому консультанту – доктору фізико-математичних наук, професору Олександру Маратовичу Іксанову – за жваві і плідні дискусії при обговоренні наукових проблем, розглянутих в дисертації, та за цінні поради і постійну увагу, без яких ця робота навряд чи була б написана. Також автор висловлює подяку своїм колегам та друзям з кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Інституту математичної статистики Вестфальського університету імені Вільгельма (м. Мюнстер, Німеччина) та кафедри математики та комп'ютерних наук Технічного університету Ейндховена (Нідерланди), завдяки співпраці з якими було отримано більшість результатів, представлених у роботі. Окрему подяку за допомогу автор висловлює Якиміву Роману Ярославовичу, а особливу – Харіній Олені Олегівні, чия всебічна підтримка та увага сприяли якнайшвидшому завершенню цієї роботи.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових виданнях за профілем дисертації, що входять до наукометричної бази даних Scopus:

1. Alsmeyer G. Functional limit theorems for the number of occupied boxes in the Bernoulli sieve / G. Alsmeyer, A. Iksanov, A. Marynych // Stochastic Processes and their Applications. – 2017. – **127**, №3. – p. 995–1017.

2. Alsmeyer G. Leader election using random walks [Electronic resource] / G. Alsmeyer, Z. Kabluchko, A. Marynych // ALEA – Latin American Journal of Probability and Statistics. – 2016. – **13**. – p. 1095–1122. – Режим доступу: http://alea.impa.br/articles/v13/13-39.pdf

3. Alsmeyer G. Renewal approximation for the absorption time of a decreasing Markov chain / G. Alsmeyer, A. Marynych // Journal of Applied Probability. – 2016. – **53**, №3. – p. 765–782.

4. Fractionally integrated inverse stable subordinators / A. Iksanov, Z. Kabluchko, A. Marynych, G. Shevchenko // Stochastic Processes and their Applications. – 2016. – **127**, №1. – p. 80-106.

5. Gnedin A. Λ-coalescents with dust component / A. Gnedin, A. Iksanov, A. Marynych // Journal of Applied Probability. – 2011. – **48**, №4. – p. 1133–1151.

6. Gnedin A. A generalization of the Erdös-Turán law for the order of random permutation / A. Gnedin, A. Iksanov, A. Marynych // Combinatorics, Probability and Computing. – 2012. – **21**, №5. – p. 715-733.

7. Gnedin A. Λ-coalescents: a survey / A. Gnedin, A. Iksanov, A. Marynych // Journal of Applied Probability. – 2014. – **51A**. – p. 23–40.

8. Gnedin A. Exponential-uniform identities related to records [Electronic resource] / A. Gnedin, A. Marynych // Electronic Communications in Probability. – 2012. – **17**. – p. 1–5. – Режим доступу: `https://projecteuclid.org/euclid.ecp/1465263159`

9. Iksanov A. Local universality for real roots of random trigonometric polynomials [Electronic resource] / A. Iksanov, Z. Kabluchko, A. Marynych // Electronic Journal of Probability. – 2016. – **21**. – p. 1–19. – Режим доступу: `http://projecteuclid.org/euclid.ejp/1476706888`

10. Iksanov A. Weak convergence of renewal shot noise processes in the case of slowly varying normalization / A. Iksanov, Z. Kabluchko, A. Marynych // Statistics and Probability Letters. – 2016. – **114**. – p. 67–77.

11. Iksanov A. A note on non-regular martingales / A. Iksanov, A. Marynych // Statistics and Probability Letters. – 2008. – **78**. – p. 3014–3017.

12. Iksanov A. Limit theorems for renewal shot noise processes with eventually decreasing response functions / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Stochastic Processes and their Applications. – 2014. – **124**, №6. – p. 2132–2170.

13. Iksanov A. Moment convergence of first-passage times in renewal theory / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Statistics and Probability Letters. – 2016. – **119**. – p. 134–143.

14. Iksanov A. Asymptotic of random processes with immigration I: scaling limits / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Bernoulli. – 2017. – **23**, №2. – p. 1233–1278.

15. Iksanov A. Weak convergence of finite-dimensional distributions of the number of empty boxes in the Bernoulli sieve / A. Iksanov, A. Marynych, V. Vatutin // Theory of Probability and its Applications. – 2015. – **59**, №1. – p. 87–113.

16. Kabluchko Z. Renewal shot noise processes in the case of slowly varying tails / Z. Kabluchko, A. Marynych // Theory of Stochastic Processes. – 2016. – **21(37)**, №2. – p. 14–21.

17. Marynych A. A note on convergence to stationarity of random processes with immigration / A. Marynych // Theory of Stochastic Processes. – 2015. – **20(36)**, №1. – p. 84–100.

18. Marynych A. Weak convergence of the number of zero increments in the random walk with barrier [Electronic resource] / A. Marynych, G. Verovkin // Electronic Communications in Probability. – 2014. – **19**. – p. 1–11. – Режим доступу: `https://projecteuclid.org/euclid.ecp/1465316776`

19. On asymptotic of beta-coalescents / A. Gnedin, A. Iksanov, A. Maryncyh, M. Möhle // Journal of Applied Probability. – 2014. – **46**, №2. – p. 496–515.

Статті в наукових фахових виданнях України за профілем дисертації:

20. Маринич О. В. Про асимптотику числа активних випадкових процесів в системі з іммiграцією / О. В. Маринич // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки – 2016. – №2. – С. 103-113.

Розділи в монографіях:

21. Marynych O. Stochastic recurrences and their applications to the analysis of partition-valued processes / O. Marynych // Utrecht University. – 2011. – 134 P.

Інші статті в наукових виданнях за профілем дисертації:

22. Iksanov A. Asymptotic of random processes with immigration II: convergence to stationarity / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Bernoulli. – 2017. – **23**, №2. – p. 1279-1298.

23. Alsmeyer G. A leader-election procedure using records / G. Alsmeyer, Z. Kabluchko, A. Marynych // Annals of Probability. – 2017. – У друці, препринт доступний за посиланням `http://www.imstat.org/aop/future_papers.htm`

Інші публікації за профілем дисертації:

24. Alsmeyer G. A leader-election procedure using records / G. Alsmeyer, Z. Kabluchko, A. Marynych // International conference «12th Germany Probability and Statistics Days». – Bochum, Germany. – 2016. – p. 50.

25. Iksanov A. Asymptotics of beta-coalescents / A. Iksanov, A. Marynych // International conference «Modern Stochastics : Theory and Applications III». – Kyiv. – 2012. –p. 41.

26. Iksanov A. Finite-dimensional convergence of the number of empty boxes in the Bernoulli sieve / A. Iksanov, A. Marynych // International conference «11th Germany Probability and Statistics Days». – Ulm, Germany. – 2014. – p. 52.

27. Iksanov A. Limit theorems for random processes with immigration at the epochs of a renewal process / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // International conference «11th Germany Probability and Statistics Days». – Ulm, Germany. – 2014. – p. 61–62.

28. Iksanov A. A functional limit theorem for the number of occupied boxes in the Bernoulli sieve / A. Iksanov, A. Marynych // International conference «12th Germany Probability and Statistics Days». – Bochum, Germany. – 2016. – p. 198-199.

29. Iksanov A. Local universality for real roots of random trigonometric polynomials / A. Iksanov, A. Marynych // International workshop «Limit theorems in probability theory, number theory and mathematical statistics». – Kyiv. – 2016. – p. 23-24.

30. Marynych A. The Bernoulli sive: allocation scheme in a random environment / A. Marynych // Winter school «Spatial Models in Statistical Mechanics». – Darmstadt, Germany. – 2014. – p. 16–17.

31. Marynych A. Perpetuities arising in population genetics / A. Marynych // International conference «Probabilistic Aspects of Harmonic Analysis». – Będlewo, Poland. – 2014. – p. 21–22.

32. Marynych A. Renewal approximation for the absorption time in nonincreasing Markov chains / A. Marynych // International conference «Probability, Reliability and Stochastic Optimization». – Kyiv. – 2015. – p. 77.

33. Marynych A. Scaling limits for random processes with immigration / A. Marynych // International conference «Stochastic Processes in Abstract Spaces». – Kyiv. – 2015. – p. 36.

34. Marynych A. A leader-election procedure using records / A. Marynych // International conference «Probabilistic Aspects of Harmonic Analysis». – Będlewo, Poland. – 2016. – p. 24–25.

35. Іксанов О. Про асимптотику бета-коалесцентів / О. Іксанов, О. Маринич // Конференція «Problems of decision making under uncertainties». – Мукачево. – 2012. – с. 116.

АНОТАЦІЯ

Маринич О. В. Граничні теореми для випадкових процесів з регенерацією. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, Київ, 2017.

В роботі побудовано елементи асимптотичної теорії випадкових процесів з імміграцією та, зокрема, процесів дробового ефекту; випадкових регенеративних композицій та перестановок; переставних коалесцентів з множинними злиттями; процедур випадкового просіювання.

Вперше введено поняття випадкового процесу з імміграцією в моменти відновлення та побудовано класифікацію режимів слабкої збіжності цих процесів. Доведено граничні теореми для низки функціоналів, що діють на збурених випадкових блуканнях.

Для випадкових регенеративних композицій встановлено ряд граничних теорем, зокрема отримано функціональну граничну теорему для числа ненульових блоків регенеративних композицій, породжених узагальненими процесами Пуассона. Запропоновано конструкцію каплінгу випадкових регенеративних композицій та переставних коалесцентів з множинними злиттями та отримано ряд граничних теорем для коалесцентів.

Запропоновано та досліджено процедури випадкового просіювання. Встановлено їх зв'язок з процесами Гальтона-Ватсона та переставними коалесцентами. В роботі вперше введено поняття точкового процесу, стійкого відносно просіювання, та отримано характеризацію точкових процесів, стійких відносно просіювання випадковими блуканнями.

Ключові слова: випадкові композиції, випадкові перестановки, випадкові процеси з імміграцією, випадкові регенеративні структури, гратки Бернуллі, дробово інтегровні обернені стійкі субординатори, дробово інтегровні процеси Леві, збурене випадкове блукання, ймовірнісні метрики, коалесценти, процедри вибору лідера, процедури випадкового просіювання, процеси дробового ефекту, тетрація.

АНОТАЦИЯ

Маринич А. В. Предельные теоремы для случайных процессов с регенерацией. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика. – Киевский националььний университет имени Тараса Шевченко МОН Украины, Киев, 2017.

Построены елементы асимптотической теории случайных процессов с иммиграцией и, в частности, процессов дробового эффекта; случайных регенеративных композиций и перестановок; перестановочных коалесцентов с множественными столкновениями; процедур случайного просеивания.

В работе впервые вводится понятие случайного процесса с иммиграцией в моменты восстановления и строится классификация режимов слабой сходимости этих процессов. Доказан ряд предельных теорем для функционалов, действующих на возмущенных случайных блужданиях.

Для случайных регенеративных композиций получена серия предельных теорем, в частности, доказана функциональная предельная теорема для числа ненулевых блоков регенеративных композиций, порожденных обобщенными процессами Пуассона. Предложена конструкция каплинга случайных регенеративных композиций и перестановочных коалесцентов с множественными столкновениями и доказан ряд предельных теорем для коалесцентов.

Предложены и изучены процедуры случайного просеивания. Установлена их связь с процессами Гальтона-Ватсона и перестановочными коалесцентами. В роботе впервые вводится понятие точечного процесса, устойчивого относительно просеивания, и получена характеризация точечных процессов, устойчивых относительно просеивания случайными блужданиями.

Ключевые слова: вероятностные метрики, возмущенное случайное блуждание, дробно интегрированные обратные устойчивые субординаторы, дробно интегрированные процессы Леви, коалесценты, процедуры выбора лидера, процедуры случайного просеивания, процессы дробового ефекта, решето Бернулли, случайные композиции, случайные перестановки, случайные процессы с иммиграцией, случайные регенеративные структуры, тетрация.

ABSTRACT

Marynych O. V. Limit theorems for random processes with regeneration. – Manuscript.

Doctor’s thesis in Physics and Mathematics, specialty 01.01.05 – probability theory and mathematical statistics. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the analysis of random regenerative structures and random processes with regeneration. A regenerative random structure is a random structure or

a family of random structures with an appropriately defined notion of «size», such that distributional properties of structures of different sizes are consistent and invariant under a fixed operation that deletes a part of the structure. A random process with regeneration is a stochastic process defined on such a structure and indexed by a discrete or continuous variable representing its size.

We study asymptotic properties of particular classes of random processes with regeneration, including random processes with immigration and renewal shot noise processes; regenerative random compositions and permutations; coalescents with multiple collisions; random sieves and leader election procedures.

The notion of random process with immigration at the epochs of a renewal process is proposed and a classification of the modes of weak convergence of such processes is constructed. We obtain conditions for the weak convergence to a stationary process with immigration; prove limit theorems for renewal shot noise processes with eventually decreasing response functions in the cases of regular and slow variation of the normalization; derive limit theorems for random processes with immigration in case of the regularly varying normalization. As a byproduct, limit theorems for several functionals on perturbed random walks are proved.

For regenerative random compositions we derive a number of limit theorems for different functionals. In particular, a functional limit theorem for the number of blocks in regenerative compositions derived from a compound Poisson processes (the Bernoulli sieve) is proved. The notion of regenerative random permutation is proposed and limit theorems for the order of such permutations are proved. We introduce a coupling of regenerative random compositions and coalescents with multiple collisions and apply it to prove several asymptotic results for coalescents with dust component, including limit theorems for the number of collisions and the absorption time. For exchangeable coalescents without dust component analogous results are proved using the technique of probability distances. The latter method is also applied to derive a central limit theorem for the number of zero increments in a random walk with a barrier.

We propose and analyze a new stochastic operation of a random sieving. A connection of this operation with classical Galton-Watson processes and exchangeable coalescents is established. The notion of stability of point processes with respect to sieving is proposed, and a characterization of point processes which are stable with respect to sieving by random walks is derived. A generalized leader-election procedures are discussed and a number of limit theorems for different characteristics of these procedures are proved. A limit theorem for the number of collisions in the Poisson-Dirichlet coalescent is established.

We introduce a few new classes of stochastic processes, including fractionally integrated stable processes and fractionally integrated inverse stable subordinators. We discuss their distributional and pathwise properties such as stochastic continuity, sample continuity, self-similarity, Hölder continuity and local laws of iterated logarithm.

Local universality of real roots of random trigonometric polynomials is proved.

We show convergence of the power and exponential moments of the number of

renewals, suitably shifted and scaled, when the step of the underlying random walk belongs to the domain of attraction of a stable law.

Keywords: coalescents, fractionally integrated inverse stable subordinators, fractionally integrated Lévy processes, leader-election procedures, perturbed random walk, probability metrics, random compositions, random permutations, random processes with immigration, random sieves, regenerative random structures, renewal shot noise processes, the Bernoulli sieve, tetration.