МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Прищепа Оксана Володимирівна

УДК 519.21

КЕРОВАНІ СИСТЕМИ З ОБМЕЖЕНИМ ЧИСЛОМ ПОВТОРІВ

01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2017

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі прикладної статистики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка МОН України

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Лебєдєв Євген Олександрович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри прикладної статистики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, доцент
Коба Олена Вікторівна,
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України,
провідний науковий співробітник відділу математичних методів теорії надійності складних систем;

кандидат фізико-математичних наук
Хімка Уляна Теодорівна,
Національний університет "Львівська політехніка",
старший викладач кафедри обчислювальної математики та програмування.

Захист відбудеться «28» грудня 2017 р. о 14^{15} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д26.001.35 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: м. Київ, просп. Академіка Глушкова, 4Д, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, ауд. 01.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58, зал № 12.

Автореферат розісланий « 27 » листопада 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради П.М. Зінько

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Велика кількість практичних задач спонукала до розробки нових моделей систем масового обслуговування, а саме систем з повторними викликами, що більш точно моделюють реальні процеси. Розробка методів дослідження таких систем знайшла відображення в роботах Є. Р. Арталего, Г. І. Фаліна, Дж. Г. Темплетона, А. Гомеса-Корала. В Україні суттєві результати для систем з повторними викликами отримали І.М. Коваленко, В.В. Анісімов, О.В. Коба, Є.О. Лебєдєв та їх учні. Зацікавленість системами з повторними викликами в різних сферах, зокрема, в системах зв'язку, в комп'ютерних мережах, при керуванні посадкою повітряних суден спонукала вчених розглядати різноманітні модифікації моделей та знаходити ефективні підходи до їх дослідження.

Проведений аналіз систем з повторними викликами підтвердив той факт, що у багатьох випадках доцільно розглядати системи з обмеженим числом повторних спроб. Огляд існуючих підходів до аналізу таких систем говорить про актуальність наступних проблем: розробка методів знаходження стаціонарних ймовірностей, розв'язок проблем вибору оптимальних параметрів систем, які можуть змінюватися у відповідності до різних стратегій керування.

Найбільш поширеними алгоритмами керування параметрами систем є порогові та гістерезисні стратегії, які націлені на отримання максимального прибутку від роботи системи та досягнення мінімальних витрат. Враховуючи це, постає важлива задача вивчення процесу обслуговування в системах, керованих пороговою або гістерезисною стратегією, побудови ефективних розрахункових алгоритмів для стаціонарних ймовірностей. Ситуація ускладнюється тим, що множина станів багатовимірного процесу обслуговування є необмеженою і слід розробляти спеціальні підходи для його аналізу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась відповідно до плану наукових досліджень кафедри прикладної статистики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка в рамках науково-дослідної теми № 08ДФ015-05 "Розробка математичних методів дослідження та оптимізації марковських систем з повторними викликами та керованими локальними характеристиками" (№ держреєстрації 0108U007058), теми № 07ДФ015-09 "Аналіз та оптимізація стохастичних систем з повторними викликами" (№ держреєстрації 0107U010798), теми № 16КФ015-03 "Розвиток теорії стохастичних систем мережевої структури, методів оптимального вибору керуючих параметрів та інтернет технологій для впровадження результатів в освіту" (№ держреєстрації: 0116U007787), № 16БФ015-02 "Розробка нових математичних методів системного аналізу і теорії оптимальних рішень та їх застосування" (№ держреєстрації: 0116U002529).

Мета і задачі дослідження. Основною метою даного дисертаційного дослідження є аналіз ланцюгів Маркова, що моделюють процес обслуговування у системах з обмеженим числом повторних спроб та керованим вхідним потоком при різних стратегіях перемикання інтенсивності вхідного потоку.

Відповідно до сформульованої мети дослідження виникають наступні задачі:

- дослідження умов існування стаціонарного режиму для процесу обслуговування, що описує функціонування системи з обмеженим числом повторних спроб;
- пошук явних формул для стаціонарного розподілу двовимірного ланцюга Маркова, що описує процес обслуговування в системі з однією спробою повтору зі сталою та змінною інтенсивністю вхідного потоку, керованою пороговою стратегією;
- пошук явного подання стаціонарних ймовірностей тривимірного ланцюга Маркова, що описує процес обслуговування в системі з однією спробою повтору та керованим у класі гістерезисних стратегій вхідним потоком;
- побудова ефективних рекурентних обчислювальних алгоритмів для знаходження стаціонарних ймовірностей систем з обмеженим числом повторних спроб;
- постановка та розв’язок задач багатокритеріальної оптимізації функціонування систем з обмеженим числом повторних спроб;
- побудова функціоналів якості в явному вигляді через стаціонарні ймовірності.

Об’єкт дослідження – системи з обмеженим числом повторних спроб та керованим вхідним потоком.

Предметом дослідження є аналітичні та обчислювальні методи дослідження функціонування систем з обмеженим числом повторів та керованим вхідним потоком.

Методи досліджень. В роботі використовуються методи теорії ймовірностей, теорії масового обслуговування, марковських процесів, системного аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Всі основні результати дисертаційної роботи є новими. Вони математично обґрунтовані й порівняні з відомими результатами у цій галузі, а також повністю викладені у наукових публікаціях автора. В дисертації отримані такі нові результати:

вперше

- встановлено умови існування стаціонарного режиму процесу обслуговування для систем з обмеженим числом повторних спроб;
- знайдено явні векторно-матричні подання стаціонарних ймовірностей двовимірного ланцюга Маркова, що моделює роботу системи з однією спробою повтору;
- отримано явні формули в термінах гіпергеометричних функцій для генератрис стаціонарних ймовірностей процесу обслуговування в некерованих одноканальних системах;
- отримано з використанням ланцюгових дробів явні формули для стаціонарних ймовірностей процесу обслуговування двоканальної системи з однією спробою повтору;
- отримано явні формули для стаціонарних ймовірностей тривимірного процесу обслуговування для систем з однією спробою повтору у випадку гістерезисних стратегій керування;

- сформульовано та розв’язано на основі алгоритму підрахунку відповідних функціоналів якості задачу максимізації прибутку та мінімізації витрат;

набув подальшого розвитку

- рекурентний обчислювальний алгоритм знаходження стаціонарних ймовірностей для процесу обслуговування систем з обмеженим числом повторних спроб на основі моделей процесів квазі народження та загибелі.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота має як теоретичне, так і практичне значення, є суттєвим внеском у теорію стохастичних систем з повторними викликами.

Отримані результати дисертаційного дослідження можуть знайти застосування для розв’язання реальних практичних задач, що виникають, зокрема, в локальних та глобальних комп’ютерних мережах, телекомунікаційних мережах, при керуванні посадкою повітряних суден тощо.

Результати роботи використовуються при викладанні дисципліни “Випадкові процеси та їх моделювання” для студентів 3-го курсу спеціальності прикладна математика, дисципліни “Моделювання випадкових процесів” для студентів 4-го курсу спеціальності інформатика Навчально-наукового інституту автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки Національного університету водного господарства та природокористування та дисципліни “Теорія масового обслуговування” для студентів 4-го курсу спеціальності системний аналіз факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Особистий внесок здобувача. Основні наукові результати, включені в дисертаційну роботу, отримані здобувачем самостійно. У роботах [1], [2], [6] написаних у співавторстві з Лебєдєвим Є.О., знаходження подання для стаціонарних ймовірностей та доведення основних результатів виконано Прищепою О.В., науковому керівнику належать постановка задачі та участь в обговоренні результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на:

- Міжнародних конференціях "Problems of Decision Making Under Uncertainties" (Київ-Рівне, 2008), (Східниця, 2009), (Ялта, 2011), (Мукачево, 2012), (Брно, Чеська Республіка, 2012), (Чеський Рудолец, Чеська Республіка, 2014), (Мукачево, 2014), (Одеса, 2015), (Тбілісі-Батумі, Грузія, 2016), (Брно, Чеська Республіка, 2016), (Мукачево, 2017);
- XXXVIII Міжнародній конференції "Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki" (Zakopane, 2009);
- Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" (Кам’янець-Подільський, 2014);
- XV Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2014);
- Міжнародній науково-практичній конференції "Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання" (Івано-Франківськ, 2016);

- Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (Львів, 2016).

Матеріали наукового дослідження також доповідались та отримали позитивний відгук на наукових семінарах: кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень і кафедри прикладної статистики факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка; кафедри комп’ютерної математики та інформаційної безпеки ДВНЗ "Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана".

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 22 наукових працях. У тому числі 6 статей [1-6] у наукових фахових виданнях рекомендованих МОН України, з них 3 статті опубліковано одноосібно, та 16 тез конференцій. Стаття [6] опублікована у фаховому виданні, що включене до міжнародних наукометричних баз.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел (144 найменування на 15 сторінках) та трьох додатків (7 сторінок). Обсяг дисертації становить 159 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність вибраної теми, відображено зв’язок роботи з науковими програмами, планами та темами, сформульовано мету та визначено основні завдання дослідження, визначено наукову новизну роботи і практичне значення отриманих результатів. Наведено особистий внесок здобувача, наведено відомості щодо апробації основних результатів роботи та публікацій за темою дисертації.

У першому розділі “Огляд” наведено огляд основних стохастичних систем з повторними викликами, проведено аналіз існуючих методів дослідження. Показано необхідність дослідження систем з обмеженим числом повторних спроб (з нетерплячими вимогами) та необхідність розв’язання проблеми їх оптимізації при різних стратегіях керування.

Розділ 2 “Порогові стратегії керування системами з однією повторною спробою” присвячений аналізу та дослідженню систем масового обслуговування з однією спробою повтору та керованим вхідним потоком у класі порогових стратегій.

Формально така система функціонує наступним чином. Іззовні до системи, яка складається з c приладів, надходять вимоги для обслуговування. Якщо у момент надходження є хоча б один вільний прилад, то вимога відразу починає обслуговуватися і після цього залишає систему. Час обслуговування – показниково розподілена випадкова величина з параметром μ. Якщо всі прилади зайняті, то вимога стає джерелом повторних викликів та повторно намагається отримати обслуговування через випадковий час, який має показниковий розподіл із параметром ν. Вимога, яка при повторному зверненні знайшла всі прилади зайнятими, залишає систему та не отримує обслуговування. Інтенсивність вхідного потоку задається параметром λ_j, $j = 0,1,\ldots$, що залежить від кількості джерел повторних викликів. Згідно з прийнятою в теорії масового обслуговування системою позначень таку модель будемо кодувати символом $M/M/c/\infty$. Параметри даної моделі будемо вважати невиродженими: $\lambda_j, \mu, \nu > 0$, $j = 0,1,\ldots$

Процесом обслуговування вимог у системі такого типу називають двовимірний процес $Q(t) = (Q_0(t), Q_1(t))^T$, $t \ge 0$, де $Q_0(t)$ вказує на кількість зайнятих приладів у момент часу t, $Q_1(t)$ дорівнює числу джерел повторних викликів. Процес $Q(t)$, $t \ge 0$ є ланцюгом Маркова в множині станів $S(Q) = \{0,1,\ldots,c\} \times \{0,1,\ldots\}$. Інфінітезимальні характеристики $a_{(i,j)(i',j')}$, $(i, j), (i', j') \in S(Q)$ ланцюга $Q(t)$ визначаються наступними чином

1) якщо $i = 0,1,\ldots,c-1$, $j = 0,1,\ldots$, то $$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j, \text{ при } (i', j') = (i+1, j), \\ i\mu, \text{ при } (i', j') = (i-1, j), \\ j\nu, \text{ при } (i', j') = (i+1, j-1), \\ -(\lambda_j + i\mu + j\nu), \text{ при } (i', j') = (i, j), \\ 0, \text{ в інших випадках;} \end{cases}$$

2) якщо $i = c$, $j = 0,1,\ldots$, то $$a_{(c,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j, \text{ при } (i', j') = (c, j+1), \\ c\mu, \text{ при } (i', j') = (c-1, j), \\ j\nu, \text{ при } (i', j') = (c, j-1), \\ -(\lambda_j + c\mu + j\nu), \text{ при } (i', j') = (c, j), \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Умови існування стаціонарного режиму для процесу $Q(t)$, $t \ge 0$ встановлено в наступній лемі.

Лема 2.1. Якщо система типу $M/M/c/\infty$ з однією повторною спробою невироджена та $\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-1}\lambda_n < \nu$, то для процесу обслуговування $Q(t)$, $t \ge 0$ існує стаціонарний режим.

У загальному випадку при довільній кількості джерел повторних викликів побудувати явні формули для стаціонарних ймовірностей неможливо, виняток становлять лише одноканальні системи. Враховуючи це, у подальшому аналізується урізана модель даної системи $M/M/c/N$. Вона функціонує аналогічним чином, але має скінченну кількість місць для повторних викликів N. За умови, що всі прилади зайняті та існує N джерел повторних викликів, нові вимоги при надходженні втрачаються системою назавжди.

Процес обслуговування для системи $M/M/c/N$ визначається як двовимірний ланцюг Маркова $Q^N(t) = (Q_0^N(t), Q_1^N(t))^T$ з неперервним часом у фазовому просторі $S(Q^N) = \{0,1,\ldots,c\} \times \{0,1,\ldots,N\}$. Компонента $Q_0^N(t)$ дорівнює кількості зайнятих приладів у момент часу t у системі, $Q_1^N(t)$ дорівнює числу джерел повторних викликів.

Інфінітезимальні характеристики $a^N_{(i,j)(i',j')}$, $(i, j), (i', j') \in S(Q^N)$ ланцюга $Q^N(t)$ співпадають з наведеними вище, крім випадку $i = c$, $j = N$:

$$a^{N}_{(c,\,N)(i',\,j')}=\begin{cases}c\mu, \text{ при } (i',\,j')=(c-1,\,N),\\ N\nu, \text{ при } (i',\,j')=(c,\,N-1),\\ -(c\mu+N\nu), \text{ при } (i',\,j')=(c,\,N),\\ 0, \text{ в інших випадках.}\end{cases}$$

Оскільки фазовий простір процесу $Q^N(t)$ скінченний, то для нього завжди існує стаціонарний режим і через π^N_{ij}, $(i,\,j)\in S(Q^N)$ позначимо його стаціонарний розподіл.

У **підрозділі 2.2** розглянуто випадок одноканальної системи при сталій інтенсивності вхідного потоку. Для знаходження стаціонарного розподілу використано метод генератрис та гіпергеометричні функції

$$F(a,b,t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{b(b+1)\ldots(b+k-1)}\frac{t^k}{k!},\ b\neq 0,-1,\ldots,-(k-1).$$

Теорема 2.1. Якщо система невироджена, то для $M/M/1/\infty$-моделі з повторними викликами та однією повторною спробою генератриси $\pi_0(z)$, $\pi_1(z)$, $|z|\le 1$ стаціонарних ймовірностей $\{\pi_{0j}\}_0^\infty$ і $\{\pi_{1j}\}_0^\infty$ можна подати у вигляді:

$$\pi_0(z)=C(0)F\left(\frac{\lambda}{\nu},1+\frac{\mu}{\nu}+\frac{\lambda}{\nu},\frac{\lambda}{\nu}z\right),\ \pi_1(z)=\rho C(0)F\left(1+\frac{\lambda}{\nu},1+\frac{\mu}{\nu}+\frac{\lambda}{\nu},\frac{\lambda}{\nu}z\right),$$

де $C^{-1}(0)=F\left(\frac{\lambda}{\nu},1+\frac{\mu}{\nu}+\frac{\lambda}{\nu},\frac{\lambda}{\nu}\right)+\rho F\left(1+\frac{\lambda}{\nu},1+\frac{\mu}{\nu}+\frac{\lambda}{\nu},\frac{\lambda}{\nu}\right),\ \rho=\frac{\lambda}{\mu}.$

У **теоремі 2.2** наведені формули для обчислення стаціонарних ймовірностей π_{0j} та π_{1j}, $j=0,1,\ldots$ некерованої системи $M/M/1/\infty$ з однією спробою повтору.

У подальшому при змінній інтенсивності вхідного потоку отримано результат, який узагальнює теорему 2.2.

Теорема 2.3. Якщо виконуються умови леми 2.1, то для $M/M/1/\infty$-моделі з однією повторною спробою стаціонарні ймовірності можна подати у вигляді:

$$\pi_{0j}=\frac{1}{j!\nu^j}\prod_{i=1}^{j}\frac{\lambda_{i-1}(\lambda_{i-1}+(i-1)\nu)}{\lambda_i+i\nu+\mu}\pi_{00},\ j=1,2,\ldots,\ \pi_{1j}=\frac{\lambda_0}{\mu}\frac{1}{j!\nu^j}\prod_{i=1}^{j}\frac{\lambda_{i-1}(\lambda_i+i\nu)}{\lambda_i+i\nu+\mu}\pi_{00},\ j=0,1,\ldots,$$

де $\pi_{00}^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!\nu^j}\prod_{i=1}^{j}\frac{\lambda_{i-1}(\lambda_{i-1}+(i-1)\nu)}{\lambda_i+i\nu+\mu}+\frac{\lambda_0}{\mu}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!\nu^j}\prod_{i=1}^{j}\frac{\lambda_{i-1}(\lambda_i+i\nu)}{\lambda_i+i\nu+\mu}.$

У **підрозділі 2.3** розглянуто випадок двоканальних систем при змінній інтенсивності вхідного потоку. Для побудови формул для стаціонарного розподілу використано ланцюгові дроби виду

$$x_j=\cfrac{\gamma_{j+1}}{\beta_{j+1}+\cfrac{\gamma_{j+2}}{\beta_{j+2}+\ldots\ldots+\cfrac{\gamma_{N-1}}{\beta_{N-1}+\ldots}}},\ j=0,1,\ldots,$$

де $\gamma_j = -\dfrac{\lambda_{j-1}((\lambda_{j-1} + (j-1)\nu)^2 + (j-1)\nu\mu)}{j(j+1)\nu^2\mu}$,

$$\beta_j = -\frac{j\nu((\lambda_j + \mu + j\nu)^2 + \mu(\lambda_{j-1} + \mu + j\nu))}{j(j+1)\nu^2\mu},\ j = 1, 2, \ldots$$

Теорема 2.4. Якщо виконуються умови леми 2.1, то стаціонарні ймовірності π_{ij}, $(i, j) \in S(Q)$ системи типу $M/M/2/\infty$ з однією повторною спробою мають вигляд: $\pi_{0j} = \left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k\right)\pi_{00}$, $j = 1, 2, \ldots$, $\pi_{1j} = \dfrac{\lambda_j + j\nu}{\mu}\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k\right)\pi_{00}$, $j = 0, 1, \ldots$,

$$\pi_{2j} = \frac{1}{2\mu^2}((\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu\mu - (j+1)\nu\mu x_j)\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k\right)\pi_{00},\ j = 0, 1, \ldots,$$

де $\left(\pi_{00}\right)^{-1} = \dfrac{1}{2\mu^2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left((\lambda_j + \mu + j\nu)^2 + \mu(\mu + j\nu - (j+1)\nu x_j)\right)\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k\right)\right)$.

У **підрозділі 2.4** розглянуто випадок системи типу $M/M/c/N$ з однією спробою повтору та знайдено стаціонарні ймовірності у векторно-матричному вигляді.

Введемо позначення: $\pi_j^{(N)} = \left(\pi_{0j}^{(N)}, \pi_{1j}^{(N)}, \ldots, \pi_{cj}^{(N)}\right)^T$, $\pi_j = \left(\pi_{0j}, \pi_{1j}, \ldots, \pi_{cj}\right)^T$; $F(j) = \left\| f_{ik}^{j} \right\|_{i,k=0}^{c}$, $j = 0, 1, \ldots$ – матриця з елементами $f_{ii}^{j} = \lambda_j + i\mu + j\nu$, $i = 0, 1, \ldots, c-1$, $f_{cc}^{j} = \lambda_j + c\mu$, $f_{ii-1}^{j} = -\lambda_j$, $i = 1, 2, \ldots, c-1$, $f_{cc-1}^{j} = -(\lambda_j + j\nu)$, $f_{ii+1}^{j} = -(i+1)\mu$, $i = 0, 1, \ldots, c-1$, $f_{ck}^{j} = -j\nu$, $k = 0, 1, \ldots, c-2$, інші елементи дорівнюють нулю; $B = \left\| b_{ik} \right\|_{i,k=0}^{c}$, $b_{ii-1} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, c$, $b_{cc} = 1$, інші елементи дорівнюють нулю; $D = \left\| d_{ik} \right\|_{i,k=0}^{c}$, де $d_{00} = 1$, $d_{0k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, c$, $d_{ik} = f_{i-1k}^{N}$, $i = 1, 2, \ldots, c$, $k = 0, 1, \ldots, c$; $W(j) = F^{-1}(j)B$, $j = 0, 1, \ldots$; e_i – вектор-стовпець розмірності i, перший елемент якого дорівнює одиниці, а інші елементи дорівнюють нулю; $\overline{1}_i$ – вектор-стовпець розмірності i, що складається з одиниць.

Теорема 2.5. Якщо параметри моделі невироджені, то стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}^{(N)}$, $(i, j) \in S(Q^N)$ для системи типу $M/M/c/N$ з однією повторною спробою можна подати у векторно-матричному вигляді:

$$\pi_j^{(N)} = \Delta_j^N \pi_{00}^{(N)},\ j = 0, 1, \ldots, N, \text{ де } \pi_{00}^{(N)} = \left(\sum_{j=0}^{N} \overline{1}_{c+1}^T \Delta_j^N\right)^{-1},$$

$$\Delta_j^N = \frac{1}{j!\nu^j}\frac{\prod_{k=j}^{N-1} W(k)D^{-1}e_{c+1}}{e_{c+1}^T \prod_{k=0}^{N-1} W(k)D^{-1}e_{c+1}},\ j = 0, 1, \ldots, N-1,\ \Delta_N^N = \frac{1}{N!\nu^N}\frac{D^{-1}e_{c+1}}{e_{c+1}^T \prod_{k=0}^{N-1} W(k)D^{-1}e_{c+1}}.$$

Враховуючи, що процеси обслуговування $Q(t)$ та $Q^N(t)$ є процесами міграції, стаціонарні характеристики $M/M/c/N$-моделі апроксимують відповідні характеристики для $M/M/c/\infty$- моделі, що відображає **теорема 2.6.**

В **підрозділі 2.5** розглядається задача керування інтенсивністю вхідного потоку в класі порогових стратегій, що задаються порогами $-1 = H_0 \le H_1 \le \ldots$ $\ldots \le H_{K-1} < H_K = \infty$, $H = (H_1, H_2, \ldots, H_{K-1})^T$, K – фіксоване число. Формально фіксація порогової стратегії H означає наступну залежність λ_j від числа джерел повторних викликів $\lambda_j = h_i$, при $j = H_{i-1} + 1, \ldots, H_i$, $i = 1, \ldots, K$.

Для порогових стратегій поставлена та розв'язана задача багатокритеріальної оптимізації для стохастичної системи з однією спробою повтору:

$$L_i(H) \to \max, i = 1, 2, .., K, \; L_{K+1}(H) \to \min, \; L_{K+2}(H) \to \min, \; L_{K+3}(H) \to \min,$$
$$H_i \in \{0, 1, \ldots\}, \; i = 1, 2, \ldots, K-1, \; H_i \le H_{i+1},$$

де $L_i(t, H)$, $i = 1, \ldots, K$ – число вимог, обслуговування яких завершено за час t, при роботі системи в i-му режимі; $L_{K+1}(t, H)$ – число вимог, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами; $L_{K+2}(t, H)$ – число перемикань інтенсивності вхідного потоку; $L_{K+3}(t, H)$ – число вимог, які залишили систему без обслуговування після невдалої повторної спроби. Позначимо $L_i(H) = \lim_{t \to \infty} t^{-1} L_i(t, H)$, $i = 1, \ldots, K+3$.

В якості основного підходу до розв'язання багатокритеріальної задачі використовується метод лінійної згортки:

$$\sum_{i=1}^{K} C_i L_i(H) - C_{K+1} L_{K+1}(H) - C_{K+2} L_{K+2}(H) - C_{K+3} L_{K+3}(H) \to \max,$$
$$H_i \in \{0, 1, \ldots\}, \; i = 1, 2, \ldots, K-1, \; H_i \le H_{i+1}.$$

де C_i – прибуток, пов'язаний з обслуговуванням однієї вимоги, при i-му режимі, $i = 1, 2, \ldots, K$; C_{K+1}– штраф за відмову в обслуговуванні; C_{K+2}– штраф за перемикання інтенсивності вхідного потоку, C_{K+3}– штраф за втрату вимоги після невдалої повторної спроби.

Функціонали якості будуються на основі стаціонарних ймовірностей таким чином:

$$L_i(H) = \mu \sum_{j=H_{i-1}+1}^{H_i} \sum_{n=1}^{c} n \pi_{nj}(H), \; i = 1, \ldots, K-1, \; L_K(H) = \mu \sum_{j=H_{K-1}+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{c} n \pi_{nj}(H),$$

$$L_{K+1}(H) = h_1 \sum_{j=0}^{H_1} \pi_{cj}(H) + h_2 \sum_{j=H_1+1}^{H_2} \pi_{cj}(H) + \ldots + h_K \sum_{j=H_{K-1}+1}^{\infty} \pi_{cj}(H),$$

$$L_{K+2}(H) = \sum_{i=1}^{K-1} \left(h_i \pi_{cH_i}(H) + (H_i + 1) \nu \sum_{n=0}^{c} \pi_{nH_i+1}(H) \right), \; L_{K+3}(H) = \nu \sum_{j=0}^{\infty} j \pi_{cj}(H).$$

Розв'язком задачі є така багатопорогова стратегія H, яка максимізує середній прибуток від роботи системи. У розділі 2 наведено приклади розв'язання оптимізаційної задачі.

У **розділі 3** “**Гістерезисні стратегії керування системами з однією повторною спробою**” як основна розглядається математична модель типу $M/M/c/\infty$ поведінки системи з однією спробою повтору у випадку гістерезисної стратегії керування.

У **підрозділі 3.1** описано принцип функціонування системи при керуванні у класі гістерезисних стратегій. В основному модель поведінки системи з однією спробою повтору у випадку гістерезисних стратегій керування співпадає з моделлю, яка була описана для порогових стратегій при $K=2$. Головна відмінність полягає у процесі переходу від одного режиму функціонування до іншого. Зафіксуємо два невід’ємних цілих числа H_1 та H_2, які теж називаються порогами, $H_1 \le H_2$. Якщо в деякий момент часу кількість джерел повторних викликів у системі, що сформовані вимогами після невдалої спроби отримати обслуговування, $j \le H_1$, то система функціонує в першому режимі і інтенсивність вхідного потоку дорівнює h_1. Якщо $j > H_2$, то система функціонує у другому режимі з інтенсивністю вхідного потоку h_2. Якщо $H_1 < j \le H_2$, то система зберігає той режим, в якому вона функціонувала у попередній момент часу.

Стан системи в будь-який момент часу t при фіксованій стратегії (H_1, H_2) описується тривимірним процесом

$$Q(t, H_1, H_2) = \left(Q_0(t, H_1, H_2), Q_1(t, H_1, H_2), R(t, H_1, H_2)\right)^T, \ t \ge 0,$$

де $Q_0(t, H_1, H_2)$– кількість зайнятих приладів у момент часу t, $Q_1(t, H_1, H_2)$ – кількість джерел повторних викликів у момент часу t, що сформовані вимогами після невдалої спроби отримати обслуговування, $R(t, H_1, H_2)$ – номер режиму роботи системи в момент часу t. Якщо $R(t, H_1, H_2) = 1$, то система працює в першому режимі з інтенсивністю вхідного потоку h_1. Якщо $R(t, H_1, H_2) = 2$, то система працює в другому режимі з інтенсивністю вхідного потоку h_2. Процес $Q(t, H_1, H_2)$ є ланцюгом Маркова з неперервним часом і множиною станів

$$S(Q, H_1, H_2) = S^1(Q, H_1, H_2) \cup S^2(Q, H_1, H_2),$$

де $S^1(Q, H_1, H_2) = \{(i, j, 1): i = 0, 1, \ldots, c;\ j = 0, 1, \ldots, H_2\}$,
$S^2(Q, H_1, H_2) = \{(i, j, 2): i = 0, 1, \ldots, c;\ j = H_1 + 1, \ldots\}$, $S^1(Q, H_1, H_2) \cap S^2(Q, H_1, H_2) = \varnothing$.

Інфінітезимальні характеристики $a_{(i,j,r)(i',j',r')}$, (i, j, r), $(i', j', r') \in S(Q, H_1, H_2)$ ланцюга $Q(t, H_1, H_2)$ визначаються наступним чином:

1) якщо $[i = 0, 1, \ldots, c-1,\ j = 0, 1, \ldots, H_2,\ r = 1] \vee [i = 0, 1, \ldots, c-1,\ j = H_1 + 2, \ldots, r = 2]$, то

$$a_{(i,j,r)(i',j',r')} = \begin{cases} h_r, \text{ при } (i', j', r') = (i+1, j, r), \\ i\mu, \text{ при } (i', j', r') = (i-1, j, r), \\ j\nu, \text{ при } (i', j', r') = (i+1, j-1, r), \\ -(h_r + i\mu + j\nu), \text{ при } (i', j', r') = (i, j, r), \\ 0, \text{ в іншому випадку;} \end{cases}$$

2) якщо $[i = c,\ j = 0, 1, \ldots, H_2 - 1, r = 1] \vee [i = c,\ j = H_1 + 2, \ldots, r = 2]$, то

$$a_{(c,\,j,\,r)(i',\,j',\,r')}=\begin{cases} h_r,\text{ при }\left(i',\ j',r'\right)=(c,\ j+1,r),\\ c\mu,\text{ при }\left(i',\ j',r'\right)=(c-1,\ j,r),\\ j\nu,\text{ при }\left(i',\ j',r'\right)=(c,\ j-1,r),\\ -(h_r+c\mu+j\nu),\text{ при }\left(i',\ j',r'\right)=\left(c,\ j,r\right),\\ 0,\text{ в іншому випадку;}\end{cases}$$

3) якщо $i=c$, $j=H_2$, $r=1$, то

$$a_{(c,\,H_2,\,1)(i',\,j',\,r')}=\begin{cases} h_1,\text{ при }\left(i',\ j',r'\right)=(c,H_2+1,2),\\ c\mu,\text{ при }\left(i',\ j',r'\right)=(c-1,H_2,1),\\ H_2\nu,\text{ при }\left(i',\ j',r'\right)=(c,H_2-1,1),\\ -(h_1+c\mu+H_2\nu),\text{ при }\left(i',\ j',r'\right)=\left(c,H_2,1\right),\\ 0,\text{ в іншому випадку;}\end{cases}$$

4) якщо $i=0,1,\ldots,c-1$, $j=H_1+1$, $r=2$, то

$$a_{(i,\,j,\,r)(i',\,j',\,r')}=\begin{cases} h_2,\text{ при }\left(i',\ j',r'\right)=(i+1,H_1+1,2),\\ i\mu,\text{ при }\left(i',\ j',r'\right)=(i-1,H_1+1,2),\\ (H_1+1)\nu,\text{ при }\left(i',\ j',r'\right)=(i+1,H_1,1),\\ -(h_2+i\mu+(H_1+1)\nu),\text{ при }\left(i',\ j',r'\right)=\left(i,\ j,r\right),\\ 0,\text{ в іншому випадку;}\end{cases}$$

5) якщо $i=c$, $j=H_1+1$, $r=2$, то

$$a_{(c,\,H_1+1,\,2)(i',\,j',\,r')}=\begin{cases} h_2,\text{ при }\left(i',\ j',r'\right)=(c,H_1+2,2),\\ c\mu,\text{ при }\left(i',\ j',r'\right)=(c-1,H_1+1,2),\\ (H_1+1)\nu,\text{ при }\left(i',\ j',r'\right)=(c,H_1,1),\\ -(h_2+c\mu+(H_1+1)\nu),\text{ при }\left(i',\ j',r'\right)=\left(c,H_1+1,2\right),\\ 0,\text{ в іншому випадку.}\end{cases}$$

Через $\pi_{ij}^N(r)$, $(i,\ j,r)\in S(Q^N,H_1,H_2)$ позначимо стаціонарні ймовірності.

У загальному випадку при $c\geq 2$ та довільній кількості джерел повторних викликів побудувати явні формули для стаціонарних ймовірностей неможливо, тому розглядається урізана модель даної системи $M/M/c/N$, в якій скінченне число N місць для повторних викликів, що зробили одну невдалу спробу отримати обслуговування. Таким чином, якщо всі N місць зайнято, то вимога губиться та не отримує обслуговування. При переході до границі $N\to\infty$ результати для урізаної моделі можна поширити на модель з необмеженим числом повторних викликів.

При фіксованій гістерезисній стратегії $\left(H_1,H_2\right)$ стан системи може бути описаний тривимірним процесом

$$Q^N(t,H_1,H_2)=\left(Q_0^N(t,H_1,H_2),Q_1^N(t,H_1,H_2),R^N(t,H_1,H_2)\right)^T,\ t\geq 0,$$

де $Q_0^N(t,H_1,H_2)$ – кількість зайнятих приладів у момент часу t, $Q_1^N(t,H_1,H_2)$ –

кількість джерел повторних викликів у момент часу t, $R^N(t, H_1, H_2)$ – номер режиму роботи системи у момент часу t. У подальшому вважаємо, що $N > H_2$. Процес $Q^N(t, H_1, H_2)$, $t \geq 0$ є ланцюгом Маркова з неперервним часом і множиною станів $S(Q^N, H_1, H_2) = S^1(Q^N, H_1, H_2) \cup S^2(Q^N, H_1, H_2)$, $S^1(Q^N, H_1, H_2) \cap S^2(Q^N, H_1, H_2) = \varnothing$, де $S^1(Q^N, H_1, H_2) = \{(i, j, 1) : i = 0, 1, \dots, c; j = 0, 1, \dots, H_2\}$,
$S^2(Q^N, H_1, H_2) = \{(i, j, 2) : i = 0, 1, \dots, c; j = H_1 + 1, \dots, N\}$.

Інфінітезимальні характеристики процесу $Q^N(t, H_1, H_2)$ співпадають з наведеними вище, крім випадку $i = c$, $j = N$, $r = 2$:

$$a^N_{(c, N, 2)(i', j', r')} = \begin{cases} c\mu, \text{ при } (i', j', r') = (c-1, N, 2), \\ N\nu, \text{при } (i', j', r') = (c, N-1, 2), \\ -(c\mu + N\nu), \text{ при } (i', j', r') = (c, N, 2), \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

У **підрозділі 3.2** розглянуто систему $M/M/1/\infty$ з однією спробою повтору та керованою гістерезисною стратегією. У наступній теоремі знайдені стаціонарні ймовірності.

Теорема 3.1. Якщо система типу $M/M/1/\infty$ з однією спробою повтору, керована гістерезисною стратегією, є невиродженою, то для процесу обслуговування $Q(t, H_1, H_2)$, $t \geq 0$ існує стаціонарний режим і стаціонарні ймовірності можна подати у вигляді:

$$\pi_{00}(1) = \frac{\mu}{h_1}\pi_{10}(1), \ \pi_{0j}(1) = \frac{\mu\alpha_j^{(1)}\pi_{10}(1)}{h_1 + j\nu}, \ \pi_{1j}(1) = \alpha_j^{(1)}\pi_{10}(1), \ j = 1, \dots, H_1,$$

$$\pi_{0j}(1) = \frac{\mu}{h_1 + j\nu}\left(\alpha_j^{(1)} - \frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(1)}}{\nu + h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\right)\pi_{10}(1), \ \pi_{1j}(1) = \left(\alpha_j^{(1)} - \frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(1)}}{\nu + h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\right)\pi_{10}(1),$$

$$j = H_1 + 1, \dots, H_2,$$

$$\pi_{0H_1+1}(2) = \frac{h_1\mu\alpha_{H_2}^{(1)}}{(H_1+1)\left(\mu + h_2 + (H_1+1)\nu\right)\left(\nu + h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}\right)}\pi_{10}(1),$$

$$\pi_{1H_1+1}(2) = \frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\left(h_2 + (H_1+1)\nu\right)}{(H_1+1)\left(\mu + h_2 + (H_1+1)\nu\right)\left(\nu + h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}\right)}\pi_{10}(1),$$

$$\pi_{0j}(2) = \frac{\mu h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(2)}}{(h_2 + j\nu)(\nu + h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)})}\pi_{10}(1), \ \pi_{1j}(2) = \frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(2)}}{\nu + h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\pi_{10}(1),$$

$$j = H_1 + 2, \dots, H_2 + 1,$$

$$\pi_{0j}(2) = \frac{\mu\alpha_j^{(2)}h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{H_2+1,H_1+1}^{(2)}}{(h_2 + j\nu)\alpha_{H_2+1}^{(2)}\left(\nu + h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}\right)}\pi_{10}(1), \ \pi_{1j}(2) = \frac{\alpha_j^{(2)}h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{H_2+1,H_1+1}^{(2)}}{\alpha_{H_2+1}^{(2)}\left(\nu + h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}\right)}\pi_{10}(1),$$

$$j = H_2 + 2, \dots,$$

де $\pi_{10}(1)=\left[\frac{\mu+h_1}{h_1}+\sum_{j=1}^{H_1}\frac{h_1+\mu+j\nu}{h_1+j\nu}\alpha_j^{(1)}+\sum_{j=H_1+1}^{H_2}\frac{h_1+\mu+j\nu}{h_1+j\nu}\left(\alpha_j^{(1)}-\frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(1)}}{\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\right)+\right.$

$$\left.+\frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}}{\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\left(\frac{1}{H_1+1}+\sum_{j=H_1+2}^{H_2+1}\frac{\beta_{j,H_1+1}^{(2)}(h_2+\mu+j\nu)}{h_2+j\nu}+\sum_{j=H_2+2}^{\infty}\frac{\alpha_j^{(2)}\beta_{H_2+1,H_1+1}^{(2)}(h_2+\mu+j\nu)}{\alpha_{H_2+1}^{(2)}(h_2+j\nu)}\right)\right]^{-1}$$

$$\alpha_j^{(r)}=\frac{h_r^j}{j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{h_r+(j-k)\nu}{h_r+\mu+(j-k)\nu},\ \beta_{jm}^{(r)}=\sum_{i=0}^{j-m}\frac{(j-i-1)!h_r^i}{j!\nu^i}\prod_{k=0}^{i}\frac{h_r+(j-k)\nu}{h_r+\mu+(j-k)\nu},\ r=1,2.$$

У **підрозділі 3.3** розглянуто випадок системи типу $M/M/c/\infty$ при $c\geq 2$. Для знаходження стаціонарного розподілу використано апроксимацію урізаною системою типу $M/M/c/N$. Оскільки фазовий простір $S(Q^N,H_1,H_2)$ процесу $Q^N(t,H_1,H_2)$ скінченний, то для нього завжди існує стаціонарний режим. Через $\pi_j^N(r)=\left(\pi_{0j}^N(r),\pi_{1j}^N(r),\ldots,\pi_{cj}^N(r)\right)^T$, $(i,j,r)\in S(Q^N,H_1,H_2)$ позначимо його стаціонарний розподіл.

Введемо наступні позначення:

$$A_j(r)=\left\|a_{ik}^j(r)\right\|_{i,k=0}^{c},\text{ де } a_{ik}^j(r)=\begin{cases}h_r+i\mu+j\nu,\ k=i,\ i=0,1,\ldots,c-1,\\ h_r+c\mu,\ k=i=c,\\ -h_r,\ k=i-1,\ i=1,,2,\ldots,c-1,\\ -(h_r+j\nu),\ i=c,\ k=c-1,\\ -j\nu,\ i=c,\ k=0,1,\ldots,c-2,\\ -(i+1)\mu,\ k=i+1,\ i=0,1,\ldots,c-1,\\ 0,\ \text{в іншому випадку;}\end{cases}$$

$$\mathrm{B}_j=\left\|b_{ik}^j\right\|_{i,k=0}^{c},\text{ де } b_{ik}^j=\begin{cases}(j+1)\nu,\ k=i-1,\ i=1,\ldots,c-1,\\ (j+1)\nu,\ k=c,\ i=c,\\ 0,\ \text{в іншому випадку;}\end{cases}\qquad C_j=\left\|c_{ik}^j\right\|_{i,k=0}^{c},$$

$$\text{де } c_{ik}^j=\begin{cases}(H_1+1)\nu,\ i=c,\ k=0,\ldots,c,\\ 0,\ \text{в іншому випадку;}\end{cases}\quad D=\left\|d_{ik}\right\|_{i,k=0}^{c},\text{ де } d_{ik}=\begin{cases}1,\ k=0,\ i=0,\\ 0,\ k=1,\ldots,c,\ i=0,\\ a_{i-1k}^N(2),\ \text{в іншому випадку;}\end{cases}$$

$F_{H_2+1}(1)=O_{c+1}$, де O_i – нульова матриця розмірності $i\times i$;

$$F_j(1)=\begin{cases}\prod_{i=j}^{H_1}A_i^{-1}(1)B_i\left[I+\sum_{k=H_1+1}^{H_2}\left(\prod_{i=H_1+1}^{k-1}A_i^{-1}(1)B_i\right)A_k^{-1}(1)C_k\right],\ j=0,\ldots,H_1,\\ \sum_{k=j}^{H_2}\left(\prod_{i=j}^{k-1}A_i^{-1}(1)B_i\right)A_k^{-1}(1)C_k,\ j=H_1+1,\ldots,H_2;\end{cases}$$

$$F_j(2)=\left\{I-\sum_{k=j}^{H_2}\left(\prod_{i=j}^{k-1}A_i^{-1}(2)B_i\right)A_k^{-1}(2)C_k\left[I+\sum_{k=H_1+1}^{H_2}\left(\prod_{i=H_1+1}^{k-1}A_i^{-1}(2)B_i\right)A_k^{-1}(2)C_k\right]^{-1}\times\right.$$

$$\times \prod_{i=H_1+1}^{j-1} A_i^{-1}(2)B_i \Bigg\} \prod_{i=j}^{N-1} A_i^{-1}(2)B_i\,,\; j = H_1+1,\ldots,N-1;\; F_N(2) = I = \left\|\delta_{ij}\right\|_{i,j=0}^{c},\; \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

У **лемі 3.2** доведено, що для невироджених моделей існують обернені матриці $A_j^{-1}(1)$, $j = 0,1,\ldots,H_2$, $A_j^{-1}(2)$, $j = H_1+1,\ldots$ та D^{-1}.

Явний векторно-матричний вигляд стаціонарного розподілу містить наступна теорема.

Теорема 3.2 Якщо система типу $M/M/c/N$ з однією повторною спробою, керована гістерезисною стратегією, є невиродженою, то її стаціонарні ймовірності можна подати у вигляді:

$$\pi_j^N(1) = \Delta_j^N(1)\pi_{00}^N(1),\; j = 0,1,\ldots,H_2,\; \pi_j^N(2) = \Delta_j^N(2)\pi_{00}^N(1),\; j = H_1+1,\ldots,N,$$

де $\pi_{00}^N(1) = \left(\sum_{j=0}^{H_2} \overline{1}_{c+1}^T \Delta_j^N(1) + \sum_{j=H_1+1}^{N} \overline{1}_{c+1}^T \Delta_j^N(2) \right)^{-1}$, $\Delta_j^N(1) = \dfrac{F_j(1)F_{H_1+1}(2)D^{-1}e_{c+1}}{e_{c+1}^T F_0(1)F_{H_1+1}(2)D^{-1}e_{c+1}}$, $j = 0,\ldots,H_2$

$$\Delta_j^N(2) = \frac{F_j(2)D^{-1}e_{c+1}}{e_{c+1}^T F_0(1)F_{H_1+1}(2)D^{-1}e_{c+1}},\; j = H_1+1,\ldots,N.$$

У **підрозділі 3.4** сформульовано та розв’язано задачу багатокритеріальної оптимізації для стохастичної системи з однією спробою повтору при гістерезисній стратегії керування:

$$L_i(H_1,H_2) \to \max, i = 1,2; \quad L_i(H_1,H_2) \to \min, i = 3,4,5,\; H_1,H_2 \in \{0,1,\ldots\},\; H_1 \le H_2,$$

де $L_i(H_1,H_2) = \lim_{t\to\infty} t^{-1} L_i(t,H_1,H_2)$, $i = 1,,2,\ldots,5$, $L_i(t,H_1,H_2)$ – число вимог, обслуговування яких завершено за час t в i-му режимі, $i = 1,2$; $L_3(t,H_1,H_2)$ – число вимог, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами; $L_4(t,H_1,H_2)$ – число перемикань інтенсивності вхідного потоку; $L_5(t,H_1,H_2)$ – число вимог, які залишили систему без обслуговування після невдалої повторної спроби.

Функціонали якості визначаються через стаціонарні ймовірності наступним чином:
$$L_1(H_1,H_2) = \mu \sum_{j=0}^{H_2}\sum_{i=1}^{c} i\pi_{ij}(1),\; L_2(H_1,H_2) = \mu \sum_{j=H_1+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{c} i\pi_{ij}(2),$$

$$L_3(H_1,H_2) = \sum_{j=0}^{H_2} h_1\pi_{cj}(1) + \sum_{j=H_1+1}^{\infty} h_2\pi_{cj}(2),\; L_4(H_1,H_2) = h_1\pi_{cH_2}(1) + (H_1+1)\nu \sum_{i=0}^{c} \pi_{iH_1+1}(2),$$

$$L_5(H_1,H_2) = \nu\left(\sum_{j=1}^{H_2} j\pi_{cj}(1) + \sum_{j=H_1+1}^{\infty} j\pi_{cj}(2) \right).$$

Розділ 4 “**Рекурентні обчислювальні алгоритми для систем з обмеженим числом повторів**” присвячено побудові рекурентних обчислювальних алгоритмів для стаціонарних ймовірностей процесів, що моделюють функціонування систем з обмеженим числом повторів.

У **підрозділі 4.1** подано рекурентний обчислювальний алгоритм побудови стаціонарного розподілу для систем з однією спробою повтору. Для цього розглядається урізана модель даної системи, що моделюється ланцюгом Маркова

$Q^N(t)=\left(Q_0^N(t),Q_1^N(t)\right)^T$, $t\geq 0$ з неперервним часом і множиною станів $S\left(Q^N\right)=\{0,1,\ldots,c\}\times\{0,1,\ldots,N\}$. Множина станів подається у вигляді $S\left(Q^N\right)=S_0\cup S_1\cup\ldots\cup S_N$, де $S_j=\{(0,j),(1,j),\ldots,(c,j)\}$, $j=0,1,\ldots,N$. Матриця інфінітезимальних характеристик ланцюга $Q^N(t)$ розмірності $[(c+1)(N+1)]\times[(c+1)(N+1)]$ має вигляд: $A=\left\|A_{jj'}\right\|_{jj'=0}^{N}$, де $A_{jj}=B_j$, $j=0,1,\ldots,N$, $A_{jj-1}=C_j$, $j=1,\ldots,N$, $A_{jj+1}=D_i$, $j=0,1,\ldots,N-1$ – матриці розмірність $(c+1)\times(c+1)$, що визначаються наступним чином: $B_j=\left\|b_{ik}^j\right\|_{i,k=0}^{c}$, $b_{ii}^j=-\left(\lambda_j+i\mu+j\nu\right)$, $i=0,1,\ldots,c$, $j=0,1,\ldots,N-1$, $b_{ii}^N=-\left(\lambda_N+i\mu+N\nu\right)$, $i=0,1,\ldots,c-1$, $b_{cc}^N=-\left(c\mu+N\nu\right)$, $b_{ii-1}^j=i\mu$, $i=1,2,\ldots,c$, $j=0,1,\ldots,N$, $b_{ii+1}^j=\lambda_j$, $i=0,1,\ldots,c-1$, $j=0,1,\ldots,N$, інші елементи дорівнюють нулю; $C_j=\left\|c_{ik}^j\right\|_{i,k=0}^{c}$, $c_{ii+1}^j=j\nu$, $c_{cc}^j=j\nu$, $j=0,1,\ldots,N$, інші елементи дорівнюють нулю; $D_j=\left\|d_{ik}^j\right\|_{i,k=0}^{c}$, де $d_{cc}=\lambda_j$, $j=0,1,\ldots,N$, інші елементи дорівнюють нулю.

Процес обслуговування $Q^N(t)$ є процесом квазі народження та загибелі, де $Q_0^N(t)$ – фаза, $Q_1^N(t)$ – рівень. Це дозволило побудувати рекурентний обчислювальний алгоритм, що випливає з результатів для процесів квазі народження та загибелі зі скінченною множиною станів.

Позначимо: O_i – нульова матриця розмірності $i\times i$, $\overline{0}_i$ – нульовий вектор-стовпець розмірності i.

За вказаним методом, побудується сімейство матриць $\{R_j,\ j=0,1,\ldots,N-1\}$, що є мінімальними невід'ємними розв'язками системи рівнянь

$$D_j+R_jB_{j+1}+R_jR_{j+1}C_{j+2}=O_{c+1},\ j=0,1,\ldots,N-1.$$

Алгоритм знаходження стаціонарних ймовірностей задається схемою.

Алгоритм 4.1.

1) Водимо матриці B_j, $j=0,1,\ldots,N$; C_j, $j=1,2,\ldots,N$; D_j, $j=0,1,\ldots,N-1$ на основі параметрів системи;
2) будуємо матрицю $R_{N-1}=-D_{N-1}\left(B_N\right)^{-1}$;
3) будуємо матриці $R_j=D_j\left(-B_{j+1}-R_{j+1}C_{j+2}\right)^{-1}$, $j=N-2,N-3,\ldots,0$;
4) знаходимо вектор π_0^N з рівняння $\left(\pi_0^N\right)^T\left(B_0+R_0C_1\right)=\overline{0}_{c+1}^T$ за умови нормування
$$\left(\pi_0^N\right)^T\overline{1}_{c+1}+\left(\pi_0^N\right)^T\left(\sum_{j=1}^{N}\prod_{k=0}^{j-1}R_k\right)\overline{1}_{c+1}=1;$$
5) знаходимо стаціонарні ймовірності $\left(\pi_j^N\right)^T=\left(\pi_0^N\right)^T\prod_{k=0}^{j-1}R_k$, $j=1,2,\ldots,N$.

У **підрозділі 4.2** показано можливість поширити результат з попереднього розділу на системи з двома та більше повторними спробами. Такі системи визначаються наступними параметрами: $\lambda_{j_1,\dots,j_k,\dots,j_m}$ – інтенсивність вхідного потоку, $j_k \in Z_+$, $k=1,2,\dots,m$, де Z_+ – множина цілих невід'ємних чисел, m – кількість повторних спроб, μ – інтенсивність обслуговування; ν_k – інтенсивність k-ї повторної спроби, $k=1,2,\dots,m$. Формально функціонування системи в даному випадку співпадає з тим, що було описано для системи з однією повторною спробою. Відмінність полягає в наступному. Вимога має можливість спробувати отримати обслуговування $m+1$ раз, враховуючи початкове звернення. На орбіті вимоги утворюють окремі сукупності відповідно до здійснених спроб отримати обслуговування. Таким чином, вимога, що здійснила k-ту невдалу спробу, є елементом k-ї сукупності. Якщо така вимога здійснює наступну спробу отримати обслуговування, то у випадку наявності вільного приладу вона обслуговується та залишає систему. В іншому випадку така вимога формує ще одне джерело повторного виклику, що відноситься до $(k+1)$-ї сукупності, при цьому звільняється місце в k-й сукупності. Вимога, яка при $(m+1)$–й спробі (враховуючи початкову) застає всі прилади зайняті, залишає систему та не отримує обслуговування.

Такі системи моделюються багатовимірними процесами Маркова з неперервним часом $Q^m(t)=\left(Q_0(t),Q_1(t),\dots,Q_m(t)\right)^T$, $t\ge 0$ з множиною станів $S\left(Q^m\right)=\{0,1,\dots,c\}\times Z_+^m$. Компонента $Q_0^m(t)$ вказує на кількість зайнятих приладів у момент часу t, $Q_k^m(t)$ дорівнює числу вимог у момент часу t, які зробили k невдалих спроб отримати обслуговування, $k=1,2,\dots,m$. Інфінітезимальні характеристики такого ланцюга визначаються подібно до тих, що були розглянуті раніше.

Для побудови рекурентного обчислювального алгоритму 4.1 використовується інфінітезимальна матриця ланцюга Маркова з неперервним часом $Q^{m,N}(t)=\left(Q_0^N(t),Q_1^N(t),\dots,Q_m^N(t)\right)^T$, де $Q_0^N(t)\in\{0,1,\dots,c\}$, $Q_k^N(t)\in\{0,1,\dots,N\}$, $k=1,\dots,m$, який моделює процес обслуговування в урізаній системі з обмеженим числом повторів. Характерною особливістю таких систем є те, що вимога втрачається після k-ї спроби отримати обслуговування, якщо заповнені всі N місць відповідної сукупності джерел повторних викликів.

У **підрозділі 4.3** сформульовано та розв'язано задачу багатокритеріальної оптимізації для стохастичної системи з m повторними спробами при пороговій стратегії керування.

ВИСНОВКИ

У дисертації отримано нові науково обґрунтовані результати для стохастичних систем з обмеженим числом повторних спроб та керованим вхідним потоком у класі порогових та гістерезисних стратегій керування.

Основні наукові результати дисертації:

вперше

- встановлено умови існування стаціонарного режиму процесу обслуговування для систем з обмеженим числом повторних спроб;
- знайдено явні векторно-матричні подання стаціонарних ймовірностей двовимірного ланцюга Маркова для системи з однією спробою повтору;

- отримано явні формули в термінах гіпергеометричних функцій для генератрис стаціонарних ймовірностей процесу обслуговування некерованих одноканальних систем;
- з використанням ланцюгових дробів отримано явні формули для стаціонарних ймовірностей процесу обслуговування двоканальної системи з однією спробою повтору у випадку керованого вхідного потоку;
- отримано явні формули для стаціонарних ймовірностей тривимірного процесу обслуговування для систем з однією спробою повтору у випадку гістерезисних стратегій керування;
- сформульовано та розв’язано задачі максимізації прибутку та мінімізації витрат, що базуються на алгоритмах підрахунку відповідних функціоналів якості;

набув подальшого розвитку

- рекурентний обчислювальний алгоритм знаходження стаціонарних ймовірностей для процесу обслуговування систем з обмеженим числом повторних спроб на основі моделей процесів квазі народження та загибелі.

Результати дисертаційного дослідження можуть знайти застосування для розв’язання реальних практичних задач, де виникає необхідність враховувати явище повторних викликів.

Результати роботи впроваджено в навчальних процесах Київського національного університету імені Тараса Шевченка та Національного університету водного господарства та природокористування.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових фахових виданнях:

1. Лебєдєв Є. О., Прищепа О. В. Стохастичні системи з повторними викликами та нетерплячими вимогами. *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2007. № 2. С. 169–173.
2. Лебєдєв Є. О., Прищепа О. В. Системи з повторними викликами, нетерплячими вимогами та керованим вхідним потоком. *Журнал обчислюваної та прикладної математики*. 2007. № 2(95). С. 59–64.
3. Прищепа О. В. Система типу $M/M/c/N$ з однією спробою повтору, керована гістерезисною стратегією. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки.* 2011. № 4. С. 193–198.
4. Прищепа О. Гістерезисні стратегії керування інтенсивністю вхідного потоку для систем типу $M/M/1$ з однією спробою повтору. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Кібернетика.* 2012. № 12. С. 45–51.
5. Прищепа О. В. Про оптимізацію систем з обмеженнями на число спроб почати обслуговування. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 137–142.

6. Прищепа О. В., Лебедев Е. О. Об одной многоканальной системе массового обслуживания с повторными вызовами. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 3. С. 127–137.

Інші публікації:

7. Прищепа О. В. Оптимізація систем з повторними викликами та нетерплячими вимогами. *Problems of Decision Making Under Uncertainties* (PDMU-2008): Abstracts of the International Conference (Kyiv-Rivne, Ukraine, May 12-17). Рівне, 2008. P. 187–189.
8. Прищепа О. В. Про багатоканальну систему з обмеженнями на число повторів. *Problems of Decision Making Under Uncertainties* (PDMU-2009): Abstracts of the International Conference (Skhidnytsia, Ukraine, April 27-30). Київ, 2009. С. 157.
9. Prischepa O. Retrial Queues with Finite Number of Repeated Attempts. *XXXVIII Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki*: abstracts of the International Conference (Zakopane – Kościelisko, Poland, September 7-15, 2009). Warszawa, 2009. P. 62.
10. Pryshchepa O. Hysteresis Strategies for Retrial Queues with Limited Number of Retrials. *Problems of Decision Making Under Uncertainties* (PDMU-2011): abstracts of the XVIII International Conference (Yalta, Ukraine, September 19-23). Київ, 2011. P. 27–29.
11. Прищепа О. В. Гістерезисне керування багатоканальною системою з обмеженим числом повторень. *Problems of Decision Making Under Uncertainties* (PDMU-2012): abstracts of the XIX International Conference (Mukachevo, Ukraine, April 23-27). Київ, 2012. P. 187–189.
12. Pryshchepa O. Retrial Queues with Limited Number of Retrials. *Problems of decision making under uncertainties* (PDMU-2012): abstracts of the XX International Conference (Brno, Czech Republic, September 17-21). Київ, 2012. P. 105.
13. Прищепа О. В. Порогове керування системою з обмеженнями на число спроб почати обслуговування. *Problems of Decision Making Under Uncertainties* (PDMU-2014): abstracts of the XXIII International Conference (Mukachevo, Ukraine, May 12-16). Київ, 2014. P. 151–153.
14. Pryshchepa O. The Threshold Control Policy for Retrial Queues with Two Retrial Attempts. *Problems of Decision Making Under Uncertainties* (PDMU-2014): abstracts of the XXIV International Conference (Cesky Rudolec, Czech Republic, Septemder 1-5). Київ, 2014. P. 81.
15. Прищепа О. В. Оптимізація систем з обмеженнями на число спроб почати обслуговування. *XV Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука*: матеріали конф. Т. 3. Теорія ймовірностей та математична статистика (Київ, 15-17 травня). Київ: НТУУ «КПІ», 2014. С. 103.
16. Прищепа О. В. Про одну систему з обмеженнями на число спроб почати обслуговування. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації:* тези доповідей VI міжнародної наукової конференції (Кам'янець-Подільський, 4-5 квітня). Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. С. 127–128.

17. Прищепа О. В. Про основні підходи до керування системами з обмеженнями на число спроб почати обслуговування. *Problems of Decision Making Under Uncertainties* (PDMU-2015): abstracts of the XXVI International Conference (Odessa, Ukraine, August 24-28). Київ, 2015. P. 126–128.
18. Pryshchepa O. V. Optimization of Retrial Queues with Limited Number of Retrials. *Problems of Decision Making Under Uncertainties* (PDMU-2016): abstracts of the XXVII International Conference (Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27). Київ, 2016. P. 136–137.
19. Прищепа О. В. Гістерезисна стратегія для систем з обмеженим числом повторних спроб. *Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання*: матеріали статей Міжнародної науково-практичної конференції (Івано-Франківськ, Україна, 23-28 травня). Івано-Франківськ: Супрун В.П., 2016. С. 177–179.
20. Pryshchepa O. V., Lebedev E. A. On Retrial Queues of the $M/M/c$-type with Limited Number of Retrials. *Problems of Decision Making Under Uncertainties* (PDMU-2016): abstracts of the XXVIII International Conference (Brno, Czech Republic, August 25-30). Київ, 2016. P. 94–95.
21. Прищепа О. В. Про систему типу $M/M/2/N$ з обмеженим числом повторних спроб. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики:* збірник наукових праць XXII Всеукраїнської наукової конференції (Львів, 5-7 жовтня). Львів: ЛНУ, 2016. С. 158–159.
22. Pryshchepa O. V. On Optimization of the $M/M/2/\infty$ Retrial Queues with Limited Number of Retrials. *Problems of Decision Making Under Uncertainties* (PDMU-2017): abstracts of the XXIX International Conference (Mukachevo, Ukraine, May 10-13). Київ, 2017. P. 100–102.

АНОТАЦІЯ

Прищепа О.В. Керовані системи з обмеженим числом повторів. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2017.

Дисертацію присвячено перспективному напрямку теорії стохастичних систем, що пов'язаний з дослідженням і розробкою методів знаходження стаціонарних ймовірностей для систем з обмеженим числом повторних спроб та розв'язанням проблеми оптимального керування інтенсивністю вхідного потоку.

Розглянуто системи з обмеженим числом повторних спроб, в яких інтенсивність вхідного потоку залежить від кількості джерел повторних викликів. Досліджено умови існування стаціонарного режиму та розроблені алгоритми обчислення стаціонарних ймовірностей. Складність у виборі методу дослідження суттєво залежить від числа обслуговуючих приладів, повторних спроб та стратегії керування.

Використовуючи апроксимацію вихідних систем системами з обмеженим числом джерел повторних викликів, знайдено явні векторно-матричні формули для стаціонарних ймовірностей систем з однією спробою повтору в класі порогових та

гістерезисних стратегій керування інтенсивністю вхідного потоку.

Для загального випадку такої системи стаціонарні ймовірності обчислюються за допомогою рекурентних алгоритмів, що є наслідком теорії процесів квазі народження та загибелі. Сформульовано та розв'язано багатокритеріальні задачі оптимізації систем при пороговій та гістерезисній стратегіях керування.

Ключові слова: система з повторними викликами, керована система з повторними викликами, стаціонарний розподіл, ланцюг Маркова, процес квазі народження та загибелі, порогова стратегія керування, гістерезисна стратегія керування, задача багатокритеріальної оптимізації.

АННОТАЦИЯ

Прищепа О.В. Управляемые системы с ограниченным числом повторов. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.04 – системный анализ и теория оптимальных решений. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко Министерства образования и науки Украины, Киев, 2017.

Диссертация посвящена перспективному направлению теории стохастических систем, связанному с исследованием и разработкой методов нахождения стационарных вероятностей для систем з ограниченным числом повторных попыток и решением проблемы оптимального управления интенсивностью входного потока.

Рассмотрены системы с ограниченным числом повторных попыток, в которых интенсивность входного потока зависит от количества источников повторных вызовов. Исследованы условия существования стационарного режима и разработаны алгоритмы вычисления стационарных вероятностей. Сложность задачи выбора метода исследования существенно зависит от числа обслуживающих приборов, повторных попыток и стратегии управления.

Система с одной попыткой повтора моделируется двумерной цепью Маркова с непрерывным временем. Для нахождения стационарного распределения используется аппроксимация исходной системы системой с ограниченным числом источников повторных вызовов. Такая система моделируется цепью Маркова с конечным числом состояний. В результате получены явные представления стационарных вероятностей в векторно-матричном виде. Для двухканальных систем получены результаты с использованием цепных дробей. Ввиду того, что цепи Маркова исходной и урезанной системы есть процесами миграции, полученные стационарные вероятности аппроксимируют стационарные вероятности исходной системы. Для одноканальных систем с одной повторной попыткой получены явные формулы без аппроксимации.

В работе рассматривается пороговая стратегия управления интенсивностью входного потока. Сформулирована и решена многокритериальная задача для оптимального функционирования системы. Функционалы качества оптимизационной задачи выписаны через стационарные вероятности.

Также рассматривается гистерезисная стратегия управления, которая позволяет в рамках определенного диапазона изменения очереди не менять интенсивность

входного потока. При данной стратегии управления процесс обслуживания моделируется трехмерной цепью Маркова. Для нахождения стационарного распределения используется такой же подход, как и для пороговых стратегий управления. Стационарные вероятности представляются в явном векторно-матричном виде. Для получения оптимальной стратегии управления поставлена и решена многокритериальная оптимизационная задача. Функционалы качества выписаны через стационарные вероятности. Для обоих стратегий управления приведены численные примеры для конкретных систем.

Для общего случая системы с ограниченным числом повторных попыток стационарные вероятности вычисляются с помощью рекуррентного алгоритма. При построении алгоритма использованы результаты для процессов квази рождения и гибели. В качестве основной стратегии управления интенсивностью входного потока используется пороговая стратегия управления. В классе этих стратегий поставлена и решена оптимизационная задача.

Ключевые слова: система с повторными вызовами, управляемая система с повторными вызовами, стационарное распределение, цепь Маркова, процесс квази рождения и гибели, пороговая стратегия управления, гистерезисная стратегия управления, задача многокритериальной оптимизации.

ANNOTATION

Pryshchepa O.V. Controlled queues with the limited number of retrials. – Manuscript.

Thesis for a degree of candidate of physical and mathematical sciences, speciality 01.05.04 – systems analysis and theory of optimal decisions. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis deals with a perspective direction of the theory of stochastic systems which is related with the research and development of methods to find the stationary probabilities for the systems with the limited number of repeated attempts and to solve the problem of optimal control over the rate of the input flow.

We have considered the systems with the limited number of retrials where the rate of the input flow depends on a number of sources of repeated calls. We have explored the conditions of the existence of stationary regime and have developed calculation algorithms for the stationary probabilities. The difficulty in choosing a research method essentially depends on a number of servers, repeated attempts and control strategy.

Using the approximation of the initial systems by the ones with limited number of sources of repeated calls we have discovered the explicit vector-matrix formulas for stationary probabilities of systems with a single retrial attempt in the class of threshold and hysteresis strategies for the control over the rate of the input flow.

In a general case of this system stationary probabilities are calculated by recurrent algorithms which are the implication of the theory of quasi-birth-and-death processes. We have formulated and solved multi-criterion optimization problems of systems with threshold and hysteresis control strategies.

Keywords: retrial queue, controlled retrial queue, stationary distribution, Markov chain, quasi-birth-and-death process, threshold control strategy, hysteresis control strategy, multi-criterion optimization problem.

Підписано до друку 21.11.2017 р. Формат $60 \times 90^{1}/_{16}$.
Папір друкарський № 1. Гарнітура Times.
Друк різографічний. Ум.-друк. арк. 0,9.
Тираж 100 прим. Зам. № 5327.

Видавець і виготовлювач
Редакційно-видавничий відділ Національного університету водного господарства та природокористування,
33028, м. Рівне, вул. Соборна, 11.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції РВ № 31 від 26.04.2005 р.