МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ЧАБАК ЛЮБОВ МИХАЙЛІВНА

УДК 517.988 : 519.85

ПРОЕКТИВНІ АЛГОРИТМИ ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЗАДАЧ РІВНОВАЖНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі вищої та прикладної математики факультету управління і технологій Державного університету інфраструктури та технологій Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор,
Семенов Володимир Вікторович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
професор кафедри обчислювальної математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор,
Шахно Степан Михайлович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
завідувач кафедри теорії оптимальних процесів факультету прикладної математики та інформатики,

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник,
Стецюк Петро Іванович,
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України,
завідувач відділу методів негладкої оптимізації.

Захист відбудеться «8» жовтня 2018 р. о 14 годині 15 хвилин на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.35 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: м. Київ, просп. Академіка Глушкова, 4д, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, ауд. 01.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці імені М.Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58, зал №12.

Автореферат розісланий « 6 » вересня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.001.35 П. М. Зінько

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Із розвитком обчислювальної техніки виник новий напрям наукових досліджень — комп'ютерне математичне моделювання, що передбачає побудову моделей досліджуваного об'єкта та проведення серій обчислювальних експерементів. Більшість задач занадто складні для отримання точних розв'язків, тому актуальною є розробка наближених методів. Значний внесок у розвиток ітераційних методів розв'язання операторних рівнянь та оптимізаційних задач зробили вітчизняні вчені М. Я. Бартіш, Ю. М. Данилін, Ю. М. Єрмольєв, Б. М. Пшеничний, П. І. Стецюк, С. М. Шахно, Н. З. Шор та ін.

Дана дисертація пов'язана з моделями вигляду варіаційних нерівностей та задач рівноважного програмування.

Варіаційні нерівності з монотонними операторами є максимально загальним класом задач з опуклою структурою. У цьому вигляді можна сформулювати задачі опуклого програмування, задачі пошуку сідлових точок опукло-угнутих функцій та різні актуальні задачі пошуку рівноваги (рівновага Неша в некооперативних іграх; питання цінової рівноваги; транспортні рівноваги, що відповідають поведінковим принципам Вардропа). За останні 50 років теорія варіаційних нерівностей сформувалася в потужний інструмент прикладної математики, що дозволяє з єдиних позицій вивчати багато проблем. Розробкою методів дослідження варіаційних нерівностей та методів для їх розв'язання займалось багато відомих вчених (А. С. Антіпін, А. Б. Бакушинський, Є. Г. Гольштейн, Ю. М. Данилін, І. В. Коннов, Г. М. Корпелевич, А. С. Немировський, Ю. Є. Нестеров, Є. О. Нурмінський, Л. Д. Попов, Б. М. Пшеничний, H. Brezis, F. Browder, R. E. Bruck, S. Dafermos, J. L. Lions, A. Nagurney, P. T. Harker, J.-S. Pang, G. B. Passty, R. T. Rockafellar, M. V. Solodov, W. Takahashi, P. Tseng, I. Yamada та ін.). Найбільш популярними методами розв'язання варіаційних нерівностей є екстраградієнтний метод, запропонований Г. М. Корпелевич в 1970-х роках, та його модифікації. Останнім часом пожвавилася дослідницька активність, пов'язана з підвищенням ефективності та універсальності екстраградієнтних методів (Ю. В. Маліцький, М. В. Меленьчук, А. С. Немировський, Ю. Є. Нестеров, В. В. Семенов, Y. Censor, A. Gibali, A. Iusem, S. Reich, M. V. Solodov, B. Svaiter та ін.).

Задачі рівноважного програмування (задачі про рівновагу, нерівності Кі Фаня) є ще одним популярним розділом сучасного прикладного нелінійного аналізу. Формулювання задачі про рівновагу, яке вважають класичним, було наведено ще в роботах Х. Нікайдо та К. Ісоди, виконаних в 1950-х роках. Пріорітетні результати, повязані з ітераційними методами рівноважного програмування, належать А. С. Антіпіну. Важливі результати отримані І. В. Конновим, P. L. Combettes, S. D. Flam, G. Mastroeni, A. Moudafi, J. J. Strodiot, W. Takahashi та ін. В «рівноважній алгоритміці» велике значення мають методи апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів, які дозволяють регуляризовувати існуючі методи або будувати нові. Але питання про ефективні методи розв'язання рівноважних задач великої розмірності досі актуальне. Наприклад, останнім часом збільшився інтерес до розробки алгоритмів для децентралізованих розподілених обчислювальних систем.

Дисертація спрямована на розширення арсеналу методів розв'язання варіаційних нерівностей та задач рівноважного програмування.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у Державному університеті інфраструктури та технологій на кафедрі вищої та прикладної математики факультету управління і технологій. Дослідження проводились у рамках плану наукових досліджень кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка в межах науково-дослідної теми «Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології», №ДР 0116U004777 (науковий керівник — чл.-кор. НАН України С. І. Ляшко).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертації є розробка з теоретичним обгрунтуванням нових ефективних методів для розв'язання варіаційних нерівностей та задач рівноважного програмування. Досягнення мети пов'язано з розв'язком таких конкретних задач:

— розробка модифікацій субградієнтного екстраградієнтного алгоритму, що не вимагає ліпшицевості операторів;
— розробка нових варіантів регуляризації слабко збіжних алгоритмів розв'язання задач про рівновагу в гільбертовому просторі;
— розробка нових алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей на множині нерухомих точок не більш ніж зліченної родини квазінерозтягуючих (фейєрівських) операторів;
— розробка та теоретичне обгрунтування модифікації двоетапного проксимального алгоритму з використанням відстані Брегмана;
— розробка та теоретичне обгрунтування декомпозиційних алгоритмів для варіаційних нерівностей з максимальними монотонними операторами.

Об'єкт дослідження. Варіаційні нерівності з монотонними операторами, задачі про рівновагу та проективні алгоритми їх наближеного розв'язання.

Предмет дослідження. Збіжність ітераційних проективних алгоритмів для монотонних варіаційних нерівностей та задач про рівновагу.

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи функціонального аналізу, опуклого аналізу, теорія варіаційних нерівностей, схеми дослідження збіжності ітераційних методів оптимізації.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, що виносяться на захист, стосуються розробки нових ітераційних алгоритмів розв'язання задач нелінійного аналізу. Зокрема, *вперше*:

— побудовано модифікацію субградієнтного екстраградієнтного алгоритму з динамічним регулюванням величини кроку для розв'язання варіаційних нерівностей з монотонними неліпшицевими операторами і доведено його збіжність;
— побудовано модифікації субградієнтного екстраградієнтного алгоритму для розв'язання варіаційних нерівностей та операторних рівнянь з монотонними

неліпшицевими операторами та з апріорною інформацією про розв'язки у вигляді включення в множину нерухомих точок заданого оператора;
— для розв'язання варіаційних нерівностей з багатозначними максимальними монотонними операторами запропоновано алгоритм розщеплення та доведено теорему про його слабку ергодичну збіжність;

удосконалено:
— за допомогою схеми Takahashi–Takeuchi–Kubota побудовано алгоритм розв'язання варіаційних нерівностей із сильно монотонними операторами на множині нерухомих точок квазінерозтягуючих операторів;
— за допомогою модифікованої схеми Takahashi–Takeuchi–Kubota побудовано варіанти регуляризації слабко збіжних алгоритмів розв'язання задач про рівновагу та варіаційних нерівностей в гільбертовому просторі;

набуло подальшого розвитку:
— побудовано та теоретично обгрунтувано модифікацію двоетапного проксимального алгоритму з використанням відстані Брегмана.

Практичне значення одержаних результатів. Проведені дослідження лежать в руслі сучасних досліджень варіаційних нерівностей та задач рівноважного програмування, інтерес до яких достатньо високий. Результати дисертації призначені для використання при створенні спеціалізованого програмного забезпечення для моделювання в дослідженні операцій, математичній економіці та математичній фізиці. Також розроблені алгоритми можуть бути використані для розв'язання задач машинного навчання, обробки зображень тощо. Окремі результати, одержані в роботі, було впроваджено у навчальний процес кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка при викладанні дисциплін «Метрична теорія нерухомих точок» та «Додаткові розділи функціонального аналізу». Декілька алгоритмів було використано при виконанні науково-дослідної теми «Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології» (№ДР 0116U004777) кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Особистий внесок здобувача. Дисертація є самостійною науковою працею, в якій висвітлені власні ідеї та розробки автора, що дозволили розв'язати поставлені завдання. Теоретичні положення та висновки, сформульовані в роботі, одержані автором самостійно та відображені в опублікованих працях. Робота [1] виконана здобувачем без співавторів. У роботах, опублікованих у співавторстві, здобувачу належить: в [2] — леми 4–7 та теорема 1 про ергодичну збіжність; в [3] — схема регуляризації методів екстраградієнтного типу та теорема 1; в [4] — леми 1, 2; в [5] — алгоритм розв'язання варіаційних нерівностей на множині нерухомих точок не більш ніж зліченної родини квазінерозтягуючих операторів та теореми 1, 2; в [6] — формулювання алгоритмів та теореми 1–3; в [7] — формулювання алгоритмів, доведення лем 5–7 та теорем 1, 2; в [8] — розробка алгоритму, доведення леми 4 та теореми 1. Науковому керівнику В. В. Семенову належать постановки задач, загальне керівництво та участь в обговоренні результатів.

Апробація результатів дисертації. Матеріали дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на науковому семінарі кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (2018), науковому семінарі кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (2017), науковому семінарі кафедри вищої та прикладної математики факультету управління і технологій Державного університету інфраструктури та технологій (2017), науковому семінарі кафедри прикладної математики факультету управління і технологій Київської державної академії водного транспорту ім. гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного (2016), а також на міжнародних наукових конференціях:

— Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича (Київ, 23–24 квітня 2014);
— XXIII International Conference «Problems of decision making under uncertainties» (PDMU–2014) (Мукачево, 12–16 травня 2014);
— VII Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» імені академіка І. І. Ляшка (Київ, 9–10 жовтня 2014);
— Міжнародна конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (Рівне, 19–22 лютого 2015);
— XXV International Conference «Problems of decision making under uncertainties» (PDMU–2015) (Східниця, 11–15 травня 2015);
— VIII Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» імені академіка І. І. Ляшка (Київ, 8–9 жовтня 2015).
— V Международная конференция «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии» (Кишинэу, Молдова, 22–25 марта 2016).

Публікації. Основні результати викладено у 8 статтях [1–8], опублікованих у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, та додатково відображено в матеріалах конференцій [9–15]. Статті [6–7] опубліковані у виданнях, що входять до міжнародної наукометричної бази даних Scopus.

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел (148 найменувань на 15 сторінках) та трьох додатків (на 6 сторінках). Загальний обсяг дисертації становить 150 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовується актуальність теми дисертації, формулюється мета та задачі дослідження, висвітлюється наукова новизна та практична цінність одержаних результатів, описується особистий внесок здобувача, наводиться інформація про апробацію результатів та публікації.

Перший розділ містить огляд літератури за темою дисертації. Після нарису історії варіаційних нерівностей та задач рівноважного програмування (**підрозділ 1.1**) приділено увагу розвитку проективних алгоритмів для монотонних варіаційних нерівностей (**підрозділ 1.2**). Зокрема, розглянуто субградієнтний екстраградієнтний алгоритм, для якого в дисертаційній роботі запропоновано модифікацію, яка не вимагає знання сталої Ліпшиця оператора A. **Підрозділ 1.3** присвячено теорії нерухомих точок та розвитку алгоритмів їхнього пошуку. У **підрозділі 1.4** розглянуто основні алгоритми для задач рівноважного програмування. Зокрема, ітераційний двоетапний проксимальний метод, для якого в даній дисертації запропоновано модифікацію з використанням відстані Брегмана. Також акцентовано увагу на деяких проблемних питаннях, вирішенню яких присвячено дисертацію.

У **другому розділі** розглядаються різні варіанти модифікованого екстраградієнтного методу з динамічним регулюванням величини кроку для розв'язання варіаційних нерівностей з монотонними операторами, які діють у гільбертовому просторі. У **підрозділі 2.1** наведено необхідний мінімум відомостей стосовно варіаційних нерівностей та факти, що відіграють важливу роль у доведеннях основних результатів розділу. Далі у **підрозділі 2.2** пропонуємо модифікацію субградієнтного екстраградієнтного алгоритму з динамічним регулюванням величини кроку для варіаційних нерівностей з монотонними неліпшицевими операторами і доводимо його збіжність.

Нехай H — дійсний гільбертовий простір із заданим скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$, що породжена цим скалярним добутком, C — непорожня опукла і замкнена підмножина простору H та $A : H \to H$ – деякий оператор.

Означення 1. Варіаційною нерівністю називаємо таку задачу:

$$\text{знайти } x \in C : \ (Ax, y - x) \geqslant 0 \quad \forall y \in C. \tag{1}$$

Множину розв'язків варіаційної нерівності (1) позначимо як $VI\,(A, C)$.

Означення 2. Оператор $A : H \to H$ називаємо монотонним, якщо

$$(Ax - Ay, x - y) \geqslant 0 \quad \forall x,\ y \in H.$$

Скрізь у **другому розділі** вважається, що виконуються такі умови:

- $VI\,(A, C) \neq \varnothing$;
- оператор $A : H \to H$ — монотонний, рівномірно неперервний на обмежених множинах.

Нехай P_C — оператор проектування на замкнену опуклу підмножину $C \subseteq H$. Популярний екстраградієнтний алгоритм Корпелевич для розв'язання варіаційної нерівності (1) з ліпшицевим оператором має вигляд:

$$\begin{cases} y_n = P_C\left(x_n - \lambda A x_n\right), \\ x_{n+1} = P_C\left(x_n - \lambda A y_n\right), \end{cases}$$

де $x_0 \in H$, $\lambda \in (0, 1/L)$ — стала Ліпшиця оператора A.

В 2011 р. для варіаційних нерівностей та задач про рівновагу була запропонована модифікація алгоритму Корпелевич з одним метричним проектуванням на допустиму множину — так званий, субградієнтний екстраградієнтний алгоритм, що має вигляд:

$$\begin{cases} y_n = P_C\left(x_n - \lambda A x_n\right), \\ T_n = \left\{z \in H:\ \left(x_n - \lambda A x_n - y_n, z - y_n\right) \leqslant 0\right\}, \\ x_{n+1} = P_{T_n}\left(x_n - \lambda A y_n\right), \end{cases}$$

де $\lambda \in (0, 1/L)$ — стала Ліпшиця оператора A.

Очевидним недоліком субградієнтного екстраградієнтного алгоритму є припущення про те, що стала Ліпшиця оператора A відома або допускає просту оцінку. Крім того, у багатьох задачах оператори можуть не задовольняти умові Ліпшиця. Зауважимо, що в більшості робіт, присвячених алгоритмам розв'язання варіаційних нерівностей, розглядаються саме ліпшицеві оператори.

Для розв'язання варіаційної нерівності (1) пропонується такий алгоритм.

Алгоритм 1. Задаємо параметри $\sigma > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$ і $x_0 \in H$.
Ітераційний крок. Для $x_n \in H$ обчислюємо

$$y_n = P_C\left(x_n - \lambda_n A x_n\right),$$

де λ_n отримуємо із умови

$$\begin{cases} j\,(n) = \min\{j \geqslant 0:\ \ \left\|A P_C\left(x_n - \sigma\tau^j A x_n\right) - A x_n\right\| \leqslant \\ \qquad\qquad \leqslant \frac{\theta}{\sigma\tau^j} \left\|P_C\left(x_n - \sigma\tau^j A x_n\right) - x_n\right\|\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases} \tag{2}$$

Якщо $y_n = x_n$, то закінчуємо, в противному випадку обчислюємо

$$x_{n+1} = P_{T_n}\left(x_n - \lambda_n A y_n\right),$$

де

$$T_n = \left\{z \in H:\ \left(x_n - \lambda_n A x_n - y_n, z - y_n\right) \leqslant 0\right\}.$$

Зрозуміло, що якщо $y_n = x_n$, то точка x_n належить множині C і є розв'язком варіаційної нерівності.

Процедура (2) завжди закінчується за скінченну кількість кроків. Має місце

Лема 1. *Правило* (2) *вибору параметра* λ_n *коректне, тобто* $j\,(n) < +\infty$.

Має місце

Теорема 1. *Послідовності* (x_n) *і* (y_n)*, породженні алгоритмом 1, слабко збігаються до деякої точки* $z \in VI(A, C)$.

Підрозділ 2.3 присвячений варіанту алгоритму для пошуку розв'язку варіаційної нерівності (1) з апріорною інформацією, що описана у вигляді включення до множини нерухомих точок заданого квазінерозтягуючого оператора.

Означення 3. Оператор $T : H \to H$ називають квазінерозтягуючим (фейерівським), якщо $F(T) = \{x \in H : \ Tx = x\} \neq \varnothing$ та

$$\|Tx - y\| \leqslant \|x - y\| \quad \forall x \in H \ \forall y \in F(T) .$$

Відомо, що множина нерухомих точок $F(T)$ квазінерозтягуючого оператора замкнена та опукла.

Означення 4. Оператор $S : C \to H$ називають демізамкненим в $y \in H$ якщо для послідовності точок $x_n \in C$ із $x_n \rightharpoonup x$ і $Sx_n \to y$ випливає $Sx = y$.

Нехай $S : H \to H$ — квазінерозтягуючий оператор з множиною нерухомих точок $F(S) = \{x \in H : \ Sx = x\}$. Припустимо, що оператор $I - S$ — демізамкнений в нулі. Крім того, нехай має місце:

- $VI(A, C) \cap F(S) \neq \varnothing$.

Зауваження 1. Нехай $g : H \to \mathbb{R}$ — опукла диференційовна функція. Якщо множина

$$D = \{x \in H : \ \ g(x) \leqslant 0\}$$

непорожня, то її можна трактувати як множину нерухомих точок квазінерозтягуючого оператора

$$Sx = \begin{cases} x - \frac{g(x)}{\|\nabla g(x)\|^2} \nabla g(x) , & \text{якщо } x \notin D, \\ x, & \text{якщо } x \in D, \end{cases}$$

де $\nabla g(x) \in H$ — похідна g в точці $x \in H$. Для демізамкненості в нулі оператора $I - S$ достатньо обмеженості g на будь-якій обмеженій множині.

Для пошуку елементів $VI(A, C) \cap F(S)$ розглянемо наступний алгоритм.

Алгоритм 2. Задаємо числові параметри $\sigma > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $\theta \in (0, 1)$, елемент $x_0 \in H$ і послідовність $(\delta_n) \subseteq [a, b] \subseteq (0, 1)$.
Ітераційний крок. Для $x_n \in H$ обчислюємо

$$y_n = P_C (x_n - \lambda_n A x_n) ,$$

де λ_n отримуємо із умови

$$\begin{cases} j(n) = \min\{j \geqslant 0 : \ \|AP_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - Ax_n\| \leqslant \\ \qquad\qquad\qquad \leqslant \frac{\theta}{\sigma\tau^j} \|P_C(x_n - \sigma\tau^j Ax_n) - x_n\|\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Обчислюємо

$$x_{n+1} = \delta_n x_n + (1 - \delta_n) SP_{T_n} (x_n - \lambda_n A y_n) ,$$

де

$$T_n = \{z \in H : \ (x_n - \lambda_n A x_n - y_n, z - y_n) \leqslant 0\} .$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Послідовності (x_n) і (y_n), що породжені алгоритмом 2, слабко збігаються до деякої точки $z \in VI(A, C) \cap F(S)$.*

Далі алгоритм 2 застосовувався для побудови ітераційної схеми розв'язання операторного рівняння з апріорною інформацією:

$$Ax = f, \quad x \in F(T).$$

У **підрозділі 2.4** запропоновано сильно збіжний модифікований екстраградієнтний метод з динамічним регулюванням величини кроку для розв'язання варіаційних нерівностей з монотонними операторами, що діють у гільбертовому просторі. Відносно операторів ми, як і раніше, не припускаємо їх ліпшицевість. Також розглянуті варіанти методу для варіаційних нерівностей і операторних рівнянь з апріорною інформацією про розв'язок, яка задана у вигляді множини нерухомих точок квазінерозтягуючого оператора. Для регуляризації модифікованого екстраградієнтного алгоритму використовувалась проста схема Гальперна, яка по суті співпадає зі схемою ітеративної регуляризації. Також розглянута регуляризація за допомогою проекційної CQ-схеми та схеми Takahashi–Takeuchi–Kubota.

Наведемо для прикладу лише один алгоритми для розв'язання (1), отриманий за допомогою CQ-схеми.

Алгоритм 3. Задаємо параметри $\sigma > 0$, $\tau \in (0,1)$, $\theta \in (0,1)$ та $x_0 \in H$.
Ітераційний крок. Для $x_n \in H$ обчислюємо

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n),$$

де λ_n отримуємо із умови

$$\begin{cases} j(n) = \min\{j \geqslant 0: \ \|AP_C(x_n - \sigma\tau^j A x_n) - Ax_n\| \leqslant \\ \qquad\qquad\qquad \leqslant \frac{\theta}{\sigma\tau^j}\|P_C(x_n - \sigma\tau^j A x_n) - x_n\|\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Обчислюємо

$$z_n = P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n),$$

де

$$T_n = \{z \in H: \ (x_n - \lambda_n A x_n - y_n, z - y_n) \leqslant 0\}.$$

Обчислюємо

$$x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_0,$$

де

$$\begin{aligned} C_n &= \{z \in H: \ \|z_n - z\| \leqslant \|x_n - z\|\}, \\ Q_n &= \{z \in H: \ (x_n - z, x_0 - x_n) \geqslant 0\}. \end{aligned}$$

Має місце

Теорема 3. *Нехай множина $C \subseteq H$ — опукла і замкнена, оператор $A: H \to H$ — монотонний, рівномірно неперервний на обмежених множинах. Припустимо, що $VI(A, C) \neq \varnothing$. Тоді послідовності (x_n), (y_n) і (z_n), породжені алгоритмом 3, сильно збігаються до точки $\bar{z} = P_{VI(A,C)} x_0$.*

У **третьому розділі** розглядаються задачі про рівновагу та варіаційні нерівності з ліпшицевими монотонними операторами. Для цих задач запропоновано та обгрунтовано декілька нових алгоритмів. Основною метою була побудова сильно збіжних алгоритмів та алгоритмів, що дозволяють ефективно врахувати геометрію допустимих множин задач.

У **підрозділі 3.1** вивчено алгоритм розв'язання задачі рівноважного програмування в гільбертовому просторі, що базується на новому варіанті регуляризації відомої «forward-backward» схеми. Варіант регуляризації, в свою чергу, є привабливою в обчислювальному плані модифікацією гібридного методу Takahashi–Takeuchi–Kubota.

Для опуклої замкненої множини $C \subseteq H$, оператора A, що діє в гільбертовому просторі H, та біфункції $\Phi : C \times C \to \mathbb{R}$ розглянемо задачу рівноважного програмування у такій постановці:

$$\text{знайти} \;\; x \in C: \;\; (Ax, y - x) + \Phi(x, y) \geqslant 0 \;\; \forall\, y \in C. \tag{3}$$

Позначимо через S множину розв'язків задачі (3).

Зробимо такі припущення щодо біфункції $\Phi : C \times C \to \mathbb{R}$:

A1) $\Phi(x, x) = 0$ для всіх $x \in C$;

A2) $\Phi(x, y) + \Phi(y, x) \leqslant 0$ для всіх $x, y \in C$ (монотонність);

A3) для всіх $x \in C$ функціонал $\Phi(x, \cdot)$ напівнеперервний знизу та опуклий;

A4) $\overline{\lim}_{t \to +0} \Phi(x + t(z - x), y) \leqslant \Phi(x, y)$ для всіх $x, y, z \in C$.

Нагадаємо

Означення 5. Резольвентою біфункції $\Phi : C \times C \to \mathbb{R}$ називають оператор:

$$H \ni x \mapsto J_\Phi x = \{z \in C: \; \Phi(z, y) + (z - x, y - z) \geqslant 0 \;\; \forall y \in C\} \in 2^H .$$

За зроблених припущень резольвента J_Φ є всюди визначеним однозначним та міцно нерозтягуючим оператором, причому множина нерухомих точок $F(J_\Phi)$ дорівнює множині

$$\{x \in C: \; \Phi(x, y) \geqslant 0 \;\; \forall y \in C\}$$

та є опуклою і замкненою

Нехай:

A5) $A : H \to H$ — L-обернено сильно монотонний оператор, тобто для числа $L > 0$ виконується нерівність

$$(Ax - Ay, x - y) \geqslant L \left\| Ax - Ay \right\|^2 \quad \forall x, y \in H.$$

Для довільної пари елементів $x, y \in H$ визначимо замкнений півпростір

$$H(x, y) = \{z \in H: \; \|z - y\| \leqslant \|z - x\|\} .$$

Зафіксуємо стискаюче відображення $T : H \to H$. Для розв'язання задачі (3) розглянемо

Алгоритм 4. Для $x_1 \in H$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in H$ за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} z_n = J_{\lambda_n \Phi}\left(x_n - \lambda_n A x_n\right), \\ x_{n+1} = \alpha_n T x_n + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{k-1} - \alpha_k) P_{H(x_k, z_k)} x_n, \end{cases}$$

де $\alpha_0 = 1$, (α_n) — спадна послідовність чисел з $(0,1)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\alpha_n \to 0$, $\lambda_n \in [\lambda^*, \lambda^{**}] \subseteq (0, 2L)$.

Має місце

Теорема 4. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, виконуються умови A1)–A5) та $S \neq \varnothing$. Тоді згенерована алгоритмом 4 послідовність (x_n) сильно збігається до розв'язку $z \in H$ задачі рівноважного програмування (3) такого, що $z = P_S T z$.*

У **підрозділі 3.2** наведена вище схема застосовується для регуляризації методів екстраградієнтного типу розв'язання варіаційних нерівностей.

Розглядається задача:

$$\text{знайти } \ x \in VI(A, C), \tag{4}$$

де $C \subseteq H$ — замкнена опукла множина, $A : H \to H$ — монотонний та ліпшицевий (зі сталою $L > 0$) на множині C оператор.

Для апроксимації нормального розв'язку (розв'язку з найменшою нормою) варіаційної нерівності (4) пропонується

Алгоритм 5. Будуємо послідовність (x_n) за схемою

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ z_n = P_C(x_n - \lambda_n A y_n), \\ x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{k-1} - \alpha_k) P_{H(x_k, z_k)} x_n, \end{cases}$$

де $x_1 \in H$, $\alpha_0 = 1$, (α_n) — спадна послідовність чисел з $(0,1)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\alpha_n \to 0$, $\lambda_n \in [\lambda^*, \lambda^{**}] \subseteq (0, 1/L)$.

Доведена

Теорема 5. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $A : H \to H$ — монотонний та ліпшицевий на множині C оператор, $VI(A, C) \neq \varnothing$. Тоді згенеровані алгоритмом 5 послідовності (x_n), (y_n) і (z_n) сильно збігаються до нормального розв'язку задачі (4).*

Далі розглянуто ще декілька схем, подібних до алгоритму 5.

Підрозділ 3.3 присвячено дослідженню нового ітераційного алгоритму для задач рівноважного програмування в скінченновимірному просторі. Алгоритм є розвиненням (з використанням відстані Брегмана замість евклідової) двоетапного проксимального алгоритму. Відстань Брегмана дозволяє в деяких випадках ефективно врахувати геометрію допустимої множини задачі.

Для опуклої замкненої множини $C \subseteq \mathbb{R}^d$ та біфункції $F : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ розглядається задача рівноважного програмування:

$$\text{знайти} \ \ x \in C : \ F(x, y) \geqslant 0 \ \ \forall\, y \in C, \tag{5}$$

де $F(y, y) = 0$ для всіх $y \in C$.

Дуальна (для задачі (5)) задача має вигляд:

$$\text{знайти} \ \ x \in C : \ F(y, x) \leqslant 0 \ \ \forall\, y \in C. \tag{6}$$

Множини розв'язків задач (5) та (6) позначимо S та S^*. Множина S^* опукла та замкнена у випадку, коли функції $F(x, \cdot)$ опуклі та напівнеперервні знизу на C. Множина S взагалі може й не бути опуклою. Але, якщо функції $F(x, \cdot)$ опуклі та напівнеперервні знизу на C, а функції $F(\cdot, y)$ напівнеперервні зверху на C, то множина S опукла та $S^* \subseteq S$. Крім того, якщо біфункція F псевдомонотонна,[1] то $S = S^*$.

В подальшому будемо припускати, що

$$S^* \neq \varnothing.$$

Нехай $\| \cdot \|$ — деяка норма, а $(\cdot, \cdot)$ — стандартний скалярний добуток на $\mathbb{R}^d$. Нехай $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — неперервно диференційовна та сильно опукла (з параметром $\sigma > 0$ відносно норми $\| \cdot \|$) на множині C функція.[2] Відстань Брегмана (породжена функцією g) на множині C задається формулою

$$D(a, b) = g(a) - g(b) - (\nabla g(b), a - b) \quad \forall a, b \in C.$$

При

$$g(x) = \tfrac{1}{2} \|x\|_2^2,$$

де $\| \cdot \|_2$ — евклідова норма, маємо

$$D(x, y) = \tfrac{1}{2} \|x - y\|_2^2.$$

Для стандартного симплекса

$$\Delta_d = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \ x_i \geqslant 0, \ \ \sum_i x_i = 1 \right\}$$

та від'ємної ентропії Больцмана–Шеннона

$$g(x) = \sum_i x_i \ln x_i$$

[1] Біфункцію F називають псевдомонотонною якщо для всіх x, $y \in C$ з нерівності $F(x, y) \geqslant 0$ випливає $F(y, x) \leqslant 0$.

[2] Для функції g має місце нерівність: $g(a) - g(b) \geqslant (\nabla g(b), a - b) + \frac{\sigma}{2} \|a - b\|^2 \quad \forall a, b \in C$.

(вона сильно опукла відносно ℓ_1-норми на Δ_d) одержимо відстань Кульбака–Лейблера на Δ_d:

$$D(x,y) = \sum_i x_i \ln\left(x_i/y_i\right) \quad \forall x,y \in \Delta_d.$$

З цього моменту будемо розглядати тільки біфункції F, що задовольняють умові: для всіх $x \in C$ функція $F(x,\cdot)$ опукла та напівнеперервна знизу на множині C. В даному випадку задачі

$$\lambda F(a,y) + D(y,b) \to \min_{y\in C} \quad (a,b \in C,\ \lambda > 0)$$

завжди мають єдиний розв'язок. Припустимо можливість їх ефективного розв'язання. Наприклад, це можливо у випадку симплекса Δ_d, лінійності F за другим аргументом та відстані Кульбака–Лейблера. Дійсно, розв'язок задачі

$$\lambda \sum_{i=1}^{d} a_i x_i + \sum_{i=1}^{d} x_i \ln\left(x_i/y_i\right) \to \min_{x\in\Delta_d} \quad (a \in \mathbb{R}^d,\ y \in \Delta_d,\ \lambda > 0)$$

має вигляд

$$z_i = \frac{y_i \exp\left(-\lambda a_i\right)}{\sum_{k=1}^{d} y_k \exp\left(-\lambda a_k\right)}, \quad i = 1, ..., d.$$

Для наближенного розв'язання задачі (5) пропонуємо такий

Алгоритм 6. Для x_1, $y_1 \in C$ генеруємо послідовність елементів x_n, $y_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y\in C}\left\{F(y_n,y) + \frac{1}{\lambda} D(y,x_n)\right\}, \\ y_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y\in C}\left\{F(y_n,y) + \frac{1}{\lambda} D(y,x_{n+1})\right\}, \end{cases}$$

де $\lambda > 0$.

На кожному кроці алгоритму 6 слід розв'язати дві опуклі задачі з сильно опуклими функціями. Правило вибору параметра λ вкажемо нижче.

Зауваження 2. Якщо $g(\cdot) = \frac{1}{2}\|\cdot\|_2^2$, то алгоритм 6 приймає вигляд:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \mathtt{prox}_{\lambda\cdot F(y_n,\cdot)} x_n, \\ y_{n+1} = \mathtt{prox}_{\lambda\cdot F(y_n,\cdot)} x_{n+1}, \end{cases}$$

де $\mathtt{prox}_g$ — проксимальний оператор, що відповідає власній опуклій напівнеперервній знизу функції g:

$$x \mapsto \mathtt{prox}_g x = \operatorname{argmin}_{y\in \operatorname{dom} g}\left(g(y) + \tfrac{1}{2}\left\|y - x\right\|_2^2\right) \in \operatorname{dom} g.$$

Це, так званий, двоетапний проксимальний алгоритм. У випадку варіаційної нерівності, тобто при $F(x,y) = (Ax, y - x)$, він приймає вигляд:

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n), \\ y_{n+1} = P_C(x_{n+1} - \lambda A y_n), \end{cases}$$

де P_C — оператор проектування на множину C.

Ясно, що при виконанні для деякого номера $n \in \mathbb{N}$ рівностей

$$x_{n+1} = x_n = y_n \tag{7}$$

має місце включення $y_n \in S$ та умова стаціонарності: $y_k = x_k = y_n$ для всіх $k \geqslant n$. Далі вважатимемо, що для всіх номерів $n \in \mathbb{N}$ умова (7) не виконується.

Припустимо, що біфункція F, задовольняє умові типу ліпшицевості G. Mastroeni: для всіх x, y, $z \in C$ має місце

$$F(x,y) \leqslant F(x,z) + F(z,y) + a\,\|x-z\|^2 + b\,\|z-y\|^2\,,$$

де a, b — додатні константи.

Має місце

Лема 2. *Для породжених алгоритмом 6 послідовностей (x_n), (y_n) та елемента $z \in S^*$ виконується нерівність*

$$D(z,x_{n+1}) \leqslant D(z,x_n) - \left(1-2\lambda b\sigma^{-1}\right) D(x_{n+1},y_n) - \\ - \left(1-4\lambda a\sigma^{-1}\right) D(y_n,x_n) + 4\lambda a\sigma^{-1} D(x_n,y_{n-1}).$$

Додатково припустимо, що біфункція $F : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ напівнеперервна знизу на $C \times C$ та для всіх $y \in C$ функція $F(\cdot,y)$ напівнеперервна зверху на C. Зауважимо, що за цих умов $S^* \subseteq S$.

Має місце

Лема 3. *Нехай $\lambda \in \left(0, \frac{\sigma}{2(2a+b)}\right)$. Тоді всі часткові границі послідовності (x_n) належать множині S.*

Результат леми 3 можна уточнити.

Лема 4. *Нехай, додатково, $S = S^*$. Тоді породжені алгоритмом 6 послідовності (x_n), (y_n) збігаються до розв'язку $\bar{z} \in S$ задачі (5).*

Сумуючи викладене сформулюємо основний результат **підрозділу 3.3**.

Теорема 6. *Нехай $C \subseteq \mathbb{R}^d$ — непорожня опукла замкнена множина, для біфункції $F : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ виконані умови:*

1) *$F(x,x) = 0$ для всіх $x \in C$;*
2) *для всіх x, $y \in C$ з $F(x,y) \geqslant 0$ випливає $F(y,x) \leqslant 0$ (псевдомонотонність);*
3) *$F : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ напівнеперервна знизу на $C \times C$;*
4) *для всіх $x \in C$ функція $F(x,\cdot)$ опукла на C;*
5) *для всіх $y \in C$ функція $F(\cdot,y)$ напівнеперервна зверху на C;*
6) *для всіх x, y, $z \in C$ має місце*

$$F(x,y) \leqslant F(x,z) + F(z,y) + a\,\|x-z\|^2 + b\,\|z-y\|^2\,,$$

де a, b — додатні константи (ліпшицевість).

Припустимо, що $S \neq \varnothing$ та $\lambda \in \left(0, \frac{\sigma}{2(2a+b)}\right)$. Тоді породжені алгоритмом 6 послідовності (x_n), (y_n) збігаються до розв'язку $\bar{z} \in S$ задачі (5).

Наведемо одну з конкретних версій алгоритму 6. Розглянемо варіаційну нерівність на стандартному симплексі:

$$\text{знайти } \ x \in \Delta_d : \ \ (Ax, y - x) \geqslant 0 \ \ \forall y \in \Delta_d.$$

Обираючи відстань Кульбака–Лейблера, одержуємо наступну версію алгоритму:

$$x_i^{n+1} = \frac{x_i^n \exp\left(-\lambda \left(Ay_n\right)_i\right)}{\sum_{k=1}^d x_k^n \exp\left(-\lambda \left(Ay_n\right)_k\right)}, \quad y_i^{n+1} = \frac{x_i^{n+1} \exp\left(-\lambda \left(Ay_n\right)_i\right)}{\sum_{k=1}^d x_k^{n+1} \exp\left(-\lambda \left(Ay_n\right)_k\right)}, \ \ i = \overline{1, d},$$

де $(Ay_n)_i \in \mathbb{R}$ — i-та координата вектора $Ay_n \in \mathbb{R}^d$, $\lambda > 0$.

Такого типу схеми цікаві для транспортних застосувань, машинного навчання та теорії ігор, де доводиться працювати з варіаційними нерівностями на прямих добутках масштабованих симплексів.

У **підрозділі 3.4** розглядається варіаційна нерівність на множині нерухомих точок родини фейерівських операторів, що діють у нескінченновимірному гільбертовому просторі. Відштовхуючись від відомого «гібридного методу» Takahashi–Takeuchi–Kubota пошуку нерухомих точок, ми пропонуємо, так звану, схему зовнішніх апроксимацій для розв'язання розглядуваної задачі з сильно монотонним та ліпшицевим оператором. Основний результат — теореми сильної збіжності схеми зовнішніх апроксимацій.

При розв'язанні складних задач дослідження операцій (наприклад, в моделюванні транспортних та телекомунікаційних мереж) та оптимального керування велике значення мають декомпозиційні підходи, що дозволяють зводити розв'язання вихідної задачі до розв'язання послідовності задач більш простої структури. У **четвертому розділі** досліджується алгоритм розщеплення (декомпозиції) для варіаційних нерівностей з багатозначними монотонними операторами, що діють у гільбертовому просторі. Цей метод узагальнює відомий «incremental subgradient method».

Нехай H — дійсний гільбертовий простір з скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ та породженою нормою $\|\cdot\|$. Нагадаємо деякі поняття. Нехай $A : H \to 2^H$ — оператор з графіком $\mathrm{gr}(A) = \{(x, u) \in H^2 : \ y \in Ax\}$.

Означення 6. Оператор $A : H \to 2^H$ називають монотонним, якщо для всіх (x, u), $(y, v) \in \mathrm{gr}(A)$ виконується нерівність $(u - v, x - y) \geqslant 0$.

Означення 7. Оператор $A : H \to 2^H$ називають максимальним монотонним, якщо для довільного монотонного оператора $B : H \to 2^H$ із співвідношення $\mathrm{gr}(A) \subseteq \mathrm{gr}(B)$ випливає $\mathrm{gr}(A) = \mathrm{gr}(B)$.

Нехай:

- $A_i : H \to 2^H$ — монотонний оператор, $i = \overline{1, p}$;
- $A = \sum_{i=1}^p A_i$ — максимальний монотонний оператор;
- $C \subseteq \bigcap_{i=1}^p \mathrm{dom}(A_i)$ — замкнена опукла множина.

Варіаційна нерівність з оператором A на множині C формулюється таким чином:

$$\text{знайти } x \in C : \ \exists u \in Ax \ \ \text{та} \ \ (u, y - x) \geqslant 0 \quad \forall y \in C. \tag{8}$$

Множину розв'язків задачі (8) позначимо $VI(A,C)$. Множина $VI(A,C)$ опукла та замкнена.

Алгоритм розщеплення для (8) має такий вигляд.

Алгоритм 7. Задано послідовність додатніх чисел $(\lambda_n) \in \ell_2 \setminus \ell_1$.

Крок 1. Задаємо $x_1 \in C$; $n := 1$.

Крок 2. Починаючи з $y_{(n,0)} = x_n$ послідовно знаходимо елементи:

$$y_{(n,i)} = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda_n \left(u_{(n,i)}, y - y_{(n,i-1)} \right) + \tfrac{1}{2} \| y - y_{(n,i-1)} \|^2 \right\},$$
$$u_{(n,i)} \in A_i y_{(n,i-1)}, \ \ i = \overline{1,p}.$$

Крок 3. Якщо $y_{(n,i)} = y_{(n,i-1)}$ для всіх $i = \overline{1,p}$, то СТОП та $x_n \in VI(A,C)$. Інакше переходимо на **Крок 4**.

Крок 4. Покладаємо

$$x_{n+1} = y_{(n,p)},$$

$n := n+1$, переходимо на **Крок 2**.

У **підрозділах 4.3, 4.4** доводиться слабка збіжність в H послідовності чезарівських середніх

$$z_n = \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k}.$$

Результати такого типу називають теоремами чезарівської або ергодичної збіжності.

Зробимо відносно операторів A_i наступне припущення:

$$\text{множини } \bigcup_{i=1}^p A_i y_{(n,i-1)} \text{ рівномірно обмежені.}$$

Мають місце

Лема 5. *Для породженої алгоритмом 7 послідовності (x_n) та елемента $y \in C$ виконується нерівність*

$$\|x_{n+1} - y\|^2 \leqslant \|x_n - y\|^2 - 2\lambda_n (v, x_n - y) + \\ + \lambda_n^2 \sum_{i=1}^p \left\| u_{(n,i)} \right\|^2 + 2\lambda_n^2 \sum_{i=2}^p \|v_i\| \sum_{k=1}^i \left\| u_{(n,k)} \right\|,$$

де $v = \sum_{i=1}^p v_i$, $v_i \in A_i y$, $i = \overline{1,p}$.

Лема 6. *Для породженої алгоритмом 7 послідовності (x_n), послідовності середніх (z_n) та елемента $y \in C$ виконується нерівність*

$$\frac{\|x_{m+1} - y\|^2 - \|x_1 - y\|^2}{\sum_{n=1}^m \lambda_n} \leqslant 2 (v, y - z_m) + \\ + \frac{\sum_{n=1}^m \lambda_n^2 \sum_{i=1}^p \left\| u_{(n,i)} \right\|^2}{\sum_{n=1}^m \lambda_n} + \frac{2 \sum_{n=1}^m \lambda_n^2 \sum_{i=2}^p \|v_i\| \sum_{k=1}^i \left\| u_{(n,k)} \right\|}{\sum_{n=1}^m \lambda_n},$$

де $v = \sum_{i=1}^p v_i$, $v_i \in A_i y$, $i = \overline{1,p}$.

Доведено таку теорему слабкої ергодичної збіжності алгоритму 7

Теорема 7. *Справедливі твердження:*

1) *якщо $VI(A, C) \neq \varnothing$, то послідовність середніх за Чезаро (z_n) слабко збігається до деякого елемента $x \in VI(A, C)$;*
2) *якщо $VI(A, C) = \varnothing$, то $\|z_n\| \to +\infty$.*

У **підрозділі 4.4** додаткових умовах сильної монотонності одного з операторів A_i або $\mathrm{int}VI(A, C) \neq \varnothing$ доведено сильну збіжність послідовності (x_n).

У **підрозділі 4.5** розлянуто конкретний варіант алгоритму 7 для опукло-угнутої задачі пошуку сідлової точки.

ВИСНОВКИ

В даній роботі розроблено та теоретично обгрунтовано ефективні алгоритми для розв'язування варіаційних нерівностей та задач рівноважного програмування. Зокрема, отримано такі нові результати:

— побудовано модифікацію субградієнтного екстраградієнтного алгоритму з динамічним регулюванням величини кроку для розв'язування варіаційних нерівностей з монотонними неліпшицевими операторами і доведено його збіжність;

— побудовано модифікації субградієнтного екстраградієнтного алгоритму для розв'язування варіаційних нерівностей та операторних рівнянь з монотонними неліпшицевими операторами та з апріорною інформацією про розв'язки у вигляді включення в множину нерухомих точок квазінерозтягуючого (фейерівського) оператора;

— за допомогою модифікованої схеми Takahashi–Takeuchi–Kubota побудовано варіанти регуляризації слабко збіжних алгоритмів розв'язання задач рівноважного програмування та варіаційних нерівностей в гільбертовому просторі;

— за допомогою схеми Takahashi–Takeuchi–Kubota побудовано алгоритм розв'язання варіаційних нерівностей із сильно монотонними операторами на множині нерухомих точок квазінерозтягуючих (фейерівських) операторів;

— побудовано та теоретично обгрунтувано модифікацію двоетапного проксимального алгоритму з використанням відстані Брегмана замість евклідової;

— для розв'язування варіаційних нерівностей з максимальними монотонними операторами запропоновано алгоритм розщеплення та доведено теорему про його слабку ергодичну збіжність.

Окремі результати були впроваджені у навчальний процес кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. У подальшому одержані результати можуть бути використані для розробки нових алгоритмів розв'язання актуальних задач дослідження операцій, таких як пошук рівноваги Неша в некооперативних іграх.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових фахових виданнях

1. Чабак Л. М. Про один сильно збіжний метод розв'язання задачі рівноважного програмування // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2014. — № 1 (115). — С. 67–75.
2. Ляшко Н. И., Семенов В. В., Чабак Л. М. Алгоритм расщепления для вариационных неравенств с максимальными монотонными операторами // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2014. — № 3 (117). — С. 131–139.
3. Семенов В. В., Чабак Л. М. Новий варіант регуляризації методів екстраградієнтного типу // Доповіді НАН України. — 2014. — № 10. — С. 45–50.
4. Харченко О. А., Царук В. І., Чабак Л. М. Децентралізований алгоритм для монотонних варіаційних нерівностей // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2015. — № 1 (118). — С. 45–56.
5. Ведель Я. И., Дударь В. В., Семенов В. В., Чабак Л. М. Метод внешних аппроксимаций для вариационных неравенств // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2015. — № 3 (120). — С. 77–84.
6. Денисов С. В., Семенов В. В., Чабак Л. М. Сходимость модифицированного экстраградиентного метода для вариационных неравенств с нелипшицевыми операторами // Кибернетика и системный анализ. — 2015. — № 5. — С. 102–110.
7. Верлань Д. А., Семенов В. В., Чабак Л. М. Сильно сходящийся модифицированный экстраградиентный метод для вариационных неравенств с нелипшицевыми операторами // Проблемы управления и информатики. — 2015. — № 4. — С. 37–50.
8. Вартузова М. В., Семенов В. В., Чабак Л. М. Новый алгоритм с расстоянием Брэгмана для решения задачи о равновесии // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2016. – № 3 (123) — С. 9–21.

Тези та матеріали наукових конференцій

9. Чабак Л. М. Сильно збіжний метод розв'язання задачі про рівновагу // Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, 23–24 квітня 2014 р., м. Київ, Україна: Матеріали конференції. — Київ, 2014. — С. 134.
10. Чабак Л. М. Нова регуляризація екстраградієнтного методу Корпелевич // XXIII International Conference «Problems of decision making under uncertainties» (PDMU–2014), May 12–16, 2014, Mukachevo, Ukraine. Abstracts. — P. 178.
11. Чабак Л. М. Варіант регуляризації методів екстраградієнтного типу // VII Міжнародна наукова конференція «Обчислювальна та прикладна математи-

ка» імені академіка І. І. Ляшка, 9–10 жовтня 2014 р., м. Київ, Україна: Матеріали конференції. — Київ, 2014. — С. 110–111.
12. Чабак Л. М. Модифікований екстраградієнтний алгоритм для варіаційних нерівностей // Матеріали Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». — Рівне: РВВ РДГУ, 2015. — С. 171.
13. Семенов В. В., Чабак Л. М. Сильно збіжний модифікований екстраградієнтний алгоритм для варіаційних нерівностей // XXV International Conference «Problems of decision making under uncertainties» (PDMU–2015), May 11–15, 2015, Skhidnytsa, Ukraine. Abstracts. — P. 124.
14. Чабак Л. М. Новый метод для уравнений с монотонными нелипшицевыми операторами // VIII Міжнародна наукова конференція «Обчислювальна та прикладна математика» імені академіка І. І. Ляшка, 8–9 жовтня 2015 р., м. Київ, Україна: Матеріали конференції. — Київ, 2015. — С. 90.
15. Семенов В. В., Чабак Л. М. Сильно сходящийся модифицированный экстраградиентный метод для вариационных неравенств // Материалы 5-й международной конференции «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии», 22–25 марта 2016, Кишинэу, Молдова. Т. 2. — Кишинэу: Evrica, 2016. — С. 310–316.

АНОТАЦІЯ

Чабак Л. М. Проективні алгоритми для варіаційних нерівностей та задач рівноважного програмування. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 — математичне моделювання та обчислювальні методи. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2018.

Дисертація присвячена розробці та теоретичному обгрунтуванню нових алгоритмів для варіаційних нерівностей та задач рівноважного програмування.

В роботі побудовано модифікацію субградієнтного екстраградієнтного алгоритму з динамічним регулюванням величини кроку для варіаційних нерівностей та операторних рівнянь з монотонними неліпшицевими операторами і доведено його збіжність. Також одержано алгоритми подібного типу для задач з апріорною інформацією про розв'язки у вигляді включення в множину нерухомих точок фейєрівського оператора.

За допомогою модифікованої схеми Takahashi–Takeuchi–Kubota побудовано варіанти регуляризації слабко збіжних алгоритмів розв'язання задач рівноважного програмування та варіаційних нерівностей в гільбертовому просторі. Крім того, побудовано новий алгоритм розв'язання варіаційних нерівностей із сильно монотонними операторами на множині нерухомих точок фейєрівських операторів.

Для задач рівноважного програмування побудовано та обгрунтувано модифікацію двоетапного проксимального алгоритму з використанням відстані Брегмана замість евклідової.

Для розв'язання варіаційних нерівностей з максимальними монотонними операторами запропоновано алгоритм розщеплення та доведено теорему про його ергодичну збіжність.

Ключові слова: варіаційна нерівність, задача рівноважного програмування, монотонний оператор, нерухома точка, проективний алгоритм, екстраградієнтний алгоритм, відстань Брегмана, алгоритм розщеплення.

АННОТАЦИЯ

Чабак Л. М. Проекционные алгоритмы для вариационных неравенств и задач равновесного программирования. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 — математическое моделирование и вычислительные методы. — Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко Министерства образования и науки Украины, Киев, 2018.

Диссертация посвящена разработке и теоретическому обоснованию новых алгоритмов для вариационных неравенств и задач равновесного програмирования.

В работе построена модификация субградиентного экстраградиентного алгоритма с динамической регулировкой величины шага для вариационных неравенств и операторных уравнений монотонными нелипшицевыми операторами и доказана его сходимость.Также получены подобные алгоритмы для задач с априорной информацией о решениях в виде включения в множество неподвижных точек фейеровского оператора.

При помощи модифицированной схемы Takahashi–Takeuchi–Kubota построены варианты регуляризации слабо сходящихся алгоритмов решения задач равновесного программирования и вариационных неравенств в гильбертовом пространстве. Кроме того, построен новый алгоритм решения вариационных неравенств с сильно монотонными операторами на множестве неподвижных точек фейеровских операторов.

Для задач равновесного программирования построена и обоснована модификация двухэтапного проксимального алгоритма с использованием расстояния Брэгмана вместо евклидового.

Для решения вариационных неравенств с максимальными монотонными операторами предложен алгоритм расщепления и доказана теорема о его эргодической сходимости.

Ключевые слова: вариационное неравенство, задача равновесного программирования, монотонный оператор, неподвижная точка, проекционный алгоритм, экстраградиентный алгоритм, расстояние Брэгмана, алгоритм расщепления.

ABSTRACT

Chabak L. M. Projection algorithms for variational inequalities and equilibrium programming. — Manuscript.

Candidate's thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.05.02 – mathematical modelling and computational methods. – Taras Shevchenko National University of Kyiv of Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2018.

Thesis is devoted to the development and theoretical investigation of new projection algorithms for variational inequalities and equilibrium problems. Variational inequalities with monotone operators are maximally general class of problems with convex structure. The problems of equilibrium programming (equilibrium problems, Ky Fan inequalities) are another popular section of modern applied nonlinear analysis.

Modification of the subgradient extragradient algorithm with dynamic adjustment of the step size for variational inequalities and operator equations with non-Lipschitz monotone operators was constructed this work. Also, it's convergence was proved. Similar algorithms are also obtained for problems with a priory information about the solutions in the form of inclusion in the set of fixed points of the Fejerian operator.

Also, regularized strongly convergent variants of the algorithm are proposed. Halpern scheme of the approximation of fixed points of non-expansive operators, Nakajo-Takahashi CQ-scheme and Takahashi-Takeuchi-Kubota method were used for regularization.

With the help of the modified Takahashi-Takeuchi-Kubota scheme, variants of regularization of weakly convergent algorithms for solving equilibrium programming problems and variational inequalities in the Hilbert space were constructed. Besides this, new algorithm for solving variational inequalities with strongly monotone operators on the set of fixed points of the Fejerian operators.

For the equilibrium problem modification of a two-step proximal algorithm with the use of the Bregman distance intead of the Euclidean was constructed and proved. Analysis of the convergence of the method is conducted for the assumption of the existence of a solution to the equilibrium problem and under conditions of pseudo-monotonicity and Lipschitzian of the bifunction. This kind of iterative schemes are interesting for transport applications, machine learning and game theory, where we have to work with variational inequalities on direct products of scalable simplexes. The Bregman distance allows us to take into account the geometry of an admissible set effectively in some important cases. Namely, with the suitable choice of distance, we obtain a method with explicitly solvable auxiliary problems on the iterative steps.

Splitting method was proposed for resolution of variational inequalities with maximal monotone operators. This method generalizes the «incremental subgradient method», well-known in convex optimization and machine learning. The theorem of ergodic convergence of the splitting method was proved. Also, under certain conditions strong convergence of the algorithm is proved.

Key words: variational inequality, equilibrium problem, monotone operator, fixed point, projection algorithm, extragradient algorithm, Bregman divergence, splitting algorithm.