МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СІРЕНКО АНДРІЙ СЕРГІЙОВИЧ

УДК 517.923.4

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ПЕРЕМИКАННЯМИ ТА ЗАПІЗНЕННЯМ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Київ – 2019

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України на кафедрі моделювання складних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики.

Науковий керівник: доктор фізико–математичних наук, професор
Хусаінов Денис Яхьєвич,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
професор кафедри моделювання складних систем.

Офіційні опоненти: доктор фізико–математичних наук, професор
Мазко Олексій Григорович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник;

кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Попов Олександр Володимирович,
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
старший науковий співробітник.

Захист відбудеться «21» жовтня 2019 р. о 15^{45} на засіданні спеціалізованої Вченої ради Д 26.001.35 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: м. Київ, пр. Академіка Глушкова, 4д, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, ауд. 01.

З дисертацією можна ознайомитися у Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58, зал № 12.

Автореферат розісланий «__» вересня 2019 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.001.35 П.М. Зінько

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В даний час зацікавленість у дослідників викликають процеси і системи, динаміка яких описується різними підсистемами. Серед таких систем виділяють клас так званих гібридних систем, відмінною особливістю яких є наявність у просторі станів двох компонент: дискретної і неперервної. Є багато прикладів гібридних систем. Відомий зразок гібридної системи: лінійної неперервної незалежної від часу, описаної лінійними диференціальними рівняннями (математична модель ґрунтується на записуючому пристрою неперервної дії), управляється дискретним лінійним незалежним від часу регулятором, який описаний рівняннями в кінцевих різницях (використовується записуючий пристрій дискретної дії). Одним із класичних практичних прикладів гібридної системи – система нагрівання та охолодження житлового будинку (клімат-контроль). Система отеплення і кондиціонер, характеристики теплового потоку формують систему, яка повинна управлятися. Термостат – дискретно випадково керована система, яка в основному обробляє сигнали: «занадто гарячий», «занадто холодний» або нормальний.

До гібридних систем належать системи з перемиканнями, системи з імпульсними збуреннями, логіко-динамічні системи. В логіко-динамічних системах динамічна частина, що задає рух об'єкта керування, описується, як правило, диференціальними рівняннями, а дискретна частина – рекурентними або різницевими рівняннями.

Одним з математичних об’єктів, що застосовуються для опису та дослідження динамічних процесів, є системи з перемиканнями. Для моделювання складних дискретних, дискретно-неперервних та неперервних динамічних систем використовують системи звичайних диференціальних рівнянь, системи рівнянь з частинними похідними, різницеві рівняння, функціонально–диференціальні та інтегральні рівняння.

На сьогоднішній день існують різні математичні моделі, які розроблені для дослідження поведінки таких систем. Серед них можна виділити наступні: агрегативні системи, неперервно-дискретні моделі, кусково-зшиті системи, імпульсні системи, системи зі змінною структурою, гібридні системи. Дослідженням систем такого виду займалися такі науковці, як М.П. Бусленко, В.М. Глушков, О.О. Андронов, А.М. Самойленко, С.В. Ємельянов, А. Пнуелі. Системи з перемиканням є одним із перспективних напрямків у моделюванні систем, що сполучають інженерію, теоретичні комп’ютерні науки і теорію керування. Особливої уваги в цій галузі заслуговують роботи В.І. Зубова, Б.М. Бублика, М.Ф. Кириченка, Ф.Г. Гаращенка, А.О. Чикрія.

Дисертаційна робота присвячена важливим проблемам прикладної математики, а саме: розробці методів дослідження динаміки процесів, що моделюються сукупністю диференціальних та різницевих рівнянь, які поєднані законами перемикання. Основна увага зосереджена на одній із основних задач аналізу динаміки таких систем, як дослідження стійкості, що є ключовою властивістю для проектування систем керування, які описуються диференційними та різницевими рівняннями. Важливі результати в дослідженні стійкості були отриманні О.М. Ляпуновим, Р. Белманом, Б.П. Демидовичем, Є.О. Барбашиним, С.М. Онищенком, К.Г. Валєєвим, О.Г. Мазком, О.В. Поповим, Д.Я. Хусаіновим та ін.

Дисертаційна робота є актуальною як з теоретичної, так і з практичної точок зору. Результати роботи автора базуються на методах якісного аналізу динамічних систем, що були отримані згадуваними науковцями.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана у відповідності до плану наукових робіт кафедри моделювання складних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка в рамках наукових-дослідницьких тем: № 11БФ015-01 «Розвиток теорії та створення програмно-алгоритмічних засобів для моделювання, аналізу, оцінки та оптимізації складних систем в умовах невизначеності» (№ ДР 0111U004651, виконувалась у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка у 2011 - 2015 р.) і № 16БФ015-01 «Створення інформаційно-аналітичних технологій моделювання та оптимізації структурно заданих систем» (№ ДР 0116U004775, виконувалася у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка у 2016 - 2018 р.). (довідка від 05.04.2017 р.).

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є отримання конструктивних оцінок стійкості лінійних та слабо нелінійних систем, зокрема, із запізненням, які складаються з підсистем, що описуються лінійними диференціальними і різницевими рівняннями.

Поставлена мета зумовлює необхідність розв'язання таких основних задач:

– отримати достатні умови існування спільної функції Ляпунова для систем з перемиканнями;

– обґрунтувати допустимі оцінки збурень різницевих систем із запізненням, при яких зберігається асимптотична стійкість систем;

– за допомогою другого методу Ляпунова отримати умови асимптотичної стійкості слабо нелінійних систем.

Об'єктом дослідження є системи з перемиканнями, диференціальна та різницева частина яких описується лінійними і слабо нелінійними підсистемами, зокрема, із запізненням.

Предметом дослідження є математичні моделі та обчислювальні методи.

Методи дослідження. В дисертаційній роботі застосовуються методи: математичного аналізу, теорії диференціальних та різницевих рівнянь, матричної алгебри, теорій стійкості. Основним методом для одержання оцінок стійкості є другий метод Ляпунова. Для систем із запізненням застосовуються метод скінчено вимірних функцій Ляпунова з додатковою умовою Б.С. Разуміхіна.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в отриманні конструктивних результатів стійкості руху систем з перемиканнями, що описані диференціальними та різницевими підсистемами. Вони математично обґрунтовані й порівнюються з відомими результатами у цій галузі, а також повністю викладені у наукових публікаціях автора. В дисертації отримані такі нові результати:

вперше:

– отримано умови існування спільної функції Ляпунова для систем лінійних диференціальних та різницевих систем;

– отримано умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги систем з перемиканням;

– отримано конструктивні умови асимптотичної стійкості стаціонарних систем з запізненням;

удосконаленно:

– умови інтервальної стійкості і оцінки збіжності різницевих систем;

набули подальшого розвитку:

– достатні умови і алгоритм знаходження існування спільної функції Ляпунова для лінійних стаціонарних систем і для лінійних різницевих систем з перемиканнями;

– умови стійкості систем з запізненням.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер і є внеском у перспективний напрямок досліджень теорії стійкості динамічних систем.

Основним значенням роботи є отримання конструктивних умов стійкості систем з перемиканнями, що описуються диференціальними та різницевими рівняннями. Для отримання умов стійкості використовується другий метод Ляпунова з умовою існування функції, спільної для всіх підсистем. Обґрунтовані допустимі границі збурень матриць лінійних систем, при яких системи залишаються асимптотично стійкими.

Одержані результати можуть бути використані у задачах дослідження стійкості динаміки літальних апаратів, інтелектуальних транспортних систем, систем автоматичного регулювання температури та в інших математичних моделях, для опису яких характерним є гібридність системи.

Результати роботи є оригінальними і математично обґрунтованими. Вони мають науковий та практичний інтерес, оскільки можуть бути застосовані до широкого класу задач у різних прикладних галузях.

Основні результати дослідження були впроваджені у 2014 - 2015 р. в навчальний процес кафедри моделювання складних систем факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка в рамках спецкурсу «Моделювання систем з післядією» (довідка від 05.04.2017 р.).

Особистий внесок здобувача. Всі основні результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. У публікаціях, виконаних у співавторстві, особистий внесок здобувача полягав у виконанні всіх основних доведень, розрахунків та формулюванні висновків. Співавторам належать постановки задач та рекомендації щодо методів їх розв’язування.

Зокрема, у роботі [2], написаній у співавторстві з Хусаіновим Д.Я., постановка задачі була запропонована Хусаіновим Д.Я., переважна частина матеріалу була отримана автором дисертації. У роботі [3] написаній у співавторстві з Хусаіновим Д.Я., основні результати виконані Сіренком А.С., науковому керівнику належать постановки задач та участь в обговоренні результатів. У роботі [4], яка написана у співавторстві з Хусаіновим Д.Я. та Шакотько Т.І., дисертанту належить переважна частина доведення тверджень про стійкість розв’язків. У роботах [5, 8, 9], в іноземних виданнях, написаних у співавторстві з Diblik J., Bastinec J., Хусаіновим Д.Я. проводили теоретичну частину, а розробка основних складових представлених методів виконана автором дисертації. Також у роботі [7], написаної у співавторстві з Diblik J., Bastinec J., Хусаіновим Д.Я., співавторами була поставлена задача і теоретична частина, а розробка основних складових представлених методів виконана автором дисертації.

Апробація результатів дисертації.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались на науковому міжкафедральному семінарі кафедри моделювання складних систем і кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також представлені та схвалені на багатьох наукових міжнародних конференціях, де отримали позитивну оцінку.

Основні результати були апробовані на конференціях:

– XVI International Conference «Dynamical System Modeling and Stability Investigations» (Kyiv, Ukraine, May 29 – 31, 2013 р.);

– XV міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука (м. Київ, Україна, 15 – 17 травня 2014 р.);

– Mezinárodní konference Matematika, Informační Technologie a Aplikované Vědy (Brno, Check Republic, June 19 – 20, 2014 р.);

– Conference on Differential and Difference Equations and Applications (Jasna, Slovak Republic, June 23 – 27, 2014 р.);

– VII Міжнародна конференція імені академіка І. І. Ляшка (м. Київ, Україна, 8 – 9 жовтня 2014 р.);

– XXV International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (смт. Східниця, Україна, 11 – 15 травня 2015 р.);

– XVII International Conference «Dynamical System Modeling and Stability Investigations» (Kyiv, Ukraine, May 27 – 29, 2015 р.);

– Mezinárodní konference Matematika, Informační Technologie a Aplikované Vědy (Brno, Check Republic, June 18 – 19, 2015 р.);

– XXVI International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (м. Одеса, Україна, 24 – 28 серпня 2015 р.);

– VIII Міжнародна конференція імені академіка І. І. Ляшка (м. Київ, Україна, 8 – 9 жовтня 2015 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 20 наукових працях загальним обсягом 3,67 д.а. (з них 2,75 д.а. належать особисто автору) – 9 наукових статей, у тому числі 6 у наукових фахових виданнях України і 3 – в іноземних наукових виданнях, які входять до наукометричної бази даних Scopus, та 11 тез доповідей на наукових конференціях.

Обсяг і структура роботи. Дисертаційна робота складається з 166 стор. та містить в собі такі структурні елементи: титульний аркуш, анотація, зміст, основна частина на 128 стор. (складається з вступу, трьох розділів і висновків), список використаних джерел із 180 найменувань на 17 стор. та додатки на 5 стор.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику, доктор фізико-математичних наук, професору Хусаінову Денису Ях'євичу за постановку розглянутих у дисертаційній роботі задач та постійну увагу до роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність обраної теми, сформульовано мету роботи, визначено наукову новизну отриманих результатів, їх теоретичну та практичну цінність. Також наведено дані про публікації здобувача, його особистий внесок та апробацію результатів.

Перший розділ має оглядовий характер. У ньому розглянуто сучасний стан вибраного напрямку досліджень, виділені основні досягнення та проблеми. Наведено загальні поняття та означення гібридних динамічних систем, логіко–динамічних систем, систем з перемиканнями. Здійснено огляд підходів до моделювання та дослідження гібридних систем. Дано означення стійкості гібридних систем. Приведені основні положення другого методу Ляпунова.

Під системами з перемиканням було розглянуто системи, що описуються сукупністю диференціальних рівнянь, які функціонують на скінченому проміжку часу, перемиканнями, що описані різницевими рівняннями, і знову диференціальними рівняннями. Таким чином, функціонування системи описується рівняннями

$$\dot{x}(t) = f_k\left(x(t), t\right),\ k \in K,\ t_k < t < t_{k+1},$$
$$x(t_k + 0) = g_k\left(x(t_k - 0), t_k - 0\right). \qquad (1.19)$$

Вважається, що системи з перемиканнями такі, що мають розв'язки, які єдині, тобто розв'язки задовольняють початковим умовам, і неперервно залежать від початкових умов. В дисертаційній роботі розглядаються системи, неперервна частина яких складається з лінійних диференціальних підсистем

$$\dot{x}(t) = A_k x(t),\ k \in K$$

або так званих, «диференціальних систем зі слабкою нелінійністю». Під системами зі слабкою нелінійністю будемо розуміти системи вигляду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f\left(x(t)\right),\ x(t) \in R^n,$$

де A матриця діагонального виду, а $f\left(x(t)\right)$ векторна функція, яка задовольняє по кожному з аргументів умові Ліпшиця із сталими L_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$.

Перемикання описується або різницевими підсистемами, або в точках перемикання зберігається неперервність. Системи такого виду використовуються при моделюванні процесів в механіці, в техніці і в нейроних мережах.

При дослідженні розглянуто системи з визначеними і невизначеними перемиканнями.

Для отримання умов стійкості використовуються два підходи.

Для систем з визначеними перемиканнями використовується підхід, який базується на «зшиванні функцій Ляпунова». Якщо відомі проміжки функціонування кожної з підсистем і підсистеми, які функціонують на цих проміжках, то дослідження стійкості зводиться до «зшивання» поверхонь рівня відповідних функцій Ляпунова.

Для систем з невизначеними перемиканнями використовується другий підхід, який базується на існуванні спільної функції Ляпунова. Тобто отримані умови, при виконанні яких для систем, що описані різними підсистемами рівнянь існує спільна функція Ляпунова. В цьому випадку система, що складається з довільних підсистем такого класу з довільними часовими перемиканнями є асимптотично стійкою.

Другий розділ присвячено проблемам обґрунтування існування спільної функції Ляпунова для лінійних систем з перемиканнями.

Розглядаються умови асимптотичної стійкості нульового розв’язку системи з перемиканнями, що складається з послідовності лінійних диференціальних та різницевих рівнянь. Методом досліджень вибрано метод функцій Ляпунова квадратичного вигляду. Отримані достатні умови існування спільної функції Ляпунова. Такі умови ґрунтуються на геометричній інтерпретації множини додатно визначених функцій Ляпунова, як конуса в просторі додатно визначених матриць. Умови існування спільної функції Ляпунова випливають з непорожнього перетину побудованої множини конусів.

Означення 2.1. Нульовий розв’язок системи з перемиканням називається стійким за Ляпуновим, якщо для будь–якого розв’язку $x(t)$ для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь–якого розв’язку $x(t)$ буде виконуватися $|x(t)| < \varepsilon$, $t > t_0$, як тільки $|x(t_0)| < \delta(\varepsilon)$.

Означення 2.2. Нульовий розв’язок системи з перемиканнями називається асимптотично стійким, якщо він стійкий за Ляпуновим і $\lim\limits_{t\to+\infty}|x(t)| = 0$.

В дисертаційній роботі спочатку розглянуто системи, неперервна частина яких представлена набором підсистем, що є лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами

$$x'(t) = A_i x(t), \quad i = \overline{1,N}, \quad x(t) \in R^n, \quad t \geq 0. \tag{2.3}$$

Кожна з підсистем описує динаміку збурення на заданому скінченому проміжку часу $t_{i-1} \leq t < t_i$, $i = \overline{1,N}$, $t_0 = 0$. В моменти перемикань виконується умова неперервності фазових координат

$$\lim_{s\to+0} x(t_i - s) = \lim_{s\to+0} x(t_i + s), i = \overline{1, N-1}.$$

Отримана оцінка величини відхилення розв’язку $x = x(x_0, t)$ системи, від стану рівноваги в скінчений момент часу. При отримані результатів використовується метод квадратичних функцій Ляпунова. Функція будується у вигляді квадрату інтегралу

$$V(x,t) = x_0^T x_0 = \left(e^{-At}x\right)^T \left(e^{-At}x\right),$$

і у вигляді квадратичної форми $V(x) = x^T H x$.

Отримано результати з стійкості систем з визначеними перемиканнями при наявності руху систем, обумовленого диференціальними підсистемами (2.3) і перемиканнями, обумовленими різницевими підсистемами

$$x(t_{k+1}) = B_i x(t_k), k = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 2.5. Щоб нульовий розв’язок системи з перемиканнями був стійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб для довільного $\varepsilon > 0$, і довільних моментів перемикання для $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 1,2,3,\ldots$ виконувалася нерівність

$$\delta(\varepsilon) < \varepsilon \min\left\{ \frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{k-1} B_{k-i} e^{A_{k-i}(t_{k-i} - t_{k-i-1})}}, \frac{1}{e^{A_{k+1}(t-t_k)} \prod\limits_{i=0}^{k-i} B_{k-i} e^{A(t_{k-i} - t_{k-i-1})}} \right\}.$$

Щоб нульовий розв'язок системи з перемиканнями був асимптотично стійкий, необхідно і достатньо, щоб для довільного k виконувалася попередня нерівність і

$$\lim_{k\to+\infty}\prod_{i=0}^{k-1}B_k e^{A_k\left(t_{k-i}-t_{k-i-1}\right)}=0,\ \ \lim_{t\to+\infty}e^{A_{k+1}\left(t-t_k\right)}\prod_{i=0}^{k-1}B_{k-i}e^{A_{k-i}\left(t_{k-i}-t_{k-i-1}\right)}=0. \qquad (2.7)$$

Зауваження 2.1. Викладені умови стійкості (асимптотичної стійкості) є, по суті, обчислення величини збурення вздовж часу.

Основним напрямком дослідження стійкості систем з перемиканнями, що розробляється в дисертаційній роботі є використання методу спільної функції Ляпунова. Позначимо $S(A)=\{S_i(A), i\in N\}$ множину динамічних систем $S_i(A)$, що представляє собою системи лінійних диференціальних рівнянь, $t\in T_i$, які функціонують на фіксованих проміжках часу $t\in T_i$, $T_i: t_{i-1}\le t<t_i$. А у момент часу $t=t_i$ з виконанням умови неперервності йде перемикання на наступну підсистему

$$\dot{x}(t)=A_{i+1}x(t),\ i\in N_1.$$

Функціонування цієї підсистеми відбувається на проміжку $t_i\le t<t_{i+1}$. Далі знову йде перемикання і динамічний процес відбувається аналогічно.

Будемо говорити, що точка спокою $x(t)\equiv 0$ диференціальної системи з перемиканнями $S(A)$ є рівномірно стійкою за перемиканнями, якщо при довільно заданих підсистемах $S_i(A)$, $i=0,1,2,...$ і проміжків часу $T_s: t_s\le t<t_{s+1}$, $s=0,1,2,...$ для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta(\varepsilon)>0$, що для довільного розв'язку системи $S(A)$ з початковими умовами $|x(t_0)|<\delta(\varepsilon)$, при $t>0$ буде виконуватися $|x(t)|<\varepsilon$. Якщо, до того ж, $\lim\limits_{t\to+\infty}|x(t)|=0$, то нульовий розв'язок буде асимптотично стійким.

Визначено умови, при виконанні яких, нульовий розв'язок системи $S(A)$ буде асимптотично стійким.

Теорема 2.6. Щоб нульовий розв'язок диференціальної системи з перемиканнями $S(A)$ був рівномірно асимптотично стійким, достатньо щоб для всіх її підсистем існувала спільна функція Ляпунова.

Розглянуто системи з перемиканнями, які описані тільки різницевими рівняннями. Позначимо через $S(B)=\{S_i(B), i\in N\}$ систему, що представляє собою множину різницевих рівнянь

$$S_i(B): x(k+1)=B_i x(k),$$

які функціонують на цілочисельних проміжках

$$T_i=\{k_i, k_i+1, k_i+2, ..., k_i+l_i\}, T_{i+1}=\{k_{i+1}, k_{i+1}+1, k_{i+1}+2, ..., k_{i+1}+l_{i+1}\}, \text{де } k_i+l_i+1=k_{i+1}.$$

Таким чином, маємо послідовність цілочисельних проміжків часу T_i, $i=0,1,2,...N_2$ і множину підсистем $S_i(B)$. Різницевої системою з перемиканнями $S(B)$ назвемо динамічну систему, що складається з систем різницевих рівнянь, що функціонують на проміжках T_i, $i=0,1,2,...N_2$.

Будемо говорити, що точка спокою $x(k)\equiv 0$ різницевої системи з перемиканнями $S(B)$ є рівномірно стійкою за перемиканням, якщо при довільно заданих підсистемах $S_i(B)$ і проміжків часу T_i для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta(\varepsilon)>0$, що для будь–якого розв'язку системи $S(B)$ з початковими умовами

$|x(0)| < \delta(\varepsilon)$, при $k = 1,2,3,...$ буде виконуватися $|x(k)| < \varepsilon$. Якщо, до того ж, $\lim\limits_{k\to+\infty}|x(k)| = 0$, то нульовий розв'язок буде асимптотично стійким.

Теорема 2.7. Щоб нульовий розв'язок $x(k) \equiv 0$ різницевої системи з перемиканнями $S(B)$ був рівномірно асимптотично стійким, достатньо щоб для всіх її підсистем $S_i(B)$ існувала спільна функція Ляпунова.

Нарешті, розглянемо систему $S(A,B) = \{S_i(A), S_j(B), i \in N_1, j \in N_2\}$, що складається з множини динамічних систем $S_i(A)$, що представляють собою системи лінійних диференціальних рівнянь

$$S_i(A): \{\dot{x} = A_i x, i \in N_1\},$$

які функціонують на проміжках часу $T_i : t_i \le t < t_{i+1}$, $i = 0,1,2,...$,

$$\dot{x}(t) = A_j x(t),\ t \in N_j.$$

і систем різницевих рівнянь

$$x(t_j + 0) = B_j x(t_j - 0),\ j \in N_2.$$

У моменти часу $t = t_j$ спостерігається перемикання за законами різницевих підсистем

Умови стійкості нульового розв'язку комбінованої системи $S(A,B) = \{S_i(A), S_j(B), i \in N_1, j \in N_2\}$ мають більш «жорсткий» вигляд.

Теорема 2.8. Щоб нульовий розв'язок різницевої системи з перемиканнями $S(A,B)$ був асимптотично стійким, достатньо щоб і для диференціальних і для різницевих її підсистем існували відповідні спільні функції Ляпунова $V_{dif}(x)$, $V_{ris}(x)$ Причому в точках розриву виконувалась умова монотонного спадання

$$V_{dif}(x(t_k - 0)) > V_{ris}(x(t_k - 0)) > V_{ris}(x(t_k + 0)) > V_{dif}(x(t_k + 0)).$$

Більш конструктивні умови стійкості мають наступний вигляд.

Теорема 2.9. Щоб нульовий розв'язок комбінованої системи з перемиканнями $S(A,B)$ був асимптотично стійким, достатньо щоб і для диференціальних і для різницевих її підсистем існувала єдина спільна функція Ляпунова $V(x)$.

Отримано умови існування спільної функції Ляпунова для диференціальних підсистем.

$$x'(t) = A_i x(t),\ x(t) \in R^n,\ i = \overline{1,n}.$$

Якщо матриці A_i, $i = \overline{1,n}$ асимптотично стійкі, то для довільних додатно визначених матриць C_i, $i = \overline{1,n}$ матричні рівняння

$$A_i^T H_i + H_i A_i = -C_i,\ i = 1,2,3,...$$

мають єдиними розв'язком – додатно визначені матриці H_i, $i = \overline{1,n}$.

Теорема 2.11. Нехай C_i, $i = \overline{1,n}$ додатно визначені матриці і H_i відповідні розв'язки рівнянь Ляпунова. Якщо існують сталі $0 \le \alpha_i \le 1$, $i = \overline{1,n-1}$, при яких матриці

$$C_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_1 - (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{12} - (1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{13} - ...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}C_{1n-1} - (1-\alpha_{n-1})C_{1n},$$

$$C_2(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}) = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{21} + (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_2 - (1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{23} - ...$$
$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}C_{2n-1} - (1-\alpha_{n-1})C_{2n},$$

……………………………………………………..

$$C_n(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}) = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{n1} - (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{n2} - (1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{n3} - ...$$

$$-(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}C_{nn-1} + (1-\alpha_{n-1})C_n. \tag{2.15}$$

також додатно визначені, то для систем (2.1) існує спільна функція Ляпунова і вона має вигляд $V(x) = x^T H(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1})x$, де

$$H(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_{n-1}) =$$
$$= \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}H_1 + (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}H_2 + ... + (1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}H_3 + ...$$
$$+(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}H_{n-1} + (1-\alpha_{n-1})H_n. \tag{2.16}$$

В дисертаційній роботі отримано умови існування спільної функції Ляпунова для різницевих підсистем

$$x(k+1) = B_i x(k),\ k = 0,1,2,3,...,\ i = \overline{1,n}.$$

Якщо матриці B_i, $i = \overline{1,n}$ асимптотично стійкі, то для довільних додатно визначених матриць C_i, $i = \overline{1,n}$ матричні рівняння

$$B_i^T H B_i - H = -C_i \tag{2.27}$$

мають єдиними розв'язками – додатно визначені матриці H_i, $i = \overline{1,n}$. Позначимо

$$C_{ij} = H_j - B_i H_j B_i,\ i \neq j. \tag{2.28}$$

Теорема 2.13. Нехай C_i, $i = \overline{1,n}$ додатно визначені матриці і H_i відповідні розв'язки рівнянь Ляпунова. Якщо існують сталі $0 \le \alpha_i \le 1$, $i = \overline{1,n}$, при яких матриці

$$C_1(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_1 + (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{12} + (1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{13} + ...$$
$$+(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}C_{1n-1} + (1-\alpha_{n-1})C_{1n},$$
$$C_2(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{21} + (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_2 + (1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{23} + ...$$
$$+(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}C_{2n-1} + (1-\alpha_{n-1})C_{2n},$$

………………………………………………………………

$$C_n(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{n1} + (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}C_{n2} + (1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}C_{n3} + ...$$
$$+(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}C_{nn-1} + (1-\alpha_{n-1})C_n. \tag{2.29}$$

також додатно визначені, то для систем різницевих рівнянь існує спільна функція Ляпунова і вона має вигляд $V(x) = x^T H(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1})x$, де

$$H(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n) =$$
$$= \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}H_1 + (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}H_2 + ... + (1-\alpha_2)\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}H_3 + ...$$
$$+(1-\alpha_{n-2})\alpha_{n-1}H_{n-1} + (1-\alpha_{n-1})H_n. \tag{2.30}$$

У **третьому розділі** розглядаються задачі дослідження стійкості нульового стану рівноваги нелінійних систем з перемиканнями, диференціальні підсистеми яких описуються системами диференціальних рівнянь з діагональною лінійною частиною, що знаходяться в першому квадранті. Апаратом дослідження обрано другий метод Ляпунова. Використовується метод функцій Ляпунова з додатковою умовою Б.С. Разуміхіна. Отримані умови стійкості ненульового стану рівноваги системи без запізнення. Розглядається вплив запізнення.

Попередньо розглянута система без запізнення вигляду

$$\dot{y}_i(t) = -a_{ii} y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(y_j(t)) + b_i , \tag{3.7}$$

Припустимо, що нелінійні частини задовольняють умовам Ліпшиця зі сталими L_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, а система рівнянь

$$-a_{ii} y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(y_j) + b_i = 0 , \; i = \overline{1, n} \tag{3.8}$$

має розв'язком точку $M_0(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$, що лежить в першому квадранті.
Після підстановки і відповідного скорочення отримаємо слабо нелінійну систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x}_i(t) = -a_{ii} x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(x_j(t)), \; F_{ij}(x_j(t)) = F_{ij}(y_j(t) + y_j^0) - F_{ij}(y_j^0), \; i = \overline{1, n} , \tag{3.9}$$

яка має нульовий стан рівноваги, а функції $F_{ij}(x_j)$ задовольняють умовам Ліпшиця з тими ж сталими L_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$. Для дослідження стійкості нульового стану рівноваги системи (3.9) будемо використовувати квадратичну функція Ляпунова вигляду

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii} x_i^2 . \tag{3.10}$$

Має місце наступний результат.

Теорема 3.3. Нехай існують сталі $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0$,…, h_{nn}, при яких виконуються умови

$$\gamma_i > 0 , \; i = \overline{1, n}, \tag{3.11}$$

$$\gamma_1 = [s_{12} + s_{13} + s_{14} + ... + s_{1n}], \; \gamma_2 = [s_{12} + (s_{23} + s_{24} + ... + s_{2n})], \; \gamma_3 = [(s_{13} + s_{23}) + (s_{34} + ... s_{3n})],$$

$$\gamma_4 = [(s_{14} + s_{24} + s_{34}) + (s_{45} + ... + s_{4n})],$$

$$\gamma_n = [s_{1n} + s_{2n} + s_{3n} + ... + s_{n-1,n}],$$

$$s_{12} = (L_{12} h_{11} + L_{21} h_{22}), \; s_{13} = (L_{13} h_{11} + L_{31} h_{33}), \ldots, \; s_{1n} = (L_{1n} h_{11} + L_{n1} h_{nn}),$$

$$s_{23} = (L_{23} h_{22} + L_{32} h_{33}), \; s_{24} = (L_{24} h_{22} + L_{42} h_{44}), \ldots, \; s_{2n} = (L_{2n} h_{22} + L_{n2} h_{nn}), \ldots$$

$$\ldots \quad s_{n-1,n} = (L_{n-1,n} h_{n-1,n-1} + L_{n,n-1} h_{nn}).$$

Тоді нульовий стан рівноваги системи (3.9) є асимптотично стійким.

Як правило, в системах з оберненим зв'язком за рахунок фізичних властивостей в нелінійній частині диференціальних рівнянь присутнє запізнення аргументу поточної координати. Тому більш адекватною математичною моделлю, зокрема моделлю нейронних мереж, є системи диференціальних рівнянь із запізненням. Далі в дисертаційній роботі розглядаються системи диференціальних рівнянь з асимптотично стійкою діагональною частиною і нелінійністю, що представляє суму нелінійних функцій одного аргументу із сталим запізненням, які задовольняють умовам Ліпшиця. Дослідження стійкості стану рівноваги також проводиться методом функцій Ляпунова. Оскільки система із запізненням, то використовується метод скінченовимірних функцій Ляпунова з умовою Б.С. Разуміхіна. Отримано конструктивні достатні умови стійкості стаціонарного розв'язку системи із запізненням.

Попередньо розглянуто систему із запізненням в $n-$вимірному просторі.

$$\dot{x}_i(t) = -a_{ii}x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}\left(x_{ij}\left(t-\tau_{ij}\right)\right), \tag{3.21}$$

функції $F_{ij}\left(x_{ij}\left(t-\tau_{ij}\right)\right), i, j = \overline{1,n}$ неперервні і задовольняють умовам Ліпшиця зі сталими $L_{ij}, i, j = \overline{1,n}$. Має місце наступне.

Теорема 3.7. Нехай існують сталі $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0, \ldots,$ h_{nn}, при яких виконуються умови

$$2a_{11} > l_1 + R,\ 2a_{22} > l_2 + R, \ldots,\ 2a_{nn} > l_n + R, \tag{3.22}$$

$$l_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij},\ R = \sum_{j=1}^{n} h_{jj}L_j,\ L_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{L_{ij}}{h_{jj}}.$$

Тоді нульовий стан рівноваги є глобально асимптотично стійким при довільних запізненнях.

Одержано альтернативну оцінку стійкості. Введемо наступні позначення

$$L_1 = \frac{L_{11}}{\sqrt{h_{11}}} + \frac{L_{12}}{\sqrt{h_{22}}} + \ldots + \frac{L_{1n}}{\sqrt{h_{nn}}},\ L_2 = \frac{L_{21}}{\sqrt{h_{11}}} + \frac{L_{22}}{\sqrt{h_{22}}} + \ldots + \frac{L_{2n}}{\sqrt{h_{nn}}}, \ldots,$$

$$L_n = \frac{L_{n1}}{\sqrt{h_{11}}} + \frac{L_{n2}}{\sqrt{h_{22}}} + \ldots + \frac{L_{nn}}{\sqrt{h_{nn}}},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ c_{1n} & c_{2n} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

$$c_{11} = 2h_{11}\left(a_{11} - L_1\sqrt{h_{11}}\right),$$
$$c_{12} = -\sqrt{h_{11}h_{22}}\left[L_1\sqrt{h_{11}} + L_2\sqrt{h_{22}}\right], \ldots, c_{1n} = -\sqrt{h_{11}h_{nn}}\left[L_1\sqrt{h_{11}} + L_n\sqrt{h_{nn}}\right],$$
$$c_{22} = 2h_{22}\left(a_{22} - L_2\sqrt{h_{22}}\right),$$
$$c_{23} = -\sqrt{h_{22}h_{33}}\left[L_2\sqrt{h_{22}} + L_3\sqrt{h_{33}}\right], \ldots, c_{2n} = -\sqrt{h_{22}h_{nn}}\left[L_2\sqrt{h_{22}} + L_n\sqrt{h_{nn}}\right], \ldots,$$
$$c_{n-1,n-1} = 2h_{n-1,n-1}\left(a_{n-1,n-1} - L_{n-1}\sqrt{h_{n-1,n-1}}\right),\ c_{n-1,n} = -\sqrt{h_{n-1,n-1}h_{n,n}}\left[L_{n-1}\sqrt{h_{n-1,n-1}} + L_n\sqrt{h_{n,n}}\right],$$
$$c_{n,n} = 2h_{nn}\left(a_{n,n} - L_n\sqrt{h_{n,n}}\right).$$

Теорема 3.8. Нехай існують сталі $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0, \ldots,$ h_{nn} при яких виконуються умови

$$\Delta_1 = h_{11} > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots\ \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ c_{1n} & c_{2n} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0. \tag{3.25}$$

Тоді нульовий стан рівноваги системи (3.21) є асимптотично стійким.

Отримано умови стійкості слабо нелінійних систем із запізненням, що залежить від величини запізнення. Позначимо

$$C_n = \begin{bmatrix} 2h_{11}(a_{11}-L_{11}) & -h_{11}L_{12}-h_{22}L_{21} & \dots & -h_{11}L_{1n}-h_{nn}L_{n1} \\ -h_{11}L_{12}-h_{22}L_{21} & 2h_{22}(a_{22}-L_{22}) & \dots & -h_{22}L_{2n}-h_{nn}L_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -h_{11}L_{1n}-h_{nn}L_{n1} & -h_{22}L_{2n}-h_{nn}L_{n2} & & 2h_{nn}(a_{nn}-L_{nn}) \end{bmatrix}. \qquad (3.42)$$

Теорема 3.9. Нехай існують сталі $h_{ii} > 0$, $i = \overline{1,n}$, при яких матриця C є додатно визначеною. Тоді при $\tau < \tau_0$, де

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}(C_n)}{2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(h_{ii}K_i)^2 \varphi(H)}}, \; K_i = \sum_{j-1}^{n} L_{ij}\left(|a_{jj}| + \sum_{s=1}^{n} L_{js}\right), \qquad (3.43).$$

нульовий стан рівноваги системи (3.21) є асимптотично стійким. Причому для довільних розв'язків $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ системи при $t > 0$, буде виконуватися $|x(t)| < \varepsilon$, лише тільки $\|x(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon,\tau)$, де

$$\delta(\varepsilon,\tau) = \min_{i=\overline{1,n}}\left\{\frac{\exp\{-N_i|a_{ii}|\tau\}}{\left[1+\tau\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\right]^{N_i}}\right\}\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varphi(h)}}, \; \|x(0)\|_\tau = \max_{-\tau \le s \le 0}\{\|x(s)\|\}. \qquad (3.44)$$

Розглянуто системи з перемиканнями, підсистеми яких представляють собою слабо нелінійні диференціальні рівняння без запізнення. Отримані умови стійкості нульового розв’язку в термінах існування спільної функції Ляпунова.

Слабо нелінійною диференціальною системою з неперервними перемиканнями назвемо динамічну систему, що складається з підсистем слабо нелінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_i(t) = -a_i^s x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}^s\left(x_j(t-\tau_j)\right),$$

де нелінійні функції $F_{ij}^s\left(x_j(t-\tau_j)\right)$ задовольняють умовам Ліпшиця зі сталими $L_{ij}^s, i, j = \overline{1,n}, s \in N_2$, що функціонують на проміжках $T_i : t_i \le t < t_{i+1}$, $i = 0,1,2,...$, і в моменти t_{i+1} перемикаються із збереженням неперервності в точках перемикання.

Будемо говорити, що точка спокою $x(t) = 0$ диференціальної системи з перемиканнями є рівномірно стійкою по перемиканнях, якщо при довільно заданих підсистемах $S_i(A_i, F_i)$, $i \in N_1$ і проміжків часу $T_s : t_s \le t < t_{s+1}$, $\lim_{s\to+\infty} t_s \to +\infty$ для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для довільного розв'язку системи $S(A,F)$ з початковими умовами $|x(t_0)| < \delta(\varepsilon)$, при $t > 0$ буде виконуватися $|x(t)| < \varepsilon$.

Якщо ж, до того $\lim_{t\to+\infty}|x(t)| = 0$, то нульовий розв'язок буде асимптотично стійким.

Визначимо загальні умови, при виконанні яких, нульовий розв'язок буде асимптотично стійким.

Теорема 3.10. Щоб нульовий розв'язок диференціальної системи з перемиканнями $S\left(A,F\right)$ був рівномірно асимптотично стійким по перемиканнях, достатньо, щоб для всіх її підсистем існувала спільна функція Ляпунова.

Далі розглянемо слабо нелінійні системи з розривними перемиканнями. Розглянемо систему

$$S\left(A,B,F\right)=\left\{S_i\left(A,F\right),S_j\left(B\right),i\in N_1,\, j\in N_2\right\},$$

що складається з множини динамічних систем $S_i\left(A,F\right)$, що представляють собою системи слабо нелінійних диференціальних рівнянь (3.39), які функціонують на проміжках часу $T_i : t_i \le t < t_{i+1}$, $i\in N_1$, і систем різницевих рівнянь

$$x\left(t_{i+0}\right)=B_j x\left(t_{i-0}\right),\ j\in N_2, \tag{3.48}$$

функціонуючих в моменти перемикання. У моменти часу $t=t_i$ відбувається перемикання траєкторії $x\left(t\right)$ диференціальної підсистеми згідно із законом різницевої. Далі процес знову йде по закону диференціальної підсистеми.

Загальні умови стійкості нульового розв'язку слабо нелінійної системи системи з розривними перемиканнями $S\left(A,B,F\right)=\left\{S_i\left(A,F\right),S_j\left(B\right),i\in N_1,\, j\in N_2\right\}$ аналогічні наведеним раніше для лінійних підсистем

Теорема 3.11. Щоб нульовий розв'язок комбінованої системи з перемиканнями

$$S\left(A,B,F\right)=\left\{S_i\left(A,F\right),S_j\left(B\right),i\in N_1,\, j\in N_2\right\}$$

був асимптотично стійким, достатньо щоб і для диференціальних, і для різницевих її підсистем, відповідно, існували спільні функції Ляпунова $V_{dif}\left(x\right)$, $V_{ris}\left(x\right)$. Причому в точках розриву виконувалась умова монотонного спадання

$$V_{dif}\left(x\left(t_k-0\right)\right)>V_{ris}\left(x\left(t_k-0\right)\right)>V_{ris}\left(x\left(t_k+0\right)\right)>V_{dif}\left(x\left(t_k+0\right)\right).$$

Розглянуто системи з неперервним перемиканням без запізнення. Конструктивні умови стійкості мають наступний вигляд.

Теорема 3.16. Нехай для всіх диференціальних підсистем існує спільна функція Ляпунова $V(x)=\sum_{i=1}^{n} h_{ii}x_i^2$, тобто існують $h_{ii}>0,\ i=\overline{1,n}$, при яких виконуються умови

$$\Delta_1=h_{11}>0,\ \Delta_2^k=\begin{vmatrix} c_{11}^k & c_{12}^k \\ c_{12}^k & c_{22}^k \end{vmatrix}>0,\ \ldots\ \Delta_n^k=\begin{vmatrix} c_{11}^k & c_{12}^k & \ldots & c_{1n}^k \\ c_{12}^k & c_{22}^k & \ldots & c_{2n}^k \\ . & . & \ldots & . \\ c_{1n}^k & c_{2n}^k & \ldots & c_{nn}^k \end{vmatrix}>0, k\in N_2. \tag{3.54}$$

Тоді нульовий стан рівноваги системи з перемиканнями є асимптотично стійким.

Далі розглянуто слабо нелінійні системи з перемиканням із запізненням. Проведено дослідження асимптотичної стійкості.

Теорема 3.17. Щоб нульовий розв’язок диференціальної системи з запізненням та перемиканнями $S\left(A,F,\tau\right)$ був рівномірно асимптотично стійким з перемиканням, досить щоб для всіх її підсистем існувала спільна функція Ляпунова.

Умови рівномірної за запізненням стійкості для систем з неперервним перемиканням на площині мають наступний вигляд.

Теорема 3.18. Нехай існують сталі $h_{11} > 0, h_{22} > 0$, при яких виконується умови

$$2a_{11}^s > 2L_{11}^s + L_{12}^s\left(1+\frac{h_{11}}{h_{22}}\right) + L_{22}^s + L_{21}^s\frac{h_{22}}{h_{11}},$$

$$2a_{22}^s > 2L_{22}^s + L_{21}^s\left(1+\frac{h_{22}}{h_{11}}\right) + L_{11}^s + L_{12}^s\frac{h_{11}}{h_{22}}, s \in N_2. \quad (3.57)$$

Тут L_{ij}^s - сталі Ліпшиця нелінійних доданків підсистеми. Тоді нульовий стан рівноваги системи з неперервним перемиканнями є асимптотично стійким при довільних запізненнях.

Теорема 3.19. Нехай існують сталі $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0$ при яких виконуються умови

$$2\left[a_{11}^s - L_{11}^s - L_{12}^s\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}\right]h_{11} > 0,$$

$$4\left[a_{11}^s - L_{11}^s - L_{12}^s\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}\right]\left[a_{22}^s - L_{21}^s\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}} - L_{22}^s\right]h_{11}h_{22} -$$

$$-\left[\left(L_{11}^s\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}} + L_{12}^s\right)h_{11} + \left(L_{21}^s + L_{22}^s\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}\right)h_{22}\right]^2 > 0, s \in N_2. \quad (3.58)$$

Тоді нульовий стан рівноваги системи з неперервними перемиканнями є асимптотично стійким при довільних запізненнях.

Розглянуто систему з перемиканнями з підсистемами у n – вимірному просторі

$$\dot{x}_i(t) = -a_{ii}^s x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}^s(x_{ij}(t-\tau_{ij})), s \in N_2$$

Теорема 3.20. Нехай існують сталі $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0, \ldots,$ h_{nn}, при яких виконуються умови.

$$2a_{11}^s > l_1^s + R^s,\ 2a_{22}^s > l_2^s + R^s, \ldots,\ 2a_{nn}^s > l_n^s + R^s, s \in N_2, \quad (3.59)$$

де L_{ij}^s - сталі Ліпшиця нелінійних доданків окремих підсистеми,

$$l_i^s = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^s,\ R^s = \sum_{j=1}^{n} h_{jj} L_j^s,\ L_i^s = \sum_{j=1}^{n} \frac{L_{ij}^s}{h_{jj}}, s \in N_2.$$

Тоді нульовий стан рівноваги системи з неперервними перемиканнями є асимптотично стійким при довільних запізненнях.

Нарешті отримано умови нерівномірної стійкості, для систем з неперервними перемиканнями з підсистемами з запізненням.

На площині ці умови мають вигляд.

Теорема 3.22. Нехай існують сталі $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0$ при яких всі матриці

$$C_2^s = \begin{bmatrix} 2h_{11}(a_{11}^s - L_{11}^s) & -h_{11}L_{12}^s - h_{22}L_{21}^s \\ -h_{11}L_{12}^s - h_{22}L_{21}^s & 2h_{22}(a_{22}^s - L_{22}^s) \end{bmatrix}, s \in N_2 \quad (3.61)$$

є додатно визначеними. Тоді при

$$\tau < \tau_0, \tau_0 = \min_{s \in N} \left\{ \frac{\lambda_{\min}(C_2^s)}{2\sqrt{(h_{11}K_1^s)^2 + (h_{22}K_2^s)^2} \times \sqrt{\varphi(H)}} \right\}, \tag{3.62}$$

де

$$K_1^s = \left[L_{11}^s \left(\left| a_{11}^s \right| + L_{11}^s + L_{12}^s \right) + L_{12}^s \left(\left| a_{22}^s \right| + L_{21}^s + L_{22}^s \right) \right],$$
$$K_2^s = \left[L_{21}^s \left(\left| a_{11}^s \right| + L_{11}^s + L_{12}^s \right) + L_{22}^s \left(\left| a_{22}^s \right| + L_{21}^s + L_{22}^s \right) \right]$$

нульовий стан рівноваги системи з перемиканнями є асимптотично стійким.

Нарешті, для систем з перемиканнями із підсистемами з запізненням в n – вимірному просторі, умови асимптотично стійкості мають наступний вигляд.

Позначемо

$$C_n^s = \begin{bmatrix} 2h_{11}(a_{11}^s - L_{11}^s) & -h_{11}L_{12}^s - h_{22}L_{21}^s & \dots & -h_{11}L_{1n}^s - h_{nn}L_{n1}^s \\ -h_{11}L_{12}^s - h_{22}L_{21}^s & 2h_{22}(a_{22}^s - L_{22}^s) & \dots & -h_{22}L_{2n}^s - h_{nn}L_{n2}^s \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -h_{11}L_{1n}^s - h_{nn}L_{n1}^s & -h_{22}L_{2n}^s - h_{nn}L_{n2}^s & & 2h_{nn}(a_{nn}^s - L_{nn}^s) \end{bmatrix}, s \in N_2$$

Теорема 3.23. Нехай існують сталі $h_{ii} > 0, i = \overline{1,n}$, при яких всі матриці C_n^s є додатно визначеними. Тоді при $\tau < \tau_0$, де

$$\tau_0 = \min_{s \in N_2} \left\{ \frac{\lambda_{\min}\left(C_n^s\right)}{2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(h_{ii}K_i^s\right)^2 \varphi\left(H\right)}} \right\}, K_i^s = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^s \left(\left| a_{jj}^s \right| + \sum_{r=1}^{n} L_{jr}^s \right) \tag{3.63}$$

нульовий стан рівноваги буде асимптотично стійким.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримані нові науково обґрунтовані результати дослідження стійкості систем з перемиканням, що складаються з підсистем диференціальних і різницевих рівнянь. Результати базуються на використанні другого методу Ляпунова. Отримані конструктивні оцінки стійкості слабо нелінійних системи із запізненням, які складаються з підсистем, що описуються диференціальними та різницевими рівняннями. Отримані достатні умови існування спільної функції Ляпунова для систем з перемиканнями.

Дисертація є новим комплексним дослідженням, яке присвячене розробці методів дослідження динаміки процесів, що моделюються сукупністю диференціальних та різницевих рівнянь, що поєднані законами перемикання. У дослідженні набули подальшого розвитку методи системного аналізу, зокрема, теорії різницевих рівнянь, теорії диференціальних рівнянь, теорії стійкості динамічних систем.

У дисертаційній роботі отримані такі основні результати:

вперше:

– отримано умови існування спільної функції Ляпунова для систем лінійних диференціальних та різницевих систем;

– отримано умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги систем з перемиканням;

– отримано конструктивні умови асимптотичної стійкості стаціонарних систем з запізненням;

удосконалено:

– умови інтервальної стійкості і оцінки збіжності різницевих систем;

набули подальшого розвитку:

– умови стійкості систем з запізненням.

Результати дисертаційної роботи були використані в рамках наукових-дослідницьких тем: № 11БФ015-01 «Розвиток теорії та створення програмно-алгоритмічних засобів для моделювання, аналізу, оцінки та оптимізації складних систем в умовах невизначеності» (№ ДР 0111U004651, виконувалась у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка у 2011 - 2015 р.) і № 16БФ015-01 «Створення інформаційно-аналітичних технологій моделювання та оптимізації структурно заданих систем» (№ ДР 0116U004775, виконувалась у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка у 2016 - 2018 р.). (довідка від 05.04.2017 р.). А також вони були впроваджені в навчальний процес кафедри моделювання складних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка у 2014–2015 н.р. в рамках спецкурсу «Моделювання систем з післядією» (довідка від 05.04.2017 р.).

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових фахових виданнях України:

1. Sirenko A.S. An algorithm for finding a common Lyapunov function of two linear difference systems / A.S. Sirenko // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2014. – №1 – С. 107 –113.

2. Сиренко А.С. О существовании единой функции Ляпунова для линейных стационарных систем / А.С. Сиренко, Д.Я. Хусаинов // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Кібернетика. – 2013. – №1(13) – С. 46 – 51.

3. Хусаинов Д.Я. Об устойчивости линейных систем с переключениями / Д.Я. Хусаинов, А.С. Сиренко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Кібернетика. – 2014. – №1(14) – С. 54 – 60.

4. Шакотько Т.І. Про один підхід до дослідження стійкості моделі нейронних мереж з запізненням другим методу Ляпунова / Т.І. Шакотько, Д.Я. Хусаїнов, А.С. Сіренко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2014. – №4 – С. 232 – 238.

5. Сіренко А.С. Про одну різницеву систему зі слабкою нелінійністю / А.С. Сіренко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2015. – №1 – С.168 – 172.

6. Хусаинов Д.Я. Устойчивость неравномерная по запаздыванию одной слаболинейной ситсемы с последействием / Д.Я. Хусаинов, Й. Диблик, Я. Баштинец, А.С. Сиренко // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Том 29. – С. 129 – 146.

Статті у міжнародних наукових фахових виданнях,

які входять до міжнародних наукометричних баз даних:

7. Stability and exponential stability of linear discrete systems with constant coefficients and single delay / J. Diblík, D.Ya. Khusainov, J. Baštinec, A.S. Sirenko // Applied Mathematics and Computation. – 2015. – №269. – P. 9 – 16.

8. Exponential stability of linear discrete systems with constant coefcients and single delay / J. Diblık, D.Ya. Khusainov, J. Bastinec, A.S. Sirenko // Applied Mathematics Letters. – 2016. – №51. – P. 68 – 73.

9. Exponential stability of perturbed linear discrete systems / J. Diblık, D.Ya. Khusainov, J. Bastinec, A.S. Sirenko // Advances in Difference Equations. – 2016. – №2. – P. 1 – 20.

Тези наукових доповідей:

10. Сиренко А.С. Построение единой функции Ляпунова для линейных стационарных систем / А.С. Сиренко // XVI International Conference Dynamical System Modeling and Stability Investigations (DSMSI 2013): тези доповідей, 29 – 31 травня 2013р., м. Київ, Україна. – Київ, 2013. – С. 128.

11. Сиренко А.С. Итервальная устойчивость линейных дискретных систем / А.С. Сиренко // XV міжнародна наукова конференца ім. акад. Михайла Кравчука: тези доповідей, 15 – 17 травня 2014р., м. Київ, Україна. – Київ, 2014. – С. 286 – 288.

12. Study of interval stability of discrete systems by Lyapunov function method / J. Bastinec, J. Diblík, A. Sirenko, D. Khusainov // Mezinárodní konference Matematika, Informační Technologie a Aplikované Vědy (MITAV 2014): тези доповідей, 19 – 20 червня 2014р., Brno, Czech Republic. – Brno, 2014. – P. 8.

13. Stability and convergence of linear discrete systems with delay / J. Bastinec, J. Diblík, A. Sirenko, D. Khusainov // Conference on Differential and Difference Equations and Applications (CDDEA 2014): тези доповідей, 23 – 27 червня 2014р., Jasna, Slovak Republic. – Jasna, 2014. – P. 9 – 10.

14. Сиренко А.С. Об устойчивости одной нелинейной дискретной системы / А.С. Сиренко // VII Міжнародна конференція імені академіка І. І. Ляшка: тези доповідей, 8 – 9 жовтня 2014р., м. Київ, Україна. – Київ, 2014. – С. 97.

15. Сіренко А.С. Стійкість процесів, що описують динаміку нейромереж / А.С. Сіренко, Д.Я. Хусаїнов // XXV International Conference Problems Of Decision Making Under Uncertainties (PDMU 2015): тези доповідей, 11 – 15 травня 2015р., м. Східниця, Україна. – Київ, 2015. – С. 128 – 130.

16. Сиренко А.С. Исследование устойчивости слабо нелинейных разностных систем с запаздыванием / А.С. Сиренко // XVII International Conference Dynamical System Modeling and Stability Investigations (DSMSI 2015): тези доповідей, 27 – 29 травня 2015р., м. Київ, Україна. - Київ, 2015. – С. 52.

17. Exponential stability of linear discrete systems with constant coefficients and single delay / J. Diblík, J. Bastinec, J. Safarik, A. Sirenko // XVII International Conference

Dynamical System Modeling and Stability Investigations (DSMSI 2015): тези доповідей, 27 – 29 травня 2015р., м. Київ, Україна. – Київ, 2015. – С. 138 – 140.

18. Sirenko A.S. Stability of a weakly nonlinear models with delay Lyapunov second method / A.S. Sirenko, T.I. Shakotjko // Mezinárodní konference Matematika, Informační Technologie a Aplikované Vědy (MITAV 2015): тези доповідей, 18 – 19 червня 2015р., Brno, Czech Republic. – Brno, 2015. – P. 47.

19. Sirenko A. Stability investigation of a nonlinear model describing the dynamics of neural networks / A. Sirenko, D. Khusainov // XXVI International Conference Problems Of Decision Making Under Uncertainties (PDMU 2015): тези доповідей, 24 – 28 серпня 2015р., м. Одеса, Україна. – Київ, 2015. – С. 37 – 38.

20. Сиренко А.С. Об устойчивости систем с переключениями / А.С. Сиренко, Д.Я. Хусаинов // VIII Міжнародна конференція імені академіка І. І. Ляшка: тези доповідей, 8 – 9 жовтня 2015р., м. Київ, Україна. – К.: 2015. – С. 87.

АНОТАЦІЯ

Сіренко А.С. Дослідження стійкості динамічних систем з перемиканням та запізненням. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико–математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2019.

Дисертаційна робота присвячена розробці методів дослідження динаміки процесів, що моделюються сукупністю диференціальних та різницевих рівнянь з перемиканням. Основна увага зосереджена на одній із основних задач аналізу динаміки таких систем, а саме на дослідженні стійкості, як ключової якісної властивості, що важлива для проектування систем керування.

У роботі отриманні конструктивні оцінки стійкості лінійних та слабо нелінійних систем, зокрема із запізненням, які складаються з підсистем, що описуються лінійними диференціальними і різницевими рівняннями, а також поставлені та розв’язанні такі основні задачі:

– отримано достатні умови існування спільної функції Ляпунова для систем з перемиканнями;

– вперше обґрунтуванні допустимі оцінки збурень різницевих систем із запізненням, при яких зберігається асимптотична стійкість систем;

– за допомогою методу функцій Ляпунова отримано умови асимптотичної стійкості слабо нелінійних систем.

Отримані результати можуть бути використані у задачах дослідження стійкості динаміки літальних апаратів, інтелектуальних транспортних системах, системах автоматичного регулювання температури та в інших системах, для яких характерними є гібридні системи.

Ключові слова: гібридна система, перемикання, слабо нелінійна система, стійкість, асимптотична стійкість, запізнення, функції Ляпунова, другий метод Ляпунова, диференціальні рівняння, різницеві рівняння.

АННОТАЦИЯ

Сиренко А.С. Исследование устойчивости динамических систем с переключением и запаздыванием. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Министерства образования и науки Украины, Киев, 2019.

Диссертация посвящена важным проблемам прикладной математики, а именно – разработке методов исследования динамики процессов, которые моделируются совокупностью дифференциальных и разностных уравнений с переключениями. Основное внимание сосредоточено на одной из основных задач анализа динамики таких систем, а именно исследовании устойчивости, как ключевого качественного свойства, которая важна для проектирования систем управления.

В работе были получены конструктивные оценки устойчивости линейных и слабо нелинейных систем, в том числе с запаздыванием, состоящих из подсистем, описываемых линейными дифференциальными и разностными уравнениями.

Важные результаты в исследовании устойчивости были получены многими учеными как в нашей стране, так и за ее пределами. Прежде всего, следует отметить исследования А.М. Ляпунова, Р. Белмана, Б.П. Демидовича, Б.Н. Бублика, Ф.Г. Гаращенка, Н.Ф. Кириченка, Е.А. Барбашина, С.М. Онищенка, К.Г. Валеева, А.Г. Мазка, А.В. Попова, Д.Я. Хусаинова и их учеников, которые нашли широкое применение при решении различных прикладных задач.

Результаты работы автора основаны на методах анализа линейных систем, полученные упоминавшимися учеными. Поэтому диссертационная работа является актуальной как с теоретической, так и практической точек зрения.

Во второй главе работы рассматриваются проблемы существования единой функции Ляпунова для линейных систем с переключениями. Так же рассматриваются условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы с переключениями, состоящий из последовательности линейных дифференциальных и разностных уравнений. Методом исследований выбран метод функций Ляпунова квадратичного вида. Получены достаточные условия существования общей функции Ляпунова. Условия основаны на геометрической интерпретации множества положительно определенных функций Ляпунова, в виде конуса в пространстве положительно определенных матриц. Условия существования общей функции Ляпунова вытекают из непустого пересечения множества конусов.

В третьей главе проведено исследование устойчивости слабо нелинейных систем с запаздыванием и с нелинейной правой частью. Предварительно исследована система без запаздывания. Получены условия устойчивости нулевого состояния равновесия системы без запаздывания. Рассмотрено влияние запаздывания. Проведено исследование устойчивости ненулевого стационарного состояния равновесия. Исследование проводится методом функций Ляпунова с дополнительным условием Б.С. Разумихина.

Ключевые слова: гибридная система, переключения, слабо нелинейная система, устойчивость, асимптотическая устойчивость, запаздывания, функции

Ляпунова, второй метод Ляпунова, дифференциальные уравнения, разностные уравнения.

ABSTRACT

Sirenko A.S. Investigation of the stability of dynamic systems with switching and delay. – Manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate's degree of Sciences in Physics and Mathematics in specialty 01.05.02 – mathematical modelling and computational methods. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2019.

This dissertation is devoted to important problems of applied mathematics, namely – development methods of study the dynamics of processes wich modeled by a set of differential and difference equations for switching. The main attention is concentrated on one of the main tasks of analysis of the dynamics such systems, namely the study of sustainability as a key quality properties which essential for the design of control systems.

At the work was constructive receipt assess the stability of linear and weakly nonlinear systems, in particular with delay, consisting of subsystems described by linear differential and difference equation. Also were delivered and solved the following key objectives:

– obtain sufficient conditions for the existence of a common Lyapunov function for switching systems;

– substantiated acceptable estimates disturbances difference systems with late, in which the asymptotic stability of systems was kept;

– using the method functions Lyapunov received asymptotic stability conditions weakly nonlinear systems;

In dissertation I received the following new results:

for the first time:

– was obtain the conditions for the existence of a common Lyapunov function for systems of linear differential and difference systems;

– was obtain the conditions of asymptotic stability of the zero equilibrium state systems with switching;

– was obtain design conditions for the asymptotic stability of stationary systems with a delay;

improved:

– the conditions of interval stability and the valuation of convergence of the difference systems;

got further development:

– conditions of stability of systems with delay.

The obtained results can be used in tasks study the stability of dynamics flying apparatus, intelligent transportation systems, systems of automatic temperature control, and other mathematical models, which are characteristic of hybrid systems.

Keywords: hybrid system, switching, weakly nonlinear system, stability, asymptotic stability, delay, Lyapunov functions, second Lyapunov method, differential equations, difference equations.