МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ШЕВЧУК ЮЛІЯ МИХАЙЛІВНА

УДК 517.928.1 : 517.929 : 519.87

РОЗРОБКА ТА АНАЛІЗ ПОПУЛЯЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ПОШИРЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ

01.05.04 — системний аналіз і теорія оптимальних рішень

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2019

Дисертацією є рукопис.

Работа виконана в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України на кафедрі системного аналізу та теорії прийняття рішень.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Наконечний Олександр Григорович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, завідувач кафедри
системного аналізу та теорії прийняття рішень.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Чабанюк Ярослав Михайлович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка, професор кафедри
теорії оптимальних процесів;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Щестюк Наталія Юріївна,
Національний університет
«Києво-Могилянська академія»,
доцент кафедри математики.

Захист відбудеться «13» травня 2019 року о 14^{15} на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.26.001.35 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: м. Київ, проспект Академіка Глушкова, 4Д, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, ауд. 01.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58, зал №12.

Автореферат розісланий «9» квітня 2019 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д.26.001.35 **П.М. Зінько**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. З розвитком суспільства і техніки все більшої ваги набуває інформація та можливості її впливу на членів соціальних спільнот.

Починаючи з кінця XX-го століття низка науковців з різних країн (США, Німеччина, Російська Федерація, Великобританія та інші) надають поширенню інформації одну з провідних ролей у внутрішніх та зовнішніх соціально-політичних процесах. З цим можна пов'язати появу робіт, які висвітлюють процес розповсюдження інформації, його особливості, можливості використання у власних інтересах, формування механізмів як для поширення «корисної» інформації, так і для протидії небажаним тенденціям в суспільстві. У відповідності з сучасними тенденціями розвитку науки інструментарій для аналізу інформаційно-комунікативного простору має володіти такими рисами, як об'єктивність, міждисциплінарність та мати прикладний характер. Інструментарій точних наук дозволяє отримати адекватні обгрунтовані результати для конкретних задач аналізу процесів у інформаційно-комунікативному просторі.

У світлі вищенаведених міркувань важливими практичними задачами є розробка та аналіз популяційних моделей поширення інформації в соціумі.

Оскільки процес поширення інформації подібний з епідеміологічним розповсюдженням захворювань, останні моделі активно застосовуються для розв'язування прикладних задач в інформаційно-комунікативному просторі: Pastor-Satorras R., Vespignani A., Vynnycky E., White R.G., Miller J.C., Harko T., Lobo F.S.N., Mak M.K., Mishra B.K., Saini D.K, Івохіним Є.В. та іншими. Окремим випадком моделей поширення інформації в соціумі є електоральні моделі. Даний підхід розроблявся Фурашевим В.М., Ланде Д.В., Брайчевським С.М., Cederman L.E., Кульбою В.В., Малюгіним В.Д., Шубіним О.Н. та іншими. Природними виглядають багатоагентні моделі для опису процесів в соціумі, які досліджувалися Нейманом Дж., Губановим Д.О., Новіковим Д.О., Чхартишвілі А.Г., Frantz T., Carley K.M., Wolfram S., Tsvetovat M., Carley K. M., Cederman L.E. та іншими. Також деякі задачі, що виникають в інформаційно-комунікативному просторі, можна сформулювати у термінах теорії прийняття рішень. Розробкою і аналізом таких моделей займалися Chen X., Jiang N., Jing Y., Stojanovski G., Dimirovski G., Deichman S., Чхартишвілі А.Г., Чикрій А.О., Мащенко С.О., Наконечний О.Г. та інші. Системи однорідних диференціальних рівнянь для моделювання процесу поширення інформації в соціумі використовували Наконечний О.Г., Зінько П.М., Михайлов О.П., Петров О.П., Прончева О.Г., Маревцева Н.О., Ізмоденова К.В., Чилачава Т., Кереселідзе Н., Mishra B.K. та інші.

Одним із способів моделювання процесу поширення інформації є системи нелінійних диференціальних рівнянь. Хоч цей підхід і претендує на адекватність отриманих за його допомогою результатів, але нелінійність робить задачу знаходження аналітичних розв'язків таких систем доволі складною, а у окремих випадках, і нерозв'язною. Певні результаті в цьому напрямку були отримані Белманом Р., Bing-ten Zhang, Лєваковим А.А., Шпігельманом Е.С., Олєхніком С.Н. та іншими. Також не менш плідним підходом є метод малого параметра Пуанкаре А. Це підтверджують роботи Моісєєва Н.М., Тіхонова А.М., Мусафірова Е.В. та інших.

Теорія стійкості дає потужний апарат для аналізу поведінки моделей поширення інформації в околах особливих точок, представлених системами диференціальних рівнянь, що розроблявся Ляпуновим О.М., Четаєвим М.Г., Красовським М.М., Гіхманом Й.І., Гаращенком Ф.Г., Яценком В.О., Хусаіновим Д.Я, Мартинюком А.А., Нікітіним А.В. та іншими.

Типовими задачами для будь-якої предметної області, що описується за допомогою математичної моделі, є задачі ідентифікації параметрів, оцінки впливів, побудови прогнозних оцінок для цих моделей. Цими проблемами займалися Острем К., Белман Р., Губарєв В.Ф., Кунцевич В.М., Бакан Г.М., Лисюченко І.А., Наконечний О.Г., Ramsay J.O., Hooker G., Campbell D., Cao J., Aster R.C., Borchers B., Thurber C.H. та інші.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота є складовою частиною наукових робіт, що ведуться на кафедрі системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Дослідження виконувались в рамках науково-дослідної теми № 16БФ015-02 «Розробка нових математичних методів системного аналізу і теорії оптимальних рішень та їх застосування» (державний номер реєстрації 0116U002529, термін виконання 2016-2018 рр.).

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є аналіз розв'язків систем диференціальних рівнянь, знаходження прогнозних оцінок динамічних процесів, розробка алгоритмів оцінювання невідомих параметрів та зовнішніх впливів у моделях поширення інформації в соціумі.

Досягнення мети зумовлює розв'язання наступних задач:

– знайти аналітичні розв'язки для моделей поширення інформації в соціумі, а у випадку коли це неможливо — сформулювати умови існування додатних та обмежених розв'язків;
– знайти умови стійкості за першим наближенням в околах особливих точок для систем нелінійних диференціальних рівнянь, що моделюють процес поширення інформації в соціумі;
– розробити алгоритми знаходження оптимальних та гарантованих оцінок невідомих параметрів систем диференціальних та різницевих рівнянь;
– розробити алгоритми оцінювання зовнішніх впливів в системах диференціальних рівнянь, що моделюють процес поширення інформації, для випадків, що відрізняються різною мірою наявності апріорної інформації;
– розробити алгоритми побудови гарантованих та оптимальних прогнозних оцінок динаміки процесу поширення інформації в соціумі;
– за допомогою чисельного комп'ютерного моделювання продемонструвати адекватність і ефективність отриманих результатів.

Об'єкт дослідження. Системи нелінійних звичайних диференціальних та різницевих рівнянь, що моделюють процес поширення інформації в соціумі.

Предмет дослідження. Розв'язки систем диференціальних рівнянь. Прогнозні оцінки динамічних процесів та оцінки невідомих параметрів і зовнішніх впливів.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач у роботі використовується апарат системного аналізу, теорій диференціальних та різницевих рівнянь, теорії стійкості динамічних систем, методи ідентифікації систем, методи теорії оптимального керування, методи комп'ютерного моделювання та теорії різницевих схем для проведення аналізу числових експериментів. Для програмної реалізації алгоритмів використано систему «MATLAB».

Наукова новизна отриманих результатів. У роботі вперше отримано:

– доведено умови за яких розв'язки систем диференціальних рівнянь, що моделюють процес поширення інформації, є обмеженими та додатними;
– знайдено аналітичні розв'язки за допомогою методу малого параметру для особливого випадку моделі поширення інформації зі спеціальним виглядом параметру інтенсивності міжособистісного спілкування;
– отримано прогнозні оцінки динаміки моделей поширення інформації із спеціальним представленням зовнішнього впливу;
– розроблено алгоритми оцінювання параметрів для популяційних моделей поширення інформації, що представлені у вигляді систем диференціальних і різницевих рівнянь;
– розроблено алгоритми обчислення оптимальних оцінок впливів для випадку поширення інформаційних повідомлень з двох джерел;

Набула подальшого розвитку теорія стійкості динамічних систем, зокрема, доведено умови стійкості розв'язків за першим наближенням в околі особливих точок:

– для моделей поширення інформації з стаціонарними параметрами;
– для моделей поширення інформації із нестаціонарними параметрами та збурюючим впливом, які набувають вигляду систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто.

На модельних прикладах продемонстровано ефективність запропонованих в дисертаційній роботі алгоритмів.

Практичне значення отриманих результатів. В роботі використовуються методи системного аналізу до популяційних моделей поширення інформації. Це дозволяє отримати нові знання про предметну область, зокрема — аналітичні розв'язки для окремих випадків систем диференціальних рівнянь, що моделюють процес поширення інформації в соціумі, а також сформулювати для них умови стійкості за першим наближенням в околах особливих точок. Розроблені алгоритми оцінювання параметрів та впливів дають можливість побудови конкретних математичних моделей поширення інформації на основі спостережень. Результатом роботи розробленого алгоритму для отримання прогнозних оцінок є адекватний прогноз динаміки процесу поширення інформації в конкретних соціальних групах.

Наукові та прикладні результати дисертаційної роботи використовуються в навчальному процесі кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка при викладанні курсів «Прийняття рішень в умовах невизначеності», «Сучасні методи у вибіркових дослідженнях» та «Моделі оцінювання в прикладних дослідженнях». Також ці результати можуть знайти застосування в навчальних процесах фізико-математичних факультетів інших університетів України.

Особистий внесок здобувача. Дисертація є самостійною науковою роботою, в якій висвітлені власні ідеї і розробки автора, що дозволили вирішити поставлені задачі. У спільних роботах із науковим керівником О.Г. Наконечним було сформульовано постановки задач та проаналізовано вибір методів їх дослідження, а також обговорено отримані результати.

У роботах, що виконані у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає в наступному:

– в роботі [1] формулювання наслідку до твердження 1, формулювання та доведення твердження 2, а також наслідку до нього, твердження 4, твердження 6, а також наслідку до нього, та теореми 10;
– в роботі [4] доведення твердження 1, а також формулювання та доведення наслідку до твердження 2;
– в роботі [5] доведення твердження 3, а також формулювання наслідку до нього, опис прикладу знаходження УОСК-оцінки, проведення та оформлення результатів чисельного експерименту прогнозування динаміки процесу поширення інформації в соціумі, отриманими в системі «MATLAB»;
– в роботі [6] доведення твердження 1 та твердження 2, проведення та оформлення результатів чисельного експерименту оцінювання стійкості за першим наближенням в околі особливих точок системи, що моделює процес поширення інформації в соціумі, отриманими в системі «MATLAB»;
– в роботі [7] доведення твердження 2 та твердження 4, формулювання та доведення леми 1 та леми 4, а також наслідку до останньої, твердження 7, леми 3, твердження 9 та леми 7, опис прикладу оцінювання параметрів для системи диференціальних рівнянь, що зустрічається в задачах розповсюдження інформації, та ілюстрація його результатами, отриманими в системі «MATLAB».

Апробація матеріалів дисертації. Результати дослідження були представлені та схвалені на багатьох наукових міжнародних конференціях, де отримали позитивну оцінку.

Основні результати були апробовані на конференціях:

– XXVII International Conference PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2016). Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27, 2016;
– XXIX International Conference PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2017). Mukachevo, Ukraine, May 10-13, 2017;
– XVIII International Conference "Dynamical system modeling and stability investigation". Kiev, Ukraine, May 24-26, 2017;
– XXX International Conference PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2017). Vilnius, Lithuania, August 14-19, 2017;
– Ukrainian conference on applied mathematics. Lviv, Ukraine , September 28-30, 2017;
– Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій». Рівне, Україна, 2-4 березня, 2018;

– XXXI International Conference PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2018). Lankaran-Baku, Respublic of Azerbaijan, July 3-8, 2018;
– XXXII International Conference PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2017). Prague, Czech Rebublic, August 27-31, 2018;
– XXIV Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». Львів, Україна, 26-28 вересня, 2018;

а також на науковому семінарі кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, який пройшов у місті Києві (Україна) 20 вересня 2018 року.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 16 наукових праць, у тому числі: 7 наукових статей у фахових виданнях (з них 1 стаття у виданні, яке входить до наукометричної бази даних SCOPUS), та 9 матеріалів і тез доповідей на наукових конференціях.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з 178 стор. та містить в собі такі структурні елементи: титульний аркуш, анотація, зміст, основна частина на 137 стор. (складається з вступу, трьох розділів і висновків), список використаних джерел із 122 найменувань на 14 стор. та додатки на 6 стор.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обгрунтовано актуальність обраної теми, визначено мету і завдання, об'єкт, предмет, методи дослідження; окреслено можливі практичні застосування одержаних результатів, особистий внесок здобувача, апробацію отриманих результатів.

У першому розділі **"Огляд літератури"** розглянуто основні підходи до математичного моделювання предметної області. Особливу увагу приділено імітаційним моделям, зокрема, у вигляді систем диференціальних і різницевих рівнянь, які досліджуватимуться в наступних розділах. Наведено основні роботи за даною тематикою, проведено порівняльний аналіз відповідної літератури.

У другому розділі **"Аналіз розв'язків систем диференціальних рівнянь, що моделюють процес поширення інформації"** проведено дослідження розв'язків моделей процесу поширення інформації.

Розглянуто деяку соціальну групу чисельністю L осіб, на яку провадиться інформаційна дія по N каналах, причому число суб'єктів, що сприйняли інформацію k-го типу ($k = \overline{1,N}$) залежить як від зовнішньої дії, так і від спілкування суб'єктів між собою. Позначимо через $x_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ число суб'єктів, що сприйняли інформацію k-го типу ($k = \overline{1,N}$) в момент t, через $b_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ — інтенсивності спілкування, $u_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ — зовнішні дії, тоді зміна з часом величини $x_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ описується системою диференціальних рівнянь з початковими умовами вигляду:

$$\dot{x}_k(t) = b_k(t)x_k(t)\left(L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\right) + u_k(t), t \in (0,T), x_k(0) = x_k^0, k = \overline{1,N}. \quad (1)$$

У підрозділі **2.1** знайдено аналітичні розв'язки для моделей поширення інформації в соціумі, а у випадку, коли це неможливо — знайдено умови існування додатних та обмежених розв'язків.

Досліджено систему (1) при нестаціонарних параметрах і зовнішніх керуваннях, які є програмними або з оберненим зв'язком спеціального вигляду.

Теорема 1. *Нехай для параметрів системи (1) виконуються умови* $b_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$ *неперервні функції на* $[0,T]$, *а* $u_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$ *невід'ємні та неперервні на* $[0,T]$ *функції; виконуються нерівності* $x_k(0)=x_k^0>0$, $k=\overline{1,N}$ *та* $L-\sum_{i=1}^N x_i(t)\geqslant 0$, $t\in(0,T)$. *Тоді для розв'язків системи (1) справедливі співвідношення:*

$$0\leqslant x_k(t)\leqslant d_k(t), k=\overline{1,N}, t\in(0,T),$$

де

$$d_k(t)=x_k^0\exp\left\{\int_0^t \bar b_k(s)ds\right\}+\int_0^t\exp\left\{\int_\tau^t \bar b_k(s)ds\right\}u_k(\tau)d\tau, k=\overline{1,N}, t\in(0,T),$$

$$\tilde z(t)=x^{-1}(0)\exp\left\{-L\int_0^t c(s)ds\right\}+\int_0^t\exp\left\{-L\int_\tau^t c(s)ds\right\}c(\tau)d\tau, t\in(0,T),$$

$$\bar b_k(t)=b_k(t)(L-\tilde z^{-1}(t)), k=\overline{1,N}, x(t)=\sum_{i=1}^N x_i(t), c(t)=\min_{1\leqslant k\leqslant N} b_k(t), t\in(0,T).$$

У підрозділі **2.2** для систем диференціальних рівнянь спеціального вигляду для знаходження наближених аналітичних розв'язків використано метод малого параметру Пуанкаре А.

Проаналазовано окремий випадок системи (1) :

$$\dot x_k(t)=(a_k(t)+(b(t)+\varepsilon b_k(t))x_k(t))\left(L-\sum_{i=1}^N x_i(t)\right), k=\overline{1,N}, t\in(0,T), \tag{2}$$

з початковими умовами $x_k(0)=x_k^0, k=\overline{1,N}$, де ε — величина достатнього порядку малості.

Теорема 2. *Нехай* $x_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$ *розв'язки системи (2), тоді має місце представлення:*

$$x_k(t)=x_k^0(t)\exp\left\{\int_0^t b(s)y(s)ds\right\}+\int_0^t\exp\left\{\int_\tau^t y(s)b(s)ds\right\}\times$$
$$\times(a_k(\tau)y(\tau)+\varepsilon b_k(\tau)x_{k0}(\tau)y(\tau)-\varepsilon(a_k(\tau)+b(\tau)x_{k0}(\tau))z(\tau))d\tau+o(\varepsilon), k=\overline{1,N}, t\in(0,T),$$

де

$$x_{k0}(t)=x_k^0\exp\left\{\int_0^t b(s)y(s)ds\right\}+\int_0^t\exp\left\{\int_0^t b(s)y(s)ds\right\}a_k(\tau)y(\tau)d\tau, k=\overline{1,N}, t\in(0,T),$$

$$x_{k1}(t)=\int_0^t\exp\left\{\int_\tau^t y(s)b(s)ds\right\}(b_k(\tau)x_{k0}(\tau)y(\tau)-$$
$$-(a_k(\tau)+b(\tau)x_{k0}(\tau))z(\tau))d\tau, k=\overline{1,N}, t\in(0,T),$$

$$z(t)=\int_0^t\exp\left\{\int_\tau^t(2y(s)b(s)-\hat a(s))ds\right\}y(\tau)\sum_{i=1}^N b_i(\tau)x_{i0}(\tau)d\tau, t\in(0,T),$$

$$y(t) = y(0)\left(\exp\left\{\int_0^t \hat{a}(s)ds\right\} - y(0)\int_0^T \exp\left\{\int_\tau^t \hat{a}(s)ds\right\} b(\tau)d\tau\right)^{-1}, t \in (0,T),$$

$$y(0) = L - \sum_{i=1}^{N} x_i^0, \hat{a}(t) = b(t)L + \sum_{i=1}^{N} a_i(t), t \in (0,T).$$

У підрозділі **2.3** знайдено умови, за яких система є стійкою за першим наближенням в околах особливих точок. Ця задача розв'язана як для моделей у формі систем нелінійних диференціальних рівнянь із стаціонарними параметрами, так і для моделей з нестаціонарними параметрами, на які відбувається збурюючий вплив.

Проведено аналіз випадку, коли параметри системи (1) стаціонарні і зовнішня дія моделюється як $u_k(t) = \sum_{i=1}^N a_{ki}x_i(t) + c_k$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, тоді отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_k(t) = b_k x_k(t)\left(L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\right) + \sum_{i=1}^{N} a_{ki}x_i(t) + c_k, k = \overline{1,N}, t \in (0,T) \tag{3}$$

з початковими умовами $x_k(0) = x_k^0, k = \overline{1,N}$.

Система диференціальних рівнянь (3) допускає стаціонарні розв'язки $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N)^*$ (тут через * позначено символ транспонування), що задовольняють умови:

$$\begin{cases} L - \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i = 0, \\ \sum_{i=1}^N a_{ki}\tilde{x}_i + c_k = 0, k = \overline{1,N}. \end{cases}$$

Для знаходження умов стійкості системи в околі точки $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N)^*$ проаналізовано лінійне наближення системи (3). Уведено позначення $\overline{X}(t) = (\overline{x}_1(t), \ldots, \overline{x}_N(t))^*$, $\overline{x}_k(t) = x_k(t) - \tilde{x}_k$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$ і досліджено систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь $\overline{X}'(t) = A\overline{X}(t)$, $t \in (0,T)$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} - b_1\left(\tilde{x}_1 - L + \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i\right) & \ldots & a_{1N} - b_1\tilde{x}_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N1} - b_N\tilde{x}_N & \ldots & a_{NN} - b_N\left(\tilde{x}_N - L + \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i\right) \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Якщо для системи (3) справедливо*

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & L \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} & -c_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} & -c_N \end{pmatrix} = N,$$

то для того, щоб розв'язки даної системи були стійкими в околі стаціонарної точки $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N)^*$ за першим наближенням, необхідно, а у випадку при $N = 4$ і достатньо, щоб виконувались умови:

$$\begin{cases} Sp(A) < 0, \\ detA > 0, \\ Sp(A^+) - a_2 Sp(A) > 0, \\ (Sp(A))^2 detA - Sp(A^+)(Sp(A^+) - a_2 Sp(A)) < 0, \end{cases}$$

де A^{+} — *союзна до матриці* A, $Sp(A)$ — *слід матриці* A, $detA$ — *детермінант матриці* A,

$$a_2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}\left(a_{ii}-b_i\left(\tilde{x}_i-L+\sum_{l=1}^{4}\tilde{x}_l\right)\right)\left(a_{jj}-b_j\left(\tilde{x}_j-L+\sum_{l=1}^{4}\tilde{x}_l\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}(a_{ij}-b_i\tilde{x}_i)(a_{ji}-b_j\tilde{x}_j).$$

Також розглянуто окремий випадок системи (1) при

$$u_k(t)=a_k(t)\left(L-\sum_{i=1}^{N}x_i(t)\right)+\gamma_k(t)(x_k(t)-m_kL),k=\overline{1,N},t\in(0,T).$$

Нехай відбувається збурюючий вплив на параметри інтенсивності спілкування $b_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$. При таких припущеннях модель можна представити у вигляді системи стохастичних диференційних рівнянь Іто:

$$dx_k(t)=\left[(a_k(t)+b_k(t)x_k(t))\left(L-\sum_{i=1}^{N}x_i(t)\right)+\gamma_k(t)(x_k(t)-m_kL)\right]dt+$$

$$+g_k(t)x_k(t)\left(L-\sum_{i=1}^{N}x_i(t)\right)dw_k(t),k=\overline{1,N},t\in(0,T), \tag{4}$$

з початковими умовами $x_k(0)=x_k^0,k=\overline{1,N}$, де $w_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$ — Вінерівський процес, $dx_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$ та $dw_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$ — відповідні стохастичні диференціали процесів $x_k(t),k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$ та $w_k(t),k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$ в розумінні Іто.

В силу спеціального представлення зовнішнього впливу $u_k(t)$, $k=\overline{1,N}$, $t\in(0,T)$ система (4) має особливу точку $(m_1L,...,m_NL)^{*}$. Увівши позначення $\overline{X}(t)=(\overline{x}_1(t),\ldots,\overline{x}_N(t))^{*}$, $\overline{x}_k(t)=$ $=x_k(t)-m_kL$, $k=\overline{1,N}$, проаналізовано лінійне наближення системи (4) у матричній формі:

$$d\overline{X}(t)=A(t)\overline{X}(t)dt+\sum_{i=1}^{N}\overline{x}_i(t)B(t)dw(t),t\in(0,T), \tag{5}$$

де

$$A(t)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)-a_1(t)-b_1(t)m_1L & \ldots & -a_1(t)-b_1(t)m_1L\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ -a_N(t)-b_n(t)m_NL & \ldots & \gamma_N(t)-a_N(t)-b_N(t)m_NL\end{pmatrix},t\in(0,T),$$

$$B(t)=\begin{pmatrix}-g_1(t)m_1L & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & -g_N(t)m_NL\end{pmatrix},t\in(0,T).$$

Теорема 4. *Для того, щоб розв'язки системи (4) були асимптотично стійкими в середньо-квадратичному в околі особливої точки* $(m_1L,...,m_NL)^{*}$ *за першим наближенням, необхідно і достатньо виконання умови:*

$$\frac{1}{t}\int_0^t\lambda_{max}(D_N(\tau))d\tau\leqslant -c,c>0,\forall t,$$

де $\lambda_{max}(D_N(t))$, $t \in (0,T)$ *— найбільше власне число матриці* $D_N(t), t \in (0,T)$:

$$D_N(t) = \frac{1}{2}[A(t) + A^*(t) + SpB(t)^*B(t)E_n + (A(t))^s + (A(t)^*)^s + (SpB(t)^*B(t)E_N)^s], t \in (0,T),$$

тут $(A(t))^s$, $t \in (0,T)$ *— ермітово-спряжена до матриці* $A(t)$, $t \in (0,T)$.

У третьому розділі **"Оцінювання в популяційних моделях поширення інформації"** розв'язано задачі побудови алгоритмів оцінювання параметрів та зовнішніх впливів моделі за умови наявності спостережень за досліджуваною системою. Не менш важливою задачею, розв'язок якої дозволяє ефективно працювати з математичною моделлю поширення інформації у соціумі, є задача знаходження прогнозних оцінок динаміки, яка також досліджена в цьому розділі.

У підрозділі **3.1** проаналізовано методи побудови оцінок параметрів систем диференціальних рівнянь.

Нехай на інтервалі $t \in (0,T)$ відстежується вектор-функція $x(t) \in R^N$, яка є узагальненим розв'язком рівняння:

$$\dot{x}(t) = F(t,x(t))\varphi(t) + f(t,x(t)) + \eta(t), t \in (0,T), \tag{6}$$

де $F(t,x(t))$, $t \in (0,T)$ — задана матрична функція розмірності $N \times M$, $f(t,x(t)) \in R^M$, $t \in (0,T)$ — задана вектор-функція, $\varphi(t) \in R^M$, $\eta(t) \in R^N$, $t \in (0,T)$ — невідомі вектор-функції.

Позначимо через $L_{2,M}(0,T)$ та $L_{2,N}(0,T)$ — простори вимірних інтегрованих з квадратом на $(0,T)$ функцій із просторів R^M та R^N відповідно. Припустимо, що $F(t,x(t))$ і $f(t,x(t))$, $t \in (0,T)$ — обмежені та неперервні на $(0,T)$ функції своїх аргументів, функція $\varphi(t) \in Q$, $t \in (0,T)$, де Q — клас $k-1$ $(k>1)$ разів неперервно диференційованих вектор-функцій, для яких існує узагальнена похідна k-го порядку; також припустимо, що $\varphi(t)$, $t \in (0,T)$ належить простору $L_{2,M}(0,T)$, а функція $\eta(t)$, $t \in (0,T)$ — простору $L_{2,N}(0,T)$.

Означення 1. Під *узагальненим розв'язком* рівняння (6) з початковою умовою $x(0) = x^0$ розуміємо вектор-функцію $x(t)$, $t \in (0,T)$, яка є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = x^0 + \int_0^t F(\tau, x(\tau))\varphi(\tau)d\tau + \int_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau + \tilde{\eta}(t), t \in (0,T), \tag{7}$$

де $\tilde{\eta}(t) = \int_0^t \eta(\tau)d\tau, t \in (0,T)$.

Припускаємо, що розв'язок рівняння (7) існує та єдиний; $(\varphi, \tilde{\eta}) \in G$, причому множина G задається у вигляді:

$$G = \{(\varphi, \tilde{\eta}) : \Phi(\varphi, \tilde{\eta}) \leqslant \gamma^2(T)\}, \Phi(\varphi, \tilde{\eta}) = \int_0^T q_1^2(\tau)|\varphi^{(k)}(\tau)|^2 d\tau + \int_0^T q_2^2(\tau)|\tilde{\eta}(\tau)|^2 d\tau,$$

де $q_i(t)$, $i = 1,2$, $t \in (0,T)$ — неперервні на $(0,T)$ функції, такі що для деякого числового параметра $v > 0$ виконуються нерівності $q_i^2(t) \geqslant v$, $i = 1,2$, $t \in (0,T)$; $\gamma^2(T)$ — відоме значення.

Позначимо через $y(t)$, $t \in (0,T)$ та $\psi(t), t \in (0,T)$ функції:

$$y(t) = x(t) - x(0) - \int_0^t f(\tau,x(\tau))d\tau, t \in (0,T), \psi(t) = \int_0^t F(\tau, x(\tau))\varphi(\tau)d\tau, t \in (0,T),$$

а через G_1 — множину вигляду $G_1 = \{\varphi : \Phi(\varphi, y - \psi) \leqslant \gamma^2(T)\}$.

Означення 2. Функцію $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$, яка знаходиться з умови $\hat{\varphi} \in Arg \min\limits_{\varphi \in G_1} \Phi(\varphi, y - \psi)$, назвемо *оптимальною за функціоналом.*

Означення 3. Функцію $\hat{\varphi}_1(t)$, $t \in (0,T)$, що знаходиться з умови:

$$\inf_{\varphi_1 \in G_1} \sup_{\varphi_2 \in G_1} \|\varphi_1 - \varphi_2\| = \sup_{\varphi_2 \in G_1} \|\hat{\varphi}_1 - \varphi_2\| = \sigma,$$

де $\|\varphi\| = \left\{ \int_0^T |\varphi(\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2}$, назвемо *гарантованою L_2-оцінкою* функції $\varphi(t)$, $t \in (0,T)$, а величину σ — *гарантованою L_2-похибкою* функції $\hat{\varphi}_1(t)$, $t \in (0,T)$.

Теорема 5. *Має місце представлення:*

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi^{(k)}(\tau) d\tau + \sum_{s=0}^{k-1} c_s t^s, t \in (0,T),$$

де $c_s = \varphi^{(s)}(0)$, $s = \overline{1,k-1}$.

Теорема 6. *Оптимальна за функціоналом оцінка* $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$ *має вигляд:*

$$\hat{\varphi}(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \hat{u}(s) ds + \sum_{p=0}^{k-1} \hat{c}_p t^p, t \in (0,T),$$

де

$$\hat{u}(s) = \bar{u}_1(s) + \sum_{p=0}^{k-1} U_p(s) \hat{c}_p, s \in (0,T),$$

а вектор $\hat{c} = (\hat{c}_0, \ldots, \hat{c}_{k-1})^*$ *є розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь:*

$$\sum_{p_2=0}^{k-1} A_{p_1,p_2} c_{p_2} = a_{p_1}, p_1 = \overline{0,k-1},$$

$$A_{p_1,p_2} = \int_0^T q_1^2(t) U_{p_1}^*(t) U_{p_2}(t) dt + \int_0^T q_2^2(t) F_{3p_1}^*(t) F_{3p_2}(t) dt, p_1,p_2 = \overline{0,k-1},$$

$$F_{3p}(t) = \int_0^T F_2(t,\tau) U_p(\tau) d\tau, p = \overline{0,k-1}, t \in (0,T),$$

$$a_p = -\int_0^T q_1^2(t) U_p^*(t) \bar{u}_1(t) dt + \int_0^T q_2^2(t) F_{3p}^*(t) \bar{y}(t) dt, p = \overline{0,k-1}, t \in (0,T),$$

$$\bar{y}(t) = \tilde{y}(t) - \int_0^T F_2(t,\tau) \bar{u}_1(\tau) d\tau, t \in (0,T),$$

$$b = \int_0^T q_1^2(t) |\bar{u}_1(t)|^2 dt + \int_0^T q_2^2(t) |\tilde{y}(t)|^2 dt, \tilde{y}(t) = y(t) - \sum_{p=0}^{k-1} {}_p \tau^p, t \in (0,T),$$

$$F_2(t,s) = \int_0^T \chi_{(0,\tau)}(s) \frac{(\tau - s)^{k-1}}{(k-1)!} F_1(t,\tau) d\tau, t,s \in (0,T),$$

$$\chi_{(0,t)}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in (0,t), \\ 0, & \tau \notin (0,t), \end{cases} \quad F_1(t,\tau) = \chi_{(0,t)}(\tau) F(\tau, x(\tau)), t,\tau \in (0,T).$$

Тут $\bar{u}_1(t)$, $t \in (0,T)$ *є розв'язком інтегрального рівняння вигляду:*

$$q_1^2(t)\hat{u}_1(t) + \int_0^T \bar{F}_2(t,\tau)\hat{u}_1(\tau)d\tau = \int_0^T q_2^2(\tau)F_2^*(t,\tau)y(\tau)d\tau, t \in (0,T),$$

а $U_p(t)$, $p = \overline{0,k-1}$, $t \in (0,T)$ *— розв'язок системи інтегральних рівнянь:*

$$q_1^2(t)U_p(t) + \int_0^T \bar{F}_2(t,\tau)U_p(\tau)d\tau = -g_{1p}(t), p = \overline{0,k-1}, t \in (0,T),$$

де

$$g_{1p}(t) = \int_0^T q_2^2(\tau)F_2^*(t,\tau)g_p(\tau)d\tau, p = \overline{0,k-1}, t \in (0,T),$$

$$g_p(t) = \int_0^T F_1(t,\tau)\tau^p d\tau, p = \overline{1,k-1}, \bar{F}_2(t,\tau) = \int_0^T q_2^2(s)F_2^*(t,s)F_2(t,\tau)ds, t,\tau \in (0,T).$$

Теорема 7. *Нехай множина* G_1 *— обмежена, тоді функція* $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$ *є гарантованою* L_2*-оцінкою функції* $\varphi(t)$, $t \in (0,T)$, *і при цьому гарантована* L_2*-похибка функції* $\hat{\varphi}(t)$, $t \in (0,T)$ *обчислюється за формулою:*

$$\sigma = \sup_{\varphi \in G_2} \|\varphi\|(\gamma^2(T) - I(\hat{\varphi}))^2,$$

де

$$G_2 = \{\varphi : I_1(\varphi) \leqslant 1\},$$

$$I(\varphi) = \int_0^T q_1^2(t)|\varphi^{(k)}|^2 dt + \int_0^T q_2^2(t)|y(t) - \psi(t,\varphi)|^2 dt,$$

$$I_1(\varphi) = \int_0^T q_1^2(t)|\varphi^{(k)}(t)|^2 dt + \int_0^T q_2^2(t)|\psi(t,\varphi)|^2 dt.$$

У підрозділі **3.2** аналізуються методи побудови оцінок параметрів систем різницевих рівнянь.

Нехай спостерігаються вектори $x(k) \in R^N$, $N \geqslant 1$, $k = \overline{1, m+1}$ при невідомих параметрах $a_k \in R^M$, $M \geqslant 1$, $k = \overline{1, m}$, які є розв'язками різницевих рівнянь:

$$x(k+1) = f(k,x(k))a_k + g(k,x(k)) + \eta_k, k = \overline{1,m},$$

де $f(k,x(k))$, $k = \overline{1, m}$ — задані матриці розмірності $N \times M$, $g(k,x(k)) \in R^N$, $k = \overline{1, m}$ — відомі вектори, η_k, $k = \overline{1, m}$ — невідомі вектори завад. Відомо, що $\Delta_+ a_k \in U_k \subseteq R^M$, $k = \overline{1, m-1}$, $\Delta_+ a_k = a_{k+1} - a_k$, $k = \overline{1, m-1}$. Припускаємо, що $\eta_k \in V_k \subseteq R^N$, $k = \overline{1, m}$.

Апостеріорна множина має вигляд:

$$G_a = \{a : (x(k+1) - f(k,x(k))a_k - g(k,x(k))) \in V_k, k = \overline{1,m}, \Delta_+ a_j = a_{j+1} - a_j, j = \overline{1, m-1}\},$$

де $a = (a_1, \ldots, a_m)$.

При обмежених множинах U_j, $j = \overline{1,m-1}$ та V_k, $k = \overline{1,m}$, множину G_a можна представити у вигляді:

$$G_a = \left\{ a : \sum_{k=1}^{m} q_{2k}|x(k+1) - f(k,x(k))a_k - g(k,x(k)))|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}|a_{k+1} - a_k|^2 \leqslant \beta \right\},$$

де q_{1j}, $j = \overline{1,m-1}$ та q_{2k}, $k = \overline{1,m}$, β — відомі скалярні величини.

Для множини G_a також справедливе представлення:

$$G_a = G_{a_1} \times \cdots \times G_{a_m}, a_k \in G_{a_k} \subseteq R^M, k = \overline{1,m}.$$

Уведемо функцію вигляду:

$$\Phi(a) = \sum_{k=1}^{m} q_{2k}|y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} q_{1k}|a_{k+1} - a_k|^2,$$

де $y(k) = x(k+1) - g(k,x(k)), k = \overline{1,m}, f_k = f(k,x(k)), k = \overline{1,m}.$

Означення 4. Матрицю $\hat{a} = (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_m)$, яка знаходиться з умови $\hat{a} \in Arg \min\limits_{a \in G_a} \Phi(a)$, назвемо *оптимальною оцінкою* за функцією $\Phi(a)$.

Означення 5. Назвемо *гарантованою оцінкою параметрів* a_k, $k = \overline{1,m}$ матрицю $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m)$, яка знаходиться з умови:

$$\max_{a'' \in G_a} \|\tilde{a} - a''\| = \min_{a' \in G_a} \max_{a'' \in G_a} \|a' - a''\| = \sigma,$$

а σ назвемо похибкою гарантованої оцінки $\tilde{a}$ (тут $\|A\| = \{SpAA^*\}^{1/2}$).

Теорема 8. *Оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка $\hat{a}$ обчислюється за формулою:*

$$\hat{a} = A^{-1}b,$$

де $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^m$ — тръохдіагональна матриця з елементами $a_{k,k-1} = -q_{1,k-1}$, $a_{k,k} = q_{1,k-1}+$ $+q_{1,k} + q_{2k}f_k^* f_k$, $a_{k,k+1} = -q_{1k}$, $k = \overline{2,m-1}$, $a_{11} = q_{11} + q_{21}f_1^* f_1$, $a_{12} = -q_{11}$, $a_{m,m-1} = -q_{m,m-1}$, $a_{m,m} = q_{m,m-1} + q_{2m}f_m^* f_m$; $b = (q_{21}f_1^* y(1), \ldots, q_{2k}f_k^* y(k), \ldots, q_{2m}f_m^* y(m))^*$.

Теорема 9. *Оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка $\hat{a}$ є гарантованою оцінкою для матриці a, і при цьому для похибки гарантованої оцінки справедлива рівність:*

$$\sigma = \lambda_{max}^{1/2}(A^{-1})(\beta - \Phi(\hat{a}))^{1/2},$$

де $\lambda_{max}(A^{-1})$ найбільше власне число матриці A^{-1}.

Підрозділ **3.3** присвячений знаходженню оцінок зовнішніх впливів для моделей поширення інформації в соціумі спеціального вигляду.

Досліджено особливий випадок системи (1) поширення двох типів інформаційних повідомлень. Позначимо $a_i(t)$, $i = 1,2$, $t \in (0,T)$ — інтенсивності спілкування, $u_i(t)$, $i = 1,2$, $t \in (0,T)$ — зовнішні впливи, $c_i(t)$, $i = 1,2$, $t \in (0,T)$ — інтенсивності зовнішніх впливів. Тоді зміну з часом величин $x_i(t)$, $i = 1,2$, $t \in (0,T)$ можливо описати системою диференціальних рівнянь з початковими умовами:

$$\dot{x}_i(t) = a_i(t)x_i(t)\left(L - x_1(t) - x_2(t)\right) + c_i(t)u_i(t), x_i(0) = x_i^0, i = 1,2, t \in (0,T). \tag{8}$$

Розглянуто випадок, коли для системи (8) відомі функції $a_i(t)$, $c_i(t)$, $i = 1{,}2$, $u_2(t)$, $t \in (0{,}T)$, які є неперервними на $(0{,}T)$; $u_1(t)$ — невідома функція зовнішнього впливу, що задовольняє умову $u_1(t) \geqslant 0$ на часовому проміжку $(0{,}T)$.

Нехай в точках $t_1 < t_2 < ... < t_m, t_k \in (0{,}T)$, $k = \overline{1,m}$ спостерігаються функції $x_1(t)$ та $x_2(t)$, $t \in (0{,}T)$ при певній $u_1(t)$, $t \in (0{,}T)$:

$$y_{ik} = x_i(t_k) + \eta_{ik}, k = \overline{1{,}m}, i = 1{,}2,$$

де η_{ik}, $k = \overline{1{,}m}$, $i = 1{,}2$ — похибки вимірювань.

Уведемо позначення $y_i = (y_{i1}, \ldots, y_{im})^*$, $x_i = (x_i(t_1), \ldots, x_i(t_m))^*$, $\eta_i = (\eta_{i1}, \ldots, \eta_{im})^*$, $i = 1{,}2$.

Відомо, що $u_1(t)$, $t \in (0{,}T)$ та η_i, $i = 1{,}2$ належать множині:

$$G = \left\{(\eta_1, \eta_2, u_1) : F_1(\eta_1) + F_2(\eta_2) + F_3(u_1(\cdot)) \leqslant \gamma^2(T), u_1(t) \geqslant 0\right\},$$

де

$$F_i(\eta_i) = \sum_{k=1}^{m} q_{1ik}^2 \eta_{ik}^2, i = 1{,}2, F_3(u_1(\cdot)) = \int_0^T q_2^2(t) u_1(t) dt$$

і q_{1ik}^2, $i = 1{,}2$, $\gamma^2(T)$ — відомі скалярні величини, а $q_2^2(t)$, $t \in (0{,}T)$ — відома функція.

Апостеріорна множина G_y має вигляд:

$$G_y = \left\{u_1 : F_1(y_1 - x_1) + F_2(y_2 - x_2) + F_3(u_1(\cdot)) \leqslant \gamma^2(T), u_1(t) \geqslant 0\right\},$$

де $F_i(y_i - x_i) = \sum_{k=1}^{m} q_{1ik}^2 (y_{ik} - x_i(t_k))^2, i = 1{,}2$.

Означення 6. Функцію $u_1(t) \in G_y$ назвемо *апостеріорною оцінкою* функції $u_1(t)$, $t \in (0{,}T)$.

Означення 7. Функцію $\tilde{u}_1(t) \in G_y$, $t \in (0{,}T)$, що знаходиться з умови:

$$\inf_{u_1 \in G_y} \sup_{v_1 \in G_y} \|u_1 - v_1\| = \sup_{v_1 \in G_y} \|\tilde{u}_1 - v_1\| = \sigma,$$

де $\|v\| = \left\{\int_0^T (v(\tau))^2 d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}$, назвемо *гарантованою оцінкою* функції $u_1(t)$, $t \in (0{,}T)$, а величину σ — *гарантованою похибкою* оцінки $\tilde{u}_1(t)$.

Позначимо

$$I(u_1(\cdot)) = F_1(y_1 - x_1) + F_2(y_2 - x_2) + F_3(u_1(\cdot)).$$

Означення 8. Апостеріорну оцінку $\hat{u}_1(t) \in G_y$ назвемо *оптимальною оцінкою* за функціоналом $I(u_1(\cdot))$, якщо вона задовольняє умову $\inf\limits_{u_1 \in G_y} I(u_1(\cdot)) = I(\hat{u}_1(\cdot))$.

Припускається, що для системи (8) параметри $a_1(t)$, $c_1(t)$ — відомі, неперервні на $(0{,}T)$ функції; $u_1(t)$ — невідома функція зовнішнього впливу; а $x_2(t)$, $t \in (0{,}T)$ відома функція.

Функція $x_1(t{,}u_1(\cdot))$ задовольняє рівняння:

$$\dot{x}_1(t, u_1(\cdot)) = \tilde{a}_1(t) x_1(t, u_1(\cdot)) - a_1(t) x_1^2(t, u_1(\cdot)) + c_1(t) u_1(t), x_1(0) = x_1^0, t \in (0{,}T), \tag{9}$$

де $\tilde{a}_1(t) = a_1(t)(L - x_2(t))$.

Апостеріорна множина у цьому випадку така:

$$G_{y_1} = \left\{u_1(\cdot) : I_{y_1}(u_1(\cdot)) \leqslant \gamma^2_{y_1}(T)\right\},$$

де

$$I_{y_1}(u_1(\cdot)) = F_1(y_1 - x_1) + F_3(u_1(\cdot)) = \sum_{k=1}^{m} q^2_{11k}(y_{1k} - x_1(t_k,u_1(\cdot)))^2 + \int_0^T q^2_{21}(t)u_1^2(t)dt$$

і q^2_{11k}, $\gamma^2_{y_1}(T)$ — відомі скалярні величини, а $q^2_{21}(t)$, $t \in (0,T)$ — відома функція.

Тоді $x_1(t,u_1(\cdot))$, $t \in (0,T)$ є розв'язком задачі Коші:

$$\dot{x}_1(t,u_1(\cdot)) = a_1(t)x_1(t,u_1(\cdot))(L_1(t) - x_1(t,u_1(\cdot))) + c_1(t)u_1(t), x_1(0) = x_1^0, t \in (0,T), \tag{10}$$

де $L_1(t) = L - x_2(t), t \in (0,T)$.

Теорема 10. *На множині G_{y_1} існує оптимальна за функціоналом $I_{y_1}(u_1(\cdot))$ функція $\hat{u}_1(t)$, $t \in (0,T)$, яка є розв'язком варіаційної нерівності $I'_{y_1}(\hat{u}_1(\cdot))(v(\cdot) - \hat{u}_1(\cdot)) \geqslant 0$, майже скрізь для $\forall v(\cdot) \in L_2^+(0,T)$, де*

$$I'_{y_1}(\hat{u}_1(\cdot)) = \sum_{k=1}^{m} q^2_{11k}(y_{1k} - x_1(t_k,\hat{u}_1(\cdot)))\chi_{(0,t_k)}(t)c_1(t)\beta(t,t_k) + q^2_{21}(t)\hat{u}_1(t),$$

$$\chi_{(0,t)}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in (0,t), \\ 0, & \tau \notin (0,t), \end{cases} \quad x_0(t) = x_1(t,\hat{u}_1(\cdot)), t \in (0,T),$$

$$\beta(\tau,t) = exp\left\{\int_0^T \chi_{(\tau,t)}(s)a_1(s)(L_1(s) - 2x_0(s))ds\right\}, t \in (0,T).$$

У підрозділі **3.4** досліджено гарантовані прогнозні оцінки моделей поширення інформації в соціумі. Був проаналізований окремий випадок системи (1) вигляду:

$$\dot{x}_k(t) = (a_k + b_k x_k(t))\left(L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t)\right), x_k(0) = x_k^0 \geqslant 0, k = \overline{1,N}, t \in (0,T). \tag{11}$$

Нехай в точках $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, $t_i \in (0,T)$, $i = \overline{1,m}$ спостерігаються при невідомих параметрах $\theta_k = (a_k, b_k)$, $k = \overline{1,N}$ величини $x_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, $t \in (0,T)$, що є розв'язками системи (11), $y_{kj} = x_k(t_j) + v_{kj}$, $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,N}$, де v_{kj}, $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,N}$ — похибки спостережень.

Уведемо позначення $y = (y_1, \ldots, y_N)$, $y_k = (y_{k1}, \ldots, y_{km})^*$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $x_k = (x_k(t_1), \ldots, x_k(t_m))^*$, $v_k = (v_{k1}, \ldots, v_{km})^*$, $k = \overline{1,N}$. Припускається, що $v_k \in V_k \subset R^m$, $\theta_k \in \Theta_k \subset R^2$, $k = \overline{1,N}$, де V_k, Θ_k, $k = \overline{1,N}$ — відомі множини.

Нехай $x_k(t_{m+1},\theta_1, \ldots, \theta_N)$, $k = \overline{1,N}$ — прогнозні оцінки, де $\theta_k \in G_k(x,y)$, $k = \overline{1,N}$, а $G_k(x,y)$, $k = \overline{1,N}$ — множини вигляду:

$$G_k(x,y) = \{\theta_k : (y_k - f_k(\theta_k)) \in V_k\} \cap \Theta_k, k = \overline{1,N},$$

$$f_k(\theta_k) = (f_{k1}(\theta_k), \ldots, f_{km}(\theta_k)), \varphi_k = L - \sum_{i=1}^{N} x_i(t_j), k = \overline{1,N},$$

$$f_{kj}(\theta_k) = a_k\varphi_j + b_k\psi_{kj}, \psi_{kj} = x_k(t_j)\varphi_k, j = \overline{1,m}, k = \overline{1,N}.$$

Означення 9. *Гарантованими прогнозними оцінками* величин $x_k(t_{m+1},\theta)$, $k=\overline{1,N}$ назвемо вектори z_k, $k=\overline{1,N}$, які визначаються із умов:

$$\min_{\eta_i, i=\overline{1,N}} \max_{\theta_i, i=\overline{1,N}} |x_k(t_{m+1},\eta_1,\ldots,\eta_N) - x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)| =$$

$$= \max_{\theta_i, i=\overline{1,N}} |z_k - x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)| = \sigma_{1k}, k=\overline{1,N},$$

(тут $\eta_i \in G_k(x,y)$, $\theta_i \in G_k(x,y)$, $i=\overline{1,N}$); а величини σ_{1k}, $i=\overline{1,N}$ назвемо *гарантованими похибками* оцінок z_k, $k=\overline{1,N}$.

Теорема 11. *Нехай множини $G_k(x,y)$, $k=\overline{1,N}$ — обмежені та замкнені. Гарантовані прогнозні оцінки z_k, $k=\overline{1,N}$ мають вигляд:*

$$z_k = \frac{1}{2}\left(\max_{\theta_i, i=\overline{1,N}} x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N) + \min_{\theta_i, i=\overline{1,N}} x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)\right), \theta_i \in G_k(x,y), i=\overline{1,N},$$

при цьому

$$\sigma_{1k} = \frac{1}{2}\left(\max_{\theta_i, i=\overline{1,N}} x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N) - \min_{\theta_i, i=\overline{1,N}} x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)\right), \theta_i \in G_k(x,y), i=\overline{1,N}.$$

На основі аналізу результатів числового комп'ютерного моделювання робиться висновок, що запропоновані в дисертаційній роботі алгоритми дають адекватні результати.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримані нові науково обгрунтовані результати для систем диференціальних і різницевих рівнянь, що моделюють процес поширення інформації. Проведено аналіз розв'язків диференціальних рівнянь, знайдено прогнозні оцінки динамічних процесів інформаційно-комунікативного простору, розроблені алгоритми оцінювання невідомих параметрів та зовнішніх впливів у моделях поширення інформації в соціумі.

Дисертація є новим комплексним дослідженням, яке розв'язує важливі актуальні наукові задачі аналізу математичних моделей поширення інформації, представлених у вигляді систем нелінійних диференціальних рівнянь. У дослідженні набули подальшого розвитку методи системного аналізу, зокрема, теорії різницевих рівнянь, теорії диференціальних рівнянь, теорії стійкості динамічних систем, теорії ідентифікації систем, теорії оптимального керування. В дисертаційній роботі розв'язано задачі створення ефективних методів побудови аналітичних розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь спеціального вигляду, знайдено умови стійкості за першим наближенням в околах особливих точок, запропоновано алгоритми побудови оцінок параметрів та зовнішніх впливів математичних моделей та знаходження для них прогнозних оцінок

Розроблені алгоритми оцінювання параметрів та впливів дають можливість побудови математичних моделей поширення інформації на основі спостережень. Результатом роботи розроблених алгоритмів знаходження прогнозних оцінок є адекватні прогнози динаміки процесу поширення інформації в соціальних групах.

Наукова новизна роботи полягає в розробці підходів і алгоритмів для популяційних моделей поширення інформації. Вперше:

– доведено умови за яких розв'язки систем диференціальних рівнянь, що моделюють процес поширення інформації, є обмеженими та додатними;
– знайдено аналітичні розв'язки за допомогою методу малого параметру для особливого випадку моделі поширення інформації зі спеціальним виглядом параметру інтенсивності міжособистісного спілкування;
– отримано прогнозні оцінки динаміки моделей поширення інформації із спеціальним представленням зовнішнього впливу;
– розроблено алгоритми оцінювання параметрів для популяційних моделей поширення інформації, що представлені у вигляді систем диференціальних або різницевих рівнянь;
– сформульовано та доведено теореми, на основі яких можна обчислити оптимальні оцінки впливів для випадку поширення інформаційних повідомлень з двох джерел.

Набула подальшого розвитку теорія стійкості динамічних систем, зокрема, доведено умови стійкості розв'язків за першим наближенням в околі особливих точок:
– для моделей поширення інформації з стаціонарними параметрами;
– для моделей поширення інформації із нестаціонарними параметрами та збурюючим впливом, які набувають вигляду систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто.

Комп'ютерне моделювання для тестових прикладів продемонструвало ефективність запропонованих в дисертаційній роботі алгоритмів.

Розроблені алгоритми оцінювання параметрів та впливів дають можливість побудови конкретних математичних моделей поширення інформації на основі спостережень. Результатом роботи розробленого алгоритму для отримання прогнозних оцінок є адекватний прогноз динаміки процесу поширення інформації в конкретних соціальних групах.

Результати дисертаційної роботи були використані в дослідженні науково-дослідної теми № 16БФ015-02 «Розробка нових математичних методів системного і теорії оптимальних рішень та їх застосування» (державний номер реєстрації 0116U002529, термін виконання 2016-2018 рр.). Також вони були впроваджені в навчальний процес кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, зокрема, при викладанні дисциплін «Прийняття рішень в умовах невизначеності» для магістрів першого року навчання спеціальності «Системи і методи прийняття рішень», «Сучасні методи у вибіркових дослідженнях» для магістрів другого року навчання спеціальності «Системи і методи прийняття рішень» та «Моделі оцінювання в прикладних дослідженнях» для бакалаврів четвертого року навчання спеціальності «Системний аналіз». Також ці результати можуть знайти застосування в навчальних процесах фізико-математичних факультетів інших університетів України.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових фахових виданнях України:

1. Наконечний О.Г., Шевчук Ю.М. Математичні моделі розповсюдження інформації з нестаціонарними параметрами. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія; фізико-математичні науки.* 2016. №3. С.98 — 105.

2. Шевчук Ю.М. Стійкість розв'язків у математичних моделях розповсюдження інформації з зовнішніми впливами. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2017. №1. С.99 — 111.

3. Шевчук Ю.М. Моделі розповсюдження інформації з малим параметром. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки.* 2017. №1. С.80 — 87.

4. Наконечний О.Г., Зінько П.М., Шевчук Ю.М. Усередненні прогнозні оцінки в моделях поширення інформації при невизначеностях. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки.* 2017. №2. С.122 — 127.

5. Наконечний О.Г., Зінько П.М., Шевчук Ю.М. Прогнозні оцінки в математичних моделях поширення інформації при невизначеностях. *Системні дослідження та інформаційні технології.* 2017. №4. С.56 — 65.

6. Nakonechnyi O.G., Shevchuk I.M. Stability under stochastic perturbation of solutions of mathematical models of information spreading process with external control. *Mathematical modeling and computing.* 2018. №1. P.67 — 73.

Статті у наукових фахових виданнях України,
які входять до міжнародних наукометричних баз даних:

7. Наконечний О.Г., Шевчук Ю.М., Чикрій В.К. Оцінка нестаціонарних параметрів диференціальних рівнянь в умовах невизначеності. *Кібернетика і системний аналіз.* 2018. №4. С.109 — 121.

Тези наукових доповідей:

8. Shevchuk I.M. Non-stationary models of population dynamics in information confrontation. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2016)* : abstracts of XXVII International Conference, Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27 2016. Kyiv, 2016. P.147 — 148.

9. Shevchuk I.M. Stability of solutions of mathematical models of information spreading process with external control. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2017)*: abstracts of XXIX International Conference, Mukachevo, Ukraine, May 10-13 2017. Kyiv, 2017. P.112.

10. Шевчук Ю.М. Математична модель розповсюдження інформації з нестаціонарними параметрами. *Dynamical system modeling and stability investigation*: abstracts of XVIII International Conference, Kiev, Ukraine, May 24-26 2017. Kyiv, 2017. P.102.

11. Nakonechnyi O.G., Zinko P.M., Shevchuk I.M. Guaranteed predictive estimation in models of information confrontation. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2017)*: abstracts of XXX International Conference, Vilnius, Lithuania, August 14-19 2017. Kyiv, 2017. P.91 — 92.

12. Nakonechnyi O.G., Zinko P.M., Shevchuk I.M. Estimate of parameters of difference equations under uncertainty. *Ukrainian conference on applied mathematics*: abstracts of conference, Lviv, Ukraine , September 28-30 2017. Lviv, 2017. P.86.

13. Наконечний О.Г., Зінько П.М., Шевчук Ю.М. Аналіз нестаціонарних математичних моделей поширення інформації в умовах невизначеності. *Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій*: тези міжнародної наукової конференції, м. Рівне, Україна, 2-4 березня 2018. Рівне, 2018. С.182 — 184.

14. Nakonechnyi O.G., Zinko P.M., Shevchuk I.M. Optimal estimation of non-stationary parameters of difference equations. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2018)*: abstracts of XXXI International Conference, Lankaran-Baru, Respublic of Azerbaijan, July 3-8 2018. Kyiv, 2018. P.96 — 97.

15. Nakonechnyi O.G., Zinko P.M., Shevchuk I.M. Estimation of influence for models of information spreading process under uncertainty. *PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2017)*: abstracts of XXXII International Conference, Prague, Czech Rebublic, August 27-31 2018. Kyiv, 2018. P.93 — 94.

16. Наконечний О.Г., Зінько П.М., Шевчук Ю.М. Керування процесами протидії в моделях поширення інформації. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*: тези XXIV Всеукраїнської наукової конференції, м. Львів, Україна, 26-28 вересня 2018. Львів, 2018. С.109.

АНОТАЦІЯ

Шевчук Юлія Михайлівна. Розробка та аналіз популяційних моделей поширення інформації. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 "Системний аналіз і теорія оптимальних рішень". — Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2018.

В дисертаційній роботі проведено аналіз систем нелінійних звичайних диференціальних та різницевих рівнянь, що моделюють процес поширення інформації в соціумі.

Результати дисертаційної роботи умовно можна поділити на дві частини. В першій проводиться аналіз розв'язків популяційних моделей поширення інформації — знайдено умови обмеженості та додатности розв'язків, аналітичні розв‘язки за допомогою методу малого параметру для особливого випадку моделі поширення інформації, доведено умови стійкості за першим наближенням в околах особливих точок для систем диференціальних рівнянь з стаціонарними параметрами та систем з нестаціонарними параметрами, що піддаються збурюючим впливам. В другій частині побудовано алгоритми знаходження прогнозних оцінок динаміки та зовнішніх впливів моделей поширення інформації, оптимальних і гарантованих оцінок параметрів для популяційних моделей поширення інформації, що представленні у вигляді диференціальних та різницевих рівнянь.

Ключові слова: математична модель поширення інформації, системи нелінійних диференціальних та різницевих рівнянь, стаціонарні та нестаціонарні параметри, стійкість за першим наближенням, оцінювання, невизначеність.

АННОТАЦИЯ

Шевчук Юлия Михайловна. Разработка и анализ популяционных моделей распространения информации. — Квалификационный научный труд на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук за специальностью 01.05.04 "Системный анализ и теория оптимальных решений". — Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко Министерства образования и науки Украины, Киев, 2018.

В диссертационной работе проанализированы системы нелинейных обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений, которые моделируют процесс распространения информации в социуме.

Результаты диссертационной работы условно можно разделить на две части. В первой проводиться анализ решений популяционных моделей распространения информации: найдены условия ограниченности и положительности решений, аналитические решения с помощью метода малого параметра для отдельного случая модели распространения информации, доказаны условия устойчивости за первым приближением в окрестностях особенных точек для систем со стационарными параметрами и систем с нестационарными параметрами, которые подвергаются случайному возмущению. Во второй части построены алгоритмы нахождения прогнозных оценок динамики и внешних влияний моделей распространения информации со специальным видом внешнего влияния, оптимальных и гарантированных оценок параметров для популяционных моделей распространения информации, которые представлены в виде разностных и дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: математическая модель распространения информации, системы нелинейных дифференциальных и разностных уравнений, стационарные и нестационарные параметры, устойчивость за первым приближением, оценивание, неопределенность.

ABSTRACT

Shevchuk Iuliia Mychailivna. Development and analysis of population models of information spreading process. — Qualified scientific work annotated as manuscript.

Thesis for physical and mathematical sciences candidate degree, specialty 01.05.04 — system analysis and theory of optimal decisions. — Taras Shevchenko National University of Kyiv Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2018.

The dissertation is devoted to such subject area as information and communication space, in particular, the information spreading process in the society.

For systems of ordinary differential equations, is analyzed of solutions. The conditions of the boundedness and non-negative of functions that model the information spreading process are presented in cases where analytical search of an analytical solution is impossible.

The method of the small parameter of J. Poincare can be used for individual cases of models of information spreading process and allows to found approximate analytical solutions. In the dissertation, this approach is used for systems of differential equations with stationary parameters and for systems with non-stationary parameters.

Information on the dynamics of processes in the information and communicative space is important to the problems of practice and obtained through the theory of stability. The stability analysis is carried out at the first approximation in the special points because the nonlinearity of the models that were selected for research in the dissertation. In particular, the necessary and for the special cases of the basis models, sufficient conditions of stability for the first approximation in the neighbourhood of special points were formulated for the systems of differential equations with stationary parameters and for the systems with disturbing non-stationary parameters that. The obtained results allow us to determine the admissible areas for the model parameters, the values of which will guarantee the asymptotic the root mean square stability at the first approximation in the neighbourhood of stationary points.

Particular attention in the dissertation is paid to the evaluation of the parameters of systems of differential equations. Algorithms for constructing optimal and guaranteed estimates of parameters were formulated for the cases of continuous observations and discrete observations of the dynamics of the information spreading process. Similar results were obtained for systems of difference equations. These approaches for constructing optimal estimates bases on Bellman function and Kalman-Bussi filter.

Another important task in the analysis of models of information spreading process is the estimation of external influences. This problem is investigated in the dissertation paper for the model of spreading two types of information messages and for special cases which characterized by the known data analysis of system parameters. The statements of the problems of finding the estimates of external influence are given for the case of observation by the number of supporters of one information flow and known parameters of the system, for the case of observing the number of supporters of both information flows and known system parameters for one equation and for the case of observing the number of supporters of both flows and known parameters of the system.

Also, algorithms for constructing predictive estimates for the special case of a general model are proposed in this work. It allows predicting with a certain accuracy the behavior of the dynamics of the process of spreading information messages. The algorithms for obtaining optimal root mean square predictive estimation and guaranteed forecast estimation are presented. The example of finding the optimal root mean square estimation is given for the case of the propagation of one type of information. The algorithm for finding guaranteed predictive estimates is considered for an special case of representing the set of possible observational errors. The mathematical model for the spreading of one kind of information is researched. It is presented as a system of nonlinear differential equations with stationary parameters and is includes the dissemination of information by external and internal channels. The proposed model also contains mechanisms that affect the process of disseminating information: forgetting, two-step coverage of information and division of society into two homogeneous subgroups. The algorithm for obtaining averaged optimal mean square predictive estimation is presented for this model.

Keywords: mathematical model of information spreading process, systems of nonlinear differential and difference equations, stationary and non-stationary parameters, stability at first approximation, small parameter, estimation, uncertainty.