

# КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

факультет комп'ютерних наук та кібернетики  
(назва факультету, інституту)

кафедра теоретичної кібернетики

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник декана/директора  
з навчальної роботи

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ року

## РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Дискретна математика  
(повна назва навчальної дисципліни)  
для студентів

галузі знань \_\_\_\_\_ 11 – "Математика та статистика"  
(шифр і назва галузі)

спеціальність \_\_\_\_\_ 113 – "Прикладна математика"  
(шифр і назва спеціальності)

освітня програма \_\_\_\_\_ "Прикладна математика"  
(назва освітньої програми)

КИЇВ – 2017

Робоча програма дисципліни «Дискретна математика» для студентів *спеціальності* 113– «Прикладна математика» за освітньою програмою «Прикладна математика»  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ року - 16 с.

Розробники: доц. Карнаух Т.О., к.ф.-м.н., доцент

Робоча програма дисципліни «Дискретна математика» затверджена на засіданні кафедри теоретичної кібернетики

Протокол № .....від “.....” 20\_\_ року

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ (підпис) ( Крак Ю.В. )  
(прізвище та ініціали)  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ року

Схвалено науково - методичною комісією факультету

Протокол від «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ року №\_\_\_

Голова науково-методичної комісії \_\_\_\_\_ ( Хусаїнов Д.Я. )  
(підпис) (прізвище та ініціали)  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ року

Затверджено на засіданні вченої ради факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Протокол від «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ року №\_\_\_

## ВСТУП

Навчальна дисципліна «Дискретна математика» є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр» галузі знань 11– «Математика та статистика» зі спеціальності 113 – «Прикладна математика» за освітньою програмою «Прикладна математика».

Дана дисципліна є нормативною.

Викладається в 1-му і 2-му семестрах 1-го курсу в **обсязі – 210 год. ( 7 кредитів ECTS)** зокрема: *лекції – 50 год., практичні – 52 год., самостійна робота – 108 год.* У курсі передбачено 4 змістові модулі та 4 модульні контрольні роботи. Завершується дисципліна – **іспитом** (у кожному семестрі вивчення).

**Мета дисципліни** – оволодіння студентами математичною мовою і фундаментальними поняттями (і їх основними властивостями й практичними навичками використання) деяких найбільш традиційних розділів дискретної математики, сприяння розвитку логічного і аналітичного мислення студентів.

**Завдання** – розвиток практичних здібностей студентів по використанню математичної мови, побудові математичних моделей і доведень, виконанню математичних перетворень під час розв'язання задач.

У курсі розглядаються такі математичні розділи, як теорія множин, комбінаторика, теорія графів та булеві функції. Курс складається з 4 змістових модулів та 7 тем.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

**знати:** базові поняття з галузі теорії множин, теорії графів, булевих функцій, комбінаторики;

**вміти:** демонструвати практичні навички в побудові математичних доведень і виконанні математичних перетворень; пояснювати значення складних формулювань за допомогою математичної символіки; проводити комбінаторні обчислення.

**Місце дисципліни** (у структурно-логічній схемі підготовки фахівців за відповідною освітньою програмою). Нормативна навчальна дисципліна „Дискретна математика” є складовою циклу професійної та практичної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр” за спеціальністю 113 – «Прикладна математика» за освітньою програмою «Прикладна математика».

**Зв'язок з іншими дисциплінами.** Серед довгого переліку пов'язаних з курсом дискретної математики дисциплін можна виділити наступні: алгебра, математичний аналіз, функціональний аналіз, теорія ймовірностей, математична логіка та теорія алгоритмів, програмування, методи оптимізації. Враховуючи фундаментальність математичних понять, які розглядаються в цьому курсі, майже неможливо знайти математичну або комп'ютерну дисципліну, в якій би не використовувались його елементи.

**Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти.**

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою.

У змістовий модуль 1 (ЗМ1) входять теми 1, 2, у змістовий модуль 2 (ЗМ2) – теми 3, 4, у змістовий модуль 3 (ЗМ3) – тема 5, у змістовий модуль 4 (ЗМ4) – теми 6, 7. Обов'язковим для іспиту є присутність на іспиту.

*Оцінювання за формами контролю в 1-му семестрі*

	<b>ЗМ1</b> <i>Max. – 35 балів</i>	<b>ЗМ2</b> <i>Max. – 25 балів</i>
Виконання <b>усіх</b> домашніх завдань	5	5
Модульна контрольна робота	30	20

*Оцінювання за формами контролю в 2-му семестрі*

	<b>ЗМ3</b> <i>Max. – 35 балів</i>	<b>ЗМ4</b> <i>Max. – 25 балів</i>
Виконання <b>усіх</b> домашніх завдань	5	5
Виконання індивідуального завдання для самостійної роботи	10	10
Модульна контрольна робота	20	10

Мінімальна оцінка за кожен вид робіт у кожному модулі дорівнює нулю.

Для студентів, які набрали сумарно меншу кількість балів ніж *критично-розрахунковий мінімум – 20 балів*, одержання іспиту регламентується виключно „Положенням про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу” від 1 жовтня 2010 року та іншими чинними на момент складання іспиту нормативними документами університету.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються у відповідності до „Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу” від 1 жовтня 2010 року.

**При простому розрахунку отримаємо:**

**I семестр**

	Змістовий модуль 1	Змістовий модуль 2	Іспит	Підсумкова оцінка
<b>Максимум</b>	<b>35</b>	<b>25</b>	<b>40</b>	<b>100</b>

**II семестр**

	Змістовий модуль 3	Змістовий модуль 4	Іспит	Підсумкова оцінка
<b>Максимум</b>	<b>35</b>	<b>25</b>	<b>40</b>	<b>100</b>

**При цьому, кількість балів:**

- **1-34** відповідає оцінці «незадовільно» з обов'язковим повторним вивченням дисципліни;
- **35-59** відповідає оцінці «незадовільно» з можливістю повторного складання;
- **60-64** відповідає оцінці «задовільно» («достатньо»);
- **65-74** відповідає оцінці «задовільно»;
- **75 - 84** відповідає оцінці «добре»;
- **85 - 89** відповідає оцінці «добре» («дуже добре»);
- **90 - 100** відповідає оцінці «відмінно».

**Шкала відповідності (за умови іспиту)**

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою	
90 – 100	5	відмінно
85 – 89	4	добре
75 – 84		
65 – 74	3	задовільно
60 – 64		
35 – 59	2	не задовільно
1 – 34		

**Шкала відповідності (за умови заліку)**

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою
90 – 100	Зараховано
85 – 89	
75 – 84	
65 – 74	
60 – 64	
1 – 59	не зараховано

## ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

### Змістовий модуль 1. Теорія множин

#### ТЕМА 1. Алгебра множин (22 год.)

Логіко-математична символіка. Властивості логічних зв'язок. Інтуїтивне поняття множини. Рівність, належність, включення. Операції над множинами ( $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\setminus$ ,  $\div$ ). Універсум, доповнення. Теоретико-множинні тотожності та співвідношення. Поняття булеану. Розбиття та покриття.

#### ТЕМА 2. Відношення (32 год.)

Декартів добуток множин та його властивості. Відношення. Проекції. Операції обернення та композиції відношень. Поняття всюди визначеності, функціональності, ін'єктивності, сюр'єктивності. Функції, відображення, бієкції. Деякі важливі приклади функцій: послідовність, нумерація, характеристична функція множини. Класифікація бінарних відношень (рефлексивні, антирефлексивні, симетричні, антисиметричні, транзитивні) та властивості. Рефлексивне, симетричне, транзитивне замикання відношень та їх комбінації. Еквівалентності та їх властивості. Еквівалентне замикання. Фактор-множина, канонічне відображення. Теорема про розбиття та еквівалентності. Відношення порядку та частково впорядковані множини (ЧВМ). Частковий, строгий, лінійний порядки та їх властивості. Прямий добуток ЧВМ. Лексикографічний порядок. Найбільший/найменший, мінімальний/максимальний елементи ЧВМ, їх властивості. Індуктивні та фундовані множини. Принцип трансфінітної індукції.

### Змістовий модуль 2. Елементарна комбінаторика та булеві функції

#### ТЕМА 3. Елементарна комбінаторика (26 год.)

Предмет комбінаторики. Скінченні множини. Поняття кількості елементів. Основний принцип комбінаторики. Комбінаторні обчислення для основних операцій: Об'єднання, перетин і різниця скінченних множин. Правило добутку та декартів добуток скінченних множин. Розміщення з повтореннями, розміщення, перестановки, сполуки, перестановки з повтореннями, сполуки з повтореннями та підрахунки для них. Найпростіші властивості біноміальних коефіцієнтів. Біном Ньютона. Доведення тотожностей з біноміальними коефіцієнтами. Поліноміальна теорема. Метод траєкторій.

#### ТЕМА 4. Булеві функції (10 год.)

Булеві формули та булеві функції. Елементарні бінарні булеві функції. Поняття суперпозиції булевих функцій. Розклад булевої функції за змінними. Досконалі нормальні форми. Поліном Жегалкіна. Поняття канонічного представника. Замкнені класи булевих функцій. Класи  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $L$ ,  $S$ ,  $M$ . Функціонально повні системи булевих функцій. Теорема Поста та її наслідки та використання.

### Змістовий модуль 3. Теорія графів

#### ТЕМА 5. Теорія графів (64 год.)

Виникнення теорії графів. Неформальне поняття графа. Приклади графових моделей. Формальне означення графа. Графи та бінарні відношення. Вершини та ребра. Суміжність вершин, інцидентність вершин та ребер, степінь вершини. Деякі спеціальні види графів. Лема "про рукостискання" та її наслідки. Операції над графами. Способи задання графів. Маршрути в графах та їх різновиди. Перебудова маршрутів. Зв'язані вершини, компоненти зв'язності. Якісні ознаки зв'язності. Точки зчленування, мости. Найкоротші ланцюги. Відстань між вершинами. Ексцентриситет, радіус, діаметр, центр. Ейлерові графи. Теорема Ейлера. Гамільтонові графи. Дерево, ліс. Основні властивості дерев. Кістякові дерева й ліси. Ізоморфізм графів. Інваріанти ізоморфних графів. Планарність. Укладання графа. Плоскі та планарні графи. Теорема Ейлера та властивості планарних графів. Критерії планарності. Максимальний плоский граф. Триангуляція. Розфарбування. Хроматичне число графа. Гіпотеза чотирьох фарб та теорема про п'ять фарб для планарних графів. Алгоритми пошуку в глибину та в ширину.

## **Змістовий модуль 4. Комбінаторика та потужність множин**

### **ТЕМА 6. Комбінаторика (32 год.)**

Формула включення і виключення, її застосування. Комбінаторика відношень. Метод рекурентних співвідношень та приклади його застосування. Основна теорема (Master's theorem). Твірні функції числових послідовностей, операції над ними, знаходження послідовностей за твірними. Числа Стірлінга 1-го і 2-го роду. Розв'язання рекурентних співвідношень та їх систем методом твірних функцій.

### **ТЕМА 7. Потужність множин (24 год.)**

Рівнопотужність множин. Порівняння потужностей. Скінченні, нескінченні, злічені множини та їх властивості. Незлічені множини. Континуальні множини. Метод діагоналізації Кантора та його використання. Теореми Кантора про незліченність континуума та про потужність булеана множини. Континуум та його властивості. Теорема Кантора-Бернштейна та її застосування на прикладі визначення потужності деяких множин.

**СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ  
ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ**

№ п/п	Назва лекції	Кількість годин		
		лекції	практичні	С/Р
<i><b>Змістовий модуль 1 Теорія множин</b></i>				
1	<b>Тема 1. Алгебра множин</b>	4	6	12
2	<b>Тема 2. Відповідності та відношення</b>	8	8	14
	<i>Модульна контрольна робота 1</i>			2
<i><b>Змістовий модуль 2 Елементарна комбінаторика та булеві функції</b></i>				
3	<b>Тема 3. Елементарна комбінаторика</b>	6	6	12
	<i>Модульна контрольна робота 2</i>			2
4	<b>Тема 4. Булеві функції</b>	4	2	4
<i><b>Змістовий модуль 3 Теорія графів</b></i>				
5	<b>Тема 5. Теорія графів</b>	14	16	33
	<i>Модульна контрольна робота 3</i>			1
<i><b>Змістовий модуль 4 Комбінаторика та потужність множин</b></i>				
6	<b>Тема 6. Комбінаторика</b>	8	8	16
7	<b>Тема 7. Потужність</b>	6	6	11
	<i>Модульна контрольна робота 4</i>			1
	<b>УСЬОГО</b>	<b>50</b>	<b>52</b>	<b>108</b>

Загальний обсяг **210 год.**, у тому числі:

лекції – **50 год.**

практичні – **52 год.**

самостійна робота - **108 год.**

## ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

### Теорія множин

#### ТЕМА 1. АЛГЕБРА МНОЖИН – ( 22 год.)

##### Лекція 1. АЛГЕБРА МНОЖИН

Огляд логіко-математичної символіки. Інтуїтивне поняття множини. Рівність, належність, включення. Операції над множинами ( $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\setminus$ ,  $\div$ ). Універсум, доповнення. Теоретико-множинні тотожності.

##### *Практичне заняття 1. – 2 год.*

1. Логіко-математична символіка (логічні зв'язки, їхні таблиці істинності; квантори.) 2. Розв'язання задач (РЗ) [3, §1] №1(абвж), № 2(абв), 3(абвг). 3. Складання таблиць істинності [3, §1] 6(а),  $(B \wedge C)$ ,  $A \vee (B \wedge C)$ ,  $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ . Встановлення  $\Leftrightarrow$  і  $\Rightarrow$  за допомогою таблиць. Властивості логічних зв'язок (логічні закони).

**Завдання для самостійної роботи (ЗСР) ( 4 год.)** Опрацювання лекційного матеріалу (ОЛМ). РЗ [3, §1] № 1(гдез), 2(гдежз), 3(г), 6(в),.

##### Лекція 2. ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННІ СПІВВІДНОШЕННЯ. СІМ'І МНОЖИН

Теоретико-множинні співвідношення. Сім'ї множин та операції над ними. Логічні перетворення з кванторами. Поняття булеану. Розбиття та покриття.

##### *Практичне заняття 2. – 2 год.*

1. ПДЗ. 2. Опитування та обговорення лекційного матеріалу (ОЛМ). 3. РЗ [3, §2] № 1, 2, 3(а-д), 4, 5(авд), 13авд, 14є.

**ЗСР (4 год.)**. ОЛМ. РЗ [3, §2] № 3(е-и), 5(бге), 13бгеє, 14д.

##### *Практичне заняття 3. – 2 год.*

1. ПДЗ. 2. Самостійна робота ( $\leq 20-25$  хв) із завданнями типу:

Чи правильно, що ...? (аналогічно задачам [3, §2] № 3-5)

Обчислити результат теоретико-множинної операції над конкретними множинами.

Наприклад,  $\{1,3\} \cup \{2,3\}$ .

Довести теоретико-множинну тотожність без використання таблиць, діаграм та теоретико-множинних тотожностей (аналогічно задачам [3, §2] 12-15).

3. Опитування та обговорення лекційного матеріалу (ОЛМ). 4. РЗ [3, §2] № 11ав, 18абг. 5. Обчислення булеану конкретних множин. 6. РЗ [3, §2] №20. 7. РЗ [3, §2] № 29аб, 30а

**ЗСР (4 год.)**. ОЛМ. РЗ [3, §2] № 13бгеє, 14д, 11б, 18вд, 29в, 30б

#### ТЕМА 2. ВІДНОШЕННЯ – ( 32 год.)

##### Лекція 3. ВІДНОШЕННЯ

Декартів добуток множин та його властивості. Відношення. Проекції. Операції обернення та композиції відношень.

##### *Практичне заняття 4. – 2 год.*

1. ПДЗ. 2. ОЛМ. 3. Перевірка деяких властивостей декартового добутку. 4. РЗ [3, §3] № 5(б). 5. Перевірка деяких властивостей операції  $^{-1}$ . 4. Обчислення  $\circ$  для скінченних відношень. Перевірка деяких властивостей операції  $\circ$ . 30, 32а, 33а

**ЗСР (4 год.)**. ОЛМ. РЗ [3, §3] № 2а, 5б, 8а, 20, 25, 32б, 33бв.

##### Лекція 4. ФУНКЦІЇ

Функції, відображення, бієкції. Деякі важливі приклади функцій: послідовність, нумерація, характеристична функція множини.

##### *Практичне заняття 5. – 2 год.*

1. ПДЗ. 2. ОЛМ. 3. РЗ [3, §4] № 1,2,4,7,16, [3, §3] № 13а, 16а, [3, §4] 19.

**ЗСР (4 год.)**. ОЛМ. РЗ [3, §4] № 3,5,8,17, 21. [3, §3] № 13б, 15а

##### Лекція 5. БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ

Класифікація бінарних відношень (рефлексивні, антирефлексивні, симетричні, антисиметричні, транзитивні) та властивості. Рефлексивне, симетричне, транзитивне



замикання відношень та їх комбінації. Еквівалентності та їх властивості. Еквівалентне замикання. Фактор-множина, канонічне відображення. Теорема про розбиття та еквівалентності.

**Практичне заняття 6.** – 2 год.

1. ПДЗ. 2. ООЛМ. 3. РЗ [3, §5] № 1(1,2), 3, 5, 11.

4. Побудувати  $+$  та  $*$  для відношень  $<$ ,  $\leq$  та  $xRy \Leftrightarrow y = x+1$  на множині  $\mathbb{N}_0$ .

5. РЗ [3, §5] № 18

6. Побудова фактор-множини для скінченної еквівалентності. Знайти фактор-множину множини дійсних за еквівалентністю  $xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$ .

**ЗСР (4 год.).** ОЛМ. РЗ [3, §5] № 1(5, 10), 6, 8, 10, 13, 14, 16, 19, 22.

#### **Лекція 6. ВІДНОШЕННЯ ПОРЯДКУ**

Відношення порядку та частково впорядковані множини (ЧВМ). Частковий, строгий, лінійний порядки та їх властивості. Прямий добуток ЧВМ. Лексикографічний порядок. Найбільший/найменший, мінімальний/максимальний елементи ЧВМ, їх властивості. Індуктивні та фундовані множини. Принцип трансфінітної індукції.

**Практичне заняття 7.** – 2 год.

1. ПДЗ. 2. ООЛМ. 3. РЗ [3, §6] на перевірку властивостей відношень порядку та про побудову порядків № 3, 4. 4. Побудова лінійного порядку на  $\mathbb{N}^2$  за допомогою конструкції лексикографічного порядку. 5. Доведення властивостей лексикографічного порядку (ЧВМ, лінійність). 6. Кількість екстремальних елементів ЧВМ різних типів.

**ЗСР (2 год.).** ОЛМ. РЗ [3, §6] № 2аб, 6, 7. Підготовка до МКР.

**ЗСР (2 год.).** МКР.

#### **Контрольні запитання та завдання**

1. Операції над множинами та їх властивості
2. Властивості логічних зв'язок
3. Сім'ї множин. Операції над ними
4. Декартів добуток та його властивості
5. Операція взяття образу множини
6. Операція композиції відношень та її властивості
7. Спеціальні види відношень між двома множинами та їх властивості
8. Рефлексивні відношення та їх властивості
9. Антирефлексивні відношення та їх властивості
10. Симетричні відношення та їх властивості
11. Антисиметричні відношення та їх властивості
12. Транзитивні відношення та їх властивості
13. Замикання відношень та їх властивості
14. Поняття інваріантності, замкненості та замикання
15. Еквівалентності. Фактор-множина
16. ЧВМ. Їх різновиди. Прямий добуток порядків. Лексикографічний порядок
17. Найбільший/найменший, максимальний/мінімальний елементи ЧВМ. Питання їх існування та єдиності для різних видів ЧВМ
18. Фундовані, індуктивні множини та принцип трансфінітної індукції
19. Контрольні завдання — [3, с. 20-21, 34-37, 49-52, 62-65, 76-77, 92-95]

**Рекомендована література:** [3, 8, 12, 13, 16, 7]

### **ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ**

**Типова контрольна робота** складається з декількох завдань наступних типів:

1. Дати означення. 2. Продовжити формулювання. 3. Чи правильно, що ...? 4. Довести теоретико-множинну тотожність. 5. Довести теоретико-множинне співвідношення. 6. Класифікувати відношення. 7. Обчислити значення операції. 8. Задача про відношення. 9. Задача про бінарне відношення. 10. Задача про ЧВМ.

## **ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2**

### *Елементарна комбінаторика та булеві функції*

#### **ТЕМА 3. ЕЛЕМЕНТАРНА КОМБІНАТОРИКА – ( 26 год.)**

##### **Лекція 7. КОМБІНАТОРНІ ОБЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ОСНОВНИХ ОПЕРАЦІЙ**

Предмет комбінаторики. Скінченні множини. Поняття кількості елементів. Основний принцип комбінаторики. Комбінаторні обчислення для основних операцій: Об'єднання, перетин і різниця скінченних множин. Правило добутку та декартів добуток скінченних множин.

**Практичне заняття 8.** – 2 год.

1. ООЛМ. 2. РЗ [2] № 1, 4, 5, 6аб, 10, 11абв, 12абв, 13аб, 21, 22, 24, 25, 61, 62авд  
**ЗСР (4 год.).** ОЛМ. РЗ [2] № 2,3,6гд, 7, 8а, 11гд, 12гд, 13вгд, 14, 15, 19а, 23, 26, 62.

##### **Лекція 8. КОМБІНАТОРНІ ОБ'ЄКТИ.**

Розміщення з повтореннями, розміщення, перестановки, сполуки, перестановки з повтореннями, сполуки з повтореннями та підрахунки для них.

**Практичне заняття 9.** – 2 год.

1. ПДЗ. 2. РЗ [2] 35ад, 36 бг, 37ад, 38а, 39а, 40, 42, 43, 45, 49, 53, 55аб, 64.  
**ЗСР (4 год.).** ОЛМ. РЗ [2] № 35, 36, 37, 38, 39б, 41, 44, 47а, 46, 49, 50, 52, 55, 56б, 57б.

##### **Лекція 9. БІНОМ НЬЮТОНА. ВЛАСТИВОСТІ БІНОМНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ**

Найпростіші властивості біноміальних коефіцієнтів. Біном Ньютона. Доведення тотожностей з біноміальними коефіцієнтами. Поліноміальна теорема. Метод траєкторій.

**Практичне заняття 10.** – 2 год.

1. ПДЗ. 2. Підрахунки сум [2] № 71абв, 72, 73бв, 78а, 82, 83а, 92.  
**ЗСР (4 год.).** ОЛМ. РЗ [2] № № 71гд, 73, 78б, 79а, 83бв, 90, 93. Підготовка до МКР  
**ЗСР (2 год.).** МКР.

#### **ТЕМА 4. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ – ( 10 год.)**

##### **Лекція 10. БУЛЕВІ ФОРМУЛИ ТА БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ**

Булеві формули та булеві функції. Елементарні бінарні булеві функції. Поняття суперпозиції булевих функцій. Розклад булевої функції за змінними. Досконалі нормальні форми. Поліном Жегалкіна. Поняття канонічного представника.

**ЗСР (2 год.).** ОЛМ.

##### **Лекція 11. ЗАМКНЕНІ КЛАСИ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ. ТЕОРЕМА ПОСТА**

Замкнені класи булевих функцій. Класи  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $L$ ,  $S$ ,  $M$ . Функціонально повні системи булевих функцій. Теорема Поста та її наслідки та використання.

**Практичне заняття 11.** – 2 год.

1. ООЛМ. 2. РЗ [2] № 95, 97б, 98бв + побудова канонічних форм, 100абв, 101, 102а, 105аб, 106, 109, 111аб, 115ав, 116а, 117а.

**ЗСР (2 год.).** РЗ [2] № 96, 97а, 98аг, 99а, 100где, 102б, 104, 105вг, 110, 111вг, 113, 115бг, 116б, 117в, 126.

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Комбінаторні правила. Комбінаторні об'єкти. Означення та правила підрахунку
2. Біном Ньютона та доведення тотожностей з біномними коефіцієнтами
3. Поліноміальна теорема
4. Канонічні форми в теорії булевих функцій
5. Замкнені класи булевих функцій
6. Теорема Поста, її застосування та наслідки
7. Контрольні завдання [2, 17]

**Рекомендована література:** [1, 2, 11, 13, 14, 20]

## ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

*Типова контрольна робота* складається з задач наступних типів: на застосування правила суми та правила добутку, на обчислення для теоретико-множинних операцій, на обчислення суми з біноміальними коефіцієнтами, на застосування основного принципу комбінаторики, на застосування комбінаторних конструкцій.

### ПИТАННЯ НА ІСПИТ

1. Операції над множинами та їхні властивості
2. Властивості логічних зв'язок
3. Сім'ї множин. Операції над ними
4. Декартів добуток множин та його властивості
5. Операція взяття образу множини
6. Операція композиції відношень та її властивості
7. Спеціальні види відношень між двома множинами та їхні властивості
8. Рефлексивні відношення та їхні властивості
9. Антирефлексивні відношення та їхні властивості
10. Симетричні відношення та їхні властивості
11. Антисиметричні відношення та їхні властивості
12. Транзитивні відношення та їхні властивості
13. Замикання відношень та їхні властивості
14. Еквівалентності. Фактор-множина
15. ЧВМ. Їх різновиди. Прямий добуток порядків. Лексикографічний порядок
16. Найбільший/найменший, максимальний/мінімальний елементи ЧВМ. Питання їх існування та єдиності для різних видів ЧВМ
17. Фундовані, індуктивні множини та принцип трансфінітної індукції
18. Комбінаторні правила. Комбінаторні обчислення для теоретико-множинних операцій
19. Комбінаторні об'єкти. Означення та правила підрахунку
20. Біном Ньютона. Тотожності з біномними коефіцієнтами
21. Поліноміальна теорема
22. Канонічні форми (ДДНФ, ДКНФ, поліном Жегалкіна) в теорії булевих функцій
23. Замкнені класи булевих функцій
24. Теорема Поста (без доведення), її застосування та наслідки

### ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3

#### Теорія графів

#### ТЕМА 5. ТЕОРІЯ ГРАФІВ – (64 год.)

**ЗСР (8 год.).** Основні поняття та означення теорії графів [4].

Виникнення теорії графів. Неформальне поняття графа. Приклади графових моделей. Формальне означення графа. Графи та бінарні відношення. Вершини та ребра. Суміжність вершин, інцидентність вершин та ребер, степінь вершини. Деякі спеціальні види графів.

Маршрути в графах та їх різновиди. Зв'язані вершини, компоненти зв'язності. Відстань між вершинами. Ексцентриситет, радіус, діаметр, центр. Дерево, ліс. Кістякові дерева й ліси.

РЗ [4, §1] № 4, 5, 6, 7, 8аб, 9, 10, 12, 13, 16, 17, 18, 19.

Виконання індивідуальної самостійної роботи з теорії графів.

1 (2 бал). Побудувати діаграму графа (=намалювати граф), що має  $n$  вершин,  $m$  ребер,  $k$  компонент зв'язності, причому кожна компонента містить цикли та діаметр принаймні однієї компоненти зв'язності не менше  $d$ . На малюнку виділити компоненти зв'язності.

2 (3 бали). Для кожної вершини визначити степінь та ексцентриситет (можна підписати на малюнку поруч з вершинами).

Для кожної компоненти вказати кількість вершин та кількість ребер, радіус, діаметр, центральні вершини (можна виділити на малюнку).

3 (1 бал). Побудувати кістяковий ліс (можна навести на малюнку іншим кольором).

4 (4 бали, по 0.5 бали за кожен пункт). Навести для побудованого графа приклад маршрутів:

- а) незамкнений маршрут довжини  $t_1$ ;
  - б) маршрут довжини не менше  $t_2$ , що не є ланцюгом;
  - в) маршрут, що не є простим ланцюгом, але є ланцюгом;
  - г) простий ланцюг довжини не менше  $d$ ;
  - д) замкнений маршрут довжини не менше  $t_3$ , що не є циклом;
  - е) цикл, що не є простим циклом;
  - ж) простий цикл;
  - з) найкоротший маршрут, що сполучає пару вершин найбільшого ексцентриситету.
- Параметри  $n, m, k, d, t_1, t_2, t_3$  див. у файлі teoGraph\_winter2018.pdf за посиланням [https://drive.google.com/file/d/0B8q\\_p3eYFBgvWmlsc3NMUXBrT1E/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/0B8q_p3eYFBgvWmlsc3NMUXBrT1E/view?usp=sharing). Розподіл варіантів наведено у файлі Варіанти ТГ.xls за посиланням [https://drive.google.com/file/d/0B8q\\_p3eYFBgvTIBUVkVEQ2Nobm8/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/0B8q_p3eYFBgvTIBUVkVEQ2Nobm8/view?usp=sharing)

### **Лекція 12. ГРАФ ЯК МОДЕЛЬ. МАРШРУТИ В ГРАФАХ**

Лема "про рукостискання" та її наслідки. Операції над графами. Способи задання графів. Перебудова маршрутів. Зв'язані вершини, компоненти зв'язності. Якісні ознаки зв'язності.

**Практичне заняття 12.** – 2 год.

1. ПДЗ. 2. ООЛМ. 3. РЗ [4, §2] № 3, 5, 6, 1.

**ЗСР (2 год.).** ОЛМ. Оформлення задач [4, §2] № 3, 5, 6, 1. РЗ [4, §2] № 2, 4, 34.

### **Лекція 13. ДЕКОМПОЗИЦІЯ ГРАФІВ**

Точки зчленування, мости, блоки та їх властивості

**Практичне заняття 13.** – 2 год.

1. ПДЗ. 2. ООЛМ. 3. РЗ [4, §2] № 8, 10, 12, 14. 4. Блоки та точки зчленування. Доведення властивостей.

**ЗСР (4 год.).** РЗ [4, §2] № 9, 13.

### **Лекція 14. ЕКСТРЕМАЛЬНІ МАРШРУТИ. ДЕРЕВА**

Найкоротші ланцюги. Відстань між вершинами. Ексцентриситет, радіус, діаметр, центр. Ейлерові графи. Теорема Ейлера. Гамільтонові графи. Дерево, ліс. Основні властивості дерев. Кістякові дерева й ліси.

**Практичне заняття 14.** – 2 год.

1. ПДЗ. 2. ООЛМ. 3. РЗ [4, §2] № 18, 20, 23, 24, 26. 4. Теорема Кьоніга.

**ЗСР (3 год.).** ОЛМ. РЗ [4, §2] № 17, 21, 22, 27, 29.

**Практичне заняття 15.** – 2 год.

1. ООЛМ. 2. РЗ [4, §3] № 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 18а, 20.

**ЗСР (3 год.).** ОЛМ. РЗ [4, §3] № 6, 9, 14, 15, 19, 22.

### **Лекція 15. ПЛАНАРНІСТЬ**

Ізоморфізм графів. Інваріанти ізоморфних графів. Планарність. Укладання графа. Плоскі та планарні графи. Теорема Ейлера та властивості планарних графів. Критерії планарності. Максимальний плоский граф. Тріангуляція.

**Практичне заняття 16.** – 2 год.

1. ПДЗ. 2. ООЛМ. 3. Ізоморфізм графів [4, §4] № 2, 3, 4, 5, 11а. 4. Кількість вершин та ребер самодоповнювального графа. 5. Використання теореми Ейлера [4, §5] № 5, 7, 11, 12, 13.

**ЗСР (4 год.).** ОЛМ. РЗ [4, §4] № 6, 10, 11бв, 13, 15, 20. [4, §5] № 8, 10.

### **Лекція 16. ПЛАНАРНІСТЬ ТА ГІПОТЕЗА ЧОТИРЬОХ ФАРБ**

Розфарбування. Хроматичне число графа. Гіпотеза чотирьох фарб та теорема про п'ять фарб для планарних графів.

**Практичне заняття 17.** – 2 год.

1. ПДЗ. 2. ООЛМ. 3. Використання критеріїв планарності [4, §5] № 14. 4. Тріангуляції [4, §5] № 16, 17, 18, 19. 5. Хроматичні числа [4, §6] № 1, 2, 9.

**ЗСР (4 год.).** ОЛМ. РЗ [4, §5] № 20, 21, 22. [4, §6] № 4, 10.

### **Лекція 17. АЛГОРИТМ ПОШУКУ В ГЛИБИНУ**

Алгоритми пошуку в глибину, його застосування та модифікації.

**Практичне заняття 18.** – 2 год.

1. ПДЗ. 2. ООЛМ. 3. Алгоритм пошуку блоків графа та його властивості.

**ЗСР (4 год.).** ОЛМ. Довести коректність алгоритму пошуку блоків графа.

**Лекція 18. АЛГОРИТМИ ПОШУКУ В ШИРИНУ**

Алгоритми пошуку в ширину, його застосування. Інші алгоритми визначення відстаней.

**Практичне заняття 19.** – 2 год.

1. ПДЗ. 2. ООЛМ. 3. Застосування алгоритмів до графів.

**ЗСР (3 год.).** ОЛМ. Підготовка до МКР.

**ЗСР (1 год.).** МКР.

**Контрольні запитання та завдання**

1. Поняття графу, різновиди графів
2. Теорема про зв'язок кількостей вершин, ребер та компонент зв'язності графа
3. Мости та їхні властивості
4. Нероздільність. Властивості блоків та точок зчленування
5. Теорема Ейлера про ейлерові графи
6. Планарні графи. Теорема Ейлера про плоскі графи та її наслідки
7. Маршрути в графах. Теореми про розклад/перебудову маршрутів
8. Дерева та ліси. Побудова кістяків. Теорема про дерева
9. Фарбування графів. Хроматичне число. Фарбування планарних графів
10. Ізоморфізм. Інваріанти ізоморфних графів
11. Зображення графів матрицею та структурою суміжності
12. Алгоритм АПГ пошуку на графах. Задачі, які можна ними розв'язати.
13. Властивості та коректність АПГ. Глибинне кістякове дерево, його властивості
14. Алгоритм АПШ пошуку на графах. Задачі, які можна ними розв'язати.
15. Контрольні завдання — [4]

**Рекомендована література:** [9, 4, 18, 19]

## **ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ**

**Типова контрольна робота** складається з завдань наступних типів: 1) сформулювати та довести теорему, обґрунтувати використання ММІ; 2) задач на використання відомих теорем; 3) задач на доведення властивостей графів та властивостей алгоритмів; 4) задач на побудову графів, знаходження певних характеристик графів, застосування алгоритмів обходу. Серед них можуть бути:

- побудувати пряму суму  $\overline{K_3}$  і  $\overline{K_3}$ , тощо;
- знайти степінь, відстань, ексцентриситет, радіус, діаметр; перевірити на планарність; побудувати кістякове дерево (можливо глибинне) (всі за конкретним графом);
- перевірити чи існує граф із заданими  $n$ ,  $m$ ,  $k$ ;
- перевірити чи існує планарний граф із заданими  $n$ ,  $m$ ;
- вказати послідовність вершин, що отримується в результаті обходу конкретного графа в ширину/глибину, починаючи з заданої вершини; та інші.

## **ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4**

*Комбінаторика та потужність множин*

**ТЕМА 6. КОМБІНАТОРИКА – ( 32 год.)**

**Лекція 19. ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕННЯ І ВИКЛЮЧЕННЯ**

Формула включення і виключення, її застосування. Безлади. Кількість сюр'єктивних відображень.

**Практичне заняття 20.** – 2 год.

1. ООЛМ. 2. [2] №127, 131, 133, 135.

**ЗСР (4 год.).** ОЛМ. РЗ [2] № 128, 130, 132, 136в, 138.

## **Лекція 20. МЕТОД РЕКУРЕНТНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ**

Метод рекурентних співвідношень та приклади його застосування. Основна теорема (Master's theorem).

**Практичне заняття 21.** – 2 год.

1. ПДЗ. 2. ООЛМ. 3. [2] № 143, 144, 146а, 149, 152а, 155, 154.

**ЗСР (4 год.).** ОЛМ. РЗ [2] № 145, 146б, 150, 152б, 153.

### **Лекція 21. ТВІРНІ ФУНКЦІЇ**

Твірні функції числових послідовностей, операції над ними, знаходження послідовностей за твірними. Числа Стірлінга 1-го і 2-го роду.

**Практичне заняття 22.** – 2 год.

1. ПДЗ. 2. ООЛМ. 3. РЗ [2] № 158агд, 159авг, 161аб, 162аве, 163абвг, 165, 166а.

**ЗСР (4 год.).** ОЛМ. РЗ [2] № 158бвде, 159бвде, 160, 162абгдє, 163дєє, 166б.

### **Лекція 22. МЕТОД ТВІРНИХ ФУНКЦІЙ**

Розв'язання рекурентних співвідношень та їх систем методом твірних функцій. Розбиття чисел та аналогічні задачі. Застосування твірних для задач про кількість розбиттів.

**Практичне заняття 23.** – 2 год.

1. ПДЗ. 2. Розв'язання рекурентних співвідношень методом твірних функцій [2] № 168аве, 169аг, 170а, 171, 173а. 3. РЗ [2] 175, 178, 182а.

**ЗСР (4 год.).** ОЛМ. РЗ [2] № 168бгд, 169бв, 170б, 173бв, 143, 184. Виконання домашньої частини МКР.

## **ТЕМА 7. ПОТУЖНІСТЬ МНОЖИН – (24 год.)**

### **Лекція 23. БІСКЦІЇ. РІВНОПОТУЖНІСТЬ МНОЖИН**

Біскції. Рівнопотужність множин. Порівняння потужностей.

**Практичне заняття 24.** – 2 год.

1. ПДЗ. 2. ООЛМ. 3. Розв'язання прикладів з [3, §4] на побудову біскцій та ін'єкцій №30, пр.5, пр.7, пр.8, 38; [7] §5 № 10вг

**ЗСР (4 год.).** ОЛМ. РЗ [3, §4] № 32, 35, 36, пр.6, 37.

### **Лекція 24. СКІНЧЕННІ, НЕСКІНЧЕННІ, ЗЛІЧЕННІ МНОЖИНИ.**

Скінченні, нескінченні, злічені множини та їх властивості.

**Практичне заняття 25.** – 2 год.

1. ПДЗ, ООЛМ. 2. РЗ [7] §5 № 4в, 5; §6 № 3, 4в; §5 №  $|f(A)| \leq |A|$ , 30, 32; № 8, 25; §6 № 7

**ЗСР (4 год.).** ОЛМ. РЗ [7, с. 355-361] §5 №  $|AB| \leq |P(A \times B)|$ , 12; §6 № 2, 4, 21; §5 № 20, 21, 22; 8, 25, 23в, 28, 29; §6 № 7.

### **Лекція 25. НЕЗЛІЧЕННІ МНОЖИНИ**

Незлічені множини. Континуальні множини. Метод діагоналізації Кантора та його використання. Теорема Кантора про незліченність континуума та про потужність булеана множини. Континуум та його властивості. Теорема Кантора-Бернштейна та її застосування на прикладі визначення потужності деяких множин

**Практичне заняття 26.** – 2 год.

1. ООЛМ. 2. РЗ [7] §6 № 10,11,12, потужність множини куль в  $\mathbb{R}^3$ , що попарно не перетинаються, 13, потужність континуального об'єднання конт. множин, 16, 17. 3. Операції, що можуть збільшувати потужність. 4. Потужність множини монотонних відображень типу  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**ЗСР (3 год.).** ОЛМ. РЗ [7] §6 23, 25, 24.

**ЗСР (1 год.).** МКР.

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Числа Стірлінга 1-го роду та їхні властивості
2. Числа Стірлінга 2-го роду та їхні властивості
3. Формула включення і виключення та її наслідки, узагальнення та приклади застосування
4. Числа Каталана. Рекурентне співвідношення для чисел Каталана. Твірна для

- послідовності чисел Каталана
5. Метод твірних функцій
  6. Розбиття чисел
  7. Бієкції. Основні бієкції
  8. Рівнопотужність. Порівняння потужностей
  9. Зліченні множини та їхні властивості
  10. Теореми Кантора про незліченність континуума та потужність булеана
  11. Континуальні множини. Теорема про квадрат та відрізок
  12. Теорема Кантора-Бернштейна, приклади використання
  13. Контрольні завдання — [2, 7 (гл. 5, 6), 3 (§4)]

**Рекомендована література:** [1, 2, 11, 14, 20, 8, 5, 6, 16, 7, 15, 3, 12, 10]

### **ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ**

**Типова контрольна робота** складається з задач за матеріалами тем 6,7.

#### **ПИТАННЯ НА ІСПИТ**

1. Поняття графу, різновиди графів
2. Теорема про зв'язок кількостей вершин, ребер та компонент зв'язності графа
3. Мости та їхні властивості
4. Нероздільність. Властивості блоків та точок зчленування
5. Ізоморфізм. Інваріанти ізоморфних графів
6. Алгоритми пошуку в глибину та в ширину в графі
7. Теорема Ейлера про ейлерові графи
8. Планарні графи. Теорема Ейлера про плоскі графи та її наслідки
9. Маршрути в графах. Теореми про розклад/перебудову маршрутів
10. Дерева та ліси. Побудова кістяків. Теорема про дерева
11. Фарбування графів. Хроматичне число. Фарбування планарних графів
12. Алгоритм АПГ пошуку на графах. Задачі, які можна ними розв'язати
13. Алгоритм АПІ пошуку на графах. Задачі, які можна ними розв'язати
14. Властивості та коректність АПГ. Глибинне кістякове дерево, його властивості
15. Числа Стірлінга 1-го роду та їхні властивості (з доведенням)
16. Числа Стірлінга 2-го роду та їхні властивості (з доведенням)
17. Формула включення і виключення та її наслідки, узагальнення та приклади застосування
18. Числа Каталана. Рекурентне співвідношення для чисел Каталана. Твірна для послідовності чисел Каталана
19. Метод твірних функцій (на прикладі теореми про загальний вигляд розв'язку лінійного однорідного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами)
20. Розбиття чисел
21. Бієкції. Основні бієкції
22. Рівнопотужність. Порівняння потужностей
23. Зліченні множини та їхні властивості
24. Теореми Кантора про незліченність континуума та потужність булеана
25. Континуальні множини. Рівнопотужність квадрата та відрізка
26. Теорема Кантора-Бернштейна (без доведення) та її застосування.

#### **РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА:**

##### **Основна:**

1. Карнаух Т.О. Комбінаторика. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2011.
2. Карнаух Т.О. Задачі з комбінаторики. – Sou\_2009.doc
3. Карнаух Т.О., Ставровський А.Б. Вступ до дискретної математики. — К.: ВПЦ "Київський університет", 2006.
4. Карнаух Т.О., Ставровський А.Б. Теорія графів у задачах: Навчальний посібник. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004.
5. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-ч томах. Т.1. Арифметика.

Алгебра. Анализ.– 4-е изд. – М.:Наука, 1987.

6. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику.– М.:Наука, 1979.

7. Трохимчук Р.М. Збірник задач з дискретної математики. Множини і відношення: . – К., 1993.

***Додаткова:***

8. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.

9. Емельичев В.А. и др. Лекции по теории графов. – М., 1980.

10. Карнаух Т.О. Теорія множин: потужність: навчально-методична розробка. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2008.

11. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. – М.:Наука, 1975.

12. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. – М.:Мир, 1970.

13. Мальцев А.И. Алгебраические системы.– М.:Наука, 1969.

14. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. – М.:Наука, 1977.

15. Трохимчук Р.М. Булеві функції: Навчальний посібник. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2001.

16. Трохимчук Р.М. Множини і відношення: Навчальний посібник. – К., 1993.

17. Трохимчук Р.М. Збірник задач з теорії булевих функцій: Навчальний посібник. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2001.

18. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.:Мир, 1977.

19. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973.

20. Ядренко М.Й. Дискретна математика: навчальний посібник. – К.: ВПЦ "Експрес", 2003.



# Завдання для самостійної роботи з курсу «Дискретна математика» на період 24.01.18-28.02.18

для студентів, що навчаються за освітніми програмами  
прикладна математика  
системний аналіз

лектор:

к.ф.-м..н., доц. Карнаух Т.О. (електронна пошта – tkarnaukh@univ.net.ua)

викладачі, що проводитимуть практичні заняття

к.ф.-м..н., доц. Карнаух Т.О. (електронна пошта - tkarnaukh@univ.net.ua)

к.ф.-м..н., доц. Трохимчук Р.М. (електронна пошта - trost@unicyb.kiev.ua)

асист. Веклич Р.А. (електронна пошта - gostyslav.vekych@univ.net.ua)

**Тема:** Основні поняття та означення теорії графів.

**Зміст:** Виникнення теорії графів. Неформальне поняття графа. Приклади графових моделей. Формальне означення графа. Графи та бінарні відношення. Вершини та ребра. Суміжність вершин, інцидентність вершин та ребер, степінь вершини. Деякі спеціальні види графів.

Маршрути в графах та їх різновиди. Зв'язані вершини, компоненти зв'язності. Відстань між вершинами. Ексцентриситет, радіус, діаметр, центр. Дерево, ліс. Кістякові дерева й ліси.

*Література* [1, § 1-3]

## **Завдання**

1. Опрацювати теоретичний матеріал (основні поняття та означення) – до 05.02.18

2. Розв'язати задачі [1, §1] № 4, 5, 6, 7, 8аб, 9, 10, 12, 13, 16, 17, 18, 19 – до 14.02.18

3. Виконати **індивідуальну самостійну роботу** з теорії графів (макс. = 10 балів) – до 28.02.18

Далі наведено завдання індивідуальної самостійної роботи та систему оцінювання.

1 (2 бали). Побудувати діаграму графа (=намалювати граф), що має  $n$  вершин,  $m$  ребер,  $k$  компонент зв'язності, причому кожна компонента містить цикли та діаметр принаймні однієї компоненти зв'язності не менше  $d$ . На малюнку виділити компоненти зв'язності.

2 (3 бали). Для кожної вершини визначити степінь та ексцентриситет (можна підписати на малюнку поруч з вершинами).

Для кожної компоненти вказати кількість вершин та кількість ребер, радіус, діаметр, центральні вершини (можна виділити на малюнку).

3 (1 бал). Побудувати кістяковий ліс (можна навести на малюнку іншим кольором).

4 (4 бали, по 0.5 бали за кожен пункт). Навести для побудованого графа приклад маршрутів:

а) незамкнений маршрут довжини  $t_1$ ;

б) маршрут довжини не менше  $t_2$ , що не є ланцюгом;

в) маршрут, що не є простим ланцюгом, але є ланцюгом;

г) простий ланцюг довжини не менше  $d$ ;

д) замкнений маршрут довжини не менше  $t_3$ , що не є циклом;

е) цикл, що не є простим циклом;

ж) простий цикл;

з) найкоротший маршрут, що сполучає пару вершин найбільшого ексцентриситету.

## **Форми контролю**

Контроль виконання першого завдання відбувається через перевірку виконання другого завдання та індивідуальної самостійної роботи.

Скан або фото виконаного другого завдання не пізніше 14.02.18 мають бути надіслані викладачу з практичних занять.

Третє завдання (індивідуальна самостійна робота) **в рукописному вигляді на окремих аркушах** не пізніше 14.03.18 має бути здано для перевірки викладачу, що веде практичні заняття.

Варіанти завдань та розподіл варіантів наведено нижче.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА:

Основна:

1. Карнаух Т.О., Ставровський А.Б. Теорія графів у задачах: Навчальний посібник. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004.

Додаткова:

2. Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов. – М., 1980.

3. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977.

4. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973.

## Варіанти завдань

1.  $n=23, m=32, k=2, d=7, t_1=12, t_2=6, t_3=15$
2.  $n=25, m=32, k=4, d=5, t_1=11, t_2=5, t_3=7$
3.  $n=18, m=26, k=3, d=6, t_1=13, t_2=9, t_3=16$
4.  $n=21, m=31, k=4, d=5, t_1=10, t_2=7, t_3=8$
5.  $n=22, m=28, k=2, d=6, t_1=15, t_2=8, t_3=15$
6.  $n=19, m=26, k=3, d=7, t_1=14, t_2=10, t_3=11$
7.  $n=24, m=33, k=2, d=7, t_1=11, t_2=8, t_3=8$
8.  $n=20, m=26, k=4, d=5, t_1=15, t_2=10, t_3=12$
9.  $n=19, m=27, k=3, d=6, t_1=12, t_2=5, t_3=8$
10.  $n=23, m=33, k=4, d=7, t_1=13, t_2=7, t_3=15$
11.  $n=25, m=34, k=3, d=5, t_1=14, t_2=9, t_3=14$
12.  $n=18, m=28, k=2, d=6, t_1=10, t_2=6, t_3=9$
13.  $n=24, m=31, k=4, d=7, t_1=15, t_2=6, t_3=8$
14.  $n=21, m=29, k=3, d=5, t_1=12, t_2=5, t_3=14$
15.  $n=22, m=28, k=2, d=6, t_1=14, t_2=7, t_3=9$
16.  $n=20, m=29, k=2, d=7, t_1=13, t_2=9, t_3=16$
17.  $n=23, m=33, k=4, d=6, t_1=10, t_2=10, t_3=9$
18.  $n=19, m=26, k=3, d=5, t_1=11, t_2=8, t_3=11$
19.  $n=24, m=32, k=3, d=6, t_1=14, t_2=8, t_3=14$
20.  $n=22, m=28, k=2, d=5, t_1=13, t_2=6, t_3=9$
21.  $n=18, m=26, k=4, d=7, t_1=15, t_2=7, t_3=16$
22.  $n=21, m=31, k=4, d=5, t_1=10, t_2=10, t_3=8$
23.  $n=25, m=32, k=2, d=6, t_1=12, t_2=5, t_3=10$
24.  $n=20, m=26, k=3, d=7, t_1=11, t_2=9, t_3=15$
25.  $n=19, m=28, k=4, d=5, t_1=14, t_2=5, t_3=8$
26.  $n=22, m=28, k=3, d=6, t_1=12, t_2=8, t_3=14$
27.  $n=20, m=27, k=2, d=7, t_1=13, t_2=6, t_3=18$
28.  $n=24, m=32, k=2, d=7, t_1=10, t_2=7, t_3=8$
29.  $n=18, m=28, k=4, d=5, t_1=11, t_2=9, t_3=8$
30.  $n=21, m=30, k=3, d=6, t_1=15, t_2=10, t_3=13$
31.  $n=23, m=31, k=4, d=6, t_1=11, t_2=5, t_3=14$
32.  $n=25, m=35, k=3, d=5, t_1=13, t_2=6, t_3=9$
33.  $n=25, m=32, k=2, d=7, t_1=15, t_2=8, t_3=8$
34.  $n=19, m=28, k=3, d=7, t_1=10, t_2=10, t_3=16$
35.  $n=24, m=30, k=4, d=6, t_1=14, t_2=7, t_3=9$
36.  $n=18, m=24, k=2, d=5, t_1=12, t_2=9, t_3=14$
37.  $n=22, m=29, k=2, d=6, t_1=15, t_2=5, t_3=15$
38.  $n=21, m=31, k=3, d=7, t_1=14, t_2=8, t_3=8$
39.  $n=20, m=29, k=4, d=5, t_1=10, t_2=10, t_3=14$
40.  $n=23, m=31, k=4, d=5, t_1=11, t_2=7, t_3=7$
41.  $n=23, m=32, k=2, d=7, t_1=12, t_2=6, t_3=11$
42.  $n=18, m=28, k=3, d=6, t_1=13, t_2=9, t_3=14$
43.  $n=22, m=30, k=4, d=6, t_1=10, t_2=8, t_3=13$
44.  $n=20, m=26, k=2, d=5, t_1=15, t_2=6, t_3=8$

45.  $n=19, m=26, k=3, d=7, t_1=12, t_2=5, t_3=8$
46.  $n=21, m=30, k=4, d=7, t_1=13, t_2=10, t_3=17$
47.  $n=24, m=30, k=2, d=6, t_1=11, t_2=7, t_3=16$
48.  $n=25, m=33, k=3, d=5, t_1=14, t_2=9, t_3=7$
49.  $n=24, m=34, k=4, d=7, t_1=11, t_2=6, t_3=9$
50.  $n=23, m=30, k=3, d=5, t_1=10, t_2=7, t_3=13$
51.  $n=18, m=27, k=2, d=6, t_1=14, t_2=8, t_3=10$
52.  $n=22, m=28, k=2, d=6, t_1=15, t_2=10, t_3=13$
53.  $n=19, m=27, k=4, d=7, t_1=12, t_2=5, t_3=10$
54.  $n=20, m=27, k=3, d=5, t_1=13, t_2=9, t_3=12$
55.  $n=21, m=31, k=4, d=5, t_1=11, t_2=10, t_3=9$
56.  $n=25, m=33, k=3, d=7, t_1=13, t_2=5, t_3=15$
57.  $n=19, m=28, k=2, d=6, t_1=10, t_2=9, t_3=9$
58.  $n=23, m=30, k=4, d=6, t_1=15, t_2=7, t_3=14$
59.  $n=20, m=30, k=3, d=5, t_1=14, t_2=6, t_3=14$
60.  $n=22, m=28, k=2, d=7, t_1=12, t_2=8, t_3=8$
61.  $n=21, m=29, k=3, d=6, t_1=15, t_2=8, t_3=13$
62.  $n=18, m=28, k=2, d=7, t_1=13, t_2=9, t_3=9$
63.  $n=24, m=30, k=4, d=5, t_1=11, t_2=10, t_3=8$
64.  $n=25, m=32, k=4, d=7, t_1=14, t_2=7, t_3=18$
65.  $n=21, m=30, k=2, d=6, t_1=10, t_2=5, t_3=15$
66.  $n=23, m=29, k=3, d=5, t_1=12, t_2=6, t_3=6$
67.  $n=19, m=26, k=4, d=5, t_1=13, t_2=8, t_3=14$
68.  $n=20, m=30, k=3, d=7, t_1=10, t_2=6, t_3=9$
69.  $n=24, m=32, k=2, d=6, t_1=15, t_2=9, t_3=13$
70.  $n=18, m=27, k=3, d=5, t_1=14, t_2=10, t_3=8$
71.  $n=25, m=35, k=4, d=7, t_1=11, t_2=7, t_3=9$
72.  $n=22, m=29, k=2, d=6, t_1=12, t_2=5, t_3=16$
73.  $n=18, m=27, k=2, d=6, t_1=12, t_2=7, t_3=15$
74.  $n=23, m=31, k=4, d=5, t_1=10, t_2=9, t_3=7$
75.  $n=21, m=27, k=3, d=7, t_1=13, t_2=6, t_3=15$
76.  $n=24, m=32, k=4, d=7, t_1=11, t_2=8, t_3=11$
77.  $n=19, m=26, k=2, d=5, t_1=15, t_2=5, t_3=12$
78.  $n=20, m=26, k=3, d=6, t_1=14, t_2=10, t_3=7$
79.  $n=22, m=32, k=2, d=5, t_1=15, t_2=5, t_3=13$
80.  $n=25, m=34, k=4, d=7, t_1=11, t_2=7, t_3=11$
81.  $n=23, m=30, k=3, d=6, t_1=13, t_2=6, t_3=9$
82.  $n=24, m=34, k=2, d=5, t_1=14, t_2=10, t_3=11$
83.  $n=22, m=31, k=4, d=7, t_1=12, t_2=8, t_3=11$
84.  $n=19, m=27, k=3, d=6, t_1=10, t_2=9, t_3=14$
85.  $n=21, m=27, k=3, d=7, t_1=13, t_2=7, t_3=17$
86.  $n=18, m=26, k=4, d=6, t_1=14, t_2=9, t_3=10$
87.  $n=25, m=35, k=2, d=5, t_1=11, t_2=5, t_3=7$
88.  $n=20, m=27, k=2, d=6, t_1=15, t_2=8, t_3=13$
89.  $n=25, m=31, k=4, d=7, t_1=12, t_2=10, t_3=15$
90.  $n=19, m=28, k=3, d=5, t_1=10, t_2=6, t_3=9$
91.  $n=20, m=28, k=4, d=7, t_1=10, t_2=7, t_3=10$
92.  $n=18, m=25, k=3, d=5, t_1=11, t_2=10, t_3=12$
93.  $n=24, m=33, k=2, d=6, t_1=12, t_2=9, t_3=9$
94.  $n=21, m=31, k=4, d=7, t_1=13, t_2=8, t_3=16$
95.  $n=23, m=29, k=3, d=5, t_1=15, t_2=5, t_3=6$
96.  $n=22, m=31, k=2, d=6, t_1=14, t_2=6, t_3=16$
97.  $n=21, m=29, k=2, d=7, t_1=12, t_2=10, t_3=17$
98.  $n=25, m=35, k=4, d=6, t_1=10, t_2=6, t_3=10$
99.  $n=19, m=25, k=3, d=5, t_1=15, t_2=9, t_3=7$

100.  $n=18, m=25, k=4, d=6, t_1=13, t_2=5, t_3=13$
101.  $n=23, m=33, k=2, d=7, t_1=11, t_2=7, t_3=8$
102.  $n=20, m=26, k=3, d=5, t_1=14, t_2=8, t_3=12$
103.  $n=22, m=30, k=2, d=6, t_1=12, t_2=8, t_3=15$
104.  $n=24, m=31, k=4, d=5, t_1=10, t_2=7, t_3=9$
105.  $n=21, m=30, k=3, d=7, t_1=13, t_2=9, t_3=18$
106.  $n=24, m=33, k=3, d=5, t_1=14, t_2=6, t_3=8$
107.  $n=18, m=24, k=4, d=6, t_1=15, t_2=10, t_3=7$
108.  $n=20, m=28, k=2, d=7, t_1=11, t_2=5, t_3=16$
109.  $n=22, m=32, k=4, d=6, t_1=14, t_2=7, t_3=16$
110.  $n=23, m=30, k=3, d=7, t_1=11, t_2=10, t_3=10$
111.  $n=25, m=31, k=2, d=5, t_1=13, t_2=5, t_3=12$
112.  $n=19, m=29, k=4, d=6, t_1=10, t_2=8, t_3=7$
113.  $n=18, m=25, k=2, d=7, t_1=15, t_2=9, t_3=16$
114.  $n=22, m=31, k=3, d=5, t_1=12, t_2=6, t_3=8$
115.  $n=23, m=31, k=2, d=7, t_1=10, t_2=6, t_3=15$
116.  $n=25, m=31, k=3, d=6, t_1=14, t_2=9, t_3=10$
117.  $n=21, m=28, k=4, d=5, t_1=13, t_2=8, t_3=14$
118.  $n=19, m=28, k=3, d=7, t_1=15, t_2=7, t_3=9$
119.  $n=20, m=30, k=2, d=6, t_1=12, t_2=5, t_3=7$

## Розподіл варіантів

група	ПІБ	Варіант завдання на період 24.01.18- 28.02.18 з теорії графів
K11	Антонюк Євген Романович	1
K11	Василенко Руслан Владиславович	2
K11	Гагурін Євгеній Русланович	3
K11	Гайдай Іванна Максимівна	4
K11	Гнедаш Єгор Іванович	5
K11	Григорович Олександр Сергійович	6
K11	Забіяка Юлія Максимівна	7
K11	Завада Сергій Олександрович	8
K11	Кляцький Денис Олегович	9
K11	Кругленя Олександр Сергійович	10
K11	Кушнір Катерина Миколаївна	11
K11	Мушта Ілля Андрійович	12
K11	Олянін Денис Валерійович	13
K11	Оханський Денис Андрійович	14
K11	Петришак Софія Ігорівна	15
K11	Пицко Андрій Ярославович	16
K11	Поліщук Павло Сергійович	17
K11	Рейдало Владислав Анатолійович	18
K11	Рожук Антон Андрійович	19
K11	Сальник Дмитро Віталійович	20
K11	Сєдов Вадим Іванович	21
K11	Тригуб Антон Володимирович	22
K11	Ференець Роман Анатолійович	23
K11	Чергикало Денис Олександрович	24
K11	Шульган Олег Миколайович	25
K12	Бандерс Марія Миколаївна	26
K12	Башук Олексій Олексійович	27
K12	Білоножка Аліна Вадимівна	28
K12	Брагинець Олександр Юрійович	29
K12	Галунька Марина Ігорівна	30
K12	Грищенко Іван Євгенійович	31

група	ПІБ	
K12	Гудзенко Дмитро Станіславович	32
K12	Калугіна Софія Ігорівна	33
K12	Карпенко Кирило Костянтинівич	34
K12	Кодирова Заріна Іномівна	35
K12	Колодійчук Дмитро Ярославович	36
K12	Кравець Анна Василівна	37
K12	Кравченко Артем Вікторович	38
K12	Круглий Остап Андрійович	39
K12	Лабунський Костянтин Сергійович	40
K12	Лук'янець Павло Андрійович	41
K12	Майстренко Олександр Сергійович	42
K12	Орган Богдан Сергійович	43
K12	Проскуріна Анна Данилівна	44
K12	Семеняк Владислав Олександрович	45
K12	Середа Артем Сергійович	46
K12	Скороход Сергій Володимирович	47
K12	Холодилькін Гліб Олександрович	48
K12	Шишацький Андрій Вікторович	49
K12	Шкляр назарій Ігорович	50
K13	Андрушко Любомир Ярославович	51
K13	Астахов Максим Вячеславович	52
K13	Білоусова Ксенія Віталіївна	53
K13	Демченко Ярослав Трохимович	54
K13	Іванова Софія Дмитрівна	55
K13	Калюжний Денис Володимирович	56
K13	Кармазін Антон Олександрович	57
K13	Коваленко Олександра Юріївна	58
K13	Козак Дарина Дмитрівна	59
K13	Коржов Максим Олександрович	60
K13	Корнілевський Євген Ігорович	61
K13	Косих Анатолій Дмитрович	62
K13	Костогриз Руслан Олександрович	63
K13	Краєвський Олександр Святославович	64
K13	Кривченко Кирило Русланович	65
K13	Купченко Ігор Вячеславович	66
K13	Логвіна Ангеліна Вікторівна	67
K13	Ніколаєва Олена Володимирівна	68
K13	Паршакова Маргарита Андріївна	69
K13	Пірковець Катерина Геннадіївна	70
K13	Римар Олексій Сергійович	71
K13	Русін В'ячеслав Олександрович	72
K13	Таргонський Валерій Андрійович	73
K13	Тюнік Андрій Миколайович	74
K13	Шуляк Нікіта Віталійович	75
K14	Афанасьєва Олеся Ігорівна	76
K14	Бабій Дарія Олександрівна	77
K14	Біль Максим Андрійович	78
K14	Бойчук Ірина Іванівна	79
K14	Гетьман Юлія Володимирівна	80
K14	Головін Сергій Миколайович	81
K14	Горлов Євген Віталійович	82
K14	Гринюк Анна Василівна	83
K14	Дворник Кирило Олександрович	84
K14	Задорожний Антон Михайлович	85
K14	Заславський Денис Аркадійович	86

група	ПІБ	Варіант завдання на період 24.01.18- 28.02.18 з теорії графів
K14	Кіптик Кірілл Вікторович	87
K14	Ковалевський Максим Олексійович	88
K14	Колосов Сергій Сергійович	89
K14	Кудин Дмитро Олександрович	90
K14	Кузик Юлія Ігорівна	91
K14	Лошакова Олена Вадимівна	92
K14	Мартиненко Марія Вікторівна	93
K14	Марціленко Іван Володимирович	94
K14	Мась Анастасія Сергіївна	95
K14	Онишкевич Артур Олегович	96
K14	Павліченко Андрій Олексійович	97
K14	Парадюк Микола Віталійович	98
K14	Пікула Богдан Андрійович	99
K14	Полінка Максим Сергійович	100
K14	Смірний Денис Андрійович	101
K14	Стрілець Євгенія Федорівна	102
K14	Тацішин Богдан Вадимович	103
K14	Хижняк Арсеній Андрійович	104
K14	Цицюра Віталій Володимирович	105
K14	Чудік Тетяна Олександрівна	106
K14	Шелякін Гліб Вячеславович	107
K14	Шумейко Данило Тарасович	108
K14	Яковлев Богдан Сергійович	109