КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

_____________________факультет комп'ютерних наук та кібернетики__________

(назва факультету, інституту)

Кафедра (циклова комісія) __*Кафедра прикладної статистики*_____________

(для коледжів)

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник декана/директора
з навчальної роботи

____

«____»____________20__ року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ[1]

Теорія ймовірностей та математична статистика

(повна назва навчальної дисципліни)

для студентів

галузь знань **12 Інформаційні технології**

спеціальність **124 Системний аналіз**

освітній рівень **Бакалавр**

освітня програма **Системний аналіз**

спеціалізація

вид дисципліни **Обов'язкова**

КИЇВ – 2017

[1] Робоча програма навчальної дисципліни є нормативним документом вищого навчального закладу і містить виклад конкретного змісту навчальної дисципліни, послідовність, організаційні форми її вивчення та їх обсяг, визначає форми та засоби поточного і підсумкового контролів.

Робоча програма _Теорія ймовірностей та математична статистика
(назва спеціальності)
для студентів *спеціальності* системний аналіз
«____» ______________ 20__ року

Розробники[2]: (вказати авторів, їхні посади, наукові ступені та вчені звання)
канд. фіз.-мат. наук, доцент Чечельницький Олександр Анатолійович

Робоча програма дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика»

Затверджена на засіданні кафедри прикладної статистики

Протокол № 1 .від «31 » серпня 2017 року

Завідувач кафедри ___________________________ (Лебєдєв Е.О.)
(підпис) (прізвище та ініціали)

«_____» ___________________ 20__ року

Схвалено науково - методичною комісією факультету кібернетики

Протокол від « » вересня 2017 року №

Голова науково-методичної комісії ____________________ (Хусаїнов Д.Я)
(підпис) (прізвище та ініціали)

«_____» _________________ 20___ року

© _______________, 20___ рік
© _______________, 20___ рік
© _______________, 20___ рік

[2] Розробляється лектором. Робоча програма навчальної дисципліни розглядається на засіданні кафедри (циклової комісії – для коледжів), науково-методичної комісії факультету/інституту (раді навчального закладу - коледжу), підписується завідувачем кафедри (головою циклової комісії), головою науково-методичної комісії факультету/інституту (головою ради) і затверджується заступником декана/директора інституту з навчальної роботи (заступником директора коледжу).

ВСТУП

Навчальна дисципліна Теорія ймовірностей та математична статистика
(назва дисципліни)

є складовою освітньої програми бакалавр

галузі знань Інформаційні технології
з спеціальності Системний аналіз

Викладається у __IV___ семестрі __2___ курсу в **обсязі – 144 год.**
(зазначається **загальний** обсяг)

(_4_ кредити ECTS[3]) зокрема: *лекції – _40_ год., практичні _40_ год. семінарські заняття – __ год., лабораторні – __ год., самостійна робота – _96__ год.* У курсі передбачено **_2_** *змістових модулі* та _2_ *модульна(і) контрольна(і) робота(и)*. Завершується дисципліна – **заліком.**

Мета дисципліни – одержання студентами базових знань про стохастичні експерименти, вмінь працювати з основними ймовірносними моделями, навичок застосування отриманих знань до прикладних задач, які потребують ймовірносно-статистичного аналізу.

Завдання – надати студентам базові знання про стохастичні експерименти, сформувати вміння працювати з основними ймовірносними моделями, розвити навички застосування отриманих знань до прикладних задач, які потребують ймовірносно-статистичного аналізу.

В результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: основні визначення, формули (зокрема, формули повної ймовірності та Байєса), леми, теореми, моделі, поняття (зокрема поняття незалежності подій та умовної ймовірності) та положення дисципліни (зокрема, аксіоматику теорії ймовірностей). Особлива увага приділяється вивченню базового об’єкту, яким є поняття випадкової величини. Студентам вводяться основні характеристики випадкових величин та їх властивості; основні властивості моделей ланцюгів Маркова з дискретним та неперервним часом.

вміти: проводити розрахунки в рамках скінченної та зліченної ймовірносних схем та в умовах моделі геометричної ймовірності; будувати та досліджувати розподіли ймовірностей дискретних, неперервних, сингулярних та змішаних випадкових величин; перевіряти залежність та незалежність подій та випадкових величин; доводити основні граничні теореми, серед яких чільне місце займає центральні граничні теореми; будувати точкові та інтервальні оцінки та досліджувати їх на незміщеність та конзистентність; перевіряти статистичні гіпотези.

[3] кредитів ECTS – кредит кратний 36 годинам (Наприклад, 3 кредити ECTS відповідає 108 год.).

Місце дисципліни (*в структурно-логічній схемі підготовки фахівців відповідного напряму)*. Нормативна навчальна дисципліна „Теорія ймовірностей та математична статистика” є складовою частиною циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр”.

Зв'язок з іншими дисциплінами. Нормативна навчальна дисципліна „Теорія ймовірностей та математична статистика” є базовою для вивчення таких спеціальних дисциплін як „актуарна математика”, „економетрика”, „фінансова математика”, „економіко-математичне моделювання”, „методи прийняття рішень”.

Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти.

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою.

У змістовий модуль 1 (ЗМ1) входять теми 1-4, а у змістовий модуль 2 (ЗМ2) – теми 5-8. Обов'язковим для іспиту/заліку є _мінімальна кількість балів (20), набраних до іспитв/заліку.

(зазначаються умови, невиконання яких унеможливлює допуск до іспиту чи заліку)

Оцінювання за формами контролю[4]: (як приклад)

	ЗМ1		***ЗМ 2***	
	Min. – _ балів	*Max. – __ бали*	*Min. – __ бали*	*Max. – __ балів*
Усна відповідь	0	5	1	5
Доповнення	0	3	0	3
Доповідь	0	6	0	6
Реферат	0	7	0	7
Модульна контрольна робота 1	0	10	0	10
Модульна контрольна робота 2	0	10	0	10
„3” – мінімальна/максимальна оцінку, яку може отримати студент. 1 – мінімальна/максимальна залікова кількість робіт чи завдань.				

Для студентів, які набрали сумарно меншу кількість балів ніж *критично-розрахунковий мінімум – 20 балів* для одержання іспиту/заліку обов'язково потрібно набрати додаткові бали.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються у відповідності до „Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу” від 1 жовтня 2010 року.

При простому розрахунку отримаємо:

	Змістовий модуль1	Змістовий модуль2	іспит / *залік*	Підсумкова оцінка
Мінімум	0	0	**0**	0
Максимум	**30**	**30**	**40**	**100**

При цьому, кількість балів:

- **1-34** відповідає оцінці «незадовільно» з обов'язковим повторним вивченням дисципліни;
- **35-59** відповідає оцінці «незадовільно» з можливістю повторного складання;
- **60-64** відповідає оцінці «задовільно» («достатньо»);
- **65-74** відповідає оцінці «задовільно»;
- **75 - 84** відповідає оцінці «добре»;
- **85 - 89** відповідає оцінці «добре» («дуже добре»);
- **90 - 100** відповідає оцінці «відмінно».

---

[4] Див. Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу від 1 жовтня 2010 року, а також Розпорядження ректора «Про методику розрахунку підсумкової оцінки дисциплін, які читаються два і більше семестри» від 29 вересня 2010 року

Шкала відповідності *(за умови іспиту)*

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою	
90 – 100	5	відмінно
85 – 89	4	добре
75 – 84		
65 – 74	3	задовільно
60 – 64		
35 – 59	2	не задовільно
1 – 34		

Шкала відповідності *(за умови заліку)*

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою
90 – 100	Зараховано
85 – 89	
75 – 84	
65 – 74	
60 – 64	
1 – 59	не зараховано

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістовий модуль 1

«Аксіоматика теорії ймовірностей та поняття дискретної випадкової величини»

ТЕМА 1. Скінченна та зліченна ймовірносні схеми. Геометрична ймовірність ..… **(20 *год.*)**[5]

Вступ. Основні поняття. Елементи комбінаторики. Частота події. Властивості частот. Скінченна ймовірносна схема. Класичне визначення ймовірності події. Статистичне визначення ймовірності. Поняття ймовірносного простору. Поняття подій. Сигма-алгебра подій. Узагальнення визначення ймовірності.

ТЕМА 2. Аксіоматика теорії ймовірностей. Умовні ймовірності **………………..*(18 год.)***

Аксіоматика теорії ймовірностей. Умовні ймовірності. Незалежні події. Формула повної імовірності. Формула Байєса. Повна група подій. Формула повної імовірності.

ТЕМА 3. Дискретні випадкові величини **………………………………….……..*(22 год.)***

Дискретні випадкові величини. Схема незалежних випробувань Бернуллі. Граничні теореми в СНВБ (Локальна теорема Муавра–Лапласа, Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона.). Розподіл ймовірностей. Випадкова величина. Закони розподілу (одновимірні дискретні) . Приклади основних дискретних розподілів. Математичне сподівання. Багатовимірні закони розподілу (дискретні) . Основні дискретні розподіли (Рівномірний, бернулівський, біноміальний, геометричний, пуассонівський). Функція розподілу, її властивості. Математичне сподівання випадкової величини, його властивості. Механічна інтерпретація математичного сподівання. Дисперсія випадкової величини, її властивості. Середньоквадратичне відхилення.

ТЕМА 4. Незалежність дискретних випадкових величин **……….…………….…..*(14 год.)***

Незалежні випадкові величини. Коваріація і коефіцієнт кореляції. Мультиплікативна властивість математичного сподівання.

---

[5] Зазначається загальна кількість годин з урахуванням лекцій, практичних (семінарських, лабораторних) і самостійної роботи.

Змістовий модуль 2
«Випадкова величина в загальному сенсі. Ланцюги Маркова»

ТЕМА 5. Генератриси **……………………………………………………………..*(12 год.)***

Визначення генератриси та її застосування. Багатовимірні генератриси. Сума випадкового числа випадкових величини. Гіллясті процеси. Слабка збіжність (дискретних цілочисельних) в.в.

ТЕМА 6. Випадкові величини (загальний випадок) **…………………………….*(30 год.)***

Неперервні випадкові величини. Щільність розподілу, її властивості. Математичне сподівання, дисперсія, мода, медіана неперервних випадкових величин. Функція розподілу. Розподіл ймовірностей в.в. Дискретні, абсолютно неперервні та сингулярні розподіли. Основні абсолютно неперервні розподіли. Функції від випадкових величин. Незалежність випадкових величин. Математичне сподівання. Мультиплікативна властивість матсподівання. Формули для обчислення МХ. Зв'язок з інтегралами Рімана-Стілт'єса та Рімана. Гауссівські розподіли. Числові характеристики гауссовських розподілів. Багатовимірна функція розподілу. Багатовимірна щільність розподілу. Теореми про гауссівська вектори. Лінійність інтеграла Лебега. Сигмаадитивність інтеграла Лебега. Властивість абсолютної неперервності інтеграла Лебега.

ТЕМА 7. Ланцюги Маркова **……………………………………………………..*(16 год.)***

Класифікація станів ЛМ. Ергодична теорема для ланцюгів Маркова. Ланцюги Маркова з неперервним часом. Процеси гибелі та народження. Застосування теорії марківських процесів – системи M|M|1 та M|M|∞.

ТЕМА 8. Характеристичні функції **……………………………………………..*(12 год.)***

Характеристичні функції деяких розподілів. Формули обернення та теорема єдиності. Визначення та властивості характеристичної функції. Характеристичні функції деяких розподілів. Умова симетричності випадкової величини. Формула обернення для цілочисельної випадкової величини.

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І СЕМІНАРСЬКИХ ЗАНЯТЬ

№ п/п	Назва лекції	Кількість годин		
		лекції	семінари	С/Р
	Змістовий модуль 1 **«Аксіоматика теорії ймовірностей та поняття дискретної випадкової величини»**			
1	Стохастичний експеримент. Простір елементарних подій. Операції над подіями	2	2	4
2	Скінченна та зліченна ймовірносні схеми. Геометрична ймовірність	2	2	4
3	Скінченна та зліченна ймовірносні схеми. Геометрична ймовірність (продовження)	2	2	4
4	Аксіоматика теорії ймовірностей. Умовні ймовірності	2	2	4
4	Аксіоматика теорії ймовірностей. Умовні ймовірності (продовження)	2	2	4
6	Формула повної ймовірності. Формула Байєса	2	2	3
7	Схема незалежних випробувань Бернуллі	2	2	3
8	Дискретні випадкові величини	2	2	4
9	Багатовимірні дискретні розподіли. Незалежні дискретні випадкові величини	2	2	4
10	Числові характеристики дискретних випадкових величин	2	2	4
11	Моменти дискретних випадкових величин. Незалежні дискретні випадкові та властивості їх числових характеристик	2	2	4
	Модульна контрольна робота 1			
	Змістовий модуль 2 **«Випадкова величина в загальному сенсі. Ланцюги Маркова»**			
12	Генератриси	2	2	4
13	Багатовимірні генератриси розподілів	2	2	4
14	Випадкові величини (загальний випадок)	2	2	4
15	Числові характеристики випадкових величин (загальний випадок)	2	2	4
16	Ланцюги Маркова з дискретним часом	2	2	4
17	Ланцюги Маркова з неперервним часом.	2	2	4
18	Ланцюги Маркова з неперервним часом. Процеси загибелі та народження.	2	2	4
19	Характеристичні функції	2	2	4
20	Центральна гранична теорема.	2	2	4

	Підсумкова модульна контрольна робота			
	ВСЬОГО	**40**	**40**	**78**

Загальний обсяг 144 *год.*[6], в тому числі:
Лекцій – **40** *год.*
Семінари –**40** *год.*
Самостійна робота – **78** *год.*

[6] Загальна кількість годин, відведених на дану дисципліну згідно навчального плану.

Змістовий модуль 1

Тема 1
Скінченна та зліченна ймовірносні схеми. Геометрична ймовірність – *(20 год.)*

Лекція 1. Стохастичний експеримент. Простір елементарних подій. Операції над подіями – *2 год.*

Практичне заняття №1 Простір елементарних подій. *– 2 год.*
1. Поняття елемнтарної події та простору елементарних подій.
2. Понятя складної події, достовірної, протилежної та неможливої події.
3. Основні операції над подіями.

Тема самостійної роботи №1 Простір елементарних подій. Операції над пдіями. – *4 год.*
1. Пняття випадкової події.
2. Понятя частоти події та її властивості.
3. Статистичне визначення ймовірності.

Література: 1,2,3,4,5,6.

Лекція 2. Скінченна та зліченна ймовірносні схеми. Геометрична ймовірність – *2 год.*

Практичне заняття №2 Вступ. Ймовірність. *– 2 год.*
1. Скінченний простір елементарних подій. Поняття події для скінченного простору елементарних подй .
2. Визначення ймовірності для подій скінченного простору.
3. Класичне визначення ймовірності подій.
4. Властивості ймовірності, визначеної класичним чином.

Тема самостійної роботи №2 Скінченна та зліченна ймовірносні схеми. Геометрична ймовірність. – *4 год.*
1. Основні поняття комбінаторики.
2. Класичне визначення ймовірності події.
3. Розв'зок задач на класичне визначення ймовірності.

Література: 1,2,3,4,5,6.

Лекція 3. Скінченна та зліченна ймовірносні схеми. Геометрична ймовірність (продовження) – *2 год.*

Практичне заняття №3 Ймовірносний простір. *– 2 год.*
1. Поняття зліченного ймовірносного простору.
2. Поняття подій та ймовірності в зліченному просторі.
3. Властивості ймовірності в моделях зі зліченним простором.

<u>Тема самостійної роботи №3</u> Скінченна та зліченна ймовірносні схеми. Геометрична ймовірність (продовження). – *<u>4 год.</u>*

1. Методи розв'язків рекурентних співвідношень.
2. Застосування рукурентних співвідношень до пошуку ймовірностей подій в моделях нескінченних незалежних випробувань .

Література: 1,2,3,4,5,6.

Тема 2
Аксіоматика теорії ймовірностей. Умовні ймовірності – (26 год.)

<u>Лекція 4</u>. Аксіоматика теорії ймовірностей. Умовні ймовірності *– 2 год.*

<u>Практичне заняття №4</u> Геометричне визначення ймовірності. *<u>– 2 год.</u>*

1. Властивості геометричної ймовірності.
2. Задача Бюффона

<u>Тема самостійної роботи №4</u> Міра Лебега. <u>– 4</u> *<u>год.</u>*

1. Поняття міри Лебега.
2. Різниця між поняттям неможливої події та події нульової ймовірноств.

Література: 1,2,3,4,5,6.

<u>Лекція 5</u>.Аксіоматика теорії ймовірностей. Умовні ймовірності (продовження) *– 2 год.*

<u>Практичне заняття №5</u> Умовна ймовірність. Незалежність подій *<u>– 2 год.</u>*

1. Умовна ймовірність.
2. Незалежні події.
3. Поняття незалежності у сукупності. Приклад Бернштейна.

<u>Тема самостійної роботи №5</u> Умовна ймовірність. *<u>– 4 год.</u>*

1. Основне та еквівалентне визначення незалежності подій.
2. Спадковість незалежності подій.

Література: 1,2,3,4,5,6.

<u>Лекція 6</u>. Формула повної ймовірності. Формула Байєса *– 2 год.*

1. Формула повної ймовірності.
2. Поняття повної групи подій.
3. Формула Байєса.

<u>Практичне заняття №6</u> Формула повної ймовірності, формула Байєса. *<u>– 4 год.</u>*

1. Формула повної ймовірності.
2. Формула Байєса.

<u>Тема самостійної роботи №6</u> Умовна ймовірність. Формула повної ймовірності, фрмула Байєсаю *<u>– 3 год.</u>*

1.Повна група подій. Формула повної ймовірності.
2. Формула Байєса.

Література: 1,2,3,4,5,6.

Тема 3. Дискретні випадкові величини – (22 год.)

Лекція 7. Схема незалежних випробувань Бернулі – *2 год.*

Практичне заняття №7 Схема незалежних випробувань Бернуллі. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. – 2 *год.*

1.Схема незалежних випробувань Бернуллі.
2.Локальна теорема Муавра–Лапласа.
3. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Тема самостійної роботи №7 Схема незалежних випробувань Бернулли. – 3 *год.*

1. Застосування теорем Муавра-Лапласа
2. Роз'язок задач на знаходження характеристик моделей, які описуються схемою Бернуллі.

Література: 1,2,3,4,5,6.

Лекція 8. Дискретні випадкові величини – *2 год.*

Практичне заняття №8 Основні типи розподілів дискретних випадеових величин. – 2 *год.*

1. Біноміальний розподіл та його властивості
2. Геометричний розподіл та його властивості

Тема самостійної роботи №8 Дискретні випадкові величини. Типи розподілів – 4 *год.*

Основні дискретні розподіли.

1. Бернулівський.
2. Біноміальний.
4. Геометричний.
5. Від'ємно біноміальний розподіл

Література: 1,2,3,4,5,6.

Тема 4. Незалежність випадкових величини – (14 год.)

Лекція 9. Багатовимірні дискретні розподіли. Незалежні дискретні випадкові величини – *2 год.*

Практичне заняття №9 Багатовимірні дискретні розподіли. *– 2 год.*

1. Багатовимірний розподіл ймовірностей.
2. Поліноміальний розподіл
3. Багатовимірний розподіл Пуассона

Тема самостійної роботи №9 Незалежні випадкові величини. *– 4 год.*

Література: 1,2,3,4,5,6.

1. Застосування багатовимірних розподілів

<u>Лекція 10</u>. Числові характеристики дискретних випадкових величин – *2 год.*

<u>Практичне заняття №10</u> Математичне сподівання дискретної випадкової величини *<u>– 2 год.</u>*

1. Математичне сподівання випадкової величини, його властивості.
2. Математичне сподівання основних типів дискретних випадкових величин

<u>Тема самостійної роботи №10</u> Незалежні випадкові величини. <u>– 4 *год.*</u>

1. Математичне сподівання випадкової величини, його властивості.
2. Математичне сподівання основних типів дискретних випадкових величин

Література: 1,2,3,4,5,6.

<u>Лекція 11</u>. Моменти дискретних випадкових величин. Незалежні дискретні випадкові величини та властивості їх числових характеристик – *2 год.*

<u>Практичне заняття №11</u> Дисперсія та її властивості*<u>– 2 год.</u>*

1. Дисперсія випадкової величини.
2. Дисперсія основних типів дискретних випадкових величин
3. Коваріація та коефіцієнт кореляції

<u>Тема самостійної роботи №11</u> Незалежні випадкові величини. <u>– 4 *год.*</u>

1. Моменти випадкової величини, їх властивості.
2. Кореляція дискретних випадкових величин

Література: 1,2,3,4,5,6.

ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

змістовного модуля № 1

Задача 1 Знайти ймовірність того, що при киданні трьох гральних кубиків шістка випаде на одному з них, якщо всі три значення різні.

Задача 2 З колоди у 52 карти витягають навмання відразу 3 карти. Описати множину елементарних подій Ω. Знайти ймовірність події А=(витягнуті карти будуть 3, 7 та туз).

Задача 3 5% чоловіків та 0,25% жінок – дальтоніки. Навмання обрана людина виявилась дальтоніком. Яка ймовірність того, що це був чоловік, якщо вважати, що чоловіків та жінок однакова кількість?

Задача 4 Автомат випускає гвіздки, причому ймовірність появи бракованого гвіздка складає 0,1%. Яка ймовірність того, що серед 1000 гвіздків буде не більше двох бракованих?

Задача 5 Маємо рівняння $x^2 + ax + b = 0$, де a та b довільно (рівно можливо) обираються з відрізка $[\ 0\ ,\ 1\ ]$. Знайти ймовірність того, що це рівняння має дійсні корені.

Задача 6 В коробці 4 червоних та 3 зелених олівці. Із коробки навмання дістають 3 олівці. Нехай X – випадкова величина, що дорівнює кількості витягнутих червоних олівців. Знайти розподіл випадкової величини X та ймовірності таких подій: $A = \{ X \geq 2 \}$, $B = \{ X \leq 1 \}$. Побудувати функцію розподілу випадкової величини X.

Задача 7 Із ящика, в якому 2 білих та 4 чорних кулі, виймають 3 кулі і перекладають в інший ящик, де вже було 5 білих куль. Потім з другого ящика перекладають 4 кулі знову до першого ящика. Знайти математичне сподівання числа білих куль x_1 та x_2 в обох ящиках.

Контрольні питання до змістовного модуля № 1

1. Стохастичний експеримент. Масове явище. Елементарна подія, простір елементарних подій.Основні операції над подіями, їхні множинні відповідники, демонстрація діаграмами Ейлера-Вєнна.
2. Абсолютні та відносні частоти подій, їхні основні характеристики. Статистичне визначення ймовірності.
3. Скінченна ймовірносна схема (СЙС). Поняття події та її ймовірності в СЙС. Кількість різних можливих подій в СЙС. Властивості ймовірності в рамках СЙС. Класичне визначення ймовірності.
4. Комбінаторне правило добутку – основне правило комбінаторики. Комбінаторне правило суми. Сполуки, перестановки, розміщення, перестановки з повтореннями, сполуки з повтореннями.
5. Зліченна ймовірносна схема (ЗЙС). Поняття події та її ймовірності в ЗЙС. Властивості ймовірності в рамках ЗЙС.
6. Геометричне визначення ймовірності. Демонстрація відмінності між поняттями неможливої події та події нульової ймовірності.
7. Алгебра, сігма-алгебра, загальне визначення події та її ймовірності, аксіоматика теорії ймовірностей та основні наслідки з аксіом. Ймовірносний простір.
8. Умовна ймовірність. Теорема добутку (частковий та загальний варіант). Основне та еквівалентне визначення незалежних подій. Незалежність в сукупності та попарна незалежність подій. Властивості незалежних подій.
9. Повні групи подій, попарна несумісність подій. Теорема (формула) повної ймовірності. Задача про розорення.
10. Апріорні та апостеріорні ймовірності. Формула Байєса.
11. Дискретна випадкова величина (в.в.) та розбиття, що нею породжується. Індикатор. Представлення в.в. у вигляді лінійної комбінації індикаторів.
12. Схема незалежних випробувань Бернуллі (СНВБ), основні формули.
13. Теорема Пуассона в СНВБ,– закон рідких подій. Приклади застосування.
14. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Приклади застосування.
15. Дискретні одновимірні закони розподілу в.в. Приклади основних дискретних розподілів. Вибірковий ймовірносний простір.
16. Сумовна в.в., її математичне сподівання (м.с.) та його властивості.
17. Моменти в.в., дисперсія та її властивості.
18. Дискретні багатовимірні закони розподілу. Випадковий вектор (в.вк.). Двовимірна дискретна в.в.
19. Незалежні дискретні в.в. – два визначення (основне та еквівалентна) та доведення їхньої еквівалентності. Теорема про спадковість незалежності.
20. Властивості м.с. та дисперсій для незалежних в.в.
21. Коваріація та кореляція випадкових величин. Їхні властивості.

Змістовий модуль 2

Тема 5. Генератриси – (12 год.)

Лекція 12. Генератриса (твірна функція) – *2 год.*

Практичне заняття №12 Генератриси розподілів. Фкторіальні моменти. – 2 *год.*

1. Генератриси основних типів дискретних розподілів.
2. Факторіальні моменти.

Тема самостійної роботи №12 Генератриси. – 4 *год.*

1. Генератриси основних типів розподілів.
2. Сума випадкового числа дискретних випадкових величини.

Література: 1,2,3,5.

Лекція 13. Багатовимірні генератриси розподілів – *2 год.*

Практичне заняття №13 Багатовимірні генератриси розподілів. Змішані факторіальні моменти – 2 *год.*

1. Знаходженя багатовимірних генерастрис розподілів.
2. Знаходження змішаних факторіальних моментів.

Тема самостійної роботи №13 Генератриси (продовження). – 4 *год.*

1. Знаходження багаовимірних генератрис.
2. Знаходження числових характеристик випадкового числа дискретних випадкових величин.

Література: 1,2,3,5.

Тема 6. Випадкові величини (загальний випадок) – (30 год.)

Лекція 14. Випадкові величини (загальний випадок) – *2 год.*

Практичне заняття №14 Функції розподілу та її властивості *– 2 год.*

1. Функції розподілу та їх властивості.
2. Поняття вибіркового простору.

Тема самостійної роботи №14 Випадкові величи. – 4 *год.*

1. Випадкова величина як вимірне відображення.
2. Функція розподілу.
3. Відповідність між розподілом випадкової величини та її функцією розподілу.

Література: 1,2,3,5,6.

Лекція 15. Числові характеристики випадкових величин (загальний випадок) – *2 год.*

Практичне заняття №15 Основні типи абсолютно неперервних розподілів. Числові характеристики випадкових величин *– 2 год.*

1. Щільність розподілу та її властивості.
2. Рівномірний, показниковий та гауссовський розподіли.
3. Математичне сподівання, дисперсія та старші моменти випадкових величин.

<u>Тема самостійної роботи №15</u> Випадкові величини (загальний випадок). <u>– 4 *год.*</u>

1.Основні типи абсолютно неперервних розподілів.
2. Визначення та приклад сингулярного розподілу.
3. Загальний вигляд довільної функції розподілу.
4. Інтеграл Лебега.

Література: 1,2,3,5,6.

Тема 7. Ланцюги Маркова – (16 год.)

<u>Лекція 16</u>. Ланцюги Маркова з дискретним часом. – *2 год.*

<u>Практичне заняття №16</u> Ланцюги Маркова з дискретним часом <u>– *2 год.*</u>

1. **Однорідний ланцюг Маркова. Матриця перехідних ймовірностей.**
2. **Рівняння Чкпмена-Колмогорова. Класифікація станів ланцюга Маркова.**
3. **Теорема солідарності. Властивості переодичного ланцюга.**
4. **Ергодичний та стаціонарний розподіли ланцюга Маркова**

<u>Тема самостійної роботи №16</u> Ланцюги Маркова з дискретним часом. <u>– 4 *год.*</u>

1.Класифікація станів ЛМ.
2. Ергодична теорема для ланцюгів Маркова.

Література: 1,2,3,5.

<u>Лекція 17</u> . Ланцюги Маркова з неперервним часом – *2 год.*

<u>Практичне заняття №17</u> Ланцюги Маркова з неперервним часом <u>– *2 год.*</u>

1. Однорідні ланцюги Маркова з неперервним часом. Властивості перехідних ймовірностей.
2. Інфінітезімальні характеристики ланцюга Маркова. Вкладений ланцюг.
3. Перша та друга системи диференційних рівнянь Колмогорова..

<u>Тема самостійної роботи №17</u> Ланцюги Маркова з неперервним часом. <u>– 4 *год.*</u>

1. Стохастично неперервні ланцюги Маркова з неперервним часом.
2. Системи Колмогорова в матричному виглядф..

Література: 1,2,3,5.

<u>Лекція 18</u> . Ланцюги Маркова (продовження). Процеси загибелі та народження – *2 год.*

<u>Практичне заняття №18</u> Процеси загибелі та народження. <u>*– 2 год.*</u>

1. Інфінітезімальна матриця процесів загибелі та народження.
2. Стаціонарний розподіл процесів загибелі та народження.
3. Системи масового обслуговування.

<u>Тема самостійної роботи №15</u> Процеси загибелі та народження. <u>**– 4** *год.*</u>

1. Система обслуговування типу М/М/1.
2. Система обслуговування типу $M/M/\infty$.

Література: 1,2,3,5.

Тема 8. Характеристичні функції – (11 год.)

<u>Лекція 19</u>. Характеристичні функції – *2 год.*

<u>Практичне заняття №19</u> Характеристичні функції. <u>*– 2 год.*</u>

1. Властивості характеристичних функцій.
2. Характеристичні функції основних типів розподілів випадкових величин..
3. Формули обернення.

<u>Тема самостійної роботи №19</u> Характеристичні функції. <u>**– 4** *год.*</u>

1.Умова симетричності розподілу випадкової величини.

2.Формули обернення характеристичних функцій.

Література: 1,2,3,5.

<u>Лекція 20</u>. Центральна гранична теорема– *2 год.*

<u>Практичне заняття №20</u> Центральна гранична теорема. <u>*– 2 год.*</u>

1. Відповідність між характеристичними функціями і розподілами випадкових величин..
2. Теореми Хеллі.
3. Закон великих чисел у формі Хінчина
4. Центральна гранична теорема. Умова Ліндеберга

<u>Тема самостійної роботи №20</u> Центральна гранична теорема <u>**– 4** *год.*</u>

1.Закон великих чисел у формі Хінчина.

2.Центральна гранична теорема і умова Ліндеберга.

Література: 1,2,3,5.

ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

змістовного модуля № 2

<u>Задача 1</u> Випадкова величина Х розподілена за законом арксинуса, тобто її щільність

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|\geq a\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & |x|<a\end{cases}$$

Знайти F(x), MX та DX.

<u>Задача 2</u> Точку кинуто всередину круга радіуса r. ξ - відстань від точки до центра кола. Знайти $F_\xi(x)$, $f_\xi(x)$, $D\xi$ та $M\xi$.

<u>Задача 3</u> Випадкова величина X має щільність, що є центрованим напівеліпсом з піввісями a і b (a - відоме, b - ні). Знайти b, m=MX, DX, F(x) та побудувати графік F(x).

<u>Задача 4</u> $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ \exp\{-x^{-a}\}, & x>0\end{cases}$ (a>0). Знайти $F_\eta(y)$, де $\eta=-1/\xi$.

<u>Задача 5</u> Випадковий вектор (x, y) має нормальний розподіл з Ex = Ey = 0, $Ex^2 = Ey^2 = \sigma^2$, Exy = 0. Знайти P{x<y} та P{x>0 , y>0}.

<u>Задача 6</u> В продукції заводу браку через дефект А складає 3%, а через дефект В – 4,5%. Небракованої продукції 95%. Знайти коефіцієнт кореляції дефектів А та В.

<u>Задача 7</u> Випадкові величини ξ та η незалежні, $M|\eta|<\infty$, $M|\xi|<\infty$. Довести, що $M|\xi\eta|<\infty$ і $M\xi\eta = M\xi M\eta$.

Контрольні питання до змістовного модуля № 2

1. Генератриса та факторіальні моменти цілочисельної в.в. (ц.в.в.). Приклади. Теорема про генератрису суми незалежних доданків.
2. Багатовимірні генератриси та змішані факторіальні моменти цілочисельних в.вк. Теорема про випадкову суму випадкового числа в.в.
3. Гіллястий процес (г.п.). Критичні, докритичні та надкритичні г.п. Виродження г.п. та її ймовірність.
4. Критерій надкритичності г.п.
5. Слабка збіжність ц.в.в. та її критерій. Доведення теореми Пуассона на базі критерію слабкої збіжності.
6. Визначення в.в. як вимірного відображення. Функція розподілу (ф.р.) в.в., її властивості та наслідки цих властивостей. Теорема про характеристичні властивості ф.р.
7. Борелівська сігма-алгебра, вимірність в.в., розподіл ймовірностей в.в. Теорема Каратеодорі. Зв’язок між розподілом ймовірностей в.в. та її ф.р. Вибірковий ймовірносний простір.
8. Лема про число точок розриву першого роду довільної ф.р. Дискретні розподіли.
9. Абсолютно неперервні розподіли. Щільність, її властивості. Приклади основних абсолютно неперервних розподілів.
10. Визначення та приклад сингулярного розподілу. Загальний розклад довільної ф.р.
11. Функції від випадкових величин, теорема та приклади.
12. В.вк., його ф.р. та щільність. Незалежні в.в. (основне та еквівалентне визначення). Властивості незалежних в.в.
13. Щільність суми двох незалежних в.в. Приклад (трикутний розподіл).
14. Проста невід’ємна в.в. та її м.с. Елементарні властивості м.с.

15. Невід’ємна в.в., її м.с.
16. Загальне визначення м.с.в.в. Властивості м.с.в.в.
17. Мультиплікативна властивість м.с.
18. М.с. як інтеграл Лебєга. Збіжність майже всюди. Теорема Лебєга.
19. Формули для обчислення м.с. Інтеграл Лебєга-Стілт’єса.
20. Ланцюг Маркова (ЛМ), марківська властивість, однорідний ЛМ, матриця перехідних ймовірностей. Стохастична матриця. Приклади.
21. Рівність Маркова–Колмогорова–Чепмена. РМКЧ в матричному вигляді та наслідок з неї.
22. Розподіл ймовірностей ЛМ.
23. Класифікація станів ЛМ.
24. Критерій рекурентності.
25. Теорема солідарності. Приклади її застосування.
26. Критерій рекурентності тривіального блукання на Z^1.
27. Теорема про розклад множини станів періодичного ЛМ.
28. Граничний, ергодичний та стаціонарний розподіли ЛМ.
29. Ергодичні теореми.
30. ЛМ з неперервним часом (ЛМнч). Однорідні ЛМнч, властивості перехідних ймовірностей. Траєкторії ЛМнч.
31. Стохастично неперервні ЛМнч та теорема про їх інфінітезимальні характеристики. Властивості інфінітезимальних характеристик.
32. Вкладені ЛМ. Перша та друга системи рівнянь Колмогорова (ПСРК та ДСРК) та їхній матричний вид. Системи для безумовних та стаціонарних ймовірностей.
33. Ергодична теорема для ЛМнч.
34. Процеси гибелі та народження (ПГтН). Інфінітезимальна матриця ПГтН та відповідні ПСРК та ДСРК.
35. Система рівнянь для безумовних ймовірностей ПГтН. Стаціонарний розподіл для ПГтН.
36. Системи масового обслуговування типу М | М | 1.
37. Системи масового обслуговування типу М | М | ∞.
38. Характеристична функцій (х.ф.) – визначення та основні формули і властивості. Х.ф. основних розподілів.
39. Формули обернення та теорема єдиності для х.ф. Приклади стійких розподілів.
40. Симетричні розподіли.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА:

а) основна:

1. А.Н. Ширяев „Вероятность”, М. 1989.
2. І. Гіхман, А. Скороход, М. Ядренко "Теорія ймовірностей та математична статистика".

3. А.В. Скороход "Елементи теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів", К. 1975.
4. А. Дороговцев „Теория вероятностей. Сборник задач”, К. 1980.
5. В. Феллер „Введение в теорию вероятностей и её приложения”.
6. Лебєдєв Є.О., Шарапов М.М. Курс лекцій з теорії ймовірностей. – К.: Норіта-плюс, 2007. – 168 с.
7. Є.О.Лебєдєв, О.А.Чечельницький, М.М.Шарапов, М.С.Братійчук Збірник задач з теорії ймовірностей, КНУ ім. Т. Шевченка, 2006.

б) додаткова:

8. А.В. Свешников "Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов", М. 1965.
9. Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков, А.М. Зубков „Сборник задач по теории вероятностей”, М. 1980.
10. А.В. Ефимов (ред.) „Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике для ВТУЗов”, М. 1990.
11. Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров „Теория вероятностей. Задачи и упражнения”, М. 1973.
12. И.И. Гихман, А.В. Скороход „Введение в теорию случайных процессов", М. 1973.
13. А.Д. Вентцель „Курс теории случайных процессов", М. 1975.
14. Е.И. Гурский „Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике”, Минск, 1984.
15. Г.В. Емельянов, В.П. Скитович „Задачи по теории вероятностей и математической статистике”, М. 1967.
16. Б.В. Гнеденко „Курс теории случайных процессов", М. 1961.
17. Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев „Математическая статистика”, М. 1984.

ПИТАННЯ НА ЗАЛІК

1. Стохастичний експеримент. Масове явище. Елементарна подія, простір елементарних подій. Подія, іменовані події. Основні операції над подіями, їхні множинні відповідники, демонстрація діаграмами Ейлера-Вєнна та таблицями істинності.
2. Абсолютні та відносні частоти подій, їхні основні характеристики. Статистичне визначення ймовірності.
3. Скінченна ймовірносна схема (СЙС). Поняття події та її ймовірності в СЙС. Кількість різних можливих подій в СЙС. Властивості ймовірності в рамках СЙС. Класичне визначення ймовірності.
4. Комбінаторне правило добутку – основне правило комбінаторики. Комбінаторне правило суми. Сполуки, перестановки, розміщення, перестановки з повтореннями, сполуки з повтореннями.
5. Зліченна ймовірносна схема (ЗЙС). Поняття події та її ймовірності в ЗЙС. Властивості ймовірності в рамках ЗЙС.
6. Геометричне визначення ймовірності. Демонстрація відмінності між поняттями неможливої події та події нульової ймовірності.
7. Алгебра, сігма-алгебра, загальне визначення події та її ймовірності, аксіоматика теорії ймовірностей та основні наслідки з аксіом. Ймовірносний простір.
8. Умовна ймовірність. Теорема добутку (частковий та загальний варіант). Основне та еквівалентне визначення незалежних подій. Незалежність в сукупності та попарна незалежність подій. Властивості незалежних подій.
9. Повні групи подій, попарна несумісність подій. Теорема (формула) повної ймовірності. Задача про розорення.
10. Апріорні та апостеріорні ймовірності. Формула Байєса.
11. Дискретна випадкова величина (в.в.) та розбиття, що нею породжується. Індикатор. Представлення в.в. у вигляді лінійної комбінації індикаторів.
12. Схема незалежних випробувань Бернуллі (СНВБ), основні формули.
13. Теорема Пуассона в СНВБ,– закон рідких подій. Приклади застосування.
14. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Приклади застосування.
15. Дискретні одновимірні закони розподілу в.в. Приклади основних дискретних розподілів. Вибірковий ймовірносний простір.
16. Сумовна в.в., її математичне сподівання (м.с.) та його властивості.
17. Моменти в.в., дисперсія та її властивості.
18. Дискретні багатовимірні закони розподілу. Випадковий вектор (в.вк.). Двовимірна дискретна в.в.
19. Незалежні дискретні в.в. – два визначення (основне та еквівалентна) та доведення їхньої еквівалентності. Теорема про спадковість незалежності.
20. Властивості м.с. та дисперсій для незалежних в.в.
21. Коваріація та кореляція випадкових величин. Їхні властивості.
22. Генератриса та факторіальні моменти цілочисельної в.в. (ц.в.в.). Приклади. Теорема про генератрису суми незалежних доданків.
23. Багатовимірні генератриси та змішані факторіальні моменти цілочисельних в.вк. Теорема про випадкову суму випадкового числа в.в.

24. Гіллястий процес (г.п.). Критичні, докритичні та надкритичні г.п. Виродження г.п. та її ймовірність.
25. Критерій надкритичності г.п.
26. Слабка збіжність ц.в.в. та її критерій. Доведення теореми Пуассона на базі критерію слабкої збіжності.
27. Визначення в.в. як вимірного відображення. Функція розподілу (ф.р.) в.в., її властивості та наслідки цих властивостей. Теорема про характеристичні властивості ф.р.
28. Борелівська сігма-алгебра, вимірність в.в., розподіл ймовірностей в.в. Теорема Каратеодорі. Зв'язок між розподілом ймовірностей в.в. та її ф.р. Вибірковий ймовірносний простір.
29. Лема про число точок розриву першого роду довільної ф.р. Дискретні розподіли.
30. Абсолютно неперервні розподіли. Щільність, її властивості. Приклади основних абсолютно неперервних розподілів.
31. Визначення та приклад сингулярного розподілу. Загальний розклад довільної ф.р.
32. Функції від випадкових величин, теорема та приклади.
33. В.вк., його ф.р. та щільність. Незалежні в.в. (основне та еквівалентне визначення). Властивості незалежних в.в.
34. Щільність суми двох незалежних в.в. Приклад (трикутний розподіл).
35. Проста невід'ємна в.в. та її м.с. Елементарні властивості м.с.
36. Невід'ємна в.в., її м.с.
37. Загальне визначення м.с.в.в. Властивості м.с.в.в.
38. Мультиплікативна властивість м.с.
39. М.с. як інтеграл Лебєга. Збіжність майже всюди. Теорема Лебєга.
40. Формули для обчислення м.с. Інтеграл Лебєга-Стілт'єса.
41. Ланцюг Маркова (ЛМ), марківська властивість, однорідний ЛМ, матриця перехідних ймовірностей. Стохастична матриця. Приклади.
42. Рівність Маркова–Колмогорова–Чепмена. РМКЧ в матричному вигляді та наслідок з неї.
43. Розподіл ймовірностей ЛМ.
44. Класифікація станів ЛМ.
45. Критерій рекурентності.
46. Теорема солідарності. Приклади її застосування.
47. Критерій рекурентності тривіального блукання на Z1.
48. Теорема про розклад множини станів періодичного ЛМ.
49. Граничний, ергодичний та стаціонарний розподіли ЛМ.
50. Ергодичні теореми.
51. ЛМ з неперервним часом (ЛМнч). Однорідні ЛМнч, властивості перехідних ймовірностей. Траєкторії ЛМнч.
52. Стохастично неперервні ЛМнч та теорема про їх інфінітезимальні характеристики. Властивості інфінітезимальних характеристик.
53. Вкладені ЛМ. Перша та друга системи рівнянь Колмогорова (ПСРК та ДСРК) та їхній матричний вид. Системи для безумовних та стаціонарних ймовірностей.
54. Ергодична теорема для ЛМнч.

55. Процеси гибелі та народження (ПГтН). Інфінітезимальна матриця ПГтН та відповідні ПСРК та ДСРК.
56. Система рівнянь для безумовних ймовірностей ПГтН. Стаціонарний розподіл для ПГтН.
57. Системи масового обслуговування типу $M \mid M \mid 1$.
58. Системи масового обслуговування типу $M \mid M \mid \infty$.
59. Характеристична функцій (х.ф.) – визначення та основні формули і властивості. Х.ф. основних розподілів.
60. Формули обернення та теорема єдиності для х.ф. Приклади стійких розподілів.
61. Симетричні розподіли.

Організація самостійної роботи студентів 2 курсу у січні-лютому 2018 року

спеціальність **124 Системний аналіз**

з дисципліни ***Теорія ймовірностей та математична статистика***

Викладач доцент Чечельницький Олександр Анатолійович

e-mail achechelnitski@gmail.com

№	Вид заняття	Тема дисципліни	Зміст самостійної роботи	Форма поточного контролю
1	Теоретичне № 1.	Стохастичний експеримент. Простір елементарних подій. Операції над подіями.	Простір елементарних подій. Операції над пдіями. 1. Пняття випадкової події. 2. Понятя частоти події та її властивості. 3. Статистичне визначення ймовірності. Література: 1,2,3,4,5,6.	Дистанційна За допомогою електронних засобів(Дистанційна оболонка OMEGA, електронна пошта)
2	Теоретичне № 2.	Скінченна та злічення ймовірносні схеми. Геометрична ймовірність.	Скінченна та злічення ймовірносні схеми. Геометрична ймовірність. 1. Основні поняття комбінаторики. 2. Класичне визначення ймовірності події. 3. Розв'зок задач на класичне визначення ймовірності. Література: 1,2,3,4,5,6.	Дистанційна За допомогою електронних засобів(Дистанційна оболонка OMEGA, електронна пошта)
3	Теоретичне № 3.	Скінченна та злічення ймовірносні схеми. Геометрична ймовірність (продовження) .	Скінченна та злічення ймовірносні схеми. Геометрична ймовірність (продовження). 1. Методи розв'язків рекурентних співвідношень. 2. Застосування рукурентних співвідношень до пошуку ймовірностей подій в моделях нескінченних незалежних випробувань . Література: 1,2,3,4,5,6.	Дистанційна За допомогою електронних засобів(Дистанційна оболонка OMEGA, електронна пошта)
4	Теоретичне № 4.	Аксіоматика теорії ймовірностей. Умовні ймовірності.	Міра Лебега. 1. Поняття міри Лебега. 2. Різниця між поняттям неможливої події та події нульової ймовірноств. Література: 1,2,3,4,5,6.	Дистанційна За допомогою електронних засобів(Дистанційна оболонка OMEGA, електронна пошта)
	Теоретичне № 5.	Аксіоматика теорії ймовірностей. Умовні ймовірності (продовження) .	Умовна ймовірність. 1.Основне та еквівалентне визначення незалежності подій. 2.Спадковість незалежності подій. Література: 1,2,3,4,5,6.	