КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет кібернетики

Кафедра дослідження операцій

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Заступник декана/директора
з навчальної роботи

____

«____»____________20__ року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ[i]

Алгебра та геометрія

для студентів

напряму підготовки 6.040301„Прикладна математика" та
6.040303"Системний аналіз" факультету кібернетики

КИЇВ – 2017

Робоча програма дисципліни "Алгебра та геометрія " для студентів напряму підготовки 6.040301„Прикладна математика" та 6.040303"Системний аналіз" факультету кібернетики

«____» ______________ 20___ року - ___с.

Розробники: Проскурін Данило Павлович, доцент кафедри дослідження операцій., доктор фізико-математичних наук.

Робоча програма дисципліни "Алгебра та геометрія " затверджена на засіданні кафедри дослідження операцій

Протокол №. ___ від " ___ " 20___ року

Завідувач кафедри дослідження операцій

________________________ Іксанов О.М.

«_____» ___________________ 20___ року

Схвалено науково - методичною комісією факультету

Протокол від «____» _____________ 20___ року №___

Голова науково-методичної комісії ____________ (Хусаїнов Д.Я.)

«_____» _________________ 20___ року

ВСТУП

Навчальна дисципліна "Алгебра та геометрія" є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр» галузі знань «*системні науки та кібернетика*» з напряму підготовки 6.040301 „Прикладна математика" та 6.040303"Системний аналіз". Дана дисципліна є базовою нормативною дисципліною.

Викладається в **I-II** семестрах в обсязі 16 кредитів, в тому числі 200 годин ***аудиторних*** занять, з них 100 годин ***лекційних,*** 100 годин ***практичних*** занять і 300годин ***самостійної*** роботи. У кожному семестрі закінчується заліком та іспитом.

Мета дисципліни – вивчення аналітичної геометрії, систем лінійних рівнянь та лінійних просторів.

Завдання – опанування основних методів розв'язання задач з аналітичної геометрії, методів розв'язання систем лінійних рівнянь, основних властивостей лінійних просторів.

В результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: основні положення аналітичної геометрії, теорії визначників, основні положення теорії систем лінійних рівнянь та методів їх розв'язання, теорії комплексних чисел та многочленів, теорії лінійних просторів та лінійних операторів, евклідових та унітарних просторів, білінійних та квадратичних функцій.

вміти: розв'язувати задачі аналітичної геометрії, системи лінійних рівнянь, задачі теорії комплексних чисел та многочленів, теорії лінійних просторів та лінійних операторів, евклідових та унітарних просторів, білінійних та квадратичних функцій. Такі задачі часто виникають у багатьох математичних дисциплінах, а також у фізиці, хімії та інших областях.

Місце дисципліни (*в структурно-логічній схемі підготовки фахівців відповідного напряму*). Нормативна дисципліна "Алгебра та геометрія" є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр" напряму підготовки «Програмна інженерія».

Зв'язок з іншими дисциплінами. Нормативна навчальна дисципліна "Алгебра та геометрія" є базовою для вивчення таких спеціальних дисциплін як "Дослідження операцій", "Функціональний аналіз" та інше.

Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти.

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою.
1 семестр: у змістовий модуль 1 (ЗМ1) входять теми 1 - 9, у змістовий модуль 2 (ЗМ2) – теми 10- 19, у змістовий модуль 3 (ЗМ3) входять теми 20-31.
2 семестр: у змістовий модуль 4 (ЗМ4) входять теми 1-5, у змістовий модуль 5 (ЗМ5) входять теми 6-10, у змістовий модуль 6 (ЗМ6) входять теми 11-22
Обов'язковим є отримання мінімум 30 балів до заліку.

Оцінювання за формами контролю:

	ЗМ1(4)		***ЗМ** 2(5)*		*ЗМ-3(6)*	
	Min. – 1 балів	*Max. – **20** балів*	*Min. – балів*	*Max. – **20** балів*	*Min. – **0** балів*	*Max. –**60** балів*
Усна відповідь	0	2	0	2	0	2
Контрольні роботи на практичних заняттях	0	8	0	8	0	8
Модульна контрольна робота 1	1	10	1	10	1	10
Іспит	-	-				40

Для студентів, які набрали сумарно меншу кількість балів ніж *критично розрахунковий мінімум – **30** балів* для одержання іспиту/заліку обов’язковим є розв’язок додаткових задач.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються у відповідності до „Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу” від 1 жовтня 2010 року.

При простому розрахунку отримаємо:

1 семестр	ЗМ 1	ЗМ 2	ЗМ3	іспит / *залік*	Підсумкова оцінка
Мінімум	*1*	*1*	1	0	*60*
Максимум	20	20	20	40	100

2 семестр	ЗМ 4	ЗМ 5	ЗМ6	іспит / *залік*	Підсумкова оцінка
Мінімум	*1*	*1*	1	0	*60*
Максимум	20	20	20	40	100

При цьому, кількість балів:

- **1-34** відповідає оцінці «незадовільно» з обов’язковим повторним вивченням дисципліни;
- **35-59** відповідає оцінці «незадовільно» з можливістю повторного складання;
- **60-64** відповідає оцінці «задовільно» («достатньо»);
- **65-74** відповідає оцінці «задовільно»;
- **75 - 84** відповідає оцінці «добре»;
- **85 - 89** відповідає оцінці «добре» («дуже добре»);
- **90 - 100** відповідає оцінці «відмінно».

Шкала відповідності *(за умови іспиту)* **Шкала відповідності** *(за умови заліку)*

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою	
90 – 100	5	відмінно
85 – 89	4	добре
75 – 84		
65 – 74	3	задовільно
60 – 64		
35 – 59	2	не задовільно
1 – 34		

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

СЕМЕСТР 1

Змістовий модуль 1 *Аналітична геометрія*

Тема 1. *Векторна алгебра. Пряма і площина в просторі* **(40 год.)**

Базис на площині та в просторі. Прямокутна система координат. Рівняння прямої на площині та в просторі. Означення скалярного добутку, проекції вектора на напрямок. Властивості проекції та відповідні властивості скалярного добутку. Вираз скалярного добутку через координати векторів в прямокутній системі. Означення векторного добутку. Властивості векторного добутку, вираз через координати. Застосування векторного добутку. Орієнтовна площа паралелограму та орієнтований об'єм паралелепіпеду [1]

Тема 2. *Криві та поверхні 2-го порядку* **(40 год.)**

Означення та канонічні рівняння еліпса, гіперболи, параболи. Формули перетворення координат при поворот. Задача зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду.Типи поверхонь другого порядку. Класифікація поверхонь другого порядку. Конічні перерізи. Криві другого порядку як конічні перерізи

Змістовий **модуль 2.** *Основи лінійної алгебри.*

Тема 3. *Визначники та ситеми лінійних рівнянь* **(72 год.)**

Функціональне та індуктивне означення визначника. Основні властивості та методи обчисленні визначників. Поняття елементарного перетворення рядків (стовпчиків). Теорема про елементарні перетворення визначника. Сумісність та визначеність системи лінійних рівнянь. Квадратні системи. Теорема Крамера. Ранг системи векторів та ранг матриці. Незмінність рангу при елементарних перетвореннях. Теорема Кронекера-Капеллі. Поняття підпростору арифметичного векторного простору. Фундаментальна система розв язків. Теорема про фундаментальну систему розв язків. Поняття лінійного відображення між арифметичними векторними просторами.

Тема 4. *Лінійні відображення та матриці* **(52 год.)**

Матриця лінійного відображення. Сума добуток на число та композиція відображень, відповідні операції із матриц Теорема про добуток визначників. Обернена матриця. Необхідна та достатня умова існування оберненої матриці. Обгрунтування метода елементарних перетворень для знаходження оберненої матриці. Приєднана матриця. Формула для оберненої *матриці.Діофантові системи лінійних рівнянь. Умова сумісності та алгоритм розв'язання діофантових систем.*

Змістовий модуль 3. *Комплексні числа та многочлени*

Тема 5. *Комплексні числа* **(25 год.)**

Означення комплексного числа. Алгебраїчна та тригонометрична форма комплексного числа. Спряжене число Формули Муавра. Добування кореня з комплексного числа, кількість коренів з комплексного числа

Тема 6. *Многочлени* **(88 год.)**

Поняття про алгебру многочленів. Означення НСД. Теорема про існування НСД двох многочленів. Алгоритм Евкліда знаходження НСД. похідних. Алгоритм знаходження раціональних коренів многочленів з цілими коефіцієнтами. Означення незвідного многочлена. Лема Гауса та наслідок з неї. Ознака Ейзенштейна. Алгоритм розкладу многочленна на незвідні над кільцем цілих чисел. Лема Даламбера. Основна теорема алгебри многочленів. Опис незвідних многочленів над комплексним та дійсним полями. Задача інтерполяції. Методи Лагранжа та Ньютона. Інтерполяційна формула Ньютона для інтерполяції з рівномірним кроком. Формула Тейлора. Задача відділення дійсних коренів многочленів. Система функцій Штурма. Теорема Штурма. Алгоритм побудови системи функцій Штурма.

СЕМЕСТР 2

Змістовий модуль 4. *Векторні простори*

Тема 7. *Векторні простори та підпростори* **(54 год.)**

Поняття поля. Означення векторного простору. Приклади векторних просторів. Лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів. Означення базису простору. Теореми про базис. Лема про дві системи. Матриця переходу. Зв'язок координат вектора в різних базисах. Поняття підпростору. Перетин та сума підпросторів. Пряма сума. Теорема про базис прямої суми. Теорема про розмірності суми та перетину підпросторів.

Змістовий модуль 5. *Лінійні перетворення.*

Тема 8. *Лінійні перетворення* **(76 год.)**

Означення лінійного перетворення. Приклади лінійних перетворень.

Матриця лінійного перетворення в базисі. Поняття ядра та образу лінійного перетворення. Теорема про розмірності ядра та образи лінійного перетворення. Алгебра лінійних операторів. Поняття оберненого оператора. Поняття характеристичного многочлена лінійного оператора. Власні вектори та власні числа. Теореми про власні вектори. Поняття лінійного оператора простої структури. Критерії оператора простої структури. Достатня умова оператора простої структури. Поняття інваріантного підпростору. Теореми про інваріантність. Теорема про інваріантні підпростори дійсного векторного простору. Теорема Жордана для нільпотентного оператора. Теорема Йордана-

Змістовий модуль6. *Евклідові і унітарні простори та квадратичні форми*

Тема 9. *Евклідові та унітарні простори* **(40 год.)**

Поняття евклідова простору. Нерівність Коші-Буняковського. Процес ортогоналізації. Довжина вектора та кут вектора. Геометричний зміст процесу ортогоналізації. Визначник Грама та його властивості. Поняття ортогонального доповнення та ортогональної проекції. Відстань від вектора до підпростору. Матриця Грама та її властивості. Геометричний зміст визначника n-го порядку.

Тема 10. *Оператори на евклідових та унітарних просторах* **(42 год.)**

Поняття спряженого лінійного оператора в евклідовому просторі. Властивості операції спряження. Теорема про інваріантність ортогонального доповнення. Спряжені оператори в унітарному просторі. Понття нормального оператора. Спектральна теорема для нормального оператора. Самоспряжені, унітарні та ортогональні оператори. Спектральні теореми для самоспряженого, унітарного та ортогонального операторів.операторів.

Тема 11. *Білінійні та квадратичні форми* **(40 год.)**

Поняття лінійної функції та лінійної форми. Поняття спряженого простору. Поняття білінійної функції та білінійної форми. Матриця білінійних функцій в базисі. Зв'язок матриць білінійної функції в різних базисах. Симетричні та кососиметричні білінійні функції. Квадратичні функції. Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду методом Лагранжа, Якобі та методом ортогональної заміни змінних. Закон інерції квадратичних функцій. Додатньо визначені квадратичні функції, критерій Сильвестра.

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І СЕМІНАРСЬКИХ ЗАНЯТЬ

1- семестр

№ лекції	Назва лекції	Кількість годин		
		Лекції	Практ. заняття	Самост. Робота
Змістовий модуль 1				
1	Тема 1 *Векторна алгебра. Пряма і площина в просторі*	4	6	26
2	Тема 2 *Криві та поверхні 2-го порядку*	6	4	25
Модульна контрольна робота 1				
Змістовий модуль 2				
3	Тема 3 *Визначники та ситеми лінійних рівнянь*	15	15	40
4	Тема 4 *Лінійні відображення та матриці*	9	9	32
Модульна контрольна робота 2				
Змістовий модуль 3				
5	Тема 5 *Комплексні числа*	2	2	17
6	Тема 6 *Многочлени*	20	20	48
Модульна контрольна робота 3				
ВСЬОГО		56	56	188

Загальний обсяг 300 годин, в тому числі:
Лекцій – 56 год.
Практичні заняття – 56 год.
Самостійна робота – 188 год.

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І СЕМІНАРСЬКИХ ЗАНЯТЬ

2- семестр

№ лекції	Назва лекції	Кількість годин		
		Лекції	Практ. заняття	Самост. робота
Змістовий модуль 4				
1	Тема 7 *Векторні простори та підпростори*	2	8	26
Модульна контрольна робота 4				
Змістовий модуль 5				
2	Тема 8 *Лінійні перетворення*	12	10	34
Модульна контрольна робота 5				
Змістовий модуль 6				
3	Тема 9 *Евклідові та унітарні простори*	8	6	25
4	Тема 10 *Оператори на евклідових та унітарних просторах*	10	12	25
5	Тема 11. *Білінійні та квадратичні форми*	8	8	8
Модульна контрольна робота 6				
ВСЬОГО		44	44	112

Загальний обсяг 200 годин, в тому числі:
Лекцій – 44год.
Практичні заняття – 44год.
Самостійна робота – 112 год.

СЕМЕСТР 1

Змістовий модуль 1.

Тема 1 *Векторна алгебра. Пряма і площина в просторі (**44 год**)*

Лекція 1. Поняття координатної площини. – 2год.

Базис на площині та в просторі. Прямокутна система координат. Рівняння прямої на площині та в просторі. [1]

Практичне заняття 1. Поняття координатної площини та простору простору. 2 год. [6]: №267-284.

1. Рівняння прямої на площині та в просторі.

Самостійна робота. Поняття координатної площини та простору. 8 год. [5]

Лекція 2. Скалярний добуток. Проекція теорема про проекціїі.-2 год.
Означення скалярного добутку, проекції вектора на напрямок. Властивості проекції та відповідні властивості скалярного добутку. Вираз скалярного добутку через координати векторів в прямокутній системі. [1]

Практичне заняття 2. Скалярний добуток та його застосування. 2 год. [6]: №814-830.
1. Властивості скалярного добутку.
2. Проекція вектора на напрямок.
3. Загальне рівняння прямої та площини.

Самостійна робота. Скалярний добуток та його застосування. 6 год. [5]

Лекція 3. Векторний добуток та його властивості. – 2год.
Означення векторного добутку. Властивості векторного добутку, вираз через координати. Застосування векторного добутку. [1]

Практичне заняття 3. Векторний добуток. Властивості та застосування. 2 год. [6]: №839-860.
1. Означення векторного добутку.
2. Вираз векторного добутку через координати векторів.
3. Рівняння площини за точкою та двома паралельними векторами.

Самостійна робота. Векторний добуток. 6 год. [5] Властивості та застосування.

Лекція 4.Орієнтовані площа паралелограма. Орієнтований об`єм паралелепіпеда 4 год. [5]
Означення орієнтованої площі. Властивості. Вираз через координати. Означення орієнтованого об' єму. Властивості, вираз через координати. [1]

Практичне заняття 4. Орієнтовані площі та об'єми. 2 год. [6]: № 865- 878 .
1. Орієнтовані площі та об'єми. Властивості та застосування.

Самостійна робота. Орієнтовані площі та об'єми. 6 год. [5]

Тема 2. *Криві та поверхні 2-го порядку (43 год)*

Лекція 5. Криві другого порядку. Означення та канонічні рівняння еліпса, гіперболи, параболи – 2год. *Означення та канонічні рівняння еліпса, гіперболи, параболи.* [1]

Практичне заняття 5. Означення та канонічні рівняння еліпса, гіперболи, параболи. 2 год. [6]: № 583-589, 446-474.
1. Канонічні рівняння кривих другого порядку.
2. Загальне рівняння кривих другого порядку.

Самостійна робота. Означення та канонічні рівняння еліпса, гіперболи, параболи. 8 год. [5]

Лекція 6. Ексцентриситет, директриси. Директоріальне означення кривих другого порядку. – 1год.

Означення директрис еліпса, гіперболи, параболи. Директоріальне означення кривих другого порядку. [1]

Практичне заняття 6. Директоріальне означення кривих другого порядку. 2 год. [6]: № 476-478, 546-548, 600-604 .

1.Директриси еліпса, гіперболи, параболи.

2. Директоріальне рівняння кривих другого порядку.

3. Рівняння кривих другого порядку в полярних координатах.

Самостійна робота. Директоріальне означення кривих другого порядку. 7 год. [6]

Лекція 7. Дотична до еліпса, гіперболи, параболи. Рівняння дотичної. Оптичні властивості кривих другого порядку – 2год.

Означення дотичної до кривої. Рівняння дотичних до еліпса, гіперболи та параболи, що задані канонічними рівняннями. Оптичні властивості еліпса, гіперболи, параболи. [1]

Практичне заняття 7. Дотична до еліпса, гіперболи, параболи. 2 год. [6]:№ 491-493, 560-564, 613-616.

1. Рівняння дотичної до еліпса, гіперболи та параболи, що задані канонічними рівняннями.
2. Оптичні властивості еліпса, гіперболи, параболи.

Самостійна робота. Дотична до еліпса, гіперболи, параболи. 4год. [5]

Лекція 8. Перетворення повороту. Зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду– 1год.

Формули перетворення координат при поворот. Задача зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. [1]

Практичне заняття 8. Перетворення повороту. Зведення рівнянь кривих другого порядку до канонічного вигляду 2 год. [6]: №676,678, 689.

1. Зведення рівнянь кривих другого порядку до канонічного вигляду

Самостійна робота. Перетворення повороту. Зведення рівнянь кривих другого порядку до канонічного вигляду 3 год. [5]

Лекція 9. Класифікація поверхонь другого порядку. Поняття про конічні перерізи. – 2год.

Типи поверхонь другого порядку. Класифікація поверхонь другого порядку. Конічні перерізи. Криві другого порядку як конічні перерізи

Практичне заняття 9. Дослідження поверхонь другого порядку

методом перерізів. 2 год. [6]: № 1181-1188 .

1. Метод перерізів.

Самостійна робота. Дослідження поверхонь другого порядку методом перерізів. 3 год. [5]

ТИПОВЕ ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №1

1. Векторний добуток векторів та його властивості
2. Оптична властивість параболи
3. [6]: № 274
4. [6]: № 1072

Контрольні запитання до змістового модуля 1.

1).Вектори та алгебраїчні операції над ними.
2) Базис на площині та в просторі.
3) Рівняння прямої на площині та в просторі.
4) Скалярний добуток, його властивості, вираз через координати.
5) Загальне рівняння прямої та загальне рівняння площини.
6) Проекція вектора на напрямок. Теореми про проекцію.
7) Векторний добуток, його властивості, вираз через координати.
8) Орієнтовані площі та об`єми. Вираз через координати векторів.
9) Означення еліпса, гіперболи параболи. Канонічні рівняння.
10)Ексцентриситет, директриси. Директоріальні властивості кривих другого порядку.
11) Рівняння дотичних до еліпса, гіперболи, параболи в даній точці, що задані канонічними рівняннями.
12) Оптичні властивості еліпса, гіперболи, параболи.
13)Загальне рівняння кривих другого порядку. Зведення загального рівняння другого порядку до канонічного вигляду.
14) Класифікація кривих другого порядку.
15) Класифікація поверхонь другого порядку.
16) Метод перерізів дослідження поверхонь другого порядку.

Змістовий модуль 2

Тема 3 Визначники та ситеми лінійних рівнянь (72 год)

Лекція 10. Визначник як полілінійна, кососиметрична функція. Основна теорема про полілінійні кососиметричні функції.– 4 год.

Означення полілінійної кососиметричної функції. Означення визначника за формулою розклада за рядком. Еквівалентність індуктивного та функціонального означень визначника. [2], [3].

Практичне заняття 10. Обчислення визначників за означенням та методом Гауса. 2 год. [7] №257-278.

1. Обчислення визначників методом Гауса та розкладом за рядком чи стовпчиком

Самостійна робота. Обчислення визначників за означенням та методом Гауса. 8 год. [5]

Лекція 11. Властивості визначників по відношенню до елементарних перетворень. Необхідна та достатня умова рівності визначника нулю – 2год.

Поняття елементарного перетворення рядків (стовпчиків). Теорема про елементарні перетворення визначника. Критерій рівності визначника нулю [2], [3].

Практичне заняття 11. Обчислення визначників зведенням до трикутного вигляду. 4 год. [7] № 279-288.

1. Формула для обчислення трикутного визначника.
2. Приклади визначників, що обчислюються методом зведення до трикутного вигляду.

Самостійна робота. Обчислення визначників зведенням до трикутного вигляду. 7 год. [5]

Лекція 12. Розгорнута формула для обчислення визначника. Визначник транспонованої матриці - 3 год.

Розгорнута формула для обчислення визначника. Визначник транспонованої матриці. [2], [3].

Практичне заняття 12. Обчислення визначників методом розкладання в суму. 1 год. [7] № 305-308, 357-360.

1. Метод розкладання в суму при обчисленні визначників.

Самостійна робота. Обчислення визначників методом розкладання в суму. 5 год. [5]

Лекція 13. Лінійні заміни змінних та добуток матриць. Теорема про добуток визначників. 2 год.

Лінійні заміни змінних. Матриця заміни. Добуток матриць. Теорема про добуток визначників. [2], [3].

Практичне заняття 13. Обчислення визначників методом рекурентних співвідношень. 2 год. [7] 295-304.

1. Лінійні рекурентні співвідношення першого та другого порядку.
2. Загальний розв‘язок лінійного однорідного рекурентного співвідношення другого порядку.
3. Обчислення визначників методом рекурентних співвідношень.

Самостійна робота. Обчислення визначників методом рекурентних співвідношень. 10 год. [5]

Лекція 14. Лінійні системи рівнянь. Квадратні системи. Теорема Крамера- 2 год.

Сумісність та визначеність системи лінійних рівнянь. Квадратні системи. Теорема Крамера. [2], [3].

Практичне заняття 14. Визначник Вандермонда. 2 год. [7] № 328-350.

1. Обчислення визначника Вандермонда..
2. Обчислення визначників за допомогою зведення до визначника Вандермонда.

Самостійна робота. Визначник Вандермонда. 10 год. [5]

Лекція 15. Ранг системи векторів та ранг матриці. Властивості рангу. Теорема Кронекера-Капеллі- 4 год.

Ранг системи векторів та ранг матриці. Незмінність рангу при елементарних перетвореннях. Теорема Кронекера-Капеллі. [2], [3].

Практичне заняття 15. Теорема про добуток визначників. 4 год. [7] № 470-481.

1. Обчислення визначників за допомогою теореми про добуток визначників.
2. Циркулянт.

Самостійна робота. **Теорема про добуток визначників. 6 год. [5]**

Тема 4** Лінійні відображення та матриці **(52 год)

Лекція 16. Однорідні системи лінійних рівнянь. Поняття підпростору арифметичного векторного простору. Фундаментальна система розв'язків. Теорема про фундаментальну систему розв‘язків системи лінійних однорідних рівнянь.- 2 год.

Поняття підпростору арифметичного векторного простору. Фундаментальна система розв‘язків. Теорема про фундаментальну систему розв язків. [2], [3].

Практичне заняття 16. Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі. 2 год. [7] № 689-700.

1. Метод Гауса розв'язання систем лінійних рівнянь.
2. Знаходження рангу матриці методом Гаусса.
3. Дослідження систем лінійних рівнянь на сумісність та визначеність за теоремою Кронекера-Капеллі.

Самостійна робота. Розв‘язання систем лінійних рівнянь методом Гауса. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі. 8 год. [5]

Лекція 17. Елементарні матриці та елементарні перетворення. Обернена матриця. Необхідна та достатня умова існування існування оберненої матриці - 2 год.
Сумісність та визначеність системи лінійних рівнянь. Квадратні системи. Теорема Крамера. [2], [3].

Практичне заняття 17. Операції над матрицями. Матричні рівняння. 2 год. [7] № 861-871.

1. Операції над матрицями.
2. Розв'язання матричних рівнянь методом Гауса.

Самостійна робота. Операції над матрицями. Матричні рівняння. 8 год. [5]

Лекція 18. Знаходження оберненої матриці методом елементарних перетворень. Формула для оберненої матриці - 2 год.
Обгрунтування метода елементарних перетворень для знаходження оберненої матриці. Приєднана матриця. Формула для оберненої матриці. [2], [3].

Практичне заняття 18. Обернена матриця. 4 год. [7] № 836-855.

1. Знаходження оберненої матриці методом елементарних перетворень.
2. Формула для оберненої матриці.
3. Розв язання матричних рівнянь за допомогою оберненої матриці.

Самостійна робота. Обернена матриця. 8 год. [5]

Лекція 19. Системи лінійних діофантових рівнянь.- 2 год.
Означення діофантової системи. Поняття унімодулярної матриці. Необхідна та достатня умова існування розв язку системи лінійних діофантових рівнянь [2], [3].

Практичне заняття 19. Діофантові системи лінійних рівнянь. 4 год. [7] № 699-704.

1. Розв язання систем лінійних діофантових рівнянь методом унімодулярних перетворень.

Самостійна робота. Діофантові системи лінійних рівнянь. 8 год. [5]

ТИПОВЕ ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №2

1. Теорема про розклад визначника за елементами рядка (стовпчика)
2. Теорема про розв'язання лінійного діофантового рівняння
3. [7]: № 325
4. [7]: № 715

Контрольні запитання до змістового модуля 2.

1) Поняття полілінійної кососиметричної функції. Означення визначника як полілілнійної кососиметричної функції.
2) Означення визначника за допомогою розкладу за рядком. Еквівалентність двох означень.
3) Визначники та елементарні перетворення рядків та стовпчиків.
4) Розгорнута формула для обчислення визначника.
5) Визначник транспонованої матриці.
6) Лінійні заміни та добуток матриць.
7) Теорема про добуток визначників.
8) Системи лінійних рівнянь. Поняття про сумісність та визначеність системи.
9) Ранг системи векторів та ранг матриці. Властивості рангу системи векторів та рангу матриці.
10) Теорема Кронекера-Капеллі.
11) Квадратні системи лінійних рівнянь. Теорема Крамера.
12) Однорідні системи лінійних рівнянь. Теорема про фундаментальну систему розв `язків.
13) Елементарні матриці та елементарні перетворення.
14) Обернена матриця. Необхідна та достатня умова існування оберненої матриці.
15) Алгоритм знаходження оберненої матриці та його обгрунтування.
16) Формула для знаходження оберненої матриці.
17) Матричні рівняння. Критерій сумісності матричного рівняння.
18) Діофантові системи лінійних рівнянь. Унімодулярні перетворення та унімодулярні матриці.
19) Необхідна та достатня умова існування розв`язків діофантової системи. Алгоритм знаходження розв`язків та його обгрунтування.

Змістовий модуль 3.

Тема 5 *Комплексні числа (25 год)*

Лекція 20. Комплексні числа. Алгебраїчна форма комплексного числа. Тригонометрична форма комплексного числа. Дії з комплексними числами в тригонометричній формі.-2 год.

Означення комплексного числа. Алгебраїчна та тригонометрична форма комплексного числа. Спряжене число. Множення та ділення комплексних чисел в алгебраїчній та тригонометричній формах. [2], [3].

Практичне заняття 20. Комплексні числа. 2 год. [8] №109-113.

1.Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі.

2. Дії з комплексними числами в тригонометричній формі.

Самостійна робота. Комплексні числа. 9 год. [5]

Лекція 21. Формули Муавра. Корені з комплексного числа. Корені з одиниці. Первісні корені з одиниці - 2 год.
Формули Муавра. Добування кореня з комплексного числа, кількість коренів з комплексного числа. Корені з одиниці. Поняття первісного кореня з одиниці. Кількість первісних коренів з одиниці даного степеню. [2], [3].

Практичне заняття 21. Корені з комплексного числа. Застосування комплексних чисел. 2 год. [8] № 137-145, 148-157.
1. Корені з комплексного числа. Корені з одиниці
2. Застосування комплексних чисел до розв`язання деяких комбінаторних задач та до тригонометрії.

Самостійна робота. Корені з комплексного числа. Застосування комплексних чисел. 8 год. [5]

Тема 6. *Многочлени (88 год)*

Лекція 22. Алгебра многочленів. Корінь многочлена. Теорема Безу та теорема Вієта- 2 год.
Поняття про алгебру многочленів. Степінь многочлена, корінь многочлена. Теореми Безу та Вієта. [2], [3].

Практичне заняття 22. Корені многочлена. Теореми Вієта та Безу. 1год [8] № 549, 556-558,
1. Корені многочлена.
2. Теорема Вієта та теорема Безу.

Самостійна робота. Корені многочлена. Теореми Вієта та Безу. 7 год. [5]

Лекція 23. Схема Горнера. Знаходження значеннь многочлена а також похідних за допомогою схеми Горнера.- 2 год.
Ділення многочлена на многочлен першої степені за допомогою схеми Горнера. Застосування схеми Горнера для знаходження значеннь многочлена та його похідних. [2], [3].

Практичне заняття 23. Схема Горнера та її застосування. 2 год. [8] № 550-554.
Застосування схеми Горнера до знаходження значень многочлена.

Самостійна робота. Схема Горнера та її застосування. 8 год. [5]

Лекція 24. НСД многочленів. Теорема про НСД. Алгоритм Евкліда знаходження НСД.- 1 год.
Означення НСД. Теорема про існування НСД двох многочленів. Алгоритм Евкліда знаходження НСД. [2], [3].

Практичне заняття 24. Знаходження НСД за алгоритмом Евкліда. 1 год.

[8] № 577-583.

1. Алгоритм Евкліда знаходження НСД.

Самостійна робота. Знаходження НСД за алгоритмом Евкліда. 5 год.[5]

Лекція 25. Поняття кратного кореня многочлена. Кратність многочлена. Задачавиділення кратностей- 2 год.

Означення кратного кореня та кратності многочлена. Алгоритм виділення кратностей. Обгрунтування цього алгоритму. [2], [3].

Практичне заняття 25. Алгоритм виділення кратностей. 2 год. [8] № 585.

1. Задача виділення кратностей.

Самостійна робота. **Алгоритм виділення кратностей. 8 год. [5]**

Лекція 26. Раціональні корені многочленів з цілими коефіцієнтами. Незвідні многочлени. Лема Гауса. Ознака Ейзенштейна незвідності над кільцем цілих чисел- 2 год.

Алгоритм знаходження раціональних коренів многочленів з цілими коефіцієнтами. Означення незвідного многочлена. Лема Гауса та наслідок з неї. Ознака Ейзенштейна. [2], [3].

Практичне заняття 26. Знаходження раціональних коренів многочленів. Ознака Ейзенштейна. 2 год. [8] № 649, 650, 653-657.

1. Знаходження раціональних коренів многочленів з цілими коефіцієнтами.
2. Ознака Ейзенштейна.

Самостійна робота. Знаходження раціональних коренів многочленів. Ознака Ейзенштейна. 5 год. [5]

Лекція 27. Основна теорема алгебри многочленів над полем комплексних чисел. Опис незвідних многочленів над полем комплексних та дійсних чисел – 4 год.

Лема Адамара. Основна теорема алгебри. Опис незвідних многочленів над комплексним та дійсним полями.. [2], [3].

Практичне заняття 27. Розклад многочлена на незвідні над полем дйсних чисел та над кільцем цілих чисел. 2 год. [8] № 587, 588, 590, 599-606.

1. Розклад многочлена на незвідні над полем дісних чисел.
2. Розклад многочлена на незвідні над кільцем цілих чисел.

Самостійна робота. . Розклад многочлена на незвідні над полем дйсних чисел та над кільцем цілих чисел. 8 год. [5]

Лекція 28. Теорема про інтерполяцію. Метод Лагранжа. Метод Ньютона. Інтерполяційна формула Ньютона із рівномірним кроком. Формула Тейлора – 4 год.

Основна теорема про інтерполяцію. Методи ньютона та Лагранжа. Інтерполяція із рівномірним кроком. Формула Ньютона. Формула Тейлора.

[2], [3].

Практичне заняття 28. Задача інтерполяції. 4 год. [8] № 631-634.

1. Метод Лагранжа.

2.Метод Ньютона.

Самостійна робота. Задача інтерполяції. 2 год. [5]

Лекція 29. Відділення дійсних коренів многочленів. Метод Штурма – 2год.

Задача відділення дійсних коренів многочленів. Система функцій Штурма. Теорема Штурма. Алгоритм побудови системи функцій Штурма. [2], [3].

Практичне заняття 29. Інтерполяція з рівномірним кроком. Формула Тейлора. 1 год. [8] № 639-646.

1. Скінчені різниці та інтерполяція з рівномірним кроком.
2. Формула Тейлора.

Самостійна робота. Формула Тейлора 1 год. [2]

Лекція 30. Основна теорема про симетричні многочлени. – 1 год.

Основна теорема про симетричні многочлени. Рекурентні формули Ньютона. [2], [3].

Практичне заняття 30. Розклад раціональних дробів на елементарні. 2 год. [8] 624-627.

1. Розклад раціональних дробів на елементарні .

Самостійна робота. Розклад раціональних дробів на елементарні. 1 год. [5]

Лекція 31. Основні алгебраїчні структури: напівгрупи, групи, кільця, поля.– 2 год.

Означення напівгрупи, групи, кільця, поля. Скінчені групи: теорема Лагранжа, підгрупа, нормальна підгрупа. Теореми про гомоморфізм. Теорема Келі. Приклади скінчених груп. Поняття ідеалу кільця. Фактор-кільце. Основна теорема про гомоморфізм кілець. Алгебраїчне розширення поля. Існування поля розкладу многочлена. [4].

Практичне заняття 31. Метод Штурма. 2 год. [8] № 773-776.

1. Знаходження границь відрізку існування коренів.
2. Метод Штурма відокремлення коренів.

Самостійна робота. Метод Штурма. 2 год. [5]

ТИПОВЕ ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №3

1. Теорема про найбільший спільний дільник
2. Ознака Ейзенштейна
3. [8]: № 161
4. [8]: № 177 (6)

Контрольні запитання до змістового модуля 3.

1) Означення комплексного числа. Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі.
2) Тригонометрична форма комплексного числа. Дії з комплексними числами в тригонометричній формі. Формули Муавра.
3) Корінь з комплексного числа. Корені з одиниці. Первісні корені з одиниці.
4) Алгебра многочленів.
5) Теореми Безу та Вієта.
6) Подільність многочленів. НСД двох многочленів.
7) Теорема про існування НСД. Алгоритм Евкліда.
8) Кратний корінь та кратність. Необхідна та достатня умова існування кратних коренів.
9) Задача виділення крайностей.

10 Задача інтерполяції. Формули Лагранжа та Ньютона.

11) Інтерполяція з рівномірним кроком. Формула Тейлора.
12) Раціональні корені многочленів з цілими коефіцієнтами.
13) Лема Гауса та незвідність над полем раціональних чисел.
14) Ознака Ейзенштейна незвідності многочлена над кільцем цілих чисел.
15) Алгоритм Кронекера розкладу на незвідні множники над цілими числами.
16)Лема Адамара та основна теорема алгебри многочленів над комплексним полем.
17) Симетричні функції, основна теорема про симетричні функції.
18) Степеневі суми. Рекурентні формули Ньютона.
19) Відділення дійсних коренів. Теорема Штурма.
20) Основні алгебраїчні структури: групи кільця поля.

Перелік питань на залік та іспит

1. Алгебра векторів, дії над векторами.
2. Поняття базису. Теорема про базис.
3. Лінійна залежність та лінійна незалежність системи векторів.
4. Ділення відрізків в данному відношенні.
5. Прекція векторів на вісь. Теорема про спрямовуючі косинуси.
6. Скалярний добуток векторів та його властивості.
7. Векторний добуток векторів та його властивості.
8. Знаходження координат векторного добутка векторів.
9. Мішаний добуток векторів та його властивості.
10. Площина в просторі. Типи рівнянь.
11. Пряма в просторі. Типи рівнянь прямих в просторі.
12. В’язка площин.

13. Еліпс та його властивість.
14. Оптична властивість еліпса.
15. Гіпербола та її властивість.
16. Оптична властивість гіперболи.
17. Зв’язок між ексцентриситетом та директрисою еліпса і гіперболи.
18. Парабола та її властивості.
19. Задача зведення для кривих 2-го порядку. Перетворення координат при заміні системи координат.
20. Поверхні другого порядку.
21. Лінійчасті поверхні.
22. Поняття перестановки. Теорема про перестановки.
23. Поняття визначників n-го порядку. Аналітичний запис визначника. Еквівалентність двух означень. Лема про знак.
24. Властивість визначників
25. Теорема про розкладність визначників з елементами рядка або стовпчика.
26. Визначення Вандермонда.
27. Теорема Крамера.
28. Дійсний простір n-вимірних векторів лінійної залежності і лінійної незалежності.
29. Лема про 2 системи.
30. Поняття рангу та базису системи векторів. Теорема 1-3 про ранг.
31. Ранг матриці. Теорема про базисний мінор.
32. Теорема про ранг матриці, обчислення рангу матриці
33. Теорема Крамера-Канеллі.
34. Поняття підпростору.
35. Однорідні системи лінійних рівнянь. Теорема про функціональну систему розв’язків.
36. Теорема про розв’язки неодорідної системи лінійних рівнянь.
37. перетворення змінних та добуток матриць.
38. Теорема про добуток визначників.
39. Поняття оберненої матриці.Теорема про обернену матрицю.
40. Лема про елементарне перетворення. Ознака Адамара.
41. Лінійні діофантові рівняння. Теорема про лінійні діафантові рівняння.
42. Система лінійних діофантових рівнянь. Теорема про систему лінійних діафантовеих рівнянь.
43. Комплексні числа, дії над ними. Тригонометрична форма комплексного числа.
44. Дії над числами в тригонометричній формі. Формула Мавра. Корені з комплексних чисел.
45. Корені з 1.
46. Поняття числового поля. Многочлени над числовим полем.
47. Ділення многочленів. Алгебра Евкліда.
48. Теорема про НСД
49. Система Горнера та її застосування.

50. Незвідні многочлени. Лема про незвідні многочлени.
51. Основна теорема про подільність многочленів.
52. Лема про похідну. Відокремлення кратних множників.
53. Незвідні многочлени над полем комплексних чисел.
54. Незвідні многочлени над полем дійсних чисел.
55. Звідні многочлени над полем раціональних чисел. Теорема про раціональні корені цілочисельних многочленів.
56. Примітивні многочлени. Лема Гауса.
57. Незвідні многочлени над полем раціональних чисел. Ознака Ейзенштейна.
58. Межі дійсних коренів, дійсних многочленів.
59. Система функцій Штурма. Існування системи функцій Штурма.

СЕМЕСТР 2

Змістовий модуль 4.

Тема** 7 Векторні простори та підпростори **(54 год)

Лекція 1. Поняття лінійного простору. – 2 год.

Поняття поля. Означення векторного простору. Приклади векторних просторів. Лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів. [2], [3]

Практичне заняття 1. Поняття лінійного простору.2 год. [7]: №1821-1830.

1. Означення лінійного простору.
2. Лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів.

Самостійна робота. Поняття лінійного простору.8 год. [2]

Лекція 2. Поняття базису. Матриця переходу.-1 год.

Означення базису простору. Теореми про базис. Лема про дві системи. Матриця переходу. Зв'язок координат вектора в різних базисах. [2], [3]

Практичне заняття 2. Поняття базису. Матриця переходу. 2 год. [5]: №1277-1284.

1. Поняття базису.
2. Координати вектора в базисі.
3. Матриця переходу. Зв'язок координат вектора в різних базисах.

Самостійна робота. Поняття базису. Матриця переходу. 6 год. [2]:

Лекція 3. Поняття підпростору. Операції над підпросторами. – *1* год.

Поняття підпростору. Перетин та сума підпросторів. Пряма сума. Теорема про базис прямої суми. Теорема про розмірності суми та перетину підпросторів. [2], [3]

Практичне заняття 3. Підпростори. Операції над підпросторами. 2год.
[7]: №1285-1329.
1. Поняття підпростору.
2. Сума та перетин підпросторів.
3. Базис суми та базис перетину підпросторів.
4. Пряма сума.

Самостійна робота. Підпростори. Операції над підпросторами. 6 год.
[2]:

Практичне заняття 4. Лінійні многовиди. 2 год. [7]: №1330-1344.
1. Поняття лінійного многовиду.
2. Поняття прямої та площини в лінійному просторі.

Самостійна робота. Лінійні многовиди. 8 год. [2]

Лекція 4. Поняття лінійного перетворення. -2год.
Означення лінійного перетворення. Приклади лінійних перетворень. Матриця лінійного перетворення в базисі. [2], [3]

Практичне заняття 5. Поняття лінійного перетворення. 2 год. [5]: №1434-1455.
1. Означення лінійного перетворення.
2. Матриця лінійного перетворення в базисі.

Самостійна робота. Поняття лінійного перетворення. 4 год. [2]

Лекція 5. Ядро та образ лінійного перетворення. Алгебра лінійних операторів.– 2год.
Поняття ядра та образу лінійного перетворення. Теорема про розмірності ядра та образи лінійного перетворення. Алгебра лінійних операторів. Поняття оберненого оператора. [2], [3]

Практичне заняття 6. Ядро та образ лінійного перетворення. Алгебра лінійних операторів. 2 год. [7]: №1457-1462, №1489-1493.
1. Ядро та образ лінійного перетворення.
2. Алгебра лінійних операторів.
3. Обернений оператор.

Самостійна робота. Ядро та образ лінійного перетворення. Алгебра лінійних операторів. 4 год. [2]

ТИПОВЕ ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 4

1. Лема про дві системи
2. Дати означення прямої суми підпросторів. Еквівалентність двох означень
3. [7]: № 1321
4. [7]: № 1824

Контрольні запитання до змістового модуля 4.

1) Поняття лінійного простору. Приклади лінійних просторів. Лінійна залежність та лінійна незалежність системи векторів. Властивості лінійно залежних та лінійно незалежних систем векторів.
2) Лема про дві системи.
3) Поняття базису простору. Теореми про базис.
4) Матриця переходу від базису до базису. Зв'язок координат векторів у різних базисах.
5) Поняття підпростору. Операції над підпросторами. Поняття суми підпросторів.
6) Поняття прямої суми підпросторів. Еквівалентність двох означень прямої суми.
7) Теорема про базис прямої суми.
8) Теорема про розмірності суми та перетину підпросторів.
10) Поняття лінійного перетворення.
11) Матриця лінійного перетворення в базисі. Властивості матриць лінійних перетворень. Координати образу вектора при лінійному перетворенні.
12) Ядро та образ лінійного перетворення. Теорема про розмірності ядра та образу лінійного перетворення.
13) Операції над лінійними операторами (алгебра лінійних операторів).
14) Поняття оберненого оператора.
15) Зв'язок матриць лінійного оператора в різних базисах.

Змістовий модуль 5

Тема 8 *Лінійні перетворення* ***(76 год)***

Лекція 6. Характеристичний многочлен лінійного оператора. Власні вектори та власні числа.– 2 год.

Поняття характеристичного многочлена лінійного оператора. Власні вектори та власні числа. Теореми про власні вектори. [2], [3]

Практичне заняття 7. Власні вектори та власні числа. 2 год. [7]: № 1463-1475.

1. Характеристичний многочлен лінійного оператора.
2. Знаходження власних векторів та власних чисел лінійного оператора.

Самостійна робота. Власні вектори та власні числа. 5 год. [2]

Лекція 7. Лінійні оператори простої структури. – 2 год.

Поняття лінійного оператора простої структури. Критерії оператора простої структури. Достатня умова оператора простої структури. [2], [3]

Практичне заняття 8. Лінійні оператори простої структури. 4 год. [7]:

№1476- 1487.

1. Знаходження базису простору який складається з власних векторів оператора.
2. Зведення матриці лінійного оператора до діагонального вигляду переходом до нового базису.

Самостійна робота. **Лінійні оператори простої структури. 10 год. [2]**

Лекція 8. Інваріантність. - 2 год.

Поняття інваріантного підпростору. Теореми про інваріантність. Теорема про інваріантні підпростори дійсного векторного простору. [2], [3]

Практичне заняття 9. Інваріантність. 2 год. [7]: № 1494-1507.

1. Знаходження підпросторів, інваріантних відносно лінійного оператора.
2. Матриці клітинного вигляду.

Самостійна робота. Інваріантність. 10 год. [2]

Лекція 9. Поняття фактор-простору. Теорема Гамільтона-Келлі.- 4год.

Фактор- простори векторного простору. Поняття М-лінійної незалежності та М-базису. Матричні многочлени. Теорема Гамільтона-Келлі. [2], [3]

Лекція 10. Теорема Жордана- 4год.

Теорема Жордана для нільпотентних операторів. Критерій нільпотентності оператора. Розщеплення лінійного оператора. Доведення теореми Йордана у загальному вигляді. [2], [3]

Практичне заняття 10. Зведення матриця до жорданової нормальної форми. 2 год.[7]: № 975-999, №1085-1115.

1. Методи зведення поліноміальних матриць до канонічного вигляду.
2. Зведення матриць до жорданової нормальної форми.

Самостійна робота. Зведення матриця до жорданової нормальної форми. 10 год. [2]

Практичне заняття 11. Знаходження жорданова базису лінійного оператора (випадок єдиного власного числа.) 1 год. [7]: № 1529-1533.

1. Алгоритм знаходження жорданова базису оператора (випадок єдиного власного числа.)
2. Побудова жорданової нормальної форми матриці.

Самостійна робота. Знаходження жорданова базису лінійного оператора (випадок єдиного власного числа.) 10 год. [2]

Практичне заняття 12. Знаходження жорданова базису лінійного оператора (випадок різних власних чисел.) 1 год. [7]: № 1529,-1534-1536.

1. Алгоритм знаходження жорданова базису оператора (випадок різних власних чисел.)
2. Побудова жорданової нормальної форми матриці.

Самостійна робота. Знаходження жорданова базису лінійного оператора (випадок різних власних чисел.) 10 год. [2]

ТИПОВЕ ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 5

1. Теорема про побудову нільпотентного оператора
2. Поняття фактор-простору. Теорема про розмірності фактор-простору
3. [7]: № 1533
4. [7]: № 1477

Контрольні запитання до змістового модуля 5.

1) Поняття власного вектора та власного числа. Характеристичний многочлен лінійного оператора.
2) Теореми про власні вектори.
3) Інваріантність, теореми 1-5 про інваріантність.
4) Теорема про інваріантні підпростори дійсного векторного простору.
5) Оператори простої структури. Достатня умова оператора простої структури.
6) Критерії оператора простої структури.
7) Поняття фактор-простору. Теорема про розмірність фактор-простору.
8) Поняття M - лінійної незалежності та M - базису.
9) Теорема Гамільтона –Келлі.
10) Поняття нільпотентного оператора. Критерій нільпотентності. Теорема про будову нільпотентного оператора.
11) Розщеплення лінійного оператора.
12) Теорема Жордана. Доведення (заключний етап).

Змістовий модуль 6.

***Тема 9.** Евклідові та унітарні простори (40 год)*

Лекція 11. Поняття евклідова простору.-2год.

Поняття евклідова простору. Нерівність Коші-Буняковського. Процес ортогоналізації. Довжина вектора та кут вектора. [2],[3]

Лекція 12. Поняття ортогонального доповнення підпростору. -2год.

Поняття ортогонального доповнення підпростору. Властивості ортогональних доповнень. [2],[3]

Практичне заняття 13. Поняття евклідова простору 2 год.[7]: №1354-1372.

1. Означення евклідова простору.
2. Процес ортогоналізації.
3. Розклад вектора в суму ортогональної проекції та ортогональної складової відносно підпростору.

Самостійна робота. Поняття евклідова простору 13 год.[2]

Лекція 13. Визначник Грама та його властивості. -2год.
Геометричний зміст процесу ортогоналізації. Визначник Грама та його властивості. Геометричний зміст визначника n-го порядку. [2], [3]

Лекція 14. Метод найменших квадратів. Поняття унітарного простору. – 2год.
Обґрунтування метода найменших квадратів наближеного розв'язання несумісних систем лінійних рівнянь. Поняття унітарного простору. Властивості унітарних просторів. [2], [3]

Практичне заняття 14. Знаходження відстані та кутів між векторами. Метод найменших квадратів. Унітарні простори. 2 год. [7]:№1373-1377, №1400-1404.

1. Знаходження відстані між векторами та відстані між векторами та підпросторами.
2. Знаходження кутів між векторами та кутів між векторами та підпросторами.
3. Наближене розв'язання несумісних систем лінійних рівнянь методом найменших квадратів.
4. Властивості унітарних просторів.

Самостійна робота. Знаходження відстані та кутів між векторами. Метод найменших квадратів. Унітарні простори. 13 год. [2]

Тема 10 *Оператори на евклідових та унітарних просторах* ***(42 год)***

Лекція 15. Спряжені лінійні оператори. – 2год.
Поняття спряженого лінійного оператора в евклідові просторі. Властивості операції спряження. Теорема про інваріантність ортогонального доповнення. Спряжені оператори в унітарному просторі. [2], [3]

Практичне заняття 15. Спряжені лінійні оператори. 2 год. [7]: № 1540-1553.

3. Спряжені оператори в евклідових та унітарних просторах.
4. Матриця спряженого оператора в базисі.
5. Теорема про інваріантність ортогонального доповнення.

Самостійна робота. Спряжені лінійні оператори. 5 год. [2]

Лекція 16. Ортогональні оператори – 4год.
Поняття ортогонального оператора. Властивості ортогональних операторів. Ортогональні оператори на прямій та в площині. Теорема про будову ортогонального оператора в скінченновимірному евклідові просторі. Теорема про будову ортогональної матриці. [2], [3]

Практичне заняття 16. Ортогональні оператори. 2 год. [7]: № 1560-1577.

1. Поняття ортогонального оператора.
2. Зведення ортогональної матриці до канонічного вигляду.
Самостійна робота. Ортогональні оператори. 5 год. [2]

Лекція 17. Самоспряжені оператори в евклідових просторах. – 2год.
Поняття самоспряженогого оператора в евклідові просторі. Властивості самоспряжених операторів. Теорема про будову самоспряженого оператора в скінченновимірному евклідові просторі. Теорема про будову симетричної матриці. [2], [3]

Практичне заняття 17. Самоспряжені оператори в евклідових просторах. 2 год.[7]: №1579-1586.
1. Поняття самоспряженого оператора в евклідові просторі.
2. Зведення матриці самоспряженого оператора до діагонального вигляду.
Самостійна робота. **Самоспряжені оператори в евклідових просторах. 5 год.[2]**

Лекція 18. Будова невиродженого оператора в скінченновимірному евклідові просторі . Лінійні оператори в унітарних просторах. – 1 год.
Теорема про будову невиродженого оператора в скінченновимірному евклідові просторі. Поняття унітарного та ермітова операторів. Властивості унітарних та ермітових операторів. Властивості унітарних та ермітових матриць. [2], [3]

Практичне заняття 18. Будова невиродженого оператора в скінченновимірному евклідові просторі. 2год. [7]: №1595-1600.
1. Теорема про будову невиродженого оператора в скінченновимірному евклідові просторі.
2. Полярний розклад невиродженої матриці.

Самостійна робота. Будова невиродженого оператора в скінченновимірному евклідові просторі. 2 год. [2]

Лекція 19. Нормальні оператори. – 1 год.
Поняття нормальних операторів. Властивості нормальних операторів. [2], [3]

Практичне заняття 19. Лінійні оператори в унітарних просторах. 2 год. [7]: №1588-1594, №1601-1614.
1. Унітарні оператори.
2. Ермітові оператори.
Самостійна робота. Лінійні оператори в унітарних просторах. 3 год.[2]
Практичне заняття 20. Нормальні оператори. 2 год. [5]: №1618-1633.
1. Поняття нормальних операторів
2. Властивості нормальних операторів.
Самостійна робота. **Нормальні оператори. 4 год. [2]**

Тема 11 *Білінійні та квадратичні форми* **(40 год.)**

Лекція 20. Лінійні функції та лінійні форми. Білінійні функції та білінійні форми. – 4 год

Поняття лінійної функції та лінійної форми. Поняття спряженого простору. Поняття білінійної функції та білінійної форми. Матриця білінійних функцій в базисі. Зв'язок матриць білінійної функції в різних базисах. Симетричні та кососиметричні білінійні функції. [2],[3]

Практичне заняття 21. Лінійні функції та лінійні форми. Білінійні функції та білінійні форми.2 год. [7]: №1554-1559.

1. Лінійні функції та лінійні форми.
2. Білінійні функції та білінійні форми.

Самостійна робота. Лінійні функції та лінійні форми. Білінійні функції та білінійні форми. 4 год. [2]

Лекція 21. Квадратичні функції та квадратичні форми. Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду. -4 год.

Квадратичні функції та квадратичні форми. Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду. Метод Лагранжа. Теорема Якоб. [2],[3]

Практичне заняття 22. Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду. Метод Лагранжа. 2год. [7]: № 1175-1186.

1. Зведення квадратичних функцій до канонічного вигляду методом Лагранжа.

Самостійна робота.Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду. Метод Лагранжа. 4 год. [2]

Лекція 22. Закон інерції квадратичних форм. Додатні квадратичні функції. Класифікація поверхонь другого порядку. -3 год.

Закон інерції квадратичних форм. Додатні квадратичні функції. Критерій Сильвестра. Класифікація поверхонь другого порядку. [2],[3]

Практичне заняття 23. Еквівалентні квадратичні форми. Додатні квадратичні функції. 2 год. [7]: №1190-1216.

1. Еквівалентні квадратичні форми.
2. Додатні квадратичні функції.

Практичне заняття 24. Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду ортогональним перетворенням. 2 год.[7]: №1243-1275.

1. Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду ортогональним перетворенням.
2. Ортогонально еквівалентні квадратичні форми.

Самостійна робота. Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду ортогональним перетворенням. 4 год. [2]

Практичне заняття 25. Задача класифікації поверхонь другого порядку. 3 год. [8]: № 545.

1. Зведення рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду.

Самостійна робота. Задача класифікації поверхонь другого порядку. 2 год. [2]

ТИПОВЕ ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 6

1. Визначник Грама та його властивості.
2. Поняття додатної квадратичної функції. Критерій Сильвестра.
3. [7]: № 1251
4. [7]: № 1564

Контрольні запитання до змістового модуля 6.

1) Евклідові простори. Нерівність Коші – Буняковського. Нерівність трикутника.
2) Ортогональність. Процес ортогоналізації.
3) Поняття ортогонального доповнення. Властивості ортогональних доповнень.
4) Геометричний зміст процесу ортогоналізації.
5) Визначник Грама та його властивості.
6) Геометричний зміст визначника n-го порядку.
7) Метод найменших квадратів.
8) Унітарні простори.
9) Спряжені оператори. Властивості операції спряження.
10) Теорема про інваріантність ортогонального доповнення.
11) Ортогональні оператори. Властивості ортогональних операторів.
12) Властивості ортогональних матриць.
13) Ортогональні оператори на прямій та площині.
14) Теорема про будову ортогонального оператора.
15) Теорема про будову ортогональної матриці.
16) Унітарні оператори.
17) Самоспряжені оператори та їх властивості.
18) Теорема про будову самоспряженого оператора.
19) Теорема про будову симетричної матриці.
20) Ермітові оператори та їх властивості.
21) Будова невиродженого оператора в скінченновимірному евклідові просторі.
22) Лінійні функції та лінійні форми.

23) Білінійні функції та білінійні форми.
24) Матриця білінійної функції в базисі. Зв'язок матриць білінійної функції в різних базисах.
25) Симетричні та кососиметричні білінійні функції.
26) Квадратичні функції та квадратичні форми.
27) Поняття полярної білінійної функції.
28) Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду. Метод Лагранжа.
29) Теорема Якобі.
30) Закон інерції квадратичних форм.
31) Додатні квадратичні функції. Критерій Сильвестера.
32) Класифікація поверхонь другого порядку.

Перелік питань на залік та іспит

1) Поняття лінійного простору. Приклади лінійних просторів. Лінійна залежність та лінійна незалежність системи векторів.
2) Властивості лінійно залежних та лінійно незалежних систем векторів.
3) Лема про дві системи.
4) Поняття базису простору. Теореми про базис.
5) Матриця переходу від базису до базису. Зв'язок координат векторів у різних базисах.
6) Поняття підпростору. Операції над підпросторами. Поняття суми підпросторів.
7) Поняття прямої суми підпросторів. Еквівалентність двох означень прямої суми.
8) Теорема про базис прямої суми.
9) Теорема про розмірності суми та перетину підпросторів.
10) Поняття лінійного перетворення.
11) Матриця лінійного перетворення в базисі. Властивості матриць лінійних перетворень. Координати образу вектора при лінійному перетворенні.
12) Ядро та образ лінійного перетворення. Теорема про розмірності ядра та образу лінійного перетворення.
13) Операції над лінійними операторами (алгебра лінійних операторів).
14) Поняття оберненого оператора.
15) Зв'язок матриць лінійного оператора в різних базисах.
16) Поняття власного вектора та власного числа. Характеристичний многочлен лінійного оператора.
17) Теореми про власні вектори.
18) Інваріантність, теореми 1-5 про інваріантність.
19) Теорема про інваріантні підпростори дійсного векторного простору.
20) Оператори простої структури. Достатня умова оператора простої структури.
21) Критерії оператора простої структури.

22) Поняття фактор-простору. Теорема про розмірність фактор-простору.
23) Поняття M - лінійної незалежності та M - базису.
24) Теорема Гамільтона –Келлі.
25) Поняття нільпотентного оператора. Критерій нільпотентності. Теорема про будову нільпотентного оператора.
26) Розщеплення лінійного оператора.
27) Теорема Жордана. Доведення (заключний етап).
28) Евклідові простори. Нерівність Коші – Буняковського. Нерівність трикутника.
29) Ортогональність. Процес ортогоналізації.
30) Поняття ортогонального доповнення. Властивості ортогональних доповнень.
31) Геометричний зміст процесу ортогоналізації.
32) Визначник Грама та його властивості.
33) Геометричний зміст визначника n-го порядку.
34) Метод найменших квадратів.
35) Унітарні простори.
36) Спряжені оператори. Властивості операції спряження.
37) Теорема про інваріантність ортогонального доповнення.
38) Ортогональні оператори. Властивості ортогональних операторів.
39) Властивості ортогональних матриць.
40) Ортогональні оператори на прямій та площині.
41) Теорема про будову ортогонального оператора.
42) Теорема про будову ортогональної матриці.
43) Унітарні оператори.
44) Самоспряжені оператори та їх властивості.
45) Теорема про будову самоспряженого оператора.
46) Теорема про будову симетричної матриці.
47) Ермітові оператори та їх властивості.
48) Будова невиродженого оператора в скінченновимірному евклідові просторі.
49) Лінійні функції та лінійні форми.
50) Білінійні функції та білінійні форми.
51) Матриця білінійної функції в базисі. Зв’язок матриць білінійної функції в різних базисах.
52) Симетричні та кососиметричні білінійні функції.
53) Квадратичні функції та квадратичні форми.
54) Поняття полярної білінійної функції.
55) Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду. Метод Лагранжа.
56) Теорема Якобі.
57) Закон інерції квадратичних форм.
58) Додатні квадратичні функції. Критерій Сильвестера.
59) Класифікація поверхонь другого порядку.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

а) основна:Ефимов Н.В Краткий курс аналитической геометриии. М.: Наука, 1969. – 272с.
2. Курош А.Д Курс высшей алгебры . М.: Наука, 1984.
3. Чарін В.С Лінійна алгебра. К: Техніка, 2003.
4. Кострикин А.И. Введение в алгебру, М: Физматлит, 2000.
5. Винберг Э.Б. курс алгебры, М: Факториал, 2002.
6. Клетеник И.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1987. – 724с.
7. Проскуряков И.В. Сборник задач по лиейной алгебре . М: Наука. 1984.
8. Фаддеев Д.К., Соминский И.С.Сборник задач по высшей алгебре. М: Наука, 1977.

б) додаткова :

1. Беклемишев Д.В.Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М: Наука, 1985.
2. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре М: Наука, 1975.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра М: Наука, 1984.
4. Сборник задач по линейной алгебре/ Под ред. А.И. Кострикина М: МГУ, 1984.
5. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М: Наука, 1970.

.

Питання, винесені на самостійну роботу
в період 24.01.2018 – 28.02.2018

Поняття лінійного простору. Наслідки аксіом лінійного простору. [2, гл. 7, §29], [3, роз. 3, §3.1]. ***1 год.***

Лінійна залежність та лінійна незалежність системи векторів, властивості. [2, гл. 7, §30; гл. 2, §9], [3, роз. 3, §3.1]. ***1 год.***

Лема про дві системи. [2, гл. 7, §30; гл. 2, §9], [3, роз. 3, §3.1]. ***1 год.***

Поняття базису простору. Теореми про базис. [2, гл. 7, §30], [3, роз. 3, §3.2]. ***1 год.***

Матриця переходу від одного базису до іншого. Зв’язок координат вектора в різних базисах. [2, гл. 7, §30], [3, роз. 6, §6.1]. ***1 год.***

Поняття підпростору, елементарні властивості. [2, гл. 7, §32], [3, роз. 3, §3.4]. ***1 год.***

Операції над підпросторами. Поняття суми підпросторів. [2, гл. 7, §32], [3, роз. 3, §3.4]. ***1 год.***

Поняття прямої суми підпросторів. Еквівалентність двох означень прямої суми. [3, роз. 3, §3.4]. ***1 год.***

Теорема про базис прямої суми. [3, роз. 3, §3.4]. ***1 год.***

Теорема про розмірність суми та перетину підпросторів. [2, гл. 7, §32], [3, роз. 3, §3.4]. ***1 год.***

Завдання на МКР

Задача 1. Перевірити, чи утворює система векторів лінійний підпростір в просторі всіх *n*-вимірних векторів. Якщо система векторів є підпростором, знайти його базис та розмірність.

1) Усі вектори, у яких координати з парними номерами рівні між собою.
2) Усі вектори, сума координат яких дорівнює 0.
3) Усі вектори, у яких координати з парними номерами дорівнюють 0.
4) Усі вектори, у яких усі ненульові координати одного знаку.
5) Усі вектори, у яких перша та остання координати рівні між собою.
6) Усі вектори, у яких перша координата дорівнює 0.
7) Усі вектори вигляду $(\alpha,\beta, \alpha,\beta,\alpha,\beta,\ldots)$, де α,β – будь-які числа. .
8) Усі вектори, у яких перша координата дорівнює сумі усіх інших координат.
1. Усі вектори, у яких усі координати рівні.
10) Усі вектори, у яких перша координата дорівнює сумі третьої та четвертої при $n\geq 4$.

Задача 2. Довести, що кожна з двох систем векторів $e_1,e_2,\ldots,e_n$ та $e_1',e_2',\ldots,e_n'$ утворює базис простору і знайти матрицю переходу від базису $e_1,e_2,\ldots,e_n$ до базису $e_1',e_2',\ldots,e_n'$.

1) $e_1=(1,1,1,1)$, $e_2=(1,2,1,1)$, $e_3=(1,1,2,1)$, $e_4=(1,3,2,3)$;
$e_1'=(1,0,3,3)$, $e_2'=(-2,-3,-5,-4)$, $e_3'=(2,2,5,4)$, $e_4'=(-2,-3,-4,-4)$;

2) $e_1=(4,2,1)$, $e_2=(5,3,2)$, $e_3=(3,2,1)$;
$e_1'=(-1,4,0)$, $e_2'=(4,3,1)$, $e_3'=(1,2,3)$;

3) $e_1=(1,1,1,1)$, $e_2=(1,2,1,3)$, $e_3=(1,1,2,2)$, $e_4=(1,1,1,3)$;
$e_1'=(3,-5,7,2)$, $e_2'=(-1, 8,-6, 5)$, $e_3'=(1,0,1,3)$, $e_4'=(2,2,2,2)$;

4) $e_1=(1,0,1)$, $e_2=(2,1,0)$, $e_3=(1,0, 0)$;
$e_1'=(1,1,1)$, $e_2'=(0,1,2)$, $e_3'=(3,2,0)$;

5) $e_1=(2,1,0)$, $e_2=(1,0,1)$, $e_3=(0,1, -1)$;
$e_1'=(2,1,2)$, $e_2'=(3,3,1)$, $e_3'=(1,2,0)$;

6) $e_1=(-3,-2,-3)$, $e_2=(4,2,4)$, $e_3=(3,3,4)$;
$e_1'=(1,1,2)$, $e_2'=(1,2,3)$, $e_3'=(3,2,4)$;

7) $e_1=(-3,-4,0)$, $e_2=(2,2,-1)$, $e_3=(1,3,2)$;
$e_1'=(0,7,8)$, $e_2'=(-3,2,7)$, $e_3'=(1,10,10)$;

8) $e_1=(1,2,-1,0)$, $e_2=(1, -1,1,1)$, $e_3=(-1,2,1,1)$, $e_4=(-1, -1,0,1)$;
$e_1'=(2,1,0,1)$, $e_2'=(0,1,2,2)$, $e_3'=(-2,1,1,2)$, $e_4'=(1,3,1,2)$;

9) $e_1=(8,-6,7)$, $e_2=(-16,7,-13)$, $e_3=(9,-3,7)$;
$e_1'=(1,-2,1)$, $e_2'=(3,-1,2)$, $e_3'=(2,1,2)$;

10) $e_1=(1,1,2)$, $e_2=(1,2,3)$, $e_3=(1,2,4)$;
$e_1'=(2,-3,1)$, $e_2'=(3, -1,5)$, $e_3'=(1,-4,3)$;

Задача 3. Знайти розмірність і базис лінійного підпростору, породженного системою векторів

1) $a_1=(4,1,-1)$, $a_2=(6,3,3)$, $a_3=(1,1,2)$, $a_4=(3,1,0)$;

2) $a_1=(1,2,1,1)$, $a_2=(1,3,2,–1)$, $a_3=(0,2,2,–3)$, $a_4=(1,4,3,2)$;
3) $a_1=(1,1,–1,–1)$, $a_2=(5,–4,7,1)$, $a_3=(3,–3,5,1)$, $a_4=(9,–6,11,1)$;
4) $a_1=(0,1,1,0)$, $a_2=(1,0,0,1)$, $a_3=(–1,0,1,1)$, $a_4=(0,0,1,2)$; $a_5=(2,–1,–1,2)$
5) $a_1=(1,1,1,1,0)$, $a_2=(1,1,–1,–1,–1)$, $a_3=(2,2,0,0,–1)$, $a_4=(1,1,5,5,2)$; $a_5=(1,–1,–1,0,0)$
6) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,1,1,3)$, $a_3=(3,–5,7,2)$, $a_4=(1,–7,5,–2)$;
7) $a_1=(1,2,1,3)$, $a_2=(1,1,1,3)$, $a_3=(1,0,1,3)$, $a_4=(2,–1,1,6)$; $a_5=(–2,–1,–2,–6)$
8) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,2,1,3)$, $a_3=(1,1,2,2)$, $a_4=(1,1,1,3)$; $a_5=(2,3,3,3)$
9) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(5,–7,3,–9)$, $a_3=(1,2,2,2)$, $a_4=(3,–10,0,–12)$;
10) $a_1=(3,1,3,1)$, $a_2=(1,2,1,2)$, $a_3=(1,2,0,2)$, $a_4=(1,–1,1,–1)$; $a_5=(–3,–3,–3,–3)$

Задача 4. Знайти систему лінійних рівнянь, яка задає підпростір, породжений системою векторів

1) $a_1=(1,3,2,–5)$, $a_2=(–1,2,1,–2)$, $a_3=(3,–5,–2,3)$, $a_4=(2,–3,–1,1)$
2) $a_1=(2,–3,5,1)$, $a_2=(1,2,3,1)$, $a_3=(3,13,10,4)$, $a_4=(1,–19,0,–2)$
3) $a_1=(1,–1,1,–1,1)$, $a_2=(1,1,0,0,3)$, $a_3=(3,1,1,–1,7)$, $a_4=(0,2,–1,1,2)$
4) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(0,3,2,1)$, $a_3=(–2,1,0,–1)$, $a_4=(–4,5,2,1)$
5) $a_1=(2,–1,4,2)$, $a_2=(3,0,6,1)$, $a_3=(–1,2,–2,–3)$, $a_4=(1,1,2,–1)$
6) $a_1=(1,–3,4,–2)$, $a_2=(3,–1,–1,1)$, $a_3=(3,7,–14,8)$, $a_4=(2,2,–5,3)$
7) $a_1=(2,3,1,2)$, $a_2=(3,1,2,1)$, $a_3=(1,–9,2,–5)$, $a_4=(6,–5,5,–2)$
8) $a_1=(2,–1,1,3)$, $a_2=(1,2,3,4)$, $a_3=(1,12,13,14)$, $a_4=(–1,8,7,6)$
9) $a_1=(1,–1,1,–1)$, $a_2=(3,2,1,0)$, $a_3=(1,–6,3,–4)$, $a_4=(1,14,–5,8)$
10) $a_1=(1,2,3,5)$, $a_2=(3,2,1,3)$, $a_3=(1,4,7,11)$, $a_4=(3,4,5,9)$

Задача 5. Знайти базиси суми і перетину лінійних підпросторів, породжених системами векторів $a_1,\ldots,a_k$ і $b_1,\ldots,b_m$ відповідно.

1) $a_1=(1,2,1,3)$, $a_2=(1,1,1,3)$, $a_3=(1,0,1,3)$;
$b_1=(1,1,1,1)$, $b_2=(1,1,2,2)$, $b_3=(1,1,–1,–1)$;

2) $a_1=(1,2,3)$, $a_2=(4,3,1)$, $a_3=(2,–1,–5)$;
$b_1=(1,1,1)$, $b_2=(–3,2,0)$, $b_3=(–2,3,1)$;

3) $a_1=(1,2,3)$, $a_2=(0,1,1)$, $a_3=(1,1,2)$;
$b_1=(4,3,1)$, $b_2=(1,1,0)$, $b_3=(5,3,2)$;

4) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,1,1,3)$, $a_3=(1,2,1,3)$, $a_4=(1,0,1,3)$;
$b_1=(1,1,1,2)$, $b_2=(1,1,2,2)$, $b_3=(3,3,4,5)$, $b_4=(0,0,1,1)$;

5) $a_1=(1,1,1)$, $a_2=(4,2,1)$, $a_3=(2,0,–1)$;
$b_1=(–2,3,1)$, $b_2=(1,4,1)$, $b_3=(5,–2,–1)$;

6) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,2,1,3)$, $a_3=(1,1,2,2)$;
$b_1=(0,0,1,1)$, $b_2=(2,2,3,3)$, $b_3=(1,1,2,2)$;

7) $a_1=(1,2,1,3)$, $a_2=(–1,8,–6,5)$, $a_3=(0,10,–5,8)$;
$b_1=(1,4,–1,5)$, $b_2=(3, –2,6,3)$, $b_3=(4,2,5,8)$;

8) $a_1=(1,1,0,0)$, $a_2=(0,1,1,0)$, $a_3=(0,0,1,1)$;
$b_1=(1,0,1,0)$, $b_2=(0,2,1,1)$, $b_3=(1,2,1,2)$;

9) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,1,–1,–1)$, $a_3=(1,–1,1,–1)$;

$b_1=(1,–1,–1,1)$, $b_2=(1,–1,0,0)$, $b_3=(3,–1,1,1)$;

10) $a_1=(1,2,1,1)$, $a_2=(2,3,1,0)$, $a_3=(3,1,1,–2)$;
$b_1=(0,4,1,3)$, $b_2=(1,0,–2,–6)$, $b_3=(1,0,3,5)$;

---
i