КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет кібернетики

Кафедра моделювання складних систем

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Заступник декана
з навчальної роботи

____________Кашпур О.Ф.

«____»____________2017 року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Основи нелінійної динаміки

для студентів

напрям підготовки 6.040301 „Прикладна математика”
спеціальність 8.04030101 „Прикладна математика”
спеціалізація „Обчислювальна математика”, „Дослідження операцій”,
„Моделювання та оптимізація систем”

КИЇВ – 2017

Робоча програма для студентів

напряму підготовки 6.040301 „Прикладна математика”
спеціальність 8.04030101 „Прикладна математика”

«____» ______________ 2017 року – 14 с.

Розробники: професор, доктор фіз.-мат. наук, професор Хусаінов Д.Я.

Робоча програма дисципліни «Основи нелінійної динаміки» затверджена на засіданні кафедри моделювання складних систем

Протокол № ....від “......”   2017 року

Завідувач кафедри ______________________ (Гаращенко Ф.Г.)
(підпис) (прізвище та ініціали)

«_____» ____________________ 2017 року

Схвалено науково - методичною комісією факультету за напрямом підготовки 6.040301 „Прикладна математика”

Протокол від «____» _____________ 2017 року

Голова науково-методичної комісії ____________________ (Хусаінов Д.Я.)
(підпис) (прізвище та ініціали)

«_____» __________________ 2017 року

ВСТУП

Навчальна дисципліна **„Основи нелінійної динаміки”** (МДС) є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем «магістр» галузі знань «Системні науки та кібернетика» з *напряму підготовки* 6.040301 „Прикладна математика” спеціальністості 8.04030101 „Прикладна математика”.

Дана дисципліна є нормативною за напрямком підготовки *«Прикладна математика»,* спеціальністості 8.04030101 „Прикладна математика”

Викладається у __2_ семестрі ___1___ курсу в **обсязі – 180 год.**

(2 кредити ECTS) зокрема: *лекції – 40 год., семінари – 14 год., консультації – 6 год., самостійна робота – 120 год.* У курсі передбачено __2_ *змістових модулі* та _2__ *модульні контрольні роботи*. Завершується дисципліна – **іспитом.**

Мета дисципліни – ознайомлення магістрів спеціальності “прикладна математика” з одним з важливих математичних напрямків моделювання та аналізу нелінійних динамічних процессів. Дисципліна “нелінійна динаміка” виникла і сформувалась в останні десять років. Це пов”язане, в першу чергу, з виникненням можливості комп”ютерного дослідження динаміки нелінійних систем. Виявилось досить незвичайне явище стохастичної поведінки у нелінійних детермінованих системах. З”явилось поняття, так званих, “дивних атракторів”, тобто притягуючих множин, які мають дробову розмірність. Після усвоєння курсу студенти спеціальності “прикладна математика” повинні вміти розробляти та досліджувати нелінійні математичні моделі динамічних процесів, які описані звичайними диференціальними та різницевими рівняннями, а також рівняннями в частинних похідних.

Завдання – вивчення дисципліни „Основи нелінійної динаміки” повинно навчити студенів досліджувати нелінійні математичні моделі динамічних систем та процесів, які описані за допомогою звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь в частинних похідних, різницевих рівнянь, розвинути теоретичні і практичні властивості в даному напрямку.

В результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: основні поняття з курсів звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь математичної фізики, різницевих рівнянь та алгебри. А саме, студенти повинні вміти проводити якісне дослідження звичайних диференціальних рівнянь на площині та у тривимірному просторі, досліджувати скалярні різницеві рівняння та рівняння на площині, а також знати основні методи розв’язку рівнянь в частинних похідних. Студенти повинні навчитись використанню елементів якісної теорії диференціальних рівнянь (обчислювати власні вектори та власні числа, знаходити обернені матриці, приводити матрицю до жорданової форми), лінеаризації систем.

вміти: Після усвоєння курсу «основи нелінійної динаміки» студенти спеціальності “прикладна математика” повинні вміти досліджувати математичні моделі динамічних процесів, які описані звичайними диференціальними рівняннями, різницевими рівняннями та рівняннями в частинних похідних. Студенти повинні вміти будувати якісний портрет лінійних та нелінійних динамічних систем на площині та використовувати методи їх дослідження.

Місце дисципліни *(**в структурно-логічній схемі підготовки фахівців відповідного напряму)****.* Нормативна навчальна дисципліна „Основи нелінійної динаміки” є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня „магістр”

Зв’язок з іншими дисциплінами.

Нормативна навчальна дисципліна „Основи нелінійної динаміки” є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня „магістр”. Для успішного освоєння курсу необхідні знання з диференціальних рівнянь, математичного аналізу, алгебри, математичної фізики та моделювання динамічних систем.

Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти.

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою.

У змістовий модуль 1 (ЗМ1) «Класичні методи дослідження нелінійних систем» входять 3 теми: «Методи лінійного наближення», «Однорідні та квазиоднорідні системи», «Періодичні рухи», а у змістовий модуль 2 (ЗМ2) «Нелінійні системи спеціального виду» – 3 теми: «Елементи якісного дослідження нелінійних системі», «Деякі види нелінійних систем», «Біфуркація та хаос в нелінійних системах». Обов'язковим для іспиту є виконання модульних контрольних робіт та отримання не менше 20 балів.

Оцінювання за формами контролю: (як приклад)

	ЗМ1		***ЗМ 2***	
	Min. – 10 балів	*Max.– 30 балів*	*Min. – 10 балів*	*Max. – 30 балів*
Усна відповідь	5	15	5	15
Доповнення	*5*	15	*5*	15
Модульна контрольна робота	5	15	5	15

Для студентів, які набрали сумарно меншу кількість балів ніж *критично-розрахунковий мінімум –* ***__20__*** *балів* для одержання іспиту обов'язково відробити модульні роботи і виконати аналіз помилок.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються у відповідності до „Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу" від 1 жовтня 2010 року.

При простому розрахунку отримаємо:

	Змістовий модуль1	Змістовий модуль2	Іспит / *залік*	Підсумкова оцінка
Мінімум	*10*	*10*	*10*	*60*
Максимум	**30**	**30**	**40**	**100**

При цьому, кількість балів:

- **0-34** відповідає оцінці «незадовільно» з обов'язковим повторним вивченням дисципліни;
- **35-59** відповідає оцінці «незадовільно» з можливістю повторного складання;
- **60-64** відповідає оцінці «задовільно» («достатньо»);
- **65-74** відповідає оцінці «задовільно»;
- **75 - 84** відповідає оцінці «добре»;
- **85 - 89** відповідає оцінці «добре» («дуже добре»);
- **90 - 100** відповідає оцінці «відмінно».

Шкала відповідності *(за умови іспиту)*

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою	
90 – 100	5	Відмінно
85 – 89	4	Добре
75 – 84		
65 – 74	3	Задовільно
60 – 64		
35 – 59	2	не задовільно
0 – 34		

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістовий модуль 1. Класичні методи дослідження нелінійних систем.

ТЕМА 1. Методи лінійного наближення. – **(6 *год.*)**
Наведені результати з геометричної інтерпретації в системах звичайних диференціальних рівняню Сформульовані основні означення загальної теорії динамічних систем. Детально розглянуто методи побудови фазового портрету лінійних систем на площині. Сформульовано принципи методу лініаризації для нелінійних систем.

ТЕМА 2. ОДНОРІДНІ ТА КВАЗИОДНОРІДНІ СИСТЕМИ НА ПЛОЩИНІ –*(8 год.)*.

Наведено поняття стійких та орбітно-стійких траєкторій, граничних точок та граничнії множин. Розглянуто траєкторії на торі, приклади систем на торі. Детально висвітлено поведінку однорідних та квазиоднорідних рівнянь на площині.

ТЕМА 3. ПЕРІОДИЧНІ РУХИ –*(6 год.)*.

Освітлена класична проблема центра-фокуса. Приведено умови існування центру при наявності лінійних членів. Сформульовано означення індексу Пуанкаре та методи його обчислення.

Змістовий модуль 2. Нелінійні системи спеціального виду.

ТЕМА 1. ЕЛЕМЕНТИ ЯКІСНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ – *(6 год.)*.
Наведена формула Пуанкаре обчислення індексу Пуанкаре деяких особливих точок. Приведені деякі критерії існування періодичних траєкторій.

ТЕМА 2. ДЕЯКІ ВИДИ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ. - *(8 год.)*.
Елементи теорії коливань. Лінійні коливання. Найпростіші нелінійні коливання. Дисипативні та автоколивальні системи. Грубі системи. Загальні означення. Умови грубості.

ТЕМА 3. ТЕОРІЯ БІФУРКАЦІЇ ТА ХАОС У ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ. – *(6 год.)*.

Основи теорії біфуркацій. Біфуркація систем на площині. Моделі з дискретним часом. Теорема Шарковського. Побудова та дослідження аттрактора Лоренца. Хаос у динамічних системах. Критерій виникнення хаосу

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І СЕМІНАРСЬКИХ ЗАНЯТЬ

№ п/п	Назва лекції	Кількість годин		
		лекції	Семінари	С/Р
	Змістовий модуль 1. **Класичні методи дослідження нелінійних систем.**			
1	Геометрична інтерпретація в системах диференціальних рівнянь. Основні поняття та визначення	2		6
2	Особі точки лінійних стаціонарних систем на площині. Вироджені стани рівноваги	2	1	6
3	Побудова фазових портретів нелінійних систем на площині. Лінеаризація в околі особливої точки	2	2	6
4	Стійкі та орбітно-стійкі траєкторії. Граничні точки та граничні множини.	2		6
5	Траєкторії на торі. Відображення тору на площину. Приклади систем диференціальних рівнянь на торі.	2		6
6	Однорідні системи диференціальних рівнянь на площині. Види траєкторій та особливих точок.	2	1	6
7	Квазіоднорідні рівняння на площині	2	1	6
8	Проблема центра-фокуса. Умови існування центру	2	1	6
9	Умови існування центру при наявності лінійних членів	2	1	8
10	Індекс Пуанкаре. Властивості індексу Пуанкаре. Індекс Пуанкаре для особливої точки	1		8
	Модульна контрольна робота	1		
	Змістовий модуль 2. **Нелінійні системи спеціального виду.**			
11	Формула для обчислення індексу Пуанкаре для особливих точок	2	1	8
12	Критерії існування періодичних розв'язків	3	1	8
13	Елементи теорії коливань. Лінійні коливання. Найпростіші нелінійні коливання	3	1	8
14	Дисипативні системи. Автоколивальні системи. Лагранжеві системи.	2	1	8
15	Грубі системи. Загальні визначення. Умови грубості.	3	1	8
16	Основи теорії біфуркацій. Біфуркація систем на площині. Моделі з дискретним часом. Теорема Шарковського.	3	1	8
17	Побудова та дослідження аттрактора Лоренца. Хаос у динамічних системах. Критерій виникнення хаосу	3	1	8
	Модульна контрольна робота	1		
	ВСЬОГО	**40**	**14**	**120**

Загальний обсяг ***180 год,*** в тому числі:
Лекцій – **40** год.,

Семінарські заняття – **14.**
Консультацій **- 6**
Самостійна робота **- 120** год.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1
Класичні методи дослідження нелінійних систем.

ТЕМА 1. Методи лінійного наближення. – **(27 *год.*)**

Лекція 1. Геометрична інтерпретація в системах диференціальних рівнянь. Основні поняття та означення. – **(2 *год.*).**

Розглянуто основні означення теорії динамічних систем. Введено поняття траєкторії, особливої точки, періодичного руху. Наведено поняття стійкості руху систем та аналогі стійкості систем. [1,2].

Завдання для самостійної роботи. – (6 год.) *Геометрична інтерпретація в теорії динамічних систем. Особливі точки, періодичні рухи, стійкі многовиди* [1-4].

Лекція 2. Особливі точки лінійних стаціонарних систем на площині. Вироджені стани рівноваги – ***(2 год.)***

Розглянуто лінійні стаціонарні системи на площині. Наведено повну класифікацію точок спокою (вузол, сідло, фокус, центр, вир оджені стани рівноваги) [1,2].

Семінари – *Побудова особливих точок на площині.* ***(1 год)***

Завдання для самостійної роботи*. *– (6 год)

Побудувати фазовий портрет визначеної лінійної стаціонарної системи на площині. [1,2].

Лекція 3. Побудова фазових портретів нелінійних систем на площині. Лінеаризація в околі особливої точки – ***(2год.)***

Детально розібрано метод лінеаризації. Наведено теорему Ляпунова про стійкість за лінійним наближенням [1,2].

Семінари – *Лінеаризація в околі особливої точки* ***(2 год).***

Завдання для самостійної роботи. – *(6 год.)*

Побудувати фазовий портрет визначеної нелінійної стаціонарної системи на площині. [1,2].

ТЕМА 2. ОДНОРІДНІ ТА КВАЗИОДНОРІДНІ СИСТЕМИ – ***(34 год.)***

Лекція 4. Стійкі та орбітно-стійкі траєкторії. Граничні точки та граничні множини.– ***(2 год.)***

Введені основні поняття з топологічної динаміки. Зокрема поняття α та $\omega -$граничних множин, стійких траєкторій. Введено поняття розбиття області на комірки [1,2].

Завдання для самостійної роботи. – *(6 год.)*

Основні поняття топологічної динаміки. [1,2].

Лекція 5. Траєкторії на торі. Відображення тору на площину. Приклади систем диференціальних рівнянь на торі. – ***(2 год.)***

Як один з прикладів нетрадиційних динамічних систем, розглянуто систему на торі. Показано особливість систем на торі, а саме, можливість існування однієї траєкторії,що всюду щільно заповнює поверхню тора. [1].

Завдання для самостійної роботи. - *(6 год.)*

Системиі диференціальних рівнянь на многовидах [1].

Лекція 6. Однорідні системи диференціальних рівнянь на площині. Види траєкторій та особливих точок. – ***(2 год)***.

Розглянуто однорідні системи диференціальних рівнянь на площині. Доведена теорема про існування періодичних траєкторій, асимпттично стійкого стану рівноваги. [1,2].

Семінари *– Дослідження систем квадратичного вигляду* ***(1 год).***

Завдання для самостійної роботи. – ***(6 год.)***

Побудова фазового портрету системи з квадратичною нелінійністю на площині. [1,2]

Лекція 7. Квазіоднорідні рівняння на площині – ***(2 год.)***

Розглянуто квазиоднорідні системи на площині. Наведено умви, при виконанні яких нелінійності вищого порядку не впливають на поведінку системи в околі стану рівноваги [1-4].

Семінари *– Дослідження квазиоднорідних систем* ***(1 год).***

Завдання для самостійної роботи. – ***(6 год.)***

Побудова фазового портрету системи з квадратичною нелінійністю зі збуреннями на площині. [1,2]

ТЕМА 3. ПЕРІОДИЧНІ РУХИ – ***(27 год.).***

Лекція 8. Проблема центра-фокуса. Умови існування центру при наявності лінійних членів. – (***2 год.)***

Сформульована класична проблема центра-фокуса. Наведено умови існування центра через спеціальні злічену систему диференціальних рівнянь. [1].

Семінари *–Розв’язування системи диференціальних рівнянь, які задають умову періодичності* ***<u>(1 год)</u>.***

Завдання для самостійної роботи. – (6 ***год.)***

Умова існування центра для системи з квадратичною нелінійністю [1].

Лекція 9. Умови існування центру при наявності лінійних членів**. –** ***(2. год.)***

Розглянуто однорідну систему на площині при наявності лінійних членіві. Дослідження існування центру зведено до існування спеціального розв’язку зліченої системи алгебраічних рівнянь. [1].

Семінари - *Розв’язування системи алгебраічних рівнянь, які задають умову періодичності* ***<u>(1 год)</u>.***

Завдання для самостійної роботи. – ***(8 год.)***

Умова існування центра для системи з квадратичною нелінійністю. [1].

Лекція 10. Індекс Пуанкаре. Властивості індексу Пуанкаре. Індекс Пуанкаре для особливої точки та замкненої траєкторії – ***(1 год.)***

Розглянуто один з важливих інваріантів динамічних систем – шндекс Пуанкаре [1,2].

Завдання для самостійної роботи. – (8 ***год.)***

Обчислення індексу Пуанкаре для особливих точок на площині. [1,2].

Контрольні запитання до змістовного модуля №1

1. Геометрична інтерпретація в системах диференціальних рівнячнь. Основні поняття та визначення.
2. Особі точки лінійних стаціонарних систем на площині. Вузол, сідло, фокус, центр. Вироджені стани рівноваги.
3. Побудова фазовіх портретів нелінійних систем на площині. Лінеаризація в околі особливих точок.

4. Можливий характер траєкторій на площині. Стійкі та орбітно-стійкі траєкторії. Граничні точки та граничні множини.
5. Криві без контакту. Властивості кривих бех контакту.
6. Можливі види множин граничних точок півтраєкторій.
7. Траєкторії на торі. Відображення тору на площину.
8. Приклади систем диференціальних рівнянь на торі.
9. Однорідні диференціальні рівняння на площині. Види траєкторій для однорідних рівнянь на площині.
10. Квазіоднорідні рівняння на площині. Можливі траєкторії для квазіоднорідних рівнянь на площині.
11. Проблема центра-фокуса. Умови існування центру.
12. Умови існування центру при інаявності лінійних членів.

Контрольні завдання до змістовного модуля №1

1. Побудувати фазовий портрет заданої системи на площині.
2. Побудувати фазовий портрет системи з квадратичною правою частиною на площині.
3. Перевірити умови існування центру для заданої системи диференціальних рівнянь.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2
Нелінійні системи спеціального виду.

ТЕМА 1. ЕЛЕМЕНТИ ЯКІСНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ. - ***(23 год.)***

Лекція 11. Формула для обчислення індексу Пуанкаре для особливих точок – ***(2год.).***

Наведено теорему про обчислення індексу Пуанкаре. Обчислено індекс для особливих точок на площині. [1,2].

Семінари *– Обчислення індексу Пуанкаре* ***(1)***

Завдання для самостійної роботи. – ***(8 год.)***

Обчислити індекс Пуанкаре для вузла, сідла та фокуса [1]

Лекція 12. Критерії існування періодичних розв’язків. – ***(3год.)***

Наведено критерії Бендіксона, принцип симетріїї. Розглянуто окремі види рівнянь і з використанням запропонованих критеріїв перевірено існування періодичних розв’язків. [1,3].

Семінари *– Дослідження конкретних прикладів систем на площині* ***(1 год).***

Завдання для самостійної роботи. – ***(8 год.)***

Коливальні системи. Існування періодичних розв’язків таких систем. [3].

ТЕМА 2. ДЕЯКІ ВИДИ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ. - ***(35 год.)***

Лекція 13. Елементи теорії коливань. Лінійні коливання. Найпростіші нелінійні коливання – ***(3 год.)***

Розглянуто лінійні коливання з дисипацією та без неї. Досліджена найпростіша нелінійна модель коливання. [1,7].

Семінари *– Побудова коливальних розв’язків двовимірних систем* ***(1 год)****.*

Завдання для самостійної роботи. – ***(8 год.)***

Дослідити нелінійне коливальне рівняння [3].

Лекція 14. Дисипативні системи. Автоколивальні системи. Лагранжеві системи. – ***(2 год.)***

Системи з тертям. Рівняння Ван-дер-Поля. Фазовий портрет рівняння Ван-дер-Поля. Отриманяя Рівняння Лагранжа. Зв'язок з системами Гамільтона. [3].

Семінари** – Побудова фазового портрету рівняння Ван-дер-Поля **(1год.)

Завдання для самостійної роботи. – *(8 год.)*

Дослідження окремих рівнянь Лагранжа та Гамільтона [3].

Лекція 15. Грубі системи. Загальні визначення. Умови грубості. – ***(3 год.)***

Означення грубих динамічних систем. Необхідні та достатні умови грубості системи на площині [2].

Семінари** – Побудова фазового портрету конкретних систем на площині **(1 год).

Завдання для самостійної роботи. – (8 *год.)*

истеми першої та другої ступенів грубості [3]

ТЕМА 3 ТЕОРІЯ БІФУРКАЦІЙ ТА ХАОС В ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ. - ***(23 год.)***

Лекція 16. Основи теорії біфуркацій. Біфуркація систем на площині. Моделі з дискретним часом. Теорема Шарковського. – ***(3 год.)***

Приклад біфуркації в одній системі на площині. Елементі теорії катастроф. Складка та сборка [9].

Семінари** – Чисельні методи побудови складки та сборки **(1 год).

Завдання для самостійної роботи. – (8 *год.)*

Дослідити біфуркацію однієї системи на площині. [9].

Лекція 17. Побудова та дослідження атрактора Лоренца. Хаос у динамічних системах. Критерій виникнення хаосу – ***(3 год.)***

Побудова рівнянь Лоренца. Зведення загальної системи в частинних похідних до трьох звичайних диференціальних рівнянь. Дослідження динаміки рівнянь Лоренца. [5-7].

Семінари** – Отримання рівняння Лоренца **(1 год)

Завдання для самостійної роботи. – *(8 год.)*

Дослідження одновимірних рівнянь хаотичної динаміки [7].

Контрольні запитання до змістовного модуля №2

1. Критерії існування періодичних розв'язків.
2. Елементи теорії коливань. Лінійні коливання.
3. Найпростіші нелінійні коливання.
4. Дисипативні автоколивальні системи.
5. Грубі системи. Загальні визначення. Необхідні умови грубості в системах на площині. "Кількість" грубих систем.
6. Основи терії біфуркацій. Біфуркація систем на площині.
7. Моделі з дискретним часом. Біфуркація у дискретних системах. Теорема Шарковського.
8. Дослідження атрактору Лоренца. Чисельне дослідження рівнянь Лоренца. Біфуркації в моделі Лоренца.
9. Фрактальні множини. Умови самоподібність.
10. Хаос у динамічних системах. Критерій виникнення хаосу.

Контрольні завдання до змістовного модуля №2

1. Побудувати фазовий портрет нелінійого рівняння коливання.
2. Дослідити відображення «пекаря».
3. Провести дослідження рівняння Лоренца.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА:

Основна:

1. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.-Л., Гос. Издат. Технико-теоретической литературы, 1949. – 550 с.
2. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М., Наука, 1990. – 448 с.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М., Наука, 1965. – 560 с.
4. Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D. Chaos and Fractals. New Frontiers of Science. – Springer-Verlag, 1992. – 984 p.
5. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. – М., Эдиториал УРСС, 2001. – 320 с.
6. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. –М., Наука. – 2001.
7. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М., Эдиториал УРСС, 2000.

Додаткова:

8. Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества. Функции распределения. – К., Наукова думка, 1992. – 205 с.
9. Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. –М., Наука. – 2005.

В тому числі й інтернет ресурси:

http://www.cyb.univ.kiev.ua/library.school-books.html

http://mss.unicyb.kiev.ua/index.php?p=manual&lang=ua

Питання на іспит

11. Геометрична інтерпретація в системах диференціальних рівнячнь. Основні поняття та визначення.
12. Особі точки лінійних стаціонарних систем на площині. Вузол, сідло, фокус, центр. Вироджені стани рівноваги.
13. Побудова фазовіх портретів нелінійних систем на площині. Лінеаризація в околі особливих точок.
14. Можливий характер траєкторій на площині. Стійкі та орбітно-стійкі траєкторії. Граничні точки та граничні множини.
15. Криві без контакту. Властивості кривих бех контакту.
16. Можливі види множин граничних точок півтраєкторій.
17. Траєкторії на торі. Відображення тору на площину.
18. Приклади систем диференціальних рівнянь на торі.
19. Однорідні диференціальні рівняння на площині. Види траєкторій для однорідних рівнянь на площині.
20. Квазіоднорідні рівняння на площині. Можливі траєкторії для квазіоднорідних рівнянь на площині.
21. Проблема центра-фокуса. Умови існування центру.
22. Умови існування центру при інаявності лінійних членів.
23. Індекс Пуанкаре. Властивості індексу Пуанкаре. Індекс Пуанкаре для точки для замкненої кривої.
24. Обчислення індексу Пуанкаре для особих точок.
25. Критерії існування періодичних розв’язків.
26. Елементи теорії коливань. Лінійні коливання.
27. Найпростіші нелінійні коливання.

28. Дисипативні автоколивальні системи.
29. Грубі системи. Загальні визначення. Необхідні умови грубості в системах на площині. “Кількість” грубих систем.
30. Основи терії біфуркацій. Біфуркація систем на площині.
31. Моделі з дискретним часом. Біфуркація у дискретних системах. Теорема Шарковського.
32. Дослідження атрактору Лоренца. Чисельне дослідження рівнянь Лоренца. Біфуркації в моделі Лоренца.
33. Фрактальні множини. Умови самоподібність.
34. Хаос у динамічних системах. Критерій виникнення хаосу.

Завдання для самостійної роботи з елементами дистанційного навчання з дисципліни «диференціальні рівняння» на період з 24 січня 2018 р. по 28 лютого 2018 р..

Студенти 1-го курсу
другого магістерського рівня
напрямку підготовки «прикладна математика»
спеціальності «прикладна математика».

Викладає лекції: проф.. Хусаінов Д.Я. (d.y.khusainov@gmail.com),
Викладач, що проводять семінарські заняття: проф.. Хусаінов Д.Я. (d.y.khusainov@gmail.com).

Зміст

Побудова фазового портрету системи на площині, основана на методі лінеаризації

Якісне дослідження динамічних систем на площині, відповідно до теорії Пуанкаре-Ляпунова, проводиться наступним чином. Будується фазовий портрет якісної поведінки системи, тобто знаходяться особливі точки, цикли і визначається характер поведінки траєкторій в околі отриманих особливих точок і циклів (стійкість або нестійкість). Далі проводиться локальна побудова фазового портрету в околі кожної з особливих точок і циклів і «зшивання» траєкторій в фазовий портрет системи в цілому. Як було сказано раніше, для системи на площині

$$\dot{x}(t) = P(x, y), \quad \dot{y}(t) = Q(x, y)$$

особлива точка є розв’язком системи рівнянь

$$M_0(x_0, y_0): \; P(x_0, y_0) = 0, \; Q(x_0, y_0) = 0 .$$

Позначимо

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}, \ \sigma(x_0, y_0) = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0).$$

Положення рівноваги, для якого $\Delta(x_0, y_0) \neq 0$, називається **простим**. Це положення рівноваги може бути вузлом (простим, виродженим, дикритичним), сідлом, фокусом, центром.

При дослідженні поведінки траєкторій поблизу положення рівноваги $M_0(x_0, y_0)$ функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ розкладають в ряд в околі цієї точки с точністю лінійного наближення.

$$P(x, y) = P(x_0, y_0) + P'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + P'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ + R_1(x, y)$$

$$Q(x, y) = Q(x_0, y_0) + Q'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + Q'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ + R_2(x, y).$$

Після позначення

$$P'_x(x_0, y_0) = a_0, \ \ P'_y(x_0, y_0) = b_0, \ Q'_x(x_0, y_0) = c_0, \ \ Q'_y(x_0, y_0) = d_0$$

система приймає вигляд

$$\dot{x} = a_0(x - x_0) + b_0(y - y_0) + R_1(x, y), \quad \dot{y} = c_0(x - x_0) + d_0(y - y_0) + R_2(x, y),$$

де функції $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$ є наближеннями більш високого порядку.

Виконавши заміну (паралельний перенос особливої точки в початок координат)

$$x = x_0 + \xi, \ y = y_0 + \eta,$$

отримуємо систему вигляду

$$\dot{\xi} = a_0\xi + b_0\eta + \tilde{R}_1(\xi, \eta), \quad \dot{\eta} = c_0\xi + d_0\eta + \tilde{R}_2(\xi, \eta).$$

Як випливає з теореми Ляпунова про лінійне наближення, якщо система не має суто уявних або нульових власних чисел, то локальні портрети нелінійної і лінеаризованої систем в досить малому $\delta-$околі $U_\delta(x_0, y_0)$ особливої точки $M_0(x_0, y_0)$ співпадають. Тому в цьому околі локальні фазові портрети вихідної нелінійної системи і системи лінійного наближення

$$\dot{\xi} = a_0\xi + b_0\eta, \quad \dot{\eta} = c_0\xi + d_0\eta$$

топологічно еквівалентні.

І для побудови фазового портрету діють наступним чином.

1. Розв'язуючи систему рівнянь

$$P(x, y) = 0, \ Q(x, y) = 0,$$

знаходять особливі точки $M_i(x_i, y_i)$, $i \in I$. Їх може не бути взагалі, це може бути скінченне, зліченне число або континуум.

2. В околі кожної з особливих точок $M_i(x_i, y_i)$, $i \in I$ проводиться лінеаризація системи і початкова система замінюється на

$$\dot{\xi} = a_i\xi + b_i\eta + \tilde{R}_{1i}(\xi, \eta), \quad \dot{\eta} = c_i\xi + d_i\eta + \tilde{R}_{2i}(\xi, \eta).$$

Відкидаючи нелінійні члени, в $\delta-$околах кожної з особливих точок проводиться лінеаризація, тобто розглядаються системи лінійного наближення

$$\dot{\xi} = a_i\xi + b_i\eta, \quad \dot{\eta} = c_i\xi + d_i\eta.$$

якщо системи лінійного наближення не мають нульових або суто уявних власних чисел, то в $\delta-$околі кожної з особливих точок будується її фазовий портрет.

3. Після цього проводиться "зшивання" фазового портрету окремих підсистем в фазовий портрет системи в цілому.

Зауваження 1. Якщо знаходження особливих точок зводиться до розв'язання системи рівнянь, то дотепер гарних **конструктивних** методів знаходження замкнутих траєкторій немає.

Приклад 1. Розглянемо наступну нелінійну систему

$$\dot{x} = x - y, \ \dot{y} = x^2 + y^2 - 2.$$

Розв'язуючи систему рівнянь

$$x - y = 0,\; x^2 + y^2 - 2 = 0,$$

знаходимо особливі точки. Особливими точками будуть $M_1(1,1)$, $M_2(-1,-1)$. Розкладання нелінійної системи з точністю до лінійного наближення в околі точки $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$\dot{x} = \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x - x_0) + \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y - y_0) + R_1(x, y) =$$

$$= 1(x - x_0) - 1(y - y_0) + R_1(x, y)$$

$$\dot{y} = \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x - x_0) + \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y - y_0) + R_2(x, y) =$$

$$= 2x\big|_{x=x_0}(x - x_0) + 2y\big|_{y=y_0}(y - y_0) + R_2(x, y).$$

1. Підставивши першу точку $M_1(1,1)$, отримуємо

$$\dot{x} = (x-1) - (y-1) + R_1(x, y),$$

$$\dot{y} = 2(x-1) + 2(y-1) + R_2(x, y).$$

Система лінійного наближення має вигляд

$$\dot{x} = (x-1) - (y-1),\; \dot{y} = 2(x-1) + 2(y-1).$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0.$$

Звідси

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4} = \frac{3}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Положення рівноваги являє собою нестійкий фокус.

Для зручності, зробимо паралельний перенос

$$x = x_1 + 1,\quad y = y_1 + 1$$

і обчислимо вектор швидкості в точці $(x_1, y_1) = (1,0)$ «зміщеної» системи. Отримуємо $\dot{x}\big|_{(1,0)} = 1$, $\dot{y}\big|_{(1,0)} = 2$. Таким чином локальний фазовий портрет в околі точки $M_1(1,1)$ має вигляд спіралі, яка розкручується проти часової стрілки (Рис.3.1.).

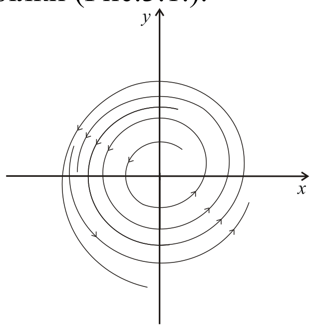

Рис.1.

2. Розглянемо другу особливу точку $M_2(-1,-1)$. Підставивши її значення у вираз для першої похідної, отримаємо

$$\dot{x} = (x-1) - (y-1) + R_1(x, y),\; \dot{y} = -2(x-1) - 2(y-1) + R_2(x, y).$$

Система лінійного наближення має вигляд

$$\dot{x} = (x-1) - (y-1),\; \dot{y} = -2(x-1) - 2(y-1).$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-4=0\,.$$

Звідси

$$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+4}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}\,,\ \lambda_1\approx-2{,}5\,,\ \lambda_2\approx1{,}5\,.$$

Положення рівноваги являє собою сідло. Для зручності, виконаємо паралельний перенос

$$x=x_1+1\,,\quad y=y_1+1$$

и обчислимо рівняння сепаратрис для «зміщеної системи». Рівняння сепаратрис мають вигляд $y_1=kx_1$. Підставивши у диференціальне рівняння, отримаємо

$$k=\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{-2x_1-2y_1}{x_1-y_1}=\frac{-2x_1-2kx_1}{x_1-kx_1}=\frac{-2-2k}{1-k}\,.$$

Звідси

$$k-k^2=-2-2/k\ \Longrightarrow\ k^2-3k-2=0\ \Longrightarrow\ k=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+2}=\frac{3}{3}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}\ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ k_1\approx3{,}5\,,\ k_2\approx-0{,}5\,.$$

Таким чином рівняння сепаратрис мають вигляд $y_1=3{,}5x_1$, $y_1=-0{,}5x_1$. Для визначення напрямку руху візьмемо точку $(x_1,y_1)=(1{,}0)$ і обчислимо вектор швидкості в цій точці «зміщеної» системи. Отримуємо $\dot{x}\big|_{(1,0)}=1$, $\dot{y}\big|_{(1,0)}=-2$. Таким чином локальний фазовий портрет в околі точки $M_2(-1{,}-1)$ має вигляд сідла, з нестійкими сепаратрисами у другій та четвертій четвертях і стійкими у першій та третій (Рис. 3.2.).

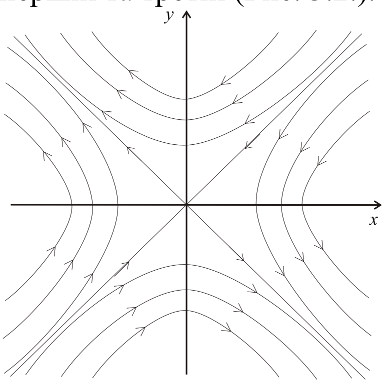

Рис. 2.

«Зшиваючи» два фазових портрети у єдиний, отримуємо наступне (Рис.3.3.).

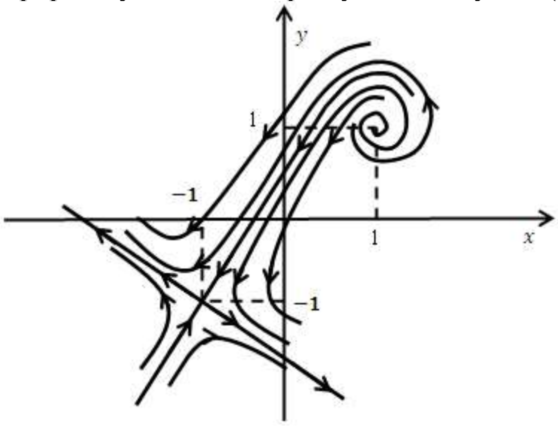

Рис. 3.

Приклади для самостійної роботи.

Побудувати фазові портрети нелінійних систем, використовуючи метод лінеаризації в околі особливих точок.

1. $\dot{x} = 2xy - 4y - 8$, $\dot{y} = -x^2 + 4y^2$,
2. $\dot{x} = x^2 - y^2 - 1$, $\dot{y} = 2y$,
3. $\dot{x} = x - y$, $\dot{y} = x^2 + y^2 - 2$,
4. $\dot{x} = x + y + 1$, $\dot{y} = y + \sqrt{1 + 2x^2}$,
5. $\dot{x} = x^2 - y$, $\dot{y} = \ln\left(1 - x + x^2\right) - \ln 3$,
6. $\dot{x} = \ln\left(2 - y^2\right)$, $\dot{y} = e^x - e^y$,
7. $\dot{x} = (2x - y)(x - 2)$, $\dot{y} = xy - 2$,
8. $\dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2$, $\dot{y} = arctg\left(x^2 + xy\right)$,
9. $\dot{x} = x^2 - y$, $\dot{y} = x^2 - (y - 2)^2$,
10. $\dot{x} = \ln \dfrac{y^2 - y + 1}{3}$, $\dot{y} = x^2 - y^2$,
11. $\dot{x} = \ln\left(1 - y + y^2\right)$, $\dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}$,
12. $\dot{x} = \sqrt{(x - y)^2 + 3} - 2$, $\dot{y} = e^{y^2 - x} - e$

Форма контролю: дистанційна, розв’язок задач до 20 лютого 2018 р.