

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ**  
**Кафедра теорії та технології програмування**

**«ЗАТВЕРДЖУЮ»**

Заступник декана  
з навчальної роботи

\_\_\_\_\_ Кашпур О.Ф.

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 року

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ<sup>1</sup>**

**ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ ТА МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА**

**для студентів денної форми навчання**

напрямок підготовки 6.040301 «Прикладна математика»  
(шифр і назва напрямку підготовки)

спеціалізація: системний аналіз

**КИЇВ – 2017**

---

<sup>1</sup> Робоча програма навчальної дисципліни є нормативним документом вищого навчального закладу і містить виклад конкретного змісту навчальної дисципліни, послідовність, організаційні форми її вивчення та їх обсяг, визначає форми та засоби поточного і підсумкового контролю.

Робоча програма навчальної дисципліни « Теорія алгоритмів та математична логіка» для студентів напряму підготовки 6.040301 «Прикладна математика» спеціалізації «Системний аналіз»

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2017 року – 20 с.

Розробники: доцент, доцент Зубенко Віталій Володимирович канд. фіз.-мат. наук,  
доцент

Робоча програма дисципліни «Теорія алгоритмів та математична логіка» затверджена на засіданні кафедри теорії та технології програмування

Протокол № 11 від \_\_\_\_\_ червня 2017 року

Завідувач кафедри

Нікітченко М.С.

\_\_\_\_\_  
(підпис)

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2017 року

Схвалено науково-методичною комісією факультету кібернетики

Протокол №\_\_ від « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2017 року

Голова науково-методичної комісії

Хусаїнов Д.Я.

\_\_\_\_\_  
(підпис)

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2017 року

## ВСТУП

Навчальна дисципліна «Теорія алгоритмів та математична логіка» є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр» з напрямку підготовки 6.040301 «Прикладна математика».

Дана дисципліна базова нормативна за спеціальністю «Прикладна математика» спеціалізації «Системний аналіз».

Викладається у 4 семестрі 2 курсу в обсязі – 120 год. (4 кредитів ECTS<sup>2</sup>) зокрема: лекції – 30 год., практичні заняття – 30 год., самостійна робота – 60 год. У курсі передбачено 2 змістових модулі 2 модульних контрольних роботи та 2 колоквиуми. Завершується дисципліна – заліком у 6 семестрі.

**Мета дисципліни** – засвоєння базових знань з основ математичної логіки та теорії алгоритмів, включаючи вивчення семантичних моделей логіки та їх можливості для опису предметних областей, систем пошуку виведень, формальних моделей алгоритмів та алгоритмічно обчислюваних функцій, питань обчислюваності, розв'язності та нерозв'язності.

**Завдання** – набуття компетенцій, знань, умінь та навиків на рівні новітніх досягнень у математичній логіці та теорії алгоритмів відповідно до кваліфікації фахівця з прикладної математики.

В результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

**знати:** основні поняття, засоби та методи математичної логіки і теорії алгоритмів, їх застосування в інформатиці й програмуванні; мови логіки та їх можливості для опису предметних областей; мати сучасні уявлення про основні методи пошуку доведень та засоби логічного виведення, про нетрадиційні логіки; основні формальні моделі алгоритмів та обчислюваних функцій; властивості рекурсивних та рекурсивних перелічних множин, рекурсивних та частково-рекурсивних предикатів, арифметичних множин та предикатів; мати сучасні уявлення про розв'язність, часткову розв'язність та нерозв'язність масових проблем.

**вміти:** описувати мовами 1-го порядку твердження стосовно тих чи інших предметних областей; встановлювати істинність та виконуваність, наявність логічного наслідку; встановлювати виразність та невиразність предикатів у моделях мови; проводити виведення в численнях гільбертівського типу та в секвенційних численнях; будувати формальні моделі алгоритмів та обчислюваних функцій, використовувати тезу Чорча; встановлювати розв'язність, часткову розв'язність та нерозв'язність масових проблем, встановлювати клас множини та предиката.

**Місце дисципліни.** Нормативна навчальна дисципліна «Математична логіка та теорія алгоритмів» є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр”.

**Зв'язок з іншими дисциплінами.** Дисципліна «Математична логіка та теорія алгоритмів» є базовою для засвоєння матеріалу нормативних дисциплін "Системне програмування", "Комп'ютерна алгебра", "Методи обчислень", "Теорія та методи прийняття рішень", "Інформаційні технології", "Розпізнавання образів", низки спецкурсів відповідного напрямку.

---

<sup>2</sup> кредитів ECTS – кредит кратний 36 годинам (Наприклад, 3 кредити ECTS відповідає 108 год.).

## Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти.

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою.

У змістовий модуль 1 (ЗМ1) входять теми 1- 8, у змістовий модуль 2 (ЗМ2) – теми 9-17. Обов'язковим для заліку є отримання студентом протягом семестру не менше 21 балу.

### Оцінювання за формами контролю<sup>3</sup>: (як приклад)

	ЗМ1		ЗМ2	
	Min. – 10 балів	Max. – 30 бали	Min. – 11 балів	Max. – 30 балів
Модульна контрольна робота	5	15	5	15
Колоквіум	5	10	6	10
Активна робота	0	5	0	5

<sup>3</sup> – мінімальна/максимальна оцінку, яку може отримати студент.  
<sup>1</sup> – мінімальна/максимальна залікова кількість робіт чи завдань.

Для студентів, які набрали сумарно меншу кількість балів ніж *критично-розрахунковий мінімум – 21 балів* для допуску до заліку/іспиту обов'язково повинні перескласти контрольні роботи. Студент має право на одне перескладання контрольної роботи із можливістю отримання максимально 10 балів за кожну. Термін перескладання визначається викладачем.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються у відповідності до „Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу” від 1 жовтня 2010 року.

### При простому розрахунку отримаємо:

	Змістовий модуль1	Змістовий модуль2	Залік	Підсумкова оцінка
Мінімум	15	14	31	60
Максимум	30	30	40	100

### При цьому, кількість балів:

- **1-34** відповідає оцінці «незадовільно» з обов'язковим повторним вивченням дисципліни;
- **35-59** відповідає оцінці «незадовільно» з можливістю повторного складання;
- **60-64** відповідає оцінці «задовільно» («достатньо»);
- **65-74** відповідає оцінці «задовільно»;
- **75 - 84** відповідає оцінці «добре»;
- **85 - 89** відповідає оцінці «добре» («дуже добре»);
- **90 - 100** відповідає оцінці «відмінно».

### Шкала відповідності (за умови заліку)

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою
90 – 100	Зараховано
85 – 89	
75 – 84	
65 – 74	
60 – 64	
1 – 59	не зараховано

<sup>3</sup> Див. Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу від 1 жовтня 2010 року, а також Розпорядження ректора «Про методику розрахунку підсумкової оцінки дисциплін, які читаються два і більше семестри» від 29 вересня 2010 року

## **ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

### ***Змістовий модуль 1. Основи математичної логіки***

#### **Тема 1. Основні поняття логіки. (4 год.)**

Предмет математичної логіки. Виникнення та розвиток логіки. Софізми. Парадокси. Основні закони традиційної логіки. Предикати, композиції над предикатами. Поняття числення, формальні системи. Поняття логічної системи.

#### **Тема 2. Пропозиційна логіка. (8 год.)**

Пропозиційна логіка. Логічні зв'язки, їх властивості. Мова пропозиційної логіки. Тавтології. Логічний наслідок, логічна еквівалентність. Пропозиційне числення, його коректність і повнота. Теорема тавтології..

#### **Тема 3. Пропозиційне секвенційне числення. Метод резолюцій. (6 год.).**

Пропозиційне секвенційне числення, його коректність і повнота. Метод резолюцій пропозиційної логіки.

#### **Тема 4. Класичні логіки 1-го порядку. (8 год.)**

Класичні логіки 1-го порядку, їх моделі та мови. Виразність в АС. Мова арифметики. Істинність та виконуваність формул, всюди істинність. Тавтології. Тавтологічний, логічний, слабкий логічний наслідки. Еквівалентні перетворення формул, теореми еквівалентності та рівності. Пренексна форма.

#### **Тема 5. Гомоморфізми, ізоморфізми та автоморфізми АС. Елементарна еквівалентність. Невизначність предикатів. (8 год.)**

Гомоморфізми, ізоморфізми та автоморфізми АС Теореми про гомоморфізм та ізоморфізм. Елементарна еквівалентність логік 1-го порядку, зв'язок її з ізоморфізмом. Доведення невизначності предикатів за допомогою автоморфізмів.

#### **Тема 6. Теорії 1-го порядку. (8 год.)**

Теорії 1-го порядку, їх приклади. Формальна арифметика. Теорема тавтології. Теорема дедукції. Несуперечливість та повнота теорій 1-го порядку. Перелічність та розв'язність теорій 1-го порядку. Теорема Гьоделя про повноту. Теорема компактності. Теореми Льовенгейма-Сколема. Категоричність теорій 1-го порядку. Перелічність та розв'язність теорій 1-го порядку.

#### **Тема 7. Секвенційні та резолюційні числення логік 1-го порядку.(8 год.)**

Секвенційні числення класичних логік 1-го порядку. Метод модельних множин. Коректність та повнота числень 1-го порядку, її наслідки Інтерполяційна теорема. Семантична і синтаксична визначність, теорема про визначність.

#### **Тема 8. Неокласичні логіки 1-го порядку. (8 год.)**

Квазіарні предикати та функції. Композиція реномінації. Реномінативна пропозиційна логіка. Теорема повноти. Числення предикатів, секвенційне та резолюційне неокласичні числення логіки 1-го порядку та їхня повнота.

## ***Змістовий модуль 2. Основи теорії алгоритмів***

### **Тема 9. Формальні моделі алгоритмів. МНР-програми . (8 год.)**

Процедури та алгоритми Алгоритмічно обчислювані функції. Формальні моделі алгоритмів. МНР-програми. Приклади МНР-обчислень.

### **Тема10. Обчислювальність за Тьюрінгом . (8 год.)**

Машини Тьюрінга, МТ-обчислюваність. Приклади МТ-обчислень.

### **Тема 11. Обчислювальність за Постом. Формальні граматики. (8 год.)**

Системи Поста. Обчислюваність за Постом. Приклади обчислень за Постом. Формальні граматики та їхня класифікація

### **Тема 12. Частково рекурсивні функції (ЧРФ). Квазіарні ЧРФ. Примітивні програмні алгебри. Теза Чорча. (10 год.)**

Частково рекурсивні, рекурсивні, примітивно рекурсивні функції. Алгебри  $n$ -арних РФ та ПРФ. Теореми про підсумовування, мультиплікацію, обмежену мінімізацію. Програмовані функції. Примітивні програмні алгебри квазіарних та  $n$ -арних функцій. Кодування, нумерації. Універсальні класи алгоритмів. Канторові нумерації. Функція Гьоделя. Еквівалентність формальних моделей алгоритмів. Теза Чорча та її значення.

### **Тема 13. Нумерації. Універсальні функції. (8 год.)**

Нумерації  $n$ -арних ЧРФ та ПРФ Обчислювані та Гьодельові нумерації.  $s$ - $m$ - $n$ -теорема. Універсальні функції, їх зв'язок з нумераціями. Теореми про універсальні функції. Універсальні ЧРФ, МТ, МНР-програма.

### **Тема 14. Рекурсивні та рекурсивно перелічні множини та предикати.**

**(10 год.)**

Рекурсивно перелічні, рекурсивні та примітивно рекурсивні множини, їх властивості. Теорема Поста. Еквівалентні визначення РПМ. Нумерації РПМ. Частково рекурсивні, рекурсивні та примітивно рекурсивні предикати, їх властивості. Теорема Кліні про нормальну форму. Алгоритмічна нерозв'язність проблем зупинки та самозастосовності. Наслідки.

### **Тема 15. Формальна арифметика. Формальна арифметика.**

#### **Арифметичні функції. Нерозв'язність арифметики. Теореми Гьоделя про неповноту формальної арифметики. (12 год.)**

Формальна арифметика. Арифметичність ЧРФ і РПМ. Арифметична ієрархія. Алгоритм Тарського-Куратовського. Теорема Тарського. Теореми Гьоделя про неповноту та їхнє значення. Нерозв'язність формальної арифметики.

**СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**  
**ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І СЕМІНАРСЬКИХ ЗАНЯТЬ**

№ лекції	Назва лекції	Кількість годин		
		Лекції	Практ. Заняття	Сам. р-та
<b>Змістовний модуль 1. Основи математичної логіки</b>				
1.	<b>Тема 1.</b> Основні поняття логіки.	2		2
2.	<b>Тема 2.</b> Пропозиційна логіка.	2	2	4
3.	<b>Тема 3.</b> Пропозиційне секвенційне числення. Метод резолюцій.	2	2	2
4.	<b>Тема 4.</b> Класичні логіки 1-го порядку.	2	2	4
5.	<b>Тема 5.</b> Гомоморфізми АС. Елементарна еквівалентність. Невизначеність предикатів	2	2	4
6.	<b>Тема 6.</b> Перелічність та розв'язність теорій 1-го порядку. Теорема Гьоделя про повноту.	2	2	4
7.	<b>Тема 7.</b> Секвенційні та резолюційні числення логік 1-го порядку .	2	2	4
8	<b>Тема 8.</b> Неокласичні логіки 1-го порядку.	2	4	2
Модульна контрольна робота № 1				
Всього по модулю 1		16	16	26
<b>Змістовний модуль 2. Основи теорії алгоритмів</b>				
9	<b>Тема 9.</b> Формальні моделі алгоритмів. МНР-програми.	2	2	4
10.	<b>Тема 10.</b> Обчислювальність за Тьюрінгом.	2	2	4
11.	<b>Тема 11.</b> Обчислювальність за Постом. Формальні граматики.	2	2	4
12.	<b>Тема 12.</b> Частково рекурсивні функції (ЧРФ). Квазіарні ЧРФ. Примітивні програмні алгебри. Теза Чорча.	2	2	6
13.	<b>Тема 13.</b> Нумерації. Універсальні функції.	2	2	4
14.	<b>Тема 14.</b> Рекурсивні та рекурсивно перелічні множини та предикати.	2	2	6
15.	<b>Тема 15.</b> Формальна арифметика. Арифметичні функції. Нерозв'язність арифметики. . Теорема Гьоделя про неповноту формальної арифметики.	2	2	6
Модульна контрольна робота № 2				
Всього по модулю 2		14	14	34
<b>ВСЬОГО</b>		30	30	60

Загальний обсяг– **120 год.**, у тому числі:

Лекцій – **30 год.**,

Практичних занять– **30 год.**,

Самостійна робота – **60 год.**

## **ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1**

### **Основи математичної логіки**

**Тема 1.** Основні поняття логіки (4 год.).

**Лекція 1.** Основні поняття логіки (2 год.)

Предмет математичної логіки. Виникнення та розвиток логіки. Основні закони традиційної логіки. Софізми. Парадокси. Предикати, композиції над предикатами. Поняття числення, формальні системи. Поняття логічної системи.

**Завдання для самостійної роботи.** (2 год.)

Розвиток основних понять логіки.

**Рекомендована література:** [2, 6, 7, 17, 23, 25].

**Тема 2.** Пропозиційна логіка (8 год.).

**Лекція 2.** Пропозиційна логіка. (2 год.)

Логічні зв'язки, їх властивості. Мова пропозиційної логіки. Тавтології. Логічний (тавтологічний) наслідок, логічна (тавтологічна) еквівалентність. Відношення логічного наслідку для множин формул. Пропозиційне числення, його коректність і повнота. Теорема тавтології.

**Практичне заняття 1.** Пропозиційна логіка. Виведення в пропозиційному численні (2 год.)

1. Опитування та обговорення лекційного матеріалу.

2. Розв'язання задач на встановлення тавтологій, логічного наслідку, логічної еквівалентності.

3. Розв'язання задач на побудову виведень в пропозиційному численні. Побудова виведень з використанням теореми тавтології.

**Завдання для самостійної роботи.** (4 год.)

Розв'язання задач на побудову виведень в пропозиційному численні. Побудова виведень з використанням теореми тавтології.

**Рекомендована література:** [2, 6, 7, 17, 23, 25].

**Тема 3.** Пропозиційне секвенційне числення. Метод резолюцій. (6 год.)

**Лекція 3.** Пропозиційне секвенційне числення. Метод резолюцій. (2 год.)

Перевірка істинності формул та пошук доведень теорем. Метод резолюцій пропозиційної логіки. Аксиоматичні логічні системи Генценівського типу. Секвенції. Секвенційні форми, дерева. Семантичні таблиці. Пропозиційне секвенційне числення, його коректність і повнота.

**Практичне заняття 2.** Резолютивні виведення в пропозиційній логіці. Виведення в пропозиційному секвенційному численні (2 год.)

1. Опитування та обговорення лекційного матеріалу.

2. Розв'язання задач на побудову резолютивних виведень в пропозиційній логіці.

3. Розв'язання задач на побудову виведень в пропозиційному секвенційному численні.

**Завдання для самостійної роботи.** (2 год.)

Теорема тавтології, її наслідки. Розв'язність пропозиційного числення.

Метод модельних множин. Правило перетину. Теорема Генцена про елімінацію перетинів.

**Рекомендована література:** [2, 3, 5, 7, 8, 17, 23, 25].

#### **Тема 4.** Логіки 1-го порядку (8 год.).

##### **Лекція 4.** Логіки 1-го порядку. (2 год.)

Класичні логіки 1-го порядку, їх моделі та мови. Виразність в АС. Мова арифметики. Істинність та виконуваність формул, всюди істинність. Тавтології. Тавтологічний, логічний, слабкий логічний наслідки. Еквівалентні перетворення формул, теореми еквівалентності та рівності. Пренексна форма.

**Практичне заняття 3.** . Всюди істинність. Логічний наслідок. Нормальні форми (2 год.)

1. Опитування та обговорення лекційного матеріалу.
2. Встановлення всюди істинності, логічного та слабого логічного наслідку.
3. Розв'язання задач на зведення формул до пренексної нормальної форми

##### **Завдання для самостійної роботи** (4 год.)

Арифметичні властивості. Скінченно-істинні формули. Властивості відношення логічного наслідку для множин формул 1-го порядку. Зведення формул до пренексної нормальної форми.

*Рекомендована література:* [2, 6–8, 11, 16–18, 20, 25].

**Тема 5.** Гомоморфізми, ізоморфізми та автоморфізми АС. Елементарна еквівалентність. Невиразність предикатів (8 год.).

**Лекція 5.** Гомоморфізми, ізоморфізми та автоморфізми АС. Невиразність предикатів.

(2 год.)

Гомоморфізми, ізоморфізми та автоморфізми АС . Теореми про гомоморфізм та ізоморфізм. Елементарна еквівалентність логік 1-го порядку, зв'язок її з ізоморфізмом. Доведення невивражності предикатів за допомогою автоморфізмів.

**Практичне заняття 4.** Гомоморфізми, ізоморфізми та автоморфізми АС. Метод автоморфізмів. 2 год.

1. Опитування та обговорення лекційного матеріалу.
2. Встановлення гомоморфізму, ізоморфізму, елементарної еквівалентності АС. Опис автоморфізмів АС.

##### **Завдання для самостійної роботи** (4 год.)

Доведення невивражності предикатів за допомогою автоморфізмів.

*Рекомендована література:* [2, 6–8, 11, 16–18, 20, 25].

#### **Тема 6.** Теорії 1-го порядку (8 год.).

##### **Лекція 6.** Теорії 1-го порядку. (2 год.)

Теорії 1-го порядку, їх приклади. Формальна арифметика. Теорема тавтології. Теорема дедукції. Несуперечливість та повнота теорій 1-го порядку. Перелічність та розв'язність теорій 1-го порядку. Теорема Гьоделя про повноту. Теорема компактності. Теореми Льовенгейма-Сколема. Категоричність теорій 1-го порядку. Перелічність та розв'язність теорій 1-го порядку.

**Практичне заняття 5.** Виведення в теоріях 1-го порядку (2 год.)

1. Опитування та обговорення лекційного матеріалу.
2. Розв'язання задач на побудову виведень в теоріях 1-го порядку.

##### **Завдання для самостійної роботи** (4 год.)

Теорема редукції. Розв'язання задач на побудову виведень в теоріях 1-го порядку.

*Рекомендована література:* [2, 4, 6–8, 17, 18, 20, 25].

**Тема 7.** Секвенційні та резолюційні числення логіки 1-го порядку. (8 год.)

**Лекція 7.** Секвенційні та резолюційні числення логіки 1-го порядку. (2 год.)

Секвенційне числення. Теорема про повноту Сколемівська форма. Теорема Ербрана. Уніфікатори термів. Правило резолюції. Теорема про повноту методу резолюції.

**Практичне заняття 6.** Виведення в секвенційному та резолюційному численнях 1-го порядку (2 год.)

1. Опитування та обговорення лекційного матеріалу.

2. Побудова виведень в секвенцій та резолюційних численнях класичних логік 1-го порядку.

**Завдання для самостійної роботи** (4 год.) Метод модельних множин. Інтерполяційна теорема. Теорема Генцена про елімінацію перетинів для логік 1-го порядку. Побудова виведень в резолюційних численнях логік 1-го порядку.

*Рекомендована література:* [2, 7, 8, 17, 25].

**Тема 8.** Неокласичні логіки 1-го порядку. (8 год.)

**Лекція 8.** Квазіарні предикати та функції. Композиція реномінації. Реномінативна пропозиційна логіка. Теорема повноти. Числення предикатів, секвенційне та резолюційне неокласичні числення логіки 1-го порядку та їхня повнота

**Практичне заняття 7.** Виведення в секвенційних численнях неокласичної логіки (2 год.)

1. Опитування та обговорення лекційного матеріалу.

2. Побудова виведень в секвенційних численнях.

**Завдання для самостійної роботи** (2 год.) Побудова виведень в секвенційних численнях.

*Рекомендована література:* [2, 7, 8, 17, 25].

**Практичне заняття 8.** Виведення в резолюційних численнях (2 год.)

1. Опитування та обговорення лекційного матеріалу.

2. Побудова виведень в резолюційних численнях.

**Завдання для самостійної роботи** (2 год.) Побудова виведень в резолюційних численнях.

*Рекомендована література:* [2, 7, 8, 17, 25].

**Типове завдання модульної контрольної роботи №1.**

1. Доведіть без використання ТТ:  $\neg A \rightarrow \neg A \rightarrow B$ .

2. Доведіть чи спростуйте в пропозиційному секвенційному численні:

$\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow (A \& B \rightarrow C)$ .

3. Доведіть чи спростуйте методом резолюцій пропозиційної логіки:

$\{A \rightarrow C, \neg D \rightarrow B, A \vee \neg B\} \models D \vee C$ .

4. Вкажіть формулу  $L_{ar}$ , що виражає предикат “не існує простих чисел, кратних 4”.

5. Чи вірно: а)  $\models \exists x(P \& Q) \rightarrow \exists x P \& Q$ ? б)  $\models \exists x P \& Q \rightarrow \exists x(P \& Q)$ ? в)  $\forall x P \rightarrow \exists x Q \models \forall x P \rightarrow Q$ ?

6. Чи виразні в АС ( $\mathbb{N}$ ;  $y=x+1, =$ ) предикати: а) “ $x=0$ ”? б) “ $x=1$ ”? в) “ $x=2$ ”?

7. Доведіть в ЧП 1-го порядку:  $\neg \forall x P \vee \forall x Q \rightarrow \forall x(P \vee Q)$ .

8. В секвенційному численні доведіть чи спростуйте:  $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x))$ .

## Типові питання колоквиуму №1 (модуль 1)

01. Теорема тавтології. Наслідки.
02. Мова арифметики. Арифметичні предикати, множини та функції.
03. Істинність та виконуваність формул. Всюди істинні формули.
04. Теореми про гомоморфізм та ізоморфізм.
05. Теорема Гьоделя про повноту.

## Контрольні запитання до змістового модуля 1.

1. Софізми. Парадокси.
2. Основні закони традиційної логіки.
3. Предикати, композиції над предикатами. Логічні системи. Істинний, виконуваний предикат.
4. Числення, формальні системи. Алгоритми, відносні алгоритми.
5. Алгоритмічно обчислювані функції. Алгоритмічна перелічність, розв'язність.
6. Мова пропозиційної логіки. Тавтології.
7. Відношення логічного наслідку, логічної еквівалентності пропозиційних формул.
8. Відношення логічного наслідку для множин ПФ.
9. Пропозиційне числення. Теорема тавтології.
10. Метод резолюцій ПЛ. Визначення резольвенти диз'юнктивів. Резолютивне виведення.
11. Секвенції. Секвенційні форми, дерева.
12. Пропозиційне секвенційне числення. Теореми коректності та повноти.
13. Мова реномінативної логіки. Нормальні форми формул. Субтавтології.
14. Алфавіт класичної мови 1-го порядку. Сигнатура мови. Визначення терма, формули.
15. Модель мови 1-го порядку. Алгебри (алгебраїчні системи) збудованою сигнатурою.
16. Зв'язане та вільне входження змінної в формулу. Замкнені терми, замкнені формули.
17. Мова арифметики. Мова теорії множин.
18. Визначення всюди істинної формули, виконуваної формули.
19. Тавтології мови 1-го порядку. Тавтологічний наслідок, тавтологічна еквівалентність.
20. Відношення логічного та слабкого логічного наслідку, логічної еквівалентності.
21. Теорема еквівалентності. Теореми рівності для термів та формул.
22. Пренексна форма. Пренексна формула. Пренексні операції. Теорема про пренексну форму.
23. Визначення предикату, множини, функції, виразних в АС.
24. Визначення арифметичного предикату, арифметичної множини, арифметичної функції.
25. Відношення логічного наслідку для множин формул.
26. Визначення гомоморфізму, ізоморфізму АС. Автоморфізм АС.
27. Теореми про гомоморфізми та про ізоморфізм. Наслідки.
28. Елементарна еквівалентність АС. Зв'язок з ізоморфізмом.
29. Теорема про виразність. Метод автоморфізмів для доведення невиразності предикатів у АС.
30. Визначення теорії 1-го порядку. Множина логічних аксіом та множина правил виведення.
31. Числення предикатів 1-го порядку.
32. Множина власних аксіом формальної арифметики.
33. Модель теорії 1-го порядку. Теорема істинності.
34. Теорема тавтології та її наслідки.
35. Теорема дедукції.
36. Визначення несуперечливої теорії 1-го порядку, повної (максимальної) теорії 1-го порядку.
37. Поняття розв'язності, перелічності теорії 1-го порядку. Теорема розв'язності.
38. 1-е та 2-е формулювання теореми Гьоделя про повноту.
39. Теореми Льовенгейма-Сколема.
40. Категоричність теорій 1-го порядку.  $\alpha$ -категоричність. Теорема Лося-Воота.
41. Секвенційні числення класичних логік 1-го порядку. Базові секвенційні форми.
42. Теореми коректності та повноти для секвенційних числень 1-го порядку.
43. Наслідки теореми повноти. Теорема компактності.

## **ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2**

### **Основи теорії алгоритмів**

**Тема 9.** Формальні моделі алгоритмів . МНР-програми (9 год.).

**Лекція 9.** Формальні моделі алгоритмів. МНР-програми (2 год.)

Процедури та алгоритми. Алгоритмічно обчислювані функції. Алгоритмічна перелічність, розв'язність. Формальні моделі алгоритмів. МНР-програми; МНР-обчислюваність.

**Практичне заняття 9.** МНР-програми (2 год.)

1. Опитування та обговорення лекційного матеріалу.
2. Розв'язання задач на побудову МНР-програм.

**Завдання для самостійної роботи.** (5 год.)

Процедури та алгоритми. МНР-програми. Розв'язання задач на побудову МНР-програм.

*Рекомендована література:* [1, 4–7, 9, 11, 13, 15, 19, 21, 27].

**Тема 10.** Обчислювальність за Тьюрінгом . (9 год.).

**Лекція 10.** Машини Тьюрінга. (2 год.)

Машини Тьюрінга, МТ-обчислюваність. Приклади МТ-обчислень.

**Практичне заняття 10.** Машини Тьюрінга (2 год.)

1. Опитування та обговорення лекційного матеріалу.
2. Розв'язання задач на побудову машин Тьюрінга.

**Завдання для самостійної роботи.** (3 год.)

Різновидності машин Тьюрінга. Розв'язання задач на побудову машин Тьюрінга.

*Рекомендована література:* [1, 4–7, 9, 11, 13, 15, 19, 21].

**Тема 11.** Обчислювальність за Постом. Формальні граматики. (9 год.).

**Лекція 11.** Системи Поста. Формальні граматики. (2 год.)

Системи Поста. Обчислюваність за Постом. Приклади обчислень за Постом. Формальні граматики та їхня класифікація.

**Практичне заняття 11.** Системи Поста. (2 год.)

1. Опитування та обговорення лекційного матеріалу.
2. Розв'язання задач на побудову систем Поста..

**Завдання для самостійної роботи** (5 год.)

Різновидності машин Тьюрінга. Розв'язання задач на побудову систем Поста.

*Рекомендована література:* [1, 4–7, 9, 11, 13, 15, 19, 21].

**Тема 12.** Частково рекурсивні функції. Програмовані функції. Теза Чорча. (9 год.).

**Лекція 12.** Частково рекурсивні функції. Теза Чорча. (2 год.)

Частково рекурсивні, рекурсивні, примітивно рекурсивні функції. Алгебри  $n$ -арних ЧРФ та ПРФ. Теореми про підсумовування, мультиплікацію, обмежену мінімізацію.. Примітивні програмні алгебри. Кодування, нумерації. Універсальні класи алгоритмів. Канторові нумерації. Функція Гьоделя. Еквівалентність формальних моделей алгоритмів. Теза Чорча та її значення.

**Практичне заняття 12.** Частково рекурсивні та примітивно-рекурсивні функції (2 год.)

1. Опитування та обговорення лекційного матеріалу.
2. Розв'язання задач на побудову операторних термів алгебр ПРФ та ЧРФ.
3. Розв'язання задач на кодування МНР-програм, МТ, ОТ.

**Завдання для самостійної роботи.** (5 год.)

Властивості ПРФ, ЧРФ, РФ. Функція Гьоделя та її основна властивість. Теорема про елімінацію примітивної рекурсії Еквівалентність формальних моделей алгоритмів та АОФ.

*Рекомендована література:* [1, 3–5, 7, 9, 15, 19, 21].

**Тема 13.** Нумерації. Універсальні функції (9 год.).

**Лекція 13.** Нумерації ЧРФ.  $s$ - $m$ - $n$ -теорема (2 год.)

Нумерації  $n$ -арних ЧРФ та ПРФ Обчислювані та Гьодельові нумерації.  $s$ - $m$ - $n$ -теорема. Універсальні функції, їх зв'язок з нумераціями. Теореми про універсальні функції. Універсальні ЧРФ, МТ, МНР-програма.

**Практичне заняття 13.** Нумерації.  $s$ - $m$ - $n$ -теорема (2 год.)

1. Опитування та обговорення лекційного матеріалу.
2. Побудова нумерацій МНР-програм, МТ, ЧРФ, формул мови 1-го порядку.

Приклади використання  $s$ - $m$ - $n$ -теореми.

**Завдання для самостійної роботи.** (5 год.)

Обчислювані нумерації. Гьодельові нумерації Універсальні алгоритми. Універсальні функції.

*Рекомендована література:* [1, 4, 5, 7, 9, 19, 21].

**Тема 14.** Рекурсивні та рекурсивно перелічні множини та предикати (6 год.).

**Лекція 14.** Рекурсивні та рекурсивно перелічні множини та предикати (2 год.)

Рекурсивно перелічні, рекурсивні та примітивно рекурсивні множини, їх властивості. Теорема Поста. Еквівалентні визначення РПМ. Нумерації РПМ. Частково рекурсивні, рекурсивні та примітивно рекурсивні предикати, їх властивості. Теорема Кліні про нормальну форму. Алгоритмічна нерозв'язність проблем зупинки та самозастосовності. Наслідки.

**Практичне заняття 14.** Властивості РМ, РПМ, РП, ЧРП (2 год.)

1. Опитування та обговорення лекційного матеріалу.
2. Розв'язання задач на властивості РМ, РПМ, РП, ЧРП.
3. Розв'язання задач на властивості РП, ЧРП із використанням алгоритмічної нерозв'язності проблем зупинки та самозастосовності.

**Завдання для самостійної роботи** (6 год.)

Властивості РМ, РПМ, РП, ЧРП. Замкненість ПРП, РП та ЧРП відносно логічних операцій. Теорема Сколема. Співвідношення між класами функцій та їх графіків. Розв'язання задач на властивості РП, ЧРП із використанням алгоритмічної нерозв'язності проблем зупинки та самозастосовності. Комбінаторні проблеми для слів та їхня нерозв'язність.

**Тема 15.** Формальна арифметика. (6 год.).

**Лекція 15.** Формальна арифметика (2 год.)

Формальна арифметика. Арифметичність ЧРФ і РПМ. Арифметична ієрархія. Алгоритм Тарського-Куратовського. Теорема Тарського.

**Практичне заняття 15.** Властивості РМ, РПМ, РП, ЧРП (2 год.)

1. Опитування та обговорення лекційного матеріалу.

2. Розв'язання задач на арифметичність ЧРФ і РПМ.

### Завдання для самостійної роботи (6 год.)

Арифметична ієрархія. Алгоритм Тарського-Куратовського. Розв'язання задач на арифметичність ЧРФ і РПМ.

*Рекомендована література:* [1, 3–5, 7, 9, 11, 19].

### Типове завдання модульної контрольної роботи № 2

1. МНР-програма для  $f(x, y) = x + 3y$
2. Машина Тьюрінга для функції  $f(x, y) = \text{sg}(x+y)$
3. Система Поста для  $f(x) = x^4 - x$
4. ОТ алгебри EQ-ЧРФ для  $f(x, y) = \lceil \log_x y \rceil$
5. Чи існує РФ  $s$ : а)  $\forall x \forall y \ E_{s(x,y)} = (E_{2x} \cap D_{3y}) \cup \{2x, x+y\}$ ? б)  $\forall x \forall y \forall z \ D_{s(x,y,z)} = E_x \setminus (D_y \cap \bar{D}_z)$ ?

### Контрольні запитання до змістового модуля 2.

1. МНР. МНР-програми. МНР-обчислюваність.
2. Машини Тьюрінга. МТ-обчислюваність.
3. Системи Поста. Обчислюваність за Постом.
4. Комбінаторні системи, формальні граматики.
5. Операції суперпозиції, примітивної рекурсії та мінімізації  $n$ -арних функцій на  $N$
6. Визначення ПРФ, ЧРФ та РФ.
7. Алгебри  $n$ -арних ЧРФ та ПРФ. Операторні терми.
8. Теореми про підсумовування, мультиплікацію, обмежену мінімізацію.
9. Програмовані функції. ППА.
10. Теза Чорча. Значення тези Чорча.
11. Кодування. Нумерації, ефективні нумерації.
12. Універсальні класи алгоритмів.
13. Канторові нумерації.
14. Функція Гьоделя. Елімінація примітивної рекурсії.
15. Кодування та нумерації формул, МНР-програм, МТ, операторних термів.
16. Стандартні нумерації  $n$ -арних ЧРФ та ПРФ.
17. Обчислювані та Гьодельові нумерації.
18.  $s$ - $m$ - $n$ -теорема.
19. Універсальні функції, їх зв'язок з нумераціями.
20. Теореми про універсальні функції.
21. Універсальні ЧРФ, МТ, МНР-програма.
22. Визначення ПРМ, РМ, РПМ.
23. Властивості РМ, РПМ. Теорема Поста.
24. Еквівалентні визначення РПМ.
25. Нумерації РПМ.
26. Частково рекурсивні та рекурсивні предикати.
27. Нерозв'язність проблем зупинки та самозастосовності.
28. Наслідки теореми про нерозв'язність проблеми самозастосовності.
29. Співвідношення між класами ПРМ, РМ, РПМ; між класами ПРП, РП, ЧРП.
30. Замкненість ПРМ, РМ, РПМ відносно теоретико-множинних операцій.
31. Замкненість ПРП, РП, ЧРП відносно логічних операцій.

## Перелік питань до заліку

01. Основні поняття математичної логіки. Висловлення, предикати. Логічні системи. Поняття числення, формальні системи.
02. Поняття алгоритму. Алгоритмічна перелічність, розв'язність. Відносні алгоритми.
03. Композиції пропозиційного рівня. Мова пропозиційної логіки.
04. Тавтології. Логічний (тавтологічний) наслідок, логічна (тавтологічна) еквівалентність. Логічний наслідок для множин формул.
05. Пропозиційне числення. Теорема тавтології. Коректність, повнота і розв'язність пропозиційного числення.
06. Метод резолюцій для пропозиційної логіки.
07. Поняття секвенції. Секвенційні форми, секвенційні дерева. Пропозиційне секвенційне числення, його коректність і повнота.
08. Класичні логіки 1-го порядку. Мови 1-го порядку. Терми, формули. Вільні та зв'язані змінні. Замкнені формули.
09. Інтерпретації (моделі) мов 1-го порядку. Алгебраїчні системи (АС). Виразність предикатів, множин та функцій в АС.
10. Мова арифметики. Арифметичні предикати, множини та функції. Істинні арифметичні формули.
11. Істинність та виконуваність формул. Всюди істинні формули. Тавтології. Тавтологічний, логічний та слабкий логічний наслідок, логічна еквівалентність.
12. Еквівалентні перетворення формул. Теорема еквівалентності та рівності. Пренексна форма.
13. Гомоморфізми, ізоморфізми та автоморфізми АС. Теорема про гомоморфізм та ізоморфізм.
14. Елементарна еквівалентність, зв'язок з ізоморфізмом. Теорема виразності. Доведення невиразності предикатів в АС за допомогою автоморфізмів.
15. Теорії 1-го порядку ( $Th_1$ ). Формальна арифметика  $Ar$ . Поняття моделі  $Th_1$ . Теорема істинності.
16. Теорема тавтології в  $Th_1$ . Приклади виведень в  $Th_1$ . Теорема дедукції.
17. Поняття несуперечливості та максимальності (повноти)  $Th_1$ . Теорема Лінденбаума.
18. Перелічність та розв'язність  $Th_1$ . Теорема про розв'язність.
19. Теорема Гьоделя про повноту. Теорема компактності. Теорема Льовенгейма-Сколема  $\square \square$
20. Категоричність теорій 1-го порядку. Теорема Лося-Воота.
21. Секвенційні числення логік 1-го порядку, їх коректність і повнота.
22. МНР, МНР-обчислюваність.
23. Машини Тьюрінга, МТ-обчислюваність.
24. Системи Поста. Обчислюваність за Постом.
25. Обчислюваність  $n$ -арних функцій на  $N$ . ПРФ, ЧРФ та РФ. Алгебри  $n$ -арних ЧРФ та ПРФ, їх ОТ.
26. Теорема про підсумовування, мультиплікацію, обмежену мінімізацію.
27. Еквівалентність формальних моделей алгоритмів. Теза Чорча, її значення.
28. Кодування. Нумерації, ефективні нумерації. Універсальні класи алгоритмів.
29. Канторові нумерації. Функція Гьоделя. Елімінація примітивної рекурсії.
30. Кодування та нумерації МНР-програм, МТ, операторних термів відповідних алгебр.
31. Стандартні нумерації  $n$ -арних ЧРФ та ПРФ.  $s$ - $m$ - $n$ -теорема.
32. Обчислювані нумерації. Гьодельові нумерації. Універсальні функції, їх зв'язок з нумераціями. Теорема про універсальні функції. Універсальна ЧРФ, універсальна МТ, універсальна МНР-програма.
33. ПРМ, РМ, РПМ, їх властивості. Теорема Поста. Еквівалентні визначення РПМ. Нумерації РПМ.
34. ЧРП, РП та ПРП, їх властивості.
35. Нерозв'язність проблем зупинки та самозастосовності. Наслідки.
36. Арифметичність ЧРФ, РПМ та ЧРП. Теорема Тарського. Теорема Гьоделя про неповноту, їх значення.

37. Арифметична ієрархія. Алгоритм Тарського-Куратовського.

## *Рекомендована література*

### **Основна**

1. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. – М., 1983.
2. Клини С. Математическая логика. – М.: Наука, 1973.
3. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М., 1975.
4. Лісовик Л.П., Шкільняк С.С. Теорія алгоритмів. – К., 2003.
5. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – М.: Наука, 1965.
6. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М., 1976.
7. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008.
8. Шкільняк С.С. Математична логіка: приклади і задачі. – К., 2007.
9. Шкільняк С.С. Теорія алгоритмів. Приклади й задачі. – К., 2012.

### **Додаткова**

10. Андон Ф.И., Яшунин А.Е., Резниченко В.А. Логические модели интеллектуальных информационных систем. – К., 1999.
11. Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л. Алгебра, языки, программирование. – К., 1978.
12. Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки. – К., 1997.
13. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А. та ін. Основи дискретної математики. – К., 2002.
14. Клини С. Введение в метаматематику. – М., 1957.
15. Лісовик Л.П., Редько В.Н. Алгоритмы и формальные системы. – К., 1981.
16. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М., 1970.
17. Непейвода Н.Н. Прикладная логика. – Новосибирск, 2000.
18. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Основи математичної логіки. – К., 2006.
19. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. – М., 1972.
20. Справочная книга по математической логике / Под ред. Дж. Барвайса: В 4 т. – М., 1982–1983.
21. Успенский В.А., Семенов А.Л. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. – М., 1987.
22. Фейс Р. Модальная логика. – М., 1974.
23. Шенфилд Дж. Математическая логика. – М., 1975.
24. Шкільняк С.С. Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках // Пробл. програмування. – 2010. – № 1.
25. Шкільняк С.С. Математична логіка. Електронний навчальний посібник // Репозитарій електронних ресурсів КНУ. – 2012. – <http://195.68.210.50/moodle>.
26. Belnap N., Steel T. The logic of questions and answers. – New Haven and London: Yale Univ. Press, 1976.
27. Зубенко В.В., Омельчук Л.Л. Програмування: Навчальний посібник (Гриф МОН України).- К., 2011.- 625 с.

**ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ  
З ЕЛЕМЕНТАМИ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ  
З ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА ТА ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ»**

**на період з 24 січня до 28 лютого 2018 р.**

## для студентів 2 курсу першого (бакалаврського) рівня освітньої програми «Системний аналіз»

Викладач-лектор: доцент кафедри ТТП, к.ф.-м.н., доц. Зубенко В.В. (електронна пошта zubenko@knu.ua).

Викладачі, що проводитимуть практичні заняття:

доцент кафедри ТТП, к.ф.-м.н., доц. Зубенко В.В. (електронна пошта zubenko@knu.ua)

асистент кафедри. ТТП, к.п.н. Русіна Н.Г. (електронна пошта rusina@knu.ua)

### *Види та форми контрольних заходів з перевірки самостійної роботи студентів*

- у січні-лютому – за допомогою електронних засобів (електронною поштою)
- у березні – шляхом проведення письмової контрольної роботи

Додаткові матеріали для самостійної роботи студентів розміщені за посиланнями:

На самостійну роботу студентів виноситься частина матеріалу 2-го змістового модуля “**Основи теорії алгоритмів**” (див. додаток 1).

Контроль у січні-лютому 2018 р. відбувається у два етапи.

Під час **першого етапу** (24 січня – 7 лютого 2018 р.) студенти мають ґрунтовно вивчити матеріал теми 9 “Формальні моделі алгоритмів. МНР-програми”, теми 10 “Обчислювальність за Тьюрінгом” та познайомитися з теоретичним матеріалом теми 11 “Системи Поста. Формальні граматики”. Для підтвердження засвоєння матеріалу студенти повинні надіслати відповіді на індивідуально запропоновані їм завдання викладачам, що проводять практичні заняття на їх електронні пошти за наведеними вище адресами. Завдання будуть розіслані студентам **05.02.2018**. Відповіді повинні бути надіслані не пізніше **07.02.2018**. Структура завдання 1 етапу: 3 теоретичні питання та 3 задачі (дві МНР-програми, одна МТ). Типовий приклад завдання 1 етапу наведено у **додатку 2**.

Щоб отримати оцінку «**зараховано**», потрібно дати відповіді на теоретичні питання та розв’язати принаймі 2 задачі. Якщо студент отримає оцінку «**незараховано**», то він отримує нове завдання 1 етапу одночасно із завданням 2 етапу 21.02.2018.

На **другому етапі** самостійної роботи (8 лютого – 20 лютого 2018 р.) студенти мають навчитись розв’язувати задачі за темою 11 “Системи Поста. Формальні граматики” та ґрунтовно вивчити матеріал теми 12 “Частково рекурсивні функції. Квазіарні ЧРФ. Примітивні програмні алгебри. Теза Чорча”. Для підтвердження засвоєння матеріалу студенти повинні надіслати відповіді на індивідуально запропоновані їм завдання викладачам, що проводять практичні

заняття на їх електронні пошти за наведеними вище адресами. Завдання будуть розіслані студентам **21.02.2018**. Відповіді на завдання 2 етапу (а також на повторні завдання 1 етапу) повинні бути надіслані не пізніше **23.02.2018**. Структура завдання 2 етапу: 2 теоретичні питання та 2 задачі (одна система Поста, один операторний терм алгебри ЧРФ). Типовий приклад завдання 2 етапу – в додатку 2.

Щоб отримати оцінку «**зараховано**», потрібно дати відповіді на 2 теоретичні питання та розв'язати принаймі одну задачу. Якщо студент отримує оцінку «**незараховано**», то до 26.02.2018 він отримує нове завдання 2 етапу, на яке повинен надіслати відповідь не пізніше **27.02.2018**.

Виконання завдань 1 та 2 етапу самостійної роботи є допуском до написання контрольної роботи у березні 2018 р. Якщо відповіді на завдання принаймі одного етапу не зараховані або не здані до 27.02.2018 без поважних причин, то студент втрачає можливість написання контрольної роботи та отримання відповідних модульних балів **без можливості перескладання**.

На контрольну роботу за підсумками самостійної роботи виносяться задачі зазначених вище тем 9-12 змістового модуля “Основи теорії алгоритмів”. Робота оцінюється максимум в **12 балів**. Типовий приклад контрольної роботи наведено у **додатку 2**. Контрольна робота проводиться для всього потоку на протязі першого тижня занять у березні 2018 р. Тривалість контрольної роботи – 1 академічна година.

### Контрольні теоретичні питання 1 етапу

01. Алгоритми, характерні властивості алгоритмів. Алгоритмічно обчислювані функції.
02. Алгоритмічно перелічні, алгоритмічно розв'язні множини. Зв'язок між АПМ, АРМ.
03. Уточнення понять процедури та алгоритму.
04. Машина з натуральнозначними регістрами; конфігурація МНР.
05. Команди МНР. МНР-програми.
06. Стандартні МНР-програми. Конкатенація стандартних МНР-програм
07. МНР-обчислюваність функцій  $f: N^n \rightarrow N$ .
08. Машина Тьюрінга. Конфігурація МТ; початкова конфігурація, фінальна конфігурація.
09. Команди МТ. Як змінюється конфігурація МТ при виконанні певної команди МТ?
10. Як МТ задає вербальне відображення? Еквівалентні МТ.
11. МТ-обчислюваність функцій  $f: N^n \rightarrow N$ .
12. Системи Поста. Відношення виведення.
13. СП в алфавіті  $T$  та СП над алфавітом  $T$ . Множина, породжувана за Постом.
14. Обчислюваність за Постом функцій  $f: N^n \rightarrow N$ .
15. Різновиди систем Поста. Нормальні системи Поста. Системи Туе.

16. Формальні граматики.
17. Класифікація формальних граматик.
18. Зв'язок класів граматик та класів алгоритмічних машин

### **Контрольні теоретичні питання 2 етапу**

1. Базові обчислювані  $n$ -арні функції на  $N$ . Примітивно рекурсивні, частково рекурсивні, рекурсивні функції.
2. Алгебри  $n$ -арних ЧРФ та ПРФ. Операторні терми цих алгебр.
3. Теореми про підсумовування.
4. Теореми про мультиплікацію.
5. Теорема про обмежену мінімізацію.
6. Примітивні програмні алгебри квазіарних функцій. Операції розгалуження, циклу.
7. Базові програмовані квазіарні функції на  $R$ . ППА програмованих квазіарних функцій на  $R$ .
8. Теза Чорча.
9. Обґрунтування Тези Чорча.

### **Задачі для самостійної роботи 1 етапу**

#### **1. Наведіть МНР-програми для таких функцій:**

- 1)  $f(x, y) = 3x + y + 1$ ;
- 2)  $f(x, y) = x + 2y + 2$ ;
- 3)  $f(x) = (x + 1) / 3$ ;
- 4)  $f(x) = [x / 3]$ ;
- 5)  $f(x, y) = 3y - x$ ;
- 6)  $f(x, y) = 3x - y$ ;
- 7)  $f(x, y, z) = (x - y) + z$ ;
- 8)  $f(x, y, z) = x - (y + z)$ ;
- 9)  $f(x, y) = \text{sg}(x + y)$ ;
- 10)  $f(x, y) = \text{nsg}(x + y)$ ;
- 11)  $f(x, y, z) = \text{sg}(x + y + z)$ ;
- 12)  $f(x, y, z) = \text{nsg}(x + y + z)$ ;
- 13)  $f(x, y, z) = \min(x, y) + z$ ;
- 14)  $f(x, y) = \min(2x, y)$ ;
- 15)  $f(x, y) = \max(x, 3y) + 2x$ ;
- 16)  $f(x) = x!$ ;
- 17)  $f(x, y) = x^y$ .

#### **2. Наведіть МНР-програми для таких предикатів:**

- 1) " $x$  – непарне число";
- 2) " $x$  – парне число";
- 3) " $x \geq y$ ";

4) " $x \neq y$ ";

5) " $x > y$ ";

6) " $x < y$ ".

### 3. Наведіть МТ, яка:

- 1) кожне слово  $x \in T^*$  переводить у слово  $xx^R$ , де  $x^R$  – дзеркальне відображення  $x$ .
- 2) кожне слово  $x \in T^*$  переводить у слово  $x^R$ . (Див. вище).
- 3) кожне слово  $x \in T^*$  переводить у слово  $xx$ .

### 4. Наведіть МТ для таких функцій:

- 1)  $f(x, y) = x \div y$ ;
- 2)  $f(x, y) = (x+1) - y$ ;
- 3)  $f(x, y) = (x+2) \div y$ ;
- 6)  $f(x, y) = x+2y$ ;
- 8)  $f(x, y) = x - 2y$ ;
- 9)  $f(x, y, z) = 2x+y+z$ ;
- 12)  $f(x, y, z) = 2x - (y+z)$ ;
- 13)  $f(x, y) = sg(x \cdot y)$ ;
- 14)  $f(x, y) = nsg(x \cdot y)$ ;
- 15)  $f(x) = x/2$ ;
- 16)  $f(x) = x/3$ ;
- 17)  $f(x) = [x/2]$ ;
- 18)  $f(x) = [x/3]$ ;
- 19)  $f(x, y) = \max(x, y)$ ;
- 20)  $f(x, y) = \min(x, y)$ ;
- 21)  $f(x, y) = [x/y]$ ;
- 22)  $f(x, y) = \text{mod}(x, y)$ ;
- 23)  $f(x) = 2^x$ ;
- 24)  $f(x, y) = x^y$ ;
- 25)  $f(x) = x!$ .

### 5. Наведіть МТ для таких предикатів:

- 1) " $x$  непарне";
- 2) " $x = 3$ ";
- 3) " $x \neq 3$ ";
- 4) " $x > y$ ";
- 5) " $x < y$ ";
- 6) " $x \geq y$ ";
- 7) " $x \neq y$ ".
- 8) " $x \leq y$ ".

### Задачі для самостійної роботи 2 етапу

### 6. Наведіть системи Поста для таких предикатів:

- 1) " $x$  парне";
- 2) " $x$  кратне 3";
- 3) " $x \neq y$ ";
- 4) " $x > y$ ";
- 6) " $x \leq y$ ".

## 7. Наведіть системи Поста для таких функцій:

- 1)  $f(x) = \text{nsg}(x)$ ;
- 2)  $f(x) = \text{sg}(x)$ ;
- 3)  $f(x, y) = \max(x, y)$ ;
- 4)  $f(x, y) = \min(x, y)$ ;
- 5)  $f(x, y) = \max(x+1, y)$ ;
- 6)  $f(x, y) = x \div y$ ;
- 7)  $f(x, y) = x - y^2$ ;
- 8)  $f(x, y, z) = (2x+y) \cdot z$ ;
- 9)  $f(x, y) = x^2 \cdot (y+1)$ ;
- 10)  $f(x, y) = 3^x + 2^y$ ;
- 11)  $f(x, y) = 2^x - 3^y$ ;
- 12)  $f(x, y) = 2^x \cdot y$ ;
- 13)  $f(x, y) = (x+1) \cdot 2^y$ ;
- 14)  $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ ;
- 15)  $f(x, y) = x^2 \cdot y$ ;
- 16)  $f(x, y) = (x+1)^2 \cdot y$ ;
- 17)  $f(x, y) = x^y$ ;
- 18)  $f(x) = \lceil \log_2 x \rceil$ ;
- 19)  $f(x) = \lfloor x\sqrt{2} \rfloor$ ;
- 20)  $f(x, y) = \lfloor \sqrt[y]{x} \rfloor$ .

## 8. Наведіть ОТ алгебри $n$ -арних ЧРФ для функцій:

- 1)  $f(x_1) = (x_1)!$ ;
- 2)  $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ ;
- 3)  $f(x_1, x_2) = (x_2 + 2)!$ ;
- 4)  $f(x_1, x_2) = (x_1 + 1)^{x_2}$ ;
- 5)  $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2 + 3}$ ;
- 6)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^{2x_1 + x_3}$ ;
- 7)  $f(x_1) = \lceil \log_2(x_1) \rceil$ ;
- 8)  $f(x_1) = \lceil \log_3(x_1) \rceil$ ;
- 9)  $f(x_1, x_2) = \lceil \log_3(x_1 + x_2) \rceil$ ;
- 10)  $f(x_1) = \lfloor \sqrt[3]{x_1} \rfloor$ ;
- 11)  $f(x_1) = \lfloor x_1 \sqrt{3} \rfloor$ ;
- 12)  $f(x_1, x_2) = \lfloor \log_{x_1}(x_2) \rfloor$ ;
- 13)  $f(x_1, x_2) = \lfloor \sqrt[x_1]{x_2} \rfloor$ ;
- 14)  $f(x_1, x_2) = \lfloor (x_2 + 1) \sqrt{x_1} \rfloor$ ;
- 15)  $f(x_1, x_2) = (2x_2)!!$ ;
- 16)  $f(x_1, x_2) = (2x_2 + 1)!!$ .

**9. Доведіть, що наступні функції є ПРФ:**

- 1)  $nd(x)$  – кількість дільників числа  $x$  (беремо  $nd(0) = 1$ );
- 2)  $\sigma(x)$  – сума дільників числа  $x$  (беремо  $\sigma(0) = 0$ );
- 3)  $p(x)$  –  $x$ -ве просте число (беремо  $p(0) = 2$ ,  $p(1) = 3$  і т. д.);
- 4)  $spd(x)$  – сума простих дільників числа  $x$ ; (тут беремо  $spd(0) = 0$ );
- 5)  $kpd(x)$  – кількість простих дільників числа  $x$  (тут беремо  $kpd(0) = 0$ );
- 6)  $ex(x, y)$  – степінь числа  $p(x)$  у розкладі числа  $y$  на множники, які є степенями простих чисел (тут беремо  $ex(x, 0) = 0$ );
- 7)  $HCD(x_1, x_2)$  (тут беремо  $HCD(n, 0) = HCD(0, n) = 0$ ).
- 8)  $HCK(x_1, x_2)$  (тут беремо  $HCK(n, 0) = HCK(0, n) = 0$ ).

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ  
ТА МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА» (Витяг)

для студентів 2 курсу першого (бакалаврського) рівня  
спеціальності «Системний аналіз»

**Теми змістовного модуля 2. «Основи теорії алгоритмів», винесені на  
самостійну роботу з елементами дистанційного навчання.**

**Тема 9.** Формальні моделі алгоритмів. МНР-програми (10 год.).

Процедури та алгоритми. Алгоритмічно обчислювані функції. Алгоритмічна перелічність, розв'язність. Формальні моделі алгоритмів. МНР-програми; МНР-обчислюваність.

**Тема 10.** Обчислювальність за Тьюрінгом. (8 год.)

Машина Тьюрінга, МТ-обчислюваність. Приклади МТ-обчислень.

**Тема 11.** Системи Поста. Формальні граматики. (10 год.)

Системи Поста, їх різновиди. Обчислюваність за Постом(10 год.).

**Тема 12.** Частково рекурсивні функції (ЧРФ). Квазіарні ЧРФ. Примітивні програмні алгебри. Теза Чорча (10 год.)

Частково рекурсивні, рекурсивні, примітивно рекурсивні функції. Алгебри  $n$ -арних ЧРФ та ПРФ. Теореми про підсумовування, мультиплікацію, обмежену мінімізацію. Програмовані функції. Примітивні програмні алгебри квазіарних та  $n$ -арних функцій. Кодування, нумерації. Універсальні класи алгоритмів. Канторові нумерації. Функція Гьоделя. Еквівалентність формальних моделей алгоритмів. Теза Чорча та її значення.

## Література.

1. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008.
2. Шкільняк С.С. Теорія алгоритмів. Приклади й задачі. – К., 2012.

### Типовий приклад завдання 1 етапу

1. Стандартні МНР-програми. Конкатенація стандартних МНР-програм
2. Команди МТ. Як змінюється конфігурація МТ при виконанні певної команди МТ?
3. Класифікація формальних граматик.
4. МНР-програма для  $f(x, y) = 3x - y$ .
5. МНР-програма для  $f(x, y) = \max(x, 2y)$ .
6. Машина Тьюрінга для функції  $f(x, y, z) = (x+y) - z$ .

### Типовий приклад завдання 2 етапу

1. Алгебра квазіарних ЧРФ. Операторні терми цієї алгебри.
2. Теорема про обмежену мінімізацію.
3. Система Поста для  $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot (z+1)$ .
4. Вкажіть ОТ алгебри  $n$ -арних ЧРФ для  $f(x_1) = [\sqrt[3]{x_1}]$ .

### Типове завдання контрольної роботи за результатами СР

1. МНР-програма для  $f(x, y) = 2x + y$ .
2. Машина Тьюрінга для функції  $f(x) = sg(x \cdot y)$ .
3. Система Поста для  $f(x) = x^4 - 2x$ .
4. Вкажіть ОТ алгебри  $n$ -арних ЧРФ для  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)^{x_2+1}$ .