

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

**Д. Я. ХУСАІНОВ**  
**А. В. ШАТИРКО**

# **ОСНОВИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ**

**Навчальний посібник**



УДК 681.5.01  
ББК 22.1я73  
К78

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. В. А. Стоян,  
канд. техн. наук, доц. І. І. Харченко

*Рекомендовано до друку вченою радою  
факультету комп'ютерних наук та кібернетики  
(протокол №3 від 9 листопада 2015 року)*

**Хусаїнов Д. Я., Шатирко А. В.**

**К**

Основи нелінійної динаміки: Посібник для студентів спеціальності "Прикладна математика". – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2017. – 159 с.

ISBN 966-594-541-6

Викладено основні положення теорій нелінійних динамічних, лінійних стаціонарних систем і систем на площині. Наведено означення теорії стійкості руху. Розглянуто: типи особливих точок та методи їх досліджень; методи дослідження стійкості стаціонарних станів рівноваги; основні типи нелінійних систем; метод побудовання фазового портрета нелінійних систем шляхом знаходження особливих точок; метод лінеаризації; однорідні системи порядку вище першого та методи їх дослідження; методи дослідження періодичних траєкторій; скалярні відображення, траєкторії яких породжують дивні атрактори. Наведено короткі відомості про атрактор Лоренца.

Для студентів факультету кібернетики та інформаційних систем.

УДК 681.5.01  
ББК 22.1я73

ISBN 966-594-541-6

© Хусаїнов Д. Я., Шатирко А. В., 2017  
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,  
ВІЦ "Київський університет", 2017

# 1. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ В СИСТЕМАХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ПОНЯТТЯ

У цьому розділі наведено основні означення для звичайних диференціальних рівнянь. Зазвичай при вживанні терміна "динамічні системи" мають на увазі системи автономних звичайних диференціальних рівнянь. Детальніше означення динамічних систем та їх властивості розглянуто в [1–6].

## 1.1. Основні означення

Розглянемо системи звичайних автономних (тобто таких, що не залежать явно від часу) диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n.$$

Наведемо основні поняття та означення [1–6]. Векторна функція  $x = \varphi(t)$  називається **розв'язком системи**, якщо вона неперервно диференційована та при підстановці перетворює рівняння на тотожність. Множина значень  $x \in D \subset R^n$ , яких набуває розв'язок, називається **фазовим простором системи**. Множина  $D \times R$ , побудована з пар  $(x, t)$ ,  $x = \varphi(t)$ , називається **розширеним фазовим простором**. Крива  $(x, t)$ ,  $x = \varphi(t)$ ,  $t \in R$  називається **інтегральною кривою**, а множина точок  $x \in D$ ,  $x = \varphi(t)$ ,  $t \in R$  – **траєкторією руху** та позначається  $L$ . По суті, траєкторія руху є проекцію інтегральної кривої в розширеному фазовому просторі на фазовий простір (рис. 1.1).

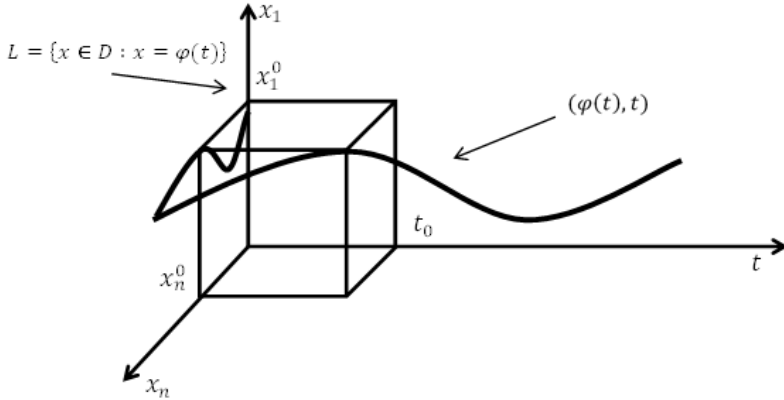


Рис. 1.1

Праві частини системи диференціальних рівнянь, тобто векторну функцію

$$f(x) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

можна інтерпретувати як вектор швидкості руху матеріальної точки. У цьому випадку він є вектором дотичної до траєкторії. Траєкторія руху – це крива у фазовому просторі  $D \subset \mathbb{R}^n$ , у кожній точці якої вектор дотичної збігається з векторним полем системи диференціальних рівнянь.

Точки  $x \in D$ , у яких векторне поле дорівнює нулю, тобто

$$f(x)|_{x=x_0} = 0,$$

називаються **особливими точками (стаціонарними точками, точками спокою)**. Точки спокою є окремими траєкторіями.

Нехай  $x = \varphi(t)$  є розв'язком системи, який задовольняє умову  $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ . Тоді розв'язок називається періодичним з періодом  $T$ .

Якщо  $x_0 \in D$  є особливим розв'язком системи, то у фазовому просторі вона є точкою спокою, а в розширеному фазовому просторі – прямою, рух по якій відбувається в напрямку  $t \rightarrow +\infty$  (рис. 1.2). Якщо  $x = \varphi(t)$  – періодичний розв'язок, то

у фазовому просторі траєкторія буде замкненою кривою, а в розширеному фазовому просторі – спіраллю, рух по якій відбувається в напрямку  $t \rightarrow +\infty$  (рис. 1.3).

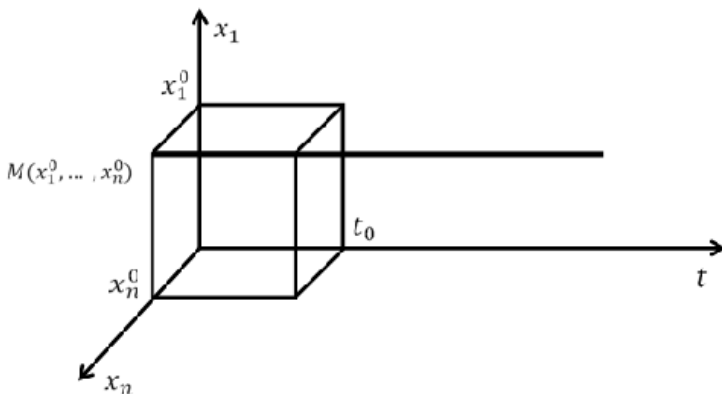


Рис. 1.2

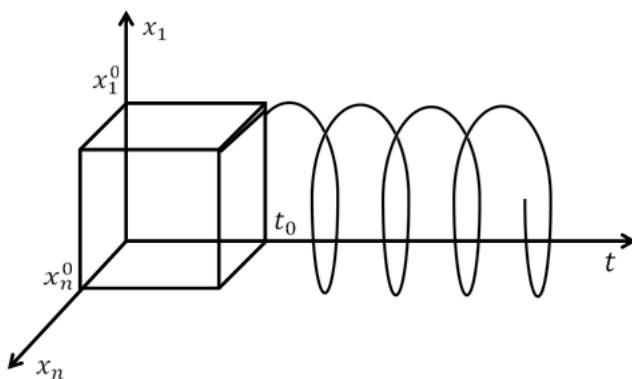


Рис. 1.3

Якщо розв'язок  $x = \varphi(t)$  визначено для всіх значень  $t: -\infty < t < +\infty$ , то **траєкторія**  $L$  називається **цілою**. Якщо розглядаємо частину  $x = \varphi(t)$ ,  $t \geq t_0$ , то множина значень  $x = \varphi(t)$ ,  $t \geq t_0$  називається **додатною півтраєкторією**  $L^+$ , якщо частину  $x = \varphi(t)$ ,

$t \leq t_0$  – то множина значень  $x = \varphi(t)$ ,  $t \leq t_0$  називається **від'ємною півтраєкторією**  $L^-$ . Змінну  $t \in R$  часто називають **часом руху**, а розв'язок  $x = \varphi(t)$  – **рухом** по відповідній траєкторії  $L$ .

Стан рівноваги (особлива точка)  $x_0 \in D$  називається **ізолюваним**, якщо існує  $\varepsilon$ -окіл  $U_\varepsilon(x_0)$  точки  $x_0$ , у якому крім  $x_0$  немає інших особливих точок. Якщо існує крива, усі точки якої є особливими, то така крива називається **особливою** (або **кривою особливих точок**).

У якісній теорії диференціальних рівнянь разом із поняттям розв'язку важливе значення має поняття інтеграла. Функція  $F(x)$ , неперервно диференційована в усіх неособливих точках системи диференціальних рівнянь, називається інтегралом системи, якщо повна похідна її вздовж розв'язків системи тотожно дорівнює нулю, тобто

$$\frac{d}{dt}F(x) = \text{grad}^T F(x)f(x) \equiv 0$$

або

$$\frac{d}{dt}F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0.$$

Рівність  $F(x) = c$  називається **першим інтегралом системи**.

Аналітично (тобто у формульному вигляді) розв'язати систему нелінійних диференціальних рівнянь загального вигляду досить важко (практично неможливо). Навіть отриманий в аналітичному вигляді розв'язок системи рідко відображає поведінку системи в цілому. Розв'язок у числовому вигляді взагалі не дає уявлення про динаміку системи. Для досліджень часто інтерес становить не аналітичний вигляд окремого розв'язку, а поведінка системи в цілому, а саме: скільки точок спокою має система, якого вони вигляду (стійкі чи нестійкі), чи існують періодичні траєкторії, як вони розташовані, як поводяться розв'язки, що містяться між особливими тощо. Завдяки цьому виникло поняття **якісного дослідження** систем диференціальних рівнянь. При якісному дослідженні важливе значення має поняття топологічної еквівалентності, тобто еквівалентного розбиття фазової області траєкторіями систем.

**Гомеоморфізмом** називається взаємно однозначне й неперервне відображення деякої області в себе (або в іншу область). Задана система диференціальних рівнянь визначає в  $D$  сім'ю траєкторій,

або розбиття області траєкторіями на ділянки. За всіх можливих відображень  $G: D \rightarrow D$  вигляд траєкторій може змінюватись, але основні риси розбиття залишаються незмінними, або **інваріантними**. Наприклад, особлива точка переходить в особливу точку, замкнена траєкторія – у замкнену траєкторію. Дві **топологічні структури** (або дві якісні картини розбиття фазового простору траєкторіями системи) називаються **еквівалентними**, якщо існує гомеоморфізм, за якого траєкторії однієї системи відображаються в траєкторії іншої. Можна сказати, що під **топологічною структурою** системи розуміють усі властивості розбиття, які залишаються інваріантними при відображеннях  $G: D \rightarrow D$ .

## 1.2. Основні поняття стійкості руху

Однією із основних властивостей як окремих траєкторій, так і системи в цілому, є стійкість.

Проблема стійкості – це проблема технічного походження, задачі стійкості рівноваги тіл або механічних систем були першими задачами кінетики. Після визначення положення рівноваги виникає питання про його стійкість. Практичне значення можуть мати тільки стійкі положення, які характеризуються тим, що система, виведена з положення рівноваги, автоматично в нього повертається.

Першим такі задачі розв'язував Архімед, який, розглядаючи стан рівноваги, перевіряв, чи може тіло, виведене з нього, самостійно в цей стан повернутись.

Для систем тіл, що перебувають під дією сил тяжіння, такий критерій сформулював Е. Торрічеллі. Він вважав, що стан рівноваги буде стійким, якщо центр ваги системи тіл займає найнижче з можливих положень.

Під стійкістю розуміють різні поняття. Можна виділити такі:

1. Поняття стійкості руху системи, пов'язане з тим, як поведуться окремі її розв'язки (пучок розв'язків). Сюди відносять такі загальноприйняті визначення, як стійкість за Ляпуновим, асимптотична стійкість, стійкість за частинними змінними й усі їх можливі модифікації [7, 8].

2. Визначення стійкості, що характеризує поведінку окремо розглянутої траєкторії руху, наприклад, стійкість за Пуассоном, Лагранжем тощо [9].

3. Нарешті, стійкість усієї системи в цілому, тобто її стійкість щодо збурень, або, у деякому сенсі, стійкість усіх траєкторій системи. Це такі поняття, як грубі динамічні системи, здійсненні,  $\Omega$ -стійкі, робастні тощо [10].

Розглянемо питання, пов'язані з першим поняттям. Задачами стійкості в різних аспектах займалися багато вчених, але строге математичне визначення стійкості руху (у сенсі першого поняття) дав Олександр Михайлович Ляпунов, який також уперше запропонував методи його дослідження.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{y} = F(y, t), \quad y \in R^n, \quad t \geq t_0.$$

Нехай векторна функція  $F(y, t)$  така, що виконуються умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші на проміжку  $t_0 \leq t < +\infty$ . Позначимо  $y = \varphi(y_0, t_0, t)$  розв'язок системи, який проходить при  $t = t_0$  крізь точку  $y_0 \in R^n$ , а  $y = y(y_0^*, t_0, t)$  – інший (збурений) розв'язок, який проходить при  $t = t_0$  крізь точку  $y_0^* \in R^n$ .

Розв'язок  $y = \varphi(y_0, t_0, t)$  називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільних  $\varepsilon > 0$  і  $t_0$  існує  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  таке, що для будь-якого іншого розв'язку  $y = y(y_0^*, t_0, t)$  системи при  $t > t_0$  буде виконуватись  $|y(y_0^*, t_0, t) - \varphi(y_0, t_0, t)| < \varepsilon$  за умови  $|y_1 - y_0| < \delta(\varepsilon, t_0)$ .

Тут  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ,  $|y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$ .

Якщо окрім умов стійкості виконується

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y(y_0^*, t_0, t) - \varphi(y_0, t_0, t)| = 0,$$

то розв'язок  $y = \varphi(y_0, t_0, t)$  називається асимптотично стійким.

Зазвичай заміною  $y = \varphi(y_0, t_0, t) + x$  від вихідної системи переходять до системи

$$\dot{x} = f(x, t)$$

рівнянь збурених рухів і далі досліджують не розв'язок  $y = \varphi(y_0, t_0, t)$  початкової системи, а нульовий розв'язок  $x(t) \equiv 0$



системи рівнянь збурень. У цьому випадку розглядають такі визначення стійкості: розв'язок  $x(t) \equiv 0$  називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільних  $\varepsilon > 0$  і  $t_0$  існує  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  таке, що для будь-якого розв'язку  $x = x(x_0, t_0, t)$  системи при  $t > t_0$  буде виконуватись  $|x(x_0, t_0, t)| < \varepsilon$  за умови  $|x_0| < \delta(\varepsilon, t_0)$ .

Якщо крім умов стійкості виконується

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(x_0, t_0, t)| = 0,$$

то розв'язок  $x = x(x_0, t_0, t)$  називається асимптотично стійким.

*Зауваження.* Слід зазначити, що друга умова у визначенні асимптотичної стійкості не перекриває першу (як може здатися на перший погляд). Це можна показати на прикладі.

**Приклад.** Розглянемо систему диференціальних рівнянь, яка має такий фазовий портрет (рис. 1.4):

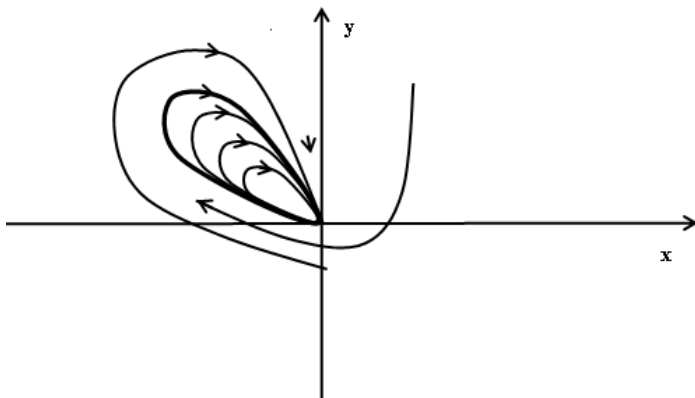


Рис. 1.4

У цьому прикладі всі розв'язки  $(x(t), y(t))$  при  $t \rightarrow +\infty$  прямують до початку координат. Проте ті з них, що розташовані поза замкненою траєкторією та праворуч від осі  $Oy$ , виходять за траєкторію, яка позначена жирним на рис. 1.4, хоча їхнє початкове положення може бути як завгодно близьким до початку координат.

Найбільш конструктивні результати в теорії стійкості отримані для лінійних стаціонарних систем

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n.$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\det\{A - \lambda E\} = 0,$$

яке є алгебраїчним рівнянням вигляду

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0.$$

Рівняння має  $n$  коренів  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Умови стійкості визначає така теорема.

**Теорема** (про стійкість лінійних стаціонарних систем). *Для того, щоб нульовий розв'язок лінійної стаціонарної системи був асимптотично стійким, необхідно й достатньо, щоб усі корені характеристичного рівняння мали від'ємні дійсні частини, тобто  $\operatorname{Re}\lambda_i(A) < 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Для того, щоб нульовий розв'язок лінійної стаціонарної системи був стійким за Ляпуновим, необхідно й достатньо, щоб усі корені характеристичного рівняння були невід'ємні, тобто  $\operatorname{Re}\lambda_i(A) \leq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , причому корені з нульовою дійсною частиною допускали б тільки прості елементарні дільники, тобто відповідна жорданова клітина складалася б з одного елемента.*

Усі розв'язки лінійних систем одночасно є або стійкими, або нестійкими. Тому для лінійних систем (і тільки для лінійних) має місце визначення **стійка система**.

При вивченні нульового стану рівноваги нелінійної системи часто вдаються до лінеаризації правих частин в околі стану рівноваги й дослідження системи лінійного наближення.

**Теорема** (про стійкість за лінійним наближенням). *Нехай вихідна нелінійна система в околі нульового положення рівноваги подана у вигляді  $\dot{x} = Ax + R(x)$ ,  $|R(x)| \leq N|x|^{1+\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ .*

*Якщо матриця  $A$  системи лінійного наближення має корені характеристичного рівняння з від'ємною дійсною частиною, тобто  $\operatorname{Re}\lambda_i(A) < 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , то нульовий розв'язок вихідної нелінійної системи є асимптотично стійким.*

У класичній теорії стійкості руху О. М. Ляпунова розроблені два методи дослідження стійкості нульового положення рівноваги [7].

Перший (аналітичний) метод Ляпунова пов'язаний із зображенням розв'язків систем у вигляді степеневих рядів за початковими відхиленнями та теорією характеристичних чисел розв'язків системи лінійних наближень. Він поширюється на задачі з теорії коливань, а також знайшов широке застосування в механіці, фізиці, техніці.

Другий (прямої) метод Ляпунова заснований на введенні спеціальної допоміжної функції (функціонала) та отриманні тверджень про стійкість на підставі поведінки цієї функції вздовж розв'язків системи. У його основі лежать такі теореми.

**Теорема** (перша Ляпунова). *Нехай існує неперервно диференційована функція  $V(x,t)$ , яка задовольняє умови:*

1. *Функція  $V(x,t)$  є додатно визначеною, тобто існує функція  $W(x)$ :  $W(x) > 0$  при  $x \neq 0$  і  $W(0) = 0$  така, що  $V(x,t) \geq W(x)$ .*

2. *Повна похідна функції  $V(x)$  унаслідок системи є недодатною, тобто*

$$\frac{d}{dt}V(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \text{grad}_x^T V(x,t)f(x) \leq 0.$$

*Тоді нульовий розв'язок системи є стійким за Ляпуновим.*

**Теорема** (друга Ляпунова). *Нехай існує неперервно диференційована функція  $V(x,t)$ , яка задовольняє умови:*

1. *Функція  $V(x,t)$  є додатно визначеною, тобто існує функція  $W_1(x)$ :  $W_1(x) > 0$  при  $x \neq 0$  і  $W_1(0) = 0$  така, що  $V(x,t) \geq W_1(x)$ .*

2. *Функція  $V(x,t)$  має нескінченно малу вищу границю, тобто існує функція  $W_2(x)$ :  $W_2(x) > 0$  при  $x \neq 0$  і  $W_2(0) = 0$  така, що  $V(x,t) \leq W_2(x)$ .*

3. *Повна похідна функції  $V(x,t)$  унаслідок системи є від'ємно визначеною, тобто існує додатно визначена функція  $\varphi(x)$ , за якої*

$$\frac{d}{dt}V(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \text{grad}_x^T V(x,t)f(x) \leq -\varphi(x).$$

*Тоді нульовий розв'язок системи є асимптотично стійким за Ляпуновим.*

Умови теорем є не лише достатніми, але й необхідними. Якщо нульовий розв'язок стійкий (асимптотично стійкий), то функція Ляпунова, що володіє необхідними властивостями, існує. Проблемою було та залишається її знаходження.

Слід зазначити, що різноманітних визначень стійкості досить багато. Якщо розглядається не рух (або точка спокою), а півтраєкторія, то має місце визначення орбітальної стійкості (або нестійкості) [6, 9].

Додатна півтраєкторія  $L^+$  називається орбітально стійкою, якщо для довільного  $\varepsilon > 0$  існує  $\delta(\varepsilon) > 0$  таке, що для будь-якої іншої півтраєкторії  $\tilde{L}^+$ , яка проходить при  $t = 0$  крізь точку  $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ , буде виконуватись  $\tilde{L}^+ \subset U_\varepsilon(L^+)$  за умови  $\tilde{M} \in U_\delta(M_0)$ . Тут  $U_\varepsilon(L^+)$ ,  $U_\delta(M_0)$ ,  $\varepsilon$  та  $\delta$  – околиці півтраєкторії  $L^+$  і точки  $M_0$ .

Півтраєкторія, яка не є орбітально стійкою, є орбітально нестійкою.

Основні положення якісної теорії динамічних систем на площині викладені в роботах [1, 3, 11, 12]. Наведемо деякі поняття.

Нехай деяка крива  $L$  не є траєкторією системи.

Крива  $L$  **не має** в точці  $M$  **контакту**, якщо траєкторія системи, що проходить крізь неї, не торкається кривої  $L$  у цій точці. І навпаки, крива  $L$  **має контакт**, якщо траєкторія, що проходить крізь точку  $M$ , дотикається в цій точці до кривої  $L$ .

Гладка проста (тобто без самоперетину) крива називається **кривою без контакту**, якщо:

- а) на кривій  $L$  немає положень рівноваги;
- б) крива  $L$  не має контакту в жодній точці  $M$ .

Нехай параметричне рівняння кривої без контакту  $L$  є таким:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Тоді умова а) означає, що

$$P^2(\varphi(t), \psi(t)) + Q^2(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0, \quad a \leq t \leq b.$$

Умова б) означає, що

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} P(\varphi(t), \psi(t)) & \varphi'(t) \\ Q(\varphi(t), \psi(t)) & \psi'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Якщо ж крива задана неявним рівнянням  $F(x, y) = 0$ , то умови набувають вигляду:

а)  $P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0$ ;

б)  $P(x, y)F'_x(x, y) + Q(x, y)F'_y(x, y) \neq 0$ .

Якщо крива  $L$  замкнена, то має місце визначення **циклу без контакту**.

Важливе значення в теорії динамічних систем мають поняття граничних точок і граничних множин.

Точка  $M^*(x^*, y^*)$  півтраєкторії  $L^+$  називається  $\omega$ -**граничною**, якщо існує послідовність  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ , за якої

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n) = x^*, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y(t_n) = y^*.$$

Множина всіх  $\omega$ -граничних точок утворює  $\Omega$ -**граничну множину**.

Точка  $M^*(x^*, y^*)$  півтраєкторії  $L^+$  називається  $\alpha$ -**граничною**, якщо існує послідовність  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$ , за якої

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n) = x^*, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y(t_n) = y^*.$$

Множина всіх  $\alpha$ -граничних точок утворює  $A$ -**граничну множину**.

З наведених визначень випливає таке.

а) Будь-який стан рівноваги є граничною точкою ( $\omega$ -граничною для асимптотично стійкого стану рівноваги та  $\alpha$ -граничною – для нестійкого).

б) Усі точки замкненої траєкторії, яка не містить особливих точок, є як  $\omega$ -, так і  $\alpha$ -граничними.

Нехай півтраєкторія  $L^+$  (відповідно  $L^-$ ) лежить в обмеженій частині області  $D \subset R^2$ . Має місце твердження.

**Теорема.** *Множина  $\Omega$  (відповідно  $A$ ) півтраєкторії  $L^+$  (відповідно  $L^-$ ) замкнена, зв'язна та складається з цілих траєкторій.*

*Доведення.* Випливає з визначення граничної множини.

## 2. ОСОБЛИВІ ТОЧКИ ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ НА ПЛОЩИНІ

У цьому розділі наведемо класифікацію особливих точок лінійних стаціонарних систем на площині.

Розглянемо побудування фазового портрета системи лінійних диференціальних рівнянь на площині:

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy.$$

Дотримуючись загальної теорії диференціальних рівнянь, будемо характеристичне рівняння

$$\det\{A - \lambda I\} = 0, \text{ тобто } \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Після розкриття характеристичного рівняння отримуємо

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Залежно від вільного члена розглянемо два випадки.

I. Нехай визначник системи не дорівнює нулю, тобто

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Тоді характеристичне рівняння не має нульових коренів, тобто  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$ .

1. Нехай корені  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  дійсні, різні, одного знака.

а) Нехай, наприклад,  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ . Завжди існує лінійне неособливе перетворення

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

(розтяг з поворотом), яке зводить початкову систему до жорданової форми:

$$\dot{\xi} = \lambda_1 \xi, \quad \dot{\eta} = \lambda_2 \eta. \quad (1)$$

Причому вектори

$$s_1^T = (\alpha_1, \beta_1), \quad s_2^T = (\alpha_2, \beta_2)$$

є власними векторами матриці  $A$ , що відповідають власним числам  $\lambda_1, \lambda_2$ . Розв'язком перетвореної системи є

$$\xi = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \eta = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Для того, щоб побудувати фазовий портрет, поділимо перше рівняння з (1) на друге:

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\xi}{\eta}.$$

Звідси

$$\frac{d\xi}{\lambda_1 \xi} = \frac{d\eta}{\lambda_2 \eta}.$$

Проінтегрувавши, отримаємо

$$\frac{1}{\lambda_1} \ln|\xi| = \frac{1}{\lambda_2} \ln|\eta| + \frac{1}{\lambda_2} \ln c.$$

Фазові траєкторії мають вигляд узагальнених парабол (рис. 2.1):

$$\xi = c\eta^\alpha, \quad \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1.$$

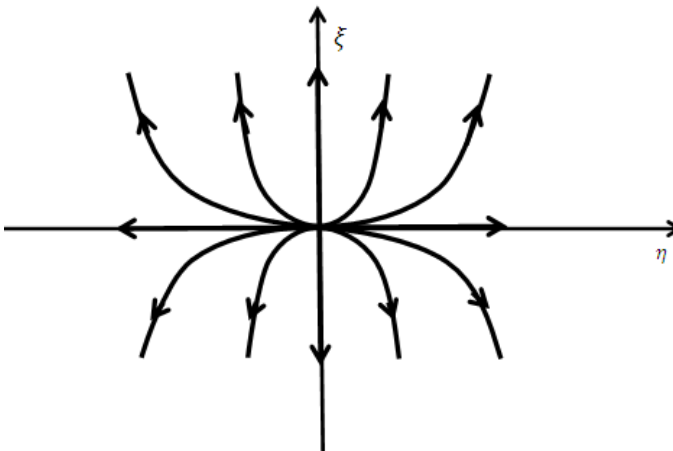


Рис. 2.1

Після оберненого перетворення (також розтягнення й повороту) отримаємо портрет особливої точки, який називається **вузлом**. Оскільки  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , то

$$x(t) \rightarrow \pm\infty, \quad y(t) \rightarrow \pm\infty.$$

Положення рівноваги називається **нестійким вузлом** (рис. 2.2).

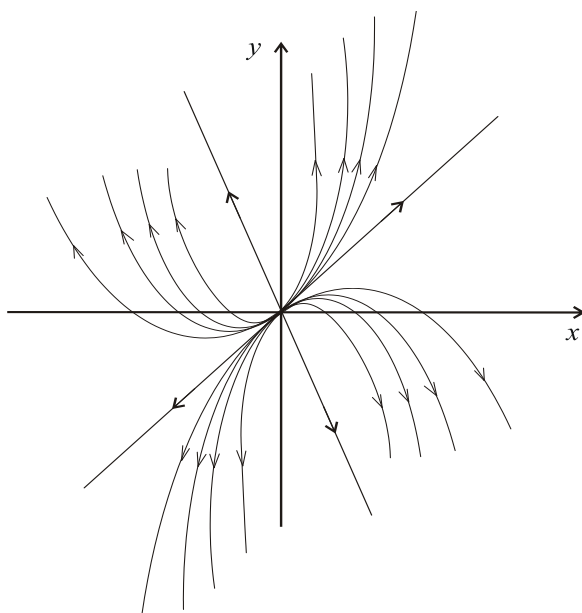


Рис. 2.2

б) Якщо  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , то заміною  $t \rightarrow -t$  переходимо до попереднього пункту. Якісна картина зберігається, але рух по траєкторіях скеровано у протилежному напрямку. Особлива точка називається **стійким вузлом** (рис. 2.3).



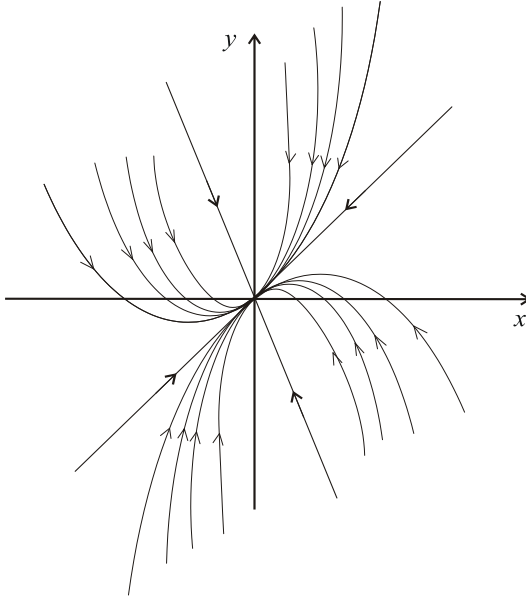


Рис. 2.3

2. Нехай корені характеристичного рівняння дійсні, різних знаків (наприклад  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ). Повторюючи перетворення, описані в попередньому пункті, отримаємо фазові траєкторії у вигляді узагальнених гіпербол:

$$\xi = c\eta^\alpha, \quad \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0.$$

Рух по цих траєкторіях відбувається за залежностями

$$\xi = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \eta = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Оскільки  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , то (рис. 2.4)

$$\xi(t) \rightarrow 0, \quad \eta(t) \rightarrow \pm\infty.$$

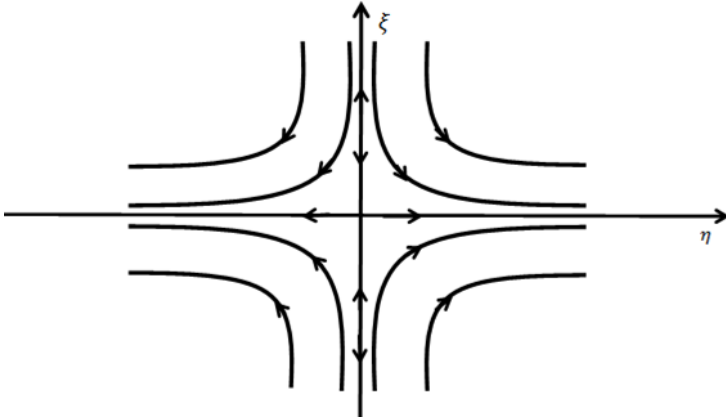


Рис. 2.4

Після оберненого перетворення отримуємо фазовий портрет особливої точки, який називається **сідлом** (рис. 2.5). Прямі  $l_1$  та  $l_2$ , визначені власними векторами  $s_1^T = (\alpha_1, \beta_1)$ ,  $s_2^T = (\alpha_2, \beta_2)$ , називаються **стійкою** й **нестійкою** сепаратрисами сідла.

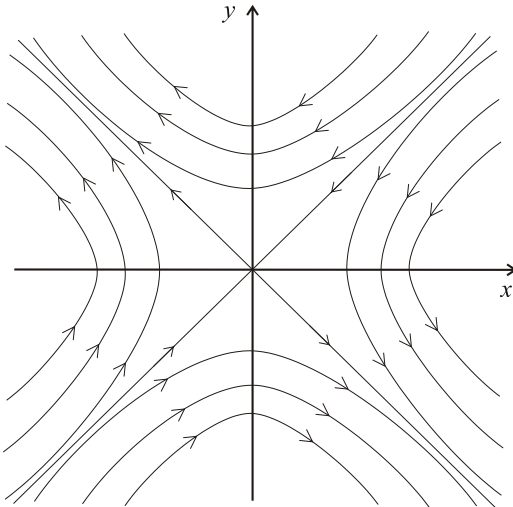


Рис. 2.5

3. Нехай корені характеристичного рівняння комплексні, тобто  $\lambda_1 = p + iq$ ,  $\lambda_2 = p - iq$ . Після перетворення система набуде вигляду

$$\dot{\xi} = p\xi + q\eta, \quad \dot{\eta} = -q\xi + p\eta.$$

Уведемо полярні координати

$$\xi = r \cos \theta, \quad \eta = r \sin \theta.$$

Після їх підстановки в перетворені рівняння отримаємо:

$$\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} = pr \cos \theta + qr \sin \theta,$$

$$\dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} = -qr \cos \theta + pr \sin \theta.$$

Помноживши перше рівняння на  $\cos \theta$ , а друге – на  $\sin \theta$  і склавши їх, дістанемо:

$$\begin{aligned} & \dot{r}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \\ & = r(p \cos \theta + q \sin \theta) \cos \theta + r(-q \cos \theta + p \sin \theta) \sin \theta = \\ & = r(p \cos^2 \theta + q \sin \theta \cos \theta - q \cos \theta \sin \theta + p \sin^2 \theta) = rp, \end{aligned}$$

або

$$\dot{r} = pr.$$

Далі, помноживши перше рівняння на  $-\sin \theta$ , а друге – на  $\cos \theta$  і склавши їх, одержимо:

$$\begin{aligned} & r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \dot{\theta} = \\ & = -r(p \cos \theta + q \sin \theta) \sin \theta + r(-q \cos \theta + p \sin \theta) \cos \theta = \\ & = r(-p \cos \theta \sin \theta - q \sin^2 \theta - q \cos^2 \theta + p \sin \theta \cos \theta) = -qr, \end{aligned}$$

або

$$\dot{\theta} = -q.$$

Таким чином, у полярній системі координат отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{r} = pr, \quad \dot{\theta} = -q.$$

Вона має загальний розв'язок

$$r = r_0 e^{pt}, \quad \theta = \theta_0 - qt, \quad t \geq t_0.$$

Фазовий портрет перетвореної системи має вигляд спіралей.

а) Якщо  $p > 0$ , то  $r(t) \rightarrow +\infty$  і спіралі розкручуються (рис. 2.6). Після оберненого перетворення отримуємо деформовані спіралі. Оскільки вони також розкручуються, то положення рівноваги називається **нестійким фокусом**.

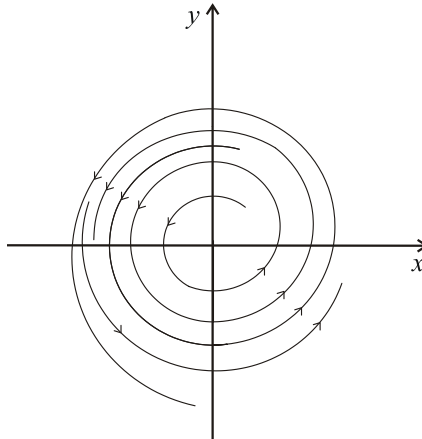


Рис. 2.6

б) Якщо  $p < 0$ , то  $r(t) \rightarrow 0$  і спіралі скручуються (рис. 2.7). Після оберненого перетворення отримуємо деформовані спіралі з тим самим напрямком руху. Положення рівноваги називається **стійким фокусом**.

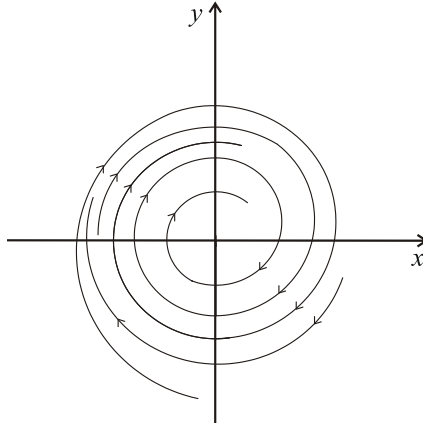


Рис. 2.7

4. Нехай корені характеристичного рівняння суто уявні, тобто  $\lambda_1 = +iq$ ,  $\lambda_2 = -iq$ . Виконавши перетворення, описані в попередньому пункті, отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = -q.$$

Її розв'язками будуть

$$r = r_0, \quad \theta = \theta_0 - qt, \quad t \geq t_0.$$

Таким чином, траєкторії перетвореної системи мають вигляд кіл. Після оберненого перетворення отримаємо сім'ю еліпсів. Положення рівноваги називається **центр** (рис. 2.8).

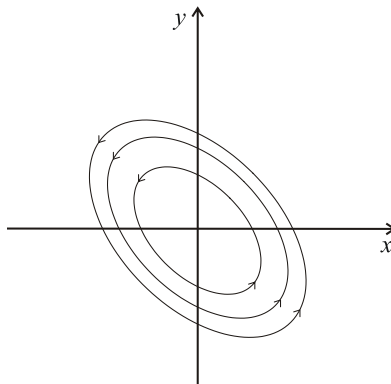


Рис. 2.8

5. Нехай корені характеристичного рівняння кратні, тобто  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . У цьому випадку перетворена система може мати два варіанти.

а) Якщо матриця Жордана має вигляд

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

то система розщеплюється на дві підсистеми:

$$\dot{\xi} = \lambda\xi, \quad \dot{\eta} = \lambda\eta.$$

Загальний розв'язок перетвореної системи

$$\xi = c_1 e^{\lambda t}, \quad \eta = c_2 e^{\lambda t},$$

а траєкторії  $\xi = c\eta$  є сім'єю прямих, які проходять крізь початок координат. Обернене перетворення не змінює фазовий портрет і, залежно від знака  $\lambda$ , можливе зображення у вигляді **нестійкого дикритичного вузла** (при  $\lambda > 0$ , рис. 2.9) або **стійкого дикритичного вузла** (при  $\lambda < 0$ , рис. 2.10).

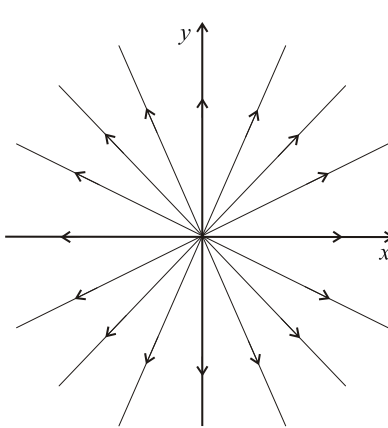


Рис. 2.9

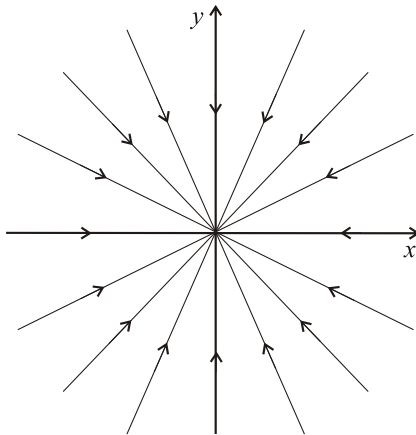


Рис. 2.10

б) Якщо матриця Жордана має вигляд

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

то перетворена система набуває вигляду

$$\dot{\xi} = \lambda\xi + \eta, \quad \dot{\eta} = \lambda\eta.$$

Її загальний розв'язок

$$\xi = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, \quad \eta = c_2 e^{\lambda t}.$$

Розв'язкам відповідають траєкторії

$$\xi = c\eta + \frac{1}{\lambda} \ln|\eta|.$$

Особлива точка називається, відповідно, **нестійким виродженим вузлом** (при  $\lambda > 0$ , рис. 2.11) або **стійким виродженим вузлом** (при  $\lambda < 0$ , рис. 2.12). Після оберненого перетворення їхні фазові портрети матимуть вигляд:

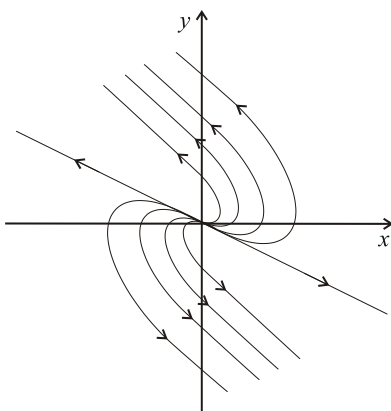


Рис. 2.11

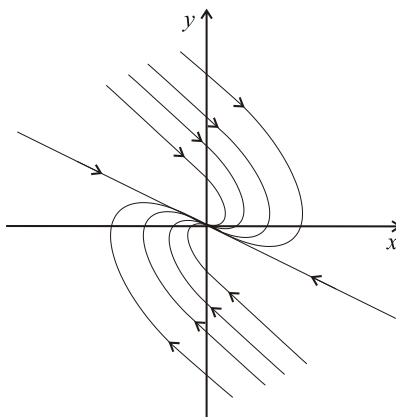


Рис. 2.12

II. Розглянемо другий випадок, при якому визначник системи дорівнює нулю, тобто

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0.$$

У цьому випадку характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda = 0$$

має хоча б один нульовий корінь.

1. Нехай  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = a + d \neq 0$ . Перетворена система має вигляд

$$\dot{\xi} = 0, \quad \dot{\eta} = (a + d)\eta.$$

Її загальним розв'язком є

$$\xi = c_1, \quad \eta = c_2 e^{(a+d)t}.$$

Фазові траєкторії складають сім'ю паралельних прямих ( $\xi = c_1$ ), які перетинаються одною особливою прямою ( $\eta = 0$ ).

а) Якщо  $a + d < 0$ , то на сім'ї прямих  $\xi = c_1$  при  $c_2 > 0$  рух направлено праворуч, а при  $c_2 < 0$  – ліворуч. Особлива пряма  $\eta = 0$  є **нестійкою особливою прямою** (рис. 2.13).

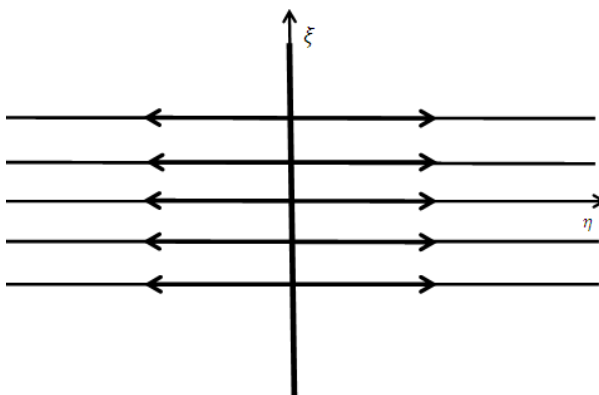


Рис. 2.13



б) Якщо ж  $a + d > 0$ , то на сім'ї прямих  $\xi = c_1$  при  $c_2 > 0$  рух направлено ліворуч, а при  $c_2 < 0$  – праворуч. Особлива пряма  $\eta = 0$  є **стійкою особливою прямою** (рис. 2.14).

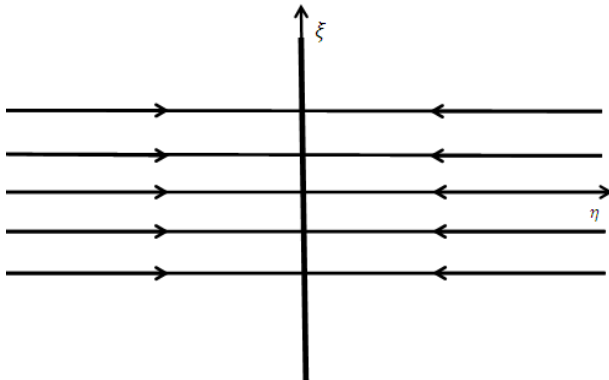


Рис. 2.14

Після оберненого перетворення якісна картина не змінюється і траєкторії мають такий вигляд (рис. 2.15, 2.16):

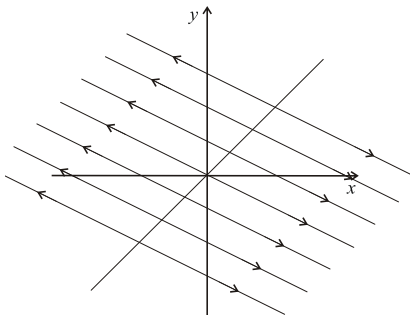


Рис. 2.15

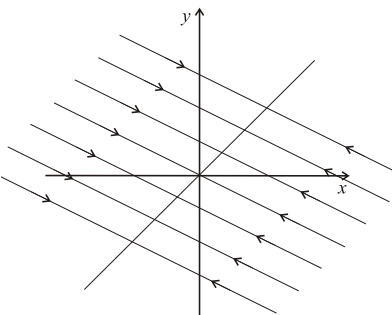


Рис. 2.16

2. Нарешті, нехай  $a + d = 0$ , тобто  $\lambda_1 = 0$  і  $\lambda_2 = 0$ . У цьому випадку (повністю нульову систему не розглядаємо) перетворена система описується системою

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = 0.$$

Її загальний розв'язок

$$\xi = c_1 + c_2 t, \quad \eta = c_2.$$

При  $c_2 = 0$  отримуємо  $\xi = c_1$ ,  $\eta = 0$ , тобто крива (пряма)  $\eta = 0$  є особливою. Оскільки при  $c_2 > 0$  буде  $\xi \rightarrow +\infty$ , а при  $c_2 < 0$  буде  $\xi \rightarrow 0$ , то рух праворуч буде направлено вгору, а ліворуч – униз (рис. 2.17).

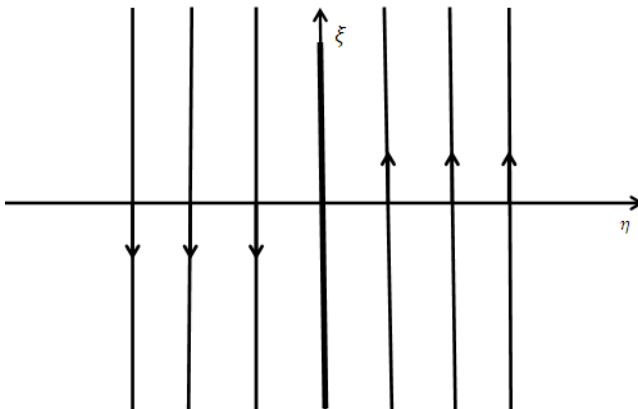


Рис. 2.17

Після оберненого перетворення отримуємо фазовий портрет системи типу **вододіл** (рис. 2.18).

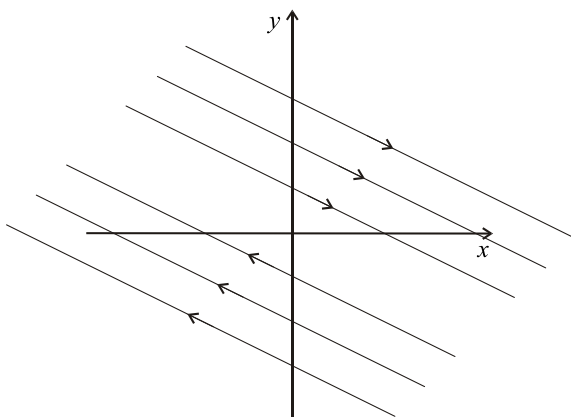


Рис. 2.18

Позначимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \sigma = a + d.$$

Тоді в площині виміру параметрів  $(\sigma, \Delta)$  залежності типів положення рівноваги матимуть такий вигляд (рис. 2.19):

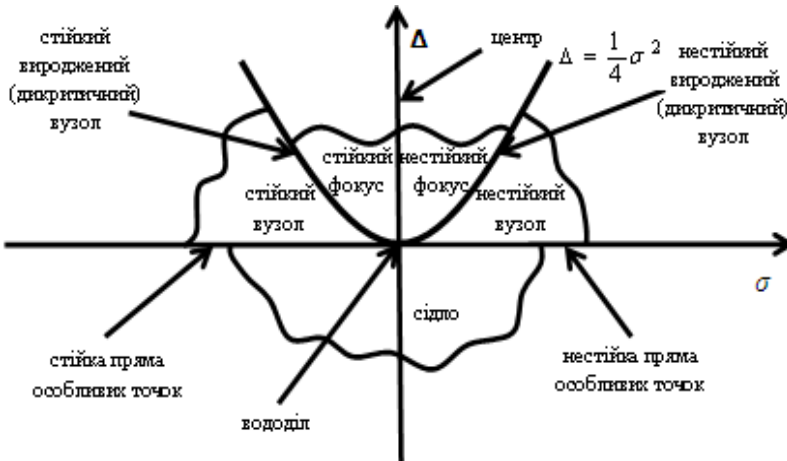


Рис. 2.19

Оскільки характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

то

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta} \right].$$

Крива  $\Delta = \frac{1}{4}\sigma^2$  є біфуркаційною кривою.

Поняття біфуркації буде детально розглянуто далі. Під цим терміном розуміємо різку зміну якісного портрета системи.

### 3. ПОБУДУВАННЯ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА СИСТЕМИ НА ПЛОЩИНІ, ОСНОВАНЕ НА МЕТОДІ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Якісне дослідження динамічних систем на площині, відповідно до теорії Пуанкаре – Ляпунова, здійснюється зазвичай таким чином. Будується фазовий портрет якісної поведінки системи, тобто знаходяться особливі точки, цикли й визначається характер поведінки траєкторій в околі отриманих особливих точок і циклів (стійкість або нестійкість). Далі здійснюється локальне побудування фазового портрета в околі кожної з особливих точок і циклів і "зшивання" траєкторій у фазовий портрет системи в цілому.

Як було зазначено раніше, для системи на площині

$$\dot{x}(t) = P(x, y), \quad \dot{y}(t) = Q(x, y)$$

особлива точка є розв'язком системи рівнянь

$$M_0(x_0, y_0): \quad P(x_0, y_0) = 0, \quad Q(x_0, y_0) = 0.$$

Позначимо

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

$$\sigma(x_0, y_0) = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0).$$

Положення рівноваги, для якого  $\Delta(x_0, y_0) \neq 0$ , називається **простим**. Це положення рівноваги може бути вузлом (простим, виродженим, дикритичним), сідлом, фокусом, центром.

При дослідженні поведінки траєкторій поблизу положення рівноваги  $M_0(x_0, y_0)$  функції  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  розкладаємо в ряд в околі цієї точки з точністю лінійного наближення.

$$P(x, y) = P(x_0, y_0) + P'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + P'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R_1(x, y),$$

$$Q(x, y) = Q(x_0, y_0) + Q'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + Q'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R_2(x, y).$$

Після позначення

$$P'_x(x_0, y_0) = a_0, \quad P'_y(x_0, y_0) = b_0, \quad Q'_x(x_0, y_0) = c_0, \quad Q'_y(x_0, y_0) = d_0$$

система набуває вигляду

$$\dot{x} = a_0(x - x_0) + b_0(y - y_0) + R_1(x, y),$$

$$\dot{y} = c_0(x - x_0) + d_0(y - y_0) + R_2(x, y),$$

де функції  $R_1(x, y)$ ,  $R_2(x, y)$  є наближеннями вищого порядку.

Виконавши заміну (паралельне перенесення особливої точки в початок координат)

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta,$$

отримуємо систему

$$\dot{\xi} = a_0\xi + b_0\eta + \tilde{R}_1(\xi, \eta), \quad \dot{\eta} = c_0\xi + d_0\eta + \tilde{R}_2(\xi, \eta).$$

Як впливає з теореми Ляпунова про лінійне наближення [7, 8], якщо система не має суто уявних або нульових власних чисел, то локальні портрети нелінійної й лінеаризованої систем у досить малому  $\delta$ -околі  $U_\delta(x_0, y_0)$  особливої точки  $M_0(x_0, y_0)$  збігаються. Тому в цьому околі локальні фазові портрети вихідної нелінійної системи й системи лінійного наближення

$$\dot{\xi} = a_0\xi + b_0\eta, \quad \dot{\eta} = c_0\xi + d_0\eta$$

топологічно еквівалентні.

Для побудови фазового портрета діють таким чином.

1. Розв'язуючи систему рівнянь

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0,$$

знаходять особливі точки  $M_i(x_i, y_i)$ ,  $i \in I$ . Їх може не бути взагалі, це може бути скінченне, зліченне число або континуум.

2. В околі кожної із особливих точок  $M_i(x_i, y_i)$ ,  $i \in I$  здійснюється лінеаризація системи, а початкова система замінюється на

$$\dot{\xi} = a_i\xi + b_i\eta + \tilde{R}_{1i}(\xi, \eta), \quad \dot{\eta} = c_i\xi + d_i\eta + \tilde{R}_{2i}(\xi, \eta).$$

Відкидаючи нелінійні члени, у  $\delta$ -околах кожної із особливих точок здійснюємо лінеаризацію, тобто розглядаємо системи лінійного наближення

$$\dot{\xi} = a_i\xi + b_i\eta, \quad \dot{\eta} = c_i\xi + d_i\eta.$$

Якщо системи лінійного наближення не мають нульових або суто уявних власних чисел, то в  $\delta$ -околі кожної із особливих точок будуюмо її фазовий портрет.

3. Після цього робимо "зшивання" фазового портрета окремих підсистем у фазовий портрет системи в цілому.

*Зауваження.* Якщо знаходження особливих точок зводиться до розв'язання системи рівнянь, то дотепер вдалих **конструктивних** методів знаходження замкнених траєкторій немає.

**Приклад.** Розглянемо нелінійну систему

$$\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x^2 + y^2 - 2.$$

Розв'язуючи систему рівнянь

$$x - y = 0, \quad x^2 + y^2 - 2 = 0,$$

знаходимо особливі точки. Особливими точками будуть  $M_1(1,1)$ ,  $M_2(-1,-1)$ . Розкладемо нелінійну систему з точністю до лінійного наближення в околі точки  $M_0(x_0, y_0)$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) + R_1(x, y) = \\ &= 1(x - x_0) - 1(y - y_0) + R_1(x, y), \\ \dot{y} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) + R_2(x, y) = \\ &= 2x \Big|_{x=x_0} (x - x_0) + 2y \Big|_{y=y_0} (y - y_0) + R_2(x, y). \end{aligned}$$

1. Підставивши першу точку  $M_1(1,1)$ , дістаємо

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x - 1) - (y - 1) + R_1(x, y), \\ \dot{y} &= 2(x - 1) + 2(y - 1) + R_2(x, y). \end{aligned}$$

Побудуємо систему лінійного наближення:

$$\dot{x} = (x - 1) - (y - 1), \quad \dot{y} = 2(x - 1) + 2(y - 1).$$

Отримаємо характеристичне рівняння:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0.$$

Звідси

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4} = \frac{3}{2} \pm i \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Положення рівноваги – нестійкий фокус.

Для зручності зробимо паралельне перенесення

$$x = x_1 + 1, \quad y = y_1 + 1$$

і обчислимо вектор швидкості в точці  $(x_1, y_1) = (1, 0)$  зміщеної системи. Отримаємо  $\dot{x}|_{(1,0)} = 1$ ,  $\dot{y}|_{(1,0)} = 2$ . Локальний фазовий портрет в околі точки  $M_1(1, 1)$  має вигляд спіралі, яка розкручується проти часової стрілки (рис. 3.1).

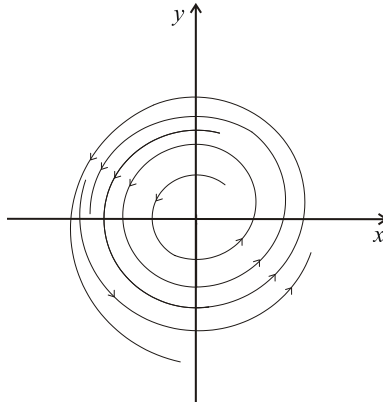


Рис. 3.1

2. Розглянемо другу особливу точку  $M_2(-1, -1)$ . Підставивши її значення у вираз для першої похідної, дістанемо

$$\dot{x} = (x - 1) - (y - 1) + R_1(x, y), \quad \dot{y} = -2(x - 1) - 2(y - 1) + R_2(x, y).$$

Побудуємо систему лінійного наближення:

$$\dot{x} = (x-1) - (y-1), \quad \dot{y} = -2(x-1) - 2(y-1).$$

Отримаємо характеристичне рівняння:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 4 = 0.$$

Звідси

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}, \quad \lambda_1 \approx -2,5, \quad \lambda_2 \approx 1,5.$$

Положення рівноваги – сідло. Для зручності виконаємо паралельне перенесення

$$x = x_1 + 1, \quad y = y_1 + 1$$

та обчислимо рівняння сепаратрис для зміщеної системи:

$$y_1 = kx_1.$$

Підставивши останній вираз у диференціальне рівняння, отримаємо

$$k = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{-2x_1 - 2y_1}{x_1 - y_1} = \frac{-2x_1 - 2kx_1}{x_1 - kx_1} = \frac{-2 - 2k}{1 - k}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} k - k^2 &= -2 - 2/k \Rightarrow k^2 - 3k - 2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow k &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow k_1 \approx 3,5, \quad k_2 \approx -0,5. \end{aligned}$$

Тепер рівняння сепаратрис мають вигляд  $y_1 = 3,5x_1$ ,  $y_1 = -0,5x_1$ .

Для визначення напрямку руху візьмемо точку  $(x_1, y_1) = (1, 0)$  і обчислимо вектор швидкості в цій точці зміщеної системи. Отримаємо  $\dot{x}'|_{(1,0)} = 1$ ,  $\dot{y}'|_{(1,0)} = -2$ . Локальний фазовий портрет в околі точки  $M_2(-1, -1)$  – сідло з нестійкими сепаратрисами у другій та четвертій чвертях і стійкими – у першій та третій (рис. 3.2).



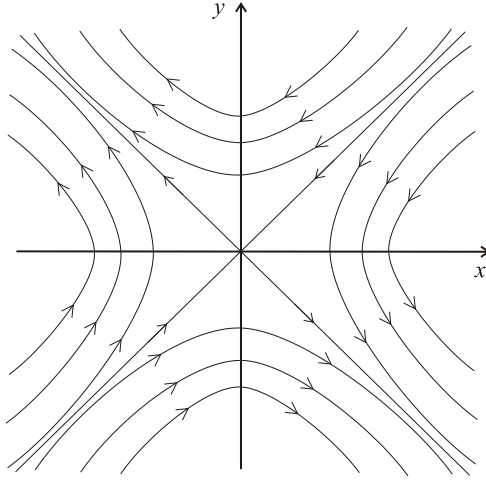


Рис. 3.2

"Зшиваючи" два фазові портрети в єдиний, отримаємо таке (рис. 3.3):

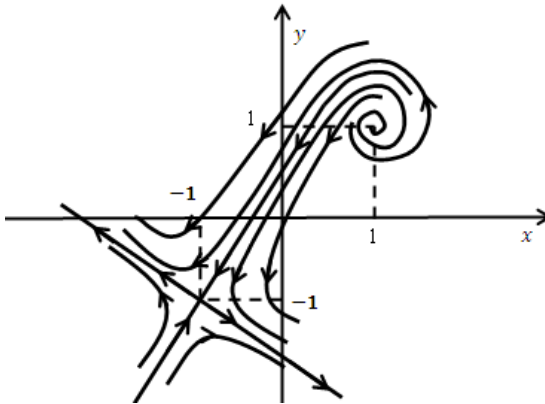


Рис. 3.3

**Приклади для самостійної роботи.** Побудувати фазові портрети нелінійних систем, використовуючи метод лінеаризації в околі особливих точок.

3.1.  $\dot{x} = 2xy - 4y - 8, \quad \dot{y} = -x^2 + 4y^2.$

3.2.  $\dot{x} = x^2 - y^2 - 1, \quad \dot{y} = 2y.$

- 3.3.  $\dot{x} = x - y$ ,  $\dot{y} = x^2 + y^2 - 2$ .
- 3.4.  $\dot{x} = x + y + 1$ ,  $\dot{y} = y + \sqrt{1 + 2x^2}$ .
- 3.5.  $\dot{x} = x^2 - y$ ,  $\dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3$ .
- 3.6.  $\dot{x} = \ln(2 - y^2)$ ,  $\dot{y} = e^x - e^y$ .
- 3.7.  $\dot{x} = (2x - y)(x - 2)$ ,  $\dot{y} = xy - 2$ .
- 3.8.  $\dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2$ ,  $\dot{y} = \operatorname{arctg}(x^2 + xy)$ .
- 3.9.  $\dot{x} = x^2 - y$ ,  $\dot{y} = x^2 - (y - 2)^2$ .
- 3.10.  $\dot{x} = \ln \frac{y^2 - y + 1}{3}$ ,  $\dot{y} = x^2 - y^2$ .
- 3.11.  $\dot{x} = \ln(1 - y + y^2)$ ,  $\dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}$ .
- 3.12.  $\dot{x} = \sqrt{(x - y)^2 + 3} - 2$ ,  $\dot{y} = e^{y^2 - x} - e$ .

## 4. ОДНОРІДНІ ТА КВАЗІОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ НА ПЛОЩИНІ

У цьому розділі будемо розглядати системи нелінійних диференціальних рівнянь на площині зі спеціальною правою частиною, а саме системи з поліноміальною правою частиною [9]. Лінійні системи були розглянуті в попередньому розділі. Зараз перейдемо до систем з однорідною та квазіоднорідною правою частинами.

### 4.1. Особливі точки однорідних систем

Розглянемо систему на площині

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y). \quad (1)$$

Функції  $P(x, y)$  та  $Q(x, y)$  є однорідними одного степеня (багаточлени одного степеня):

$$P(x, y) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} y + \dots + b_m y^m,$$

$$Q(x, y) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \dots + a_m y^m.$$

Перейдемо до полярної системи координат

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Тоді похідні матимуть вигляд

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi}.$$

Підставимо заміну в систему рівнянь. Отримаємо

$$\begin{aligned} & \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} = \\ & = r^m [b_0 \cos^m \varphi + b_1 \cos^{m-1} \varphi \sin \varphi + \dots + b_m \sin^m \varphi], \\ & \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} = \\ & = r^m [a_0 \cos^m \varphi + a_1 \cos^{m-1} \varphi \sin \varphi + \dots + a_m \sin^m \varphi]. \end{aligned}$$

Уведемо такі позначення:

$$A(\varphi) = a_0 \cos^m \varphi + a_1 \cos^{m-1} \varphi \sin \varphi + \dots + a_m \sin^m \varphi,$$

$$B(\varphi) = b_0 \cos^m \varphi + b_1 \cos^{m-1} \varphi \sin \varphi + \dots + b_m \sin^m \varphi.$$

Система набуде вигляду

$$\begin{aligned} \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} &= r^m B(\varphi), \\ \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} &= r^m A(\varphi). \end{aligned}$$

Помноживши перше рівняння на  $\cos \varphi$ , друге – на  $\sin \varphi$  і склавши їх, отримаємо

$$\dot{r} = r^m [B(\varphi) \cos \varphi + A(\varphi) \sin \varphi]. \quad (2)$$

Далі, помноживши перше рівняння на  $-\sin \varphi$ , друге – на  $\cos \varphi$  і склавши їх, отримаємо

$$r \dot{\varphi} = r^m [-B(\varphi) \sin \varphi + A(\varphi) \cos(\varphi)],$$

або

$$\dot{\varphi} = r^{m-1} [-B(\varphi) \sin \varphi + A(\varphi) \cos(\varphi)]. \quad (3)$$

Поділимо рівняння (2) на рівняння (3):

$$\frac{dr}{d\varphi} = -r \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)},$$

де

$$Z(\varphi) = A(\varphi) \sin \varphi + B(\varphi) \cos \varphi,$$

$$N(\varphi) = -A(\varphi) \cos \varphi + B(\varphi) \sin \varphi,$$

тобто неперервно диференційовані та  $2\pi$ -періодичні функції.

Розглянемо рівняння

$$N(\varphi) = 0,$$

яке може бути записане як багаточлен  $(m+1)$ -го степеня щодо аргументу  $\operatorname{tg} \varphi$ , тобто

$$N_1(\operatorname{tg} \varphi) = 0.$$

Воно має не більш ніж  $(m+1)$  дійсних коренів  $\varphi_k$ , кожен з яких визначає промені  $\varphi = \varphi_k$  і  $\varphi = \varphi_k + \pi$ , тобто пряму, що проходить крізь початок координат.

**Теорема.** *Фазовий портрет в околі нульової особливої точки може мати такий вигляд:*

1. Нехай рівняння  $N(\varphi) = 0$  не має дійсних коренів.

а) Якщо  $\int_0^{2\pi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)} d\varphi = 0$ , то всі інтегральні криві замкнені, тобто особлива точка – центр (рис. 4.1).

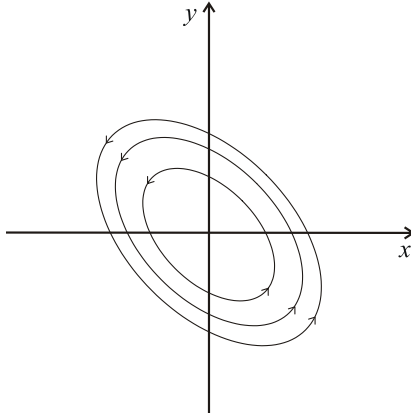


Рис. 4.1

б) Якщо  $\int_0^{2\pi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)} d\varphi > 0$ , то  $\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} r(\varphi) = 0$ , тобто особлива точка – стійкий фокус (рис. 4.2).

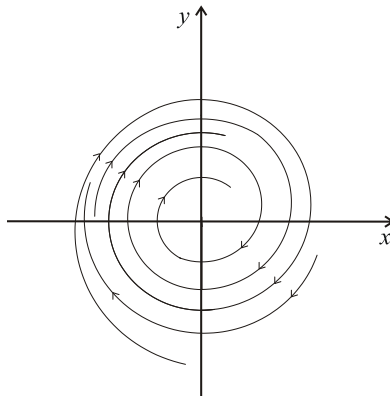


Рис. 4.2

в) Якщо  $\int_0^{2\pi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)} d\varphi < 0$ , то  $\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} r(\varphi) = +\infty$ , тобто особлива точка – нестійкий фокус (рис. 4.3).

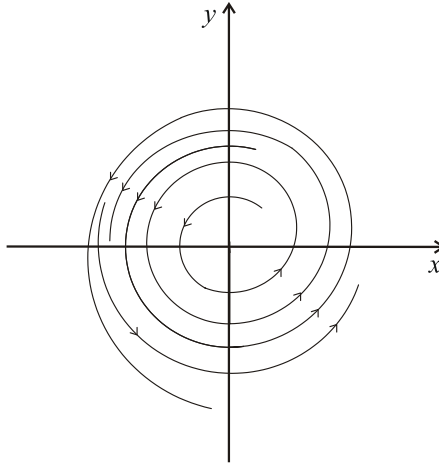


Рис. 4.3

2. Нехай рівняння  $N(\varphi) = 0$  має дійсний корінь  $\varphi = \varphi^*$  кратністю  $k$ . Оскільки  $N(\varphi)$  – однорідна функція степеня  $k$ , то можна записати:

$$N(\varphi) = \sin^k(\varphi - \varphi^*) Q(\varphi), \quad Q(\varphi^*) \neq 0.$$

а) Якщо  $k = 2n + 1$  (непарне) і  $\frac{Z(\varphi^*)}{Q(\varphi^*)} > 0$ , то інтегральні

криві по обидва боки променя при  $\varphi \rightarrow \varphi^*$  віддаляються від початку координат (ізолюваний нестійкий промінь) (рис. 4.4).

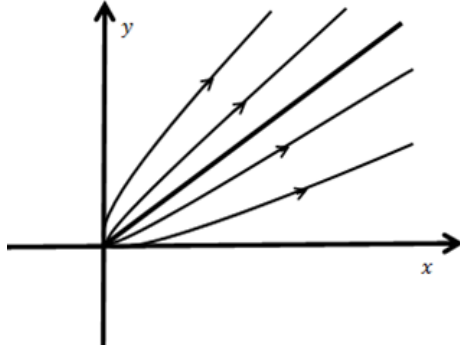


Рис. 4.4

б) Якщо  $k = 2n + 1$  (непарне) і  $\frac{Z(\varphi^*)}{Q(\varphi^*)} > 0$ , то інтегральні криві по обидва боки променя при  $\varphi \rightarrow \varphi^*$  прямують до променя (стійкий вузловий промінь)  $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi^* \pm 0} r(\varphi) = 0$  (рис. 4.5).

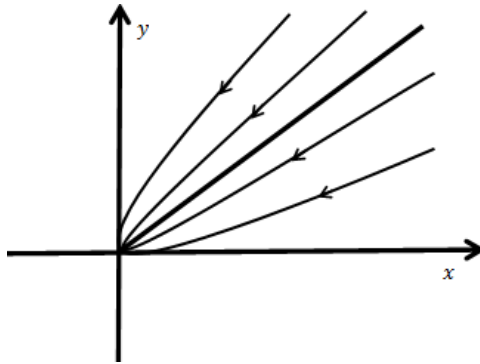


Рис. 4.5

в) Якщо  $k = 2n$  (парне), то  $\varphi = \varphi^*$  – промінь різної поведінки, а саме: якщо  $\frac{Z(\varphi^*)}{Q(\varphi^*)} < 0$ , то  $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi^* + 0} r(\varphi) = 0$ ,  $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi^* - 0} r(\varphi) = +\infty$  (рис. 4.6).

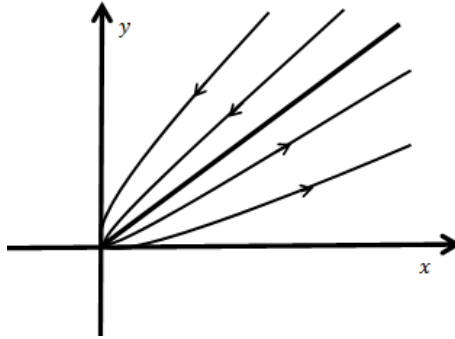


Рис. 4.6

Якщо  $\frac{Z(\varphi^*)}{Q(\varphi^*)} > 0$ , то  $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi^* + 0} r(\varphi) = +\infty$ ,  $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi^* - 0} r(\varphi) = 0$  (рис. 4.7).

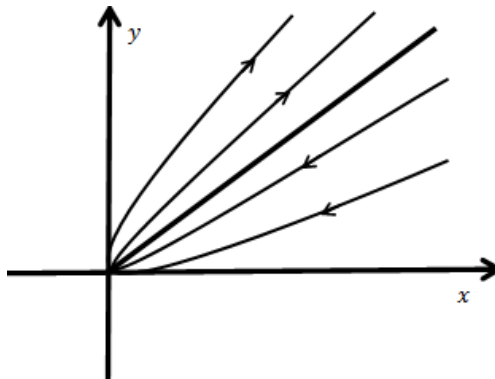


Рис. 4.7

*Доведення.* Розділивши змінні в диференціальному рівнянні, отримаємо

$$\frac{dr}{r} = -\frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)} d\varphi.$$

Звідси

$$\ln r = \ln r_0 - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)} d\varphi.$$



Остаточно

$$r(\varphi, \varphi_0, r_0) = r_0 \exp \left\{ - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)} d\varphi \right\}.$$

Наслідки теореми впливають із дослідження отриманої залежності.

## 4.2. Лінійна система на площині

Розглянемо лінійну стаціонарну систему

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy,$$

яка була детально досліджена в попередньому розділі. Вона однорідна першого степеня, а тому є частковим випадком системи (1), що відповідає  $m+1=2$ .

Уведемо полярну систему координат

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Підставивши ці вирази в систему, отримаємо:

$$\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} = ar \cos \varphi + br \sin \varphi,$$

$$\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} = cr \cos \varphi + dr \sin \varphi.$$

Помноживши перше рівняння на  $\cos \varphi$ , а друге – на  $\sin \varphi$  і склавши їх, отримаємо

$$\dot{r} = r[a \cos \varphi + b \sin \varphi] \cos \varphi + r[c \cos \varphi + d \sin \varphi] \sin \varphi. \quad (4)$$

Далі, помноживши перше рівняння на  $-\sin \varphi$ , а друге – на  $\cos \varphi$  і склавши їх, дістанемо

$$r \dot{\varphi} = -r[a \cos \varphi + b \sin \varphi] \sin \varphi + r[c \cos \varphi + d \sin \varphi] \cos \varphi. \quad (5)$$

Розділимо рівняння (4) на рівняння (5):

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{[a \cos \varphi + b \sin \varphi] \cos \varphi + [c \cos \varphi + d \sin \varphi] \sin \varphi}{-[a \cos \varphi + b \sin \varphi] \sin \varphi + [c \cos \varphi + d \sin \varphi] \cos \varphi},$$

або

$$\frac{dr}{d\varphi} = -r \frac{d \sin^2 \varphi + (b+c) \sin \varphi \cos \varphi + a \cos^2 \varphi}{-b \sin^2 \varphi + (d-a) \sin \varphi \cos \varphi + c \cos^2 \varphi}.$$

Розділимо другий вираз на  $\cos \varphi$ . Рівняння

$$N(\operatorname{tg} \varphi) = 0$$

набуває вигляду

$$b \operatorname{tg}^2 \varphi + (a - d) \operatorname{tg} \varphi - c = 0$$

і є квадратним рівнянням щодо аргументу  $\operatorname{tg} \varphi$ . Його корені

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \frac{-(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2b}.$$

Повернемося до початкової системи. Її характеристичне рівняння

$$\det \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Коренями є

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)} \right\}.$$

Умовою періодичності є відсутність дійсних коренів рівняння, тобто

$$(a-d)^2 + 4bc < 0$$

і

$$\int_0^{2\pi} \frac{d \sin^2 \varphi + (b+c) \sin \varphi \cos \varphi + a \cos^2 \varphi}{-b \sin^2 \varphi + (d-a) \sin \varphi \cos \varphi + c \cos^2 \varphi} d\varphi = 0.$$

### 4.3. Квазіоднорідні рівняння на площині. Можливі типи особливої точки для квазіоднорідної системи на площині

Розглянемо систему на площині

$$\dot{x} = \tilde{P}(x, y), \quad \dot{y} = \tilde{Q}(x, y), \quad (6)$$

де функції  $P(x, y)$  та  $\tilde{Q}(x, y)$  описуються рівняннями

$$\tilde{P}(x, y) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} y + \dots + b_m y^m + d(x, y),$$

$$Q(x, y) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \dots + a_m y^m + l(x, y).$$

Тут  $d(x, y)$ ,  $l(x, y)$  – поліноми, степінь яких вище ніж  $m$ . Природно виникає запитання, за яких умов, що накладаються на функції  $d(x, y)$  та  $l(x, y)$ , локальний фазовий портрет нульової особливої точки системи збігається з фазовим портретом попередньої однорідної системи (проблема, аналогічна дослідженню за лінійним наближенням).

Перейдемо до полярної системи координат

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Тоді систему (6) запишемо таким чином:

$$\dot{r} = r^m [Z(\varphi) + \Delta(r, \varphi)], \quad \dot{\varphi} = -r^{m-1} [N(\varphi) + E(r, \varphi)].$$

Перепишемо останню систему у вигляді рівняння

$$\frac{dr}{d\varphi} = -r \frac{Z(\varphi) + \Delta(r, \varphi)}{N(\varphi) + E(r, \varphi)}.$$

Очевидно, що якщо члени  $\Delta(r, \varphi)$  і  $E(r, \varphi)$  достатньо малі порівняно із  $Z(\varphi)$  і  $N(\varphi)$ , то фазові портрети початкової системи та скороченої системи

$$\frac{dr}{d\varphi} = -r \frac{Z(\varphi)}{N(\varphi)}$$

в околі нульового стану рівноваги будуть топологічно еквівалентними. Проте, на відміну від лінійного наближення, умови малості тут жорсткіші.

Щодо малості збурень зробимо такі припущення [25, с. 97]:

$$1. \lim_{r \rightarrow 0} \Delta(r, \varphi) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} E(r, \varphi) = 0 \text{ рівномірно відносно } \varphi.$$

2. Якщо рівняння  $N(\varphi) = 0$  не має дійсних коренів, то існує таке  $\rho_0$ , за якого навколо кожної точки  $(r_0, \varphi_0)$  області  $0 \leq r \leq \rho_1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  можна описати такий прямокутник, що

$$|\Delta(r_1, \varphi) - \Delta(r_2, \varphi)| + |E(r_1, \varphi) - E(r_2, \varphi)| \leq H(r_0, \varphi_0) |r_1 - r_2|.$$

Зокрема, ця умова (по суті, умова Ліпшица) виконується, якщо функції  $\Delta(r, \varphi)$  та  $E(r, \varphi)$  мають обмежені частинні похідні за  $r$ .

3. Нехай рівняння  $N(\varphi) = 0$  має дійсні корені, записані в порядку зростання  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ,  $\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi$ . Нехай вони ізольовані, а саме: існує  $\rho_1$  і для кожного  $\varphi_\nu$  числа  $\bar{\varphi}_\nu$  та  $\overline{\overline{\varphi}}_\nu$ ,  $\nu = \overline{1, n}$ , такі, що:

$$3.1. \quad \bar{\varphi}_\nu < \varphi < \overline{\overline{\varphi}}_\nu.$$

3.2. В інтервалах  $\bar{\varphi}_\nu \leq \varphi \leq \overline{\overline{\varphi}}_\nu$  немає коренів рівняння  $Z(\varphi) = 0$ .

3.3. Навколо кожної точки  $(r_0, \varphi_\nu)$  області

$$0 \leq r \leq \rho_1, \quad \bar{\varphi}_\nu < \varphi < \overline{\overline{\varphi}}_\nu, \quad \nu = \overline{1, n}$$

можна описати такий прямокутник, що

$$|\Delta(r, \varphi_1) - \Delta(r, \varphi_2)| + |E(r, \varphi_1) - E(r, \varphi_2)| \leq H(r_0, \varphi_\nu) |\varphi_1 - \varphi_2|,$$

$$|\Delta(r_1, \varphi) - \Delta(r_2, \varphi)| + |E(r_1, \varphi) - E(r_2, \varphi)| \leq H(r_0, \varphi_\nu) |r_1 - r_2|.$$

4. Якщо  $\varphi = \psi_\nu -$  ізольований промінь кратністю  $\lambda_\nu$  для скороченого рівняння, то мають існувати числа  $\omega > 0$ ,  $\rho_2 > 0$  та деяке  $\mu < 1$  таке, що:

4.1. В області  $\psi_\nu - \omega \leq \varphi \leq \psi_\nu + \omega$ ,  $0 \leq r \leq \rho_2$  похідні  $\partial\Delta(r, \varphi)/\partial\varphi$  і  $\partial E(r, \varphi)/\partial\varphi$  існують та обмежені.

4.2. Якщо позначити  $g_\nu(r) = \max_{\psi_\nu - \omega \leq \varphi \leq \psi_\nu + \omega} \{E(r, \varphi)\}$ , то

$$\int_0^{\rho} \frac{g_\nu(r)}{r} dr = E < \infty.$$

4.3. Якщо позначити  $h_\nu(r) = \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \left\{ \left| \frac{\partial E(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right| \right\}$ , то знай-

деться таке  $g > 0$ , що  $0 \geq \int_0^{\rho} \frac{h_\nu(r)}{r} dr > -g$ .

5. Якщо для скороченого диференціального рівняння промінь  $\varphi = \varphi_v$  є променем різної поведінки, то мають існувати такі  $\gamma_1 > 0$  та  $R_1 > 0$ , що для функції  $g_v(r) = \max_{\varphi_v - \gamma_1 \leq \varphi \leq \varphi_v + \gamma_1} \{E(r, \varphi)\}$  інтеграл повинен збігатися.

Якщо виконуються жорсткіші умови  $\frac{E(r, \varphi)}{r^\alpha} \rightarrow 0$ ,  $\frac{\Delta(r, \varphi)}{r^\alpha} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$  та деякому  $\alpha > 0$ , то зазначені умови 1)–5) виконуються тим більше.

З використанням наведених умов було доведено таке.

**Теорема** (аналог теореми про лінійне наближення [25, с. 97]).  
*Мають місце такі твердження:*

1. *Якщо для скороченого рівняння початок координат є фокусом, то він буде фокусом і для повного рівняння.*

2. *Якщо для скороченого рівняння початок координат є центром, то для повного рівняння він буде або центром, або фокусом.*

3. *Якщо в повному рівнянні існує інтегральна крива, що прямує до початку координат, тобто*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} [x^2(t) + y^2(t)]^{1/2} \rightarrow 0,$$

*то ця крива або спіраль, або вона входить у початок координат з визначеним напрямком дотичної, що визначається коренем рівняння  $N(\varphi) = 0$ .*

4. *Якщо для скороченого рівняння  $\varphi = \varphi_v$  є вузловий промінь, то і для повного рівняння у напрямку  $\varphi = \varphi_v$  до початку координат входить нескінченна множина інтегральних кривих.*

5. *Якщо для скороченого рівняння  $\varphi = \varphi_v$  є вузловий промінь, то для повного рівняння існує лише одна інтегральна крива  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $r = r(t)$ , що входить до початку координат, і для неї справджується*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \varphi_v.$$

6. Якщо  $\varphi = \chi_v$  для скороченого рівняння є інтегральним променем різної поведінки, то для повного рівняння існує інтегральна крива, для якої

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \chi_v.$$

Інтегральні криві, які виходять із точок, близьких до початку координат, і які лежать з одного боку променя  $\varphi = \chi_v$ , входять у початок координат з дотичною, кутовий коефіцієнт якої  $y' = \operatorname{tg} \psi_v$ , а інтегральні криві, що починаються в точках, близьких до початку координат з іншого боку променя, не входять у початок координат за цим напрямком.

**Приклад.** Розглянемо систему

$$\dot{x} = -x + \frac{2y}{\ln(x^2 + y^2)}, \quad \dot{y} = -y - \frac{2x}{\ln(x^2 + y^2)}.$$

Скорочена система має вигляд

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -y.$$

Особлива точка є виродженим стійким вузлом (рис. 4.8).

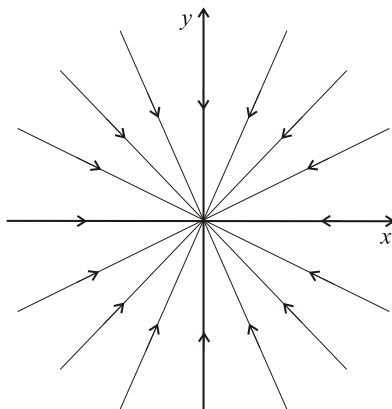


Рис. 4.8

Повернемося до початкової системи. Перейдемо до полярних координат

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Підставивши останні вирази в початкову систему, отримаємо

$$\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} = -r \cos \varphi + \frac{r \sin \varphi}{\ln r},$$

$$\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} = -r \sin \varphi - \frac{r \cos \varphi}{\ln r}.$$

Помноживши перше рівняння на  $\cos \varphi$ , друге – на  $\sin \varphi$  і склавши їх, отримаємо

$$\dot{r} = -r.$$

Помноживши перше рівняння на  $-\sin \varphi$ , друге – на  $\cos \varphi$  і склавши їх, дістанемо

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{\ln r}.$$

Перше рівняння легко інтегрується. Його розв'язком, що задовольняє початкову умову  $r(0) = r_0$ , буде

$$r(t) = r_0 e^{-t}.$$

Підставивши отримане значення в друге рівняння, отримаємо

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{t - \ln r_0}.$$

Проінтегрувавши отримане рівняння, матимемо

$$\varphi(t) = \ln |t - \ln r_0| + \ln c.$$

Підставивши початкові умови  $\varphi(0) = \varphi_0$ , дістанемо  $\varphi_0 = \ln [c |\ln r_0|]$ .

Звідси отримаємо  $c = \frac{e^{\varphi_0}}{|\ln r_0|}$ . Отже,

$$\varphi(t) = \ln |t - \ln r_0| + \ln \frac{e^{\varphi_0}}{|\ln r_0|},$$

або

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \ln \left| \frac{t - \ln r_0}{\ln r_0} \right|.$$

Таким чином, при  $t \rightarrow +\infty$  буде  $r(t) \rightarrow 0$ ,  $\varphi(t) \rightarrow +\infty$ , тобто нульовий стан є нестійким фокусом і відкидання членів вищого порядку не завжди можливе (рис. 4.9).

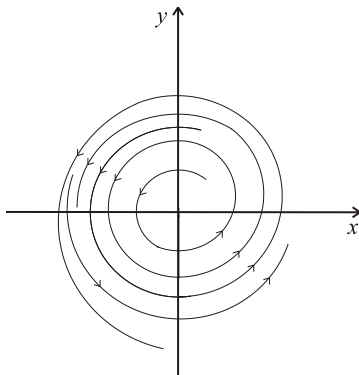


Рис. 4.9



## 5. ПРОБЛЕМА ЦЕНТРА-ФОКУСА

Якщо характеристичне рівняння системи лінійного наближення не має дійсних коренів, то особлива точка може бути або центром, або стійким (нестійким) фокусом. Проблема визначення типу точки в такому випадку називається проблемою центра-фокуса.

### 5.1. Умови існування центра

Нехай задана система диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = Q_n(x, y) + Q_{n+1}(x, y) + \dots, \quad (1)$$

$$\dot{y} = P_n(x, y) + P_{n+1}(x, y) + \dots, \quad (2)$$

де  $P_i(x, y)$ ,  $Q_i(x, y)$  – однорідні поліноми  $i$ -го степеня,  $i = n, n+1, n+2, \dots$ . Увівши полярну систему координат

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

і виконавши перетворення, аналогічні перетворенням з розділу 4, розділимо рівняння (2) на рівняння (1). Отримаємо

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \frac{p_{n+1}(\varphi) + r p_{n+2}(\varphi) + r^2 p_{n+3}(\varphi) + \dots}{q_{n+1}(\varphi) + r q_{n+2}(\varphi) + r^2 q_{n+3}(\varphi) + \dots}.$$

Тут

$$p_{n+1+i}(\varphi) = P_{n+i}(\cos \varphi, \sin \varphi) \sin \varphi + Q_{n+i}(\cos \varphi, \sin \varphi) \cos \varphi,$$

$$q_{n+1+i}(\varphi) = P_{n+i}(\cos \varphi, \sin \varphi) \cos \varphi - Q_{n+i}(\cos \varphi, \sin \varphi) \sin \varphi,$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

Причому функція  $q_{n+1}(\varphi)$  не має дійсних коренів.

Розглянемо сім'ю замкнених кривих

$$f(r, \varphi) = r f_0(\varphi) + r^2 f_1(\varphi) + r^3 f_2(\varphi) + \dots$$

і визначимо функції  $f_0(\varphi)$ ,  $f_1(\varphi)$ , ... як періодичні функції змінної  $\varphi$  таким чином, щоб

$$f(\varphi) = \text{const}$$

було першим інтегралом рівняння. За визначенням інтеграла для цього необхідно, щоб повна похідна вздовж розв'язків рівняння дорівнювала нулю, тобто

$$\frac{df(r, \varphi)}{dt} = \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = 0.$$

Звідси

$$\frac{dr}{d\varphi} = - \frac{\partial f(r, \varphi) / \partial \varphi}{\partial f(r, \varphi) / \partial r}.$$

Підставивши в записаний вираз частинні похідні функції  $f(r, \varphi)$ , отримаємо

$$\frac{dr}{d\varphi} = - \frac{rf'_0(\varphi) + r^2 f'_1(\varphi) + r^3 f'_2(\varphi) + \dots}{f_0(\varphi) + 2rf_1(\varphi) + 3r^2 f_2(\varphi) + \dots}.$$

Прирівнявши записаний вираз до початкового диференціального рівняння, дістанемо

$$\begin{aligned} r \frac{p_{n+1}(\varphi) + rp_{n+2}(\varphi) + r^2 p_{n+3}(\varphi) + \dots}{q_{n+1}(\varphi) + rq_{n+2}(\varphi) + r^2 q_{n+3}(\varphi) + \dots} &= \\ &= - \frac{rf'_0(\varphi) + r^2 f'_1(\varphi) + r^3 f'_2(\varphi) + \dots}{f_0(\varphi) + 2rf_1(\varphi) + 3r^2 f_2(\varphi) + \dots}. \end{aligned}$$

Звівши подібні та згрупувавши члени при однакових степенях  $r^i$ , матимемо

$$\begin{aligned} &r[q_{n+1}(\varphi)f'_0(\varphi) + p_{n+1}(\varphi)f_0(\varphi)] + \\ &+ r^2[q_{n+1}(\varphi)f'_1(\varphi) + 2p_{n+1}(\varphi)f_1(\varphi) + f'_0(\varphi)q_{n+2}(\varphi) + f_0(\varphi)p_{n+2}(\varphi)] + \\ &+ \dots = 0. \end{aligned}$$

Неважко бачити, що, прирівнюючи кожен з коефіцієнтів при  $r^i$   $i=1,2,3,\dots$  до нуля, отримаємо відносно функцій  $f_i(x)$ ,  $i=0,1,2,\dots$  лінійні диференціальні рівняння

$$q_{n+1}(\varphi)f'_i(x) + (i+1)p_{n+1}(\varphi)f_i(x) + R_i(\varphi) = 0, \quad i=0,1,2,\dots$$

Причому коефіцієнти при похідній невідомої функції повторюються, при самій функції відрізняються на сталу, а функція  $R_i(\varphi)$  залежить лише від попередніх членів, тобто є відомою.

**Теорема.** Для існування центра необхідно й достатньо, щоб система диференціальних рівнянь (скінченна або зліченна) мала періодичні з періодом  $T = 2\pi$  розв'язки.

*Доведення.* Для  $i = 0$  рівняння має вигляд лінійного однорідного рівняння першого порядку

$$q_{n+1}(\varphi) \frac{df_0(\varphi)}{d\varphi} + p_{n+1}(\varphi) f_0(\varphi) = 0.$$

Його розв'язком є

$$f_0(\varphi) = f_0(0) e^{-\int_0^\varphi \frac{p_{n+1}(t)}{q_{n+1}(t)} dt}.$$

Розв'язок  $f_0(\varphi)$  буде періодичною функцією, якщо

$$f_0(\varphi) = f_0(\varphi + 2\pi).$$

Для цього достатньо, щоб

$$\int_0^{2\pi} \frac{p_{n+1}(t)}{q_{n+1}(t)} dt = 0.$$

Розглянемо рівняння

$$q_{n+1}(\varphi) \frac{df_1(\varphi)}{d\varphi} + 2p_{n+1}(\varphi) f_1(\varphi) = R_1(\varphi),$$

$$R_1(\varphi) = -f_0'(\varphi) q_{n+2}(\varphi) - f_0(\varphi) p_{n+2}(\varphi).$$

Його розв'язком буде

$$f_1(\varphi) = f_1(0) e^{-2 \int_0^\varphi \frac{p_{n+1}(t)}{q_{n+1}(t)} dt} + \int_0^\varphi \frac{R_1(t)}{q_{n+1}(t)} e^{-2 \int_0^t \frac{p_{n+1}(s)}{q_{n+1}(s)} ds} dt.$$

Якщо виконується умова періодичності для першого рівняння, то умова періодичності для другого рівняння

$$f_1(\varphi) = f_1(\varphi + 2\pi)$$

має вигляд

$$\int_0^{2\pi} e^{-2 \int_0^t \frac{p_{n+1}(s)}{q_{n+1}(s)} ds} \frac{R_1(t)}{q_{n+1}(t)} dt = 0.$$

Подальші умови періодичності запишемо таким чином:

$$\int_0^{2\pi} e^{-k \int_0^t \frac{p_{n+1}(s)}{q_{n+1}(s)} ds} \frac{R_k(t)}{q_{n+1}(t)} dt = 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

## 5.2 Умови існування центра за наявності лінійних членів

За наявності членів першого порядку центр може існувати лише в тому випадку, коли система зводиться до вигляду

$$\dot{x} = y + q(x, y), \quad \dot{y} = -x + p(x, y),$$

де

$$q(x, y) = q_2(x, y) + q_3(x, y) + \dots + q_n(x, y) + \dots$$

$$p(x, y) = p_2(x, y) + p_3(x, y) + \dots + p_n(x, y) + \dots,$$

$p_i(x, y)$ ,  $q_i(x, y)$  – однорідні багаточлени  $i$ -го порядку.

Візьмемо функцію

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + f_3(x, y) + f_4(x, y) + \dots + f_n(x, y) + \dots$$

Для того, щоб  $f(x, y)$  була інтегралом системи, необхідно й достатньо, щоб її повна похідна вздовж розв'язків системи дорівнювала нулю, тобто щоб

$$\frac{df(x, y)}{dt} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$$

або виконувалася умова

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f(x, y) / \partial x}{\partial f(x, y) / \partial y} = -\frac{2x + f'_{3x}(x, y) + f'_{4x}(x, y) + \dots}{2y + f'_{3y}(x, y) + f'_{4y}(x, y) + \dots}.$$

Перепишемо початкову систему як рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + p(x, y)}{y + q(x, y)}$$

або, ураховуючи функції  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$ , у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + p_2(x, y) + p_3(x, y) + \dots + p_n(x, y) + \dots}{y + q_2(x, y) + q_3(x, y) + \dots + q_n(x, y) + \dots}$$

Порівнюючи два записані вирази, отримаємо

$$\begin{aligned} & -\frac{2x + f'_{3x}(x, y) + f'_{4x}(x, y) + \dots}{2y + f'_{3y}(x, y) + f'_{4y}(x, y) + \dots} = \\ & = \frac{-x + p_2(x, y) + p_3(x, y) + \dots + p_n(x, y) + \dots}{y + q_2(x, y) + q_3(x, y) + \dots + q_n(x, y) + \dots} \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} & [2x + f'_{3x}(x, y) + f'_{4x}(x, y) + \dots] \times [y + q_2(x, y) + q_3(x, y) + \dots] + \\ & + [2y + f'_{3y}(x, y) + f'_{4y}(x, y) + \dots] \times [-x + p_2(x, y) + p_3(x, y) + \dots] = 0. \end{aligned}$$

Нехай  $f_n(x, y)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  – однорідні багаточлени степеня  $n$ , які описуються рівнянням

$$f_n(x, y) = A_{n0}x^n + A_{n-1,1}x^{n-1}y + A_{n-2,2}x^{n-2}y^2 + \dots + A_{0,n}y^n.$$

Прирівняємо члени одного степеня. Сукупність членів третього порядку можна зобразити виразами

$$2xq_2(x, y) + yf'_{3x}(x, y) + 2yp_2(x, y) - xf'_{3y}(x, y) = 0$$

або

$$yf'_{3x}(x, y) - xf'_{3y}(x, y) = -2xq_2(x, y) - 2yp_2(x, y).$$

Оскільки  $p_2(x, y)$  та  $q_2(x, y)$  – відомі поліноми, то праву частину можна записати у вигляді

$$-2xq_2(x, y) - 2yp_2(x, y) = B_{30}x^3 + B_{21}x^2y + B_{12}xy^2 + B_{03}y^3,$$

де  $B_{30}$ ,  $B_{21}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{03}$  – відомі числа.

Оскільки  $f_3(x, y)$  – однорідний багаточлен третього степеня, то ліву частину виразу можна описати як

$$yf'_{3x}(x, y) - xf'_{3y}(x, y) = y(3A_{30}x^2 + 2A_{21}xy + A_{12}y^2) - x(A_{21}x^2 + 2A_{12}xy + 3A_{03}y^2).$$

Для третіх степенів отримаємо рівняння

$$y(3A_{30}x^2 + 2A_{21}xy + A_{12}y^2) - x(A_{21}x^2 + 2A_{12}xy + 3A_{03}y^2) = B_{30}x^3 + B_{21}x^2y + B_{12}xy^2 + B_{03}y^3.$$

Порівнявши коефіцієнти, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} x^3 : -A_{21} &= B_{30}, \\ x^2y : 3A_{30} - 2A_{12} &= B_{21}, \\ xy^2 : 2A_{21} - 3A_{03} &= B_{12}, \\ y^3 : A_{12} &= B_{03}. \end{aligned}$$

Визначник системи має вигляд

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Система має єдиний розв'язок.

Розглянемо члени четвертого порядку. Їх сукупність можна описати виразами

$$\begin{aligned} 2xq_3(x, y) + f'_{3x}(x, y)q_2(x, y) + yf'_{4x}(x, y) + 2yp_3(x, y) + \\ + f'_{3y}(x, y)p_2(x, y) - xf'_{4y}(x, y) = 0 \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} yf'_{4x}(x, y) - xf'_{4y}(x, y) = \\ = -f'_{3x}(x, y)q_2(x, y) - f'_{3y}(x, y)p_2(x, y) - 2xq_3(x, y) - 2yp_3(x, y). \end{aligned}$$

Оскільки  $p_3(x, y)$  і  $q_3(x, y)$  – відомі поліноми, а функція  $f_3(x, y)$  обчислена, то праву частину можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} -f'_{3x}(x, y)q_2(x, y) - f'_{3y}(x, y)p_2(x, y) - 2xq_3(x, y) - 2yp_3(x, y) = \\ = B_{40}x^4 + B_{31}x^3y + B_{22}x^2y^2 + B_{13}xy^3 + B_{04}y^4, \end{aligned}$$

де  $B_{40}, B_{31}, B_{22}, B_{13}, B_{04}$  – відомі числа.

Оскільки  $f_3(x, y)$  – однорідний багаточлен третього степеня, то ліву частину виразу можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} yf'_{4x}(x, y) - xf'_{4y}(x, y) = y(4A_{40}x^3 + 3A_{31}x^2y + 2A_{22}xy^2 + A_{13}y^3) - \\ - x(A_{31}x^3 + 2A_{22}x^2y + 3A_{13}xy^2 + 4A_{04}y^3). \end{aligned}$$

Прирівнюючи обидва вирази, для третіх степенів отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} y(4A_{40}x^3 + 3A_{31}x^2y + 2A_{22}xy^2 + A_{13}y^3) - \\ - x(A_{31}x^3 + 2A_{22}x^2y + 3A_{13}xy^2 + 4A_{04}y^3) = \\ = B_{40}x^4 + B_{31}x^3y + B_{22}x^2y^2 + B_{13}xy^3 + B_{04}y^4. \end{aligned}$$

Порівнявши коефіцієнти при однакових степенях, отримаємо систему чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} x^4 : -A_{31} &= B_{40}, \\ x^3y : 4A_{40} - 2A_{22} &= B_{31}, \\ x^2y^2 : 3A_{31} - 3A_{13} &= B_{22}, \\ xy^3 : 2A_{22} - 4A_{04} &= B_{13}, \\ y^4 : A_{13} &= B_{04}. \end{aligned}$$

Визначник системи має вигляд

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Система вироджена. Розв'язок існує в особливих випадках. Якщо він існує, то розглядаються члени п'ятого порядку; якщо ні, то стан рівноваги – фокус.

Таким чином, у разі наявності членів першого порядку для існування центра необхідно виконання нескінченної кількості умов. Було показано (О. М. Ляпунов), що ці умови є також достатніми.

Задача про **ефективне розрізнення центра та фокуса** в разі диференціальних рівнянь із багаточленами в правій частині ставиться таким чином. Нехай багаточлени, що входять до рівняння, мають степінь  $n$ . Необхідно вказати число  $N(n)$  таке, що при  $i > N(n)$  умови існування розв'язку виконуватимуться завжди. Ця задача поки що не розв'язана.

Для рівнянь із квадратичною правою частиною має місце такий результат.

**Теорема** [25, с. 132]. *Нехай система з квадратичною правою частиною зображена рівняннями*

$$\dot{x} = y + bx^2 + (2c + \alpha)xy + dy^2,$$

$$\dot{y} = x + ax^2 + (2b + \beta)xy + cy^2.$$

*Нульовий стан рівноваги є центром у таких випадках:*

1)  $a + c = 0, b + d = 0;$

2)  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{b+d}{a+c} = k, ak^3 - (3b + \alpha)k^2 + (3c + \beta)k - d = 0;$

3)  $\alpha = 0, \beta = 0;$

4)  $a = c = \beta = 0;$

5)  $b + d = \alpha = \beta + 5a + 5c = ac + 2a^2 + d^2 = 0, (a + c \neq 0);$

6)  $a_1 + c_1 = \beta_1 = \alpha_1 + 5b_1 + 5d_1 = b_1d_1 + 2d_1^2 + a_1^2 = 0, (b + d \neq 0),$

де  $a_1, b_1, c_1, d_1$  – коефіцієнти рівняння, отриманого з вихідного шляхом повороту  $x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi, y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi,$

причому  $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{a+c}{b+d}.$



## 6. ІНДЕКС ПУАНКАРЕ

Іноді зручно побудувати хоча і грубу, але легко обчислювану характеристику особливої точки й замкненої кривої, яка називається **індексом Пуанкаре**.

Розглянемо систему на площині

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y).$$

Нехай в області  $G$  площини задана замкнена крива  $\Gamma$ , що не проходить крізь особливі точки (крива може мати точки самоперетинів). Візьмемо на кривій точку  $M(x, y)$  і проведемо крізь неї вектор  $\bar{V} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ . При обході кривої вектор  $\bar{V}$  може зробити кілька повних обертів, тобто обернутися на кут  $2\pi J_\Gamma$ , де  $J_\Gamma$  – ціле число. Напрямок вважається додатним, якщо він збігається з додатним напрямком обходу контуру (при обході область залишається ліворуч). Число  $J_\Gamma$  називається **індексом замкненої кривої** у векторному полі  $\bar{V} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ .

Уведене число  $J_\Gamma$  має такі властивості.

1. Величина  $J_\Gamma$  не змінюється, якщо до кривої  $\Gamma$  застосувати неперервну деформацію, за якої вона не проходить крізь особливі точки й сама не вироджується в точку.

2. Величина  $J_\Gamma$  не змінюється, якщо векторне поле  $\bar{V} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$  (тобто система диференціальних рівнянь) піддається неперервній деформації, за якої вектори в жодній точці не перетворюються на протилежно спрямовані або на нульові.

Дійсно, нехай є два векторних поля  $\bar{V}(M)$  і  $\bar{V}_1(M_1)$  таких, що

$$\alpha \bar{V}(M) + \beta \bar{V}_1(M_1) \neq 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Розглянемо допоміжне векторне поле

$$\bar{V}_2(M) = (1 - \lambda) \bar{V}(M) + \lambda \bar{V}_1(M_1), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

На кривій  $\Gamma$  буде  $\bar{V}_2(M) \neq 0$  і, відповідно, індекс цього поля визначений однозначно й при зміні  $\lambda$  не змінюється.

3. Розглянемо третю властивість. Нехай є дуга  $\cup L = AB$  з кінцями в точках  $A$  та  $B$ . Будемо розглядати рух точки  $M$  по дузі від  $A$  до  $B$ . При русі вектор  $\vec{V}(M)$  буде обертатися. **Обертання векторного поля** вздовж  $AB$  будемо позначати  $\omega_{AB}$ . Ця величина – приріст кута повороту векторного поля при русі по траєкторії  $AB$ .

З наведеного визначення випливає:

1. Обертання векторного поля вздовж замкненої кривої дорівнює індексу кривої у векторному полі.

2. Якщо є дві дуги  $AB$  і  $BC$ , які складають одну дугу  $AC$ , то обертання вздовж  $AC$  дорівнює сумі обертань уздовж  $AB$  і  $BC$ .

3. **Властивість адитивності індексу.** Нехай дано дві замкнені криві  $K_1 = MABM$  і  $K_2 = M_1ABM_1$ , які мають спільну дугу  $AB$  (рис. 6.1), причому додатні напрямки обходу за спільною частиною протилежні.

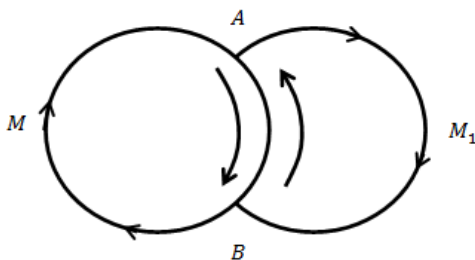


Рис. 6.1

Тоді  $J_{K_1} + J_{K_2} = J_{MAM_1BM}$ .

Дійсно:

$$2\pi J_{K_1} = \omega_{M_1BAM_2} = \omega_{M_1B} + \omega_{BA} + \omega_{AM_2},$$

$$2\pi J_{K_2} = \omega_{MBAM} = \omega_{MA} + \omega_{AB} + \omega_{BM}.$$

Складаючи ці величини й ураховуючи, що  $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$ , отримаємо

$$2\pi J_{K_1} + 2\pi J_{K_2} = \omega_{MAM_1BM} = J_{MAM_1BM}.$$

Визначимо поняття індексу точки. Нехай задана точка  $M$ . Оточимо її замкненим контуром  $K$ , який або не містить усередині особливої точки (якщо  $M$  не особлива), або містить лише одну (якщо  $M$  особлива). **Індексом точки** назвемо індекс  $J_K$  (індекс побудованої навколо неї замкненої кривої).

Справедливі такі твердження.

**Теорема.** *Індекс неособливої точки дорівнює нулю.*

*Доведення.* Дійсно, унаслідок неперервності точку  $M$  можна оточити околом  $K$  настільки малого радіуса, щоб напрямок векторного поля  $\vec{V}$  у її точках був менше  $\pi/2$ . Порівнюючи початкове векторне поле  $\vec{V}$  з **випрямленням**  $\vec{V}_1$ , тобто таким, у якого всі вектори паралельні одному вектору  $\vec{V}(M)$ , що проходить крізь точку  $M$ , на основі викладених вище властивостей отримаємо твердження теореми.

**Теорема.** *Якщо всередині опуклого замкненого контуру  $K$  міститься скінченна кількість особливих точок, то індекс замкненої кривої, тобто  $J_K$ , дорівнює алгебраїчній сумі індексів особливих точок, укладених усередині цього контуру.*

*Доведення.* Нехай задано контур  $K$ . Область, обмежену цим контуром, можна розбити на окремі області, усередині кожної з яких міститься лише по одній особливій точці (рис. 6.2).

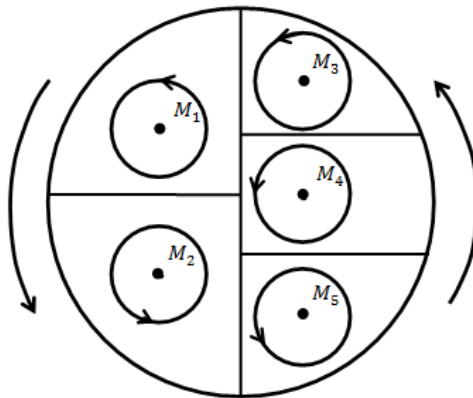


Рис. 6.2

Якщо обходи по кожному з контурів визначити узгодженими з обходом по всьому контуру (тобто щоб при обході контуру область залишалася ліворуч), то на підставі адитивності індексу отримаємо твердження теореми.

**Теорема.** *Нехай на площині задана система*

$$\dot{x} = P_n(x, y) + F_m(x, y), \quad \dot{y} = Q_m(x, y) + F_m(x, y),$$

причому

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{F_n^2(x, y) + F_m^2(x, y)}{P_n^2(x, y) + Q_m^2(x, y)} = 0$$

і початок координат є ізольованою особливою точкою. Тоді індекси початку координат скороченої системи

$$\dot{x} = P_n(x, y), \quad \dot{y} = Q_m(x, y)$$

і вихідної збігаються.

**Доведення.** Нехай

$$\bar{V}(M) = \{P_n(x, y) + F_n(x, y), Q_m(x, y) + F_m(x, y)\}$$

– векторне поле початкової системи

$$\dot{x} = P_n(x, y) + F_m(x, y), \quad \dot{y} = Q_m(x, y) + F_m(x, y),$$

а

$$\bar{V}_1(M) = \{P_n(x, y), Q_m(x, y)\}$$

– векторне поле скороченої системи.

Візьмемо коло  $C$ , яке містить початок координат настільки малого радіуса, що

$$\left| \bar{V}_2(M) \right| = \sqrt{F_n^2(x, y) + F_m^2(x, y)} < \alpha \left| \bar{V}(M) \right|,$$

де  $\alpha > 0$  – довільне наперед задане число. У середині кола  $C$  векторне поле  $\bar{V}(M)$  може розглядатися як поле  $\bar{V}_1(M)$ , складене з полем  $\bar{V}_2(M)$ , модуль якого  $\left| \bar{V}_2(M) \right|$  рівномірно малий відносно  $\bar{V}_1(M)$ . Можна також узяти  $\alpha$  (по суті, ра-

діус кола) настільки малим, щоб відповідні аргументи векторного поля відрізнялися не більше ніж на  $\pi/4$ . Тоді, згідно з другою властивістю, крива  $C$  має однакові індекси відносно  $\bar{V}(M)$  та  $\bar{V}_1(M)$ .

*Наслідок.* Якщо в системі лінійних рівнянь

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy$$

визначник  $\Delta = ad - bc \neq 0$ , а початок координат має індекс, відмінний від нуля, то в системі

$$\dot{x} = ax + by + P(x, y), \quad \dot{y} = cx + dy + Q(x, y),$$

де  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  – нескінченно малі вищого порядку, індекс такий самий.

Для обчислення індексу ізольованої особливої точки використовується залежність, яка називається **формулою Пуанкаре**. Оскільки для системи диференціальних рівнянь на площині

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y)$$

буде

$$\arg \bar{V}(M) = \arctg \frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

то

$$J_c = \frac{1}{2\pi} \oint_C d \left( \arctg \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \right) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2}.$$

Оскільки на контурі особливих точок немає, то підінтегральна функція неперервна на  $C$ .

Як частинний випадок цієї теореми сформулюємо такий результат.

**Теорема.** Якщо особлива точка лінійної системи на площині

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy$$

є фокусом, центром чи вузлом, то  $J_K = +1$ , якщо сідлом, – то  $J_K = -1$ .

*Доведення.* Дійсно, обчислимо індекс згідно з формулою Пуанкаре:

$$J_c = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{(ax+by)d(cx+dy) - (cx+dy)d(ax+by)}{(ax+by)^2 + (cx+dy)^2}.$$

За замкнену криву візьмемо еліпс

$$C = \{(x, y) : (ax+by)^2 + (cx+dy)^2 = 1\}.$$

Це можливо, оскільки визначник системи відмінний від нуля. Отримаємо

$$\begin{aligned} J_c &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{(ax+by)d(cx+dy) - (cx+dy)d(ax+by)}{1} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_C [(ax+by)c - (cx+dy)a] dx + [(ax+by)d - (cx+dy)b] dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_C [(bc-ad)y dx + (ad-bc)x dy] = \frac{1}{2\pi} \oint_C (x dy - y dx), \end{aligned}$$

$$\Delta = ad - bc.$$

Оскільки

$$\oint_C (x dy - y dx) = 2S,$$

де  $S$  – площа області, обмежена кривою, тобто еліпсом

$$(ax+by)^2 + (cx+dy)^2 = 1,$$

то  $J_C = \frac{\Delta}{\pi} S.$

Перейдемо до нових координат:

$$\xi = ax + by, \quad \eta = cx + dy.$$

Еліпс перетвориться на коло  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ . Площа круга, обмеженого цим колом, становитиме

$$S_1 = S \left| \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right| = S|ad - bc| = S|\Delta|.$$

Звідси

$$S = \frac{S_1}{|\Delta|} = \frac{\pi 1^2}{|\Delta|}.$$

Отримуємо

$$J_C = \frac{\Delta}{\pi |\Delta|}.$$

Оскільки добуток коренів характеристичного рівняння

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

згідно з теоремою Вієта становить

$$\lambda_1 \lambda_2 = (ad - bc) = \Delta,$$

то для фокуса, центра або вузла  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  та  $J_C = 1$ , а для сідла –  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$  і  $J_C = -1$ .

## 7. КРИТЕРІЙ ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Розглянемо кілька достатніх умов існування (або неіснування) періодичних розв'язків систем на площині.

### 7.1. Критерій Бендіксона

Однією з таких умов є критерій Бендіксона. Узагалі кажучи, він не є критерієм, тобто необхідною й достатньою умовою, однак історично склалося, що його називають критерієм.

**Теорема** (критерій Бендіксона). *Якщо в однозв'язній області  $G$ , обмеженій контуром  $C$ , частинні похідні функцій  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$  неперервні, а сума  $\frac{\partial}{\partial x}P(x, y) + \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y)$  зберігає знак і не обертається на нуль, то область  $G$  не має замкнених траєкторій.*

*Доведення.* Нехай, від супротивного, система

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y)$$

має в області  $G$  періодичний розв'язок  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  з періодом  $T$ , тобто  $x(t+T) = x(t)$  і  $y(t+T) = y(t)$ , який обмежує область  $G$  із границею  $C$ . Обчислимо криволінійний інтеграл другого роду по контуру, який відображує цю криву:

$$\begin{aligned} I &= \oint P(x, y) dy - Q(x, y) dx = \\ &= \int_0^T [P(x(t), y(t))Q(x(t), y(t)) - Q(x(t), y(t))P(x(t), y(t))] dt \equiv 0. \end{aligned}$$

З іншого боку, згідно з формулою Стокса

$$I = \oint P(x, y) dy - Q(x, y) dx = \iint_G \left[ \frac{\partial}{\partial x}P(x, y) + \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y) \right] dx dy \neq 0,$$

оскільки за умовою вираз  $\frac{\partial}{\partial x}P(x, y) + \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y)$  зберігає знак.

Зазначене протиріччя доводить теорему.



**Приклад.** Критерій Бендіксона зручно застосовувати для системи вигляду

$$\dot{x} = p_1(x) + q_1(y), \quad \dot{y} = p_2(x) + q_2(y).$$

У цьому випадку перевірка критерію зводиться до розв'язування нерівності

$$p_1'(x) + q_2'(y) > 0.$$

**Приклад.** Розглянемо узагальнене рівняння коливання маятника:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0.$$

Тут  $f(x)$  – коефіцієнт тертя,  $g(x)$  – відновлювальна сила. Перепишемо рівняння другого порядку у вигляді системи двох рівнянь першого порядку:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x)y - g(x).$$

Із критерію Бендіксона випливає:

$$\frac{\partial}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} Q(x, y) = -f(x).$$

Таким чином, якщо в смузі  $a \leq x \leq b$  функція  $f(x)$  зберігає знак, то в цій смузі періодичні розв'язки відсутні.

## 7.2. Метод кривих контактів

Нехай є система замкнених диференційованих кривих, що не перетинаються (поверхонь рівня)

$$F(x, y) = c.$$

**Кривою контактів** назвемо геометричне місце точок дотику системи кривих з інтегральними кривими, обумовленими системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y).$$

Перепишемо систему у вигляді одного рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

Візьмемо диференціал системи кривих  $F(x, y) = c$ . Отримаємо

$$dF(x, y) = F'_x(x, y)dx + F'_y(x, y)dy = 0,$$

або

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

**Рівняння кривої контактів** визначається рівністю

$$-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

Звідси отримуємо таке твердження:

*Якщо крива контактів не має дійсних гілок і не обертається на нуль на деякій множині, то на цій множині немає періодичних розв'язків вигляду*

$$F(x, y) = c.$$

**Приклад.** Розглянемо систему кіл

$$x^2 + y^2 = c.$$

Рівняння кривої контактів має вигляд

$$-\frac{x}{y} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

Якщо функція

$$\Phi(x, y) = \frac{P(x, y)x + Q(x, y)y}{yP(x, y)}$$

зберігає знак і не обертається на нуль, то система не має розв'язків вигляду  $x^2 + y^2 = c$ , тобто періодичних траєкторій у вигляді кіл.

**Приклад.** Розглянемо маятник з тертям, який перебуває під впливом постійного моменту  $P$ . Рівняння руху

$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = P.$$

Тут  $\varphi$  – кут відхилення маятника,  $I$  – момент інерції,  $h$  – коефіцієнт тертя,  $m$  – маса точки,  $l$  – довжина маятника,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $P$  – постійний момент.

Перепишемо рівняння у вигляді системи

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\omega} = -\frac{mgl}{I} \sin \varphi - \frac{h}{I} \omega + \frac{P}{I}.$$

Оскільки кут змінюється в межах  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , то фазовим простором буде циліндр. Замкнені криві будуть системою кіл (паралелей), що перетинають циліндр  $\omega = \text{const}$ . Рівняння кривої контактів

$$\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

має вигляд

$$\frac{-\frac{mgl}{I} \sin \varphi - \frac{h}{I} \omega + \frac{P}{I}}{\omega} = 0$$

або

$$\omega = \frac{1}{h} [P - mgl \sin \varphi].$$

Звідси бачимо, що поза смугою

$$\frac{P - mgl}{h} \leq \varphi \leq \frac{P + mgl}{h}$$

періодичних траєкторій не існує.

### 7.3. Принцип симетрії

Розглянемо систему

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y),$$

у якій початок координат – особлива точка, тобто  $P(0,0) = Q(0,0) = 0$ , а функції  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$  задовольняють умови:

1. Функція  $P(x, y)$  непарна щодо аргументу  $x$ , тобто  $P(-x, y) = -P(x, y)$ , а функція  $Q(x, y)$  є парною щодо  $x$ , тобто  $Q(-x, y) = Q(x, y)$ .

2. Аналогічно  $P(x, y)$  парна щодо аргументу  $y$ , тобто  $P(x, -y) = P(x, y)$ , а функція  $Q(x, y)$  непарна щодо  $y$ , тобто  $Q(x, -y) = -Q(x, y)$ .

З першого припущення випливає, що інтегральні криві симетричні відносно осі  $Oy$ . Щоб показати, що інтегральна крива замкнена, достатньо, щоб вона починалася на осі  $Oy$  і при подальшому продовженні за деякий час знову виходила на  $Oy$ .

Аналогічний результат випливає з другого припущення.

Розглянемо систему

$$\dot{x} = y + P(x, y), \quad \dot{y} = -x + Q(x, y),$$

де функції  $P(x, y)$  та  $Q(x, y)$  – аналітичні, порядку вище першого. З лінійного наближення випливає, що початок координат – або фокус, або центр. На підставі принципу симетрії отримуємо, що якщо функція  $P(x, y)$  містить лише члени непарного степеня за аргументом  $x$ , а функція  $Q(x, y)$  – лише члени парного степеня за аргументом  $x$ , то особлива точка – центр.

Аналогічно, якщо функція  $P(x, y)$  містить лише члени парного степеня за аргументом  $y$ , а функція  $Q(x, y)$  – лише члени непарного степеня за аргументом  $y$ , то особлива точка – центр.

## 8. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ

Одним з важливих розділів механіки, який описується диференціальними рівняннями, є теорія коливання [12–15]. Рівняння вигляду

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + f(x) = F(x, \dot{x})$$

описують найпростіші коливальні процеси. Тут  $g(x)$  – коефіцієнт тертя,  $f(x)$  – відновлювальна сила. Коливання системи називаються вільними, якщо вони визначаються тільки станом системи, а саме: відновлювальною силою, пропорційною стану системи, і опором середовища, пропорційним швидкості. Рівняння руху мають вигляд

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + f(x) = 0.$$

Якщо залежності лінійні, то систему називають **лінійним осцилятором**. Рівняння лінійного осцилятора мають вигляд

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

### 8.1. Лінійні коливання

Розглянемо рівняння лінійного осцилятора.

1. За відсутності опору середовища рівняння коливання мають вигляд ( $x$  – кут повороту)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Загальний розв'язок рівняння

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t,$$

або

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0).$$

Тут  $A$  – амплітуда коливань,  $\omega$  – частота коливань. Графік руху має вигляд синусоїди (рис. 8.1). Період коливань становить  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

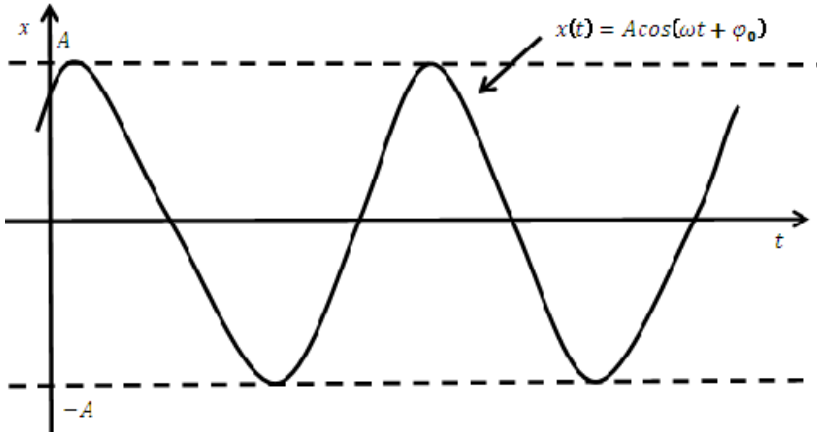


Рис. 8.1

2. Якщо на систему діє опір, то рівняння руху набуває вигляду

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (n > \omega).$$

Розглянемо окремі випадки.

а) Нехай опір не дуже великий, тобто  $n < \omega$ . Тоді характеристичне рівняння має комплексні корені

$$\lambda_{1,2} = -n \pm i\sqrt{n^2 - \omega^2}$$

з від'ємною дійсною частиною. Загальний розв'язок рівняння

$$x(t) = Ae^{-nt} \cos(\omega_1 t + \varphi_0), \quad \omega_1 = \sqrt{n^2 - \omega^2}.$$

Оскільки  $n > 0$ , то амплітуда коливань прямує до нуля, тобто  $Ae^{-nt} \rightarrow 0$ , і коливання згасають. Графік руху зображує затухаючі гармонійні коливання (рис. 8.2).

Проміжок часу  $\tau$  між двома послідовними нулями з однаковим напрямком вектора швидкості називається **періодом затухання** ( $\tau = 2\pi/\omega_1$ ). Відношення двох послідовних найбільших відхилень від стану рівноваги в один бік називається **коефіцієнтом затухання**. Він описується рівнянням

$$\Psi = \frac{Ae^{-nt}}{Ae^{-n(t+\tau)}} = e^{n\tau} = e^{\frac{2\pi n}{\sqrt{\omega^2 - n^2}}}.$$

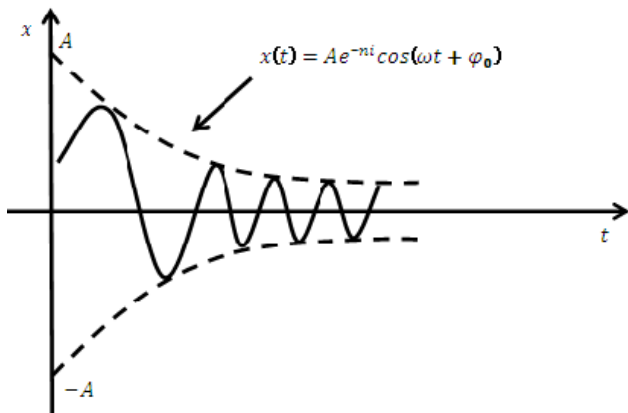


Рис. 8.2

Іноді, для зручності, обчислюють логарифмічний коефіцієнт згасання (логарифмічний декремент згасання)

$$\delta = \frac{2\pi n}{\sqrt{\omega^2 - n^2}}.$$

б) Нехай опір середовища великий, тобто  $n > \omega$ . У цьому випадку характеристичне рівняння має дійсні, різні, від'ємні корені:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}.$$

Загальний розв'язок рівняння

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Сталі  $c_1$  і  $c_2$  знаходимо з початкових умов  $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = x'_0$ .

Для їх знаходження розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = x'_0 \end{cases}.$$

Отримуємо

$$c_1 = \frac{\lambda_2 x_0 - x'_0}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad c_2 = \frac{x'_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Загальний розв'язок

$$x(t) = \frac{\lambda_2 x_0 - x'_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{x'_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}.$$

Перетин початку координат можливий лише при

$$\frac{\lambda_2 x_0 - x'_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{x'_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} = 0.$$

Оскільки  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , то

$$e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = -\frac{x'_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 x_0 - x'_0}, \quad T = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left[ \frac{\lambda_1 x_0 - x'_0}{\lambda_2 x_0 - x'_0} \right].$$

Таким чином, якщо перетин можливий, то лише один раз. Оскільки власні числа від'ємні, то розв'язок аперіодично (експоненціально) затухає (рис. 8.3, 8.4).

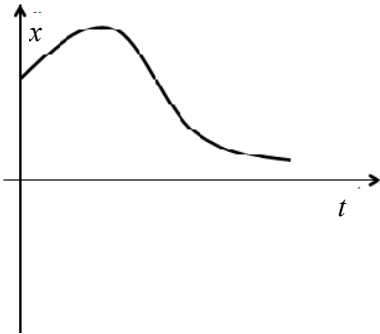


Рис. 8.3

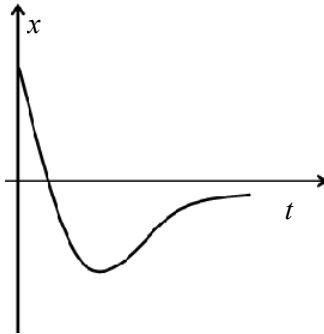


Рис. 8.4

в) Якщо значення опору середовища збігається з половиною значення величини тертя, тобто  $n = \omega$ , то корені дійсні, кратні, від'ємні, тобто  $\lambda_1 = \lambda_2 = -n$ . Загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x(t) = e^{-nt} (c_1 + c_2 t).$$

Підставляючи в нього початкові умови

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0,$$



отримуємо систему рівнянь

$$c_1 = x_0, \quad -nc_1 + c_2 = x'_0.$$

Звідси  $c_1 = x_0$ ,  $c_2 = x'_0 + nx_0$  і розв'язок має вигляд

$$x(t) = e^{-nt} [x_0 + (x'_0 + nx_0)t].$$

Екстремального значення розв'язок набуває при  $T : x'(T) = 0$ .

Прирівнявши до нуля похідну

$$x'(T) = -ne^{-nT} [x_0 + (x'_0 + nx_0)T] + e^{-nT} (x'_0 + nx_0) = 0,$$

отримаємо

$$T = \frac{1}{n} - \frac{x_0}{x'_0 + nx_0}.$$

Таким чином, якщо сплеск амплітуди відбувається ( $T > 0$ ), то він один, а розв'язок аперіодично згасає. Графіки кривих мають аналогічний вигляд.

## 8.2. Найпростіші нелінійні коливання

Розглянемо лінійну консервативну систему з одним ступенем вільності. Запишемо рівняння руху:

$$\ddot{x} + f(x) = 0.$$

Рівняння інтегрується у квадратурах. Помноживши обидві частини рівняння на  $\dot{x}dt$ , отримаємо

$$\ddot{x}\dot{x}dt + f(x)\dot{x}dt = 0.$$

Проінтегруємо отримане рівняння:

$$\frac{1}{2}(\dot{x})^2 + \int_{x_0}^x f(x)dx = h.$$

Інтеграл

$$\Pi(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx$$

називається **інтегралом енергії**. Перший інтеграл диференціального рівняння має вигляд

$$\frac{1}{2}(\dot{x})^2 + \Pi(x) = h.$$

Стала  $h$  визначається початковим відхиленням і початковою швидкістю, тобто початковим запасом повної енергії. Якщо перейти до фазової площини, то диференціальне рівняння другого порядку перетвориться на систему

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x). \quad (1)$$

Її першим інтегралом буде

$$\frac{1}{2}y^2 + \Pi(x) = h.$$

Крива  $z = \Pi(x)$ , що зображує залежність потенціальної енергії від відхилення, називається **кривою енергетичного балансу системи**.

#### **Властивості кривої енергетичного балансу**

1. Рівняння  $\frac{1}{2}y^2 + \Pi(x) = h$  симетричне щодо осі  $Ox$ .

2. Особливі точки (точки спокою) визначаються із системи рівнянь

$$y = 0, \quad f(x) = 0.$$

В особливій точці похідна потенціальної енергії дорівнює нулю:

$$\frac{d}{dx}\Pi(x) = 0,$$

і тоді потенціальна енергія набуває екстремального значення.

3. Якщо крива енергетичного балансу  $z = \Pi(x)$  у точці  $x_0$  набуває мінімального значення, то в околі точки  $M_0(x_0, 0)$  з'являються замкнені цикли (рис. 8.5).

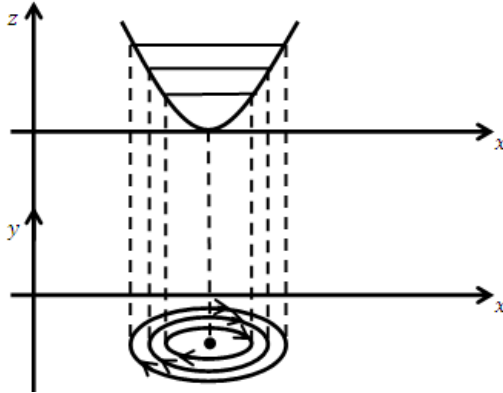


Рис. 8.5

4. Якщо крива енергетичного балансу  $z = \Pi(x)$  у точці  $x_0$  набуває максимального значення, то в околі точки  $M_0(x_0, 0)$  з'являються гіперболи (стан рівноваги – сідло, рис. 8.6).

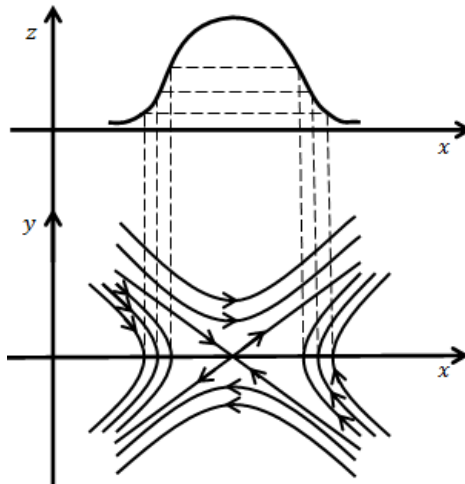


Рис. 8.6

5. Обчислимо період коливання для випадку циклів. З першого рівняння системи (1) випливає

$$\dot{x} = y \Rightarrow \frac{dx}{dt} = y \Rightarrow dt = \frac{dx}{y} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{2[h - \Pi(x)]}}.$$

Якщо перетин замкненої кривої (циклу) з віссю  $Ox$  проходить крізь точки  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$ , то період становить

$$T = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{2[h - \Pi(x)]}}.$$

**Приклад.** Розглянемо нелінійне коливання маятника з кінцевою амплітудою за відсутності тертя. Нехай  $l$  – довжина маятника,  $\theta$  – кут відхилення від вертикалі. Тоді рівняння руху

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Перепишемо рівняння другого порядку у вигляді системи двох рівнянь першого порядку:

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta.$$

Перший інтеграл

$$\frac{1}{2} \omega^2 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{g}{l} \sin \theta d\theta = 0.$$

Обчисливши інтеграл, отримаємо

$$\frac{1}{2} \omega^2 = \frac{g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0) = 2 \frac{g}{l} \left( \sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

Звідси

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{g}{l} \left( \sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}.$$

Період коливання обчислюємо відповідно до залежності

$$T = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{g}{l} \left( \sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}}.$$

Виконаємо заміну  $\sin \frac{\theta}{2} = u \sin \frac{\theta_0}{2} = ku$ ,  $k = \sin \frac{\theta_0}{2}$ . Тоді для обчислення інтеграла отримаємо залежність

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

яка є еліптичним інтегралом. Для випадку малих коливань можна зробити заміну:

$$\sin^2 \frac{\theta_0}{2} \approx \theta_0^2, \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} \approx \theta^2.$$

Тоді інтеграл легко обчислюємо й отримуємо

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\pi.$$

Для нелінійних коливань еліптичний інтеграл замінюється його розкладанням у ряд:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\pi \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 k^4 + \dots \right].$$

Якщо взяти два члени розкладу, то, поклавши

$$k^2 = \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \approx \frac{\theta_0^2}{4},$$

отримаємо

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\pi \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right).$$

Зокрема, при  $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$  дістанемо

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\pi(1 + 0,014) = 1,014T_0.$$

Фазовий портрет системи зображено на рис. 8.7.

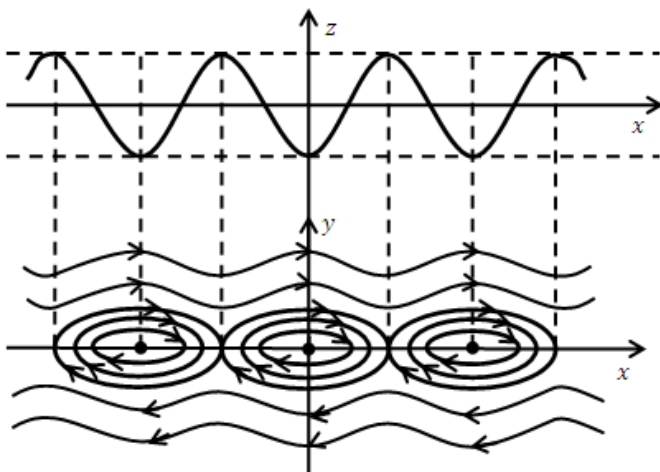


Рис. 8.7

### 8.3. Дисипативні системи

Дисипативні системи становлять групу систем, рух яких пов'язаний зі **втратами енергії, що не компенсуються**, і згасанням коливань. У дисипативних системах неможливі строго періодичні коливання. Втрати енергії викликаються здебільшого сухим (кулонівським) тертям, а також внутрішнім непружним зіткненням.

Найпростіша лінійна система, описана рівнянням

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

буде дисипативною, якщо  $n > 0$ .

### 8.4. Автоколивальні системи

Автоколивальною системою називається консервативна система, що здатна здійснювати згасаючі періодичні коливання та характеризується такими факторами [13, 14]:

- існуванням постійного джерела енергії;
- коливальністю системи;

- наявністю пристрою, що регулює надходження енергії в систему з джерела енергії;
- існуванням зворотного зв'язку між коливальною системою і регулюючим органом.

Здебільшого автоколивання виникають у системах із нелінійним опором. Класичним рівнянням, що описує автоколивальні системи, є рівняння Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} - a(1 - bx^2)\dot{x} + x = 0, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Параметр  $a$  характеризує "підкачування" енергії в систему за відсутності зовнішнього джерела і називається **параметром збудження**. Перепишемо рівняння у вигляді системи двох рівнянь першого порядку:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + a(1 - bx^2)y.$$

Дослідимо систему. Особливою точкою є початок координат  $O(0,0)$ . Система лінійного наближення в околі цієї точки має вигляд

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + ay.$$

Характеристичне рівняння системи лінійного наближення

$$\det\{A - \lambda E\} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & a - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a\lambda + 1 = 0.$$

Оскільки

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ a \pm \sqrt{a^2 - 4} \right],$$

то при  $0 < a < 2$  станом рівноваги є нестійкий фокус

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ a \pm \sqrt{a^2 - 4} \right].$$

Візьмемо функцію Ляпунова у вигляді повної енергії системи:

$$E(x, y) = T(y) + U(x) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x x dx = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Повна похідна функції  $E(x, y)$  унаслідок системи має вигляд

$$\frac{d}{dx}E(x, y) = xy + y[-x + a(1 - bx^2)y] = -a(bx^2 - 1)y^2.$$

При  $x^2 > \frac{1}{b}$  повна похідна недодатна. Система поводитья як дисипативна, тобто траєкторії входять у коло радіусом  $r = \frac{1}{\sqrt{b}}$ .

У загальному випадку рівняння Ван-дер-Поля не інтегрується і дослідження здійснюються чисельно. Показано, що існує один стійкий граничний цикл (рис. 8.8).

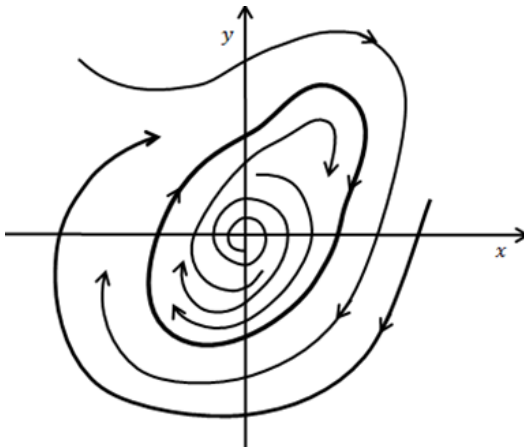


Рис. 8.8



## 9. СИСТЕМИ ЛАГРАНЖА

Одним з найбільш загальних принципів, що дозволяють побудувати рівняння руху, тобто математичну модель функціонування динамічної системи, є принцип найменшої дії (Гамільтона) [16]. Суть його полягає в такому. Нехай у моменти  $t = t_0$  і  $t = t_1$  система перебуває у стані  $x_0$  та  $x_1$ . Тоді з усіх можливих траєкторій, за якими система може перейти з  $x_0$  до  $x_1$ , реалізується лише траєкторія, що доставляє мінімум інтеграла

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt.$$

Функція  $L(x, \dot{x}, t)$  називається функцією Лагранжа системи, а інтеграл – дією. Необхідною умовою екстремуму функціонала є рівність нулю його першої варіації, тобто

$$\delta I[x(t)] = \delta \left[ \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt \right] = 0.$$

Обчислюючи варіацію функціонала, отримуємо

$$\begin{aligned} \delta I[x(t)] = & \int_{t_0}^{t_1} \left[ L_x(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta x(t) dt + \\ & + L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_1}. \end{aligned}$$

Оскільки розглядається задача із закріпленими кінцями, то другий доданок дорівнює нулю. Звідси

$$\delta I[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \left[ L_x(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta x(t) dt.$$

Як впливає із основної леми варіаційного числення, інтеграл дорівнює нулю при довільній функції  $\delta x(t)$  тоді й тільки тоді, коли дорівнює нулю підінтегральна функція. Таким чином, необхідна умова екстремуму функціонала  $I[x(t)]$  має вигляд

$$L_x(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(x, \dot{x}, t) = 0.$$

Системи, які визначаються рівняннями Ейлера – Лагранжа, називаються **системами Лагранжа**.

Взаємодія між  $n$  матеріальними точками з масами  $m_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  може бути описана функцією Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} - U(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

У цьому випадку величину  $T = \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i^2 / 2$  називають кінетичною енергією, а  $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – потенціальною енергією системи.

Потенційна енергія залежить тільки від розташування всіх матеріальних точок у той самий момент часу, і зміна положення однієї з них миттєво відображається на решті. Таким чином, варіаційний принцип Гамільтона стверджує, що серед усіх можливих рухів здійснюється рух, при якому досягається мінімум функціонала

$$I[q] = \int_{t_0}^{t_1} \left[ T(\dot{x}_1^2, \dot{x}_2^2, \dots, \dot{x}_n^2) - U(x_1, x_2, \dots, x_n) \right] dt,$$

де  $T(\cdot)$  – кінетична,  $U(\cdot)$  – потенціальна енергії системи.

Розглянемо частковий випадок, коли функція Лагранжа  $L(\bullet)$  залежить тільки від  $x(t)$  та  $\dot{x}(t)$ , тобто

$$L = L(x, \dot{x}).$$

У цьому випадку рівняння Ейлера – Лагранжа має вигляд

$$L_x(x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(x, \dot{x}) = 0,$$

або

$$L_x(x, \dot{x}) - L_{\dot{x}\dot{x}}(x, \dot{x})\dot{x} - L_{\ddot{x}\ddot{x}}\ddot{x} = 0.$$

Помножимо рівняння на  $\dot{x}$  та отримаємо

$$L_x(x, \dot{x})\dot{x} - L_{\dot{x}\dot{x}}(x, \dot{x})\dot{x}^2 - L_{\ddot{x}\ddot{x}}\ddot{x}\dot{x} = 0.$$

Перетворимо отримане рівняння таким чином:

$$\frac{d}{dt} [L(x, \dot{x}) - \dot{x}L_{\dot{x}}(x, \dot{x})] = 0.$$

Звідси дістанемо перший інтеграл:

$$L(x, \dot{x}) - \dot{x}L_{\dot{x}}(x, \dot{x}) = C_1.$$

Отже, якщо функція Лагранжа явно не залежить від часу, то рівняння Ейлера – Лагранжа має перший інтеграл вигляду

$$L(x, \dot{x}) - \dot{x}L_{\dot{x}}(x, \dot{x}) = C_1.$$

### Рівняння Лагранжа для системи матеріальних точок

Розглянемо систему матеріальних точок з масами  $m_i, i = \overline{1, n}$  і координатами  $(x_i, y_i, z_i)$ , на яку діють сили  $\vec{F}_i = (F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i})$ , зумовлені силовою (потенціальною) функцією  $-U(\bullet)$ , залежною тільки від координат, тобто

$$F_{x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, F_{y_i} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, F_{z_i} = -\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

У цьому випадку кінетична енергія

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

а потенціальна енергія дорівнює  $U$ . Інтеграл дії має вигляд

$$I[q] = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U(\bullet) \right] dt.$$

Система рівнянь Ейлера – Лагранжа записується таким чином:

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} = 0,$$

або

$$m\ddot{x}_i = F_{xi}, \quad m\ddot{y}_i = F_{yi}, \quad m\ddot{z}_i = F_{zi},$$

де

$$F_{xi} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad F_{yi} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad F_{zi} = -\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

## 10. СИСТЕМИ ГАМІЛЬТОНА

Формулювання законів за допомогою функції Лагранжа передбачає опис системи шляхом задання її узагальнених координат і швидкостей.

Можливий інший підхід, заснований на заданні узагальнених координат та імпульсів системи. Перехід від одного набору змінних до іншого можливий шляхом перетворення Лежандра [16].

Нехай функція Лагранжа залежить тільки від координат і швидкостей, тобто  $L = L(q, \dot{q})$ . Тоді її повний диференціал

$$dL = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

Його можна переписати у вигляді

$$dL = \sum_{i=1}^n \dot{p}_i d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i,$$

де  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$  – узагальнені імпульси, а  $\dot{p}_i = \partial L / \partial q_i$  – узагальнені сили. Перепишемо другий доданок у вигляді

$$\sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i = d \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right) - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i.$$

Звідси

$$\begin{aligned} d \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \right) &= \left[ \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i \right] - \left[ \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i \right] = \\ &= - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i. \end{aligned}$$

З визначення енергії випливає:

$$E = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial L}{\partial v_i} - L = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L$$

Енергія системи, виражена через координати та імпульси, називається функцією Гамільтона системи:

$$H(p, q, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

З вигляду диференціала для функції Гамільтона, отриманої вище, випливає, що

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Ці рівняння називають рівняннями Гамільтона.

## 11. ГРУБІ СИСТЕМИ

Очевидно, що практично неможливо записати систему рівнянь, яка повністю відповідає конкретній фізичній або технічній системі. При складанні математичної моделі завжди є невеликі неточності. Отже, модель має володіти якісними властивостями, що зберігаються при малих збуреннях.

Розглянемо динамічну систему на площині

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y),$$

визначену в деякій області  $\bar{G}$ , обмеженій кривою без контакту  $S$ . Поряд із вихідною системою розглянемо збурену систему

$$\dot{x} = P(x, y) + \Delta P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) + \Delta Q(x, y).$$

Тут  $\Delta P(x, y)$ ,  $\Delta Q(x, y)$  – малі додатки, що задають неточність опису системи [10, 17].

**Означення.** Динамічна система називається **грубою**, якщо для довільного  $\varepsilon > 0$  існує  $\delta > 0$  таке, що будь-яка збурена система зі збуреннями  $\Delta P(x, y)$  та  $\Delta Q(x, y)$ , які задовольняють умови

$$|\Delta P(x, y)| < \delta, \quad |\Delta Q(x, y)| < \delta, \quad |\Delta P'_x(x, y)| < \delta,$$

$$|\Delta P'_y(x, y)| < \delta, \quad |\Delta Q'_x(x, y)| < \delta, \quad |\Delta Q'_y(x, y)| < \delta,$$

буде топологічно еквівалентна вихідній, тобто існує взаємно однозначне відображення, що переводить траєкторії однієї системи в траєкторії іншої, при цьому відповідні точки перебуватимуть на відстані меншій, ніж точки, що лежать на траєкторії збуреної системи (рис. 11.1).

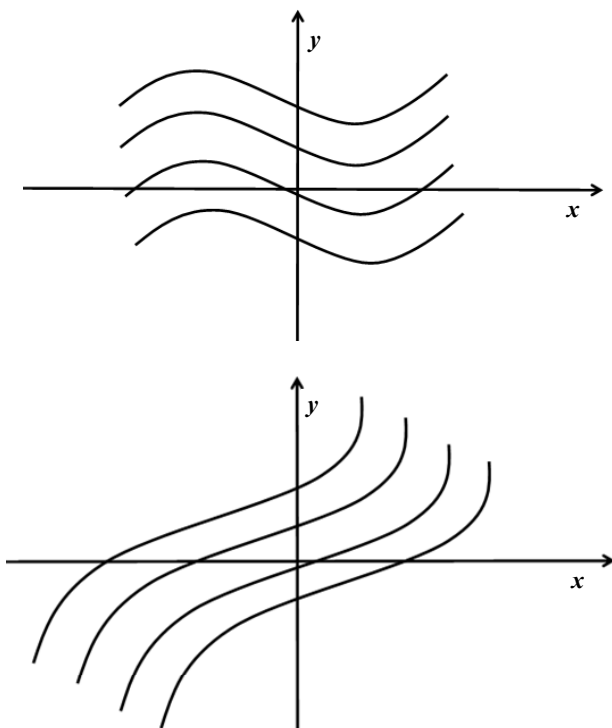


Рис. 11.1

Фактично це означає, що траєкторії вихідної та збуреної систем здійснюють  $\delta$ -близьке розбиття області  $\bar{G}$  на відповідні комірки.

**Теорема.** *Якщо система є грубою в замкненій, обмеженій області  $\bar{G}$ , то в неї може існувати тільки скінченна кількість станів рівноваги.*

**Доведення.** Оскільки праві частини диференціальних рівнянь є гладкими функціями, то незліченна множина станів рівноваги, тобто розв'язків системи

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0$$



у замкненій, обмеженій області  $\bar{G}$ , може існувати лише тоді, коли праві частини мають загальний множник, тобто криві збігаються на деякій ділянці (рис. 11.2).

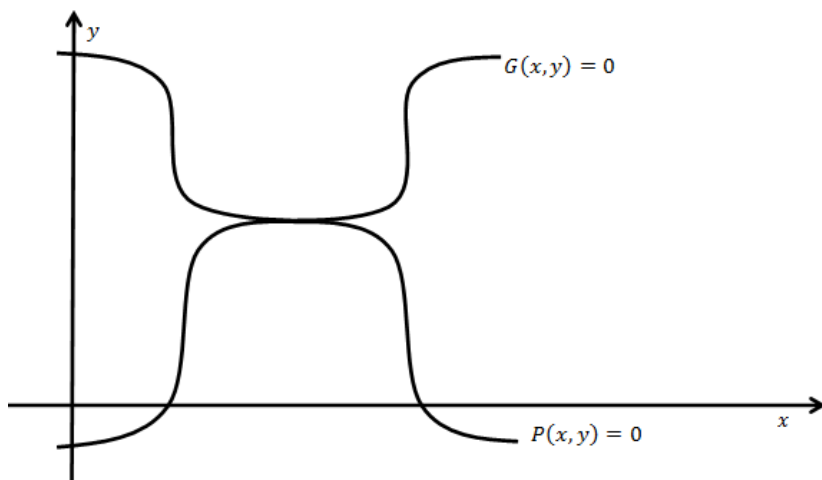


Рис. 11.2

Однак тоді як завгодно малим збуренням систему можна збурити таким чином, що перетин відбуватиметься лише в скінченній кількості точок, що суперечить припущенню про грубість.

Отже, у грубій системи всі стани рівноваги ізольовані.

Нехай  $M_0(x_0, y_0)$  – особлива точка. Позначимо

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

$$\sigma(x_0, y_0) = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0).$$

**Теорема.** Якщо система груба, то в неї не може бути особливої точки  $M_0(x_0, y_0)$ , у якої  $\Delta(x_0, y_0) = 0$ .

*Доведення.* Умова  $\Delta(x_0, y_0) = 0$  означає, що рядки матриці пропорційні, тобто криві

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0$$

у точці  $M_0(x_0, y_0)$  не просто перетинаються, а мають спільну дотичну. Однак тоді як завгодно малі збурення можуть викликати появу ще однієї особливої точки  $\tilde{M}_0(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ , що суперечить умові грубості

Таким чином, у грубій системі можливі тільки **прості стани рівноваги**. Стани рівноваги, можливі в грубих системах, називаються грубими станами рівноваги.

Прості стани рівноваги, у яких або  $\Delta > 0$  і  $\sigma \neq 0$ , або  $\Delta < 0$ , тобто вузол, фокус, сідло, є грубими. Можливий ще один простий стан рівноваги, у якого  $\Delta > 0$  і  $\sigma = 0$ . Для лінійних систем фазовий портрет є системою циклів, а при додаванні як завгодно малих нелінійних збурень положення рівноваги може переходити у фокус (стійкий або нестійкий).

Має місце таке твердження.

**Теорема.** *Якщо стан рівноваги системи із суто уявними характеристичними коренями є складним фокусом кратністю  $k \geq 1$ , то за будь-яких  $\varepsilon > 0$  і  $\delta > 0$  завжди існує  $\delta$ -близька система, у якій в  $\varepsilon$ -околі стану рівноваги існує принаймні один граничний цикл.*

Справедливим є також обернене твердження.

**Теорема.** *Якщо стан рівноваги системи є центром, то за будь-якого  $\delta > 0$  існує  $\delta$ -збурена система, у якій стан рівноваги є фокусом.*

Таке твердження відображує необхідну умову грубості.

**Теорема.** *Якщо система є грубою в  $\bar{G}$ , то вона не може мати станів рівноваги, для яких  $\Delta > 0$  і  $\sigma = 0$  (тобто стани рівноваги типу "цикл").*

Якщо для станів рівноваги основними характеристиками є власні числа, то аналогічними характеристиками для розв'язків є показники Ляпунова.

**Означення.** Показником Ляпунова, або просто характеристичним показником функції  $\varphi(t)$ ,  $t \geq t_0$ , називається число, яке визначається співвідношенням

$$\chi[\varphi(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\varphi(t)|.$$

Для експоненти  $\varphi(t) = e^{\lambda t}$  характеристичним показником буде

$$\chi[\varphi(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln e^{\lambda t} = \lambda.$$

Для лінійної системи зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n$$

у розв'язків може бути  $n$  різних показників Ляпунова, що є власними числами матриці  $A$ , тобто

$$\chi_i[x(t)] = \lambda_i(A), \quad i = \overline{1, n}.$$

Якщо показники Ляпунова дійсні та впорядковані за зростанням:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n,$$

то величина  $\lambda_n$  називається старшим показником Ляпунова.

Має місце така необхідна умова грубості.

**Теорема.** Якщо система є грубою в  $\overline{G}$ , то вона не може мати замкненої траєкторії з нульовим показником Ляпунова.

Нарешті розглянемо останню необхідну умову грубості. Як було показано, точками спокою в грубій системі можуть бути лише прості вузли, сідла й фокуси, причому якщо у вузлах і фокусах усі траєкторії топологічно еквівалентні, то в сідлах є дві особливі траєкторії (сепаратрис), які визначають характер сімей розв'язків (гіпербол).

**Теорема.** *Якщо система є грубою в  $\bar{G}$ , то вона не може мати сепаратрис, що виходять із сідла в сідло.*

Дійсно, нехай є два сідла та одна сепаратриса йде із сідла в сідло (рис. 11.3).

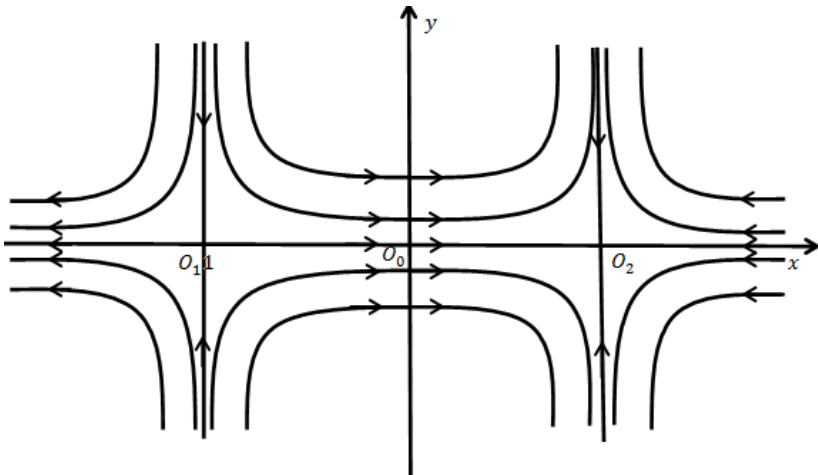


Рис. 11.3

Поряд із вихідною системою розглянемо систему, в околі першого стану рівноваги якої здійснено поворот на досить малий кут  $\alpha > 0$ ; тоді відбувається розрив сепаратрис. Фазовий портрет системи зображено на рис. 11.4.

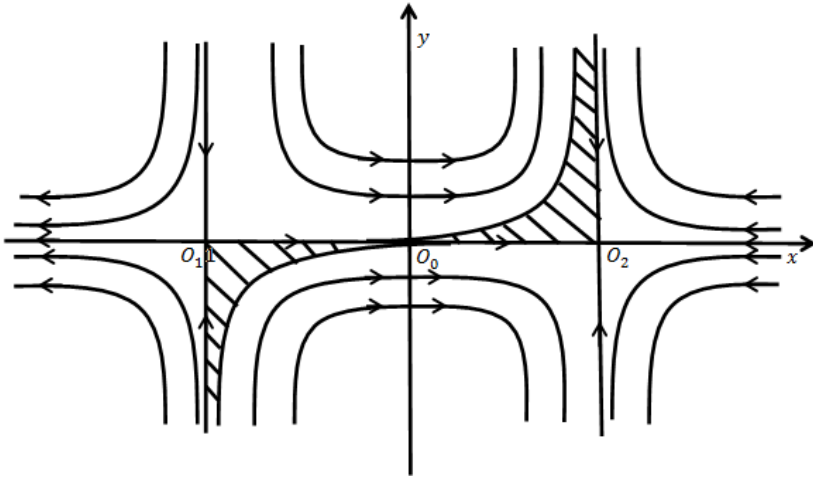


Рис. 11.4

Фазовий портрет збуреної системи топологічно вже не еквівалентний фазовому портрету вихідної системи.

Об'єднуючи отримані результати, дістанемо такі необхідні умови грубості систем.

**Теорема.** *Нехай система є грубою. Тоді виконуються такі умови:*

1. Система має тільки скінченну кількість особливих траєкторій або циклів.

2. В області  $\bar{G}$  не може бути стану рівноваги, для якого:

$$a) \Delta(x_0, y_0) = 0;$$

$$b) \text{якщо } \Delta(x_0, y_0) > 0, \text{ то } \sigma(x_0, y_0) \neq 0.$$

3. В області  $\bar{G}$  можуть бути тільки прості граничні цикли, тобто такі, для яких характеристичний показник не дорівнює нулю, або (в іншому формулюванні) не може бу-

ти періодичної траєкторії  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  ( $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ ,  $\psi(t+T) = \psi(t)$ ), для якої

$$\chi[\varphi(t), \psi(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T [P'_x(\varphi(t), \psi(t)) + Q'_y(\varphi(t), \psi(t))] dt = 0.$$

4. В області  $\bar{G}$  не може бути сідел із сепаратистами, що йдуть із сідла в сідло.

Справедливо також обернене, тобто сформульовані умови грубості є й достатніми.

**Теорема.** Якщо для системи диференціальних рівнянь в області  $\bar{G}$  виконуються умови 1-4, то вона є грубою.

Природним є питання про кількісну оцінку грубих систем, тобто наскільки їх багато в просторі всіх систем на площині. Розглянемо множину систем диференціальних рівнянь на площині, що визначаються рівняннями

$$S : \dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y).$$

Для двох систем

$$S_1 : \dot{x} = P_1(x, y), \quad \dot{y} = Q_1(x, y),$$

$$S_2 : \dot{x} = P_2(x, y), \quad \dot{y} = Q_2(x, y)$$

відстань між ними визначимо такою залежністю:

$$\rho[S_1, S_2] = \max_{(x,y) \in \bar{G}} \left\{ |P_1(x, y) - P_2(x, y)|, |P'_{1,x}(x, y) - P'_{2,x}(x, y)|, \right. \\ \left. |P'_{1,y}(x, y) - P'_{2,y}(x, y)|, |Q_1(x, y) - Q_2(x, y)|, \right. \\ \left. |Q'_{1,x}(x, y) - Q'_{2,x}(x, y)|, |Q'_{1,y}(x, y) - Q'_{2,y}(x, y)| \right\}.$$

Простір усіх динамічних систем позначимо через  $R(S)$ . Дві системи  $S_1$  і  $S_2$  назвемо  $\delta$ -близькими, якщо  $\rho[S_1, S_2] < \delta$ .

Тоді теорему про грубість можна сформулювати таким чином.

**Теорема.** *Якщо система  $S_1$  є грубою, то й усі системи  $S$  із деякого  $\delta$ -околу системи  $S_1$  також будуть грубими.*

Звідси випливає, що грубі динамічні системи заповнюють цілі області простору динамічних систем. Справедливе й таке твердження.

**Теорема.** *Якщо  $S_1$  – негруба система, то за будь-яких  $\delta > 0$  існує груба система, яка лежить у  $\delta$ -околі системи  $S_1$ .*

Отже, грубі системи всюди щільні в просторі динамічних систем.

## 12. ТЕОРІЯ БІФУРКАЦІЙ

Біфуркацією динамічної системи називається зміна якісної (топологічної) структури розбиття на траєкторії, що відбувається при зміні параметрів системи [11, 18].

Динамічні системи, пов'язані з фізичними чи технічними задачами, зазвичай мають один або кілька параметрів. Наприклад, система на площині з одним параметром:

$$\dot{x} = P(x, y, \alpha), \quad \dot{y} = Q(x, y, \alpha).$$

Параметр  $\alpha$  може змінюватися на деякому відрізку або пробігати всю числову вісь. Значення параметра  $\alpha_0$ , за якого для як завгодно близьких  $\alpha$  система має відмінну топологічну структуру, називаються біфуркаційними.

**Приклад.** Розглянемо систему

$$\dot{x} = x \cos \alpha + y \sin \alpha - (x \cos \alpha - y \sin \alpha)(x^2 + y^2),$$

$$\dot{y} = x \sin \alpha - y \cos \alpha - (x \sin \alpha + y \cos \alpha)(x^2 + y^2).$$

Її можна отримати із системи (при  $\alpha = 0$ )

$$\dot{x} = x - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -y - y(x^2 + y^2)$$

поворотом на кут  $\alpha: 0 \leq \alpha \leq \pi$ .

Проведемо попереднє дослідження системи.

1. Оскільки функції  $P(x, y, \alpha)$  та  $Q(x, y, \alpha)$  симетричні, тобто

$$P(-x, -y, \alpha) = -P(x, y, \alpha), \quad Q(-x, -y, \alpha) = -Q(x, y, \alpha),$$

то фазовий портрет системи має центральну симетрію (відносно початку координат).

2. Критерій Бендіксона. Оскільки



$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} P(x, y, \alpha) + \frac{\partial}{\partial y} Q(x, y, \alpha) = \\ & = \cos \alpha - \cos \alpha(x^2 + y^2) - 2x(x \cos \alpha - y \sin \alpha) - \\ & - \cos \alpha - \cos \alpha(x^2 + y^2) - 2y(x \sin \alpha + y \cos \alpha) = -4(x^2 + y^2) \cos \alpha, \end{aligned}$$

то при  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$  система не має циклів.

3. Якщо за функцію Ляпунова взяти  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , то її повна похідна вздовж розв'язків системи матиме вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = \\ & = x[x \cos \alpha + y \sin \alpha - (x \cos \alpha - y \sin \alpha)(x^2 + y^2)] + \\ & + y[x \sin \alpha - y \cos \alpha - (x \sin \alpha + y \cos \alpha)(x^2 + y^2)] = \\ & = x^2 \cos \alpha + 2xy \sin \alpha - y^2 \cos \alpha - (x^2 + y^2)^2 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Тут при  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  нескінченність абсолютно нестійка, а при  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$  – абсолютно стійка.

Побудуємо фазовий портрет системи за різних значень параметра  $\alpha$ . Лінеаризована система має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left[ \cos \alpha - \cos \alpha(x^2 + y^2) - 2x(x \cos \alpha - y \sin \alpha) \right]_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \\ & + \left[ \sin \alpha + \sin \alpha(x^2 + y^2) - 2y(x \cos \alpha - y \sin \alpha) \right]_{(x_0, y_0)} (y - y_0); \end{aligned}$$

$$\dot{y} = \left[ \sin \alpha - \sin \alpha(x^2 + y^2) - 2x(x \sin \alpha + y \cos \alpha) \right]_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left[ -\cos \alpha - \cos \alpha(x^2 + y^2) - 2y(x \sin \alpha - y \cos \alpha) \right]_{(x_0, y_0)} (y - y_0).$$

Дослідимо окремі випадки зміни параметра  $\alpha$ .

1. Розглянемо поведінку системи при  $\alpha = 0$ . Система має вигляд

$$\dot{x} = x - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -y - y(x^2 + y^2).$$

Особливі точки визначаються рівняннями

$$x[1 - x^2 - y^2] = 0, \quad -y[1 + x^2 + y^2] = 0.$$

Система має три стани рівноваги:  $O(0,0)$ ,  $A(-1,0)$ ,  $B(1,0)$ .

Використовуючи лінеаризацію системи в околі кожного зі станів рівноваги, побудуємо її фазовий портрет (рис. 12.1):

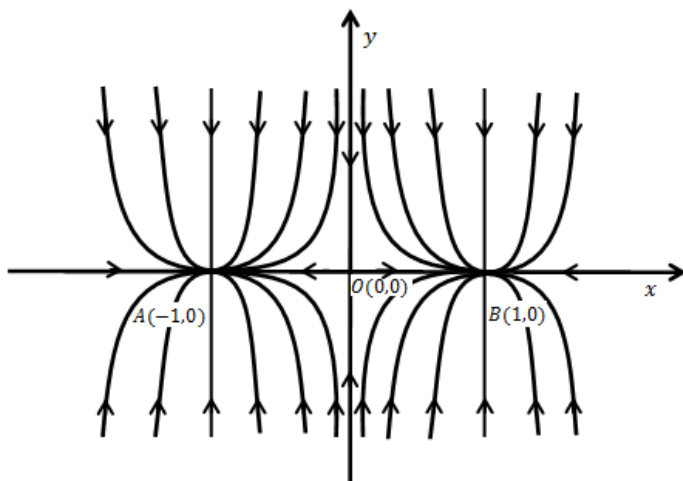


Рис. 12.1

2. Розглянемо поведінку системи при  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Система має ті самі стани рівноваги:  $O(0,0)$ ,  $A(-1,0)$ ,  $B(1,0)$ . При цьому точка  $O(0,0)$  є простим сідлом за довільних значень параметра  $\alpha$ . Точки  $A(-1,0)$ ,  $B(1,0)$  перетворюються із вузлів на фокуси. Фазовий портрет системи має такий вигляд (рис. 12.2):

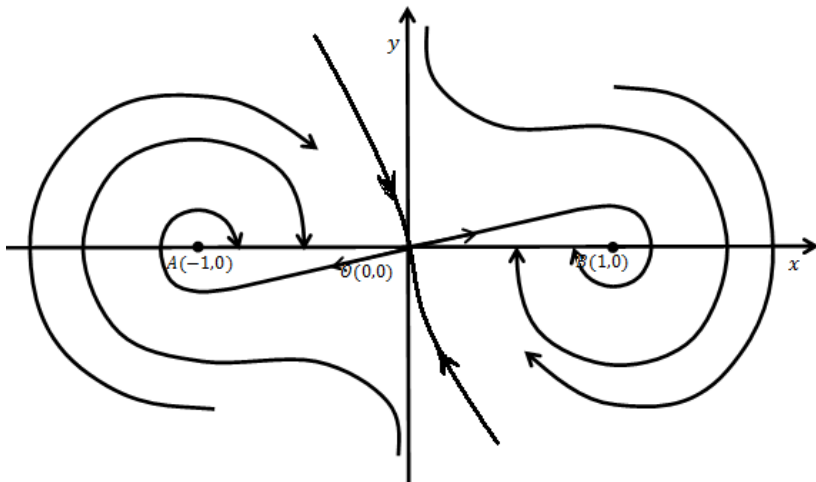


Рис. 12.2

3. Нехай  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Система описується рівняннями

$$\dot{x} = y + y(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x - x(x^2 + y^2).$$

Нульовий стан рівноваги  $O(0,0)$  залишається сідлом.

Розглянемо особливу точку  $A(-1,0)$ , лінеаризація в якій дає систему

$$\dot{x} = 2y, \quad \dot{y} = -2(x+1).$$

Власними числами системи в околі точки  $A(-1,0)$  є  $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ , а точка може бути фокусом або циклом.

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що система має перший інтеграл

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = c.$$

Оскільки

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = (x^2 - 1)^2 + 2y^2(1 + x^2) + y^4 - 1 \geq -1,$$

то, поклавши  $c = a^4 - 1$ , запишемо перший інтеграл у вигляді

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = a^4 - 1.$$

Отримані криві складають сім'ю овалів Кассіні (рис. 12.3).

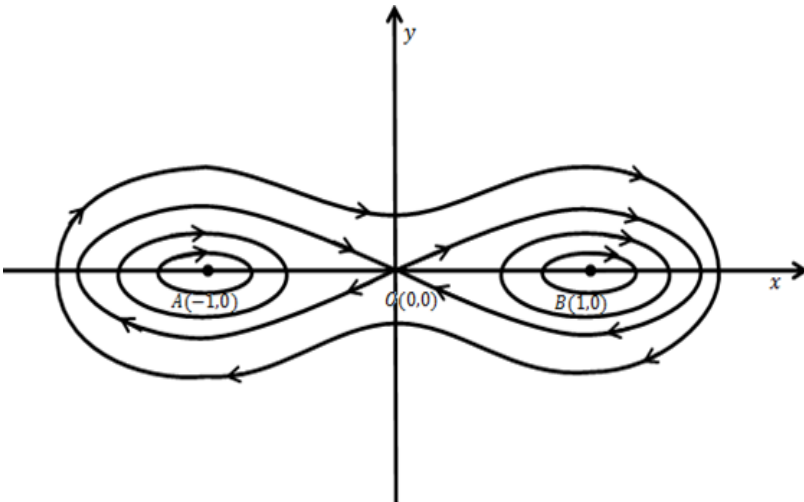


Рис. 12.3

4. Нехай параметр змінюється на проміжку  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Ураховуючи наведену в п. 1 властивість центральної симетрії, фазовий портрет зобразимо у такому вигляді (рис. 12.4):

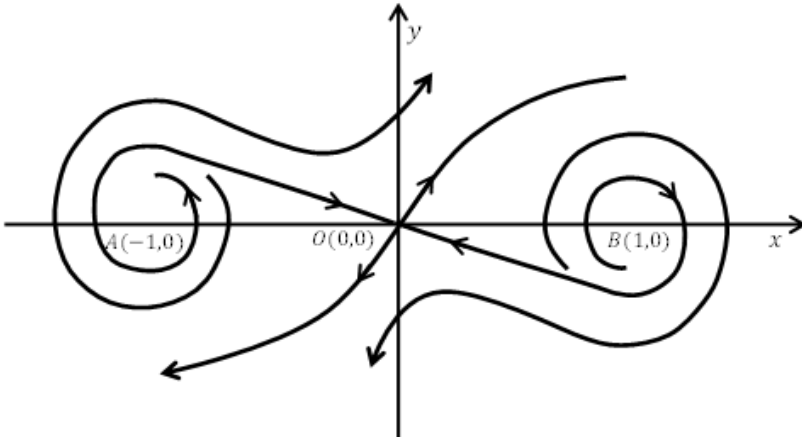


Рис. 12.4

Отже, за значення параметра  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (аналогічно  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ) відбувається біфуркація, а стійкі фокуси  $A(-1,0)$  та  $B(1,0)$  переходять у нестійкі. Крім того, при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  траєкторії є замкненими циклами та сепаратрисами, що йдуть із сідла в сідло.

## 12.1. Біфуркація "сідло-вузол". Складка

Розглянемо одновимірне диференціальне рівняння, залежне від двох параметрів:

$$\dot{x} = F(x, \mu_1, \mu_2), \quad F(x, \mu_1, \mu_2) = -\mu_1 + \mu_2 x^2, \quad \mu_2 > 0.$$

Стани рівноваги визначаються рівнянням

$$-\mu_1 + \mu_2 x^2 = 0.$$

При  $\mu_1 > 0$  існують два стани рівноваги  $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$ , один з них стійкий  $x_1 = -\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$ , інший – нестійкий  $x_2 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$ . При  $\mu_1 = 0$  вони "зливаються" в один стан рівноваги  $x = 0$ , а при  $\mu_1 < 0$  зникають. У просторі фазової змінної та змінних  $\mu_1$  і  $\mu_2$  крива, що визначає стани рівноваги, називається **складкою** (рис. 12.5).

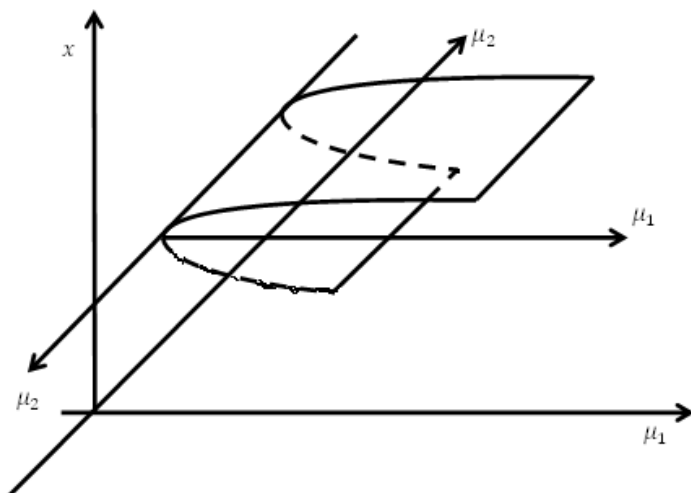


Рис. 12.5

Біфуркація  $\mu_1 = 0$  називається **біфуркацією зриву рівноваги**, або **сідло-вузловою біфуркацією** (у точці  $\mu_1 = 0$  стійкий і нестійкий вузли зливаються в одну точку рівноваги системи та зникають при подальшій зміні параметра  $\mu_1$ ). Ситуація, коли за одним напрямком зміни параметра система має стійкий стан рівноваги, а за іншим – нестійкий, називається сідловою. Вона також називається біфуркацією з корозмірністю одиниця, оскільки визначається умовою  $F'_x(x_0, \mu_0) = 0$ .

## 12.2. Біфуркація "збірка"

Розглянемо диференціальне рівняння з двома параметрами

$$\dot{x} = F(x, \mu_1, \mu_2), \quad F(x, \mu_1, \mu_2) = c + \mu_1 x + \mu_2 x^3, \quad \mu_2 > 0.$$

Стани рівноваги визначаються рівнянням

$$c + \mu_1 x + \mu_2 x^3 = 0.$$

Залежно від значення параметра рівняння може мати або одне, або три стани рівноваги. Біфуркаційна діаграма визначається в просторі змінних  $(x, \mu_1, \mu_2)$  поверхнею, яка називається **збіркою** (рис. 12.6).

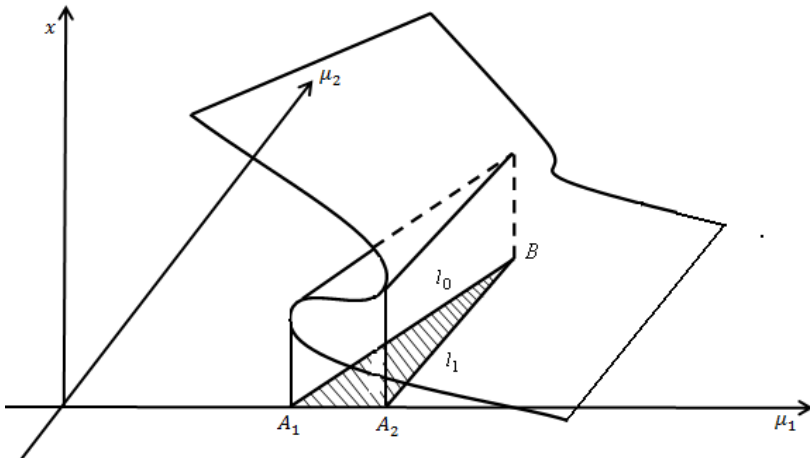


Рис. 12.6

Зміна параметрів  $\mu_1$  і  $\mu_2$  уздовж кривих, що йдуть під ненульовим кутом до границь заштрихованої області (ліній  $l_0$ ,  $l_1$ ), характеризується гістерезисом. При русі справа наліво система стрибком змінює свою стійку рівновагу за значень параметрів, що відповідають лінії  $l_0$  на площині параметрів  $(\mu_1, \mu_2)$ , а при поверненні по тій самій лінії стрибкоподібна зміна стійкої рівноваги відбувається по лінії  $l_1$ .

У точці  $B$  виконуються дві рівності:  $F'_x = 0$  та  $F''_x = 0$ . Тому кажуть, що за значень параметрів, які відповідають точці  $B$ , відбувається біфуркація корозмірності два.

Складка і збірка є елементарними особливостями поверхонь, з яких може бути скомбінована будь-яка особливість поверхонь у тривимірному просторі  $(x, \mu_1, \mu_2)$ .

### 12.3. Біфуркація народження граничного циклу

Розглянемо динамічну систему, описану двома диференціальними рівняннями з одним параметром:

$$\dot{x} = F_1(x, y, \mu), \quad \dot{y} = F_2(x, y, \mu).$$

Траєкторія  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t) \in T$ -періодичною, якщо для довільного моменту часу виконується умова

$$\varphi(t + T) = \varphi(t), \quad \psi(t + T) = \psi(t).$$

Періодичність розв'язків зручно досліджувати за допомогою перетину Пуанкаре. Крізь початок координат проводиться пряма (у тривимірному просторі – площина) (рис. 12.7):

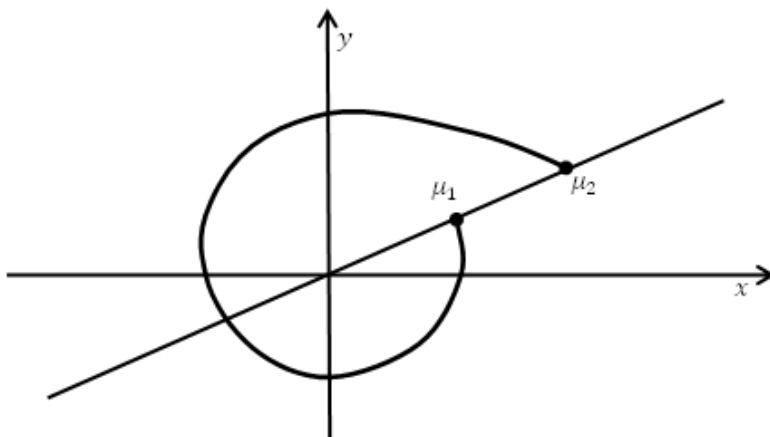


Рис. 12.7



Якщо траєкторія типу "центр" або "фокус", то, перейшовши до комплексних змінних  $z = x + iy$ , точки перетину можна описати з використанням різницевого рівняння

$$z(k+1) = F(z(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

яке визначається перетинами траєкторії та перетину Пуанкаре. Якщо траєкторія періодична, то точка  $z_0$  є нерухомою точкою різницевого рівняння й визначається рівнянням

$$z_0 = F(z_0).$$

На рис. 12.8 наведено графік рівняння

$$z(k+1) = F(z(k))$$

у площині змінних  $(z(k), z(k+1))$ . Періодичний розв'язок визначається перетином кривої  $z(k+1) = F(z(k))$  і прямої  $z(k+1) = z(k)$ . На графіку зображено три варіанти поведінки системи.

1. Крива  $z(k+1) = F(z(k), \mu)$  відповідає критичному значенню  $\mu = \mu_{кр}$ , за якого відбувається дотик  $z(k+1) = F(z(k), \mu_{кр})$  і бісектриси  $z(k+1) = z(k)$ .

2. Крива  $z(k+1) = F(z(k), \mu)$  відповідає значенню  $\mu < \mu_{кр}$ , за якого відображення Пуанкаре  $z(k+1) = F(z(k), \mu)$  і бісектриса  $z(k+1) = z(k)$  не перетинаються.

3. Крива  $z(k+1) = F(z(k), \mu)$  відповідає значенню  $\mu > \mu_{кр}$ , за якого відображення Пуанкаре  $z(k+1) = F(z(k), \mu)$  і бісектриса  $z(k+1) = z(k)$  перетинаються два рази.

Першому випадку відповідає існування одного періодичного розв'язку (біфуркація народження циклу), другому – відсутність граничного циклу, третьому – існування двох граничних циклів (біфуркація подвоєння).

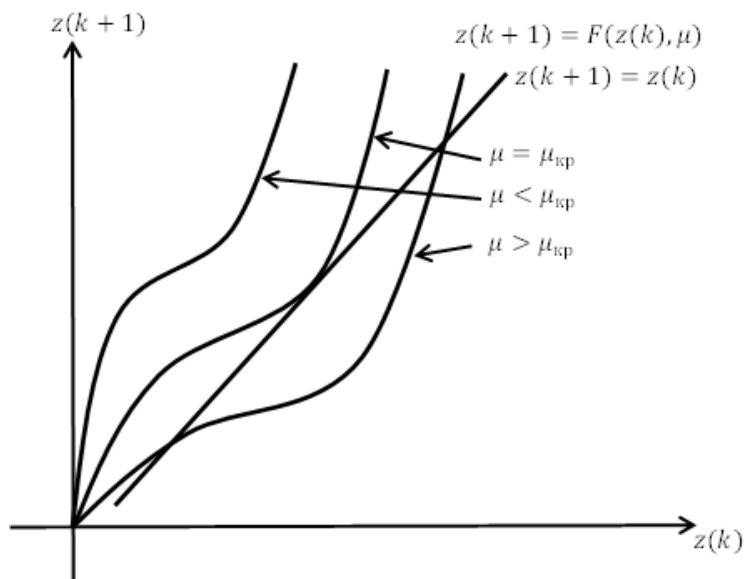


Рис. 12.8

### 13. ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРІЯ КАТАСТРОФ

У 1955 р. американський математик Хасслер Уїтні опублікував роботу "Про відображення поверхні на площину" [19], що заклала основу теорії гладких відображень як самостійної дисципліни [20, 21].

Відображення поверхні на площину – це зіставлення кожній точці поверхні точки на площині. Якщо точка поверхні задана координатами  $(x_1, x_2)$  на цій поверхні, а точка площини – координатами  $(y_1, y_2)$  на площині, то відображення задається парою

$$y_1 = f_1(x_1, x_2), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2).$$

Відображення називається гладким, якщо функції  $f_1(x_1, x_2)$ ,  $f_2(x_1, x_2)$  гладкі.

*Зауваження.* Зазвичай виконується "дослідження навпаки", тобто площина відображається на поверхню. Запропоноване відображення зустрічається при дослідженні відображень на сітківку ока.

Подібно теорії бифуркацій елементарна теорія катастроф досліджує поведінку динамічних систем в околі точки рівноваги залежно від значень параметрів. Однак на відміну від теорії бифуркацій, де досліджувалися тільки лінійні члени, у теорії катастроф особлива увага приділяється членам вищого порядку – квадратичним, кубічним тощо. При цьому за допомогою гладкої заміни змінних можна звести систему до набору кількох систем і розділити її дослідження на дослідження кількох канонічних систем.

Більшість оточуючих нас тіл обмежена гладкими поверхнями. Видимі контури тіл – це відображення на сітківку ока. Уїтні зауважив [19], що зазвичай зустрічаються особливості лише двох типів, усі ж інші руйнуються при малих збуреннях ( $\epsilon$  негрубими).

Особливість першого типу – **складка Уїтні**. Ця особливість виникає при проектуванні сфери на площину в точках екватора (рис. 13.1):

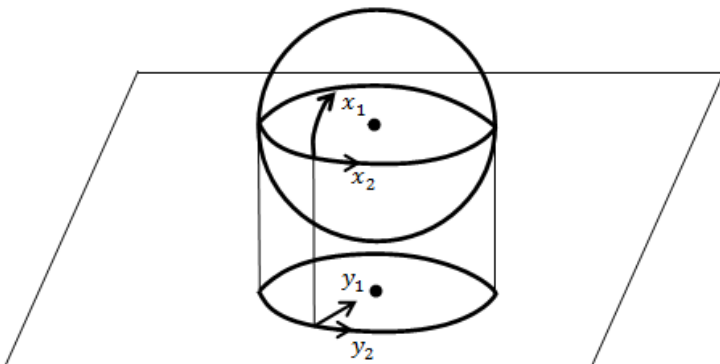


Рис. 13.1

У відповідних координатах вона задається залежностями

$$y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_2.$$

Друга особливість – **збірка Уїтні**. Вона утворюється при проектуванні на площину поверхні, заданої формулами

$$y_1 = x_1^3 + x_1 x_2, \quad y_2 = x_2 \quad (\text{рис. 13.2}).$$

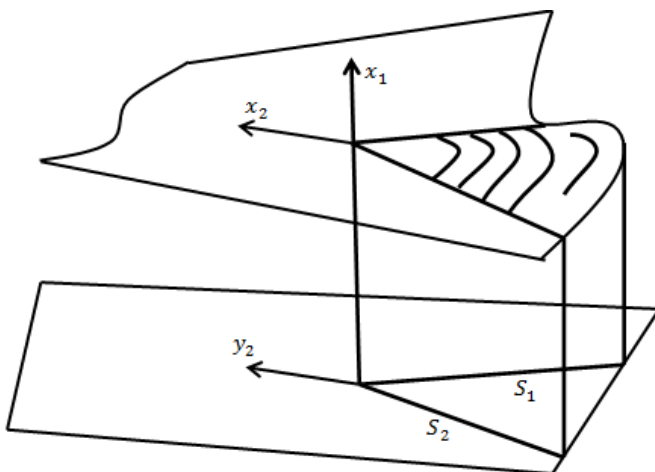


Рис. 13.2

Площина ділиться на дві частини:  $S_1$  і  $S_2$ . Точки меншої частини мають по три прообрази, точки більшої – по одному прообразу, точки кривої – по два прообрази.

Збірка є грубою, тобто будь-яке мале збурення не змінює її топологічний портрет. Також будь-яка особливість гладкого відображення поверхні на площину після малого збурення перетворюється на складки та збірки.

### Основні поняття теорії катастроф

Теорія катастроф (особливостей) вивчає критичні точки гладких функцій. У цій теорії під критичною точкою функції

$$y = F(x), \quad x \in R^n$$

мається на увазі точка  $x_0 \in R^n$ , у якій  $dF(x_0) = 0$ .

**Означення.** Критична точка  $x_0 \in R^n$  гладкої функції  $F(x)$  називається невідродженою (або неморсівською), якщо

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{x=x_0} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_n} \end{vmatrix}_{x=x_0} \neq 0.$$

**Означення.** Критична точка  $x_0 \in R^n$  гладкої функції  $F(x)$  називається виродженою (або морсівською), якщо

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{x=x_0} = 0.$$

Наприклад, критична точка  $x_0 = 0$  функції  $y_1(x) = x^2$  невідроджена, а функції  $y_2(x) = x^3$  – уже вироджена.

**Лема (Морса).** У деякому околі невідродженої точки  $x_0$  функцію  $F(x)$  гладкою заміною  $x = \varphi(y)$  можна звести до вигляду

$$\Phi(y) = \sum_{m=1}^k y_m^2 - \sum_{m=k+1}^n y_m^2, \quad 1 \leq k \leq m.$$

**Приклад.** Розглянемо функцію  $F(x, \lambda) = x^3 + \lambda x$ . Її графік за різних значень  $\lambda$  наведено на рис. 13.3.

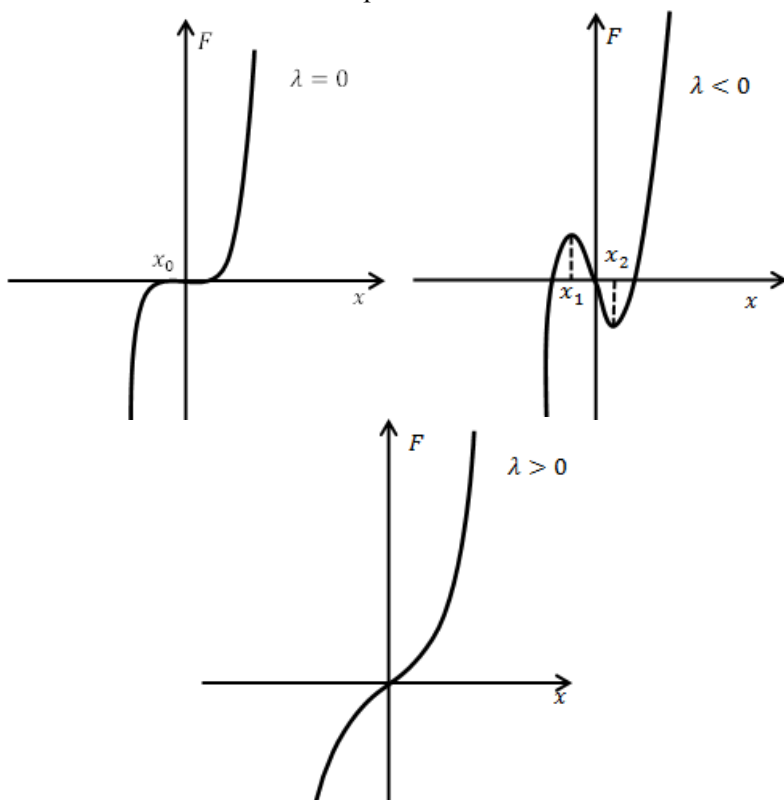


Рис. 13.3

Критичні точки визначаються рівнянням

$$\frac{d}{dx}F(x, \lambda) = 3x^2 + \lambda = 0.$$

Тому при  $\lambda < 0$  функція має дві критичні точки:  $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda/3}$ , при  $\lambda = 0$  – одну критичну точку  $x_0 = 0$ , а при  $\lambda > 0$  функція критичних точок не має. При  $\lambda = 0$  функція має вироджену критичну точку  $x_0 = 0$ , при  $\lambda \neq 0$  вона або зникає, або розпадається на дві невироджені особливі точки.

**Означення.** Максимальна кількість невідроджених критичних точок, на які при зміні параметра розпадається вироджена критична точка, називається **кратністю точки**, або **кратністю паростка точки**.

**Приклад.** Розглянемо функцію  $F(x, \lambda) = x^2 + \lambda x$ . При  $\lambda = 0$  ця функція має одну невідроджену критичну точку  $x_0 = 0$ . При  $\lambda \neq 0$  критичною точкою буде  $x_0 = -\lambda/2$ , яка також є невідродженою. Таким чином, невідроджена критична точка функції  $F(x)$  за будь-якого значення параметра  $\lambda$  не розпадається на кілька критичних точок. У такому випадку функція  $F(x, \lambda)$  називається структурно стійкою (рис. 13.4).

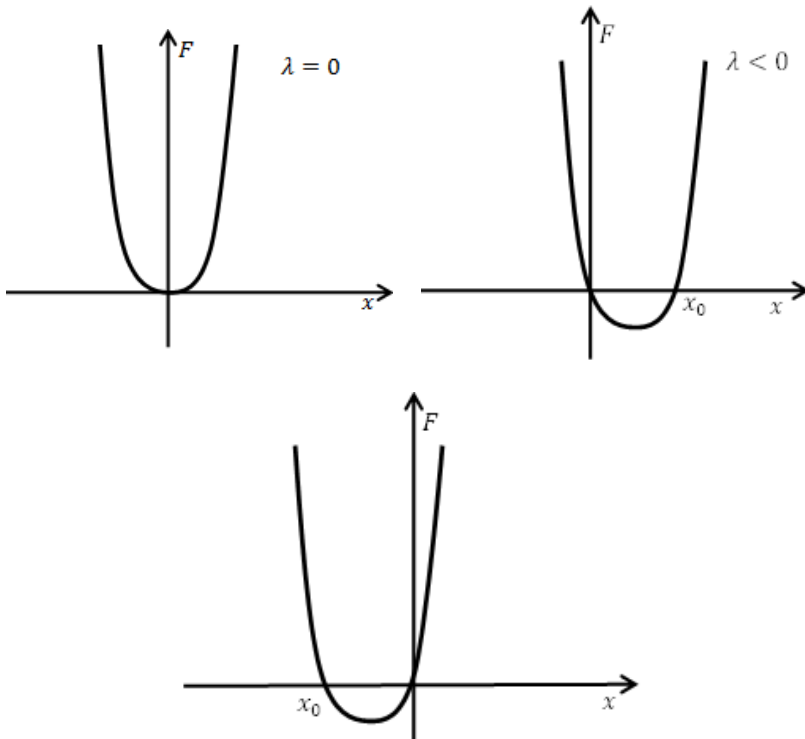


Рис. 13.4

## 14. ХАОТИЧНА ДИНАМІКА

Як було зазначено вище, можна виділити два класи динамічних систем – консервативні та дисипативні. До консервативних належать системи, енергія яких упродовж розв'язків не змінюється. Для дисипативних систем (механічних) характерними є наявність тертя і зменшення енергії вздовж траєкторії руху. Для систем такого вигляду характерною є наявність стійких стаціонарних розв'язків (точок спокою або періодичних траєкторій). До цих розв'язків прагнуть інші. Останнім часом стійкі інваріантні множини динамічних систем, що мають розмірність меншу, ніж вихідні, отримали назву **атракторів** (нестійкі – **репелерів**).

Найпростішими прикладами атракторів є особливі точки й цикли (до речі, на площині особливими розв'язками можуть бути тільки вони). Останнім часом при дослідженні систем диференціальних рівнянь у тривимірному просторі були відкриті атрактори, що мають складнішу структуру й отримали назву **дивні атрактори**. Необхідною (але не достатньою) умовою існування дивного атрактора є нелінійність системи. Поняття дивного атрактора стало поштовхом виникнення й розвитку хаотичної динаміки. Виникнення хаотичних (непередбачуваних) явищ, на перший погляд, здається несумісним з умовою існування, єдиності та неперервної залежності розв'язків диференціальних рівнянь від початкових умов. До того ж ці явища з'явилися в системах диференціальних рівнянь із квадратичною нелінійністю (тобто дуже гладких системах). Насправді суперечності немає. Під хаотичністю, непередбачуваністю розуміємо нестійкість розв'язків за початковими даними, причому нестійкість сильного (експоненціального) типу на обмеженій множині призводить до заплутування траєкторій. У хаотичному режимі як завгодно мала неточність у заданні початкового стану системи швидко зростає з часом і практично стає необчислювальною на досить великих проміжках.



## 14.1. Зсув Бернуллі

Основні результати, наведені в цьому підрозділі, спираються на роботи [22–24].

Найпростіше виникнення складних явищ хаотичної динаміки можна отримати при дослідженні скалярних різницевих рівнянь. Розглянемо відображення "зуб пилки"

$$x(k+1) = \{2x(k)\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $\{\bullet\}$  – функція дробової частини числа. Це відображення можна записати у вигляді

$$x(k+1) = 2x(k) \pmod{1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Динаміку такої динамічної системи можна задати з використанням драбини Ламерея (рис. 14.1).

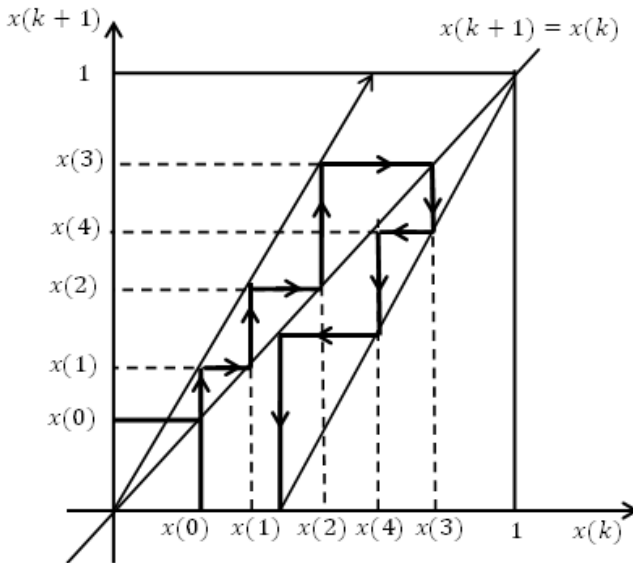


Рис. 14.1

За визначенням  $0 \leq 2x(k)(\text{mod}1) < 1$ . Тому довільне число з інтервалу  $(0,1)$  відображається в число з цього самого інтервалу.

Нехай початкове значення змінної має вигляд

$$x_0 = 0,01011010001010011001010\dots$$

Один крок ітерації згідно з відображенням "зуб пилки" полягає в тому, що послідовність зсувається ліворуч на одну позицію та цифра, яка опинилась по лівий бік від коми, відкидається. Таким чином, отримуємо послідовність

$$x(1) = 0,1011010001010011001010\dots$$

$$x(2) = 0,011010001010011001010\dots$$

$$x(3) = 0,11010001010011001010\dots$$

Наявність нуля або одиниці після коми показує перебування обраної точки в лівому або правому півквадраті.

Нехай  $x_0$  – раціональне число. У цьому випадку двійковий дріб періодичний і при зсувах стан системи періодично повторюватиметься, тобто розв'язок буде періодичним (циклом). Отже, будь-яка траєкторія, що починається з раціональної точки, є циклом, і система володіє нескінченною (усюди щільною множиною) кількістю періодичних траєкторій (циклів).

Нехай  $x_0$  – ірраціональне число. Тоді траєкторія, що починається в цій точці, буде неперіодичною, а система володітиме нескінченною (усюди щільною множиною) кількістю неперіодичних траєкторій (циклів).

Записане різницеве рівняння називається **зсувом Бернуллі**.

Нехай  $x_0^*$  – інше початкове значення, яке відрізняється досить мало від  $x_0$ . Наприклад, 25 перших знаків початкових значень  $x_0^*$  та  $x_0$  збігаються, а далі можуть відрізнитися. Тоді після 25 ітерацій траєкторії будуть абсолютно різними й матиме місце нестійкість за початковими даними, тому передбачення поведінки системи на  $N$  кроків наштовхується на необхідність задання початкових даних до  $N$ -го знака.

## 14.2. Логістичне відображення

Існують два типи логістичних відображень:

$$x(k+1) = 1 - \lambda x^2(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

та

$$y(k+1) = R[1 - y(k)]y(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Обидві форми запису зводяться один до одного заміною

$$x(k) = \frac{y(k) - \frac{1}{2}}{\frac{R}{4} - \frac{1}{2}}, \quad \lambda = R \left( \frac{R}{4} - \frac{1}{2} \right).$$

Нехай  $\lambda = 2$ . Тоді відображення має вигляд

$$x(k+1) = 1 - 2x^2(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Проведемо заміну змінних:

$$x(k) = -\cos 2\pi y(k).$$

У результаті отримуємо

$$-\cos 2\pi y(k+1) = 1 - 2 \cos^2 2\pi y(k).$$

Оскільки

$$\cos 2\varphi - 2 \cos^2 \varphi = -1,$$

то

$$-\cos 2\pi y(k+1) = -\cos 4\pi y(k).$$

Звідси

$$y(k+1) = 2y(k) \bmod(1).$$

Отже, хаос має місце й у логістичному відображенні.

### 14.3. Відображення "тент"

Розглянемо нелінійне різницеве рівняння

$$x(k+1) = \begin{cases} \frac{x(k)}{\alpha}, & 0 < x(k) < \alpha, \\ \frac{1-x(k)}{1-\alpha}, & \alpha \leq x(k) \leq 1, \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1.$$

За певних співвідношень відображення породжує хаотичну динаміку (рис. 14.2).

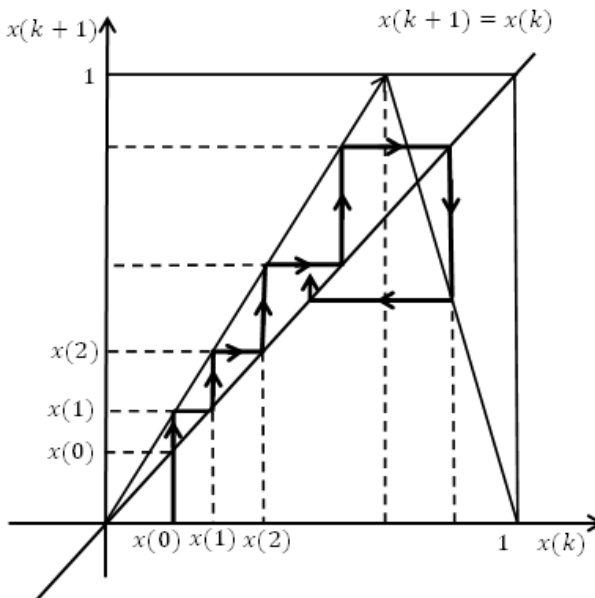


Рис. 14.2

У 1975 р. американські вчені Лі та Йорк (Li T. Y., Yorke Y.) опублікували роботу [25], у якій доводився такий факт. Якщо в одновимірному різницевому рівнянні

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

є цикл із періодом три, то є незліченна безліч періодичних траєкторій, а також континуум неперіодичних, хаотичних траєкторій.

Загальнішим результатом є теорема О. М. Шарковського, яка показує механізм виникнення циклів (порядок Шарковського) [26].

**Теорема (Шарковського).** *Якщо одновимірне відображення має цикл із періодом  $t$ , то воно має також цикли з усіма можливими періодами  $t'$ , які передують числу  $t$  відповідно до порядку*

$$\begin{aligned} 1 < 2 < 2^2 < 2^3 < 2^4 < \dots \\ \dots < 2^3 9 < 2^3 7 < 2^3 5 < 2^3 3 < 2^3 1 < \dots \\ \dots < 2^2 9 < 2^2 7 < 2^2 5 < 2^2 3 < 2^2 1 < \dots \\ \dots < 2^1 9 < 2^1 7 < 2^1 5 < 2^1 3 < 2^1 1 < \dots \\ \dots < 9 < 7 < 5 < 3. \end{aligned}$$

## 14.4. Двовимірні відображення

Запишемо двосторонню послідовність вигляду

$$(\dots, s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0; s_1, s_2, s_3, \dots),$$

де  $s_i = 0, 1$ . Знак (;) відповідає початку відліку. Уведемо дві дійсні змінні  $x$  та  $y$ , які належать одиничному інтервалу, визначивши їх таким чином:

$$\begin{aligned} x(k) &= \frac{1}{2} s_0 + \frac{1}{2^2} s_{-1} + \frac{1}{2^3} s_{-2} + \dots, \\ y(k) &= \frac{1}{2} s_1 + \frac{1}{2^2} s_2 + \frac{1}{2^3} s_3 + \dots. \end{aligned}$$

Перетворення задається зсувом ліворуч на одну одиницю, тобто

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \frac{1}{2} s_{-1} + \frac{1}{2^2} s_{-2} + \frac{1}{2^3} s_{-3} + \dots, \\ y(k+1) &= \frac{1}{2} s_0 + \frac{1}{2^2} s_1 + \frac{1}{2^3} s_2 + \dots. \end{aligned}$$

Це перетворення можна задати аналітично:

$$x(k+1) = \{2x(k)\}, \quad y(k+1) = \frac{y(k) + [2x(k)]}{2},$$

де  $\{\bullet\}$  – функція дробової частини числа,  $[\bullet]$  – функція цілої частини числа.

Перетворення можна також записати у вигляді

$$\begin{cases} x(k+1) = 2x(k) \\ y(k+1) = \frac{1}{2}y(k) \end{cases}, \quad \text{якщо } 0 < x(k) \leq \frac{1}{2},$$

$$\begin{cases} x(k+1) = 2x(k) - 1 \\ y(k+1) = \frac{1 + y(k)}{2} \end{cases}, \quad \text{якщо } \frac{1}{2} < x(k) \leq 1.$$

Отримана система також має нескінченну кількість періодичних траєкторій. Їм відповідають подвоєні раціональні числа. Аналогічно існує континуум неперіодичних траєкторій.

## 14.5. Відображення пекаря

Розглянемо двовимірне відображення, що має наочну геометричну інтерпретацію – **відображення пекаря**.

На площині задамо одиничний квадрат  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

1. Поділимо його навпіл уздовж і заштрихуємо нижню частину.

2. Після цього розріжемо його навпіл поперек (як шматок тіста) і ліву частину додамо зверху.

3. Далі розтягнемо вліво та стиснемо зверху таким чином, щоб він знову став одиничним.

4. Повторюватимемо все знову.

Знов розріжемо поперек і додамо зверху. Після цього знову розтягнемо вліво та стиснемо зверху, щоб квадрат став одиничним (рис. 14.3). Дане відображення є консервативною системою, що зберігає площу. Через достатню кількість кроків відбувається перемішування, що зберігає площі незаштрихованої та заштрихованої частин квадрата рівними половині одиниці.

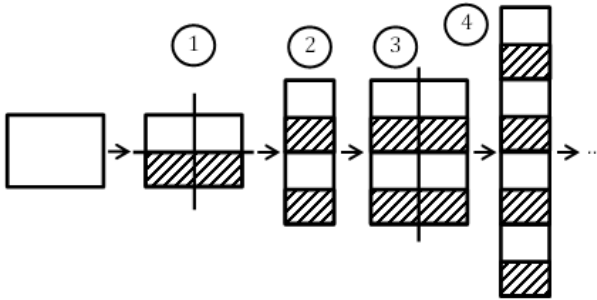


Рис. 14.3

Тепер розглянемо двовимірне відображення, яке називається **узагальненим відображенням пекаря**.

На площині задамо одиничний квадрат  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

1. Поділимо його у відношенні  $\alpha : \beta$ , де  $\alpha + \beta = 1$ , і заштрихуємо обидві частини.

2. Після цього стиснемо верхню й нижню частини на величини  $\mu$  та  $\nu$ , де  $\mu + \nu < 1$ .

3. Перемістимо верхню частину вгору, щоб фігура знову стала квадратом, і прямокутник, що з'явився, заштриховувати не будемо. Таким чином, квадрат перетвориться на три прямокутники з незаштригованим середнім.

4. Далі знову стиснемо заштриговані частини відповідно на величини  $\mu$  та  $\nu$ :  $\mu + \nu < 1$  і розріжемо фігуру поперек навпіл.

5. Після цього ліву частину перемістимо вгору, а праву – вниз, залишивши між ними проміжок таким чином, щоб висота прямокутника дорівнювала двом.

6. Стиснемо прямокутник по вертикалі й розтягнемо за шириною таким чином, щоб вийшов квадрат.

Продовжуватимемо процес далі. Відображення запишемо таким чином:

$$\begin{cases} x(k+1) = \frac{1}{\alpha} x(k), & \text{якщо } 0 < x(k) \leq \alpha, \\ y(k+1) = \mu y(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = \frac{x(k) - \alpha}{\beta}, & \text{якщо } \alpha < x(k) \leq 1. \\ y(k+1) = 1 + \nu(y(k) - 1) \end{cases}$$

Сумарна площа заштрихованих прямокутників при кожній ітерації зменшується на величину  $\mu + \nu < 1$ . Отже, система є дисипативною. Утворюється система горизонтальних смуг, сумарна ширина яких зменшується. Об'єкт стає двовимірною канторовою множиною. Атрактор має нульову міру, оскільки сумарна площа на  $k$ -му кроці становить  $S_k = (\mu + \nu)^k$ , причому

$$S_k = (\mu + \nu)^k \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

З одного боку, усі точки вихідного одиничного квадрата притягуються до атрактора (за побудовою вони містяться в заштрихованих прямокутниках); з іншого боку, сусідні точки розбігаються в ширину. Таким чином, спостерігається нестійкість на самому атракторі (рис. 14.4).

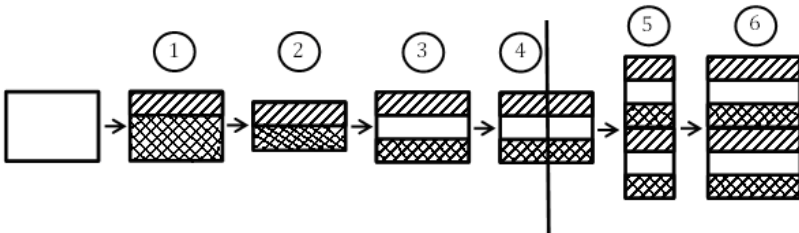


Рис. 14.4



## 15. СИСТЕМА ЛОРЕНЦА

У попередніх розділах розглядалися дискретні динамічні системи, сконструйовані штучно. Водночас хаотичні моделі динаміки можна спостерігати при дослідженні поведінки морського прибою або атмосферних явищ. Розглянемо приклад виникнення хаосу в реальній моделі.

У 1963 р. Едвард Лоренц опублікував у журналі "Journal of Atmospheric Sciences" статтю "Детермінований неперіодичний рух" [27]. Робота присвячувалась дослідженню системи трьох нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, причому нелінійності тільки квадратичного вигляду. Рівняння були отримані при спрощенні рівнянь руху рідини при конвекції шару, що підігрівається знизу. Після всіх можливих спрощень і виділення головних гармонік рівняння чисельно інтегрувалися, унаслідок чого в системі з'являвся хаотичний режим, що характеризувався складними неперіодичними змінами змінних.

Згодом було показано, що аналогічні явища виникають у хімічних реакціях (реакція Белоусова – Жаботинського), при моделюванні динаміки одномодового лазера, водяного колеса тощо [22–24].

### 15.1. Виведення рівнянь Лоренца

5

Розглянемо шар рідини глибиною  $h$ , що перебуває в полі тяжіння. На верхній межі підтримується постійна температура  $T_0$ , а нижня підігрівається до температури  $T_0 + \Delta T$  (рис. 15.1).

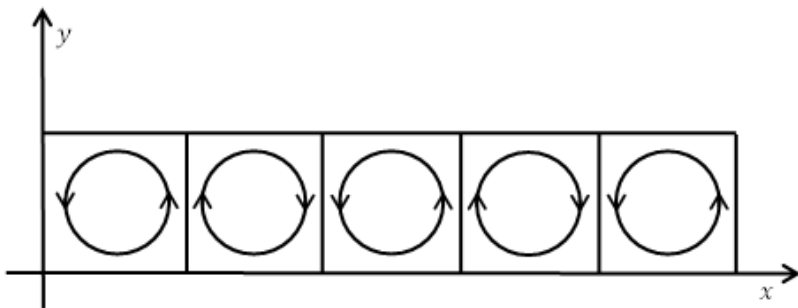


Рис. 15.1

Через те, що нагріта рідина легше холодної, за значної різниці температур  $\Delta T$  виникає конвективний потік рідини.

Нехай  $\vec{V}\{u, v, w\}$ ,  $u = u(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$ ,  $w = w(x, y, z)$  – розподіл швидкості руху рідини,  $\rho = \rho(x, y, z)$  – густина рідини,  $T = T(x, y, z)$  – її температура.

Рівняння руху рідини (Ейлера) записується таким чином:

$$\frac{d}{dt}\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\overline{\text{grad}p} + \vec{f}, \quad \vec{f} = \nu\nabla^2\vec{V} + g.$$

До нього додаються рівняння нерозривності

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{V}) = 0,$$

рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(T\vec{V}) = k\nabla^2 T$$

і залежність густини від температури

$$\rho = \rho_0[1 - \gamma(T - T_0)].$$

Тут  $p(x, y, z)$  – тиск,  $\nu$  – коефіцієнт кінематичної в'язкості,  $k$  – коефіцієнт теплопровідності,  $\gamma$  – коефіцієнт теплового розширення,  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Розв'язати записану систему рівнянь аналітично неможливо. Отже, виконаємо низку спрощень.

По-перше, обмежимося двовимірною задачею. Нехай усі змінні не залежать від координати  $z$  і відповідні складові швидкостей відсутні.

По-друге, використаємо наближення Бусінеска [24]. Воно полягає в тому, що рідина вважається слабо стискуваною та залежність густини  $\rho$  від температури  $T$  ураховується в рівняннях тільки в одному місці, а саме в правій частині рівняння для швидкості.

Покладемо

$$p(x, y, t) = p_0 - \rho_0 g [1 - \gamma(T - T_0)]y + \tilde{p}(x, y, t),$$

$$T(x, y, t) = T_0 + \Delta T - \frac{\Delta T}{h}y + \theta(x, y, t),$$

де  $\tilde{p}(x, y, t)$  – відхилення поля тисків від гідростатичного тиску  $p_0 - \rho_0 gy$ , а  $\theta(x, y, t)$  – відхилення температури від лінійного наближення  $T_0 + \Delta T - \frac{\Delta T}{h}y$ .

Вектор прискорення вільного падіння  $\vec{g}$  має одну складову по осі  $Oy$  (спрямований униз). За припущенням у рівнянні нерозривності густина постійна, тому рівняння має вигляд

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

На верхній і нижній межах граничні умови характеризуються сталістю температури та відсутністю потоку рідини крізь границю (умова непротікання):

$$\theta(x, y, t)|_{y=0} = 0, \quad \theta(x, y, t)|_{y=h} = 0, \quad v(x, y, t)|_{y=0} = 0,$$

$$v(x, y, t)|_{y=h} = 0.$$

Оскільки для тривимірного випадку

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix},$$

то двовимірні рівняння Ейлера мають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu(u_{xx} + u_{yy}),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu(v_{xx} + v_{yy}) + \gamma g \theta.$$

Рівняння нерозривності:

$$u_x + v_y = 0.$$

Рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\theta u) + \frac{\partial}{\partial y}(\theta v) - \frac{1}{h} \Delta T v = k(\theta_{xx} + \theta_{yy}).$$

Маємо чотири диференціальні рівняння в частинних похідних щодо невідомих  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ ,  $p$ . Виключимо поле тисків. Для цього продиференціюємо перше рівняння за  $y$ , друге – за  $x$  і віднімемо від першого рівняння Ейлера друге. Отримаємо:

$$\begin{aligned} & (u_{tx} + u_y u_x + u u_{xy} + v_y u_y + v u_{yy}) - \\ & - (v_{tx} + u_x v_x + u v_{xx} + v_x v_y + v v_{xy}) = \\ & = \left[ -\frac{1}{\rho_0} p_{xy} + \nu(v_{xxy} + u_{yyy}) \right] - \left[ -\frac{1}{\rho_0} p_{yx} + \nu(v_{xxx} + v_{yyx}) - \gamma g \theta_x \right]. \end{aligned}$$

Отже, скоротили чотири рівняння до трьох:

$$\begin{aligned} (u_y - v_x)_t &= -u u_{xy} - v u_{yy} + u v_{xx} + v v_{xy} - \gamma g \theta_x + \\ & + \nu(u_{xxy} + u_{yyy} - v_{xyy} - v_{xxx}), \\ \theta_t &= -(\theta u)_x - (\theta v)_y + \frac{1}{h} \Delta T v + k(\theta_{xx} + \theta_{yy}), \\ u_x + v_y &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язати отримані рівняння аналітично неможливо. Відобразимо шукані розв'язки у вигляді розкладу в ряд за базисними функціями. Оскільки, як випливає з рисунку, при малому шарі  $h$  розв'язки періодичні, то запишемо їх у вигляді ряду за тригонометричними функціями:

$$\begin{aligned} & \sin m\alpha x \times \sin n\beta y, & \sin m\alpha x \times \cos n\beta y, \\ & \cos m\alpha x \times \sin n\beta y, & \cos m\alpha x \times \cos n\beta y, \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{\pi}{h}, \quad \alpha = \frac{\pi}{l}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Візьмемо одну клітинку, розташовану в прямокутнику  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq y \leq h$ . У цьому випадку температура є парною за змінною  $x$  і непарною за змінною  $y$ , тобто (рис. 15.2)

$$\theta(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{nm}(t) \cos m\alpha x \sin n\beta y.$$

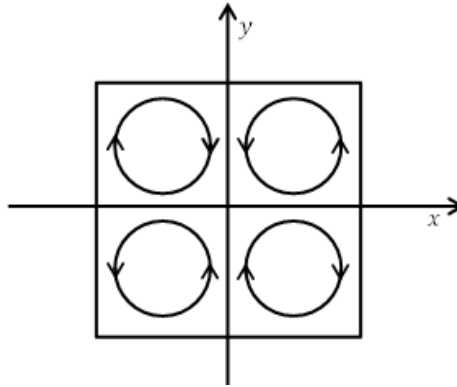


Рис. 15.2

Рівняння нерозривності

$$u_x + v_y = 0$$

указує, що існує функція струму  $\psi(x, y, t)$ , за якої

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Як видно з рис. 15.2, компонента  $u$  має бути непарною за змінною  $x$  і парною за змінною  $y$ , а компонента  $v$ , навпаки, – бути парною за змінною  $x$  і непарною за змінною  $y$ . Це виконуватиметься, якщо функцію струму  $\psi(x, y, t)$  брати у вигляді ряду

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm}(t) \sin m\alpha x \sin n\beta y.$$

У цьому випадку матимемо

$$u(x, y, t) = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm}(t) n\beta \sin m\alpha x \cos n\beta y,$$

$$v(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm}(t) m\alpha \cos m\alpha x \sin n\beta y.$$

Для простоти розглядатимемо тільки перші три коефіцієнти (за аналогією з методом лінійного наближення):

$$U_{11}(t) = X(t), \quad V_{11}(t) = Y(t), \quad V_{02}(t) = Z(t).$$

Тоді замість рядів дістанемо функції

$$u(x, y, t) = -X(t)\beta \sin \alpha x \cos \beta y, \quad v(x, y, t) = X(t) \cos \alpha x \sin \beta y,$$

$$\theta(x, y, t) = Y(t) \cos \alpha x \sin \beta y - Z(t) \sin 2\beta y.$$

Підставивши ці наближення в диференціальні рівняння і прирівнявши коефіцієнти, для функцій  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$  отримаємо три диференціальні рівняння:

$$\dot{X}(t) = \frac{\alpha\gamma g}{\alpha^2 + \beta^2} Y(t) - \nu(\alpha^2 + \beta^2)X(t),$$

$$\dot{Y}(t) = \frac{\alpha\Delta T}{h} X(t) - k(\alpha^2 + \beta^2)Y(t) - \beta\alpha X(t)Z(t),$$

$$\dot{Z}(t) = -4k\beta^2 Z(t) + \frac{1}{2}\alpha\beta X(t)Y(t).$$

Виконаємо заміну

$$X(t) = Ax(\tau), \quad Y(t) = By(\tau), \quad Z(t) = Az(\tau), \quad t = D\tau,$$

де  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  – деякі змінні. Після підстановки отримаємо:

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = \frac{\alpha\gamma g}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{BD}{A} y(\tau) - D\nu(\alpha^2 + \beta^2)x(\tau),$$

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = \frac{\alpha\Delta T}{h} \frac{AD}{B} x(\tau) - k(\alpha^2 + \beta^2)Dy(\tau) - \beta\alpha \frac{ACD}{B} x(\tau)z(\tau),$$

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = -4k\beta^2 Dz(\tau) + \frac{1}{2}\alpha\beta \frac{ABD}{C} x(\tau)y(\tau).$$

Вибравши відповідним чином сталі  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , спростимо рівняння. Покладемо

$$A = \frac{\sqrt{2}k(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha\beta}, \quad B = \frac{\sqrt{2}k\nu(\alpha^2 + \beta^2)^3}{\alpha^2\beta\gamma g},$$

$$C = \frac{k\nu(\alpha^2 + \beta^2)^3}{\alpha^2\beta\gamma g}, \quad D = \frac{1}{k(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Крім того, уведемо безрозмірні параметри

$$\sigma = \frac{\nu}{k}, \quad b = \frac{4\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad r = \frac{\alpha^2\gamma g\Delta T}{k\nu h(\alpha^2 + \beta^2)^3}.$$

Тоді остаточно отримаємо систему рівнянь Лоренца:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy.$$

Вона є системою трьох нелінійних диференціальних рівнянь із квадратичною правою частиною.

Можлива дещо інша форма запису. Якщо покласти  $w = r - z$ , то отримаємо систему

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = -y + xw, \quad \dot{z} = -bw + br - xy.$$

Частіше використовується перша форма запису.

## 15.2. Дисипативний осцилятор з інерціальною нелінійністю

Розглянемо систему Лоренца в першій формі запису:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy.$$

Уведемо заміну

$$z = \frac{u + x^2}{2\sigma}$$

і підставимо в третє рівняння. Отримаємо:

$$\frac{1}{2\sigma}[\dot{u} + 2x\dot{x}] = -b \frac{u + x^2}{2\sigma} + xy,$$

або

$$\dot{u} + 2x\dot{x} = -bu - bx^2 + 2\sigma xy.$$

Підставимо замість  $\dot{x}$  його значення з першого рівняння та одержимо

$$\dot{u} + 2x\sigma(y - x) = -bu - bx^2 + 2\sigma xy,$$



або 
$$\dot{u} = -bu + (2\sigma - b)x^2.$$

З першого рівняння маємо:

$$y = \frac{1}{\sigma}\dot{x} + x, \quad \dot{y} = \frac{1}{\sigma}\ddot{x} + \dot{x}.$$

Підставивши отримані вирази в друге рівняння системи, отримуємо:

$$\frac{1}{\sigma}\ddot{x} + \dot{x} = rx - \left[ \frac{1}{\sigma}\dot{x} + x \right] - x \frac{u + x^2}{2\sigma}.$$

У результаті маємо систему рівнянь

$$\ddot{x} + (\sigma + 1)\dot{x} - \sigma(r - 1)x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}xu = 0,$$

$$\dot{u} = -bu + (2\sigma - b)x^2.$$

Нехай (частковий випадок)  $u = \text{const}$ . Тоді перше рівняння має вигляд

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\gamma = \sigma + 1,$$

$$U(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}u - \sigma(r - 1) \right] x^2 + \frac{1}{4}x^4,$$

тобто є нелінійним осцилятором з потенціальною функцією

$$U(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}u - \sigma(r - 1) \right] x^2 + \frac{1}{4}x^4.$$

Таке зображення з певною мірою наближення дозволяє розглядати систему Лоренца як нелінійний осцилятор.

### 15.3. Динаміка системи Лоренца

Якщо в системі Лоренца покласти  $\sigma=10$ ,  $b=\frac{8}{3}$ ,  $r=28$  і здійснити числове моделювання рівнянь на комп'ютері, то отримаємо розв'язок, який є хаотичним автоколивальним режимом. Фазова траєкторія описує у тривимірному просторі змінних  $(x, y, z)$  об'єкт складної структури, схожий на моток ниток, причому не переплутаних, а акуратно складених (як два вуха). Це утворення називається **дивним атрактором**, або **атрактором Лоренца** (рис. 15.3).

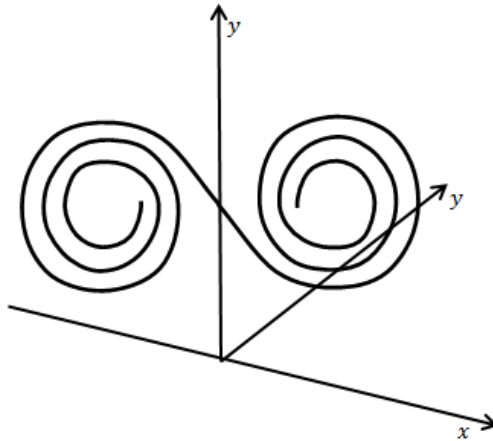


Рис. 15.3

Спочатку розглянемо залежність змінної  $z$  від часу й зану-  
меруємо її максимуми за зростанням часу. Потім опрацюємо  
результати числового розв'язку рівнянь, побудувавши графік  
максимумів. Отримаємо різницеве рівняння

$$z(k+1) = f(z(k)), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Виявляється, що крива  $f(z)$  схожа на тент із гострою верши-  
ною (рис. 15.4):

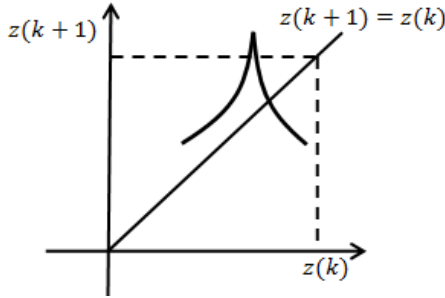


Рис. 15.4

Таким чином, з'явилися передумови, які дозволяють замінити дослідження динаміки вихідних рівнянь Лоренца простішою задачею – аналізом динаміки одновимірного відображення, причому це відображення дуже схоже на відображення, що породжує дивний атрактор.

Розглянемо деякі загальні аспекти системи Лоренца.

**Симетрія.** Значимо симетрію рівнянь Лоренца. Їх вигляд не змінюється, якщо одночасно змінити знаки  $x$  та  $y$ . Це означає, що утворення у фазовому просторі або володіє симетрією, тобто перетворюється саме на себе при заміні  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ , або має таке саме утворення як симетричний партнер.

**Обмеженість атрактора.** Можна вказати обмежену замкнену область  $D \subset R^3$ , у яку фазові траєкторії входять і не залишають її. Для цього розглянемо функцію Ляпунова

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{\sigma} + y^2 + w^2 \right)$$

і обчислимо її повну похідну вздовж розв'язків системи Лоренца (другого типу):

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = -y + xw, \quad \dot{w} = -bw + br - xy.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x, y, w) &= \frac{x}{\sigma}\sigma(y-x) + y(-y+xw) + w(-bw+br-xy) = \\ &= xy - x^2 - y^2 + xyw - bw^2 + brw - xyw = \\ &= -\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{3}{4}y^2 - b\left(w - \frac{1}{2}r\right)^2 + \frac{1}{4}br^2.\end{aligned}$$

Очевидно знайдеться величина  $R_0 > 0$  така, що при  $R > R_0$  будуть виконуватись нерівності

$$\begin{aligned}-\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{3}{4}y^2 - b\left(w - \frac{1}{2}r\right)^2 + \frac{1}{4}br^2 < 0, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma} + y^2 + w^2\right) > R.\end{aligned}$$

Це означає, що всі траєкторії входять у еліпс

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma} + y^2 + w^2\right) = R_0$$

і не залишають його. Таким чином, аттрактор міститься всередині еліпса:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma} + y^2 + w^2\right) = R_0.$$

**Дисипативність системи Лоренца.** Розглянемо векторне поле

$$\vec{V}(x, y, z) = \{\sigma(y-x), rx - y - xz, -bz + xy\},$$

утворене системою Лоренца. Обчислимо дивергенцію цього векторного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x}(\sigma(y-x)) + \frac{\partial}{\partial y}(rx-y-xz) + \frac{\partial}{\partial z}(-bz+xy) = \\ &= -(\sigma+b+1). \end{aligned}$$

Отже, якщо  $\sigma > 0$ ,  $b > 0$ , то  $\operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) = \text{const} < 0$ . Це означає таке: якщо є початковий об'єм частинок  $\Delta V_0$ , то він змінюється за законом

$$\Delta V(t) = \Delta V_0 \exp\{-(\sigma+b+1)t\} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty.$$

Таким чином, атрактор має нульовий об'єм.

**Точки спокою.** Точки спокою системи визначаються з розв'язку системи рівнянь

$$\sigma(y-x) = 0, \quad -y+xw = 0, \quad -bw+br-xy = 0.$$

Розв'язуючи систему, отримаємо, що при  $r \leq 1$  є лише один стан рівноваги  $O(0,0,0)$ , а при  $r > 1$  – три стани рівноваги:

$$O(0,0,0), \quad O_1(\sqrt{\sigma(r-1)}, \sqrt{\sigma(r-1)}, r-1),$$

$$O_2(-\sqrt{\sigma(r-1)}, -\sqrt{\sigma(r-1)}, r-1).$$

З погляду фізичної інтерпретації в задачі про конвекцію одна особлива точка означає відсутність конвекційних потоків. Другий і третій розв'язки відповідають наявності конвективного потоку – обертанню рідини проти або за годинниковою стрілкою. Виникнення цього явища істотно залежить від величини

$$r = \frac{\alpha^2 \gamma g \Delta T}{k \nu h (\alpha^2 + \beta^2)^3}.$$

Неважко бачити, що вона залежить від різниці температур  $\Delta T$  і коефіцієнтів теплопровідності та інших коефіцієнтів.

**Аналіз нерухомих точок.** Нехай  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  – нерухома точка. Тоді виконується заміна (паралельне перенесення особливої точки в початок координат)

$$x = x_0 + x_1, \quad y = y_0 + y_1, \quad z = z_0 + z_1,$$

де  $x_1, y_1, z_1$  – нові змінні. Лінійне наближення в околі особливої точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  має вигляд

$$\dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1), \quad \dot{y}_1 = rx_1 - y_1 - x_0z_1 - x_1z_0, \quad \dot{z}_1 = -bz_1 + x_0y_1 + x_1y_0.$$

Матриця лінійного наближення

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z_0 & -1 & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -b \end{bmatrix}.$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r - z_0 & -1 - \lambda & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -b - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

або, після розкриття, отримаємо

$$(\lambda + \sigma) \left[ (\lambda + 1)(\lambda + b) + x_0^2 \right] + \sigma \left[ (\lambda + b)(z_0 - r) + x_0 y_0 \right] = 0.$$

Розглянемо кожну з особливих точок.

Для нульової особливої точки  $O(0,0,0)$  буде  $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$  і характеристичне рівняння матиме вигляд

$$(\lambda + \sigma)(\lambda + 1)(\lambda + b) - \sigma r(\lambda + b) = 0,$$

або

$$(\lambda + b) \left[ \lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r) \right] = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння будуть

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}(\sigma+1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma+1)^2 + \sigma(r-1)}.$$

Перше власне число від'ємне; якщо  $r < 1$ , то друге і третє власні числа також від'ємні; якщо  $r > 1$ , то одне з них стає додатним.

Отже, при  $r < 1$  нульовий стан рівноваги – стійкий вузол, а при  $r > 1$  – сідло-вузол.

Розглянемо точки  $O_1$  та  $O_2$ , які з'являються при  $r > 1$ . Підставивши значення

$$x_0 = y_0 = \pm\sqrt{b(r-1)}$$

у рівняння

$$(\lambda + \sigma) \left[ (\lambda + 1)(\lambda + b) + x_0^2 \right] + \sigma \left[ (\lambda + b)(z_0 - r) + x_0 y_0 \right] = 0,$$

отримаємо

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0.$$

Числовий розрахунок показує, що при  $r$ , яке трохи перевищує одиницю, усі три власні числа від'ємні. Таким чином, маємо три стійкі вузли. При подальшому збільшенні величини  $r$  дійсні числа перетворюються на комплексні з від'ємними дійсними частинами, тобто стають стійкими фокусами.

Далі існує граничне значення  $r_0$ , при переході через яке змінюється знак дійсної частини й відбувається одночасна втрата стійкості  $O_1$  та  $O_2$  (унаслідок симетрії). Границя стійкості визначається таким чином. Після підстановки  $\lambda = i\omega$  характеристичне рівняння набуває вигляду

$$-i\omega^3 + (\sigma + b + 1)\omega^2 + ib(\sigma + r)\omega + 2\sigma b(r - 1) = 0.$$

Розділивши дійсну та уявну частини, отримаємо два рівняння:

$$-(\sigma + b + 1)\omega^2 + 2\sigma b(r - 1) = 0, \quad [-\omega^2 + b(\sigma + r)]\omega = 0.$$

З першого рівняння одержимо

$$\omega^2 = \frac{2\sigma b(r - 1)}{\sigma + b + 1}.$$

Підставивши останній вираз у друге рівняння, дістанемо

$$-\frac{2\sigma b(r - 1)}{\sigma + b + 1} + b(\sigma + r) = 0.$$

Звідси границею стійкості є величина

$$r_0 = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

**Біфуркації в моделі Лоренца.** Розглянемо, як змінюється динаміка системи Лоренца за сталих  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  і зростаючого  $r > 0$ . З погляду фізичної інтерпретації це означає збільшення підігріву (нагадаємо, що  $r = \frac{\alpha^2 \gamma g \Delta T}{k \nu h (\alpha^2 + \beta^2)^3}$ ) або числа Релея

в задачі про конвекцію.

Як було показано, при  $r < 1$  система Лоренца має єдину нерухому точку на початку координат – стійкий вузол. Це – єдиний атрактор.

При  $r > 1$  стан рівноваги  $O(0,0,0)$  стає нестійким (переходить у сідло-вузол). Одне власне число тут позитивне і два – негативні. Нестійкому власному числу відповідають дві нестійкі сепаратриси (або одновимірний нестійкий багатовид). Згідно із властивостями симетрії сепаратриси розбігаються в різні боки від початку координат. Точка  $O(0,0,0)$  має також двовимірний стійкий багатовид (деяку гіперповерхню, рис. 15.5).



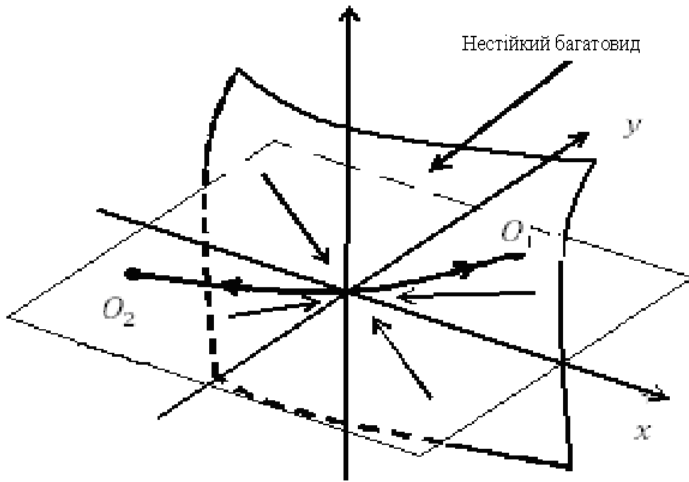


Рис. 15.5

При переході через  $r = 1$  точка  $O(0,0,0)$  припиняє бути атрактором (притягальною множиною), тоді атракторами стають точки  $O_1$  та  $O_2$ . Це відбувається за досить великих  $r > 1$ . У задачах конвекції ці два атрактори відповідають станам з рівномірним обертанням рідини відповідно за та проти годинникової стрілки, причому швидкість обертання зростає зі збільшенням параметра  $r$ . Присутність двох атракторів означає наявність **бістабільності**. Далі вузли переходять у фокуси (рис. 15.6).

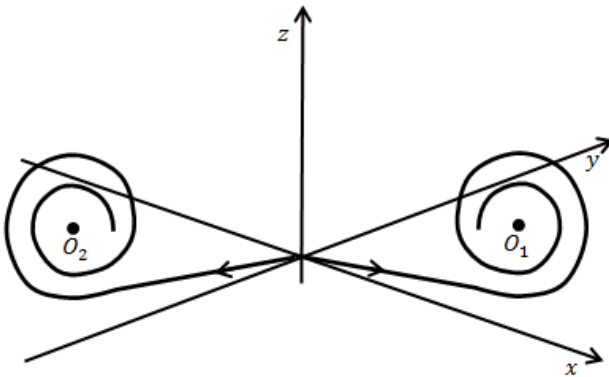


Рис. 15.6

Фазові траєкторії наближаються до нерухомих точок за спіраллю. Чим більша величина  $r$ , тим більший початковий розмах спіралей.

При значенні  $r = 13,927$  сепаратриси, виконавши один оберт, повертаються до початку координат уздовж осі  $Oz$ . Виникає **петля сепаратриси**. Також має місце момент **нелокальної біфуркації**, тобто відбувається перебудова структури фазових траєкторій, що не зводиться до локальних змін (рис. 15.7).

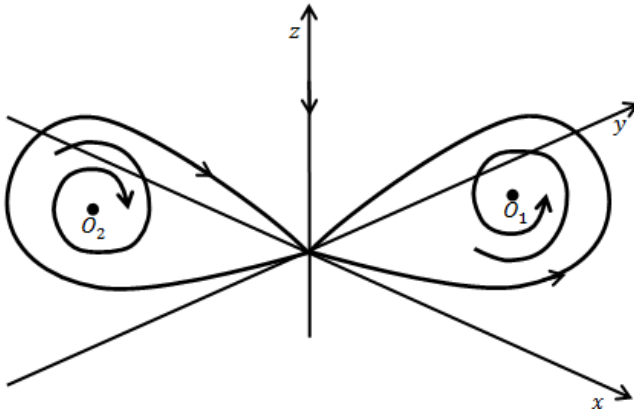


Рис. 15.7

Після переходу через  $r = 13,927$  сепаратриси  $\Gamma_1$  починає накрутитися на фокус  $O_2$ , а сепаратриси  $\Gamma_2$  – на фокус  $O_1$  (рис. 15.8):

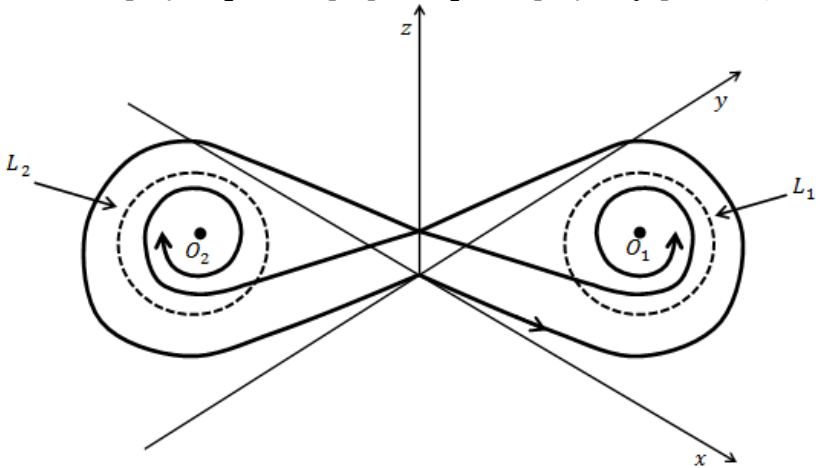


Рис. 15.8

Це означає, що при встановленні режиму конвекції напрямок руху рідини змінюється на протилежний. При цьому в глобальній структурі фазового простору відбуваються суттєві зміни.

По-перше, з кожної петлі сепаратрис народжується замкнена траєкторія – нестійкий граничний цикл (штрихові криві  $L_1$  та  $L_2$ ).

По-друге, з'являється інваріантна множина  $\Omega_1$  – складна множина траєкторій, що допускає кодування всіма можливими нескінченними в обидва боки послідовностями двох символів (нуля та одиниці). Ця множина  $\Omega_1$  не є притягальною й утворює **дивний репелер**.

Наступна нелокальна біфуркація відбувається при  $r \approx 24,06$ . Починаючи з цього значення  $r$ , сепаратрис  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_2$  прямують не до нерухомих точок  $O_1$  та  $O_2$ , а до притягальної множини складної структури – атрактора Лоренца. Однак точки  $O_1$  та  $O_2$  не зникають до величини  $r = 24,74$ .

Таким чином, в інтервалі  $24,0 < r < 24,74$  у системі співіснують три атрактори – дві нерухомі точки  $O_1$  та  $O_2$  і атрактор Лоренца. Починаючи з  $r = 24,74$  нерухомі точки втрачають стійкість і атрактор Лоренца залишається єдиною притягальною множиною.

# РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ "ОСНОВИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ"

## Вступ

Навчальна дисципліна "Основи нелінійної динаміки" є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем "магістр", галузь знань 11 "Математика та статистика", спеціальність 113 "Прикладна математика", освітня програма "Прикладна математика".

"Основи нелінійної динаміки" є нормативною навчальною дисципліною. Викладається в другому семестрі першого курсу обсягом 180 год (6 кредитів ECTS), зокрема: лекції – 40, семінари – 14, консультації – 6, самостійна робота – 120 год. У курсі передбачені 2 змістові модулі та 2 модульні контрольні роботи. Завершується дисципліна іспитом.

**Мета дисципліни** – ознайомлення магістрів спеціальності "Прикладна математика" з одним із важливих математичних напрямів моделювання та аналізу нелінійних динамічних процесів. Дисципліна виникла і сформувалася в останні десять років. Це пов'язане, у першу чергу, з виникненням можливості комп'ютерного дослідження динаміки нелінійних систем. Виявилось досить незвичайне явище стохастичної поведінки в нелінійних детермінованих системах. З'явилося поняття "дивних атракторів", тобто притягальних множин, які мають дробову розмірність. Після засвоєння курсу студенти спеціальності "Прикладна математика" повинні вміти розробляти та досліджувати нелінійні математичні моделі динамічних процесів, які описані звичайними диференціальними та різницевиими рівняннями, а також рівняннями в частинних похідних.

**Завдання.** Дисципліна "Основи нелінійної динаміки" має навчити студентів досліджувати нелінійні математичні моделі динамічних систем і процесів, які описані за допомогою звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь у частинних похідних, різницевих рівнянь, розвивати теоретичні та практичні здібності в цій сфері.

**У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен:**

**знати** основні поняття щодо звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь математичної фізики, різницевих рівнянь та алгебри, основні методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь у частинних похідних і різницевих рівнянь, а також навчитись використовувати елементи якісної теорії диференціальних рівнянь (обчислювати власні вектори та власні числа, знаходити обернені матриці, зводити матрицю до жорданової форми), здійснювати лінеаризацію систем;

**уміти** досліджувати математичні моделі динамічних процесів, які описані звичайними диференціальними рівняннями, різницевими рівняннями та рівняннями в частинних похідних; будувати якісний портрет лінійних і нелінійних динамічних систем на площині та використовувати методи їх дослідження.

**Місце дисципліни** (у структурно-логічній схемі підготовки фахівців відповідного напрямку). Нормативна навчальна дисципліна "Основи нелінійної динаміки" є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "магістр".

**Зв'язок з іншими дисциплінами.** Для успішного освоєння дисципліни необхідні знання з диференціальних рівнянь, математичного аналізу, алгебри, математичної фізики та моделювання динамічних систем.

### **Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти.**

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою.

У змістовий модуль 1 (ЗМ1) "Класичні методи дослідження нелінійних систем" входять три теми: "Методи лінійного наближення", "Однорідні та квазіоднорідні системи", "Періодичні рухи"; у змістовий модуль 2 (ЗМ2) "Нелінійні системи спеціального вигляду" – три теми: "Елементи якісного дослідження нелінійних систем", "Деякі типи нелінійних систем", "Біфуркація та хаос у нелінійних системах". Обов'язковим для іспиту є виконання модульних контрольних робіт і отримання не менше 20 балів.

### **Оцінювання за формами контролю (приклад)**

	ЗМ1		ЗМ2	
	Min. – 10 балів	Max. – 30 балів	Min. – 10 балів	Max. – 30 балів
Усна відповідь	5	15	5	15
Доповнення	5	15	5	15
Модульна контрольна робота	5	15	5	15

Студенти, які набрали сумарно менше ніж 20 балів (*критично-розрахунковий мінімум*), для допуску на іспит повинні обов'язково відробити модульні роботи та виконати аналіз помилок.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються відповідно до "Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу" від 1 жовтня 2010 року.

**При простому розрахунку отримаємо:**

	<b>Змістовий модуль 1</b>	<b>Змістовий модуль 2</b>	<b>Іспит / залік</b>	<b>Підсумкова оцінка</b>
Мінімум	10	10	10	60
Максимум	30	30	40	100

При цьому кількість балів:

- **0–34** відповідає оцінці "незадовільно" з обов'язковим повторним вивченням дисципліни;
- **35–59** відповідає оцінці "незадовільно" з можливістю повторного складання заліку/іспиту;
- **60–64** відповідає оцінці "задовільно" ("достатньо");
- **65–74** відповідає оцінці "задовільно";
- **75–84** відповідає оцінці "добре";
- **85–89** відповідає оцінці "добре" ("дуже добре");
- **90–100** відповідає оцінці "відмінно".

**Шкала відповідності (для іспиту)**

<b>За 100-бальною шкалою, бали</b>	<b>За національною шкалою</b>	
90–100	5	Відмінно
85–89	4	Добре
75–84		
65–74	3	Задовільно
60–64		
35–59	2	Незадовільно
0–34		

# ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

## Змістовий модуль 1 Класичні методи дослідження нелінійних систем

### Тема 1. Методи лінійного наближення (6 год)

Наведено результати з геометричної інтерпретації в системах звичайних диференціальних рівнянь. Сформульовано основні означення загальної теорії динамічних систем. Детально розглянуто методи побудовання фазового портрета лінійних систем на площині. Сформульовано принципи методу лінеаризації для нелінійних систем.

### Тема 2. Однорідні та квазіоднорідні системи на площині (8 год)

Наведено поняття стійких та орбітально-стійких траєкторій, граничних точок і граничних множин. Детально висвітлено поведінку однорідних і квазіоднорідних рівнянь на площині.

### Тема 3. Періодичні рухи (6 год)

Розглянуто класичну проблему центра-фокуса. Наведено умови існування центра за наявності лінійних членів. Сформульовано означення індексу Пуанкаре та методи його обчислення.



## **Змістовий модуль 2**

### **Нелінійні системи спеціального вигляду**

#### **Тема 1. Елементи якісного дослідження динамічних систем (6 год)**

Наведено формулу Пуанкаре обчислення індексу Пуанкаре деяких особливих точок. Розглянуто деякі критерії існування періодичних траєкторій.

#### **Тема 2. Деякі типи нелінійних систем (8 год)**

Елементи теорії коливань. Лінійні коливання. Найпростіші нелінійні коливання. Дисипативні та автоколивальні системи. Грубі системи. Загальні означення. Умови грубості.

#### **Тема 3. Теорія біфуркацій і хаос у динамічних системах (6 год)**

Основи теорії біфуркацій. Біфуркація систем на площині. Моделі з дискретним часом. Теорема Шарковського. Побудовання та дослідження атратора Лоренца. Хаос у динамічних системах. Критерій виникнення хаосу.

# СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ.

## ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І СЕМІНАРСЬКИХ ЗАНЯТЬ

№	Назва лекції	Кількість годин		
		Лекції	Семінари	С/р *
<b>Змістовий модуль 1. Класичні методи дослідження нелінійних систем</b>				
1	Геометрична інтерпретація в системах диференціальних рівнянь. Основні поняття та означення	2		6
2	Особливі точки лінійних стаціонарних систем на площині. Вироджені стани рівноваги	2	1	6
3	Побудування фазових портретів нелінійних систем на площині. Лінеаризація в околі особливої точки	2	2	6
4	Стійкі та орбітально-стійкі траєкторії. Граничні точки та граничні множини	4		9
5	Однорідні системи диференціальних рівнянь на площині. Типи траєкторій та особливих точок	2	1	9
6	Квазіоднорідні рівняння на площині	2	1	6
7	Проблема центра-фокуса. Умови існування центра	2	1	6
8	Умови існування центра за наявності лінійних членів	2	1	8
9	Індекс Пуанкаре. Властивості індексу Пуанкаре. Індекс Пуанкаре для особливої точки	1		8
	<b>Модуль Модульна контрольна робота</b>	1		

Закінчення табл.

№	Назва лекції	Кількість годин		
		Лекції	Семінари	С/р *
<b>Змістовий модуль 2. Нелінійні системи спеціального вигляду</b>				
11	Формула обчислення індексу Пуанкаре для особливих точок	2	1	8
12	Критерії існування періодичних розв'язків	3	1	8
13	Елементи теорії коливань. Лінійні коливання. Найпростіші нелінійні коливання	3	1	8
14	Дисипативні системи. Автоколивальні системи. Лагранжеві системи	2	1	8
15	Грубі системи. Загальні визначення. Умови грубості	3	1	8
16	Основи теорії біфуркацій. Біфуркація систем на площині. Моделі з дискретним часом. Теорема Шарковського	3	1	8
17	Побудування та дослідження атратора Лоренца. Хаос у динамічних системах. Критерій виникнення хаосу	3	1	8
	<b>Модуль Модульна контрольна робота</b>	1		
	<b>Усього</b>	<b>40</b>	<b>14</b>	<b>120</b>

\* С/р – самостійна робота.

Загальний обсяг – **180** год, у тому числі:

- лекції – **40**;
- семінарські заняття – **14**;
- консультації – **6**;
- самостійна робота – **120** год.

# Змістовий модуль 1

## Класичні методи дослідження нелінійних систем

### Тема 1. Методи лінійного наближення (27 год)

**Лекція 1.** Геометрична інтерпретація в системах диференціальних рівнянь. Основні поняття та означення (2 год).

Розглянуто основні означення теорії динамічних систем. Введено поняття траєкторії, особливої точки, періодичного руху. Наведено поняття стійкості руху систем та аналогії стійкості систем [1, 2].

**Завдання для самостійної роботи** (6 год). Геометрична інтерпретація в теорії динамічних систем. Особливі точки, періодичні рухи, стійкі багатовиди [1–4].

**Лекція 2.** Особливі точки лінійних стаціонарних систем на площині. Вироджені стани рівноваги (2 год).

Розглянуто лінійні стаціонарні системи на площині. Наведено повну класифікацію точок спокою (вузол, сідло, фокус, центр, вироджені стани рівноваги) [1, 2].

**Семінари.** Побудування особливих точок на площині (1 год).

**Завдання для самостійної роботи** (6 год). Побудувати фазовий портрет визначеної лінійної стаціонарної системи на площині [1, 2].

**Лекція 3.** Побудування фазових портретів нелінійних систем на площині. Лінеаризація в околі особливої точки (2 год).

Детально розглянуто метод лінеаризації. Наведено теорему Ляпунова про стійкість за лінійним наближенням [1, 2].

**Семінари.** Лінеаризація в околі особливої точки (2 год).

**Завдання для самостійної роботи** (6 год). Побудувати фазовий портрет визначеної нелінійної стаціонарної системи на площині [1, 2].

## **Тема 2. Однорідні та квазіоднорідні системи (34 год)**

**Лекції 4, 5.** Стійкі та орбітально-стійкі траєкторії. Граничні точки та граничні множини (4 год).

Наведено основні поняття з топологічної динаміки, зокрема поняття  $\alpha$ - та  $\omega$ -граничних множин, стійких траєкторій. Уведено поняття розбиття області на підобласті [1, 2].

**Завдання для самостійної роботи** (9 год). Основні поняття топологічної динаміки [1, 2].

**Лекція 6.** Однорідні системи диференціальних рівнянь на площині. Типи траєкторій та особливих точок (2 год).

Розглянуто однорідні системи диференціальних рівнянь на площині. Доведено теорему про існування періодичних траєкторій, асимптотично стійкого стану рівноваги [1, 2].

**Семінари.** Дослідження систем квадратичного вигляду (1 год).

**Завдання для самостійної роботи** (9 год). Системи диференціальних рівнянь на багатовидах. Побудування фазового портрета системи з квадратичною нелінійністю на площині [1, 2].

**Лекція 7.** Квазіоднорідні рівняння на площині (2 год).

Розглянуто квазіоднорідні системи на площині. Наведено умови, за виконання яких нелінійності вищого порядку не впливають на поведінку системи в околі стану рівноваги [1–4].

**Семінари.** Дослідження квазіоднорідних систем (1 год).

**Завдання для самостійної роботи** (6 год). Побудування фазового портрета системи з квадратичною нелінійністю зі збуреннями на площині [1, 2].

### Тема 3. Періодичні рухи (27 год)

**Лекція 8.** Проблема центра-фокуса. Умови існування центра за наявності лінійних членів (2 год).

Сформульовано класичну проблему центра-фокуса. Наведено умови існування центра через спеціальну зліченну систему диференціальних рівнянь [1].

**Семінари.** Розв'язування системи диференціальних рівнянь, що задають умову періодичності (1 год).

**Завдання для самостійної роботи** (6 год). Умова існування центра для системи з квадратичною нелінійністю [1].

**Лекція 9.** Умови існування центра за наявності лінійних членів (2 год).

Розглянуто однорідну систему на площині за наявності лінійних членів. Дослідження існування центра зведено до існування спеціального розв'язку зліченної системи алгебраїчних рівнянь [1].

**Семінари.** Розв'язування системи алгебраїчних рівнянь, що задають умову періодичності (1 год).

**Завдання для самостійної роботи** (8 год). Умова існування центра для системи з квадратичною нелінійністю [1].

**Лекція 10.** Індекс Пуанкаре. Властивості індексу Пуанкаре. Індекс Пуанкаре для особливої точки та замкненої траєкторії (1 год).

Розглянуто один з важливих інваріантів динамічних систем – індекс Пуанкаре [1, 2].

**Завдання для самостійної роботи** (8 год). Обчислення індексу Пуанкаре для особливих точок на площині [1, 2].

## **Контрольні запитання до змістового модуля 1**

1. Геометрична інтерпретація в системах диференціальних рівнянь. Основні поняття та означення.
2. Особливі точки лінійних стаціонарних систем на площині. Вузол, сідло, фокус, центр. Вироджені стани рівноваги.
3. Побудування фазових портретів нелінійних систем на площині. Лінеаризація в околі особливих точок.
4. Можливий характер траєкторій на площині. Стійкі та орбітально-стійкі траєкторії. Граничні точки та граничні множини.
5. Криві без контакту. Властивості кривих без контакту.
6. Можливі типи множин граничних точок півтраєкторій.
7. Однорідні диференціальні рівняння на площині. Типи траєкторій для однорідних рівнянь на площині.
8. Квазіоднорідні рівняння на площині. Можливі траєкторії для квазіоднорідних рівнянь на площині.
9. Проблема центра-фокуса. Умови існування центра.
10. Умови існування центра за наявності лінійних членів.

## **Контрольні завдання до змістового модуля 1**

1. Побудувати фазовий портрет заданої системи на площині.
2. Побудувати фазовий портрет системи з квадратичною правою частиною на площині.
3. Перевірити умови існування центра для заданої системи диференціальних рівнянь.

## **Змістовий модуль 2**

### **Нелінійні системи спеціального вигляду**

#### **Тема 4. Елементи якісного дослідження динамічних систем (23 год)**

**Лекція 11.** Формула обчислення індексу Пуанкаре для особливих точок (2 год).

Наведено теорему про обчислення індексу Пуанкаре. Обчислено індекс для особливих точок на площині [1, 2].

**Семінари.** Обчислення індексу Пуанкаре (1 год).

**Завдання для самостійної роботи** (8 год). Обчислити індекс Пуанкаре для вузла, сідла та фокуса [1].

**Лекція 12.** Критерії існування періодичних розв'язків (3 год).

Наведено критерії Бендіксона, принцип симетрії. Розглянуто окремі типи рівнянь і з використанням запропонованих критеріїв перевірено існування періодичних розв'язків [1, 3].

**Семінари.** Дослідження конкретних прикладів систем на площині (1 год).

**Завдання для самостійної роботи** (8 год). Коливальні системи. Існування періодичних розв'язків таких систем [3].

#### **Тема 5. Деякі типи нелінійних систем (35 год)**

**Лекція 13.** Елементи теорії коливачів. Лінійні коливання. Найпростіші нелінійні коливання (3 год).

Розглянуто лінійні коливання з дисипацією та без неї. Досліджено найпростішу нелінійну модель коливача [1, 7].

**Семінари.** Побудування коливальних розв'язків двовимірних систем (1 год).



**Завдання для самостійної роботи** (8 год). Дослідити нелінійне коливальне рівняння [3].

**Лекція 14.** Дисипативні системи. Автоколивальні системи. Лагранжеві системи (2 год).

Системи з тертям. Рівняння Ван-дер-Поля. Фазовий портрет рівняння Ван-дер-Поля. Виведення рівняння Лагранжа. Зв'язок із системами Гамільтона [3].

**Семінари.** Побудування фазового портрета рівняння Ван-дер-Поля (1 год).

**Завдання для самостійної роботи** (8 год). Дослідження окремих рівнянь Лагранжа та Гамільтона [3].

**Лекція 15.** Грубі системи. Загальні означення. Умови грубості (3 год).

Означення грубих динамічних систем. Необхідні та достатні умови грубості системи на площині [2].

**Семінари.** Побудування фазового портрета конкретних систем на площині (1 год).

**Завдання для самостійної роботи** (8 год). Системи першого та другого степенів грубості [3].

## **Тема 6. Теорія біфуркацій та хаос у динамічних системах (23 год)**

**Лекція 16.** Основи теорії біфуркацій. Біфуркація систем на площині. Моделі з дискретним часом. Теорема Шарковського (3 год).

Приклад біфуркації в одній системі на площині. Елементи теорії катастроф. Складка та збірка [9].

**Семінари.** Числові методи побудування складки та збірки (1 год).

**Завдання для самостійної роботи** (8 год). Дослідити біфуркацію однієї системи на площині [9].

**Лекція 17.** Побудування та дослідження атратора Лоренца. Хаос у динамічних системах. Критерій виникнення хаосу (3 год).

Побудування рівнянь Лоренца. Зведення загальної системи в частинних похідних до трьох звичайних диференціальних рівнянь. Дослідження динаміки рівнянь Лоренца [5–7].

**Семінари.** Виведення рівняння Лоренца (1 год).

**Завдання для самостійної роботи** (8 год). Дослідження одновимірних рівнянь хаотичної динаміки [7].

## **Контрольні запитання до змістового модуля 2**

1. Критерії існування періодичних розв'язків.
2. Елементи теорії коливачь. Лінійні коливання.
3. Найпростіші нелінійні коливання.
4. Дисипативні автоколивальні системи.
5. Грубі системи. Загальні означення. Необхідні умови грубості в системах на площині. Кількість грубих систем.
6. Основи теорії біфуркацій. Біфуркація систем на площині.
7. Моделі з дискретним часом. Біфуркація в дискретних системах. Теорема Шарковського.
8. Дослідження атратора Лоренца. Числове дослідження рівнянь Лоренца. Біфуркації в моделі Лоренца.
9. Фрактальні множини. Умови самоподібності.
10. Хаос у динамічних системах. Критерій виникнення хаосу.

## **Контрольні завдання до змістового модуля 2**

1. Побудувати фазовий портрет нелінійного рівняння коливачь.
2. Дослідити відображення пекаря.
3. Дослідити рівняння Лоренца.

## Запитання на іспит

1. Геометрична інтерпретація в системах диференціальних рівнянь. Основні поняття та означення.
2. Особливі точки лінійних стаціонарних систем на площині. Вузол, сідло, фокус, центр. Вироджені стани рівноваги.
3. Побудування фазових портретів нелінійних систем на площині. Лінеаризація в околі особливих точок.
4. Можливий характер траєкторій на площині. Стійкі та орбітально-стійкі траєкторії. Граничні точки та граничні множини.
5. Криві без контакту. Властивості кривих без контакту.
6. Можливі типи множин граничних точок півтраєкторій.
7. Однорідні диференціальні рівняння на площині. Типи траєкторій для однорідних рівнянь на площині.
8. Квазіоднорідні рівняння на площині. Можливі траєкторії для квазіоднорідних рівнянь на площині.
9. Проблема центра-фокуса. Умови існування центра.
10. Умови існування центра за наявності лінійних членів.
11. Індекс Пуанкаре. Властивості індексу Пуанкаре.
12. Обчислення індексу Пуанкаре для особливих точок.
13. Критерії існування періодичних розв'язків.
14. Елементи теорії коливань. Лінійні коливання.
15. Найпростіші нелінійні коливання.
16. Дисипативні автоколивальні системи.
17. Грубі системи. Загальні визначення. Необхідні умови грубості в системах на площині. Кількість грубих систем.
18. Основи теорії біфуркацій. Біфуркація систем на площині.
19. Моделі з дискретним часом. Біфуркація в дискретних системах. Теорема Шарковського.
20. Дослідження атратора Лоренца. Числове дослідження рівнянь Лоренца. Біфуркації в моделі Лоренца.
21. Фрактальні множини. Умови самоподібності.
22. Хаос у динамічних системах. Критерій виникнення хаосу.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. – М. : Наука, 1966.
2. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1971.
3. *Баутин Н. Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – М. : Наука, 1990.
4. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику / З. Нитецки. – М. : Мир, 1975.
5. *Рейссиг Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений / Р. Рейссиг, Г. Сансоне, Р. Конти. – М. : Наука, 1974.
6. *Степаньянц Г. А.* Теория динамических систем / Г. А. Степаньянц. – М. : Машиностроение, 1985.
7. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1967.
8. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. – М. : Наука, 1967.
9. *Немыцкий В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. – М. ; Л. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1949.
10. *Пилюгин С. Ю.* Введение в грубые системы дифференциальных уравнений / С. Ю. Пилюгин. – Л. : Изд.-во ЛГУ, 1988.
11. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. – М. : Наука, 1967.
12. *Андронов А. А.* Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М. : Наука, 1981.
13. *Бабаков И. М.* Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М. : Наука, 1965.
14. Колебания нелинейных механических систем / под. ред. И. И. Блехана. – М. : Машиностроение, 1979. – Т. 2.
15. Введение в современные методы нелинейной механики / И. А. Галиулин, В. М. Закалюкин, В. Н. Серегин, В. П. Шапошников. – М. : Изд.-во МАИ, 1980.

16. *Краснощеков П. С.* Принципы построения моделей / П. С. Краснощеков, А. А. Петров. – М. : ФАЗИС, 1983.
17. *Андронов А. А.* Грубые системы / А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин // Доклады АН СССР, 1937. – Т. 14. – № 5. – С. 247–250.
18. *Марсден Дж.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. – М. : Мир, 1980.
19. *Whitney H.* On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane / H. Whitney // Annals of Mathematics. Second Series. – Vol. 62. – No. 3 (Nov. 1955). – P. 374–410.
20. *Хессард Б.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Б. Хессард, Н. Казаринов, И. Вэн. – М. : Мир, 1985.
21. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф / Р. Гилмор. – М. : Мир, 1984. – Т. 2.
22. *Малинецкий Г. Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику / Г. Г. Малинецкий. – М. : Наука, 1997.
23. *Малинецкий Г. Г.* Нелинейная динамика и хаос. Основные понятия / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов. – М. : КомКнига, 2006.
24. *Кузнецов С. П.* Детерминированный хаос : курс лекций / С. П. Кузнецов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006.
25. *Li T. Y.* Period Three Implies Chaos / T. Y. Li, Y. Yorke // American Mathematical Monthly. – Vol. 82. – No. 10 (Dec., 1975). – P. 985–992.
26. *Шарковский А. Н.* Разностные уравнения и их приложения / А. Н. Шарковский, Ю. А. Майстренко, Е. Ю. Романенко. – К. : Наук. думка, 1986.
27. *Лоренц Е.* Детерминированное непериодическое течение / Е. Лоренц // Странные аттракторы. Сер. Математика. Новое в зарубежной науке. – М. : Мир, 1981. – Вып. 22.

# ЗМІСТ

<b>1. Геометрична інтерпретація в системах звичайних диференціальних рівнянь. Основні визначення та поняття</b> .....	3
1.1. Основні визначення .....	3
1.2. Основні понятті стійкості руху .....	7
<b>2. Особливі точки лінійних стаціонарних систем на площині</b> .....	14
<b>3. Побудування фазового портрета системи на площині, основана на методі лінеаризації</b> .....	28
<b>4. Однорідні і квазіоднорідні рівняння на площині</b> .....	35
4.1. Особливі точки однорідних систем .....	35
4.2. Лінійна система на площині .....	41
4.3. Квазіоднорідні рівняння на площині. Можливі типи особливої точки для квазіоднорідної системи на площині .....	42
<b>5. Проблема центра-фокуса</b> .....	49
5.1. Умови існування центра .....	49
5.2. Умови існування центра за наявності лінійних членів .....	52
<b>6. Індекс Пуанкаре</b> .....	57
<b>7. Критерії існування періодичних розв'язків</b> .....	64
7.1. Критерій Бендіксона .....	64
7.2. Метод кривих контактів .....	65
7.3. Принцип симетрії .....	67
<b>8. Елементи теорії коливань</b> .....	69

8.1. Лінійні коливання .....	69
8.2. Найпростіші нелінійні коливання .....	73
8.3. Дисипативні системи .....	78
8.4. Автоколивальні системи .....	78
<b>9. Системи Лагранжа .....</b>	<b>81</b>
<b>10. Системи Гамільтона .....</b>	<b>85</b>
<b>11. Грубі системи .....</b>	<b>87</b>
<b>12. Теорія біфуркацій .....</b>	<b>96</b>
12.1. Біфуркація "сідло-вузол". Складка .....	101
12.2. Біфуркація "збірка" .....	103
12.3. Біфуркація народження граничного циклу .....	104
<b>13. Елементарна теорія катастроф .....</b>	<b>107</b>
<b>14. Хаотична динаміка .....</b>	<b>112</b>
14.1. Зсув Бернуллі .....	113
14.2. Логістичне відображення .....	115
14.3. Відображення "тент" .....	116
14.4. Двовимірні відображення .....	117
14.5. Відображення "пекаря" .....	118
<b>15. Система Лоренца .....</b>	<b>121</b>
15.1. Отримання рівнянь Лоренца .....	121
15.2. Дисипативний осцилятор з інерціальною не лінійністю .....	128
15.3. Динаміка системи Лоренца .....	130
<b>Робоча програма навчальної дисципліни .....</b>	<b>140</b>
<b>Програма навчальної дисципліни .....</b>	<b>144</b>
<b>Структура навчальної дисципліни.</b>	
<b>Тематичний план лекцій і семінарських занять .....</b>	<b>146</b>
<b>Література .....</b>	<b>156</b>

Навчальне видання

ХУСАІНОВ Денис Ях'евич  
ШАТИРКО Андрій Володимирович

# ОСНОВИ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ

Посібник для студентів  
спеціальності "Прикладна математика"

Редактор *Н. М. Земляна*  
Технічний редактор *Л. П. Шевченко*

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"



Формат 60×84<sup>1/16</sup>. Ум. друк. арк. 9,3. Наклад 100. Зам. № 217-8076.  
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № СЗ.  
Підписано до друку 28.04.17

Видавець і виготовлювач  
ВПЦ "Київський університет",  
б-р Т. Шевченка 14, м. Київ, 01601  
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28  
e-mail: vpc@univ.kiev.ua  
http: vpc.univ.kiev.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02