

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**Факультет комп'ютерних наук та кібернетики  
Кафедра прикладної статистики**

**«ЗАТВЕРДЖУЮ»**

Заступник декана  
з навчальної роботи

\_\_\_\_\_ Кашпур О. Ф.  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ року

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ  
Математична статистика**

**для студентів**

галузь знань	<b>12 – Інформаційні технології</b>
спеціальність	<b>122 – Комп'ютерні науки</b>
освітній рівень	<b>бакалавр</b>
освітня програма	<b>Комп'ютерні науки</b>
вид дисципліни	<b>обов'язкова</b>

Форма навчання	<b>денна</b>
Навчальний рік	<b>2018/2019</b>
Семестр	<b>4</b>
Кількість кредитів ECTS	<b>4</b>
Мова викладання, навчання та оцінювання	<b>укр.</b>
Форма заключного контролю	<b>іспит</b>

Викладачі: **д.ф.-м.н, проф. Лебедєв Є.О.**

Пролонговано: на 20\_\_/20\_\_ н.р. \_\_\_\_\_(\_\_\_\_\_) «\_\_»\_\_\_\_ 20\_\_р.

на 20\_\_/20\_\_ н.р. \_\_\_\_\_(\_\_\_\_\_) «\_\_»\_\_\_\_ 20\_\_р.

**КИЇВ – 2018**

Розробник: Лебедєв Є.О. докт. фіз.-мат. н., професор,  
професор кафедри Прикладної Статистики

ЗАТВЕРДЖЕНО  
Зав. кафедри Прикладної Статистики

\_\_\_\_\_ (Лебедєв Є.О.)

Протокол № \_\_ від «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

Схвалено науково-методичною комісією факультету  
комп'ютерних наук та кібернетики

Протокол від «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ року №\_\_

Голова науково-методичної комісії \_\_\_\_\_ ( Хусаїнов Д.Я. )  
(підпис)

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ року

**1 Мета дисципліни** – "Математична статистика" є подання в доступній формі основних напрямів сучасної статистичної теорії. При цьому акцент робиться на дослідженні питань оптимальності відповідних статистичних процедур. Значна увага приділяється отриманню навичок творчого застосування отриманих знань до прикладних задач, які потребують статистичного аналізу.

## **2 Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни**

*Знати:* основи теорії ймовірностей, математичного аналізу та алгебри

*Вміти:* застосовувати знання з теорії ймовірностей

*Володіти елементарними навичками:* розв'язувати задачі з теорії ймовірностей

## **3 Анотація навчальної дисципліни**

Дисципліна має такі розділи: основні задачі математичної статистики, ймовірностно-статистична модель, параметричне оцінювання, класифікація оцінок, надійні інтервали, перевірка гіпотез, класифікація випадкових процесів, ланцюги Маркова, системи масового обслуговування. Основним завданням є надати студентам базові знання про статистичну модель експеримента, оволодіти головними методами математичної статистики, розвинути навички застосування отриманих знань до практичних задач, які потребують статистичного аналізу. Дисципліна є обов'язковою. Використовує поняття з теорії ймовірностей, математичного аналізу, дискретної математики та алгебри. Виступає базовою для дисциплін: актуарна математика, економетрика, фінансова математика, економіко-математичне моделювання, методи прийняття рішень. Викладається в 4-му семестрі, обсяг 120 год. (4 кредити ECTS), з них лекції – 28 год., семінари – 28 годин, консультації – 2 год., самостійна робота – 62 год. Передбачено 2 змістових модулі, 2 модульні контрольні роботи та іспит.

## **4 Завдання (навчальні цілі)**

набуття знань, умінь та навичок (компетентностей) відповідно до освітньої кваліфікації бакалавра з комп'ютерних наук. Зокрема, розвивати:

- Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.
- Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.
- Здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово.
- Здатність вчитися й оволодівати сучасними знаннями.
- Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.
- Здатність генерувати нові ідеї (креативність).
- Здатність працювати в команді.
- Здатність бути критичним і самокритичним.
- Здатність оцінювати та забезпечувати якість виконуваних робіт.
- Здатність до математичного та логічного мислення, формулювання та досліджування математичних моделей, зокрема дискретних математичних моделей, обґрунтування вибору методів і підходів для розв'язування теоретичних і прикладних задач у галузі комп'ютерних наук, аналізу та інтерпретування.
- Здатність до виявлення закономірностей випадкових явищ, застосування методів статистичної обробки даних та оцінювання стохастичних процесів реального світу.
- Здатність до інтелектуального багатовимірного аналізу даних та їхньої оперативної аналітичної обробки з візуалізацією результатів аналізу в процесі розв'язування прикладних задач у галузі комп'ютерних наук.

## **5 Результати навчання за дисципліною**

Результат навчання (РН) (1 – знати; 2 – вміти; 3. комунікація; 4. автономність та відповідальність)		Форми викладання та навчання	Методи оцінювання	Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни
Код	Результат навчання			

PH.1	Знати і розуміти основні розділи і задачі математичної статистики	Лекції, семінарські заняття	Модульна контрольна робота (МКР), іспит	40
PH.2	Володіти основними положеннями та методами теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів			
PH.3	Демонструвати навички взаємодії з іншими людьми, уміння працювати в командах	Самостійна робота	МКР, іспит, поточне оцінювання (ПО)	50
PH.4.1	Уміти організувати власну діяльність та одержувати результат у рамках обмеженого часу	Самостійна робота	ПО	10
PH.4.2	Виявляти здатність до самонавчання та продовження професійного розвитку	Самостійна робота	ПО	

## 6 Співвідношення результатів навчання дисципліни з програмними результатами навчання

Результати навчання дисципліни	PH.1	PH.2	PH.4.1	PH.4.2	PH.3
<i>(з опису освітньої програми)</i>					
<b>ПР2.</b> Використовувати сучасний математичний апарат неперервного та дискретного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, в професійній діяльності для розв'язання задач теоретичного та прикладного характеру в процесі проектування та реалізації об'єктів інформатизації за галузями.	+	+			
<b>ПР3.</b> Демонструвати знання закономірностей випадкових явищ, їх властивостей та операцій над ними, моделей випадкових процесів та сучасних програмних середовищ для розв'язування задач статистичної обробки експериментальних даних і побудови прогнозних моделей.		+			

## 7 Схема формування оцінки

### 7.1 Форми оцінювання студентів:

#### - семестрове оцінювання:

Перший семестр

1. Модульна контрольна робота 1 та поточне оцінювання (PH.1, PH.2): 30 балів/15 балів.
2. Модульна контрольна робота 2 та поточне оцінювання (PH.1, PH.2): 30 балів/15 балів.

#### - підсумкове оцінювання (у формі екзамену):

- максимальна кількість балів які можуть бути отримані студентом: 40;
- результати навчання, які оцінюються: PH.1, PH.2, PH.3;
- форма проведення: письмова
- види завдань: два теоретичні питання (40%), три задачі (60%).

Студент допускається до екзамену, якщо в семестрі набрав не менше ніж 20 балів. Для отримання загальної позитивної оцінки з дисципліни оцінка за екзамен має бути не менше 20 балів.

## 7.2 Організація оцінювання

Терміни проведення оцінювання

Модульні контрольні роботи: № 1 – до 7 тижня, № 2 – до 13 тижня.

Студент має право один раз перескласти модульну контрольну роботу з можливістю отримати не більше 80% балів, призначених за роботу. Термін перескладання визначає викладач.

За відсутності студента з поважних причин перездача МКР здійснюється відповідно до «Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу» від 1 жовтня 2010 року.

## 7.3 Шкала відповідності оцінок

<b>Відмінно</b> / Excellent	90-100
<b>Добре</b> / Good	75-89
<b>Задовільно</b> / Satisfactory	60-74
<b>Незадовільно</b> / Fail	0-59

## 8. Структура навчальної дисципліни. Тематичний план лекцій і практичних занять

№ п/п	Назва лекції	Кількість годин		
		лекції	семінари	С/Р
<b>Змістовий модуль 1</b> «Математична статистика»				
1	Ймовірносно-статистична модель. Емпірична функція розподілу	4	4	8
2	Оптимальні оцінки. Нерівність Рао-Крамера	4	4	8
3	Метод максимальної вірогідності	2	2	6
4	Метод моментів	2	2	5
5	Надійні інтервали. Метод центральної статистики	2	2	6
6	Асимптотично надійні інтервали	2	2	5
7	Перевірка гіпотез. Критерії згоди	2	2	6
	<i>Модульна контрольна робота 1</i>		2*	
<b>Змістовий модуль 2</b> «Елементи теорії випадкових процесів»				
8	Класифікація випадкових процесів	4	4	8
9	Ланцюги Маркова	2	2	6
10	Системи масового обслуговування	3	2	4
	<i>Підсумкова модульна контрольна робота</i>	1**		
	<b>ВСЬОГО</b>	<b>28</b>	<b>28</b>	<b>62</b>

\* модульна контрольна робота проводиться викладачем на практичному занятті в обсязі 2 год.

\*\* модульна контрольна робота проводиться лектором на лекції в обсязі 1 год. (півпару).

Загальний обсяг 120 год.<sup>1</sup>, в тому числі:

Лекцій – 28 год.

Семінари – 28 год.

Самостійна робота – 62 год.

Консультації – 2 год.

**Означити кілька понять, зв'язаних з циклами, рекурсією, масивами та вказівниками.**

### ***ПИТАННЯ НА ІСПИТ***

1. Математична статистика. Основні задачі математичної статистики (ОЗМС) на прикладі схеми незалежних випробувань Бернуллі (СНВБ).
2. Вибірковий метод, незалежна вибірка, варіаційний ряд.
3. Емпіричний розподіл. Вибіркова функція розподілу (теорема, приклади).
4. Вибіркові та невибіркові моменти. Описова статистика.
5. Діаграми, гістограми та полігони частот (Приклади). Групована вибірка.
6. Граничні теореми для емпіричної функції розподілу (без доведення).
7. Параметричне оцінювання. Статистика. Приклади.
8. Незміщені та асимптотично незміщені оцінки (вибіркове середнє та вибіркова дисперсія).
9. Поняття параметричної функції. Приклад відсутності незміщеної оцінки парам. функції.
10. Оптимальні оцінки. Приклад.
11. Слушні оцінки. Приклад. Достатня умова слушності.
12. Функція вірогідності, функція вкладу (їхні властивості). Регулярна модель.
13. Функція інформації Фішера (основна та альтернативна формули обчислення). Приклади.
14. Нерівність Крамера-Рао. Ефективні та асимптотично ефективні оцінки.
15. Методи знаходження оцінок: метод моментів. Приклади. Властивості ОММ.
16. Методи знаходження оцінок: метод максимальної вірогідності. Приклади. Властивості ОММВ.
17. Поняття довірчого інтервалу та довірчої імовірності.
18. Метод центральної статистики побудови довірчого інтервалу: алгоритм, приклади.
19. Метод центральної статистики побудови довірчого інтервалу.
20. Довірчі інтервали для параметрів гауссівського розподілу.
21. Метод точкової оцінки побудови довірчого інтервалу (алгоритми для абсолютно неперервної та дискретної моделі). Приклад.
22. Асимптотичні довірчі інтервали.
23. Статистична гіпотеза, статистичний критерій. Основні типи непараметричних гіпотез, приклади. Прості та складні гіпотези.
24. Критерій згоди, критеріальна статистика, критична область, функція потужності критерію. Незміщеність критерію.
25. Критерій Колмогорова перевірки гіпотези про вид розподілу, критеріальна статистика.
26. Критерій Пірсона  $\chi^2$ -квадрат перевірки гіпотези про вид розподілу, критеріальна статистика, приклад.
27. Критерій однорідності Смірнова.
28. Критерій однорідності  $\chi^2$ -квадрат.
29. Критерій незалежності  $\chi^2$ -квадрат, таблиця спряженості двох ознак.
30. Перевірка гіпотези про випадковість.

---

<sup>1</sup> Загальна кількість годин, відведених на дану дисципліну згідно навчального плану.

31. Параметричні гіпотези (прості, складні), довірна та критична область, помилки першого та другого роду. Приклади.
32. Критерій Неймана-Пірсона вибору із двох простих параметричних гіпотез.
33. Метод відношення вірогідностей вибору із двох складних параметричних гіпотез.
34. Ланцюг Маркова (ЛМ), марківська властивість, однорідний ЛМ, матриця перехідних ймовірностей. Стохастична матриця. Приклади.
35. Рівність Маркова-Колмогорова-Чепмена. РМКЧ в матричному вигляді та наслідок з неї.
36. Розподіл ймовірностей ЛМ.
37. Класифікація станів ЛМ.
38. Критерій рекурентності.
39. Теорема солідарності. Приклади її застосування.
40. Критерій рекурентності тривіального блукання на  $Z^1$ .
41. Теорема про розклад множини станів періодичного ЛМ.
42. Граничний, ергодичний та стаціонарний розподіли ЛМ.
43. Ергодичні теореми.
44. ЛМ з неперервним часом (ЛМнч). Однорідні ЛМнч, властивості перехідних ймовірностей. Траєкторії ЛМнч.
45. Стохастично неперервні ЛМнч та теорема про їх інфінітезимальні характеристики. Властивості інфінітезимальних характеристик.
46. Вкладені ЛМ. Перша та друга системи рівнянь Колмогорова (ПСРК та ДСРК) та їхній матричний вид. Системи для безумовних та стаціонарних ймовірностей.
47. Ергодична теорема для ЛМнч.
48. Процеси гібелі та народження (ПГтН). Інфінітезимальна матриця ПГтН та відповідні ПСРК та ДСРК.
49. Система рівнянь для безумовних ймовірностей ПГтН. Стаціонарний розподіл для ПГтН.
50. Системи масового обслуговування типу  $M | M | 1$ .
51. Системи масового обслуговування типу  $M | M | \infty$ .

## **5. Імітувати програму обробки масиву.**

### **9. Рекомендовані джерела**

#### **а) основна:**

1. А.Н. Ширяев „Вероятность”, М. 1989.
2. І. Гіхман, А. Скороход, М. Ядренко "Теорія ймовірностей та математична статистика".
3. А.В. Скороход "Елементи теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів", К. 1975.
4. А. Дороговцев „Теория вероятностей. Сборник задач”, К. 1980.
5. В. Феллер „Введение в теорию вероятностей и её приложения”.
6. Лебедєв Є.О., Шарапов М.М. Курс лекцій з теорії ймовірностей. – К.: Норіта-плюс, 2007. – 168 с.
7. Є.О.Лебедєв, О.А.Чечельницький, М.М.Шарапов, М.С.Братійчук Збірник задач з теорії ймовірностей, КНУ ім. Т. Шевченка, 2006.

#### **б) додаткова:**

8. А.В. Свешников "Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов", М. 1965.
9. Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков, А.М. Зубков „Сборник задач по теории вероятностей”, М. 1980.

10. А.В. Ефимов (ред.) „Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике для ВТУЗов”, М. 1990.
11. Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров „Теория вероятностей. Задачи и упражнения”, М. 1973.
12. И.И. Гихман, А.В. Скороход „Введение в теорию случайных процессов”, М. 1973.
13. А.Д. Вентцель „Курс теории случайных процессов”, М. 1975.
14. Е.И. Гурский „Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике”, Минск, 1984.
15. Г.В. Емельянов, В.П. Скитович „Задачи по теории вероятностей и математической статистике”, М. 1967.
16. Є.О. Лебедєв, Г.В. Лівінська, І.В. Розора, М.М. Шарапов „Математична статистика”, К.: ВПЦ “Київський університет”, 2016.
17. Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев „Математическая статистика”, М. 1984.

## 10. Додаткові ресурси

- Використання онлайн програми для перевірки практичних знань Індекс <http://indexator.pp.ua>
- Використання усіх наявних авторських методичних матеріалів та електронних таблиць на сайті <http://teorver.pp.ua/ukr/ukr.php>

## Типові завдання модульних контрольних робіт

### Модульна контрольна робота № 1

**Задача 1**  $\hat{\theta}_n = \bar{m} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  – оцінка для середнього  $m$  у генеральній сукупності із

скінченою дисперсією  $\sigma^2$ . Довести: а)  $\bar{m}$  консистентна оцінка, б)  $\bar{m}$  незміщена оцінка.

**Задача 2**  $(X_1, \dots, X_n)$  – незалежна вибірка з генеральної сукупності із скінченим математичним сподіванням  $m$  та невідомою дисперсією  $\sigma^2$ . а) Довести, що вибіркова дисперсія

$\hat{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  є зміщеною оцінкою для невідомої дисперсії; б) знайти зсув цієї оцінки;

в) показати, що  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  є незміщеною оцінкою для невідомої дисперсії.

**Задача 3** Знайти оцінки

- а) методом моментів,
- б) методом максимальної вірогідності

для параметрів гауссівського розподілу.

**Задача 4** Знайти оцінку

- а) методом моментів,
- б) методом максимальної вірогідності

для параметра експоненціального розподілу.

**Задача 5** Для перевірки твердження виробника про те, що генератор за зміну споживає у середньому 20 літрів пального, провели 10 випробувань: за 10 змін споживання генератора склали: 19.1, 18.6, 19.1, 18.1, 16.6, 20.1, 19.8, 21.1, 24.4, 21.6. Перевірити твердження виробника при рівні значущості 0.05.

**Задача 6** Монету підкинули 100 раз і при цьому 67 раз випав герб. Перевірити гіпотезу про те, що монета симетрична (при рівні значущості 5%).



## Модульна контрольна робота № 2

**Задача 1** Довести, що у ергодичного марковського ланцюга всі стани поворотні.

**Задача 2** Довести, що випадковий процес з незалежними приростами є марковським.

**Задача 3**  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$  – послідовність незалежних однаково розподілених ( $P\{\xi_i = \pm 1\} = 1/2$ )

випадкових величин. Розглядається нова послідовність випадкових величин  $\eta_n = 1/2 (\xi_n + \xi_{n+1})$ .

Знайти  $p_{jk}(m, n) = P\{\eta_n = k \mid \eta_m = j\}$ . Довести, що  $\{\eta_n \mid n \geq 1\}$  не є ланцюгом Маркова.

**Задача 4** Послідовність  $\{\xi_0, \xi_1, \dots\}$  є ланцюгом Маркова з множиною станів  $E = \{1, 2, 3\}$  та

матрицею ймовірностей переходів за один крок  $P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$  ( $0 < \alpha < 1$ ).

Будується нова послідовність випадкових величин  $\eta_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \xi_n = 1 \text{ чи } 2 \\ 2, & \text{якщо } \xi_n = 3 \end{cases}$ .

Довести, що послідовність  $\{\eta_0, \eta_1, \dots\}$  є ланцюгом Маркова та знайти матрицю ймовірностей переходів за один крок.

**Задача 5**  $\xi_t$  – пуассонівський випадковий процес з параметром  $\lambda$ , тобто  $\xi_0 = 0$ , а  $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$

випадкові величини  $(\xi_{t_1} - \xi_{t_0}), (\xi_{t_2} - \xi_{t_1}), \dots, (\xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}})$  незалежні і кожен приріст  $(\xi_t - \xi_s)$  (для

$0 \leq s \leq t$ ) має розподіл Пуассона з параметром  $\lambda(t-s)$ , тобто

$$P\{\xi_t - \xi_s = i\} = \frac{(\lambda(t-s))^i}{i!} \cdot e^{-\lambda(t-s)}$$

Довести, що пуассонівський процес є марковським. Знайти перехідні ймовірності.

**Задача 6** За інфінітезимальною матрицею  $A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$  знайти матрицю ймовірностей

переходів  $\Pi(t) = \|p_{ij}(t)\|$ .

**Задача 7** Середній час безвідмовної роботи ЕОМ є  $\frac{1}{\lambda}$  (тобто, потік “відмов у роботі” є потік з

параметром  $\lambda$ ). Середній час ремонту ЕОМ є  $\frac{1}{\mu}$  (тобто, потік ремонтних робіт має параметр  $\mu$ ).

Знайти ймовірність того, що в момент  $t$  машина буде працювати, якщо на початку вона працювала.

**Задача 8** Середній час між заявками СМО – 0,5с. Яка ймовірність того, що за 1с прийде 2 заявки?