

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем**

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Заступник декана
з навчальної роботи

Кашпур О.Ф.

«_____» _____ 2017 року

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ
ДИСЦИПЛІНИ**

«Методи негладкої оптимізації»

для студентів

галузь знань 11 «**Математика та статистика**»

спеціальність 113 «**Прикладна математика**»

освітня програма «**Прикладна математика**»

КИЇВ – 2017

Робоча програма **«Методи негладкої оптимізації»**

для студентів галузі знань « Математика та статистика»,

спеціальність 8.04030101 «Прикладна математика»

« ____ » _____ 20__ року – 11 с.

Розробники: *доцент, д.ф.-м.н., доц. Пічкур В.В.*

Робоча програма дисципліни **«Методи негладкої оптимізації»**

затверджена на засіданні кафедри **моделювання складних систем**

Протокол № ____ від “ ____ ” 20__ року

Завідувач кафедри _____

(Гаращенко Ф.Г.)

« ____ » _____ 20__ року

Схвалено науково - методичною комісією факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Протокол №__ від « ____ » _____ 20__ року

Голова науково-методичної комісії _____ (Хусаїнов Д.Я.)

« ____ » _____ 20__ року

© _____, 20__ рік
© _____, 20__ рік
© _____, 20__ рік

ВСТУП

Навчальна дисципліна «**Методи негладкої оптимізації**» є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем «**магістр**» галузі знань 11 «Математика та статистика», спеціальності 113 «Прикладна математика».

Дана дисципліна «**Методи негладкої оптимізації**» є дисципліною вільного вибору студента галузі знань 11 «Математика та статистика».

Викладається у **2** семестрі **1** курсу в обсязі – **90 год.**

(**3 кредити ECTS**) зокрема: *лекцій – 26 год., консультації – 2 год., самостійна робота – 62 год.* У курсі передбачено **2 змістових модуля** та **2 модульних контрольних роботи**. Завершується дисципліна **заліком**.

Мета дисципліни – ознайомлення з сучасним станом розв'язування задач пошуку екстремуму негладких функціоналів.

Завдання – навчити студентів пов'язувати та використовувати чисельні методи негладкої оптимізації, зокрема при розв'язуванні задач оптимального керування та моделювання динамічних систем.

В результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: основи теорії оптимізації недиференційованих функцій, чисельні методи мінімізації опуклих недиференційованих функцій, а також функцій максимуму як при наявності обмежень, так і при відсутності обмежень.

вміти: застосовувати теорію оптимізації недиференційованих функцій, чисельні методи мінімізації опуклих недиференційованих функцій використовувати їх для розв'язування практичних задач.

Місце дисципліни (в структурно-логічній схемі підготовки фахівців відповідного напрямку). Навчальна дисципліна «Методи негладкої оптимізації» є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня „магістр”. Дисципліна пов'язана з такими дисциплінами як «Основи системного аналізу», «Теорія оптимального керування», «Теорія керування системами з розподіленими параметрами», «Моделювання динамічних систем».

Зв'язок з іншими дисциплінами: стандартні курси математичного аналізу, лінійної алгебри, дискретної математик, диференціальних рівнянь, дослідження операцій, чисельних методів, сучасні програмні технології.

Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти.

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою.

Навчальна дисципліна «Методи негладкої оптимізації» складається з двох змістових модулів: ЗМ1 «Основні положення негладкого і опуклого аналізу» (з темою 1 «Узагальнені похідні» та темою 2 «Двоїстість.») та ЗМ2 «Диференціювання негладких функцій» (тема 3 «Узагальнені похідні», тема 4

«Оптимізація негладких функцій»).

Обов'язковим для заліку є впродовж семестру набрати 20 балів.

Оцінювання за формами контролю:

	ЗМ1		ЗМ2	
	<i>Min. – балів</i>	<i>Max – бали</i>	<i>Min. – балів</i>	<i>Max – бали</i>
Усна відповідь	1	3	1	3
Доповнення	0	2	0	2
Модульна контрольна робота	2	10	2	10

Для студентів, які набрали сумарно меншу кількість балів, ніж *критично-розрахунковий мінімум – 20 балів*, для одержання **заліку** обов'язкове повторне прослуховування курсу.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються у відповідності до „Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу” від 1 жовтня 2010 року.

При простому розрахунку отримаємо:

	ЗМ1	ЗМ2	Залік	Підсумкова оцінка
<i>Мінімум</i>	10	10	15	60
Максимум	30	30	40	100

При цьому, кількість балів:

- **0-34** відповідає оцінці «незадовільно» з обов'язковим повторним вивченням дисципліни;
- **35-59** відповідає оцінці «незадовільно» з можливістю повторного складання;
- **60-64** відповідає оцінці «задовільно» («достатньо»);
- **65-74** відповідає оцінці «задовільно»;
- **75 - 84** відповідає оцінці «добре»;
- **85 - 89** відповідає оцінці «добре» («дуже добре»);
- **90 - 100** відповідає оцінці «відмінно».

Шкала відповідності (за умови заліку)

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою
60 – 100	Зараховано
0 – 59	не зараховано

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістовий модуль 1

«Основні положення негладкого і опуклого аналізу»

Тема 1. Геометрія опуклих множин. (18 год.)

Опуклі оболонки. Теорема Каратеодорі. Теорема віддільності. Функціонал Мінковського. Теорема Хана-Банаха в топологічному і нормованому просторах..

Тема 2. Двоїстість. – (28 год.)

Конус, його властивості. Опуклі конуси. Конічна оболонка. Функція Мінковського. Опорний функціонал. Двоїстість Мінковського. Поляра. Теорема Фенхеля-Моро. Квазіопуклі, псевдоопуклі функції. Локально-ліпшицеві функції. Верхня апроксимація. Конус Булігана. Характеристичні ознаки дотичних конусів. Шатро. Нормальний конус.

Змістовий модуль 2

«Диференціювання негладких функцій.»

Тема 3. Узагальнені похідні. – (21 год.)

Похідна за напрямком і її узагальнення. Поняття субградієнту. Його геометричний зміст. Субдиференціал. Похідна Кларка. Властивості. Дотичний конус Кларка. Поняття квазіградієнту. Квазідиференціал. Кодиференційовані функції та їхні властивості. Узагальнена похідна Шора та Мішеля-Пено.

Тема 4. Оптимізація негладких функцій. – (23 год.)

Властивості функції максимуму. Мінімаксні оптимізаційні задачі. Властивості функції максимуму. Теорема фон Неймана. Метод Келлі. ϵ -метод Келлі. Метод негладких штрафних функцій.

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
 тематичний план практичних занять та самостійної роботи

№ п/п	Назва практичного заняття	Кількість годин		
		лекції	консультації	с/р
Змістовий модуль 1 «Основні положення негладкого і опуклого аналізу.»				
1	Приклади негладких екстремальних задач.	2		4
2	Основні положення опуклого аналізу.	2		4
3	Теорема Хана-Банаха.	2		4
4	Конуси. Конічна оболонка.	2		5
5	Двоїстість. Поляра. Спряжені функції. Перетворення Юнга-Фенхеля.	2		5
6	Узагальнення поняття опуклої функції. Локально-ліпшецеві функції.	2		5
7	Дотичні конуси. Нормальний конус.	1		5
	Модульна контрольна робота	1		

Змістовий модуль 2 «Диференціювання негладких функцій»				
8	Узагальнені похідні за напрямком: похідна Фреше, Діні, Адамара.	2		5
9	Субдиференціал, його властивості.	2		5
10	Субдиференціал Кларка і його властивості. Дотичний конус Кларка.	2		5
11	Дискретний і неперервний мінімакс.	2		5
12	Чисельні методи розв'язування мінімаксних задач без обмежень.	2		5
13	Методи розв'язування мінімаксних задач оптимального керування.	1		5
	Модульна контрольна робота	1		
	Консультація		2	
ВСЬОГО		26	2	62

Загальний обсяг - 90 год., в тому числі:

Лекції – 26 год.

Консультації – 2 год.

Самостійна робота – 62 год.

Змістовий модуль 1. Основні положення негладкого і опуклого аналізу.

Тема 1. Геометрія опуклих множин. – (18 год.)

Лекція 1. Приклади негладких екстремальних задач. – (2 год.)

Приклади теорії оптимізації, оптимального керування і теорії ігор, які приводять до розв'язування негладких екстремальних задач [2, 8, 10].

Завдання для самостійної роботи. – (4 год.)

Ознайомлення з історією дослідження негладких екстремальних задач на кафедрі моделювання складних систем, на факультеті кібернетики, в Інституті кібернетики НАН України [2, 4].

Лекція 2. Основні положення опуклого аналізу. – (2 год.)

Опуклі множини. Опуклі оболонки. Теорема Каратеодорі. Опуклі функції [1, 7].

Завдання для самостійної роботи. – (4 год.)

Властивості опуклої оболонки. Обоуклення [3, 4].

Лекція 3. Теорема Хана-Банаха. – (2 год.)

Функціонал Мінковського. Теорема Хана-Банаха в топологічному і нормованому просторах. Віддільність [3, 4].

Завдання для самостійної роботи. – (4 год.)

Обґрунтування властивостей функціоналу Мінковського [3, 4].

Тема 2. Двоїстість. – (28 год.)

Лекція 4. Конуси. Конічна оболонка. – (2 год.)

Конус, його властивості. Опуклі конуси. Конічна оболонка. Зв'язок з опуклою оболонкою [3, 4].

Завдання для самостійної роботи. – (5 год.)

Бар'єрний конус [3, 4].

Лекція 5. Двоїстість. Поляра. Спряжені функції. Перетворення Юнга-Фенхеля. – (2 год.)

Функція Мінковського. Опорний функціонал. Двоїстість Мінковського. Поляра [13, 14].

Завдання для самостійної роботи. – (5 год.)

Властивості опорної функції [3, 4].

Лекція 6. Узагальнення поняття опуклої функції. Локально-ліпшецеві функції. – (2 год.)

Квазіопуклі, псевдоопуклі функції. Локально-ліпшецеві функції [10].

Завдання для самостійної роботи. – (5 год.)

Властивості надграфіка функції [3, 4].

Лекція 7. Дотичні конуси. Нормальний конус. – (2 год.)

Верхня апроксимація. Конус Булігана. Характеристичні ознаки дотичних конусів. Шатро. Нормальний конус. Приклади [1, 4].

Завдання для самостійної роботи. – (5 год.)

Узагальнена теорема Люстерника [1]. Підготовка до модульної контрольної роботи.

Контрольні запитання до ЗМ1.

1. Опуклі оболонки. Теорема Каратеодорі. Опуклі функції.
2. Теорема Хана-Банаха. Функціонал Мінковського. Віддільність .
3. Конус, його властивості. Опуклі конуси. Конічна оболонка. Зв'язок з опуклою оболонкою.
4. Опорний функціонал.
5. Двоїстість Мінковського. Поляра.
6. Спряжені функції.
7. Перетворення Юнга-Фенхеля. Теорема Фенхеля-Моро.
8. Квазіопуклі, псевдоопуклі функції. Локально-ліпшицеві функції.
9. Дотичні конуси. Конус Булігана. Характеристичні ознаки дотичних конусів.
10. Шатро. Нормальний конус.

Контрольні завдання до ЗМ1.

1. Сформулювати теорему Хана-Банаха.
2. Побудувати приклади замкнених опуклих функцій
3. Дати означення дотичного конуса Булігана.

Змістовий модуль 2. Диференціювання негладких функцій.

Тема 3. Узагальнені похідні. – (20 год.)

Лекція 8. Узагальнені похідні за напрямком: похідна Фреше, Діні, Адамара. – (2 год.)

Похідна за напрямком і її узагальнення. Необхідні умови екстремуму. Зв'язок з дотичними конусами [10] .

Завдання для самостійної роботи. – (4 год.)

Властивості першої варіації функціоналу. Похідна Фреше і Гато [11].

Лекція 9. Субдиференціал, його властивості. – (2 год.)

Поняття субградієнту. Його геометричний зміст. Субдиференціал. Властивості. Приклади [1, 7] .

Завдання для самостійної роботи. – (5 год.)

Алгебраїчні властивості субдиференціалу [1,7].

Лекція 10. Субдиференціал Кларка і його властивості. Дотичний конус Кларка. – (2 год.)

Похідна Кларка. Властивості. Дотичний конус Кларка. Приклади [8, 10, 14].

Завдання для самостійної роботи. – (5 год.)

Алгебраїчні властивості похідної Кларка [8, 10].

Тема 4. Оптимізація негладких функцій. – (28 год.)

Лекція 11. Дискретний і неперервний мінімакс. – (2 год.)

Властивості функції максимуму. Мінімаксні оптимізаційні задачі. Властивості функції максимуму. Теорема фон Неймана [5].

Завдання для самостійної роботи. – (5 год.)

Теорема Ремеза [5].

Лекція 12. Чисельні методи розв'язування мінімаксних задач без обмежень. – (2 год.)

Метод Келлі. ε -метод Келлі [6,9].

Завдання для самостійної роботи. – (5 год.)

Умови збіжності методів Келлі [6].

Лекція 13. Чисельні методи розв'язування мінімаксних задач з обмеженнями. – (2 год.)

Метод негладких штрафних функцій [6, 9].

Завдання для самостійної роботи. – (5 год.)

Умови збіжності чисельних методів для розв'язування мінімаксних задач з обмеженнями [6, 9].

Лекція 14. Методи розв'язування мінімаксних задач оптимального керування. – (2 год.)

Узагальнення принципу максимуму. Голчаті варіації. Пакети голчатих варіацій [10].

Завдання для самостійної роботи. – (5 год.)

Підготовка до модульної контрольної роботи.

Консультація. – (2 год.)

Контрольні запитання до ЗМ2.

1. Похідні Фреше, Діні, Адамара.
2. Субдиференціал, його властивості.
3. Субдиференціал Кларка.
4. Дотичний конус Кларка, його властивості.
5. Властивості квазідиференційовних функцій.
6. Основні формули квазідиференційовного числення.
7. Кодиференціальне числення.
8. Похідна Шора і її використання при побудові методів оптимізації.
Похідна Мішеля-Пено.
9. Функції максимуму, їхні властивості. Похідна за напрямком від функції максимуму.
10. Теорема фон Неймана.
11. Теорема Ремеза.
12. Методи Келлі і негладких штрафних функцій.
13. Узагальнення принципу максимуму для задач з функціоналом типу максимуму.

Контрольні завдання до ЗМ2

1. Навести приклади знаходження субдиференціалу.
2. Сформулювати означення похідної Кларка.
3. Записати ітераційну процедуру субградієнтного спуску.

Рекомендована література

Основна

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
2. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. —К.: Київський університет. -2008.
3. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. - М.: Наука, 1990. - 431 с.
4. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. — М.: Наука, 1988. — 384с.
5. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. -М.: Наука, 1972. - 368 с.
6. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1968.
7. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. - М.: Наука, 1974.
8. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988. — 280с.
9. Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.И. Методы невыпуклой оптимизации. -М.: Наука, 1987.
10. Моклячук М.П. Негладкий аналіз та оптимізація. К.: Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, 2008.

Додаткова

1. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. — К.: Либідь, 1994
2. Негладкие задачи теории оптимизации и управления / Демьянов В.Ф., Виноградова Т.К., Никулина В.М. и др. — Л., 1982.
3. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи, - М.: Наука, 1980.
4. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. - М.: Физматлит, 2004.
5. Федоров В.В. Численные методы максимина. — М.: Наука, 1979.
6. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
7. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их

приложение. — К.: Наукова думка, 1979.

Перелік запитань на залік

1. Опуклі оболонки. Теорема Каратеодорі. Опуклі функції.
2. Теорема Хана-Банаха. Функціонал Мінковського. Віддільність .
3. Конус, його властивості. Опуклі конуси. Конічна оболонка. Зв'язок з опуклою оболонкою.
4. Опорний функціонал.
5. Двоїстість Мінковського. Поляра.
6. Спряжені функції.
7. Перетворення Юнга-Фенхеля. Теорема Фенхеля-Моро.
8. Квазіопуклі, псевдоопуклі функції. Локально-ліпшицеві функції.
9. Дотичні конуси. Конус Булігана. Характеристичні ознаки дотичних конусів.
10. Шатро. Нормальний конус.
11. Похідні Фреше, Діні, Адамара.
12. Субдиференціал, його властивості.
13. Поняття ϵ -субградієнту.
14. Субдиференціал Кларка. Дотичний конус Кларка, його властивості.
15. Похідна Шора і її використання при побудові методів оптимізації. Похідна Мішеля-Пено.
16. Похідна за напрямком від функції максимуму.
17. Методи Келлі і негладких штрафних функцій.

Завдання
для самостійної роботи
з елементами дистанційного навчання
з дисципліни «Методи негладкої оптимізації»
на період з 24 січня до 28 лютого 2018 р.
для студентів 1 курсу магістратури,
галузі знань « Математика та статистика»,
спеціальність 8.04030101 «Прикладна математика»

викладач-лектор: д.ф.-м.н., доц. Пічкур В. В. (електронна пошта – vpichkur@gmail.com)

Для самостійного опанування студентами у період з 24.01 до 28.02.18 р. виносяться наступні теми, передбачені робочою програмою навчальної дисципліни за такою тематикою: **Геометрія опуклих множин.**

Тема 1. Опуклі множини. Топологічні властивості.

Тема 2. Опукла оболонка множини.

Тема 3. Крайні точки опуклих множин. Відносна внутрішність.

Тема 4. Теореми про віддільність. Теорема Хана-Банаха.

Опанування тем відбувається шляхом вивчення студентами наступних питань, винесених на самостійну роботу:

Тема 1. Опуклі множини. Властивості границі, внутрішніх точок.

Тема 2. Опукла оболонка множини. Лема Каратеодорі. Властивості опуклої оболонки. Методи побудови опуклої оболонки.

Тема 3. Крайні точки опуклих множин. Лема Мінковського. Відносна внутрішність. Основні властивості відносної внутрішності.

Тема 4. Теореми про віддільність точки від множини. Теореми про віддільність множини від множини. Функція Мінковського. Теорема Хана-Банаха.

Завдання: підготувати реферативну роботу в електронній формі, в якій висвітлити питання згідно з зазначеними темами. Протягом підготовки реферативної роботи викладачу на електронну скриньку vpichkur@gmail.com вислати відповіді на такі тестові запитання:

1. Означення опуклих множин. Приклади. Геометричний зміст.
2. Властивості опуклої комбінації точок.
3. Властивості внутрішності і границі опуклої множини.
4. Означення опуклої оболонки. Зміст леми Каратеодорі.
5. Алгоритм побудови опуклої оболонки на площині.
6. Означення крайньої точки. Багатокутники. Симплекси.
7. Лема Мінковського і її геометричний зміст.
8. Означення відносної внутрішності і її властивості.
9. Поняття віддільних множин. Опорна гіперплощина.

10. Геометричний зміст теорем віддільності.

Підготовлену реферативну роботу необхідно надіслати на електронну пошту vrichkur@gmail.com не пізніше 20 лютого 2018 р.

**Список основної рекомендованої літератури для виконання
самостійної роботи:**

1. Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Вступ до аналізу та оптимізації структурно заданих систем -- Київ: Видавничо-поліграфічний центр „Київський університет”, 2003. - 133 с.
2. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. - М.: Наука, 1980. - 320 с.
3. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. Монографія: –К.: ВПЦ "Київський університет" , 2008. – 373 с.